

Л. Г. ДМИТРИЕВ, А. В. КАСИЛОВ

ВАНТОВЫЕ ПОКРЫТИЯ

(Расчет и конструирование)

КОНТРОЛЬНЫЙ
ЭКЗЕМПЛЯР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «БУДІВЕЛЬНИК»

КИЕВ — 1968

15238

В книге изложены основные принципы расчета и конструирования вантовых покрытий, образованных системой гибких нитей и жестким опорным контуром.

Методика расчета вантовых покрытий основана на применении современных электронных цифровых вычислительных машин. Программы расчета покрытий, изложенные на международном алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 и в кодах ЭВМ, могут быть использованы в практике проектных организаций.

Комментарии к программам делают их доступными для инженеров, не являющихся специалистами в области механизированных способов расчета.

Методы расчета иллюстрированы числовыми примерами, описан опыт проектирования и строительства вантовых систем в СССР и за рубежом.

Книга рассчитана на инженеров-проектировщиков, студентов строительных вузов, а также работников научно-исследовательских организаций. Таблиц 10, рисунков 74, библиография из 62 позиций.

УДК 624.073.7

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей работе рассматриваются вантовые покрытия, образованные в пролете системой пологих гибких нитей и жестким опорным контуром. Для этой широко распространенной группы висячих покрытий излагаются все основные вопросы, связанные с их проектированием.

Предлагаемые методы статического расчета ориентированы на применение ЭВМ, многие конструктивные схемы и решения узлов являются результатом исследовательских и проектных работ авторов, проводимых в Киевском зональном научно-исследовательском и проектно-институте типового и экспериментального проектирования жилых и общественных зданий.

Работа состоит из семи глав.

В первой главе на основе предлагаемой классификации рассматриваются возможные конструктивные схемы покрытий, их свойства и особенности. Приводятся общие принципы проектирования и обеспечения предварительного натяжения вант. Некоторые схемы являются оригинальными и характеризуют общую тенденцию развития вантовых покрытий.

Во второй главе освещаются статические свойства вантовых систем, характер их напряженно-деформированного состояния. Для каждой группы вантовых систем приводятся уравнения, описывающие их напряженно-деформированное состояние, причем большинство расчетных схем рассматриваются как континуальная и шарнирностержневая (дискретная) системы.

В третьей главе приводятся методы решения нелинейных уравнений напряженно-деформированного состояния вантовых систем, классифицируемые относительно количества нелинейных параметров в системе: с одним или двумя нелинейными параметрами — решения в замкнутой форме; со многими нелинейными параметрами — методы многоступенчатого нагружения и приведения нагрузки к равновесной. Все рассматриваемые методы иллюстрируются численными примерами, решенными вручную. Учитывая, что в практике проектирования расчет реальных вантовых систем производится на ЭВМ, расчет вручную может быть применен для систем с небольшим количеством параметров. В заключении главы дано решение вантовых систем с учетом податливости бортового элемента и соображения по расчету оптимальных вантовых систем.

Четвертая глава содержит общие положения программирования расчета вантовых систем на ЭВМ и программы расчета, изложенные на языке АЛГОЛ-60. Приведенные программы можно рассматривать как развернутую форму записи расчетных формул и зависимостей.

Пятая глава посвящена вопросам динамического расчета вантовых покрытий в линейной и нелинейной постановках. Предлагаемые методы базируются на классических теоремах теории нелинейных колебаний, позволяющих искать периодическое решение в виде тригонометрических рядов. Приводятся численные примеры.

В шестой главе даны сведения о материалах для вантовых покрытий и рекомендации по их выбору. Особое внимание уделено анализу конструктивных решений концевых креплений вант, узлов примыкания вант к бортовому элементу и узлов пересечения вант в пролете. Большинство из приведенных решений нашли применение в реальных объектах.

В седьмой главе рассматриваются примеры решения вантовых покрытий, взятые из практики проектирования и строительства в СССР и за рубежом. Часть решений отражает работы КиевЗНИИЭП.

§ 1. Основные понятия и определения

Покрытия, у которых основная несущая конструкция, перекрывающая пролет, работает на растяжение, называют *в и с я ч и м и*.

Следует заметить, что многообразие висячих покрытий не дает возможности выбрать единый определяющий критерий, в равной степени характеризующий все покрытия. Составными частями почти любого висячего покрытия являются собственно покрытие или пролетная часть и опорный контур, воспринимающий реакции от пролетной части.

В зависимости от конструктивных и статических особенностей схемы висячие покрытия можно разделить на *вантовые, висячие оболочки, системы комбинированные и с внешними тросами*.

Покрытия, пролетная часть которых образована сетью несущих гибких нитей* (вант) с последующей укладкой на нее ограждающих элементов без обеспечения совместной работы их между собой и с опорным контуром, называют *вантовыми*.

Они являются наиболее характерными представителями висячих покрытий и по существу занимают промежуточное положение между чисто висячими и традиционными схемами покрытий.

В вантовых покрытиях чаще всего применяют гибкие нити в виде элементов с пренебрежимо малой жесткостью на изгиб и кручение, с равномерным распределением напряжений растяжения в сечениях, нормальных к их продольным осям.

Вантовые покрытия, как и все висячие, являются распорными. Опорный контур их (бортовой элемент) в виде замкнутого кольца, квадрата и т. д. или отдельных разомкнутых элементов воспринимает распоры чаще всего в уровне покрытия и конструируется из жестких элементов, способных работать на сжатие, изгиб или кручение. Восприятие распора от пролетной части покрытия также возможно при помощи оттяжек, заанкеренных в грунт, или контрфорс. Иногда распор воспринимается так называемым гибким контуром, где отсутствуют напряжения изгиба и кручения.

К вантовым покрытиям можно отнести так называемые тканевые оболочки из хлопчатобумажных и синтетических материалов. Ткань,

* В механике нитью называют материальную линию, которая под действием внешних сил может принимать любую форму в пространстве [50].

представляющая собой сеть, образованную двумя семействами взаимно пересекающихся гибких нитей, при значительном увеличении количества нитей и соответствующем уменьшении расстояния между ними, является ограждающей и несущей конструкцией и отличается от обычных мембран отсутствием касательных напряжений.

Вантовые покрытия могут быть использованы как промежуточный этап при строительстве так называемых *висячих оболочек*, ког-

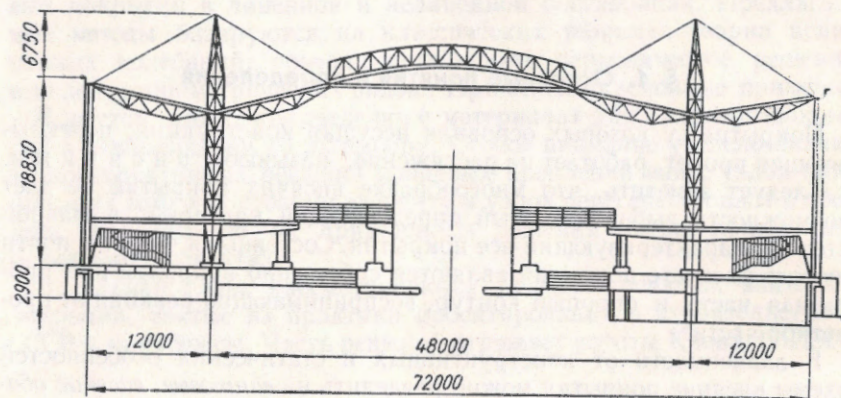


Рис. 1.1. Подвесное покрытие павильона СССР на Всемирной выставке в Брюсселе.

да на натянутую сеть укладывают железобетонные или армоцементные плиты с последующим омоноличиванием швов вместе с вантами. В таком случае ванты являются основной арматурой висячей оболочки, а контур вантовой сети служит в дальнейшем в качестве бортового элемента оболочки. Возможно также образование висячих оболочек путем укладки монолитного железобетона по вантовой сети.

Ограждающие конструкции и бортовой элемент висячих оболочек связаны совместной работой и представляют собой жесткие пространственные системы, способные воспринимать значительные эксплуатационные нагрузки, в том числе и неравномерные.

Покрытия, пролетная часть которых состоит из гибких вант и жестких элементов, работающих на изгиб, называют *комбинированными* висячими. Жесткие элементы в комбинированных покрытиях способствуют распределению сосредоточенных и неравномерных нагрузок на значительное количество несущих гибких вант.

Существуют также висячие покрытия с *внешними тросами* (подвесные покрытия), образуемые жесткой пролетной конструкцией, подвешенной к вантам, закрепленным на стойках-пилонах. Покрытия с внешними тросами, схемы которых по сути заимствованы из практики мостостроения, имеют простую конструкцию, однако ухудшают внешний облик здания и во многом ограничивают планировочные решения.

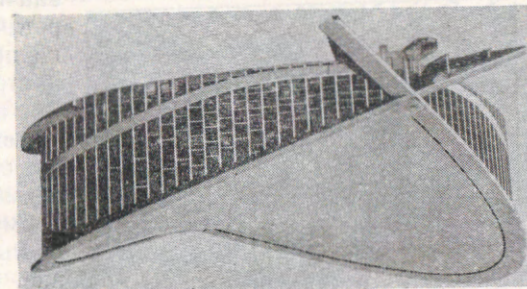
Среди разнообразных конструктивных схем висячих покрытий наибольший интерес с инженерной точки зрения представляют вантовые покрытия на жестком опорном контуре с пролетной частью в виде различных систем вантовых сетей.

Гибкая нить как элемент строительных конструкций привлекала внимание инженеров и ученых с давних времен [50]. Теорией веревочного многоугольника, разработанной на основе изучения свойств гибкой нити, и применением этой теории к расчету висячих мостов занимались еще Вариньон, Ляме, Клайперон, Навье и другие. Как элемент покрытий гибкая нить применяется сравнительно недавно. Первыми вантовыми покрытиями вполне совершенных форм следует считать покрытия павильонов Всероссийской выставки в Нижнем Новгороде, запроектированных и осуществленных в 1896 г. выдающимся инженером и ученым В. Г. Шуховым (рис. 1.3).

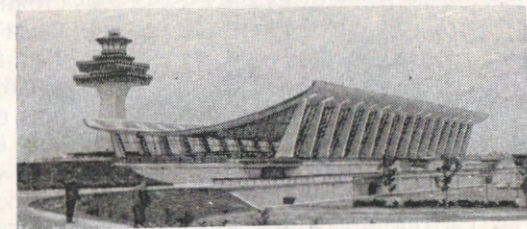
Долгое время строители опасались применять покрытия, несущая конструкция которых выполнялась из гибких нитей. Причина заключалась в недостаточной изученности свойств таких покрытий и в отсутствии методов расчета, проверенных практикой. К первым исследованиям в этой области относятся работы Г. Маркуса [30] и А. П. Синицина [42], в которых сетки различных структур трактуются как дискретный аналог мембран.

В последние 10—15 лет появилось большое количество работ, посвященных вопросам расчета вантовых покрытий. Особое внимание было уделено теории расчета систем из гибких нитей [5, 6, 19, 20, 24—26, 29, 31, 32, 37, 39, 40] и расчету отдельных элементов висячих покрытий [3, 4, 13, 18, 22, 27, 33, 34, 35, 41, 44, 49].

Из зарубежных представляют интерес работы Х. К. Банделя [51], В. Корнеллиуса [52], Р. С. Ривлина [53], Ф. К. Шлейера [54], Эрас и Эльце [55], Д. Яверта [56], О. Фрея [48], З. Сobotки [45].



а



б

Рис. 1.2. Висячие покрытия (США): а — Ралей-арена; б — аэропорт в Чантили.

Вопросы расчета и проектирования вантовых покрытий также освещались в работах авторов [7—11, 15—17].

Основное преимущество вантовых покрытий заключается в их экономичности, получаемой за счет более целесообразного использования затраченного материала, в том числе высокопрочного. С увеличением перекрываемого пролета экономичность вантовых покрытий

значительно возрастает. Теоретические расчеты и примеры из практики проектирования и строительства показывают, что вантовые покрытия дают возможность перекрывать рекордно большие пролеты без промежуточных опор. Зная форму провисания и прочность материала на растяжение, нетрудно подсчитать теоретически возможное расстояние между опорными точками вантового покрытия. Так, например, максимальный пролет вантового покрытия при применении высокопрочной стали может достигнуть 36,1 км [45].

Достоинством вантовых покрытий является их технологичность и возможность монтажа без лесов. При по-

следующем превращении вантового покрытия в висячую оболочку омоноличивание швов производится в опалубке, подвешиваемой к плитам ограждения или вантам.

Обладая относительно небольшой стрелой подъема или провисания (в пределах $1/20$ — $1/25$ пролета), вантовые покрытия обеспечивают наименьшую строительную высоту здания, уменьшают внутренний объем и расходы на системы отопления и эксплуатацию здания.

Вантовые покрытия, обладающие большими возможностями формообразования, предопределяют архитектурную выразительность здания.

Павильоны Всемирной выставки в Брюсселе, спортивные комплексы Олимпийских игр в Токио, Скво-Велли, Гренобле характеризуют возможности вантовых покрытий.

Существенным недостатком вантовых покрытий является их большая деформативность, связанная с тем, что ванты могут изменять свою начальную геометрическую форму в зависимости от вида внешней нагрузки. Возникающие при этом перемещения в отличие от упругих, носят так называемый кинематический характер и могут

достигать больших величин. Так, при действии сосредоточенной силы форма нити получает значительные отклонения от первоначальной (рис. 1.4). Если такую же сосредоточенную силу прикладывать к нити, предварительно загруженной равномерно распределенной нагрузкой, отклонение от первоначальной формы уменьшится, так как нить под действием нагрузки принимает форму соответствующей веревочной кривой. Если одна из нагрузок (в данном случае, постоянная распределенная) преобладает, то отклонение от первоначальной соответствующей ей формы при действии других нагрузок будет незначительным.

Таким образом, уменьшить кинематические перемещения можно при помощи постоянной нагрузки, создаваемой увеличенным собственным весом или усилиями предварительного напряжения (замена одной нити двумя, имеющими кривизну разных знаков; одна нить является несущей, а другая — натягающей).

В вантовом покрытии седловидной формы натягающие ванты создают дополнительную постоянную нагрузку для несущих вант, что способствует уменьшению деформативности покрытия в целом при действии неравномерных нагрузок. Каждая нить такой сети является пригруженной и поддерживаемой другими нитями, чем одновременно обеспечивается пространственная работа.

Таким образом, сравнительно большая деформативность вантовых покрытий может быть в значительной мере ликвидирована современными методами предварительного напряжения. В этом смысле недостаток может рассматриваться как особенность вантовых покрытий.

§ 2. Типы вантовых покрытий. Их свойства и особенности

Рассмотрим типы вантовых покрытий, одновременно классифицируя их по группам (рис. 1.5). При этом будем исходить из положения, что покрытие состоит из пролетной части и опорного контура, рассматриваемых во взаимосвязи. Основная задача в проектировании вантовых покрытий состоит в создании удовлетворительной поверхности и соответствующих бортовых конструкций. При таком

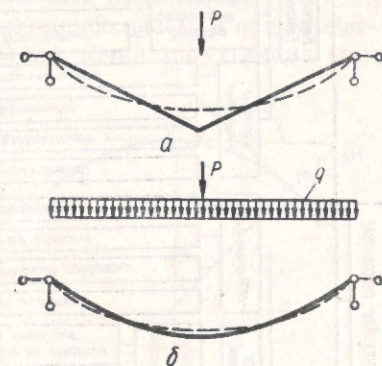
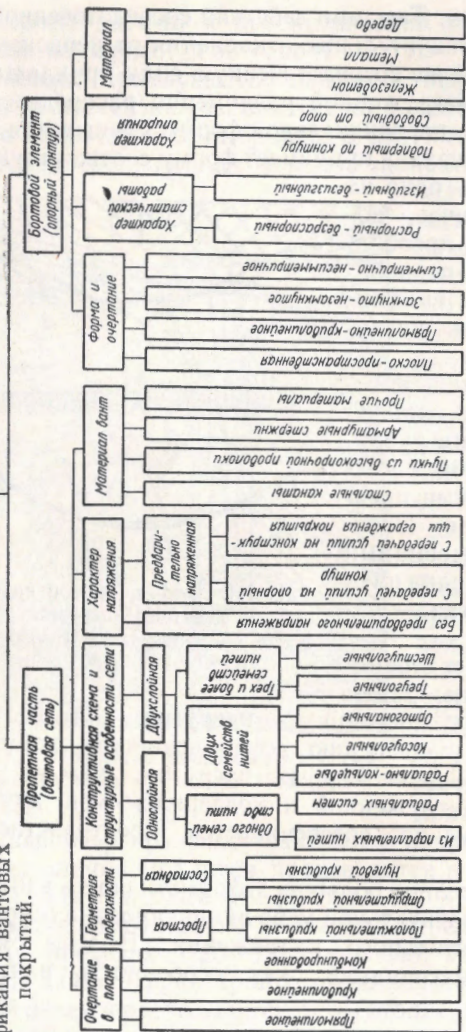


Рис. 1.4. Форма гибкой нити при действии нагрузки:
а — сосредоточенной; б — сосредоточенной и распределенной.

Рис. 1.5. Классификация вантовых покрытий.



поверхностей являются понятия о кривизнах кривой и поверхности. Кривизна кривой в точке M (рис. 1.6) определяется как предел отношения угла между двумя соседними касательными, проведенными в двух смежных точках, к длине дуги между этими точками при стремлении ее к нулю, т. е.

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}.$$

Величину $\rho = \frac{1}{k}$, обратную кривизне, называют радиусом кривизны нити в той же точке. Кривизна кривой в каждой точке равна

подходе очертание покрытия в плане является производным и не всегда удовлетворяет планировочное решение. Процесс отыскания рациональной поверхности и соответствующего очертания опорного контура покрытия при исходном плане в общем случае затруднителен.

Первая группа признаков классификации пролетной части отражает форму покрытия в плане. План может быть очерчен прямыми, кривыми или комбинацией прямых и кривых линий. Начиная с простейших геометрических фигур (квадрат, прямоугольник, круг, овал и т. д.), план покрытия иногда имеет более сложное комбинированное очертание, найденное из условия функционального назначения здания.

Вторая группа признаков отражает геометрию поверхности, играющую важную роль в теории расчета вантовых сетей.

Одним из основных понятий в теории по-

кривизне соприкасающейся окружности и обратна величине радиуса этой окружности. Рассмотренную кривизну называют нормальной или первой в отличие от кривизны кручения, называемой второй.

Геометрические свойства поверхностей можно исследовать путем изучения кривизны их линий. В теории поверхностей доказывается, что в любой точке поверхности существует только два взаимно перпендикулярных направления, в которых нормальная кривизна в общем случае достигает соответственно наибольшего и наименьшего значений [14]. Исключение составляют точки закругления (так называемые омбилические), в которых кривизна остается одинаковой по всем направлениям и любые из этих направлений можно принять за главные, например, все точки сферической поверхности являются омбилическими.

Когда говорится о линиях главных кривизн поверхности k_1 и k_2 , имеются в виду такие линии, направление которых в каждой точке совпадает с главными направлениями поверхности. Произведение главных кривизн в данной точке наиболее полно характеризует геометрию поверхности и называется гауссовой или полной кривизной поверхности, т. е.

$$K = k_1 k_2.$$

Иногда при исследовании поверхностей пользуются понятием так называемой средней кривизны, которая определяется как полусумма главных кривизн в данной точке поверхности

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Для характеристики поверхности вантовых покрытий пользуемся, в основном, понятием гауссовой кривизны.

При $K > 0$ и $K < 0$ точки поверхностей являются соответственно эллиптическими и гиперболическими и принадлежат к поверхности положительной и отрицательной гауссовой кривизны. Во втором случае центры кривизн нормальных сечений, проходящих через данную точку, лежат на нормали с разных сторон поверхности.

Точки поверхности, в которых $K = 0$, являются в общем случае параболическими и принадлежат к поверхности нулевой гауссовой кривизны. Одно из главных направлений таких поверхностей не имеет кривизны, т. е. является прямолинейным: конус, цилиндр или их вырождение — плоскость.

Поверхности покрытия, имеющие одинаковые геометрические свойства на любом участке, условимся называть простыми поверх-

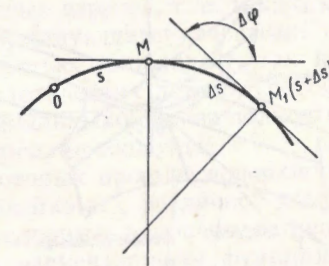


Рис. 1.6. К определению кривизны кривой.

ностями. Часто простые поверхности можно описать элементарными функциями.

Рассмотрим некоторые из них, наиболее часто используемые в вантовых покрытиях.

Из поверхностей переноса наибольший интерес представляют линейчатые поверхности торса (цилиндрические, конические), гиперболический (одна из разновидностей так называемых косых линейчатых поверхностей — коноидов) и эллиптический параболоиды.

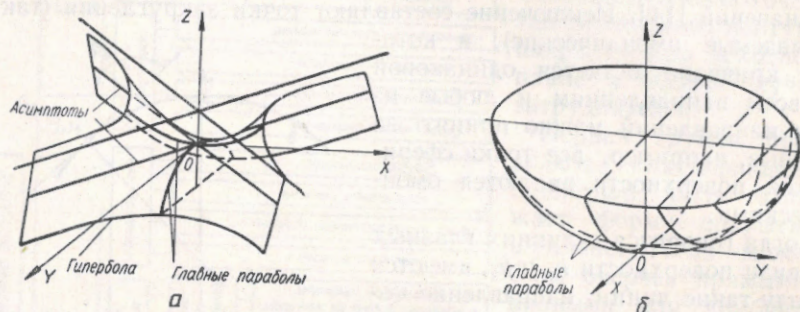


Рис. 1.7. Поверхности вантовых покрытий в виде гиперболического (а) и эллиптического (б) параболоида.

Являясь поверхностью отрицательной гауссовой кривизны гиперболический параболоид образовывается параллельным перемещением образующей параболы вдоль направляющей (рис. 1.7). Поверхность гиперболического параболоида в пересечении с горизонтальными плоскостями $z = \text{const}$ образует два семейства прямых линий, следовательно, она является линейчатой и может быть образована движением прямых линий, соответственно параллельным асимптотам заданной горизонтальной гиперболы. Однако линейчатость гиперболического параболоида косая и не дает возможности ему разворачиваться на плоскость.

Минимальные поверхности гиперболического параболоида получают во всех случаях, когда средняя кривизны ее H равна нулю (главные кривизны k_1 и k_2 отличаются только знаком). Асимптотические линии — линейчатые образующие в них взаимно перпендикулярны, так как являются биссектрисами прямых углов между главными направлениями. Исходя из требования обеспечения необходимой жесткости и наименьших усилий рационально направлять нити по линиям главных кривизн поверхности. При этом достаточную жесткость можно достичь небольшими усилиями за счет натяжения вант одного направления (предварительное напряжение достигается здесь взаимным воздействием пересекающихся нитей). При применении сеток с нитями, направленными по линейчатому образующим, усилия предварительного натяжения необходимо прикладывать ко всем нитям, так как они между собой в работе не связаны.

Такая сеть не имеет большой жесткости даже за счет предварительного натяжения.

Эллиптический параболоид является поверхностью положительной гауссовой кривизны и образовывается движением эллипса по главным параболом, причем эллипс при движении остается себе подобным (рис. 1.7). В том случае, когда параметры соответствующих главных парабол равны между собой, эллипс становится окружностью, а эллиптический параболоид — параболоидом вращения. В вертикальных сечениях поверхности, параллельных плоскостям главных парабол, получаем семейства конгруэнтных парабол, т. е. таких, которые при наложении совпадают с соответствующими главными.

Эллиптический параболоид линейчатостью не обладает, так как в своей поверхности не содержит асимптотических линий. Требование направления нитей по линиям максимальных кривизн полностью относится и к поверхности эллиптического параболоида.

Существуют вантовые покрытия, в которых простые поверхности являются элементарными составными ячейками с различной комбинацией их в плане. Такие поверхности условимся называть составными. Естественно они не описываются элементарными функциями и могут иметь переломы по линиям сопряжения простых поверхностей. В этом случае по линиям сопряжения необходимы какие-либо жесткие элементы, уравнивающие напряженное состояние в месте разрыва кривизны. Составные поверхности могут быть и кусочно-гладкими, т. е. иметь непрерывную кривизну в любом направлении.

Когда говорится о поверхности сети, то это еще не значит, что вантовая сеть всеми своими точками принадлежит последней. Реальная вантовая сеть образует пространственный многоугольник, вписываемый в расчетную поверхность. При этом некоторые аппликаты вершин такого многоугольника (узлы сети) могут и не совпадать с аппликатами непрерывной поверхности, описываемой аналитически.

Третья группа признаков предлагаемой классификации предусматривает разделение вантовых покрытий в зависимости от структурных особенностей сети.

Под структурой вантовой сети будем подразумевать закон или характер расположения элементов сети-нитей по всей поверхности или на части ее. При этом необходимо учитывать направление элементов сети относительно инвариантных направлений поверхности и конфигурацию элементарных ячеек, получающихся в результате пересечения принятых направлений. Если закон образования структуры сети одинаков на всей поверхности, такую структуру принято называть регулярной. Могут быть различные нерегулярности в структуре сети.

Вантовая сеть может быть образована одним семейством гибких нитей, двумя, тремя и более, каждое от одного и более параметров.

Наиболее простой вантовой сетью является сеть, образованная одиночными вантами, располагаемыми параллельно друг другу и

подвешенными к опорному контуру. Она обладает высокой кинематической подвижностью и в вантовых покрытиях применяется редко. Чаще всего такая схема применяется в сетях, превращаемых в последующем в висячие железобетонные оболочки.

Поверхность покрытия, образованного одиночными вантами, может быть нулевой либо отличной от нуля кривизны. Последняя создается путем постепенного изменения стрелок провисания вант или за счет соответствующего очертания контура.

Вантовые покрытия с сетью из параллельных нитей могут применяться в исключительных случаях и лишь при очень большом собственном весе ограждающих конструкций. Вес покрытия должен быть таким, чтобы любая временная неравномерная нагрузка не вызвала значительных кинематических перемещений, и во всяком случае быть больше величины нагрузки, вызываемой отрицательным давлением ветра (отсосом). Кинематическую податливость отдельной нити можно уменьшить путем введения дополнительной нити и превращением системы из однослойной в двухслойную (двухпоясную). Без предварительного натяжения гибкие элементы вантовых ферм при сжатии выключаются из работы. Предварительное натяжение повышает жесткость ферм до пределов жесткости обычных и дает возможность гибким элементам воспринимать сжатие. Пояса ферм (несущий и натягающий) могут быть связаны при помощи жестких распорок, гибких подвесок или одновременно распорок и подвесок или гибких раскосов (рис. 1.8, а).

Гибкая нить может быть элементом радиальных систем (рис. 1.8, б), образованных обычно на круглом опорном контуре и имеющих, как правило, поверхность вращения положительной гауссовой кривизны. Возможно применение центральной стойки, поддерживающей внутреннее растянутое опорное кольцо. Такая система имеет поверхность вращения отрицательной гауссовой кривизны и в литературе называется шатровой. Сравнение радиальных сетей с ортогональными при одинаковом очертании опорного контура и стрелах провисания показывает, что расход материала вант на единицу площади горизонтальной проекции на первую систему в полтора раза меньше, чем на вторую [24]. Такое явное преимущество радиальных систем служит залогом их широкого применения.

Аналогично вантовой сети из отдельных параллельных нитей, радиальные сети без предварительного напряжения являются геометрически изменяемыми и применяются как промежуточная стадия для создания висячих оболочек. Центральную стойку радиального покрытия шатрового типа жестко заземляют в фундаменте, либо в месте нижней опоры предусматривают шарнир, тем самым превращая стойку в качающуюся. Такое решение применяют в том случае, когда хотят исключить работу центральной и контурных стоек на горизонтальные усилия от вантовой сети. В противном случае не обеспечивается самоуравновешенность системы в горизонтальной плоскости. Провес вант в шатровых покрытиях может быть различным.

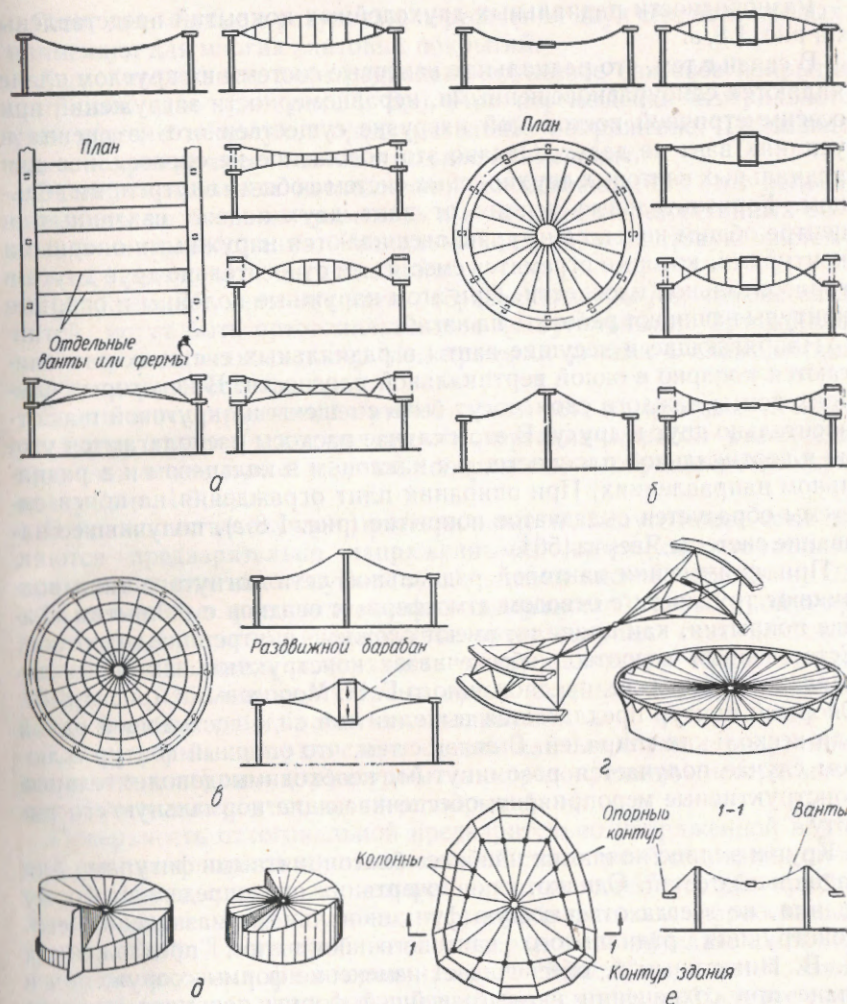


Рис. 1.8. Схемы вантовых покрытий:
а, б — из отдельных вант и ферм, расположенных соответственно параллельно и радиально; в — радиально-кольцевое однослойное и двухслойное; г — радиально-складчатое системы Д. Яверта; д — радиальное на опорном контуре в виде одной и трех восходящих спиралей; е — радиальное с безизгибным опорным контуром, вынесенным за пределы здания.

Если ванты в месте примыкания к наружному контуру касательны к горизонтальной плоскости, то вся нагрузка от покрытия передается на центральную опору. Контурные стойки в таком покрытии удобны для монтажа, обеспечивают устойчивость покрытия и могут быть заменены вертикальными или наклонными оттяжками (можно с предварительным натяжением).

Разновидности радиальных двухслойных покрытий представлены на рис. 1.8, в.

В связи с тем, что радиальные вантовые системы на круглом плане являются самоуравновешенными, неравномерности загрузок при осесимметричной постоянной нагрузке существенного изменения в усилиях вант не дадут. Однако это положение не справедливо для радиальных вантовых двухъярусных систем с общим внутренним кольцом. Горизонтальные усилия от вант двух поясов, связанных в центре общим кольцом, не уравниваются наружными опорными контурами, которые стремятся сместиться относительно друг друга в горизонтальной плоскости. При этом наружные колонны и опорные контуры начинают работать на изгиб.

Напрягающие и несущие ванты в радиальных системах располагаются попарно в одной вертикальной плоскости. В некоторых случаях ванты каждого слоя могут быть смещены на круговой шаг относительно друг к другу. В этом случае раскосы располагаются уже не в вертикальной плоскости, а с наклоном в кольцевом и в радиальном направлениях. При опирании плит ограждения на пояса системы образуется складчатое покрытие (рис. 1.8, г), получившее название системы Яверта [56].

При применении вантовой радиальной сети вогнутого типа возникают трудности с отводом атмосферных осадков с покрытия. Такие покрытия, как правило, имеют сложный внутренний водоотвод. Естественный водоотвод обеспечивает конструкция вантового радиального покрытия, предложенного Г. П. Морозовым * (рис. 1.8, д). Опорный контур предлагается выполнить в виде восходящей одной или нескольких спиралей. В связи с тем, что опорный контур в любом случае получается разомкнутым, необходимы дополнительные конструктивные мероприятия, обеспечивающие нормальную его работу.

Круг и эллипс являются наиболее благоприятными фигурами для радиальных сетей. Однако, такие очертания предопределяют форму здания, не всегда отвечающую функциональному назначению его. Конструкция радиального вантового покрытия, предложенная Н. В. Никитиным **, обеспечивает изменение формы сооружения в плане при сохранении наивыгоднейшей формы опорного контура (рис. 1.8, е). Колонны сооружения размещают по контуру проектируемого сооружения. Радиальную систему вант подвешивают на опорное кольцо, вынесенное за контур сооружения и очерченное в плане в виде веревочного многоугольника системы сил, действующих от вант.

Устойчивость опорного кольца обеспечивается колоннами. Изменением угла наклона участка вант от колонн до опорного контура варьируют усилия, действующие на него.

* Г. П. Морозов. Авторское свидетельство на изобретение № 155280.

** Н. В. Никитин. Авторское свидетельство на изобретение № 163742.

Сети, полученные в результате пересечения двух семейств кривых, применяют для многих вантовых покрытий.

Легко представить себе радиально-кольцевое вантовое покрытие шатрового типа (см. рис. 1.8, в). При перемещении центрального узла вверх сеть получит предварительное напряжение. Такое вантовое покрытие имеет самостоятельное применение.

Экспериментальные исследования показывают [49], что кольцевые ванты необходимо применять и в висячих железобетонных оболочках шатрового типа. Радиально-кольцевую вантовую систему можно выполнить и двухслойной.

Перекрытые вантовые сети, образованные двумя семействами нитей, могут быть ортогональными и косоугольными. Ортогональные сети с пересекающимися под прямыми углами в плане нитями наиболее распространены.

Ванты в ненапряженной ортогональной сети на плоском четырехугольном опорном контуре имеют очертания парабол различных кривизн, а некоторые участки поверхности — отрицательную кривизну (рис. 1.9, а).

В большинстве случаев ортогональные и косоугольные сети являются предварительно напряженными, имеют самостоятельное применение или используются для создания висячих оболочек. Одной из наиболее распространенных поверхностей, по которой очерчены предварительно напряженные ортогональные сети вантовых покрытий, является поверхность гиперболического параболоида. На рис. 1.9, б, в, г представлены ортогональные сети гиперболического параболоида на различных планах.

Связь формы поверхности в ортогональных сетях с очертанием опорного контура и структурой сети предопределяет неограниченное количество различных схем покрытий.

Поверхность ортогональной предварительно напряженной вантовой сети на квадратном плане с полной симметрией очертания опорного контура состоит из четырех простых поверхностей, приближающихся в угловых зонах к гиперболическим параболоидам (рис. 1.9, д). Такая комбинация поверхностей обуславливает наличие сплошных зон покрытия, в средней части его, и нитей, имеющих на отдельных участках кривизну разных знаков. Наличие сплошных зон и нитей с различными знаками кривизн по длине ведет к понижению общей жесткости покрытия.

Такую поверхность можно улучшить введением по осям симметрии покрытия дополнительных вант, так называемых тросов жесткости, способных воспринимать горизонтальные натяжения от примыкающих вант. При горизонтальной связи в узлах пересечения сети с тросом жесткости (рис. 1.9, е) участки нитей, имеющие разные по знаку кривизны, могут иметь различные по величине усилия.

Несколько облегчают работу опорного контура тросы жесткости ортогональных вантовых сетей, направленные в углы его перелома (рис. 1.9, ж, з). Несущие ванты располагаются параллельно сторонам

фигуры (треугольника, квадрата и др.) и всю основную нагрузку передают на тросы жесткости.

В вантовом покрытии на шестиугольном плане (рис. 1.9, и) трос жесткости является основным элементом, при помощи которого образуется косоугольная сеть (тросы жесткости направлены по трем

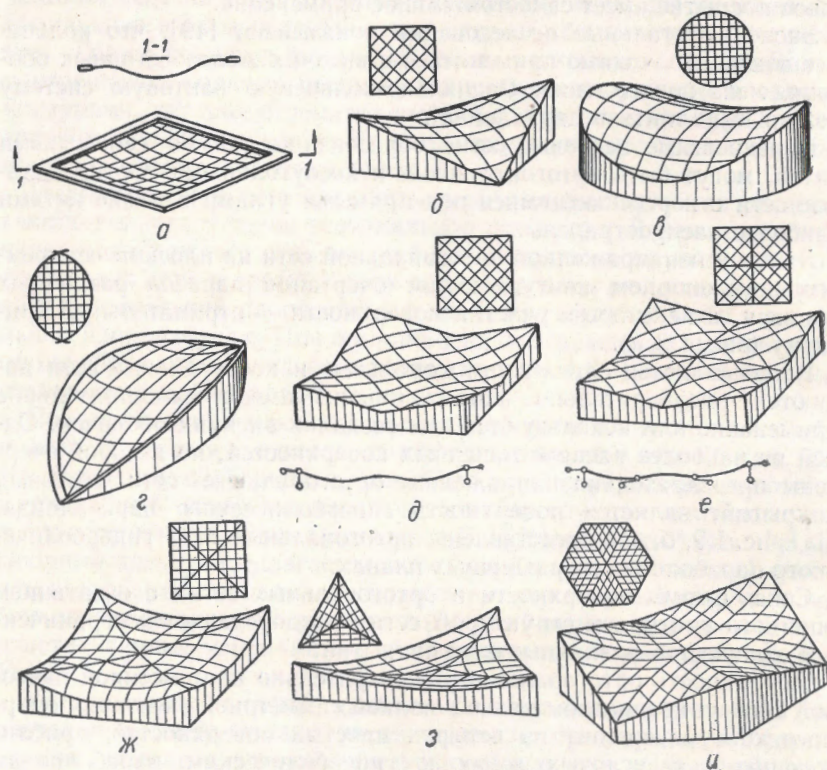


Рис. 1.9. Сети вантовых покрытий:

а — ортогональная на плоском четырехугольном опорном контуре; б, в, г — ортогональная гиперболического параболоида соответственно на квадратном, круглом и ограниченном двумя кривыми плане; д — ортогональная с полной симметрией очертания опорного квадратного контура; е — то же с тросами жесткости; ж, з, и — ортогональная с тросами жесткости в углах перелома соответственно на квадратном, треугольном и шестиугольном планах.

главным диагоналям, а остальные ванты — параллельно им). Форма опорного контура дает возможность подвергнуть систему предварительному напряжению.

Два направления вант являются минимально необходимыми для создания предварительного напряжения (при этом очертание опорного контура соответствует сети). Однако существуют вантовые сети, образованные тремя и более направлениями нитей.

Сеть с треугольными ячейками в принципе может быть образована на любой поверхности. Так в гиперболическом параболоиде несущие тросы направляются вдоль линий главных кривизн, а натягающие — под углом 45° к несущему. В связи с тем, что на поверхности гиперболического параболоида невозможно существование правиль-

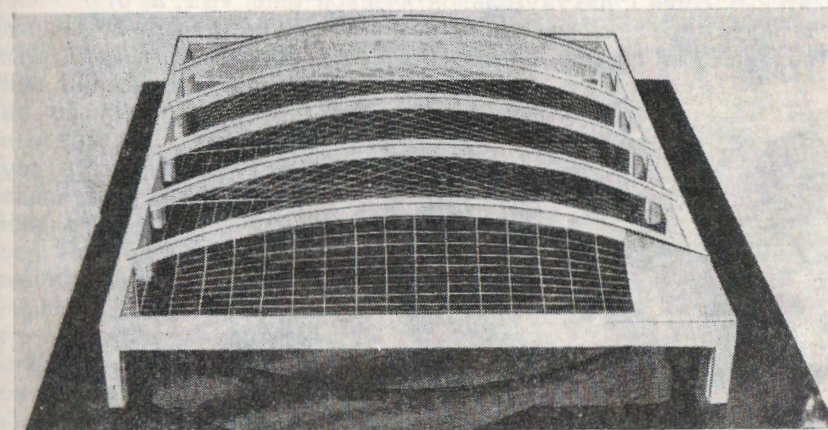


Рис. 1.10. Безраспорное арочно-вантовое покрытие (фото с макета).

ных треугольников [14] узлы треугольной сети необходимо образовывать путем принудительного крепления. При этом ванты в плане получают не прямолинейное, а ломаное очертание. В таком покрытии натягающие ванты, направленные не под прямым углом к несущим, выполняют свое назначение в том случае, когда они не совпадают с линейными образующими данной поверхности. В противном случае эффект предварительного натяжения практически теряется.

Прямолинейные ванты, воспринимающие вертикальную нагрузку за счет своей деформативности, облегчают работу опорного контура, так как служат своеобразной затяжкой для последнего. В покрытии, предложенном В. И. Репяхом* (КиевЗНИИЭП), прямолинейные ванты воспринимают горизонтальные усилия в арках и, таким образом, делают арочное покрытие безраспорным (рис. 1.10).

Вантовая сеть с треугольной структурой обладает тем преимуществом, что ее элементарная треугольная ячейка является всегда плоской. Это дает возможность заполнять ячейки между вантами хрупкими материалами, например, стеклопанелями.

Треугольная ячейка хорошо сочетается с шестиугольным планом (рис. 1.11). Очертания опорного контура позволяют обеспечить предварительное напряжение сети.

* В. И. Репях. Авторское свидетельство на изобретение № 125022.

В каждом узле сети шестиугольной структуры соединяются три стержня (ванта) с одинаковыми углами между ними. Исходя из условия равновесия узла в горизонтальной плоскости, все усилия в стержнях под действием узловой вертикальной нагрузки равны между собой. Это свойство структур легло в основу различных схем вантовых сетей с шестиугольной ячейкой (рис. 1.12, а, б)*.

Однослойное вантовое покрытие с внутренним отводом воды представляет собой систему вант шестиугольной структуры, натянутых

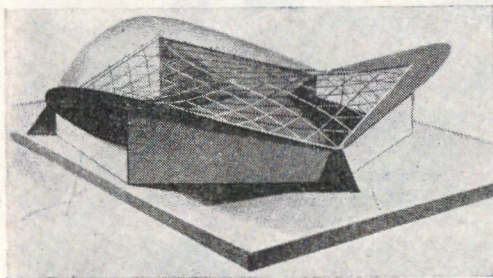


Рис. 1.11. Предварительно напряженная сеть треугольной структуры на шестиугольном плане (фото с макета).

на опорный внешний контур, очерченный по окружности. Предварительное натяжение сети осуществляется притягиванием ее к центральной опоре, верх которой располагается ниже положения внешнего опорного контура. Структура сети и принцип предварительного натяжения обеспечивает поверхность вращения отрицательной гауссовой кривизны.

Вследствие пологости предлагаемой схемы покрытия искажения геометрии шестиугольника в плане после деформации настолько незначительны, что углы между стержнями практически не отличаются от 120° . Равные усилия во всех стержнях будут возникать при любой неравномерной нагрузке на сеть (под «любой нагрузкой» подразумевается не величина, а место ее приложения в плане).

Покрытие с шестиугольной структурой сети является родственным радиальным системам покрытия, однако обладает, на наш взгляд, многими преимуществами. В связи с тем, что предварительное натяжение радиальных систем производится путем поддержания растягивающих напряжений в вантах при одновременном замоноличивании швов между железобетонными плитами, применение плит заполнения без связи в работе их с вантами невозможно. Предлагаемая схема позволяет применить для ограждающих конструкций панели из синтетических материалов и легких сплавов без обеспечения совместной работы их с вантовой сетью. Постоянство величины распора во всех элементах сети обеспечивает идеальные условия работы опорного контура, являющегося безизгибным при любой неравномерной нагрузке. Применение одного типоразмера ограждающих плит покрытия дает возможность проектировать максимально унифициро-

ванные покрытия различных пролетов. В радиальных системах количество типоразмеров плит большое и зависит от диаметра проектируемого покрытия. В равной степени это касается и элементов вант.

При необходимости наружного отвода атмосферных осадков может применяться схема покрытия, показанная на рис. 1.12, в. В этом случае предварительное натяжение сети осуществляется оттягиванием ее от горизонтальной плоскости вверх при помощи центральной опоры.

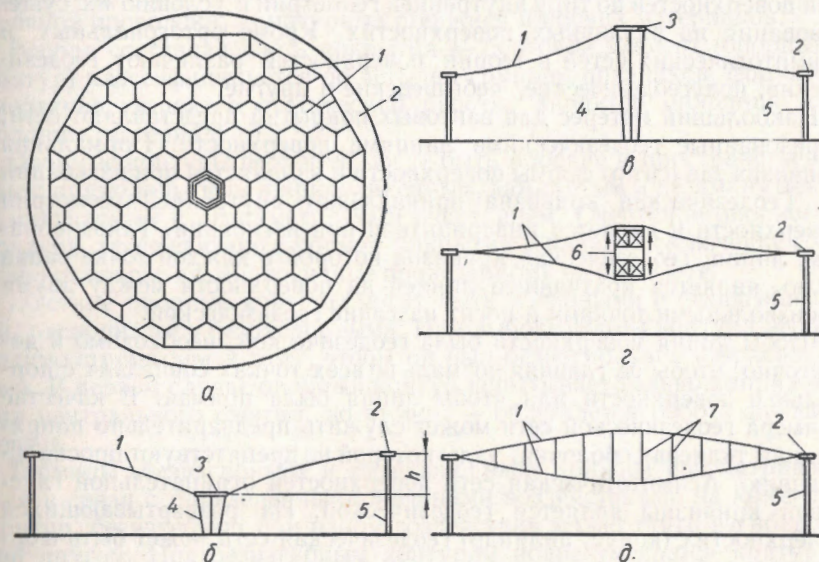


Рис. 1.12. Схемы вантовых покрытий с шестиугольной структурой сети: а — план; б, в — однослойное соответственно с внутренним и наружным отводом воды; г, д — двухслойное соответственно с центральным раздвижным барабаном и с распорками; 1 — вантовая сеть; 2, 3 — опорный контур соответственно внешний, внутренний; 4 — центральная опора; 5 — наружные опоры по контуру; 6 — раздвижной барабан; 7 — распорки.

Возможна схема двухслойного вантового покрытия с использованием шестиугольной структуры сети, каждый слой которой очерчен по поверхности отрицательной кривизны (рис. 1.12, в). Предварительное натяжение осуществляется раздвижкой центральных траверс специального барабана при помощи домкратов.

В двухслойном покрытии с поверхностью положительной гауссовой кривизны предварительное натяжение осуществляется постановкой распорок в каждый узел шестиугольной сети. Затруднения конструктивного порядка могут отнестись эту схему в область теоретических решений, однако с точки зрения формообразования вантовых покрытий такая схема представляет интерес (рис. 1.12, д).

* Л. Г. Дмитриев, Г. Б. Гильман, А. В. Касилов. Авторское свидетельство на изобретение № 181798.

Перечисленные структурные схемы вантовых сетей классифицируются только с точки зрения конструктивных особенностей каждой и не так строго отражают особенности внутренней геометрии их, вытекающие из положений теории поверхностей. Понятие «вантовая сеть» не всегда совпадает с математическим понятием «сеть на поверхности».

Сетью в теории поверхностей [11] называют два семейства кривых на поверхности, каждое от одного параметра.

Существует большое количество сетей, классифицируемых в теории поверхностей по типу внутренней геометрии и условию их существования на различных поверхностях. Кроме ортогональных и асимптотических сетей в теории поверхностей различают геодезические, полугеодезические, чебышевские и другие.

Наибольший интерес для вантовых покрытий представляют сети, образованные геодезическими линиями поверхности. Нормальная кривизна зависит от формы поверхности и изменяется при изгибании ее. Геодезическая кривизна принадлежит внутренней геометрии поверхности и является инвариантной при изгибании. Таким образом, линия, геодезическая кривизна которой в каждой точке равна нулю, является кратчайшей линией на поверхности между двумя произвольными точками и носит название геодезической.

Чтобы линия поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее главная нормаль во всех точках совпадала с нормалью к поверхности или чтобы линия была прямая. В качестве примера геодезической сети может служить предварительно напряженная тканевая оболочка, узлы которой не препятствуют проскальзыванию. Асимптотическая сеть поверхностей отрицательной гауссовой кривизны является геодезической. На развертывающихся поверхностях (конус, цилиндр) геодезическая сеть может быть и ортогональной.

В чебышевской сети в каждом координатном четырехугольнике противоположные стороны имеют одинаковую длину.

Для рассматриваемых пологих вантовых покрытий учет внутренней геометрии не является необходимым. Однако анализ структур вантовых сетей, основанный на положениях теории поверхностей, дает возможность более строго подходить к решениям вантовых покрытий и в определенной степени является основой для разработки новых структур.

Кроме того, знание геометрических параметров различных сетей полезно для дальнейших усовершенствований статических расчетов [26].

Четвертая группа признаков классификации предусматривает разделение вантовых покрытий на без предварительного напряжения и предварительно напряженные.

Следует различать предварительно напряженные покрытия, в которых усилия предварительного напряжения передаются на опорный контур и имеют самостоятельное применение, и покрытия, в которых

подобные усилия передаются на конструкции ограждения в процессе превращения вантовой системы в висячую оболочку. В покрытиях второго вида растягивающие усилия в вантах уравниваются сжимающими усилиями в материале ограждающих плит.

В принципе возможен и третий вид предварительно напряженного покрытия, в котором усилия предварительного напряжения воспринимаются опорным контуром и конструкциями ограждения покрытия одновременно.

По пятой группе признаков вантовые сети в зависимости от материала подразделяют на сети из стальных канатов, пучков высокопрочной проволоки, арматурных стержней и прочих материалов.

Вторая составная часть покрытия — бортовой элемент (опорный контур) классифицируется по четырем группам признаков: форма и очертание, характер статической работы, характер опирания на колонны, материал.

Опорные контуры по форме могут быть плоские и пространственные с прямолинейным и криволинейным, замкнутым и незамкнутым, симметричным и несимметричным очертанием. Очертание опорного контура тесно связано с формой покрытия в плане. Исключение составляют покрытия, аналогичные приведенному на рис. 1.8, е.

Жесткие опорные контуры могут быть изгибными и безизгибными, распорными и безраспорными. При выборе формы контура необходимо стремиться к тому, чтобы он был безизгибным и безраспорным. В первом случае опорный контур испытывает только напряжения центрального сжатия, во втором — облегчается работа фундаментов.

Термины «безизгибный» и «безраспорный» должны рассматриваться в связи с определенными внешними воздействиями на контур. Контур, безизгибный при одном воздействии может стать изгибным при другом. Под безизгибным контуром подразумевается контур, безмоментный в своей плоскости, при этом возможно возникновение моментов, действующих из плоскости контура и зависящих от характера опирания его. Задача о безмоментности опорного контура вантового покрытия может быть поставлена по-разному. Имея опорный контур заданной формы, можно определить закон нагружения его распорами вант, при котором в его сечениях изгибающие моменты будут равны нулю (затем закон распределения усилий стремятся выполнить в натуре), или, зная закон распределения усилий, найденный из условия безмоментности контура, находят его очертание.

При решении задачи в первой постановке план покрытия и очертание контура при проектировании обычно задают (при этом очень трудно избежать изгибающих моментов, возникающих при различных нагрузках на покрытие, особенно, неосесимметричных).

С точки зрения безраспорности и безизгибности наиболее рациональным является плоский контур, очерченный по окружности при радиальной сети вант и осесимметричной нагрузке.

Контур покрытия, показанного на рис. 1.9, б, испытывает изгиб, а в двух самых низких точках действуют распоры. Замена прямолинейного контура арками не избавляет его от распора, возникающего в местах перелома арок.

Решение, предложенное Г. П. Морозовым* (рис. 1.13), несколько улучшает работу опорного контура в виде двух наклонных арок.



Рис. 1.13. Перекрестная система вант на опорном контуре в виде двух арок с пятами выше замков.

Для обеспечения сжатия в арках пята их находятся не ниже замков, как принято, а выше. Между жестко соединенными пятами наклонных арок располагают несущие ванты, сходящиеся у пят и расходящиеся у замков. Перпендикулярно оси, проходящей через пята арок, располагают натягающие ванты. Таким образом, усилия предварительного напряжения вполне отвечают форме опорного контура, а усилия от полезной нагрузки

передаются в виде сосредоточенных сил у пят наклонных арок.

К недостаткам такого решения следует отнести полную нерегулярность структуры сети, различие в кривизнах несущих вант и, следовательно, в усилиях. Кроме того, могут возникнуть трудности обеспечения пространственной кривизны несущих вант в процессе предварительного натяжения.

Прямолинейные контуры вантовых сетей (см. рис. 1.9, ж, з) не имеют распоров, а моменты возникают только от усилий предварительного натяжения. Основные усилия при помощи троса жесткости передаются в местах перелома контура и, следовательно, не вызывают изгибающих моментов. Следует заметить, что нагружение многоугольного контура силами, приложенными в вершинах, является лишь необходимым, но не достаточным условием безмоментности. Необходимо, чтобы величины сил удовлетворяли условия равновесия каждой его стороны и всего контура в целом.

По характеру опирания контуры различают — подпертый и свободный от опор. Решений расположения опор может быть много, однако следует различать опоры, необходимые для определенной статической работы покрытия и, предусматриваемые по архитектурным соображениям. Размещение опор отражается на величине изгибающих моментов из плоскости контура, в криволинейных контурах — на величине крутящих моментов.

* Г. П. Морозов. Авторское свидетельство на изобретение № 169768.

§ 3. Развитие конструктивных форм вантовых покрытий, очерченных по поверхности гиперболических параболоидов

Ортогональные предварительно напряженные вантовые сети, очерченные по поверхности гиперболического параболоида, обладают большой жесткостью, при этом два семейства вант должны иметь

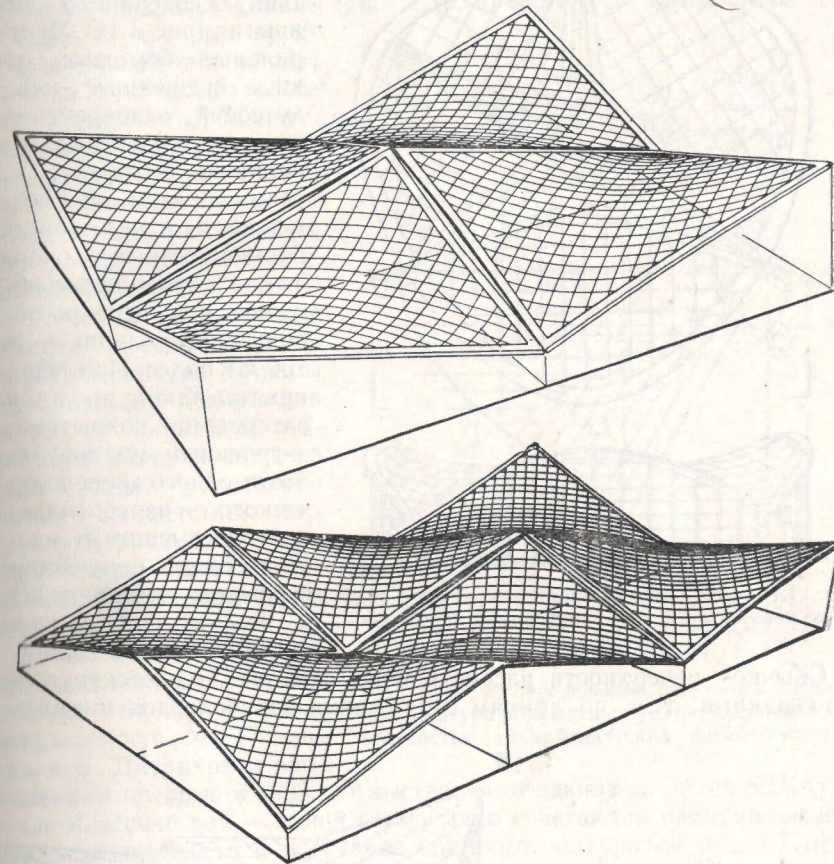


Рис. 1.14. Комбинации вантовых покрытий, состоящих из нескольких гиперболических параболоидов.

максимальную по величине и различную по знаку кривизну. Однако применение вантовых сетей, очерченных по поверхности одного параболоида, естественно, ограничивает архитектурные и конструктивные решения покрытий. Представленные на рис. 1.14 вантовые покрытия из сочлененных гиперболических параболоидов [62] демонстрируют неограниченные плановые композиции. Подобные

композиции можно образовывать из гиперболических параболоидов на любом плане. При помощи трех гиперболических параболоидов на опорном контуре из пересекающихся арок, наклоненных

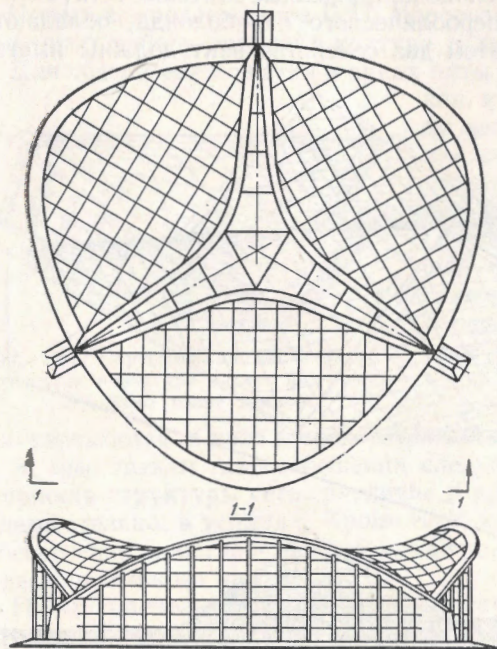


Рис. 1.15. Покрытие на опорном контуре в виде трех наружных и трех внутренних пересекающихся арок.

к горизонту под различными углами, можно образовывать также составную поверхность покрытия (рис. 1.15). Центральные бортовые арки, соединенные между собой, одновременно воспринимают вертикальную нагрузку, и, таким образом, дают возможность отказаться от промежуточных опор. Такие схемы целесообразны при перекрытии больших пролетов — от 150 м и более. При перекрытии таких пролетов вантовым покрытием, очерченным по поверхности одного гиперболического параболоида, перепад высших и низших точек получается огромным, что приводит к бессмысленному увеличению объема здания.

Обычно поверхности рассмотренных схем не являются кусочно-гладкими, т. е. по линиям сопряжения параболоидов имеются

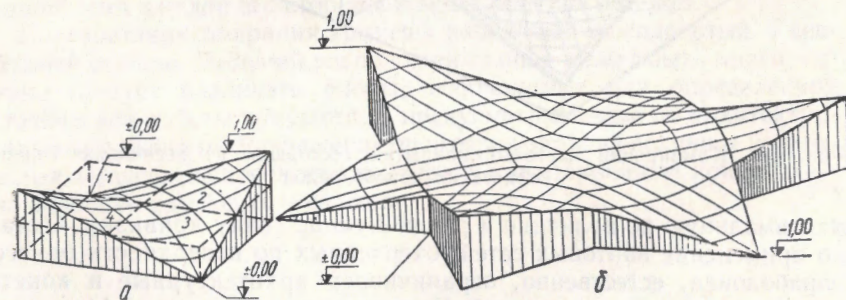


Рис. 1.16. Вантовые сети на кусочно-гладких поверхностях:

а, б — формообразование гиперболического параболоида соответственно одного и нескольких.

переломы поверхности. Это требует устройства в местах переломов обычно жестких элементов, уравнивающих напряженное состояние поверхности, что вызывает дополнительные затраты материалов и, следовательно, уменьшает эффективность вантовых систем.

Если считать, что поверхность одного гиперболического параболоида на квадратном плане (рис. 1.16, а) состоит из четырех ячеек, каждая из которых представляет собой параболоид, то, взяв в качестве основной ячейки гиперболический параболоид на ромбическом плане, можно создать более сложные кусочно-гладкие поверхности. При этом, количество сопрягаемых параболоидов должно быть четным и высотные отметки внешних углов опорного контура должны чередоваться. Направляя ванты по линиям максимальных кривизн каждого параболоида, достигаем полного соответствия между структурой сети и поверхностью. Одна из таких сетей представлена на рис. 1.16, б.

Схема ортогональной вантовой сети на опорном контуре из двух арок, предложенная М. Новицким и В. Дитрихом и воплощенная впервые в 1953 г. в выставочном здании г. Ралей (США), стала классической — в ней гармонично сочетаются рациональные формы, поверхность и очертание опорного контура (см. рис. 1.1, а). Создать рациональную ортогональную вантовую сеть на опорном контуре из трех и более наклонных к горизонту арок, используя лишь два направления нитей относительно всей поверхности, не представляется возможным. В этом случае нити имеют различные кривизны с недопустимо малыми величинами, появляются нежелательные сплюсненные зоны поверхности.

Чтобы избежать таких недостатков, нити необходимо направлять по линиям кривизны в пределах каждого параболоида. В случае арочного очертания опорного контура удобно исходить из параболческой формы всех нитей с наперед заданной величиной кривизны.

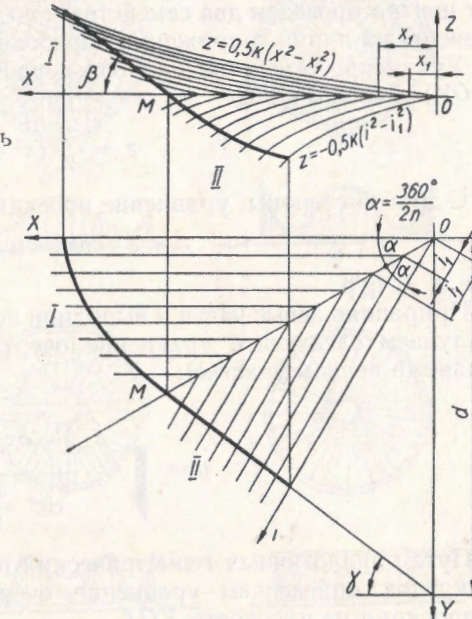


Рис. 1.17. К определению очертания опорного контура покрытия с кусочно-гладкой поверхностью гиперболических параболоидов.

Проследим геометрическое построение опорного контура при любом четном количестве сопрягаемых гиперболических параболоидов, начиная с четырех. Следовательно, центральный угол каждого параболоида будет равен $\frac{360^\circ}{n}$, где $n = 4, 6, 8, 10, 12$ и т. д., что соответствует 2, 3, 4, 5, 6 и т. д. опорным аркам.

Рассмотрим два смежных полусектора в системе координат $OXYZ$ (рис. 1.17). Вдоль линий кривизны каждого сектора в направлении от центра проведем два семейства конгруэнтных парабол с началом каждой на линии сопряжения параболоидов.

Уравнение семейства парабол первого участка (выше плоскости XOY) запишем в виде

$$z = \frac{k}{2} (x^2 - x_1^2).$$

С другой стороны, уравнение проекции арки имеет вид

$$z = bx - a,$$

где $b = \operatorname{tg} \beta$.

Приравняв левые части и выполнив необходимые преобразования, получаем следующее уравнение очертания бортового элемента в плане (в первом участке):

$$y = \sqrt{\frac{a - bx + \frac{k}{2} x^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{360}{2n} \cdot \frac{k}{2}}}.$$

Путем аналогичных геометрических построений и аналитических выкладок определяем уравнение очертания бортового элемента в проекции на плоскость XOZ

$$z = -\frac{k}{2} \left[\left(y \sin \frac{360}{n} + x \cos \frac{360}{n} \right)^2 - \left(y \cos \frac{360}{n} - x \sin \frac{360}{n} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{360}{2n} \right],$$

где

$$y = d - fx; \quad f = \operatorname{tg} \gamma.$$

Задавшись углами наклона β и γ , нетрудно определить два других параметра d и a . При этом исходят из непрерывного очертания бортового элемента, для чего приравнивают соответствующие производные уравнений линий в точке перехода прямолинейного участка борта в криволинейный. Величина k задается, исходя из обеспечения необходимой геометрии покрытия.

Таким образом, опорным контуром покрытия являются не плоские арки, а аркообразные элементы, состоящие из участков (в пре-

делах радиальных секторов) с кривизной в одной из плоскостей — вертикальной или горизонтальной.

Предложенный принцип структурного образования вантовых сетей покрытий * лег в основу разработанных ортогональных сетей при количестве аркообразных элементов от двух до бесконечности.

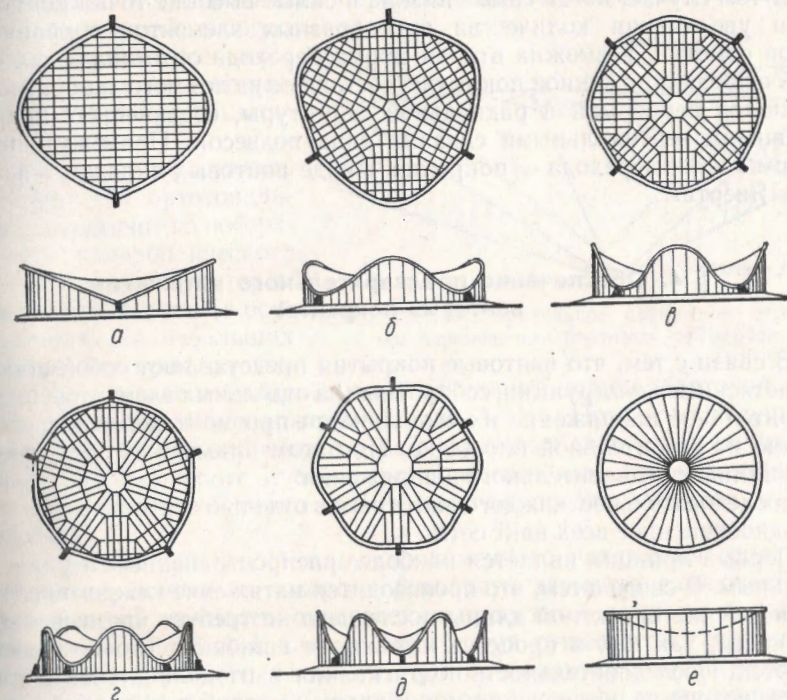


Рис. 1.18. Фазы изменения структуры предварительно напряженной ортогональной сети в зависимости от увеличения количества аркообразных элементов:

a — на опорном контуре из двух арок; *б, в, г, д* — то же соответственно из трех, четырех, пяти и шести аркообразных элементов; *е* — радиальная на круглом опорном контуре.

В этой связи интересно проследить фазы изменения структуры ортогональной сети, поверхности и предварительного натяжения в зависимости от увеличения количества аркообразных элементов (рис. 1.18). Схема сети на опорном контуре из двух арок может рассматриваться как частный случай предлагаемого принципа образования сетей. С увеличением количества аркообразных элементов количество радиальных секторов, в пределах которых принята

* Л. Г. Дмитриев, А. В. Касилов, И. Э. Кимельфельд, Е. К. Лажечникова. Авторское свидетельство на изобретение № 169226.

ортогональная сеть, увеличивается. Это, в свою очередь, ведёт к уменьшению влияния предварительного натяжения сети, а при бесконечном возрастании количества аркообразных элементов они образуют замкнутый кольцевой контур. При этом несущие ванты образуют простую радиальную сеть, очерченную по поверхности вращения.

В том случае, когда самые низкие и самые высокие точки контура при увеличении количества аркообразных элементов сохраняют свои отметки, возможна вторая форма перехода ортогональных сетей в преднапряженное покрытие, состоящее из прямого и обратного куполов непрерывной радиальной структуры, соединенных непрерывными вертикальными связями типа подвесок. Промежуточные формы этого перехода — покрытия в виде вантовых складок «системы Яверта».

§ 4. Обеспечение предварительного натяжения вантовых покрытий

В связи с тем, что вантовые покрытия представляют собой пространственные конструкции, собираемые из отдельных элементов, предварительное напряжение их выполняется при монтаже непосредственно на строительной площадке. При этом применяют следующие принципы предварительного напряжения:

- последовательное каждого ванта сети в отдельности;
- одновременное всех вант сети.

Первый принцип является наиболее распространенным и универсальным. В связи с тем, что производится натяжение каждого ванта, определение проектной длины последнего не требует чрезвычайной точности, так как в процессе натяжения ошибки легко компенсируются. Последовательность подтягивания вант должна быть принята, исходя из обеспечения минимальных усилий в опорном контуре при монтаже.

Таким образом может быть осуществлено предварительное напряжение почти любого вантового покрытия. В вантовых фермах с распорками аналогичный принцип осуществляется в том случае, когда их натягают путем последовательной постановки (раздвижки) распорок.

Более индустриальным является принцип предварительного напряжения, заключающийся в одновременном натяжении всех вант сети. Он предопределяет конструктивное решение бортового элемента, закрепление вант и, в определенной степени, структуру сети.

Раздвижкой колец центрального барабана двухъярусной радиальной сети покрытия (см. рис. 1.8, б) достигают одновременного предварительного натяжения всех вант. Аналогичное натяжение сети (по характеру) за счет притягивания центральной траверсы-кольца к внутренней опоре достигается в покрытии, изображенном на рис. 1.12, б. Притяжение траверсы можно осуществить натяжными

болтами, выпущенными из центральной анкерной опоры и имеющими на концах резьбу.

В вантовых фермах принцип одновременного натяжения всех элементов может быть осуществлен при натяжении одного пояса.

Принцип одновременного натяжения относится, в основном, к вантовым сетям, имеющим определенные особенности: общий узел для всех нитей, равную величину натяжения и т. д. Однако он применим и к перекрестным сетям.

Нетрудно представить покрытие с ортогональной сетью вант на поверхности гиперболического параболоида, в котором бортовые элементы осуществляют в небольших пределах вращательно-поступательное движение. В начальный период бортовой элемент находится в положении 1 (рис. 1.19). При этом несущие и натягающие ванты закреплены в бортовом элементе и не напряжены. При повороте и опускании бортового элемента в положение 2 все ванты получают одновременное предварительное напряжение.

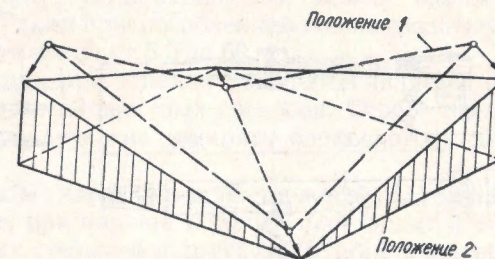


Рис. 1.19. Предварительное натяжение сети путем перемещения бортовых элементов.

Существенный недостаток одновременного натяжения всех вант путем опускания и поворота бортового элемента заключается в повышенной точности определения проектных длин их перед натяжением. Ошибки в длинах вант могут существенно отразиться на работе бортового элемента при предварительном натяжении, так как распределение усилий от вант трудно контролировать. Кроме того, конструкция бортового элемента, обеспечивающего вращательно-поступательное движение, естественно, усложняется.

Последовательное и одновременное натяжение вантовой сети может осуществляться одной или многими ступенями.

Величина усилия предварительного натяжения определяется расчетом. В связи с тем, что жесткость покрытия зависит, в основном, от кривизны вант и предварительного натяжения, определение оптимальных величин последнего представляет большой интерес. Эта проблема не решена, а пока величинами предварительного напряжения приходится задаваться интуитивно в соответствии с конкретной схемой и нагрузками.

Предварительное натяжение вантовых покрытий осуществляется, в основном, механическими способами при помощи: простых и динамометрических гаечных ключей; винтовых стяжек и распорок типа фаркоф; специальных стяжных приспособлений; полиспастов и тяговых лебедок; механических и гидравлических домкратов.

Для создания небольшого по величине предварительного натяжения применяют обычные гаечные ключи. При этом концы вант должны иметь резьбу. При навинчивании гаек ванты укорачиваются и получают предварительное напряжение (резьба гаек должна быть чистой и хорошо смазанной). Кроме того, в процессе натяжения необходимо предусматривать меры против закручивания вант.

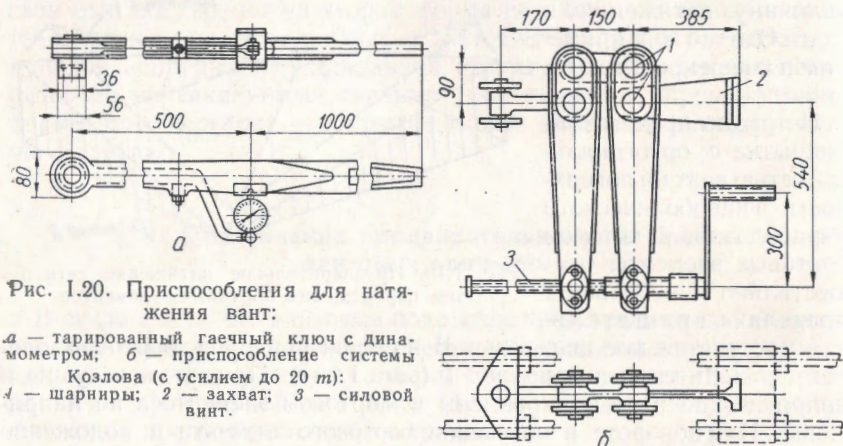


Рис. 1.20. Приспособления для натяжения вант:

а — тарированный гаечный ключ с динамометром; б — приспособление системы Козлова (с усилием до 20 т); в — шарниры; 2 — захват; 3 — силовой винт.

Усилие, которое можно создать при завинчивании гаек, определяется по приближенной формуле

$$N = \frac{M_{кр}}{kd}.$$

Так, например, при крутящем моменте $M_{кр} = 350 \text{ кгм}$ (рычаг 0,7 м, мускульная сила рабочего около 50 кг) и коэффициенте трения $k = 0,2$ в ванте из арматурного стержня диаметром 30 мм можно создать силу преднапряжения около 6 т. Коэффициент трения можно существенно уменьшить, применяя подшипники качения, располагая их между гайками и опорными листами. Силу натяжения можно увеличить путем применения ключей с удлиненными рукоятками. Существуют гаечные ключи, в которых усилие натяжения контролируется при помощи динамометра (рис. 1.20, а). Существующими тарированными гаечными ключами можно натягивать ванты с силой до 30—35 т.

Натяжение при помощи винтовых стяжек и распорок типа фаркопф осуществляется за счет удлинения или укорочения элементов и созданием, таким образом, распора. Чаще всего стяжки и распорки применяют в вантовых фермах и других двухслойных покрытиях.

В практике строительства предварительно напряженных конструкций, особенно объектов связи, широко распространено специ-

альное приспособление для натяжения, предложенное В. К. Козловым* (рис. 1.20, б).

Приспособление выполнено в виде двух рычагов, одни концы которых соединены между собой шарнирной тягой, а вторые — силовым винтом для изменения расстояния между ними. Натяжение производится вручную путем вращения рукоятки. В некоторых случаях применяют динамометр, устанавливаемый между одним из рычагов и концом ванты. Таким приспособлением можно создать усилие предварительного натяжения от 5,5 до 60 т.

Создание преднапряжения при помощи домкратов является наиболее универсальным из всех известных способов. Особое распространение получили гидравлические домкраты одиночного и двойного действия.

Домкраты ДГС (домкраты гидравлические стержневые), тянущего действия, однопоршневые, при помощи которых производится натяжение вант из арматурных стержней и других изделий с концевыми нарезными креплениями. Домкраты типа ДГС могут развивать тяговое усилие от 8 до 63 т и иметь ход поршня от 125 до 500 мм.

Домкраты ДГП (домкраты гидравлические пучковые), тянущие — толкающего действия, с помощью которых производится натяжение вант из пучков высокопрочной проволоки с последующим креплением их в анкерной колодке с пробкой. Тяговое усилие домкратов ДГП может быть от 16 до 160 т. Ход поршня от 125 до 500 мм.

Домкраты ДГ (домкраты гидравлические стендовые), толкающего действия, однопоршневые, с помощью которых натягиваются наиболее мощные ванты. Наиболее удобно домкраты толкающего действия применять при натяжении двухслойного радиального покрытия с центральным барабаном (см. рис. 1.8, б). В других случаях могут понадобиться дополнительные упоры, которые дают возможность толкающее действие домкрата преобразовать в тянущее. Домкраты типа ДГ могут развивать тяговое усилие от 31,5 до 500 т и иметь ход поршня от 500 до 1600 мм.

Контроль натяжения вант производится по силе натяжения и по деформациям. Сила натяжения определяется по динамометру гаечного ключа, показаниям тензомера или манометра насосной станции гидродомкрата.

Натяжение вант по деформациям наиболее точно можно определить по выходу штока гидравлического домкрата, менее точно — посредством замера напряжений в вантах.

Сила предварительного натяжения должна учитывать потери от релаксации материала вант (5%) и податливости анкеров. Увеличивать силы предварительного натяжения за счет податливости анкеров целесообразно лишь для коротких вант.

* В. К. Козлов. Авторское свидетельство на изобретение № 118177.

ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВАНТОВЫХ ПОКРЫТИЙ

§ 1. Понятия о нелинейно-деформируемых и мгновенно-жестких системах

В основе большинства задач строительной механики лежит принцип возможных перемещений, являющийся самым общим принципом механики абсолютно твердого тела и упругих систем при малых перемещениях. Он позволяет перемещения или какие-либо другие деформации некоторых систем выразить линейными однородными функциями внешних воздействий. В строительной механике [36] такие системы называют линейно-деформируемыми.

Необходимыми условиями, при которых системы могут считаться линейно-деформируемыми, являются следующие:

материал должен быть идеально упругим;

изменения в геометрических размерах и других характеристиках вследствие бесконечной малости перемещений, вызванные внешним воздействием, должны быть пренебрежимо малы.

Следует заметить, что все строительные конструкции нелинейны, так как не могут абсолютно точно удовлетворить вышеперечисленным условиям. Принцип расчета линейно-деформируемых систем или, иначе, линейаризация задач строительной механики производится исключительно для упрощения теории расчета и избежания математических трудностей, связанных с нелинейными уравнениями напряженно-деформированного состояния системы и возможностью воспользоваться хорошо развитой теорией решения линейных уравнений.

Два условия существования линейно-деформируемых систем лежат в основе линейной теории расчета несущих конструкций, как два принципа линейаризации действительных систем.

Первое условие или первый принцип линейаризации, относящийся к физическим свойствам материалов, основано на том, что напряжения и деформации связаны линейной зависимостью, определяемой законом Гука, и выражает физическую линейаризацию действительных систем. Все системы, материал которых не следует закону Гука, обладают физической нелинейностью.

Второе условие или второй принцип линейаризации касается геометрии деформированной системы и, таким образом, выражает геометрическую линейаризацию действительных систем.

Малые перемещения в обычных строительных конструкциях обес-

печиваются главным образом за счет геометрической неизменяемости системы, т. е. за счет определенного расположения достаточного количества связей.

В рассматриваемых вантовых системах этот принцип не выполняется. Во-первых, количество связей, как правило, меньше необходимого. Например, в системе на рис. II.1 недостает одной связи.

Во-вторых, геометрические особенности вантовых систем могут привести к такому расположению ее элементов, при котором достаточное количество связей не превращает ее в геометрически неизменяемую систему. Примером может служить плоская сеть треугольной структуры (рис. II.2).

Таким образом, в вантовых системах узлы или отдельные точки могут перемещаться на значительные расстояния. При этом, естественно, что вторая идеализация расчетной схемы, связанная с геометрией ее, может привести к значительным погрешностям при определении напряженного состояния и деформативности системы, так как окончательная геометрия системы в этом случае будет существенным образом отличаться от начальной.

Физическая линейаризация для вантовых систем вполне оправдана, так как применяемые материалы для вант в диапазоне эксплуатационных напряжений вполне соответствуют закону Гука. Следовательно, в вантовых системах следует рассматривать только геометрическую нелинейность.

Рассмотрим возможные причины возникновения больших перемещений в вантовых покрытиях.

Прежде всего, напряжения в несущих элементах-вантах вследствие применения высокопрочных материалов могут быть настолько большими по сравнению с напряжениями в обычных строительных конструкциях, что приведут к значительным деформациям системы. Такая нелинейность связана с количественной характеристикой напряженного состояния, а, следовательно, с количественной характеристикой внешней нагрузки.

Другой причиной возникновения больших перемещений может быть необеспеченность геометрической неизменяемости системы. С этой точки зрения вантовые сети покрытий разделяют на системы геометрически изменяемые и мгновенно-жесткие, обладающие особыми свойствами.

Каждая нить вантовой сети в отдельности представляет собой геометрически изменяемую кинематическую цепь, которая для восприятия той или иной нагрузки должна принять соответствующую этой

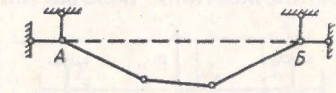


Рис. II.1. К определению геометрической изменяемости гибких нитей.

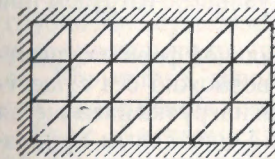


Рис. II.2. Расположение стержней в геометрически изменяемой сети.

нагрузке форму, т. е. изменить существенным образом свою начальную геометрию. Подобно тому, как геометрически неизменяемые системы при определенном подборе геометрических параметров могут превратиться в мгновенно-изменяемые (рис. II.3), геометрически изменяемые системы превращаются в мгновенно-жесткие. Мгновенно-жесткой называется система, представляющая собой плоскую или пространственную кинематическую цепь, которая имеет положительное число степеней свободы и тем не менее в случае абсолютной жесткости ее звеньев допускает лишь бесконечно малые перемещения [37].

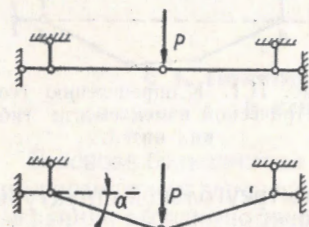


Рис. II. 3. К определению мгновенно-жестких систем.

Мгновенно-жесткие и мгновенно-изменяемые системы имеют много общего. Так, внешняя нагрузка при абсолютной жесткости элементов вызывает бесконечно большие усилия. Если учесть удлинения стержней, усилия в результате изменения начальной формы получаются конечными, зависящими не только от нагрузки, но и от жесткости стержней.

Таким образом, мгновенно-жесткие системы обладают смешанной природой и являются переходными между геометрически изменяемыми и неизменяемыми системами.

Насколько изменится начальная форма нити, зависит от характера нагрузки или от соотношения величин узловых нагрузок при дискретном ее приложении.

Для каждой нити в зависимости от ее начальной формы существует один вид нагрузки, восприятие которой возможно без существенного изменения начальной геометрии. Такая нагрузка называется равновесной и должна быть пропорциональна начальным кривизнам нити.

Так для нити, имеющей начальную форму в виде параболы, равновесной будет равномерно распределенная нагрузка. Для вантовой сети в целом равновесная нагрузка представляет собой линейную комбинацию равновесных нагрузок отдельных нитей.

Чем больше нагрузка по своему характеру отличается от равновесной, тем значительнее отличие конечной формы нитей от начальной, и, следовательно, тем сильнее будет сказываться нелинейность системы. Нелинейность, связанную с количественной характеристикой внешней нагрузки, можно классифицировать как геометрическую нелинейность первого рода, в отличие от нелинейности, связанной с качественной характеристикой внешней нагрузки, которую можно классифицировать как геометрическую нелинейность второго рода.

Например, если нить, имеющую начальную форму с постоянными кривизнами, загрузить равномерной нагрузкой или силами, одина-

ковыми по величине при дискретном приложении внешней нагрузки, то вследствие упругого удлинения нить займет новое положение по форме, подобной начальной, т. е. будет описываться кривой с постоянными кривизнами (рис. II.4, а). Величины прогибов будут зависеть исключительно от величины нагрузки. При некоторых больших значениях нагрузки прогибы могут быть достаточно большими.

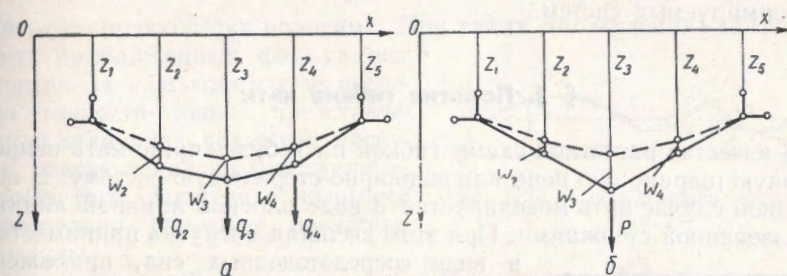


Рис. II.4. Перемещения точек нити:
а — упругие; б — кинематические.

В этом случае будет иметь место нелинейность первого рода. При обычных (часто встречающихся) значениях нагрузки и упругих характеристиках нитей нелинейностью первого рода, как правило, можно пренебречь.

Однако, если ту же нить загрузить иной по характеру нагрузкой, например, одной силой (рис. II.4, б), то для восприятия такой нагрузки нить существенно изменит свою начальную форму, прогнувшись по треугольнику с вершиной в узле, где приложена сила. Кроме того, дополнительно переместятся узлы вследствие упругих деформаций нити.

Если в первом случае величины прогибов зависят только от упругого удлинения нити, то во втором они связаны с изменением формы и удлинением нити. Очевидно, что значения перемещений во втором случае будут намного больше. Если перемещения от упругого удлинения нити малы настолько, что ими можно пренебречь, то в этом случае будет иметь место нелинейность второго рода.

Все сказанное выше в значительной мере относится и к мгновенно-жестким системам. Хотя перемещения в них не носят кинематического характера, изменение начальной формы также зависит от вида внешней нагрузки, поскольку является следствием необеспеченности их геометрической неизменяемости. Таким образом, работа вантовых покрытий характеризуется, в основном, нелинейностью второго рода.

Однако, если в вантовой сети приложена равновесная нагрузка, то статическая работа ничем не отличается от геометрически неизменяемых систем. Вантовую систему на действие равновесной нагрузки можно рассчитывать, пренебрегая нелинейными членами уравнений.

Учет геометрической нелинейности не дает возможности пользоваться привычными для инженера законами и теоремами классической строительной механики (закон независимости действия сил, закон наложения, принцип возможных перемещений, взаимности работ и т. д.). Все эти трудности приводят к необходимости разработки специальных методов расчета вантовых покрытий нелинейно-деформируемых систем.

§ 2. Пологие гибкие нити

В качестве расчетной схемы гибкой нити будем принимать непрерывную шарнирную цепь или шарнирно-стержневую систему. В последнем случае нить моделируется в виде плоской ломаной линии, образованной стержнями. При этом внешняя нагрузка принимается в виде сосредоточенных сил, приложенных к узловым шарнирам.

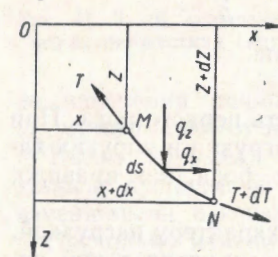


Рис. II.5. Равновесие элемента нити.

Рассмотрим равновесие гибкой однородной нити под воздействием произвольной нагрузки, находящейся вместе с нитью в одной плоскости (рис. II. 5). Выберем на этой плоскости систему прямоугольных координат XOZ и запишем уравнение равновесия элемента нити MN длиной ds . Произвольная внешняя сила раскладывается по координатным осям. Точка элемента M в деформированном состоянии имеет координаты XZ , а точка N — соответственно $X + dx$, $Z + dz$. Взамен действия отброшенных частей нити по концам выделенного элемента действуют силы натяжения, направленные по касательным к нити в точках M и N .

Рассмотрим равновесие узла нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы, под воздействием произвольной узловой нагрузки, находящейся вместе с нитью в одной плоскости. Силы, действующие на узел, и обозначения их показаны на рис II.7.

$$\sum X = 0; \quad -T \frac{dx}{ds} + (T + dT) \frac{d}{ds} (x + dx) + q_x ds = 0; \quad (II.1)$$

$$\sum Z = 0; \quad -T \frac{dz}{ds} + (T + dT) \frac{d}{ds} (z + dz) + q_z ds = 0.$$

Произведя необходимые преобразования, сокращение членов, а также отбросив величины высшего порядка малости, получаем следующие уравнения равновесия гибкой нити:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + q_x = 0; \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + q_z = 0. \quad (II.2)$$

В настоящей работе рассматривается наиболее распространенный вид нитей в вантовых покрытиях — пологие гибкие. Пологой принято считать такую нить, у которой до и после деформации углы наклона касательных в любой точке ее к оси координат, проходящей через две крайние точки нити или параллельной такой соединительной

линии, представляют собой достаточно малые величины, что дает возможность считать $\sin \alpha \approx \tg \alpha$, а $\cos \alpha \approx 1$ (рис. II.6).

Исходя из допустимой погрешности вычислений, можно принять определенные соотношения стрелы провеса нити к ее пролету, при которых последняя может считаться пологой. В вантовых покрытиях гибкие нити с отношением стрелы провеса к пролету $\frac{f}{l} \leq \frac{1}{10}$ могут считаться практически пологими. При таких соотношениях погрешность приближенных формул незначительна и находится в пределах точности наших представлений о величинах реальных нагрузок, действующих на конструкции. Кроме того, гипотеза о пологости значительно упрощает расчетные формулы.

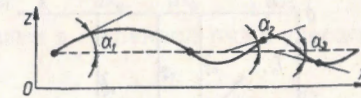


Рис. II.6. К определению пологой нити.

Усилие в нити T можно выразить через его горизонтальную проекцию H : $T = H \frac{ds}{dx}$. Вследствие пологости $\frac{dx}{ds} \approx 1$ и $ds \approx dx$. Таким образом $T \approx H$.

Величина H — горизонтальная проекция усилия в нити называется распором и для пологих нитей с достаточной степенью точности для расчета может отождествляться с усилием в нити.

Следовательно, уравнения равновесия при непрерывной нагрузке для пологой нити, представляющей собой непрерывную шарнирную цепь, примут следующий вид:

$$\frac{d}{dx} H + q_x = 0; \quad \frac{d}{dx} \left(H \frac{dz}{dx} \right) + q_z = 0.$$

Рассмотрим равновесие узла нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы, под воздействием произвольной узловой нагрузки, находящейся вместе с нитью в одной плоскости. Силы, действующие на узел, и обозначения их показаны на рис II.7.

Уравнения равновесия запишем в следующем виде:

$$\sum X = 0; \quad -T_{n-1, n} \frac{x_n - x_{n-1}}{s_{n-1, n}} + T_{n, n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{s_{n, n+1}} + P_x = 0;$$

$$\sum Z = 0; \quad -T_{n-1, n} \frac{z_n - z_{n-1}}{s_{n-1, n}} + T_{n, n+1} \frac{z_{n+1} - z_n}{s_{n, n+1}} + P_z = 0;$$

или

$$-T_{n-1, n} \frac{\Delta x_{n-1, n}}{s_{n-1, n}} + T_{n, n+1} \frac{\Delta x_{n, n+1}}{s_{n, n+1}} + P_x = 0;$$

$$-T_{n-1, n} \frac{\Delta z_{n-1, n}}{s_{n-1, n}} + T_{n, n+1} \frac{\Delta z_{n, n+1}}{s_{n, n+1}} + P_z = 0.$$

Примем следующее обозначение:

$$-T_{n-1, n} \frac{\Delta x_{n-1, n}}{s_{n-1, n}} + T_{n, n+1} \frac{\Delta x_{n, n+1}}{s_{n, n+1}} = \nabla_n \left[T \frac{\Delta x}{s} \right];$$

$$-T_{n-1, n} \frac{\Delta z_{n-1, n}}{s_{n-1, n}} + T_{n, n+1} \frac{\Delta z_{n, n+1}}{s_{n, n+1}} = \nabla_n \left[T \frac{\Delta z}{s} \right].$$

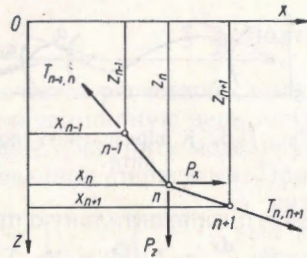


Рис. II.7. Равновесие узла нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы.

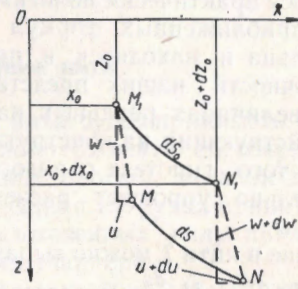


Рис. II.8. Деформации элемента нити.

Для пологих нитей $\Delta x \approx s$ и $H \approx T$. Учитывая это, уравнения равновесия для пологих нитей примут вид:

$$\nabla_n H + P_x = 0; \quad \nabla_n \left[H \frac{\Delta z}{\Delta x} \right] + P_z = 0.$$

Рассмотрим деформации элемента нити под действием произвольной нагрузки (рис. II.8).

Точка M , имеющая начальные координаты x_0, z_0 , получит вертикальное w и горизонтальное u перемещения. Точка N_1 с начальными координатами $x_0 + dx_0, z_0 + dz_0$ получит перемещения соответственно $w + dw$ и $u + du$.

Таким образом деформированное состояние элемента нити определяется следующими координатами: для точки $M_1 (x_0 + u, z_0 + w)$ и для точки $N_1 (x_0 + dx_0 + u + du, z_0 + dz_0 + w + dw)$. При этом $x = x_0 + u$ и $z = z_0 + w$.

Начальную длину элемента нити выразим следующим образом:

$$ds_0 = \sqrt{dx_0^2 + dz_0^2}.$$

Аналогично выразится и конечная деформированная длина элемента

$$ds = \sqrt{(dx_0 + du)^2 + (dz_0 + dw)^2}.$$

Произведем некоторые преобразования выражения конечной длины элемента нити

$$ds = \sqrt{dx_0^2 + 2dx_0 du + du^2 + dz_0^2 + 2dz_0 dw + dw^2} =$$

$$= \sqrt{dx_0^2 + dz_0^2} \times$$

$$\times \left(\sqrt{1 + \frac{du^2}{dx_0^2 + dz_0^2} + 2 \frac{dx_0 du}{dx_0^2 + dz_0^2} + 2 \frac{dz_0 dw}{dx_0^2 + dz_0^2} + \frac{dw^2}{dx_0^2 + dz_0^2}} \right)$$

или с учетом выражения начальной длины элемента

$$ds = ds_0 \sqrt{1 + \left(\frac{du}{ds_0} \right)^2 + 2 \frac{dx_0}{ds_0} \cdot \frac{du}{ds_0} + 2 \frac{dz_0}{ds_0} \cdot \frac{dw}{ds_0} + \left(\frac{dw}{ds_0} \right)^2}.$$

Подкоренное выражение раскладываем в степенной ряд и удерживаем только два первых члена

$$ds = ds_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{ds_0} \right)^2 + \frac{dx_0}{ds_0} \cdot \frac{du}{ds_0} + \frac{dz_0}{ds_0} \cdot \frac{dw}{ds_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds_0} \right)^2 \right].$$

Учитывая, что в пологих нитях $ds_0 \approx dx_0$, выражение конечной длины элемента нити представим в новом виде

$$ds = dx_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx_0} \right)^2 + \frac{du}{dx_0} + \frac{dz_0}{dx_0} \cdot \frac{dw}{dx_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_0} \right)^2 \right].$$

Введем гипотезу о малости горизонтальных перемещений точек нити. То есть будем считать, что в горизонтальном направлении нить деформируется, подчиняясь всем законам линейно-деформируемых систем. В силу этого примем, что величина $\left(\frac{du}{dx_0} \right)^2 < \frac{du}{dx_0}$ и ею можно пренебречь.

Таким образом, окончательное выражение длины элемента нити после деформации примет вид:

$$ds = dx_0 \left[1 + \frac{du}{dx_0} + \frac{dz_0}{dx_0} \cdot \frac{dw}{dx_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_0} \right)^2 \right].$$

Определим относительное удлинение нити

$$\varepsilon = \frac{ds - dx_0}{dx_0}$$

или, учитывая выражение для ds ,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx_0} + \frac{dz_0}{dx_0} \cdot \frac{dw}{dx_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_0} \right)^2. \quad (II.3)$$

Как видим, удлинение элемента нити определяется относительно горизонтальной проекции, а не длины его. Определение удлинения нитей [30], исходя из их пролета, может привести в крайнем случае к возможной ошибке до 5,3% (для нитей с соотношением $\frac{l}{l} \leq \frac{1}{10}$).

Физический процесс деформации нити, следуя закону Гука, можно описать следующими формулами:

$$H = F\sigma; \quad \sigma = E\varepsilon, \quad (II.4)$$

где F — площадь поперечного сечения нити;
 E — модуль упругости материала нити;
 σ — нормальные растягивающие напряжения в нити.

Имея выражение величины относительного удлинения элемента нити, напишем уравнение, связывающее распор с перемещениями

$$H = EF \left[\frac{du}{dx_0} + \frac{dz_0}{dx_0} \cdot \frac{dw}{dx_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_0} \right)^2 \right]. \quad (II.5)$$

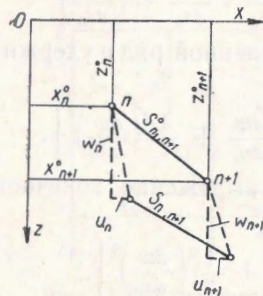


Рис. II.9. Деформации нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы.

Рассмотрим аналогичные деформации нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы. Для этого рассмотрим перемещения концов произвольного стержня $n, n+1$ такой системы (рис. II.9).

После выкладок, аналогичных вышеприведенным, уравнение, связывающее распор с деформациями нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы, будет иметь вид

$$H = EF \left[\frac{\Delta u}{\Delta x_0} + \frac{\Delta z_0}{\Delta x_0} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x_0} \right)^2 \right]. \quad (II.6)$$

Сравним величины $\frac{c}{\Delta x_0}$ и $\frac{c}{\Delta x}$, где $c = \Delta u, \Delta z_0, \Delta w$. Так как $\Delta x = \Delta x_0 + \Delta u$, можем записать $\frac{c}{\Delta x} = \frac{c}{\Delta x_0 + \Delta u}$.

Раскладывая в степенной ряд, получим

$$\frac{c}{\Delta x} = \frac{c}{\Delta x_0} \left[1 - \frac{c}{\Delta x_0} + \left(\frac{c}{\Delta x_0} \right)^2 \dots \right].$$

Нетрудно заметить, что все члены ряда, начиная со второго, пренебрежимо малы по сравнению с первым. Следовательно, можно записать, что $\frac{c}{\Delta x} \approx \frac{c}{\Delta x_0}$.

Аналогично этому для дифференциальной формы уравнений можно принять, что $\frac{c}{dx} \approx \frac{c}{dx_0}$, где $c = du, dz_0, dw$.

С учетом этого, уравнения связи распора с перемещениями в нити можно несколько изменить. Измененные уравнения приведены ниже в сводке.

Для расчета плоской пологой нити, представленной в виде непрерывной шарнирной цепи уравнения в дифференциальной форме, примут вид:

равновесия

$$\frac{d}{dx} H + q_x = 0; \quad \frac{d}{dx} \left(H \frac{dz}{dx} \right) + q_z = 0; \quad (II.7)$$

геометрическое (II.3) и физическое (II.4).

Геометрическое и физическое уравнения обычно объединяют в одно под названием уравнения деформации (II.5).

Для нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы уравнения в дискретной форме:

$$\nabla_n H + P_x = 0; \quad \nabla_n \left[H \frac{\Delta z}{\Delta x} \right] + P_z = 0; \quad (II.8)$$

деформации (физико-геометрическое) (II. 6).

Не производя промежуточных выкладок, приведем формулы для расчета пространственной нити под действием произвольной нагрузки. При этом будем пользоваться пространственной системой прямоугольных координат $OXYZ$. Перемещения точек нити вдоль координатной оси Y обозначим через v . Относительно оси X нить, по-прежнему, принимается полой.

Для расчета пространственной полой нити, представленной в виде непрерывной шарнирной цепи уравнения:

$$\frac{d}{dx} H + q_x = 0; \quad \frac{d}{dx} \left(H \frac{dy}{dx} \right) + q_y = 0; \quad (II.9)$$

$$\frac{d}{dx} \left(H \frac{dz}{dx} \right) + q_z = 0,$$

деформации

$$H = EF \left[\frac{du}{dx} + \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{dy_0}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]. \quad (II.10)$$

Для нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы уравнения:

$$\nabla_n H + P_x = 0; \quad \nabla_n \left[H \frac{\Delta y}{\Delta x} \right] + P_y = 0; \quad \nabla_n \left[H \frac{\Delta z}{\Delta x} \right] + P_z = 0, \quad (II.11)$$

деформации

$$H = EF \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \right)^2 \right]. \quad (II.12)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи расчетных формул для гибких плоских пологих нитей.

Нить под действием произвольной только вертикальной нагрузки. В этом случае $q_x = 0$ и $q_z \neq 0$ и уравнения равновесия (II.7) примут следующий вид:

$$\frac{d}{dx} H = 0; \quad \frac{d}{dx} \left(H \frac{dz}{dx} \right) + q_z = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $H = \text{const}$ и, таким образом, второе уравнение преобразуется к следующему виду:

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} + q_z = 0. \quad (\text{II.13})$$

Обе части уравнения деформации (II.5) проинтегрируем по длине пролета нити l

$$H \int_l dx = EF \left[\int_l \frac{du}{dx} dx + \int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right];$$

$$Hl = EF \left[(u_k - u_n) + \int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right]; \quad (\text{II.14})$$

$$H = \frac{EF}{l} \Delta^* u + \frac{EF}{l} \int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{EF}{2l} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx,$$

где $\Delta^* u$ — полная величина деформации нити в горизонтальном направлении и выражается интегралом $\int du$.

После интегрирования в пределах от 0 по всей длине нити l деформации в горизонтальном направлении, естественно, выражаются через перемещения конечной и начальной точек нити

$$\int du = u_k - u_n.$$

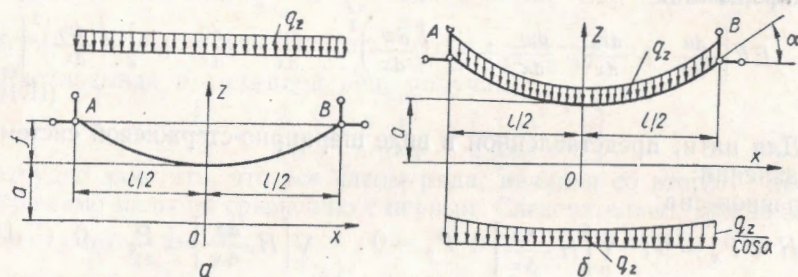


Рис. II. 10. Нить под действием равномерной нагрузки, распределенной по длине:

a — пролета; b — нити.

Представляет интерес сравнение фигур равновесия нити под воздействием вертикальной нагрузки, рассматривая ее, как пологую и не вводя гипотезы о пологости.

Проинтегрировав уравнение равновесия (II.13) два раза, найдем фигуру равновесия нити, равномерно нагруженной по пролету распределенной нагрузкой q_z . Произвольные постоянные при интегрировании определим, исходя из положения нити относительно системы координат по рис. II.10, a . Полагая, что при $x = 0, z = a$ и, вместе

с тем, приняв, что $a = \frac{H}{q_z}$, получим уравнение фигуры равновесия

$$z = a + \frac{x^2}{2a},$$

т. е. имеем уравнение квадратной параболы, смещенной по оси z от начала координат на величину a .

В том случае, когда при расчете не вводят гипотезу о пологости нити, равномерно распределенная нагрузка на единицу пролета по длине изменяется, т. е. нагрузка принимается равномерно распределенной не по длине пролета, а по длине нити (рис. II. 10, b), и уравнение формы равновесия будет иметь вид:

$$Z = a \cdot \text{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

где a — смещение вершины кривой относительно начала координат вдоль оси Z . При этом, как и прежде, $a = \frac{H}{q_z}$.

Таким образом, форма равновесия представляет собой цепную линию. Разложив показательные функции уравнения цепной линии в степенные ряды и выполнив необходимые преобразования, получим уравнение цепной линии в виде следующего ряда:

$$Z = a \left(1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^4}{a^4} + \dots \right).$$

Нетрудно заметить, что первые два члена ряда представляют собой уравнение параболы второй степени, выведенное выше при рассмотрении фигуры равновесия нити при нагрузке, равномерно распределенной по ее горизонтальному пролету.

По аналогии с уравнением (II.7) уравнение равновесия для каждого узла нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы, будет иметь вид:

$$H \nabla \left[\frac{\Delta z}{\Delta x} \right] + P_z = 0. \quad (\text{II.15})$$

По аналогии с уравнением (II.14) уравнение деформации примет вид:

$$H = \frac{EF}{l} \left[\Delta^* u + \sum_1^m \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} \Delta x + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \right]. \quad (\text{II.16})$$

Нить с несмещаемыми опорами в горизонтальном направлении под действием вертикальной нагрузки. В этом случае горизонтальные смещения начальной и конечной точек $u_k = u_n = 0$ и, таким образом, $\Delta^* u = 0$.

Следовательно, для нити, представленной в виде непрерывной шарнирной цепи, уравнения равновесия примут вид (II.13),

а деформации

$$H = \frac{EF}{l} \left[\int_1 \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_1 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right]. \quad (\text{II.17})$$

Для нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы, уравнения равновесия примут вид (II.15), а деформации

$$H = \frac{EF}{l} \left[\sum_1^m \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} \Delta x + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \right]. \quad (\text{II.18})$$

Нить с опорами на разных уровнях. Если перепад высот опорных точек нити небольшой, то расчет производится как для обычных нитей. При этом погрешность находится в пределах введенной гипотезы о пологости.

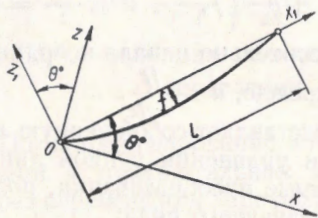


Рис. II.11. Нить с опорами на разных уровнях.

В случае значительного перепада высот опорных точек нити, последнюю можно рассчитать как пологую относительно линии, соединяющей опорные точки (рис. II.11). Для этого систему координат следует повернуть таким образом, чтобы ось X_1 была параллельна линии, соединяющей опорные точки. Используя приведенные

формулы, соответствующие каждому конкретному случаю, определяют усилия и перемещения, величины которых затем преобразуют относительно первоначальной системы координат.

Нить с начальной длиной, равной пролету под действием произвольной горизонтальной нагрузки. В этом случае $q_x \neq 0$; $q_z = 0$ и уравнения равновесия (II.7) примут вид:

$$\frac{dH}{dx} + q_x = 0; \quad \frac{d}{dx} \left(H \frac{dx}{dz} \right) = 0.$$

Так как рассматриваются пологие нити относительно принятой системы координат, то $\frac{dx}{dz} = 0$ и, следовательно, второе уравнение всегда удовлетворяется тождественно. Учитывая подобие форм нити до и после деформации, можно записать, что и $\frac{dw}{dx} = 0$.

Таким образом, напряженно-деформированное состояние пологой нити под действием произвольной горизонтальной нагрузки описывают уравнениями:

$$\text{равновесия } \frac{d}{dx} H + q_x = 0;$$

$$\text{деформации } H = EF \frac{du}{dx}. \quad (\text{II.19})$$

По аналогии запишем уравнения для нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы:

$$\text{равновесия } \nabla_n H + P_x = 0;$$

$$\text{деформации } H = EF \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (\text{II.20})$$

Нетрудно заметить, что уравнения (II.19) и (II.20) характеризуют состояние элемента, нагруженного осевыми силами, каким в действительности и является пологая нить под действием горизонтальной нагрузки.

Учитывая, что величина усилия в нити не является постоянной, а изменяется по длине нити в зависимости от горизонтальной нагрузки, уравнения (II.19) и (II.20) записаны для деформации дифференциально малого элемента нити (стержня) и не проинтегрированы (просуммированы) для всей нити, как было выполнено ранее для других частных случаев.

Нить с предварительным натяжением под действием произвольной нагрузки. Предварительное натяжение можно рассматривать как начальное усилие в нити. Окончательное усилие в нити будет складываться из начального предварительного натяжения и приращения усилия от деформации.

Таким образом, уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние предварительно напряженной нити под действием произвольной нагрузки будет иметь вид (II.7), а деформации

$$H = H_0 + \frac{EF \Delta^* u}{l} + \frac{EF}{l} \int_1 \frac{dz_0}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \frac{EF}{2l} \int_1 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (\text{II.21})$$

Для нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы уравнения: равновесия (II.8) и деформации

$$H = H_0 + \frac{EF}{l} \Delta^* u + \frac{EF}{l} \sum_1^m \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} \Delta x + \frac{EF}{2l} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \Delta x. \quad (\text{II.22})$$

Нить при отсутствии нагрузки в пределах рассматриваемой длины. Рассмотрение такого частного случая представляет интерес с точки зрения сравнения расчетных схем нитей в виде непрерывной шарнирной цепи и в виде шарнирно-стержневой системы. В этом случае $q_x = 0$; $q_z = 0$ и уравнение (II.13) примет вид:

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

Если $H = 0$, то величина $\frac{d^2 z}{dx^2}$, являющаяся для пологих нитей кривизной, при отсутствии нагрузок может принимать значения, отличные от нуля, что свидетельствует о принятии нитью в пространстве (плоскости) любой формы. Впрочем, это очевидно из чисто

физического смысла состояния ненагруженной нити. Не рассматривая такой тривиальный случай, перейдем к следующему возможному состоянию.

Примем, что $H \neq 0$, тогда $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$.

Равенство нулю выражения кривизны нити свидетельствует, что фигура равновесия нити, естественно, представляет собой прямую линию. Поэтому можем записать, что

$$\frac{dz}{dx} = \text{const} = \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

С другой стороны $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z_0}{dx^2} + \frac{d^2w}{dx^2} = 0$,

$$\text{откуда } \frac{d^2z_0}{dx^2} = -\frac{d^2w}{dx^2}.$$

Это свидетельствует, что формы нити до и после деформации подобны и

$$\frac{dw}{dx} = \text{const} = \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta x} = \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Обе части уравнения деформации (II.5) проинтегрируем по длине некоторого участка нити $n, n+1$, имеющего длину Δx .

$$H \int_{\Delta x} dx = EF \left[\int_{\Delta x} \frac{du}{dx} dx + \int_{\Delta x} \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_{\Delta x} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right];$$

$$H \Delta x = EF \left[(u_{n+1} - u_n) + \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \Delta w + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \right].$$

Разделив обе части на Δx и приняв, что $u_{n+1} - u_n = \Delta u$, получаем уравнение деформации для нити, представленной в виде непрерывной шарнирной цепи при отсутствии нагрузки в пределах участка нити длиной Δx .

$$H = EF \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \frac{\Delta w}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \right].$$

Нетрудно заметить, что это уравнение полностью совпадает с уравнением деформации (II.6), выведенным для нити, представленной в виде шарнирно-стержневой системы с узловыми нагрузками. Такое совпадение уравнений свидетельствует о том, что принятие расчетной схемы нити в виде шарнирно-стержневой системы полностью соответствует точному решению при отсутствии внеузловой нагрузки и рассмотрении нити как непрерывной шарнирной цепи.

§ 3. Радиальные системы

Сеть вантового покрытия радиальной системы обладает той особенностью, что все нити ее имеют общий центральный узел. В том случае, когда этот узел каким-либо способом закреплен от горизонтальных смещений, расчет покрытия радиальной системы сводится к расчету

отдельных нитей. Получающаяся в этом случае неуровновешенность всего покрытия в горизонтальной плоскости компенсируется изгибной жесткостью бортового элемента.

Другой характер напряженно-деформированного состояния покрытия будет в том случае, когда общий узел имеет возможность смещаться.

Рассмотрим зависимости напряженно-деформированного состояния однослойного вантового покрытия радиальной системы под действием произвольной вертикальной нагрузки. При этом каждую нить будем рассматривать как непрерывную шарнирную цепь, а всю систему в целом как шарнирно-стержневую.

Начало пространственной прямоугольной системы координат $OXYZ$ поместим в центр рассматриваемого радиального покрытия (рис. II.12, а). Уравнения равновесия и деформации будем выражать при помощи новой подвижной системы координат $Ox_iY_iZ_i$.

Горизонтальное смещение элемента i -той нити относительно системы координат $OXYZ$ можно выразить следующим соотношением:

$$u_{i(x)} = u_i \cos \Theta + v_i \sin \Theta,$$

где u_i — горизонтальное смещение точки нити вдоль оси X_i ;

v_i — то же, вдоль оси Y_i ;

Θ — угол наклона оси X_i (Y_i) к оси X (Y).

Воспользуемся уравнением деформации отдельной нити под действием произвольной вертикальной нагрузки (II.14) и, учитывая вышеуказанное соотношение, запишем уравнение деформации для любой i -той нити радиального покрытия

$$H_i = \frac{E_i F_i}{l_i} \left[\Delta u_i \cos \Theta + \Delta v_i \sin \Theta + \int_{l_i} \frac{dz_0}{dx_i} \cdot \frac{dw}{dx_i} dx_i + \frac{1}{2} \int_{l_i} \left(\frac{dw}{dx_i} \right)^2 dx_i \right]. \quad (\text{II.23})$$

Уравнение равновесия для i -той нити, аналогично (II.13), будет иметь вид:

$$H_i \frac{d^2z}{dx_i^2} + q_z = 0.$$

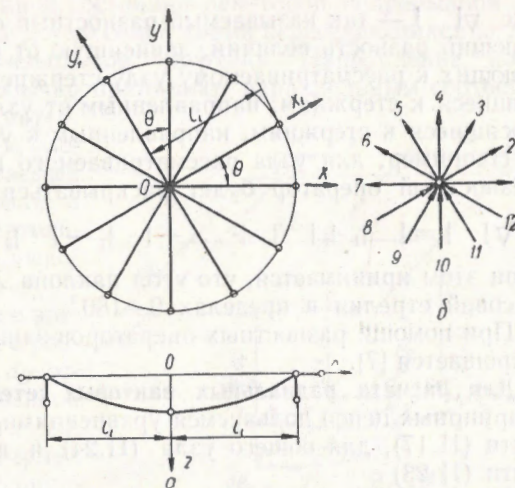


Рис. II.12. Радиальная система вант.

Спроектировав все распоры, действующие на узел, на три координатные оси X, Y, Z , получим следующие уравнения равновесия центрального узла радиального покрытия:

$$\begin{aligned} \nabla [H \cos \Theta]_i &= 0; \\ \nabla [H \sin \Theta]_i &= 0; \\ \nabla \left[H \frac{dz}{dx} \right]_i &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

где ∇ — так называемый разностный оператор для узла, означающий разность величин, зависящую от направлений X_i , примыкающих к рассматриваемому узлу стержней, т. е. величины, относящиеся к стержням, направленным от узла, минус величины, относящиеся к стержням, направленным к узлу.

Например, для узла рассматриваемого покрытия (рис. II.12, б) разностный оператор будет раскрываться следующим образом:

$$\nabla | = | l_1 + | l_2 + \dots + | l_7 - | l_8 - | l_9 - \dots - | l_{12}.$$

При этом принимается, что угол наклона X_i отсчитывается против часовой стрелки в пределах $0-180^\circ$.

При помощи разностных операторов запись уравнений несколько упрощается [7].

Для расчета радиальных вантовых сетей в виде непрерывных шарнирных цепей пользуемся уравнениями равновесия для каждой нити (II.17), для общего узла (II.24) и деформации для каждой нити (II.23).

Не приводя промежуточных выкладок, по аналогии запишем уравнения для нитей, представленных в виде шарнирно-стержневых систем. Уравнение равновесия:

для каждой нити

$$H \nabla \left[\frac{\Delta z}{\Delta x} \right]_i + P_z = 0; \quad (\text{II.25})$$

для общего узла

$$\begin{aligned} \nabla [H \cos \Theta]_i &= 0; \\ \nabla [H \sin \Theta]_i &= 0; \\ \nabla \left[H \frac{\Delta z}{\Delta x} \right]_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Уравнение деформации для каждой нити

$$\begin{aligned} H_i = \frac{E_i F_i}{l_i} \left[\Delta u \cos \Theta + \Delta v \sin \Theta + \sum_1^m \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} \Delta x + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right)^2 \Delta x \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Уравнения (II.17) или (II.25) составляются для каждой нити сети; уравнения (II.24) или (II.26) — для одного центрального узла; количество уравнений (II.23) или (II.27) находится также в соответствии с количеством нитей в сети.

§ 4. Перекрестные сети из двух семейств нитей

Рассмотрим напряженное состояние некоторой непрерывной поверхности, образованной двумя семействами пересекающихся нитей, под воздействием произвольной нагрузки. Направления координатных осей X и Y обычно принимают параллельным соответствующим направлениям нитей. Поверхность покрытия и, следовательно, рассматриваемый элемент принимается, как и прежде, пологим относительно горизонтальной плоскости XOY .

Рассмотрим равновесие элемента поверхности сети с размерами в плане dx и dy относительно пространственной прямоугольной системы координат $OXYZ$. Материал элемента таков, что не сопротивляется сдвигающим усилиям в своей поверхности, а лишь усилиям, действующим вдоль направления нитей.

Все обозначения и действующие усилия показаны на рис. II.13, положение элемента соответствует деформированному состоянию.

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum x &= 0; \quad -H_x \cdot dy + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) dy + q_x \cdot dx \cdot dy = 0; \\ \sum y &= 0; \quad -H_y \cdot dx + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) dx + q_y \cdot dx \cdot dy = 0; \\ \sum z &= 0; \quad -H_x \cdot dy \frac{\partial z}{\partial x} + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{\partial z}{\partial x} dx \right) dy - \\ &\quad - H_y \cdot dx \frac{\partial z}{\partial y} + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(z + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx + \\ &\quad + q_z \cdot dx \cdot dy = 0. \end{aligned}$$

Производя необходимые преобразования, сокращение членов, а также отбросив величины высшего порядка малости, получаем

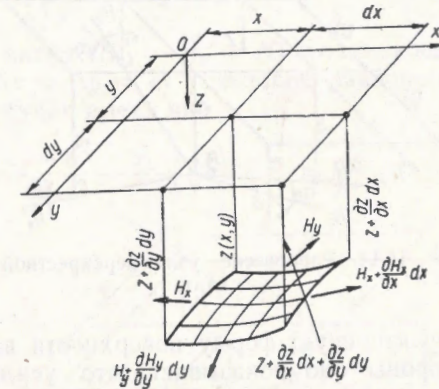


Рис. II.13. Равновесие элемента перекрестной сети вант.

уравнения равновесия для перекрестных сетей:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + q_x = 0; \quad (II.28)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + q_y = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H_x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) + q_z = 0. \quad (II.29)$$

При действии только вертикальной нагрузки, уравнения (II.28) — (II.29) упрощаются. При отсутствии нагрузки q_x и q_y из уравнений (II.28) следует, что H_x и $H_y = \text{const}$, а уравнения (II.29) преобразуются к виду:

$$H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + q_z = 0. \quad (II.30)$$

Величины $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

являются кривизнами соответствующих направлений нитей, в связи с чем уравнение (II.30)

характеризует форму поверхности вантового покрытия. С другой стороны, оно показывает, что усилия в нитях в геометрическом аспекте не зависят от величин пролетов последних и определяются их кривизной, т. е. формой.

Если же поверхность, описываемая уравнением (II.30), является предварительно напряженной, то при отсутствии внешней нагрузки усилия H_x и H_y (в данном случае усилия предварительного напряжения) будут положительны только при различных знаках кривизн $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Впрочем, это очевидно из чисто механических соображений явления предварительного напряжения в вантовых сетях.

Рассмотрим теперь равновесие некоторого узла a регулярной вантовой сети (рис. II.14) под действием узловой вертикальной нагрузки P_z . Аппликаты точек узла на рисунке соответствуют деформированному состоянию вантовой сети.

Спроектируем все силы, действующие на узел, на вертикальную ось

$$-H_y \cdot \text{tg } \alpha_b - H_y \text{tg } \alpha_l + H_x \cdot \text{tg } \alpha_c + H_x \cdot \text{tg } \alpha_d + P_z = 0,$$

где

$$\text{tg } \alpha_b = \frac{z_a - z_b}{\Delta y}; \quad \text{tg } \alpha_l = \frac{z_a - z_l}{\Delta y};$$

$$\text{tg } \alpha_c = \frac{z_c - z_a}{\Delta x}; \quad \text{tg } \alpha_d = \frac{z_d - z_a}{\Delta x}.$$

Подставив эти значения в уравнение равновесия и приведя к общему знаменателю, получим

$$H_y \frac{z_b - 2z_a + z_l}{\Delta y} + H_x \frac{z_d - 2z_a + z_c}{\Delta x} + P_z = 0.$$

Примем следующие обозначения: $\Delta^2 z_x = \frac{z_d - 2z_a + z_c}{\Delta x}$; $\Delta^2 z_y = \frac{z_b - 2z_a + z_l}{\Delta y}$.

Тогда уравнение равновесия можно записать более компактно

$$H_x (\Delta^2 z_x) + H_y (\Delta^2 z_y) + P_z = 0. \quad (II.31)$$

При одинаковых усилиях в нитях ($H_x = H_y = H$) и одинаковых расстояниях между нитями ($\Delta x = \Delta y = \lambda$) уравнение равновесия для узла в развернутом виде будет иметь вид

$$H \left(\frac{z_l - z_a}{\lambda} + \frac{z_c - z_a}{\lambda} - \frac{z_a - z_b}{\lambda} - \frac{z_a - z_d}{\lambda} \right) + P_z = 0$$

или

$$H \frac{-4z_a + z_b + z_c + z_d + z_l}{\lambda} + P_z = 0.$$

Рассмотрим деформации элемента поверхности сети под действием произвольной вертикальной нагрузки (рис. II.15). В результате деформации точки элемента получают перемещения u, v, w и их приращение вдоль координатных осей соответственно X, Y, Z . Не приводя промежуточных выкладок, последовательность которых легко проследить на выводе уравнений деформации для одной нити по аналогии с (II.14), запишем уравнения деформации для нитей двух направлений:

$$H_x = \frac{EF_x}{L_x} \left[\Delta^* u + \int_{i_x} \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_{i_x} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right];$$

$$H_y = \frac{EF_y}{L_y} \left[\Delta^* v + \int_{i_y} \frac{dz_0}{dy} \cdot \frac{dw}{dy} dy + \frac{1}{2} \int_{i_y} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 dy \right]. \quad (II.32)$$

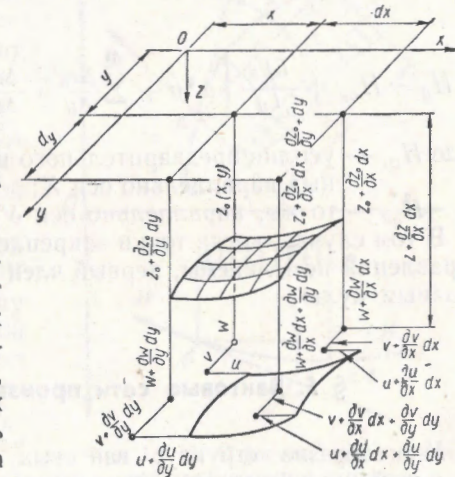


Рис. II.15. Деформации элемента перекрестной сети вант.

По аналогии с (II.16) запишем уравнение деформации для двух направлений нитей шарнирно-стержневой вантовой сети:

$$H_x = \frac{EF_x}{L_x} \left[\Delta^* u + \sum_1^m \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} \Delta x + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \right]; \quad (\text{II.33})$$

$$H_y = \frac{EF_y}{L_y} \left[\Delta^* v + \sum_1^m \frac{\Delta z_0}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta y} \Delta y + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{\Delta y} \right)^2 \Delta y \right]. \quad (\text{II.34})$$

Для расчета перекрестных вантовых сетей с непрерывным распределением материала пользуемся уравнениями равновесия (II.30) и деформации (II.32); для расчета вантовых сетей в виде шарнирно-стержневых систем — уравнениями равновесия (II.31) и деформации (II.33) и (II.34).

В случае предварительно напряженной сети в виде шарнирно-стержневых систем уравнения (II.34) деформации принимают вид:

$$H_x = H_{ox} + \frac{EF_x}{L_x} \left[\Delta^* u + \sum_1^m \frac{\Delta z_0}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} \Delta x + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \right]; \quad (\text{II.35})$$

$$H_y = H_{oy} + \frac{EF_y}{L_y} \left[\Delta^* v + \sum_1^m \frac{\Delta z_0}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta y} \Delta y + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{\Delta y} \right)^2 \Delta y \right],$$

где H_{ox} — усилие предварительного напряжения нитей, направленных параллельно оси X ;

H_{oy} — то же, параллельно оси Y .

В том случае, когда точки закрепления нитей любого из двух направлений несмещаемы, первый член уравнений (II.35) становится равным нулю.

§ 5. Вантовые сети произвольной структуры

Многообразие структур вантовых сетей, отличающихся иногда большой нерегулярностью, предопределяет необходимость более общего подхода при выводе уравнений напряженно-деформированного состояния их.

В качестве основного элемента при рассмотрении напряженно-деформированного состояния произвольной пологой сети примем нить с границами от узла до узла. Под действием произвольной нагрузки такая нить, вполне естественно, должна быть рассмотрена в пространстве.

Относительно системы координат $Ox_i y_i z_i$, расположенной таким образом, что ось X_i проходит через проекции конечных точек нити

на горизонтальную плоскость, для некоторой нити i запишем уравнения равновесия (II.9):

$$\frac{d}{dx_i} H + q_{xi} = 0; \quad (\text{II.36})$$

$$\frac{d}{dx_i} \left(H \frac{dy_i}{dx_i} \right) + q_{yi} = 0; \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{d}{dx_i} \left(H \frac{dz_i}{dx_i} \right) + q_{zi} = 0; \quad (\text{II.38})$$

и, в соответствии с (II.10), уравнение деформации

$$H = EF_i \left[\frac{du}{dx} + \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{dy_0}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]. \quad (\text{II.39})$$

Теперь остается рассмотреть равновесие узлов произвольной вантовой сети, образованной нитями. Количество нитей, сходящихся в узле, а также их ориентация относительно некоторой постоянной системы прямоугольных пространственных координат $OXYZ$ могут быть произвольными. В системе координат $OXYZ$ направление оси Z принимается таким же, как в подвижной системе координат $Ox_i y_i z_i$, зависящей от положения произвольного направления i -той нити.

Проекция произвольной i -той нити $K, K+1$ на плоскость XOY показана на рис. II.16. Длину горизонтальной проекции данной нити обозначим через l_i , а угол наклона оси X_i к оси X в плоскости XOY обозначим через θ_{xi} . Угол наклона проекции усилия в нити на плоскость XOY к оси X обозначим через Θ_i . Предположим, что точка K , наряду с другими аналогичными точками произвольных нитей, принадлежит некоторому узлу сети.

Условие равновесия в плоскости XOY выразится следующими уравнениями:

$$\sum X = 0; \quad \nabla_k [H \cos \Theta]_i + P_x = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad \nabla_k [H \sin \Theta]_i + P_y = 0,$$

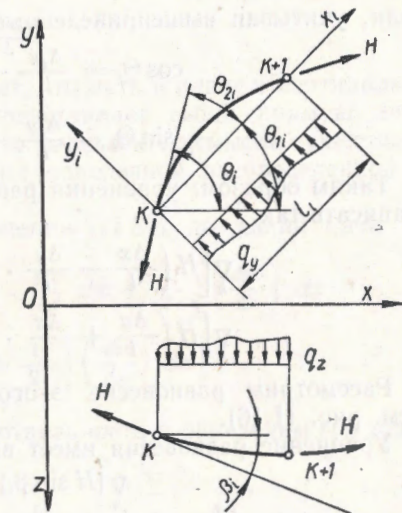


Рис. II. 16. К расчету вантовых сетей произвольных структур.

Условие равновесия в плоскости XOY выразится следующими уравнениями:

Условие равновесия в плоскости XOY выразится следующими уравнениями:

где ∇_k — разностный оператор для узла;

P_x, P_y — внешняя узловaя нагрузка на сеть.

Исходя из обозначения на рис. II.16, можем записать, что $\Theta_i = \Theta_{1i} + \Theta_{2i}$.

Кроме того, можем записать, что

$$\cos \Theta_{1i} = \frac{\Delta_i x}{l_i} \quad \text{и} \quad \sin \Theta_{1i} = \frac{\Delta_i y}{l_i}.$$

Учитывая, что i -тая нить пологa относительно своей оси X_i , имеем:

$$\cos \Theta_{2i} \approx 1 \quad \text{и} \quad \sin \Theta_{2i} \approx \operatorname{tg} \Theta_{2i}; \quad \operatorname{tg} \Theta_{2i} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_i.$$

Функции суммы двух углов можно представить следующим образом:

$$\cos (\Theta_{1i} + \Theta_{2i}) = \cos \Theta_{1i} \cos \Theta_{2i} - \sin \Theta_{1i} \sin \Theta_{2i};$$

$$\sin (\Theta_{1i} + \Theta_{2i}) = \sin \Theta_{1i} \cos \Theta_{2i} + \cos \Theta_{1i} \sin \Theta_{2i},$$

или, учитывая вышеприведенные соотношения для i -той нити,

$$\cos \Theta_i = \frac{\Delta_i x}{l_i} - \frac{\Delta_i y}{l_i} \left(\frac{dy}{dx} \right)_i;$$

$$\sin \Theta_i = \frac{\Delta_i y}{l_i} + \frac{\Delta_i x}{l_i} \left(\frac{dy}{dx} \right)_i.$$

Таким образом, уравнения равновесия в плоскости XOY можно записать так:

$$\begin{aligned} \nabla_k \left[H \left(\frac{\Delta x}{l} - \frac{\Delta y}{l} \cdot \frac{dy}{dx} \right) \right]_i + P_x &= 0; \\ \nabla_k \left[H \left(\frac{\Delta y}{l} + \frac{\Delta x}{l} \cdot \frac{dy}{dx} \right) \right]_i + P_y &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Рассмотрим равновесие этого же узла относительно оси Z (см. рис. II.16).

Уравнение равновесия имеет вид:

$$\nabla_k [H \sin \beta_i] + P_z = 0,$$

где β_i — угол наклона проекции усилия в нити к оси X_i ;

P_z — внешняя узловaя нагрузка.

Учитывая, что нить пологa относительно оси X_i , можем записать следующие выражения:

$$\sin \beta_i \approx \operatorname{tg} \beta_i \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \beta_i = \left(\frac{dz}{dx_i} \right),$$

и, таким образом, уравнение равновесия в вертикальной плоскости примет вид

$$\nabla_k \left[H \frac{dz}{dx} \right]_i + P_z = 0. \quad (\text{II.41})$$

Таким образом, уравнения (II.36) — (II.41) описывают напряженно-деформированное состояние любой вантовой сети и охватывают все частные случаи, рассмотренные в предыдущих параграфах. Рассмотрим частный случай, когда распределенная нагрузка отсутствует, т. е.

$$q_{x_i} = q_{y_i} = q_{z_i} = 0.$$

Из уравнения (II.36) следует, что $H = \text{const}$.

Уравнение (II.37) принимает вид: $H \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_i = 0$.

Так как усилие в нити не может быть равно нулю, остается принять $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_i = 0$, откуда следует, что $\left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \text{const} = 0$.

Уравнение (II.38) принимает вид (здесь и ниже в уравнениях относительно системы координат $OX_i Y_i Z_i$ индекс i опущен):

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

откуда $\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$; $\frac{dz}{dx} = \text{const} = \frac{\Delta z}{l}$.

Из приведенных выкладок следует, что нить в плане и вертикальной плоскости в данном случае представляет собой прямую линию. Однако это очевидно и из чисто физического смысла существования нити с усилием без наличия поперечной распределенной нагрузки.

Проинтегрируем обе части уравнения (II.39) по длине нити l

$$\begin{aligned} H \int_l dx &= EF \left[\int_l \frac{du}{dx} dx + \int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_l \frac{dy_0}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим каждый интеграл в отдельности и определим его значения: $\int_l dx = l$;

$$\int_l \frac{du}{dx} dx = \frac{\Delta u}{l} l, \quad \text{так как} \quad \frac{du}{dx} = \text{const} = \frac{\Delta u}{l};$$

$$\int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx = \frac{\Delta z_0}{l} \cdot \frac{\Delta w}{l} l;$$

$$\int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \left(\frac{\Delta w}{l} \right)^2 l;$$

$$\int_l \frac{dy_0}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx = 0, \quad \text{так как} \quad \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$\int_l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx = \left(\frac{\Delta v}{l} \right)^2 l.$$

Найденные значения интегралов подставим в уравнение деформации, разделив правую часть на l

$$H = EF \left[\frac{\Delta u}{l} + \frac{\Delta z_0}{l} \cdot \frac{\Delta w}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta w}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v}{l} \right)^2 \right].$$

В связи с тем, что нелинейностью в работе вантовой сети от горизонтальных смещений пренебрегаем, последний член этого уравнения исключается

$$H = EF \left[\frac{\Delta u}{l} + \frac{\Delta z_0}{l} \cdot \frac{\Delta w}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta w}{l} \right)^2 \right].$$

Это уравнение деформации записано относительно системы координат $OX_iY_iZ_i$. Для получения аналогичного уравнения относительно системы координат $OXYZ$ воспользуемся известными формулами преобразования одной системы координат в другую:

$$u_i = u \cos \Theta_i + v \sin \Theta_i; \quad v_i = v \cos \Theta_i - u \sin \Theta_i,$$

или

$$u_i = u \frac{\Delta i x}{l} + v \frac{\Delta i y_0}{l}; \quad v_i = v \frac{\Delta i x}{l} - u \frac{\Delta i y_0}{l}.$$

Подставим эти значения в уравнение деформации нити

$$H = EF_i \left[\frac{\Delta u}{l} \cdot \frac{\Delta x}{l} + \frac{\Delta v}{l} \cdot \frac{\Delta y_0}{l} + \frac{\Delta z_0}{l} \cdot \frac{\Delta w}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta w}{l} \right)^2 \right]_i.$$

Учитывая, что $\frac{dy_i}{dx_i} = 0$, уравнения равновесия для узлов сети несколько изменяются. Таким образом, уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние произвольной вантовой сети под действием произвольной внешней узловой нагрузки, принимают следующий вид:

равновесия для узлов сети

$$\nabla_k \left[H \frac{\Delta x}{l} \right]_i + P_x = 0; \quad (II.42)$$

$$\nabla_k \left[H \frac{\Delta y}{l} \right]_i + P_y = 0; \quad (II.43)$$

$$\nabla_k \left[H \frac{\Delta z}{l} \right]_i + P_z = 0; \quad (II.44)$$

деформации для нитей

$$H = \frac{EF_i}{l_i^2} \left[\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y_0 + \Delta z_0 \Delta w + \frac{1}{2} (\Delta w)^2 \right]_i. \quad (II.45)$$

В случае действия предварительного натяжения, уравнение (II.45) несколько изменяется

$$H = H_0 + \frac{EF_i}{l_i^2} \left[\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y_0 + \Delta z_0 \Delta w + \frac{1}{2} (\Delta w)^2 \right]_i, \quad (II.46)$$

где H_0 — величина усилия предварительного натяжения.

В том случае, когда сеть представляет собой существенно нерегулярную структуру, в узлах которой пересекается более двух нитей, уравнение деформации (II.45) или (II.46) является окончательным. При этом под нитью подразумевается по сути один стержень от узла до узла.

В случае, когда в узле пересекаются не более двух нитей, уравнение (II.46) можно записать для всей нити, представляющей собой плоскую ломаную линию, образованную стержнями.

Принимая во внимание постоянство распора по длине каждой нити, просуммируем распоры всех стержней последней

$$H \sum_1^m l_i = H_0 \sum_1^m l_i + EF_i \sum_1^m \frac{\Delta x \cdot \Delta u}{l_i^2} l_i + EF_i \sum_1^m \frac{\Delta y_0 \cdot \Delta v}{l_i^2} l_i + EF_i \sum_1^m \frac{\Delta z_0 \Delta w}{l_i^2} l_i + \frac{EF_i}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{l_i} \right)^2 l_i.$$

Учитывая, что $\sum_1^m l_i = L_i$,

а также то, что нить в плане является плоской, можем записать

$$\frac{\Delta y_0}{l_i} = \frac{\Delta^* y_0}{L_i} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta x^*}{l_i} = \frac{\Delta^* x}{L_i},$$

где L_i — длина всей i -той нити;

$\Delta^* x, \Delta^* y_0$ — разность между координатами конечной и начальной точек нити;

m — количество стержней в нити.

Кроме того, сумма деформации всех участков нити в горизонтальном направлении вдоль осей X и Y выражается через перемещения конечной и начальной точек нити

$$\sum_1^m \Delta u = u_k - u_n = \Delta^* u; \quad \sum_1^m \Delta v = v_k - v_n = \Delta^* v.$$

С учетом вышеизложенного уравнение деформации примет вид:

$$H = H_0 + \frac{EF_i}{L_i} \left[\frac{\Delta^* x \cdot \Delta^* u}{L} + \frac{\Delta^* y_0 \cdot \Delta v}{L} + \sum_1^m \frac{\Delta z_0 \cdot \Delta w}{l_i^2} l_i + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{l_i} \right)^2 l_i \right]. \quad (II.47)$$

Если, к тому же, концы нитей закреплены на несмещаемом опорном контуре, уравнения примут вид: равновесия (II.44), деформации

$$H = H_0 + \frac{EF_i}{L_i} \left[\sum_1^m \frac{\Delta z_0 \Delta w}{l_i^2} l_i + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{l_i} \right)^2 l_i \right]. \quad (II.48)$$

Уравнений (II.44) составляется столько, сколько узлов в вантовой сети; уравнений (II.48) — столько, сколько нитей.

§ 6. Вантовые фермы

Различие типов вантовых ферм предопределяет и различные методы их статического расчета.

Расчет вантовых ферм с треугольной решеткой по сути ничем не отличается от расчета обычных жестких ферм аналогичной схемы. При этом растягивающие усилия предварительного напряжения назначаются такими, чтобы от действия внешней расчетной нагрузки в элементах ферм не могли появиться сжимающие усилия.

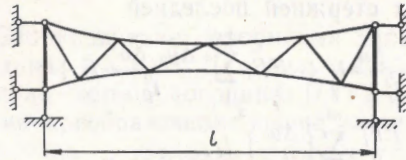


Рис. II.17. К определению статической неопределенности вантовых ферм с треугольной решеткой.

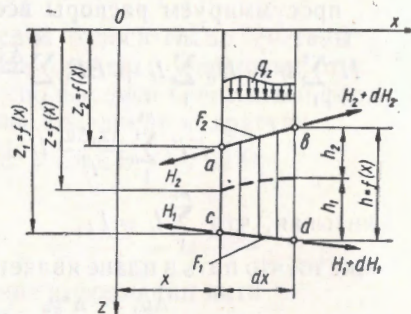


Рис. II.18. К расчету вантовых ферм.

Заметим, что при расчете вантовых ферм с треугольной решеткой необходимо учитывать статическую неопределенность в работе, обусловленную лишними связями в опорных закреплениях поясов. Так, например, вантовая ферма, представленная на рис. II.17, относительно опорных реакций является три раза статически неопределимой.

Таким образом, с точки зрения статического расчета сложность представляют вантовые предварительно напряженные фермы, пояса которых соединены между собой сжатыми распорками или растянутыми подвесками.

При рассмотрении напряженно-деформированного состояния вантовых ферм примем некоторые допущения. Нити-пояса фермы по-прежнему будем считать пологими относительно горизонтальной оси. Кроме того, примем, что распорки или подвески являются абсолютно жесткими и, таким образом, исключают взаимное смещение соответствующих точек нитей-поясов в вертикальной плоскости. В деформированном состоянии распорки или подвески остаются вертикальными.

Рассмотрим условия равновесия элемента предварительно напряженной фермы под действием произвольной вертикальной нагрузки (рис. II.18). Для правомочности пользования дифференциальной формой записи уравнений будем считать, что связи между поясами фермы расположены настолько густо, что позволяет принять их непрерывными.

Положение элемента на рис. II.18 соответствует деформированному состоянию фермы. Расстояние между поясами фермы $h = f(x)$

определяет геометрию последней. При этом некоторая ось $z = f(x)$, проходящая между двумя поясами и имеющая аппликаты z , является геометрическим местом нулевых точек статических моментов инерции в сечениях фермы и, таким образом, удовлетворяет выражение

$$F_1 h_1 - F_2 h_2 = 0,$$

где F_1 и F_2 — площади поперечных сечений соответственно нижнего и верхнего поясов;

h_1 и h_2 — расстояния от нейтральной оси до осей соответствующих поясов.

Исходя из положения нейтральной оси, запишем выражения аппликат соответствующих поясов фермы:

$$z_1 = z + h_1; \quad z_2 = z - h_2.$$

Учитывая выкладки предыдущих параграфов, нетрудно показать, что уравнение равновесия элемента фермы под действием произвольной вертикальной нагрузки будет иметь вид

$$H_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2} + H_2 \frac{d^2 z_2}{dx^2} + q_z = 0,$$

или, учитывая выражения аппликат соответствующих поясов фермы,

$$H_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + H_1 \frac{d^2 h_1}{dx^2} + H_2 \frac{d^2 z}{dx^2} - H_2 \frac{d^2 h_2}{dx^2} + q_z = 0.$$

Это уравнение приведем к следующей форме:

$$(H_1 + H_2) \frac{d^2 z}{dx^2} + H_1 \frac{d^2 h_1}{dx^2} - H_2 \frac{d^2 h_2}{dx^2} + q_z = 0.$$

Для более компактных записей уравнений примем обозначения:

$$H_1 + H_2 = N; \quad H_1 h - H_2 h_2 = M,$$

где N — суммарное усилие в поясах фермы, действующее по нейтральной оси;

M — изгибающий момент в ферме от действия усилий в поясах.

С другой стороны можем записать, что

$$H_1 = N \frac{h_2}{h} + \frac{M}{h}; \quad H_2 = N \frac{h_1}{h} - \frac{M}{h}.$$

С учетом вышеизложенного уравнение равновесия примет вид

$$N \frac{d^2 z}{dx^2} + N \left(\frac{h_2}{h} \cdot \frac{d^2 h_1}{dx^2} - \frac{h_1}{h} \cdot \frac{d^2 h_2}{dx^2} \right) + \frac{M}{h} \left(\frac{d^2 h_1}{dx^2} + \frac{d^2 h_2}{dx^2} \right) + q_z = 0.$$

Произведем некоторые преобразования этого уравнения

$$N \frac{d^2 z}{dx^2} + N \left(\frac{h_2 \frac{d^2 h_1}{dx^2} - h_1 \frac{d^2 h_2}{dx^2}}{h} \right) + \frac{M}{h} \cdot \frac{d^2 h}{dx^2} + q_z = 0.$$

Учитывая подобие очертания фермы соответствующим кривизнам поясов, можем записать следующую пропорцию

$$\frac{\frac{d^2 h_1}{dx^2}}{\frac{d^2 h_2}{dx^2}} = \frac{h_1}{h_2},$$

исходя из которой второй член уравнения равновесия равен нулю.

Таким образом, получаем следующее уравнение равновесия:

$$N \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{M}{h} \cdot \frac{d^2 h}{dx^2} + q_x = 0. \quad (\text{II.49})$$

Аналогично (II.14) уравнения деформации для поясов фермы запишутся следующим образом (с учетом несмещаемости опорных точек фермы):

$$H_1 = H_{01} + \frac{EF_1}{l} \left[\int_l \frac{dz_{01}}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right];$$

$$H_2 = H_{02} + \frac{EF_2}{l} \left[\int_l \frac{dz_{02}}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right],$$

или, учитывая выражения аппликат соответствующих поясов фермы,

$$H_1 = H_{01} + \frac{EF_1}{l} \left[\int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \int_l \frac{dh_1}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right];$$

$$H_2 = H_{02} + \frac{EF_2}{l} \left[\int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \int_l \frac{dh_2}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right],$$

где H_{01} и H_{02} — усилия предварительного напряжения соответственно в нижнем и верхнем поясах;

F_1 и F_2 — площади поперечного сечения поясов фермы;

z_0, z_{01}, z_{02} — первоначальные аппликаты (при этом $z = z_0 + w$).

Используя уравнения деформации для отдельных поясов, запишем выражение суммарного усилия в поясах фермы

$$H_1 + H_2 = N = N_0 + \frac{EF}{l} \left[\int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] + \frac{E}{l} \int_l \left(F_1 \frac{dh_1}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} - F_2 \frac{dh_2}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} \right) dx,$$

где $H_{01} + H_{02} = N_0$ — суммарное усилие в поясах фермы от предварительного напряжения;

$F_1 + F_2 = F$ — суммарная площадь поперечных сечений поясов.

Рассмотрим отдельно третий член уравнения

$$\frac{E}{l} \int_l \left(F_1 \frac{dh_1}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} - F_2 \frac{dh_2}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} \right) dx.$$

Учитывая, что площади поперечных сечений поясов F_1 и F_2 не изменяются по длине, внесем их под знак дифференциала

$$\frac{E}{l} \int_l \frac{d}{dx} (h_1 F_1 - h_2 F_2) \frac{dw}{dx} dx.$$

Выражение в скобках равно нулю. Поэтому третий член уравнения также равен нулю.

Окончательно уравнение принимает вид

$$N = N_0 + \frac{EF}{l} \left[\int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right]. \quad (\text{II.50})$$

Остается привести выражение суммарного изгибающего момента в ферме от действия полных усилий

$$M = H_{01} h_1 - H_{02} h_2 + \frac{E}{l} (F_1 h_1 - F_2 h_2) \left[\int_l \frac{dz_0}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] + \frac{E}{l} \left(F_1 h_1 \int_l \frac{dh_1}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + F_2 h_2 \int_l \frac{dh_2}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx \right).$$

Учитывая, что $F_1 h_1 - F_2 h_2 = 0$, выражение упростится

$$M = H_{01} h_1 - H_{02} h_2 + \frac{E}{l} \left(F_1 h_1 \int_l \frac{dh_1}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + F_2 h_2 \int_l \frac{dh_2}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx \right).$$

Примем следующие обозначения: $H_{01} h_1 - H_{02} h_2 = M_0$; $F_1 h_1 = F_2 h_2 = S$,

где M_0 — изгибающий момент от действия усилий предварительного напряжения;

S — статический момент сечения одного из поясов относительно оси.

С учетом этих обозначений выражение изгибающего момента примет вид

$$M = M_0 + \frac{ES}{l} \int_l \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx. \quad (\text{II.51})$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние вантовой фермы под действием произвольной вертикальной нагрузки описывается уравнениями (II.49) — (II.51).

РАСЧЕТ ВАНТОВЫХ ПОКРЫТИЙ

§ 1. Общие положения

Уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние вантовых систем покрытий, являются нелинейными относительно искомых перемещений u , v , w , поскольку последние входят в уравнения не только в первой, но и во второй и третьей степенях (гл. II).

Следует отметить, что решение нелинейных задач строительной механики вообще является сравнительно трудоемким процессом, требующим индивидуального анализа уравнений для выбора более или менее рационального метода.

Применяющиеся для решения методы являются, как правило, определенной модификацией общих математических методов, пригодных для более широкого круга инженерных задач.

Применительно к уравнениям, описывающим работу вантовых систем, все методы решения можно разделить на следующие: аналитические, применяющиеся главным образом к системам с одним или, в крайнем случае, с двумя нелинейными параметрами; численные, применяющиеся к системам со многими нелинейными параметрами.

Аналитические методы часто дают решения в замкнутой форме путем непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений, однако, как будет показано ниже, применимы для некоторых видов вантовых систем: отдельных нитей, вантовых ферм и сетей определенной структуры. Численными методами обычно решаются задачи расчета вантовых сетей произвольных структур.

Все численные методы решения нелинейных уравнений, описывающих работу вантовых систем и получивших большое развитие за последние годы, можно с определенной степенью условности разделить на три вида: итерационные; шаговые; специальные.

Среди итерационных методов, применяющихся к расчету вантовых систем и основанных на последовательном приближении к искомому решению, распространение получил метод Ньютона и различные его модификации. Идея метода Ньютона состоит в замене графика некоторой нелинейной функции $z = f(x)$ касательной, проведенной в точке $x = x_0$, и последовательном повторении этого процесса. При этом, естественно, предыдущий результат решения используется для каждого следующего приближения до достижения

любой желаемой точности. Иногда пользуются одной из модификаций метода Ньютона, геометрический смысл которой заключается в том, что касательная в некоторой точке графика функции заменяется прямой, проходящей через эту точку и некоторую другую, принадлежащую кривой (метод хорд).

Среди численных методов при расчете вантовых систем находят применение также различного рода релаксационные методы, являющиеся также итерационными. Суть релаксационных методов состоит в последовательном улучшении решения путем приведения в соответствие максимальных невязок и соответствующих значений неизвестных на каждом этапе счета. Физический смысл этих методов заключается в том, что невязки решения можно трактовать как величины внешних сил, обеспечивающие равновесие системы при деформациях. И так как невязки с каждым этапом счета уменьшаются, происходит ослабление действия этих сил, т. е. силы или связи, что одно и то же, релаксируют.

Тесно связан с релаксационными методами метод Зейделя, отличающийся от предыдущих в основном порядком решения. Этот метод применяется для решения линейных систем уравнений. Если в релаксационных методах порядок решения уравнений определяется, как правило, наибольшими значениями невязок и «поправки» решения начинают с соответствующих уравнений, то в методе Зейделя порядок решения является циклическим и предопределен сразу.

Особый интерес для решения нелинейных уравнений представляют шаговые методы, геометрический смысл которых заключается в замене графика нелинейной функции некоторой ломаной линией с достаточно малым шагом расположения общих точек, принадлежащих кривой и ломаной. Простейшим является метод Эйлера и его модификации. Суть метода Эйлера состоит в прямой замене нелинейной функции некоторой ломаной («ломаной Эйлера»), звенья которой в каждой вершине имеют направление касательной в этой же точке кривой. Решение по методу Эйлера имеет достаточно высокую точность только при малых значениях шага, так как представляет собой по сути на каждом шаге ряд Тейлора с удержанием только первых двух членов. Для получения более точного решения пользуются различного рода модификациями метода Эйлера, применяя направление касательных в средних точках каждого шага, итерационную обработку решения на каждом шаге и другие приемы.

Значительной точностью обладает метод Рунге-Кутты, заключающийся в том, что на каждом отрезке (шаге) решение представляется большим количеством членов ряда Тейлора. Вполне понятно, что метод Рунге-Кутты обеспечивает большую точность решения, однако является более трудоемким, чем метод Эйлера.

Существуют специальные методы решения, основанные на использовании свойств вантовых систем. Учитывая, что в вантовых покрытиях существует тесная связь между внешней нагрузкой и формой

системы, специальные методы решения в основном используют именно ее. С этой точки зрения представляет интерес метод расчета вантовых систем на специальные виды нагрузок по линейной теории, позволяющей определить только усилия.

Другой специальный метод решения задач вантовых покрытий заключается в формальных преобразованиях, дающих возможность привести произвольную нагрузку на вантовую сеть к равновесной и тем самым значительно облегчить решение.

Для правильного применения численных методов решения большое значение приобретает анализ схемы счета или, пользуясь терминологией математиков, анализ «устойчивости вычислительной схемы», не допускающей накопления погрешностей в процессе счета и позволяющей получить результат, достаточно достоверный в пределах точности исходных данных задачи. Однако, учитывая направленность данной работы, авторы сочли возможным не затрагивать некоторых чисто математических вопросов, связанных с решением нелинейных задач: корректность постановки, сходимость приближенных методов, исследование решения, счета и т. д. При дальнейшем изложении математическая строгость и полнота в некоторых вопросах и выкладках будет упущена.

§ 2. Вантовые системы с одним нелинейным параметром

Такое название получили системы, решение которых сводится к нелинейному уравнению с одним неизвестным. К ним относят отдельные нити (системы из отдельных несвязанных в совместной работе нитей) и сети определенных структур. В качестве нелинейного параметра обычно принимается величина усилия в нитях.

Пологие гибкие нити. Для покрытий одной из основных нагрузок является вертикальная. Поэтому возвратимся к частному случаю вывода расчетных зависимостей для гибких нитей, когда $q_x = 0$ и $q_z \neq 0$ (см. § 2 гл. II).

Будем считать, что начальная длина нити s_0 и ее горизонтальный пролет заданы. Конечную длину нити s в деформированном состоянии можно представить следующим образом:

$$s = \int_l \sqrt{dx^2 + dz^2} dx = l + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx.$$

Тогда относительное удлинение нити получит выражение

$$\varepsilon = \frac{s - s_0}{s_0} = \frac{1}{2s_0} \int_l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx + \frac{l - s_0}{s_0}.$$

Выражение относительного удлинения нити состоит из двух частей:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2s_0} \int_l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx \text{ и } \varepsilon_2 = \frac{l - s_0}{s_0}.$$

Таким образом, усилие в нити можно представить следующим двучленным уравнением:

$$H = EF\varepsilon_1 + EF\varepsilon_2. \quad (\text{III.1})$$

Рассмотрим соотношение начальной длины нити s_0 и ее горизонтального пролета l .

I случай: $s_0 < l$. Нить находится под воздействием предварительного напряжения, т. е. $z_0 = 0$; $\varepsilon_2 > 0$ и, таким образом, второй член уравнения (III.1) характеризует величину предварительного напряжения, т. е.

$$H = EF\varepsilon_1 + H_0,$$

где $H_0 = EF\varepsilon_2$.

II случай: $s_0 = l$ и $\varepsilon_2 = 0$. Горизонтальная нить не испытывает никаких начальных напряжений и воспринимает внешнюю нагрузку только за счет своих деформаций, т. е.

$$H = EF\varepsilon_1.$$

III случай: $s_0 > l$. Этот случай характеризует провисающую нить ($z_0 \neq 0$). $\varepsilon_2 < 0$ и уравнение усилия в нити (III.1) примет вид

$$H = EF\varepsilon_1 - EF\varepsilon_2.$$

Величина жесткости нити на растяжение может изменяться от 0 до ∞ . Отбросив тривиальное решение нити с нулевой жесткостью, рассмотрим нить, имеющую $EF = \infty$. Нить с такой жесткостью характеристикой называется нерастяжимой и в определенном смысле является абстракцией. Изменение формы нерастяжимой нити происходит только за счет кинематических перемещений. Вполне понятно, что усилия в нитях, определенные без учета деформаций, дают преувеличенные значения и тем большие, чем меньше стрелки. Однако в ряде случаев расчет нити в предположении ее нерастяжимости полезен для ориентировочных расчетов и первого приближения в определении площадей поперечных сечений. Для нерастяжимой нити можем записать

$$s - s_0 = 0 \text{ или } s = s_0.$$

Следовательно, начальная длина нити получит такое же выражение, как и конечная, т. е.

$$s_0 = l + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx.$$

С другой стороны, можем записать следующее соотношение

$$Q = H \frac{dz}{dx}, \quad (\text{III.2})$$

после интегрирования которого получаем

$$z = \frac{M}{H}, \quad (\text{III.3})$$

где Q — поперечная сила для условной прямолинейной балки, шарнирно опертой в точках подвеса;

M — изгибающий момент для этой балки («балочный» момент);

z — ордината нити, соответствующая «балочному» моменту.

С учетом (III.2) выражение начальной длины нити преобразуется

$$s_0 = l + \frac{1}{2H^2} \int_l Q^2 dx,$$

откуда

$$H = \sqrt{\frac{\int_l Q^2 dx}{2(s_0 - l)}}.$$

Приняв обозначение $s_0 - l = \mu$ и $\int_l Q^2 dx = D$, уравнение усилия в нерастяжимой нити от действия произвольной вертикальной нагрузки принимает более простой вид

$$H = \sqrt{\frac{D}{2\mu}}. \quad (\text{III.4})$$

Интегралы типа $\int_l Q^2 dx$ можно вычислять, перемножая балочные эпюры поперечных сил по методу Верещагина или Симпсона.

В некоторых случаях в качестве исходных данных задаются пролетом и стрелой провисания под действием собственного веса нити. Выведем уравнение, связывающее начальную длину нити, ее пролет и стрелу провисания.

Уравнение фигуры равновесия такой нити запишем в виде квадратной параболы с началом координат в вершине ее

$$z = \frac{q}{2H} x^2,$$

откуда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{qx}{H}.$$

С другой стороны, при $x = \frac{l}{2}$ имеем вполне определенную ординату-стрелу f . Подставляя эти значения в уравнение фигуры равновесия, находим

$$H = \frac{ql^2}{8f}.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{8fx}{l^2},$$

а длина нити получит следующее выражение

$$s_0 = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{8fx}{l^2} \right)^2 dx.$$

Выполнив интегрирование в указанных пределах и удвоив вторую часть выражения, получим следующую формулу для определения длины нити:

$$s_0 = l + \frac{8f^2}{3l}. \quad (\text{III.5})$$

Пример 1. Определить усилие и форму нити под действием нагрузки, распределенной вдоль пролета по закону треугольника $q = 0,5 \text{ т/м}$. Пролет нити 40 м, начальная длина 41 м. Нить принимается нерастяжимой (рис. III.1).

Определяем характеристику нагрузки

$$D = \frac{q^2 l^3}{45} = \frac{0,5^2 \cdot 40^3}{45} = 355,6 \text{ т}^2/\text{м}$$

и разницу между начальной длиной и пролетом нити

$$\mu = 41 - 40 = 1 \text{ м}.$$

Усилие в нити

$$H = \sqrt{\frac{D}{2\mu}} = \sqrt{\frac{355,6}{2 \cdot 1}} = 13,33 \text{ т}.$$

Вычисление ординат, определяющих форму нити под нагрузкой, производим в соответствии с (III.3) в отдельных точках через 5 м по длине пролета. Результат приведен в табл. III.1.

Таблица III.1

Наименование величин	Единица измерения	Точки нити								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
«Балочные» изгибающие моменты	т·м	0	16,440	31,317	43,069	50,133	50,948	43,95	27,577	0
Ординаты деформированной нити	м	0	1,233	2,349	3,231	3,761	3,822	3,297	2,069	0

Рассмотрим решение уравнений провисающей нити с конечным значением жесткостной характеристики.

Абсолютное удлинение нити $\Delta l = s - s_0$. Согласно закону Гука $\Delta l = \frac{Hl}{EF}$. Поэтому можем записать

$$s - s_0 = \frac{Hl}{EF}.$$

Подставим в это выражение значение конечной длины нити s

$$l + \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx - s_0 = \frac{Hl}{EF},$$

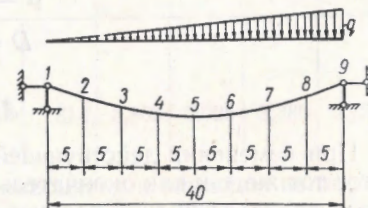


Рис. III.1. К примеру 1.

или с учетом (III.2)

$$l + \frac{1}{2H^2} \int_1 Q^2 dx - s_0 = \frac{Hl}{EF}.$$

Путем несложных преобразований приходим к кубическому уравнению для решения нити под воздействием произвольной вертикальной нагрузки

$$H^3 + \frac{\mu + A}{l} H^2 = \frac{DA}{2l}, \quad (\text{III.6})$$

где

$$\mu = s_0 - l;$$

$$D = \int_1 Q^2 dx;$$

$$A = EF.$$

При изменении действующей на нить нагрузки ход расчета остается тот же, так как окончательное решение не зависит от того, получено ли оно от полной нагрузки сразу или путем последовательного приложения частей ее. В последнем случае деформированное состояние нити от действия первой части нагрузки считают исходным для нити, нагружаемой второй частью нагрузки.

Одними из первых авторов, исследовавших гибкую нить под действием произвольной нагрузки, являются Р. Н. Мацелинский [31, 32] и В. К. Качурин [19, 20].

В том случае, когда нить имеет опорные точки на разных уровнях, расчет ее можно производить, как указывалось в главе II, относительно вспомогательной системы координат (см. рис. II.11.) Это необходимо производить лишь в том случае, когда перепад высот достаточно велик. Вертикальная нагрузка раскладывается соответственно на действующую нагрузку вдоль нити и нормальную относительно соединительной линии опорных точек. В связи с тем, что нагрузка, действующая вдоль нити, обуславливает изменение усилия в нити по длине, такая нить не может быть решена как система с одним нелинейным параметром H и должна решаться более общими методами, изложенными ниже. Вопросы расчета гибкой нити с опорами на разных уровнях развиты в работе А. Я. Дривинга [12].

Пример 2. Определить усилие и форму нити, заданной условиями примера 1 (см. рис. III.1) с учетом продольных деформаций. Материал нити — арматурная сталь периодического профиля $\varnothing 25$ мм ($F = 4,91$ см²), модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кг/см².

Жесткостная характеристика нити на растяжение

$$A = EF = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,000491 = 9820 \text{ т.}$$

Характеристику нагрузки и разницу начальной длиной и пролетом нити определяем по аналогии с примером 1.

Известные и найденные значения подставляем в уравнение (III.6):

$$H^3 + \frac{1 \cdot 9820}{40} H^2 = \frac{355,6 \cdot 9820}{2 \cdot 40}$$

или

$$H^3 + 245,5 H^2 - 43649,9 = 0.$$

Корень данного уравнения, являющийся величиной усилия в нити, $H = 12,98$ т. Используя значения «балочных» изгибающих моментов, определенных в примере 1, найдем ординаты нити, деформированной в результате кинематических перемещений и упругих удлинений. Результат приведен в табл. III.2.

Таблица III.2

Точки нити	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ординаты деформированной нити ($z = \frac{M}{H}$)	0	1,267	2,413	3,318	3,862	3,925	3,386	2,125	0

Вантовые сети. Вантовые сети приводятся к решению нелинейного уравнения с одним неизвестным лишь в том случае, когда соотношения между усилиями во всех нитях сети в общем случае остаются величиной постоянной. К таким сетям относятся сети шестиугольной структуры (рис. I.12).

Рассмотрим задачу нахождения усилий и перемещений в таких системах.

Будем считать, что концы нитей вантовой сети (рис. III.2) закреплены на несмещаемом опорном контуре в вертикальной и в горизонтальной плоскостях. Под действием вертикальной нагрузки, произвольной для каждого узла, напряженно-деформированное состояние сети будет описываться уравнениями (II.44) и (II.48).

Для данной структуры уравнение равновесия (II.44) для каждого узла будет иметь вид:

$$H \frac{-3z_n + z_{1n} + z_{2n} + z_{3n}}{\lambda} = -P_{z(n)}, \quad (\text{III.7})$$

где z_n — аппликата рассматриваемого узла в деформированном состоянии;

z_{1n}, z_{2n}, z_{3n} — аппликаты узлов, примыкающих к рассматриваемому; λ — расстояние между узлами сети.

Перемещения узлов закрепления на опорном контуре равны нулю и, таким образом, исключаются из рассмотрения. Неизвестными являются аппликаты всех внутренних узлов в деформированном состоянии и величина усилия в нитях.

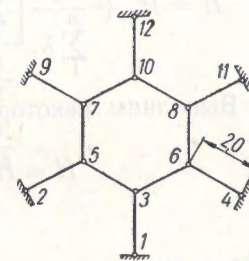


Рис. III.2. К примеру 3.

Учитывая, что усилие во всех элементах сети является величиной постоянной, ее можно перенести в правую часть уравнений, и аппликаты определять в функции от усилия, т. е. аппликаты после решения системы линейных уравнений равновесия будут представлены в виде:

$$z_n = \frac{k_n}{H},$$

где k_n — числовой коэффициент.

Напомним, что аппликаты деформированной поверхности равны начальным аппликатам сети плюс перемещения, т. е.

$$z = z_0 + w.$$

По аналогии с этим

$$\Delta w = \Delta z - \Delta z_0,$$

где

$$\Delta z = \frac{k_{n+1} - k_n}{H}.$$

Перепишем уравнение деформации (II.48), заменив выражение Δw и выполняя суммирование по всем стержням сети,

$$H = H_0 + \frac{EF}{\sum_1^m \lambda} \left[\sum_1^m \frac{\Delta z_0 (\Delta z - \Delta z_0)}{\lambda^2} \lambda + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta z - \Delta z_0}{\lambda} \right)^2 \lambda \right].$$

Выполним некоторые преобразования и приведем его к виду:

$$H = H_0 - \frac{EF}{2 \sum_1^m \lambda} \sum_1^m \frac{\Delta z_0^2}{\lambda} + \frac{EF}{2 \sum_1^m \lambda} \sum_1^m \frac{\Delta z^2}{\lambda}.$$

Обозначим

$$H'_0 = H_0 - \frac{EF}{2 \sum_1^m \lambda} \sum_1^m \frac{\Delta z_0^2}{\lambda}$$

и уравнение деформации перепишем в следующем виде:

$$H = H_0 + \frac{EF}{2 \sum_1^m \lambda} \sum_1^m \frac{\Delta z^2}{\lambda}.$$

Подставим в него решения аппликат, выраженные в функции от H

$$H = H'_0 + \frac{EF}{2 \sum_1^m \lambda H^2} \sum_1^m \frac{\Delta k^2}{\lambda}.$$

После некоторых преобразований уравнение принимает вид

$$H^3 - H'_0 H^2 - \frac{EF}{2 \sum_1^m \lambda} \sum_1^m \frac{\Delta k^2}{\lambda} = 0. \quad (\text{III.8})$$

Определив величину усилия в элементах сети, нетрудно найти истинные аппликаты деформированной поверхности и затем перемещения.

Пример 3. Определить перемещения узлов и усилие в элементах сети, представленной на рис. III. 2, под действием вертикальных сосредоточенных сил $P_3 = 2 \text{ т}$, $P_5 = 1,5 \text{ т}$, $P_6 = 3 \text{ т}$, приложенных к узлам 3, 5, 6. Расстояние между узлами $\lambda = 2 \text{ м}$. Материал сети — арматурная сталь периодического профиля $\varnothing 25 \text{ мм}$ ($F = 4,91 \text{ см}^2$), модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Исходная геометрия определяется аппликатами:

$$z_1^0 = z_2^0 = z_4^0 = z_9^0 = z_{11}^0 = z_{12}^0 = 0;$$

$$z_3^0 = z_5^0 = z_6^0 = z_7^0 = z_8^0 = z_{10}^0 = 0,5 \text{ м}.$$

Усилие предварительного напряжения $H_0 = 0$.

Составляем уравнения равновесия для шести внутренних узлов сети:

$$\begin{aligned} -3z_3 + z_5 + z_6 &= \frac{4}{H} \\ z_3 - 3z_5 + z_7 &= \frac{3}{H} \\ z_3 - 3z_6 + z_8 &= \frac{6}{H} \\ z_6 - 3z_7 + z_{10} &= 0 \\ z_6 - 3z_8 + z_{10} &= 0 \\ z_7 + z_8 - 3z_{10} &= 0. \end{aligned}$$

Применяя метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса), находим значения последних.

$$z_3 = \frac{3,375}{H}; \quad z_5 = \frac{2,499}{H}; \quad z_6 = \frac{3,625}{H};$$

$$z_7 = \frac{1,125}{H}; \quad z_8 = \frac{1,499}{H}; \quad z_{10} = \frac{0,875}{H}.$$

Некоторые вычисления приводим в табл. III. 3. Вычисляем коэффициент при неизвестном во второй степени в соответствии с уравнением (III.8)

$$H_0 - \frac{EF}{2 \sum_1^m \lambda} \sum_1^m \frac{\Delta z_0^2}{\lambda} = 2 - \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0,000491}{2 \cdot 24} 0,75 = -153,335.$$

Таблица III.3

Стержни	λ	Δz_0	$\Delta z_0^2, \text{ м}^2$	$\Delta z_0^3, \text{ м}^3$	Δk	Δk^2	Δk^3
	м						
3-1	2,0	0,5	0,25	0,125	3,375	11,39	5,695
5-3	2,0	0	0	0	-0,876	0,767	0,3835
6-3	2,0	0	0	0	0,250	0,0625	0,03125
5-2	2,0	0,5	0,25	0,125	2,499	6,245	3,1225
7-5	2,0	0	0	0	-1,374	1,888	0,944
8-6	2,0	0	0	0	-2,126	4,5198	2,2599
6-4	2,0	0,5	0,25	0,125	3,625	13,12	6,56
9-7	2,0	-0,5	0,25	0,125	-1,125	1,2656	0,6328
10-7	2,0	0	0	0	-0,250	0,0625	0,03125
10-8	2,0	0	0	0	-0,624	0,3894	0,1947
11-8	2,0	-0,5	0,25	0,125	-1,499	2,247	1,1235
12-10	2,0	-0,5	0,25	0,125	-0,875	0,7656	0,3828
$\sum_{i=1}^m$	24,0			0,750			21,3612

Вычисляем свободный член уравнения (III.8)

$$\frac{EF}{2 \sum_{i=1}^m \lambda} \sum_{i=1}^m \frac{\Delta k^2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0,000491}{2 \cdot 24} 21,3612 = 4370,138.$$

Таким образом, получаем неполное кубическое уравнение $H^3 + 153,335H^2 - 4870,138 = 0$, положительный корень которого равен $H = 5,249 \text{ м}$.

Определяем аппликаты деформированной поверхности вантовой сети

$$z_3 = \frac{3,375}{5,249} = 0,643 \text{ м}; \quad z_5 = \frac{2,499}{5,249} = 0,476 \text{ м};$$

$$z_6 = \frac{3,625}{5,249} = 0,691 \text{ м}; \quad z_7 = \frac{1,125}{5,249} = 0,214 \text{ м};$$

$$z_8 = \frac{1,499}{5,249} = 0,286 \text{ м}; \quad z_{10} = \frac{0,875}{5,249} = 0,167 \text{ м}$$

и перемещения узлов по формуле $w_n = z_n - z_n^0$:

$$w_3 = 0,643 - 0,5 = 0,143 \text{ м}; \quad w_5 = 0,476 - 0,5 = -0,024 \text{ м};$$

$$w_6 = 0,691 - 0,5 = 0,191 \text{ м}; \quad w_7 = 0,214 - 0,5 = -0,286 \text{ м};$$

$$w_8 = 0,286 - 0,5 = -0,214 \text{ м}; \quad w_{10} = 0,167 - 0,5 = -0,333 \text{ м}$$

(отрицательный знак соответствует перемещению вверх).

§ 3. Вантовые системы с двумя нелинейными параметрами

К таким системам в основном относятся вантовые фермы, напряженно-деформированное состояние которых рассмотрено в § 6 главы II.

Все члены уравнения (II.49) разделим на N и представим в следующем виде:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q_z}{N} - \frac{M}{h} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{d^2 h}{dx^2}. \quad (\text{III.9})$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{Q}{N} - \frac{M}{h} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.10})$$

и

$$z = \frac{M_0}{N} - \frac{M}{N}, \quad (\text{III.11})$$

где M_0 — «балочный» изгибающий момент;

Q — поперечная сила, соответствующая «балочному» моменту.

Напомним, что вертикальные перемещения можно выразить через конечные и начальные ординаты точек поясов $w = z - z_0$.

С учетом этого уравнение (II.50) после некоторых преобразований примет вид

$$N = N_0 - \frac{EF}{2l} \int_0^l \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 dx + \frac{EF}{2l} \int_0^l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx.$$

Учитывая, что начальные параметры N_0 и z_0 обычно являются исходными данными, примем обозначение

$$N'_0 = N_0 - \frac{EF}{2l} \int_0^l \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 dx$$

и выражение суммарного усилия в поясах фермы

$$N = N'_0 + \frac{EF}{2l} \int_0^l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx. \quad (\text{III.12})$$

В выражении изгибающего момента (II.51) вертикальные перемещения также заменим разностью между конечными и начальными ординатами

$$M = M_0 - \frac{ES}{l} \int_0^l \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dz_0}{dx} dx + \frac{ES}{l} \int_0^l \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} dx.$$

Аналогично вышеприведенному выражению для суммарного усилия примем обозначение

$$M'_0 = M_0 - \frac{ES}{l} \int_0^l \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dz_0}{dx} dx$$

и выражение изгибающего момента от действия усилий в поясах

$$M = M'_0 + \frac{ES}{l} \int_0^l \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} dx. \quad (\text{III.13})$$

С учетом (III.10) выражения (III.12) и (III.13) преобразуются

$$N = N'_0 + \frac{EF}{2l} \cdot \frac{1}{N^2} \int_0^l Q^2 dx + \frac{EF}{2l} \cdot \frac{1}{N^2} \left(\frac{M}{h} \right)^2 \int_0^l \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 dx + \\ + \frac{EF}{l} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{M}{h} \int_0^l \frac{dh}{dx} Q dx;$$

$$M = M'_0 - \frac{ES}{l} \cdot \frac{1}{N} \int_0^l \frac{dx}{dx} Q dx - \frac{ES}{l} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{M}{h} \int_0^l \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 dx.$$

Следует отметить, что величина $\frac{M}{h} = \text{const}$ и выносится за знак интеграла. Примем следующие обозначения величины:

$$D = \int_0^l Q^2 dx;$$

$$B = \int_0^l \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 dx;$$

$$C = \int_0^l \frac{dh}{dx} Q dx.$$

С учетом обозначений последние выражения перепишем

$$N = N'_0 + \frac{EF}{2l} \cdot \frac{1}{N^2} D + \frac{EF}{2l} \cdot \frac{1}{N^2} \left(\frac{M}{h} \right)^2 B + \\ + \frac{EF}{l} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{M}{h} C; \quad (\text{III.14})$$

$$M = M'_0 - \frac{ES}{l} \cdot \frac{1}{N} \cdot C - \frac{ES}{l} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{M}{h} B. \quad (\text{III.15})$$

Все члены выражения (III.15) разделим на h

$$\frac{M}{h} = \frac{M'_0}{h} - \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} \cdot C - \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{M}{h} B.$$

Заметим, что величина $\frac{S}{h} = \text{const}$.

Выполнив некоторые преобразования последнего выражения, получим

$$\frac{M}{h} = \frac{\frac{M'_0}{h} - \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} C}{1 + \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} B}. \quad (\text{III.16})$$

Все члены выражения (III.14) умножим на N^2 и затем подставим значение $\frac{M}{h}$

$$N^3 \left(1 + \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} B \right)^2 = N'_0 N^2 \left(1 + \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} B \right)^2 + \\ + \frac{EF}{2l} D \left(1 + \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} B \right)^2 + \frac{EF}{2l} B \left(\frac{M'_0}{h} - \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} C \right)^2 + \\ + \frac{EF}{l} C \left(\frac{M'_0}{h} - \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} C \right) \left(1 + \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{1}{N} B \right).$$

После некоторых преобразований получаем следующее уравнение пятой степени относительно суммарного усилия в поясах фермы:

$$N^5 + N^4 (2Bi_1 - N'_0) + N^3 (B^2 i_1^2 - 2Bi_1 N'_0) - \\ - N^2 (Di_2 + Bi_2 i_3^2 + 2Ci_2 i_3 + B^2 i_1^2 N'_0) - N (2BDi_1 i_2 - \\ - 2C^2 i_1 i_2) - (B^2 Di_1^2 i_2 - BC^2 i_1^2 i_2) = 0 \quad (\text{III.17})$$

где $i_1 = \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h}$;

$$i_2 = \frac{EF}{2l};$$

$$i_3 = \frac{M'_0}{h}.$$

Определив таким образом N , при помощи выражения (III.16) нетрудно определить изгибающий момент M от действия усилий в поясах фермы, зная соотношения

$$H_1 = N \frac{h_2}{h} + \frac{M}{h}; \quad H_2 = N \frac{h_1}{h} - \frac{M}{h},$$

определяем действительные усилия в поясах ферм H_1 и H_2 .

Пример 4. Определить вертикальные перемещения узлов и усилия в поясах вантовой фермы под действием вертикальной сосредоточенной силы $P_8 = 4 \text{ т}$ (рис. III.3). Пролет фермы — 40 м. Площади поперечных сечений поясов: F_1 (нижний пояс) — 6 см², F_2 (верхний пояс) — 4 см². Модуль упругости материала поясов $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Усилия предварительного натяжения $H_{01} = H_{02} = 10 \text{ т}$.

Узлы поясов фермы в исходном состоянии располагаются по кривым, представляющим собой две одинаковые квадратные параболы, равноотстоящие от линии опорных точек. Длины распорок $h_2 = 2,625 \text{ м}$, $h_3 = 4,50 \text{ м}$, $h_4 = 5,625 \text{ м}$, $h_5 = 6,0 \text{ м}$ и далее симметрично. При вычислениях размерность сил принимаем в т (10^{-2}).

1. Результаты вычисления расстояний от нейтральной оси к осям поясов, статических моментов инерции сечений фермы и начальных изгибающих моментов приводим в табл. III.4.

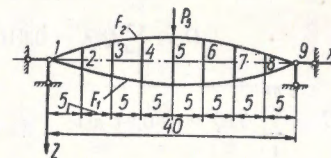


Рис. III.3. К примеру 4.

Таблица III.4

Узлы	h_1	h_2	$S, м^2$	$M_0, мм$
	$м$			
2	1,05	1,575	0,00063	—0,0525
3	1,8	2,7	0,00108	—0,09
4	2,25	3,375	0,00135	—0,1125
5	2,4	3,6	0,00144	—0,12

и далее симметрично

$$M'_{0(2)} = -0,0525 - \frac{200\,000 \cdot 0,00063}{40} \cdot 0,4725 = -1,54087 \text{ мм};$$

$$M'_{0(3)} = -0,09 - \frac{200\,000 \cdot 0,00108}{40} \cdot 0,4725 = -2,64150 \text{ мм};$$

$$M'_{0(4)} = -0,1125 - \frac{200\,000 \cdot 0,00135}{40} \cdot 0,4725 = -3,30187 \text{ мм};$$

$$M'_{0(5)} = -0,12 - \frac{200\,000 \cdot 0,00144}{40} \cdot 0,4725 = -3,52200 \text{ мм}$$

и далее симметрично.

4. Определяем суммарное усилие в ферме от предварительного натяжения

$$N_0 = H_{01} + H_{02} = 0,1 + 0,1 = 0,2 \text{ м}.$$

5. Определяем условное суммарное усилие в ферме от предварительного натяжения

$$N'_0 = N_0 - \frac{EF}{2 \cdot l} \sum_1^m \frac{\Delta z_0^2}{\lambda};$$

$$N'_0 = 0,2 - \frac{200\,000 \cdot 0,001}{2 \cdot 40} \cdot 0,04725 = 0,082 \text{ м}.$$

6. Используя вычисления, произведенные в табл. III.4 и III.5, определяем величины D , B , C , а также i_1 , i_2 и i_3 :

$$D = \sum_1^m Q^2 \lambda = 0,016 \text{ м}^2 \text{ м}; \quad B = \sum_1^m \frac{\Delta h^2}{\lambda} = 4,725 \text{ м};$$

$$C = \sum_1^m \Delta h Q = -0,24 \text{ мм}; \quad i_1 = \frac{E}{l} \cdot \frac{S}{h} = \frac{200\,000}{40} \cdot \frac{0,00063}{2,625} = 1,2 \text{ мм};$$

$$i_2 = \frac{EF}{2 \cdot l} = \frac{200\,000 \cdot 0,001}{2 \cdot 40} = 2,5 \text{ мм};$$

$$i_3 = \frac{M'_0}{h} = \frac{-1,54087}{2,625} = -0,587 \text{ м}.$$

7. Производим вычисление коэффициентов уравнения (III.17) при степенях неизвестного:

2. Некоторые дальнейшие вычисления производим в табл. III.5.

3. Используя результаты вычислений, приведенные в табл. III.4 и III.5, определяем условные изгибающие моменты от действия усилий предварительного натяжения:

$$M'_{0(n)} = M_{0(n)} - \frac{ES_n}{l} \sum_1^m \frac{\Delta h \Delta z_0}{\lambda};$$

Таблица III.5

Участки фермы	h	z_0	Δh	Δz_0	Δz_0^2	$м^2$			Q	$Q \Delta h$	m/m
						Δh^2	$\Delta h \Delta z_0$	Δz_0^2			
1	0	0	2,625	0,2625	0,0689	6,89	0,689	0,1378	0,0138	1,378	-0,0525
2	2,625	0,262	1,875	0,1875	0,0351	3,515	0,3515	0,0703	0,007	0,703	-0,0375
3	4,5	0,45	1,125	0,1125	0,0126	1,265	0,1265	0,0253	0,0025	0,253	-0,0225
4	5,625	0,562	0,375	0,0375	0,0014	0,14	0,0141	0,0028	0,00028	0,028	-0,0075
5	6,00	0,6	-0,375	-0,0375	0,0014	0,14	0,0141	0,0028	0,00028	0,028	-0,0075
6	5,625	0,5625	-1,125	-0,1125	0,0126	1,265	0,1265	0,0253	0,0025	0,253	-0,0225
7	4,5	0,45	-1,875	-0,1875	0,0351	3,515	0,3515	0,0703	0,007	0,703	-0,0375
8	2,625	0,262	-2,625	-0,2625	0,0689	6,89	0,689	0,1378	0,0138	1,378	-0,0525
9	0	0									-0,24
$\sum_1^m$											

Примечание. Длина всех участков фермы $\lambda = 5 \text{ м}$; для узлов 1—8 $Q^2 \lambda = 0,002 \text{ м}^2/\text{м}$.

четвертой

$$2Bi_1 - N'_0 = 2 \cdot 4,724 \cdot 1,2 - 0,082 = 11,258;$$

третьей

$$B^2i_1^2 - 2Bi_1N'_0 = 4,724^2 \cdot 1,2^2 - 2 \cdot 4,724 \cdot 1,2 \cdot 0,082 = 31,22;$$

второй

$$Di_2 + Bi_2i_3^2 + 2Ci_2i_3 + B^2i_1^2N'_0 = 0,016 \cdot 2,5 + 4,724 \cdot 2,5 \times \\ \times 0,587^2 - 2 \cdot 0,24 \cdot 2,5 \cdot 0,587 + 4,724^2 \cdot 1,2^2 \cdot 0,082 = 7,4468;$$

первой

$$2BDi_1i_2 - 2C^2i_1i_2 = 2 \cdot 4,724 \cdot 0,016 \cdot 1,2 \cdot 2,5 - 2 \cdot 0,24^2 \cdot 1,2 \cdot 2,5 = 0,1078.$$

Свободный член уравнения

$$B^2Di_1^2i_2 - BC^2i_1^2i_2 = 4,724^2 \cdot 0,016 \cdot 1,2^2 \cdot 2,5 - 4,724 \cdot 0,24^2 \cdot 1,2^2 \cdot 2,5 = 0,3062.$$

Таким образом, получаем уравнение пятой степени относительно суммарного усилия в ферме

$$N^5 + 11,258N^4 + 31,22N^3 - 7,4468N^2 - 0,1078N - 0,3062 = 0.$$

Действительный корень этого уравнения

$$N = 0,3132 \text{ м (} 10^{-2} \text{)} \text{ или } 31,32 \text{ м.}$$

8. При помощи выражения (III.16) определяем величину изгибающего момента от действия суммарного усилия N

$$M_2 = \frac{2,625 \left(\frac{-1,54087}{2,625} + \frac{200\,000 \cdot 0,00063 \cdot 0,24}{40 \cdot 2,625 \cdot 0,3132} \right)}{1 + \frac{200\,000 \cdot 0,00063 \cdot 4,725}{40 \cdot 2,625 \cdot 0,3132}} = 0,04569 \text{ тм.}$$

Аналогично определяем величины изгибающих моментов для узлов 3, 4, 5: $M_3 = 0,0783 \text{ тм; } M_4 = 0,09792 \text{ тм; } M_5 = 0,10444 \text{ тм}$ и далее симметрично.

9. Определяем усилия в поясах фермы:

$$H_1 = N \frac{h_{2(n)}}{h} + \frac{M_2}{h} = 0,3132 \cdot \frac{1,575}{2,625} + \frac{0,04569}{2,625} = \\ = 0,20532 \text{ м (} 10^{-2} \text{)} \text{ или } 20,532 \text{ м.}$$

$$H_2 = N \frac{h_{1(n)}}{h} - \frac{M_2}{h} = 0,3132 \cdot \frac{1,05}{2,625} - \frac{0,04569}{2,625} = \\ = 0,10787 \text{ м (} 10^{-2} \text{)} \text{ или } 10,787 \text{ м.}$$

Таким образом, усилия в поясах фермы увеличились. Увеличение растяжения в верхнем поясе фермы объясняется характером внешней нагрузки и, как следствие, увеличением кривизны верхнего пояса.

10. При помощи выражения (III.11) определяем перемещения узлов фермы.

Предварительно определяем изгибающие «балочные» моменты в соответствующих узлах фермы:

$$M_2^b = 0,2 \cdot 5 = 0,1 \text{ тм; } M_3^b = 0,2 \cdot 10 = 0,2 \text{ тм;}$$

$$M_4^b = 0,2 \cdot 15 = 0,3 \text{ тм; } M_5^b = 0,2 \cdot 20 = 0,4 \text{ тм}$$

и далее симметрично.

$$z_2 = \frac{0,1}{0,3132} - \frac{0,04569}{0,3132} = 0,173 \text{ м;}$$

$$z_3 = \frac{0,2}{0,3132} - \frac{0,0783}{0,3132} = 0,388 \text{ м;}$$

$$z_4 = \frac{0,3}{0,3132} - \frac{0,09792}{0,3132} = 0,645 \text{ м;}$$

$$z_5 = \frac{0,4}{0,3132} - \frac{0,10444}{0,3132} = 0,943 \text{ м}$$

и далее симметрично.

Перемещения определяются как разница между конечными z и начальными z_0 аппликатами (см. табл. III.5):

$$w_2 = 0,173 - 0,2625 = -0,0895 \text{ м;}$$

$$w_3 = 0,388 - 0,45 = -0,0620 \text{ м;}$$

$$w_4 = 0,645 - 0,5625 = 0,0825 \text{ м;}$$

$$w_5 = 0,943 - 0,6 = 0,3430 \text{ м}$$

и далее симметрично.

Проверив равновесие узлов фермы, легко убедиться, что расчет произведен правильно.

§ 4. Вантовые системы со многими нелинейными параметрами

Вантовые системы произвольных структур в общем случае характеризуются многими нелинейными параметрами, так как усилия в нитях могут быть различными. Такие системы в общем случае не дают возможности получить решение в замкнутом виде, и решаются различными численными методами.

Среди численных методов решения вантовых систем рассмотрим метод многоступенчатого нагружения и специальный, основанный на свойствах вантовых систем, — метод приведения нагрузки к равновесной.

Метод многоступенчатого нагружения. Будем исходить из уравнений (II.42)–(II.44), (II.47), описывающих статическую работу вантовой сети произвольной структуры.

Пусть для некоторой нагрузки P_x, P_y, P_z известно решение, т. е. найдены перемещения ($u = u_1; v = v_1; w = z_1$), соответствующие этой нагрузке.

Если принять, что при изменении нагрузки P_x, P_y, P_z на бесконечно малые величины dP_x, dP_y, dP_z перемещения также изменя-

тся на бесконечно малую величину du , dv , $d\omega$, а величины дополнительных усилий изменятся соответственно на dH , то уравнения (II.42)—(II.44), (II.47) примут вид:

$$\begin{aligned}\nabla_k \left[(H + dH) \frac{\Delta x}{l} \right]_i &= -P_x - dP_x; \quad \nabla_k \left[(H + dH) \frac{\Delta y}{l} \right]_i = -P_y - dP_y; \\ \nabla_k \left[H \frac{\Delta(z_0 + z_1 + d\omega)}{l} + dH \frac{\Delta(z_0 + z_1 + d\omega)}{l} \right]_i &= -P_z - dP_z; \\ H + dH &= H_0 + \frac{EF}{L_l} \left[\Delta^*(u_1 + du) \frac{\Delta^*x}{L} + \Delta^*(v_1 + dv) \frac{\Delta^*y}{L} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta(z_1 + d\omega) \Delta z_0}{l} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{[\Delta(z_1 + d\omega)]^2}{l} \right].\end{aligned}$$

При пренебрежении квадратами и кубами приращений перемещений и усилий как величинами высших порядков малости уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}\nabla_k \left[(H + dH) \frac{\Delta x}{l} \right]_i &= -P_x - dP_x; \\ \nabla_k \left[(H + dH) \frac{\Delta y}{l} \right]_i &= -P_y - dP_y; \\ \nabla_k \left[H \frac{\Delta(z_0 + z_1 + d\omega)}{l} + dH \frac{\Delta(z_0 + z_1)}{l} \right]_i &= -P_z - dP_z; \\ H + dH &= H_0 + \frac{EF}{L_l} \left[\Delta^*u_i \frac{\Delta^*x}{L} + \Delta^*v_i \frac{\Delta^*y}{L} + \Delta^*du \frac{\Delta^*x}{L} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta^*dv \frac{\Delta^*y}{L} + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta z_1 \Delta z_0}{l} + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta(z_0 + z_1) \Delta d\omega}{l} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\Delta z_1 - \Delta z_1}{l} \right].\end{aligned}$$

В результате сокращения в правых и левых частях равных выражений система будет выглядеть следующим образом:

$$\nabla_k \left[dH \frac{\Delta x}{l} \right]_i = -dP_x; \quad (III.18)$$

$$\nabla_k \left[dH \frac{\Delta y}{l} \right]_i = -dP_y; \quad (III.19)$$

$$\nabla_k \left[H \frac{\Delta d\omega}{l} + dH \frac{\Delta(z_0 + z_1)}{l} \right]_i = -dP_z; \quad (III.20)$$

$$dH = \frac{EF}{L_l} \left[\Delta^*du \frac{\Delta^*x}{L} + \Delta^*dv \frac{\Delta^*y}{L} + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta(z_0 + z_1) \Delta d\omega}{l} \right]. \quad (III.21)$$

В случае, когда вантовая сеть образована нитями, неподвижно закрепленными на контуре, уравнения имеют другой вид:

$$\nabla_k \left[H \frac{\Delta^2(dw)}{l} + dH \frac{\Delta^2(z_0 + z_1)}{l} \right]_i = -dP_z; \quad (III.22)$$

$$dH = \frac{EF}{L_l} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\Delta^2(z_0 + z_1) dw}{l} \right]_i; \quad (III.23)$$

$$H = H_0 + \frac{EF}{L_l} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\Delta^2 z_0 z_1}{l} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 z_1 z_1}{l} \right]_i. \quad (III.24)$$

За исходное положение может быть принято любое, в том числе и ненагруженное состояние вантовой сети, когда нагрузка $P_x = P_y = P_z = 0$, а следовательно $z_1 = 0$ и $H = H_0$.

Решение системы нелинейных уравнений может быть получено с точностью до величин высших порядков малости, если прикладывать нагрузку бесконечно малыми порциями, считая каждое предыдущее состояние за исходное и решая каждый раз систему линейных уравнений.

Однако для практических расчетов вантовое покрытие можно загружать не бесконечно малой, а достаточно малой нагрузкой конечной величины, как это делается в известном способе конечных разностей, когда бесконечно малые величины в дифференциальных уравнениях заменяются малыми конечными величинами.

Таким образом, решение системы нелинейных уравнений сводится к решению рекуррентных систем линейных уравнений, т. е. к повторному решению системы линейных уравнений с меняющимися коэффициентами.

При решении систем нелинейных уравнений методом многоступенчатого нагружения очень важным этапом является выбор количества шагов или ступеней приложения внешней нагрузки. Дать конкретные рекомендации по выбору количества шагов расчета в общем случае затруднительно, так как они зависят от особенностей каждой системы: степени нелинейности, характера внешней нагрузки и т. д.

При обычной часто встречающейся нелинейности системы внешнюю нагрузку достаточно разбить на несколько частей, чтобы получить достоверный результат решения.

С другой стороны, метод многоступенчатого нагружения, ввиду огромного количества вычислений, объем которых увеличивается с увеличением количества ступеней приложения нагрузки, целесообразен только при применении современных вычислительных машин. В этой связи количество ступеней нагружения может быть принято достаточно большим (в разумных пределах) и, таким образом, проблема выбора шага в определенной степени отпадает.

Вместе с тем заметим, что наиболее правильно шаг вычислений принимать переменным в процессе счета и размер его регулировать, исходя из условия заданной погрешности на каждом шаге. По сути такой процесс приведет к тому, что размер шага на первом этапе расчета будет значительно меньшим, чем на последующих. Принимая одинаковый размер шага для всего процесса счета, тем

самым предопределяют погрешность решения, различную для всех шагов и наибольшую по величине на первых шагах.

Практика применения метода многоступенчатого нагружения для расчета вантовых покрытий показывает, что наиболее употребительный диапазон ступеней — 10÷100, причем дальнейшее увеличение количества ступеней существенных поправок к результату не дает.

Пример 5. Определить перемещения узлов и усилия в нитях вантовой системы под воздействием вертикальной сосредоточенной силы $P_5 = 1 \text{ т}$ (рис. III.4). Начальная геометрия задана следующими аппликатами узлов:

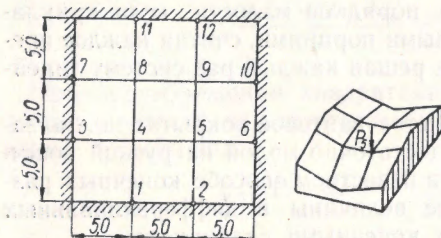


Рис. III.4. К примеру 5.

$$z_1^0 = z_2^0 = z_{11}^0 = z_{12}^0 = -1,5 \text{ м};$$

$$z_3^0 = z_6^0 = z_7^0 = z_{10}^0 = 1,5 \text{ м};$$

$$z_4^0 = z_5^0 = z_8^0 = z_9^0 = 0.$$

Расстояние между узлами равно 5 м. Площади поперечных сечений всех нитей $F = 2,0 \text{ см}^2$. Модуль упругости материала нитей $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Усилия предварительного натяжения всех нитей $H_0 = 2 \text{ т}$.

Данный пример будем решать методом многоступенчатого нагружения, для чего внешнюю нагрузку $P_5 = 1 \text{ т}$ разобьем на пять равных частей, т. е. будем рассматривать пять ступеней загрузки вантовой системы. Количество ступеней выбрано произвольным и, преследуя учебные цели примера, небольшим. Внешняя нагрузка на каждой ступени $P_5^s = 0,2 \text{ т}$.

1. В соответствии с выражением (III.22) составляем для узлов 4, 5, 8 и 9 уравнения равновесия на первой ступени нагружения:

$$H_{1-11} \frac{w_1 - 2w_4 + w_8}{l} + H_{3-6} \frac{w_3 - 2w_4 + w_5}{l} + h_{1-11} \frac{z_1^0 - 2z_4^0 + z_8^0}{l} + h_{3-6} \frac{z_3^0 - 2z_4^0 + z_5^0}{l} = 0;$$

подставляем значения начальных аппликат (перемещения узлов, расположенных на недеформируемом контуре, равны нулю):

$$H_{1-11} \left(\frac{-2w_4 + w_8}{5} \right) + H_{3-6} \left(\frac{-2w_4 + w_5}{5} \right) + \frac{1,5}{5} h_{1-11} - \frac{1,5}{5} h_{3-6} = 0;$$

для узлов 5, 8, 9 по аналогии

$$H_{2-12} \left(\frac{-2w_5 + w_9}{5} \right) + H_{3-6} \left(\frac{-2w_5 + w_4}{5} \right) + \frac{1,5}{5} h_{2-12} - \frac{1,5}{5} h_{3-6} = -0,2;$$

$$H_{1-11} \left(\frac{-2w_8 + w_4}{5} \right) + H_{7-10} \left(\frac{-2w_8 + w_9}{5} \right) + \frac{1,5}{5} h_{1-11} - \frac{1,5}{5} h_{7-10} = 0;$$

$$H_{2-12} \left(\frac{-2w_9 + w_5}{5} \right) + H_{7-10} \left(\frac{-2w_9 + w_8}{5} \right) + \frac{1,5}{5} h_{2-12} - \frac{1,5}{5} h_{7-10} = 0.$$

2. Определяем приращения усилий в нитях в соответствии с уравнением (III.23):

$$h_i = \frac{EF}{L_i} \sum_1^m \left[\frac{\Delta^2 (z_0 + z_1) w}{l} \right]_i;$$

$$h_{1-11} = \frac{20\,000\,000 \cdot 0,0002}{15} \left[\frac{z_1^0 - 2z_4^0 + z_8^0}{5} w_4 + \frac{z_3^0 - 2z_4^0 + z_{11}^0}{5} w_8 \right] = 266,666 \left(-\frac{1,5}{5} w_4 - \frac{1,5}{5} w_8 \right) = -80w_4 - 80w_8;$$

$$h_{2-12} = -80w_5 - 80w_9; \quad h_{3-6} = 80w_4 + 80w_8; \quad h_{7-10} = 80w_8 + 80w_9.$$

3. Значения усилий в нитях и приращения их, вычисленные выше, подставляем в уравнения равновесия и после некоторых преобразований получаем следующую систему линейных уравнений:

$$49,6w_4 + 23,6w_5 + 23,6w_8 = 0; \quad 23,6w_4 + 49,6w_5 + 23,6w_9 = 0,2;$$

$$23,6w_4 + 49,6w_8 + 23,6w_9 = 0; \quad 23,6w_5 + 23,6w_8 + 49,6w_9 = 0.$$

Находим корни данной системы уравнений:

$$w_4 = -0,0203 \text{ м}; \quad w_5 = 0,02336 \text{ м}; \quad w_8 = 0,0193 \text{ м}; \quad w_9 = -0,0203 \text{ м}.$$

Таким образом, в результате приложения первой ступени нагрузки узлы 5 и 8 переместились вниз, а узлы 4 и 9 — вверх.

4. Определяем усилия в нитях после первой ступени нагружения:

$$H = H_0 + \frac{EF}{L_i} \sum_1^m \left[\frac{\Delta^2 z_0 z_1}{l} + \frac{1}{2} \frac{\Delta z_1^2 z_1}{l} \right]_i,$$

где z_1 — перемещения узлов на первой ступени;

$$H_{1-11} = 2 + \frac{20\,000\,000 \cdot 0,0002}{15} \cdot \left[\frac{1,5}{5} 0,0203 - \frac{1,5}{5} \times \times 0,0193 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,0203 + 0,0193}{5} 0,0203 + \frac{1}{2} \times \times \frac{0,0203 + 2 \cdot 0,0193}{5} 0,0193 \right] = 2 + 266,666 [0,00609 - - 0,00579 + 0,000121597 + 0,000113677] = 2,142 \text{ т}.$$

Аналогично определяем усилия для других нитей. Приведем окончательный результат:

$$H_{2-12} = 1,832 \text{ т}; \quad H_{3-6} = 2,320 \text{ т}; \quad H_{7-10} = 1,984 \text{ т}.$$

Таким образом, первый шаг расчета закончен. Второй и все последующие шаги выполняются аналогично первому.

При этом следует помнить, что исходная геометрия для каждого последующего шага определяется на основании решения предыдущего шага. Результат решения на каждом шаге приведен в табл. III.6.

Таблица III.6

Номер шага (ступени)	Перемещения, м				Усилия, т			
	w_4	w_5	w_6	w_9	H_{1-11}	H_{2-12}	H_{3-6}	H_{7-10}
1	-0,0203	0,02336	0,0193	-0,0203	2,142	1,832	2,320	1,984
2	-0,0183	0,02136	0,0173	-0,0183	2,383	1,792	2,765	2,071
3	-0,0145	0,01755	0,0136	-0,0145	2,659	1,808	3,260	2,198
4	-0,0115	0,01448	0,0106	-0,0115	2,935	1,840	3,765	2,329
5	-0,00945	0,01237	0,00859	-0,00945	3,199	1,874	4,266	2,454
Σ	-0,074	0,0891	0,0694	-0,074				

Таким образом, окончательный результат расчета: перемещения узлов

$$w_{4,9} = -7,4 \text{ см (вверх)}; \quad w_5 = 8,91 \text{ см}; \quad w_6 = 6,94 \text{ см};$$

усилия в нитях

$$H_{1-11} = 3,199 \text{ т}; \quad H_{2-12} = 1,874 \text{ т}; \quad H_{3-6} = 4,266 \text{ т}; \quad H_{7-10} = 2,454 \text{ т}.$$

Путем проверки равновесия любого узла в деформированном состоянии легко убедиться, что усилия и перемещения определены с достаточной степенью точности. Для сравнения приведем окончательный результат расчета этой же сети на ЭВМ, принимая 100 циклов загрузки:

$$w_4 = -7,04 \text{ см}; \quad w_5 = 8,53 \text{ см}; \quad w_6 = 6,58 \text{ см}; \quad w_9 = -7,04 \text{ см};$$

$$H_{1-11} = 3,111 \text{ т}; \quad H_{2-12} = 1,782 \text{ т}; \quad H_{3-6} = 4,164 \text{ т}; \quad H_{7-10} = 2,375 \text{ т}.$$

Метод приведения нагрузки к равновесной является приближенным методом решения, позволяющим сравнительно быстро и точно определить перемещения и усилия. Он основан на том, что под равновесную нагрузку расчет вантовых систем можно производить, пренебрегая нелинейными членами уравнений, причем точность решения будет такой же, как при расчете обычных строительных конструкций.

Покажем, что если нагрузка по своему характеру не является равновесной, то расчет вантовой сети можно свести к расчету некоторой другой вантовой сети на равновесную нагрузку, выполнив сравнительно несложные формальные преобразования. Метод приведения нагрузки к равновесной проиллюстрируем на примере континуальных перекрестных сетей, состоящих из двух семейств нитей.

Предположим, что начальное состояние вантовой сети определяется аппликатами z_0 и соответствующими усилиями предварительного натяжения в нитях H_x^0 и H_y^0 . Некоторое промежуточное деформированное состояние этой же сети будет определяться уже другими аппликатами $z_1 = z_0 + w_1$ и соответствующими усилиями $H_{1(x)} = H_x^0 + h_{1(x)}$ и $H_{1(y)} = H_y^0 + h_{1(y)}$.

По аналогии окончательное деформированное состояние сети определяется аппликатами $z_2 = z_1 + w_2$ и усилиями в нитях $H_{2(x)} = H_{1(x)} + h_{2(x)}$ и $H_{2(y)} = H_{1(y)} + h_{2(y)}$.

Таким образом, окончательные аппликаты и усилия в вантовой сети можно представить в следующем виде:

$$z_2 = z_0 + w_1 + w_2; \quad (\text{III.25})$$

$$H_{2(x)} = H_x^0 + h_{1(x)} + h_{2(x)}; \quad (\text{III.26})$$

$$H_{2(y)} = H_y^0 + h_{1(y)} + h_{2(y)}. \quad (\text{III.27})$$

Подставим эти выражения в уравнение равновесия (II.30)

$$H_{2(x)} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + H_{2(y)} \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} = -q_z$$

или

$$\begin{aligned} & H_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 + w_2) + h_{1(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 + w_2) + h_{2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \\ & \times (z_0 + w_1 + w_2) + H_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 + w_2) + h_{1(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 + \\ & + w_2) + h_{2(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 + w_2) = -q_z. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Будем считать, что промежуточное состояние вантовой сети, определяемое аппликатами $z_1 = z_0 + w_1$, вызвано действием расчетной нагрузки при условии, что усилия в нитях до и после нагружения остаются равными величинам предварительного натяжения, т. е. промежуточное уравнение равновесия будет иметь вид:

$$H_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1) + H_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1) = -q_z. \quad (\text{III.29})$$

Вместе с тем, учитывая начальное состояние предварительно напряженной вантовой сети

$$H_x^0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + H_y^0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{III.30})$$

можем записать следующее выражение:

$$H_x^0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + H_y^0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = -q_z. \quad (\text{III.31})$$

Подставим выражение (III.31) в уравнение (III.28), одновременно учитывая (III.30). После некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} & (H_x^0 + h_{1(x)}) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + h_{2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_1 + w_2) + (H_y^0 + h_{1(y)}) \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \\ & + h_{2(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_1 + w_2) = -h_{1(x)} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - h_{1(y)} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Таким образом, получили уравнение равновесия вантовой сети, определяемой исходными аппликатами z_1 , под действием нагрузок-невязок, значение которых определяется правой частью уравнения (III.32). При помощи его легко найти значение перемещения w_2 .

При этом легко заметить, что для этой системы невязки являются равновесной нагрузкой, а величины $h_{1(x)}$ и $h_{1(y)}$ в данном случае являются коэффициентами пропорциональности. Следовательно, нелинейными членами в уравнениях можно было бы пренебречь. Однако величины прогибов w_1 определяли при рассмотрении вантовой сети, усилия в нитях которой не изменяются по мере загрузки ее полной нагрузкой q_z . Степень податливости такой системы может быть достаточно большой, перемещения w_1 — значительными и невязки, определяемые правой частью уравнения (III.32), будут намного превышать величины заданных действительных нагрузок.

Иначе говоря, величины перемещений, определяемые на первом и втором этапах, необходимо свести к одному масштабу.

Если вспомогательную вантовую сеть, условие равновесия которой описывается уравнением (III.26), загрузить нагрузкой q_z , измененной в p раз ($p q_z$), то определяемые перемещения будут иметь также соответствующее выражение $w_1 p$.

Тогда окончательные аппликаты будут выражены следующим образом: $z_2 = z_0 + w_1 p + w_2$; и уравнение равновесия (III.28) несколько изменится

$$H_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + h_{1(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + h_{2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + H_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + h_{1(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + h_{2(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p + w_2) = -q_z.$$

Произведем некоторые преобразования, одновременно учитывая, что w_1 определяется из уравнения (III.29),

$$H_x^0 (p-1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + H_x^0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + H_x^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + h_{1(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + h_{2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + H_y^0 (p-1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + H_y^0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + H_y^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + h_{1(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + h_{2(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p + w_2) = 0. \quad (III.33)$$

К левой части последнего выражения добавляем

$$-H_x^0 \frac{1}{p} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - H_y^0 \frac{1}{p} \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 0.$$

Одновременно некоторые члены (III.33) умножим и разделим на параметр p

$$H_x^0 \left(\frac{p-1}{p} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} p - H_x^0 \frac{1}{p} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + H_x^0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} \frac{1}{p} p + H_x^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} +$$

$$+ h_{1(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + h_{2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + H_y^0 \left(\frac{p-1}{p} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} p - H_y^0 \frac{1}{p} \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + H_y^0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \frac{1}{p} p + H_y^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + h_{1(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p + w_2) + h_{2(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p + w_2) = 0.$$

преобразуем к виду

$$H_x^0 \left(\frac{p-1}{p} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_1 p + z_0) + H_x^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + h_{1(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p) + h_{1(x)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + h_{2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + w_1 p) + h_{2(x)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + H_y^0 \left(\frac{p-1}{p} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_1 p + z_0) + H_y^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + h_{1(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p) + h_{1(y)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + h_{2(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_0 + w_1 p) + h_{2(y)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0$$

или

$$(H_x^0 + h_{1(x)}) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + h_{2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_1 + w_2) + (H_y^0 + h_{1(y)}) \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + h_{2(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (z_1 + w_2) = - \left[H_x^0 \left(\frac{p-1}{p} \right) + h_{1(x)} \right] \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - \left[H_y^0 \left(\frac{p-1}{p} \right) + h_{1(y)} \right] \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}. \quad (III.34)$$

Правая часть уравнения является невязкой нагрузки и обозначается через q_{z1} .

Как и прежде, нагрузка в виде невязок является равновесной для вантовой сети, находящейся в положении z_1 . Члены в квадратных скобках определяются после первого этапа расчета и являются своеобразными коэффициентами пропорциональности.

Пренебрегая нелинейными членами, разрешающее уравнение равновесия (III.34) примет вид

$$H_{1(x)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + h_{2(x)} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + H_{1(y)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + h_{2(y)} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = - \left[H_x^0 \left(\frac{p-1}{p} \right) + h_{1(x)} \right] \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - \left[H_y^0 \left(\frac{p-1}{p} \right) + h_{1(y)} \right] \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}. \quad (III.35)$$

Полные усилия в нитях, согласно (II.32), выражаются следующим образом:

$$H_{2(x)} = H_x^0 + \frac{EF_x}{L_x} \int_{l_x} \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{EF_x}{2L_x} \int_{l_x} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx;$$

$$H_{2(y)} = H_y^0 + \frac{EF_y}{L_y} \int_{l_y} \frac{\partial z_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{EF_y}{2L_y} \int_{l_y} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 dy.$$

Согласно принятым обозначениям $w = w_1 p + w_2$. С учетом этого:

$$H_{2(x)} = H_x^0 + \frac{EF_x}{L_x} \int_x^* \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (w_1 p + w_2) dx + \\ + \frac{EF_x}{2L_x} \int_x^* \left[\frac{\partial}{\partial x} (w_1 p + w_2) \right]^2 dx;$$

$$H_{2(y)} = H_y^0 + \frac{EF_y}{L_y} \int_y^* \frac{\partial z_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (w_1 p + w_2) dy + \\ + \frac{EF_y}{2L_y} \int_y^* \left[\frac{\partial}{\partial y} (w_1 p + w_2) \right]^2 dy.$$

Выполнив преобразования, получаем:

$$h_{1(x)} = \frac{EF_x}{L_x} p \int_x^* \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} dx + \frac{EF_x}{2L_x} p^2 \int_x^* \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx; \quad (\text{III.36})$$

$$h_{2(x)} = \frac{EF_x}{L_x} \int_x^* \frac{\partial}{\partial x} (z_0 + w_1 p) \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \frac{EF_x}{2L_x} \int_x^* \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx;$$

$$h_{1(y)} = \frac{EF_y}{L_y} p \int_y^* \frac{\partial z_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial y} dy + \frac{EF_y}{2L_y} p^2 \int_y^* \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 dy;$$

$$h_{2(y)} = \frac{EF_y}{L_y} \int_y^* \frac{\partial}{\partial y} (z_0 + w_1 p) \frac{\partial w_2}{\partial y} dy + \frac{EF_y}{2L_y} \int_y^* \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Причем

$$H_{2(x)} = H_x^0 + h_{1(x)} + h_{2(x)} \text{ и } H_{2(y)} = H_y^0 + h_{1(y)} + h_{2(y)}.$$

В выражениях усилий нелинейными членами относительно искоемых перемещений w_2 пренебрегаем. Тогда усилия $h_{2(x)}$, $h_{2(y)}$ определяются следующим образом:

$$h_{2(x)} = \frac{EF_x}{L_x} \int_x^* \frac{\partial}{\partial x} (z_0 + w_1 p) \frac{\partial w_2}{\partial x} dx; \quad (\text{III.37})$$

$$h_{2(y)} = \frac{EF_y}{L_y} \int_y^* \frac{\partial}{\partial y} (z_0 + w_1 p) \frac{\partial w_2}{\partial y} dy.$$

Параметр p может быть найден из условия равенства нулю суммарной работы невязок на соответствующих перемещениях

$$\int_G q_{z1} w_1 dG = 0,$$

где G — область вантовой сети.

Для рассматриваемых сетей это условие можно записать иначе

$$\int_x^* \int_y^* q_{z1} w_1 dx dy = 0. \quad (\text{III.38})$$

Получаемое таким образом уравнение является нелинейным относительно параметра p и решение его трудностей не вызывает.

Метод приведения нагрузки к равновесной является приближенным. Для получения более точного результата процесс решения необходимо повторять до тех пор, пока действительные невязки не будут отвечать заданной точности. Во многих случаях метод приведения нагрузки к равновесной является одним из этапов итерационного быстроходящегося процесса.

Пример 6. Определить перемещения узлов и усилия в нитях вантовой системы, применяя метод приведения нагрузки к равновесной. Условия задачи указаны в примере 5 (см. рис. III.4).

1. В соответствии с (III. 29) для узлов сети 4, 5, 8, 9 составляем уравнения равновесия, которые после некоторых преобразований имеют вид:

$$\begin{aligned} -8w'_4 + 2w'_5 + 2w'_8 &= 0; \\ -2w'_4 - 8w'_5 + 2w'_9 &= -5,0; \\ 2w'_4 &- 8w'_8 + 2w'_9 = 0; \\ 2w'_5 + 2w'_8 + 8w'_9 &= 0. \end{aligned}$$

Находим решение данной системы:

$$w'_4 = 0,208; \quad w'_5 = 0,729; \quad w'_8 = 0,104; \quad w'_9 = 0,208.$$

Заметим, что в величинах этих перемещений содержится параметр p , т. е. в дальнейшем будем исходить из того, что $z'_n = pw'_n$.

2. В соответствии с выражением (III.36) определяем величины дополнительных усилий в нитях:

для нити 1—11

$$\begin{aligned} h_{1-11} &= \frac{EF}{L} \left[p \sum_1^m \frac{\Delta z_0 \Delta w'}{\lambda} + \frac{p^2}{2} \sum_1^m \frac{\Delta w' \Delta w'}{\lambda} \right]; \\ h_{1-11} &= \frac{20\,000\,000 \cdot 0,0002}{15} \left[p \frac{-1,5 \cdot 0,208 - 1,5 \cdot 0,104}{5} + \right. \\ &+ \left. \frac{p^2}{2} \cdot \frac{0,208^2 + (0,104 - 0,208)^2 + (-0,104)^2}{5} \right] = -24,959p + 1,7305p^2. \end{aligned}$$

Аналогично определяем дополнительные усилия в нитях 2—12, 3—6, 7—10:

$$h_{2-12} = 74,959p + 22,5637p^2;$$

$$h_{3-6} = 74,959p + 22,5637p^2;$$

$$h_{7-10} = 24,959p + 1,7305p^2.$$

3. В соответствии с правой частью выражения (III.34) определяем невязки нагрузок для всех внутренних узлов сети:

для узла 4

$$\begin{aligned} q_4 &= H'_{1-11} = \frac{(z_0 + pw'_1)_1 - 2(z_0 + pw'_1)_4 + (z_0 + pw'_1)_8}{\lambda} + \\ &+ H'_{3-6} \frac{(z_0 + pw'_1)_3 - 2(z_0 + pw'_1)_4 + (z_0 + pw'_1)_5}{\lambda}, \end{aligned}$$

где

$$H'_{1-11} = \frac{-24,959p^2 + 1,7305p^3 + 2p - 2}{p};$$

$$H'_{3-6} = \frac{74,959p^2 + 22,5637p^3 + 2p - 2}{p};$$

с учетом этого

$$q_4 = \frac{-24,959p^2 + 1,7305p^3 + 2p - 2}{p} \cdot \frac{1,5 - 2 \cdot 0,208p + 0,104p}{5} +$$

$$+ \frac{74,959p^2 + 22,5637p^3 + 2p - 2}{p} \cdot \frac{-1,5 - 2 \cdot 0,208p + 0,729}{5} =$$

$$= 1,3044p^3 - 29,975p.$$

Аналогично для узлов 5, 8 и 9 невязки нагрузок будут равны:

$$q_5 = -11,319p^3 - 45,975p + 1;$$

$$q_8 = -14,9754p;$$

$$q_9 = 1,3046p^3 - 29,9754p.$$

4. Составляем условие равенства нулю суммарной работы невязок в узлах 4, 5, 8, 9 на соответствующих перемещениях w_n . Вычисление производим в табл. III.7.

Таблица III.7

Формула вычислений	Результаты вычислений коэффициентов при p в степени		
	3	1	0
$(1,3044 p^3 - 29,9754 p) 0,208$	0,2713	-6,2349	—
$(-11,319 p^3 - 45,975 p + 1) 0,729$	-8,2516	-33,5168	0,729
$(-14,975 p) 0,104$	—	1,5574	—
$(1,3046 p^3 - 29,9754 p) 0,208$	0,2713	-6,2349	—
Σ	-7,709	-45,544	0,729

Таким образом, получаем следующее кубическое уравнение относительно параметра p :

$$7,709p^3 + 45,544p - 0,729 = 0.$$

Действительный корень этого уравнения $p = 0,015332$.

5. С учетом величины параметра p определяем положение узлов сети после приложения всей нагрузки в предположении действия лишь усилий предварительного натяжения (см. п. 1):

$$z_4^1 = 0,208p = 0,208 \cdot 0,015332 = 0,003189;$$

$$z_5^1 = 0,729p = 0,729 \cdot 0,015332 = 0,01117;$$

$$z_8^1 = 0,104p = 0,104 \cdot 0,015332 = 0,001595;$$

$$z_9^1 = 0,208p = 0,208 \cdot 0,015332 = 0,003189.$$

6. С учетом величины параметра p определяем значения невязок:

$$q_4 = 1,3044 \cdot 0,015332^3 - 29,9754 \cdot 0,015332 = -0,459588;$$

$$q_5 = -11,319 \cdot 0,015332^3 - 45,975 \cdot 0,015332 + 1 = 0,29507;$$

$$q_8 = -14,975 \cdot 0,015332 = -0,229597;$$

$$q_9 = 1,3044 \cdot 0,015332^3 - 29,9754 \cdot 0,015332 = -0,459588.$$

7. Аналогично определяем величины дополнительных усилий в нитях:

$$h_{1-11} = -24,959 \cdot 0,015332 + 1,7305 \cdot 0,015332^2 = -0,382264 \text{ м};$$

$$h_{2-12} = -74,959 \cdot 0,015332 + 22,5637 \cdot 0,015332^2 = -1,143967 \text{ м};$$

$$h_{3-6} = 74,959 \cdot 0,015332 + 22,5637 \cdot 0,015332^2 = 1,154575 \text{ м};$$

$$h_{7-10} = 24,959 \cdot 0,015332 + 1,7305 \cdot 0,015332^2 = 0,383078 \text{ м}.$$

8. Затем определяем величины дополнительных усилий в нитях с учетом предварительного натяжения:

$$H_{1-11} = 2 - 0,382264 = 1,617736 \text{ м};$$

$$H_{2-12} = 2 - 1,143967 = 0,856033 \text{ м};$$

$$H_{3-6} = 2 + 1,154575 = 3,154575 \text{ м};$$

$$H_{7-10} = 2 + 0,383078 = 2,383078 \text{ м}.$$

9. Величины усилий в соответствующих нитях, выраженные через перемещения узлов сети от действия усилий-невязок: для нити 1—11

$$h'_{1-11} = \frac{EF}{L} \left[\frac{z_4 - z_1}{\lambda} (w_4 - w_1) + \frac{z_8 - z_4}{\lambda} (w_8 - w_4) + \frac{z_{11} - z_8}{\lambda} (w_{11} - w_8) \right] =$$

$$= \frac{20\,000\,000 \cdot 0,0002}{15} [(0,003189 - 1,5) w_4 + (0,001595 - 0,003189) (w_8 - w_4) +$$

$$+ (1,5 - 0,001595) (-w_8)] = -79,7444w_4 - 79,9994w_8;$$

для остальных нитей аналогично

$$h'_{2-12} = -78,9803 \cdot w_5 - 80,051691 \cdot w_9;$$

$$h'_{3-6} = 79,7465 \cdot w_4 + 81,02466 \cdot w_8;$$

$$h'_{7-10} = 80,0 \cdot w_8 + 80,25767 \cdot w_9;$$

10. В соответствии с выражением (III.34) составляем уравнения равновесия для узлов 4, 5, 8, 9 при действии на последние нагрузок-невязок: для узла 4

$$H_{1-11} \frac{w_8 - 2w_4 + w_1}{\lambda} + H_{3-6} \frac{w_5 - 2w_4 + w_3}{\lambda} + h'_{1-11} \frac{z'_8 - 2z'_4 - z'_1}{\lambda} +$$

$$+ h'_{3-6} \frac{z'_5 - 2z'_4 + z'_8}{\lambda} = -q_4;$$

$$1,617736 \frac{w_8 - 2w_4}{5} + 3,154575 \frac{w_5 - 2w_4}{5} + (-79,7444w_4 - 79,9994w_8) \times$$

$$\times \frac{0,001595 - 2 \cdot 0,003189 + 1,5}{5} + (79,7465w_4 + 81,02466w_5) \times$$

$$\times \frac{0,011177 - 2 \cdot 0,003189 - 1,5}{5} = 0,45958;$$

$$- 23,599w_8 - 23,599w_5 - 49,60w_4 = 0,45958.$$

Для остальных узлов уравнения составляем аналогично:

$$- 49,6w_4 - 23,599w_5 - 23,599w_8 = 0,45958;$$

$$- 23,599w_4 - 49,6w_5 - 23,599w_9 = - 0,29507;$$

$$- 23,599w_4 - 49,6w_8 - 23,599w_9 = 0,22959;$$

$$- 23,599w_5 - 23,599w_8 - 49,6w_9 = 0,45958.$$

Находим решение данной системы:

$$w_4 = - 0,10466 \text{ м}; \quad w_5 = 0,10552 \text{ м}; \quad w_8 = 0,09497 \text{ м}; \quad w_9 = - 0,10466 \text{ м}.$$

11. Суммарные перемещения узлов:

$$\sum w_4 = z'_4 + w_4 = 0,003189 - 0,10466 = - 0,101471 \text{ м};$$

$$\sum w_5 = z'_5 + w_5 = 0,01117 + 0,10552 = 0,11669 \text{ м};$$

$$\sum w_8 = z'_8 + w_8 = 0,001595 + 0,09497 = 0,096565 \text{ м};$$

$$\sum w_9 = z'_9 + w_9 = 0,003189 - 0,10466 = - 0,10147 \text{ м}.$$

Определенные перемещения не удовлетворяют условиям равновесия узлов, однако по форме подобны действительным (см. перемещения, определенные в примере 5). Поэтому выполним второй неполный шаг метода приведения нагрузки к равновесной, считая определенные перемещения исходным положением сети. Следует отметить, что это приходится выполнять лишь потому, что вантовая сеть данного примера с принятыми соотношениями жесткостей и нагрузки является весьма нелинейной системой.

12. Величины дополнительных усилий в нитях (см. п. 2):

$$h_{1-11} = 0,3947p + 1,568p^2;$$

$$h_{2-12} = - 1,216p + 1,9093p^2;$$

$$h_{3-6} = 1,216p + 1,9093p^2;$$

$$h_{7-10} = - 0,3947p + 1,568p^2.$$

В связи с тем, что второй шаг в данном примере будет закончен на определении нового значения нелинейного параметра p , полные величины усилий определяются следующим образом:

$$H_{1-11} = 0,3947p + 1,568p^2 + 2;$$

$$H_{2-12} = - 1,216p + 1,9093p^2 + 2,$$

$$H_{3-6} = 1,216p + 1,9093p^2 + 2;$$

$$H_{7-10} = - 0,3947p + 1,568p^2 + 2.$$

13. Вычисляем невязки (п. 3):

$$q_4 = 0,2159p^3 - 0,0011p^2 + 0,0012p;$$

$$q_5 = - 0,2558p^3 - 0,9976p + 1;$$

$$q_8 = - 0,1847p^3 + 0,0012p;$$

$$q_9 = 0,2159p^3 + 0,0011p^2 + 0,0012p.$$

14. Составляем условие равенства нулю суммарной работы новых невязок на соответствующих перемещениях. Вычисление производим в табл. III.8.

Таблица III.8

Формула вычислений	Результаты вычислений коэффициентов при p в степени			
	3	2	1	0
$(0,2159 p^3 - 0,0011 p^2 + 0,0012 p) \times (-0,1015)$	-0,02191	0,000111	-0,000121	—
$(-0,2558 p^3 - 0,9976 p + 1) \times (0,1167)$	-0,02985	—	-0,11642	0,1167
$(-0,1847 p^3 + 0,0012 p) \times (0,0966)$	-0,01784	—	0,000121	—
$(0,2159 p^3 + 0,0011 p^2 + 0,0012 p) \times (-0,1015)$	-0,02192	-0,000111	-0,000121	—
Σ	-0,09152	—	-0,11654	0,1167

Т. е., получили следующее кубическое уравнение относительно параметра p :
 $0,09152p^3 + 0,11654p - 0,1167 = 0.$

Действительный корень этого уравнения $p = 0,7147$.

15. Действительные перемещения узлов вантовой сети под действием расчетной нагрузки определяются следующим образом:

$$w_4 = - 0,101471 \cdot 0,7147 = - 0,07252 \text{ м};$$

$$w_5 = 0,11669 \cdot 0,7147 = 0,08338 \text{ м};$$

$$w_8 = 0,096565 \cdot 0,7147 = 0,06902 \text{ м};$$

$$w_9 = - 0,101471 \cdot 0,7147 = - 0,07252 \text{ м}.$$

16. Вычисляем усилия в нитях:

$$H_{1-11} = 0,3947 \cdot 0,7147 + 1,568 \cdot 0,7147^2 + 2 = 3,083 \text{ м};$$

$$H_{2-12} = - 1,216 \cdot 0,7147 + 1,9093 \cdot 0,7147^2 + 2 = 2,106 \text{ м};$$

$$H_{3-6} = 1,216 \cdot 0,7147 + 1,9093 \cdot 0,7147^2 + 2 = 3,844 \text{ м},$$

$$H_{7-10} = - 0,3947 \cdot 0,7147 + 1,568 \cdot 0,7147^2 + 2 = 2,5188 \text{ м}.$$

Как видим, найденные перемещения и усилия мало отличаются от перемещений и усилий, определенных методом многоступенчатого нагружения в примере 5.

§ 5. Расчет бортового элемента и учет его податливости

Расчет бортового элемента производится в предположении, что усилия в вантах как в стадии предварительного напряжения, так и в стадии монтажа и эксплуатации, являются внешней нагрузкой. При этом назначение расчетной схемы бортового элемента в виде балки, фермы, арки, рамы, кольца и ход расчета производятся по правилам строительной механики линейных стержневых систем и трудностей не вызывают.

Однако бортовой элемент при нагружении деформируется и, таким образом, влияет на распределение усилий в вантах, перво-

начально определенных в предположении несмещаемости их опорных точек. В случае значительной податливости бортового элемента расчет вантовой сети рекомендуется повторить заново, считая деформированное состояние контура за исходное для геометрии последней. Повторный же расчет бортового элемента на воздействие уточненных усилий в вантах дает возможность еще более приблизиться к действительному напряженно-деформированному состоянию вантового покрытия в целом. В принципе такой расчет можно продолжать до тех пор, пока деформации бортового элемента на последующем этапе не будут отличаться от деформаций, определенных на предыдущем.

Расчет бортового элемента по методу последовательных приближений к действительному деформированному состоянию в такой постановке связан с огромным количеством вычислений и может быть рекомендован для вантовых покрытий, элементами сети которых являются, в основном, отдельные нити, не связанные совместной работой.

В связи с тем, что напряженное состояние самого бортового элемента и усилия в вантах тесно связаны с деформацией последнего и вызваны одним и тем же внешним воздействием, будет более правильно расчет вантового покрытия производить как единой конструкции, состоящей из сети и жесткого контура. Покажем принципиальную возможность такого расчета для вантовых сетей произвольной структуры (см. § 5 гл. II).

Предположим, что концы вант примыкают к бортовому элементу произвольного очертания, податливому лишь в горизонтальной плоскости. При этом бортовой элемент представлен (в пределах от узла до узла примыкания) прямыми стержнями. Нагрузку, действующую на вантовую сеть примем в виде узловых вертикальных сил.

Все внутренние узлы вантовой сети находятся в равновесии под действием внешних сил и возникающих усилий в вантах:

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; \quad \nabla \left[H \frac{\Delta z}{l} \right]_i + P &= 0; \\ \sum X = 0; \quad \nabla \left[H \frac{\Delta x}{l} \right]_i &= 0; \\ \sum Y = 0; \quad \nabla \left[H \frac{\Delta y}{l} \right]_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

При этом усилие в нити *

$$\begin{aligned} H_i = H_0 + \frac{EF}{L_i} \left[\frac{\Delta^* x \cdot \Delta^* u}{L} + \frac{\Delta^* y \Delta^* v}{L} + \right. \\ \left. + \sum_1^m \frac{\Delta z_0 \Delta w}{l^2} l + \frac{1}{2} \sum_1^m \left(\frac{\Delta w}{l} \right)^2 l \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

* Принятые обозначения см. § 5 гл. II.

От действия усилий в вантах в бортовом элементе возникают нормальные силы H_6 , изгибающие моменты M и поперечные силы Q . Нетрудно видеть, что условия равновесия начальных и конечных узлов вант в местах примыкания к бортовому элементу выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; \quad \nabla \left[H^* \frac{\Delta z}{l} \right]_i &= 0; \\ \sum X = 0; \quad \nabla \left[H^* \frac{\Delta x}{l} - Q \frac{\Delta y}{l} \right]_i &= 0; \\ \sum y = 0; \quad \nabla \left[H^* \frac{\Delta y}{l} + Q \frac{\Delta x}{l} \right]_i &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

где H^* — усилия в вантах или нормальное усилие в бортовом элементе.

Нормальное усилие в бортовом элементе определяется из зависимости

$$H_6 = \frac{E_6 F_6}{l_6} \left(\frac{\Delta x \Delta u}{l_6} + \frac{\Delta y \Delta v}{l_6} \right). \quad (\text{III.42})$$

Для определения поперечной силы воспользуемся выражением [7]

$$Q = \frac{2E_6 I_6}{l_6^2} \left[\gamma_k + \gamma_{k-1} - 2 \left(\frac{\Delta y}{l_6} \cdot \frac{\Delta u}{l_6} - \frac{\Delta x}{l_6} \cdot \frac{\Delta v}{l_6} \right) \right], \quad (\text{III.43})$$

где E_6 — модуль упругости материала бортового элемента;
 I_6 — момент инерции сечения бортового элемента;
 γ_k, γ_{k-1} — углы поворота в сечениях начала и конца рассматриваемого стержня бортового элемента;
 l_6 — длина участка бортового элемента.

Зависимость углов поворота изгибаемого стержня от перемещений его концов [7]

$$\gamma_k = \frac{\sum_k \left[\frac{E_6 I_6}{l_6} \left(\frac{\Delta y}{l_6} \cdot \frac{\Delta u}{l_6} - \frac{\Delta x}{l_6} \cdot \frac{\Delta v}{l_6} \right) \right]_i}{\sum_k \left[\frac{E_6 \cdot I_6}{l_6} \right]_i}. \quad (\text{III.44})$$

Напряженно-деформированное состояние вантовой сети с податливым бортовым элементом описывается уравнениями равновесия (III.39), (III.41), уравнениями деформаций для нити (III.40) и для бортового элемента (III.42). Для того, чтобы свести число неизвестных к u, v, w , пользуются уравнениями (III.43) и (III.44).

§ 6. Некоторые вопросы расчета оптимальных вантовых покрытий

Аналогично расчету любой статически-неопределимой системы расчет вантовых систем обычно начинается с назначения жесткостных характеристик-сечений вант принятой схемы и усилий

предварительного напряжения, являющихся также своеобразной мерой жесткости покрытия.

От того, насколько удачно заданы начальные параметры, зависит весь последующий расчет в количественном и качественном отношении. Вместе с тем, возникают трудности в обеспечении рационального распределения усилий в вантах и, следовательно, в обеспечении минимальных затрат материала на систему в целом.

В идеальном случае сечения вант должны быть такими, чтобы возникшие в них напряжения были равны расчетному сопротивлению материала. Такие вантовые системы носят название оптимальных (в смысле поперечных сечений).

Известно, что выражение для определения оптимальной площади поперечного сечения вант имеет следующий вид:

$$F = \frac{H}{mR}, \quad (\text{III.45})$$

где R — расчетное сопротивление материала вант;

m — коэффициент условий работы вант.

Наиболее просто оптимальные сечения вант можно получить для систем с одним нелинейным параметром: для отдельных нитей и сетей шестиугольной структуры. Принимая во внимание выражение (III.45), уравнение для расчета упругих пологих нитей (III.6) после некоторых преобразований принимает другой вид

$$H = \sqrt{\frac{DE}{2(mRI + \mu E)}}. \quad (\text{III.46})$$

Это уравнение можно получить также в другом виде [21].

Для сетей шестиугольной структуры порядок разрешающего уравнения можно уменьшить на единицу

$$H^2 \left(1 + \frac{E}{2mR \sum \lambda} \sum \frac{\Delta z_0^2}{\lambda} \right) - H_0 H - \frac{E}{2mR \sum \lambda} \sum \frac{\Delta k^2}{\lambda} = 0. \quad (\text{III.47})$$

Принципиальных трудностей не вызывает и расчет оптимальных вантовых ферм, если исходить из уравнения (III.17).

Рассмотренный путь расчета оптимальных вантовых систем применим к системам со многими нелинейными параметрами.

Нахождение оптимальных конструкций (наименьшего веса, объема и т. д.), напряженно-деформированное состояние которых описывается линейными уравнениями, производится при помощи классических методов решения экстремальных задач.

В других случаях, когда условия задачи формируются с ограничениями в виде линейных неравенств, отыскание минимума линейной функции, например объема материала на конструкцию, в последнее время производят методами линейного программирования.

Нахождение минимума целевой функции при нелинейных ограничениях, к чему в общем случае сводится расчет оптимальной ван-

товой системы, должно решаться методами нелинейного программирования. Однако уровень теории нелинейного программирования пока не дает возможности получить практически приемлемое решение оптимальных вантовых систем.

Несомненный практический интерес представляет следующий путь решения. При расчете методом многоступенчатого нагружения (§ 4 гл. III) вантовая система на каждой ступени рассматривается как линейно-деформируемая. Поэтому, применяя методы линейного программирования, в частности, так называемый «симплекс-метод», можно найти минимальные площади вант на каждой ступени нагружения. Комбинация решения нелинейной задачи методом многоступенчатого нагружения и «симплекс-метода» на каждой ступени в результате приведет к решению оптимальной вантовой системы — отысканию минимальных сечений вант.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ РАСЧЕТА ВАНТОВЫХ ПОКРЫТИЙ

§ 1. Основные положения программирования

Примеры расчета, приведенные в гл. III, дают представление о том значительном объеме вычислительной работы, с которой приходится сталкиваться инженеру-проектировщику, решая подобные задачи. Если учесть, что задачи реального проектирования вантовых систем обычно представлены большим количеством параметров, вариантов загрузки и т. д., практическое разрешение их при помощи обычной логарифмической линейки становится невозможным. Поэтому большинство предлагаемых методов ориентировано на механизированное выполнение.

Электрические клавишные счетные машины (автоматы «Вятка», «Вильнюс», «Zoemtron» моделей КЕЛ 2ц и САР 2ц и др.) дают возможность более эффективно решать задачи за счет разделения труда между инженером и оператором, выполняющим счет по разработанной последовательности (программе) вычислений. Еще больший количественный и качественный эффект при инженерных расчетах дает применение электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Вычислительный процесс математической задачи (алгоритм) в общем случае включает в себя не только формулы и их последовательность применения, но и логические схемы процесса, учитывающие различные пути и варианты решения, характер и свойства математических понятий задачи, заданных условиями или возникающих в процессе счета. Для полного, краткого, наглядного и однозначного описания такого алгоритма применяют алгоритмические языки.

В связи с широким применением ЭВМ, разработкой программ без связи с определенным типом машины и обменом такими программами, одинаково понятными специалистам разных областей науки и техники не только одной страны, алгоритмические языки получили особое развитие. При помощи специально разработанных программирующих программ алгоритм, описанный на алгоритмическом языке, переводится, или, иначе, транслируется на язык конкретных ЭВМ, который представляет собой системы команд (кодов), определяющих величины, действия над ними и положение их в процессе счета в памяти машины. Получаемая таким образом

программа называется рабочей и используется для решения задачи на конкретной ЭВМ.

Программу, написанную на алгоритмическом языке, можно перевести в команды конкретных ЭВМ вручную по определенным правилам. Учитывая, что в настоящее время не все ЭВМ снабжены программирующими программами (трансляторами), кодировка рабочих программ вручную остается необходимым этапом в программировании.

Одним из наиболее распространенных языков программирования является международный язык АЛГОЛ-60. Предлагаемые в настоящей главе программы расчета вантовых систем покрытий изложены на нем.

Расчет вантовых систем покрытий представляет собой довольно сложную задачу по логической схеме и по объему вычислений. Существующие ЭВМ (М-20, БЭСМ-2м, БЭСМ-3м, «Урал», «Минск», «Киев», «Наири», «Мир», «Проминь» и др.) имеют ограниченный объем оперативной памяти, требующий наиболее эффективного его использования. Для этого в предлагаемых программах применен целый ряд приемов, обеспечивающих решение на сравнительно небольших машинах (в смысле объема оперативной памяти) довольно сложных задач с многими десятками и даже сотнями неизвестных. Исходная информация минимальная и в то же время общая для широкого класса задач, однотипные вычислительные процессы включены в циклы, использована возможность замещения в ячейках памяти ЭВМ при счете одних чисел другими, исключения нулевых элементов, записи нескольких чисел в одну ячейку памяти и логического произведения констант («logpr»), решения систем линейных уравнений, обладающих ленточной структурой (расположение коэффициентов в матрице вдоль главной диагонали в виде узкой ленты), методом последовательного исключения неизвестных [46].

Предлагаемые программы являются наиболее простыми в комплексе программ расчета вантовых систем *.

Для изложения программ принят язык публикаций с некоторыми общепринятыми отступлениями от формальных синтаксических правил. Некоторые комментарии приведены в самих программах.

Программы переведены в коды ЭВМ М-20 и «Наири» при помощи ручного кодирования и транслятора ТА-2 (для М-20).

§ 2. Программа расчета вантовых сетей произвольной структуры

В качестве основного элемента системы принимается отдельная нить — ванта. Информация о системе задается следующими исходными данными:

* Программы расчета вантовых сетей с учетом податливости опорного контура с определением оптимальных сечений вант и др. находятся в библиотеке стандартных программ КиевЗНИИЭП.

n — количество узлов сети, включая узлы на опорном контуре;
 $n1$ — количество внутренних узлов сети (порядок системы уравнений);

$n2$ — количество нитей;
 $n3, n4, n5, n6, n7, n8$ — размер массивов соответственно $b1, a1, a2, a3, a4, a5$;

$k1$ — модуль упругости материала вант;
 h — ширина ленты линейной системы уравнений;
 $a1[1:n4]$ — массив различных значений величин предварительного натяжения вант сети;

$a2[1:n5]$ — массив различных значений площадей поперечных сечений вант сети;

$a3[1:n6]$ — массив различных значений величин пролетов вант;

$a4[1:n7]$ — массив различных значений величин участков-пролетов вант;

$b[1:n2]$ — массив характеристик каждой нити сети (каждая ячейка массива состоит из семи значений, характеризующих одну нить, и представлена в следующем виде:

Количество узлов	Предварительное натяжение	Площадь сечения	Пролет	Участок первый	Участок средний	Участок последний
------------------	---------------------------	-----------------	--------	----------------	-----------------	-------------------

Указываются только типы величин

Каждое число, записанное в эту ячейку, — двухразрядное и по величине составляет не более 77 (в восьмиричном исчислении), при этом место признака в ячейке не заполняется);

$b1[1:n3]$ — массив нумерации узлов для каждой нити в последовательности, предусмотренной массивом $b[1:n2]$ (для заполнения массива $b1$ на схеме сети предварительно пронумеровываются узлы: внутренние нумеруются от 1 до $n1$ слева направо и снизу вверх, а затем в любом порядке узлы, расположенные на опорном контуре);

$z[1:n]$ — массив начальных аппликат узлов сети и контура, начиная с внутренних узлов схемы;

$p[1:n1]$ — массив внешних узловых нагрузок для внутренних узлов сети;

$b2[1:7]$ — массив констант, при помощи которых при счете на ЭВМ производится выделение части ячейки массива $b[1:n2]$;

$b3[1:7]$ — массив констант, при помощи которых значения, характеризующие отдельную нить в массиве $b[1:n2]$, сдвигают во второй адрес рабочей ячейки ЭВМ;

$c1$ — количество ступеней приложения внешней нагрузки.

Ниже приводится программа.

Begin

integer $i, i1, i2, c, c1, c2, c3, n, n1, n2, n3, n4, n5, n6, n7, n8, g, g1, d, d1, d2, h, h1, k2, r, r1, f, v, j$;

integer array $b[1:n2], b1[1:n3], b2[1:7], b3[1:7], b4[1:7]$;
read ($n, n1, n2, n3, n4, n5, n6, n7, n8, h$);
begin real $H, F, l, l1, l2, l3, l4, dz, k1$;
array $a[1:(n1 \times h - h \times (h - 1) \div 2)], a1[1:n4], a2[1:n5],$
 $a3[1:n6], a4[1:n7], a5[1:n8], z[1:n], p[1:n1], w[1:n1],$
 $w1[1:n1], H1[1:n2]$;

read ($b, b1, b2, b3, a1, a2, a3, a4, z, p, k1, c1$);

$v := n1 \times h - h \times (h - 1) \div 2$; $k2 := n1 - h + 2$;

for $i := 1$ **step** 1 **until** $n1$ **do**

$p[i] := p[i]/c1$;

for $c3 := 1$ **step** 1 **until** $c1$ **do begin**

$f := 0$; $r1 := 0$;

$M1$: **for** $d2 := 1$ **step** 1 **until** $n2$ **do begin**

for $c := d2$ **step** 1 **until** $n2$ **do begin**

for $i := 1$ **step** 1 **until** 7 **do begin**

$H := \logpr(lpk\ b2[i], b[c])$;

$b4[i] := \logpr(lpk\ H, b3[i])$ **end**;

$g := b4[1] - 2$; **begin array** $t[1:g]$;

$H :=$ **if** $c3 = 1$ **then** $a1[b4[2]]$ **else** $H1[c]$;

$F := a2[b4[3]]$; $l := a3[b4[4]]$; $l1 := a4[b4[5]]$;

$l2 := a4[b4[6]]$; $l3 := a4[b4[7]]$;

for $i := 1$ **step** 1 **until** g **do**

$t[i] := 0$;

for $i := 1$ **step** 1 **until** $g + 1$ **do begin**

$l4 :=$ **if** $i = 1$ **then** $l1$ **else begin**

if $i = g + 1$ **then** $l3$ **else** $l2$ **end**;

$dz := (z[b1[f + i + 1]] - z[b1[f + i]])/l4$;

if $i = g + 1$ **then go to** $M2$;

$t[i] := t[i] + dz$; **if** $i = 1$ **then go to** $M3$;

$M2$: $t[i - 1] := t[i - 1] - dz$;

$M3$: **end**;

for $i := 1$ **step** 1 **until** g **do**

$t[i] := t[i] \times f \times k1/l$;

if $r1 = 1$ **then go to** $M7$;

for $i := 1$ **step** 1 **until** g **do begin**

for $j := i$ **step** 1 **until** g **do begin**

$i1 := j + (i - 1) \times g - (i - 1) \times i \div 2$; $a5[i1] := 0$ **end end**;

$a5[1] := -H/l1$; $dz := (z[b1[f + 2]] - z[b1[f + 1]])/l1$;


```

for i := 1 step 1 until g do
  a5[i] := a5[i] - t[i] × dz; i1 := (g + 1) × g ÷ 2;
  dz := (z[b1[g + 2 + f]] - z[b1[g + 1 + f]])/l3;
  F := -H/l3 + dz × t[g]; a5[i1] := if g = 1 then a5[i1] + F else F;
  for i := 1 step 1 until g - 1 do begin
    i1 := i + (i - 1) × g - (i - 1) × i ÷ 2; a5[i1] := a5[i1] -
    - H/l2;
    i1 := i + 1 + (i - 1) × g - (i - 1) × i ÷ 2; a5[i1] :=
    = a5[i1] + H/l2;
    i1 := (i + 1) + i × g - (i + 1) × i ÷ 2; a5[i1] := a5[i1] -
    - H/l2;
    dz := (z[b1[f + i + 2]] - z[b1[f + i + 1]])/l2;
    for j := i step 1 until g do begin
      i1 := j + (i - 1) × g - (i - 1) × i ÷ 2; a5[i1] := a5[i1] +
      + t[j] × dz;
      if i = j then go to M4; i1 := j + i × g - (i + 1) × i ÷ 2;
      a5[i1] := a5[i1] - t[j] × dz end;
    M4: end j end i;
    for i := 1 step 1 until g do begin
      if b1[f + i + 1] ≤ k2 then c2 = 0 else c2 := (b1[f + i + 1] -
      - k2 + 1) × (b1[f + i + 1] - k2) ÷ 2; d := (b1[f + i + 1] -
      - 1) × h - c2 + 1;
      for j := i step 1 until g do begin
        d1 := d + b1[f + j + 1] - b1[f + i + 1]; i1 := j + (i - 1) ×
        × g - (i - 1) × i ÷ 2;
        a[d1] := a[d1] + a5[i1] end j end i; f := f + b4[1] end c;
      comment. На этом заканчивается формирование системы линей-
      ных уравнений — массива a[1 : v]. Далее следует решение системы
      по методу Гаусса. В целях экономии оперативной памяти ЭВМ пре-
      дусмотрено использование ленточной структуры системы уравнений
      [46];
      begin
        for i := 1 step 1 until n1 do
          w1[i] := p[i]; h1 := h; d := 1;
          for i := 0 step 1 until n1 - 2 do begin
            j := 0; d1 := d;
            for i1 := 1 step 1 until h1 - 1 do begin
              d1 := d1 + h1 - j;

```

```

          for i2 := 0 step 1 until h1 - i1 - 1 do
            a[d1 + i2] := a[d1 + i2] - a[d + i1] × a[d + i1 + i2]/a[d];
            if n1 - h1 ≤ i + i1 - 1 then j := j + 1 end i1; d := d + h1;
            if n1 - h1 ≤ i then h1 := h1 - 1 end i; g1 := 1; h1 := h; d := 1;
            for i := 0 step 1 until n1 - 2 do begin
              for i1 := 1 step 1 until h1 - 1 do
                w1[g1 + i + i1] := w1[g1 + i + i1] - a[d + i1] × w1[g1 + i]
                /a[d];
                d := d + h1; if n1 - h1 ≤ i then h1 := h1 - 1 end i; r := n1;
                M5: w1[r] := -w1[r]/a[d]; if d = 1 then go to M6; if h > h1
                then h1 := h1 + 1; d := d - h1; r := r - 1;
                for i2 := 1 step 1 until h1 - 1 do
                  w1[r] := w1[r] + a[d + i2] × w1[r + i2]; go to M5;
                M6: end;
              comment. В результате решения системы уравнений получены пе-
              ремещения на одном цикле в виде массива w1[1 : n1];
              for i := 1 step 1 until v do
                a[i] := 0; r1 := 1; f := 0; go to M1;
              M7: H1[d2] := 0; H1[d2] := H1[d2] + (w1[b1[f + 2]]) ↑ 2/(2 ×
              × l1) + (w1[b1[g + f + 1]]) ↑ 2/(2 × l3);
              for i := 1 step 1 until g - 1 do
                H1[d2] := H1[d2] + (w1[b1[f + i + 2]] - w1[b1[f + i +
                + 1]]) ↑ 2/(2 × l2);
                H1[d2] := H1[d2] × F × k1/l + H;
                for i := 1 step 1 until g do
                  H1[d2] := H1[d2] + t[i] × w1[b1[f + i + 1]]; f := f +
                  + b4[1] end d2;
                for i := 1 step 1 until n1 do begin
                  z[i] := z[i] + w1[i]; w[i] := w[i] + w1[i] end end c3;
                  print(w, H1) end end;

```

В результате расчета по данной программе ЭВМ печатает:
 w — вертикальные перемещения всех пролетных узлов вантовой
 сети;

H1 — окончательные усилия во всех нитях (вантах) сети.

Приведем пример заполнения исходных данных и результатов
 расчета вантовой системы, описанной в примере 5 (гл. III). Исход-
 ные данные записаны в порядке, предусмотренном программой.
 Например, первое число соответствует количеству узлов сети n
 и т. д. (см. в программе «read»).

12 4 4 16 1 1 1 1 3 3 (далее следуют массивы, начиная с $b[1:4]$; массивы $b2$ и $b3$ заданы программно один раз) 4 1 1 1 1 1 1 4 1 1 1 1 1 4 1 1 1 1 1 1 4 1 1 1 1 1 1 4 1 1 1 1 1 1 ($b1$) 5 1 3 1 1 6 2 4 12 7 1 2 8 9 3 4 10 ($a1$) 2 ($a2$) 0,0002 ($a3$) 15 ($a4$) 5 (z) 0 0 0 0 1,5 1,5 —1,5 —1,5 —1,5 —1,5 1,5 1,5 (p) 0 1 0 0 ($k1$) 20000000 ($c1$) 5.

Результат расчета (печать на ленте ЭВМ) *:

— 01 742057463	++ 01 319913892	} H
+— 01 891513126	++ 01 187475410	
+— 01 695534737	++ 01 426604473	
— 01 742057463	++ 01 245477531	

Исходя из принятой размерности исходных данных, перемещения узлов сети (в порядке, предусмотренном нумерацией) получены в m , а усилия в нитях — в m .

§ 3. Программа расчета вантовых ферм покрытий

Информация о системе задается следующими исходными данными:

$K1$ — пролет фермы;

$K2, K3$ — площадь поперечного сечения соответственно несущего и натягивающего поясов;

$K4, K5$ — усилия предварительного напряжения соответственно несущего и натягивающего поясов;

$K6$ — модуль упругости материала вант;

n — количество узлов фермы, включая опорные;

$P[1:n-2]$ — массив внешних узловых сил;

$h[1:n]$ — массив высот распорок или подвесок;

$z[1:n]$ — массив начальных аппликат узлов нижнего (несущего) пояса.

В целях исключения переполнения ячеек ЭВМ при счете исходные данные рекомендуется задавать: силы — в m с масштабным коэффициентом 10^{-2} и линейные величины — в m .

Ниже приводится программа.

Begin

integer n, i, j ;

read (n);

begin real $K1, K2, K3, K4, K5, K6, K7, K8, K9, K10, K11, K12, K13, K14, K15, K16, K17, K18, K19, K20, K21$;

array $P[1:n-2], h[1:n], z[1:n], z1[1:n], z2[1:n-2], z3[1:n-2], h1[1:n], h2[1:n], a1[1:6], a2[1:12], M[1:n-2], M1[1:n], M2[1:n-2], Q[1:n-1], S[1:n]$;

procedure Polinom (N, K, T); begin integer N ; real array K, T ;

comment. Тело процедуры записывается в кодах машины М-20.
 K — массив коэффициентов полинома; T — массив значений неизвестных; end;

read ($K1, K2, K3, K4, K5, K6, P, h, z$);

$K7 := K1/(n-1)$; $K8 := 0$; $K9 := 0$; $K10 := 0$; $K11 := 0$;
 $K12 := 0$; $K13 := 0$; $K14 := 0$;

for $i := 1$ step 1 until $n-2$ do begin

$K8 := K8 + P[i] \times (K1 - K7 \times i)/K1$; $K9 := K9 + P[i] +$
 $+ P[i] \times (K1 - K7 \times i)/K1$ end;

for $i := 1$ step 1 until $n-2$ do begin

$M[i] := K8 \times K7 \times i$;

for $j := 1$ step 1 until $i-1$ do

$M[i] := M[i] - P[i-j] \times K7 \times j$ end;

for $i := 1$ step 1 until $n-1$ do begin

$Q[i] := -K8$;

for $j := 1$ step 1 until $i-1$ do

$Q[i] := Q[i] + P[i-j]$ end;

for $i := 1$ step 1 until $n-2$ do

$K10 := K10 + M[i] \times P[i]$;

for $i := 1$ step 1 until n do begin

$h1[i] := K3 \times h[i]/(K2 + K3)$; $h2[i] := K2 \times h[i]/(K2 +$
 $+ K3)$ end;

for $i := 1$ step 1 until n do

$z1[i] := z[i] - h1[i]$;

for $i := 1$ step 1 until n do

$S[i] := K2 \times h1[i]$;

for $i := 1$ step 1 until $n-1$ do begin

$K11 := K11 + (h[i+1] - h[i]) \times Q[i]$;

$K12 := K12 + (h[i+1] - h[i]) \times (z1[i+1] - z1[i])/K7$;

$K13 := K13 + (z1[i+1] - z1[i]) \uparrow 2/K7$;

$K14 := K14 + (h[i+1] - h[i]) \uparrow 2/K7$ end;

for $i := 1$ step 1 until n do

$M1[i] := (K4 \times h1[i] - K5 \times h2[i]) - K6 \times K12 \times S[i]$
 $/K1$;

$K15 := (K4 + K5) - K6 \times (K2 + K3) \times K13/(2 \times K1)$;

* Правило чтения машинной печати общепринятое (для ЭВМ М-20): слева направо знак числа, знак порядка его, порядок и мантисса.

$K16 := K6 \times S[2]/(K1 \times h[2]); K17 := K6 \times (K2 + K3)/(2 \times K1);$

$K18 := M1[2]/h[2]; a1[1] := 1; a1[2] := 2 \times K14 \times K16 - K15;$

$a1[3] := K14 \times (K16 \uparrow 2 \times K14 - 2 \times K15 \times K16); a1[4] := -1 \times (K15 \times K16 \uparrow 2 \times K14 \uparrow 2 + K10 \times K17 + K17 \times K18 \uparrow 2 \times K14 + 2 \times K11 \times K17 \times K18);$

$a1[5] := -2 \times K16 \times K17 \times (K14 \times K10 - K11 \uparrow 2); a1[6] := -K16 \uparrow 2 \times K17 \times K14 \times (K10 \times K14 - K11 \uparrow 2);$

Polinom (5, a1, a2);

comment. Полином пятой степени решается по стандартной программе ЭВМ. Коэффициенты полинома расположены в массиве a1 [1 : 6]. Из всех решений полинома выбирается положительный корень и засылается в ячейку K19;

for i := 1 step 1 until 12 do begin

$K12 := \logpr(a2[i], CO);$ if $K12 \neq 0$ then

go to m1; if $2a[i] > 0$ then **begin** $K19 := a2[i];$ **go to m2 end;**

m1: end;

m2: for i := 2 step 1 until n - 1 do

$M2[i - 1] := (M1[i] - (K6 \times S[i] \times K11)/(K1 \times K19))/(1 + (K6 \times S[i] \times K14)/(K1 \times h[i] \times K19)); K20 := K19 \times h2[2]/h[2] + M2[1]/h[2]; K21 := K19 \times h1[2]/h[2] - M2[1]/h[2]$

for i := 1 step 1 until n - 2 do begin

$z2[i] := M[i]/K19 - M2[i]/K19; z3[i] := z2[i] - z1[i + 1]$

end;

print (K8, K9, K20, K21, z3) end;

Таким образом, в результате расчета фермы на ЭВМ по приведенной программе на печать выводятся:

K8, K9 — вертикальная опорная реакция соответственно левая и правая;

K20, K21 — окончательные усилия соответственно в нижнем и верхнем поясах;

z3 [1 : n - 2] — вертикальные перемещения всех узлов фермы.

Программа переведена в коды ЭВМ М-20, заперфорирована на 38 картах и занимает 715 ячеек оперативной памяти. По программе можно рассчитать ферму с количеством узлов около 600.

Приведем пример заполнения исходных данных и результат расчета на ЭВМ по данной программе. Условия задачи возьмем из примера 4 гл. III.

Исходные данные: 40 (пролет); 0,0006 и 0,0004 (площади сечений соответственно нижнего и верхнего поясов); 0,1 и 0,1 (усилия предельного напряжения поясов); 200000 (модуль упругости); 0 0 0 0,04 0 0 0 (массив нагрузок); 0, 2,625 4,5 5,625 6,0 5,625 4,5

2,625 0 (массив высот распорок); 0 1,3125 2,25 2,8125 3,0 2,8125 2,25 1,3125 0 (массив начальных аппликат нижнего пояса). Размерность силы принята в $m (10^{-2})$, линейные величины — в m .

Результат расчета (печать на ленте ЭВМ М-20):

+— 01 200000000 — K8
+— 01 200000000 — K9
+— 00 205324043 — K20
+— 00 107869348 — K21

— 01 891119906
— 01 615372586
+— 01 827241960
+— 00 343672373
+— 01 827241960
— 01 615372586
— 01 891119906

Первый знак означает знак числа, второй — знак порядка, далее порядок числа и значущие числа. Величины сил необходимо увеличить на 10^2 , т. е. привести к m .

ДИНАМИКА ВАНТОВЫХ ПОКРЫТИЙ

§ 1. Особенности динамического расчета вантовых покрытий *

Деформативность, большой удельный вес временных нагрузок являются причинами повышенной чувствительности вантовых покрытий к динамическим воздействиям.

Динамический расчет, сложный для обычных конструкций, еще больше усложняется для вантовых покрытий. При рассмотрении колебаний вантовых систем обычно исходят из нелинейных уравнений статики, присоединяя к ним выражения влияния сил инерции в соответствии с принципом Даламбера. Массы системы сосредотачиваются в узлах сети и, таким образом, рассматривают нелинейную систему с конечным числом степеней свободы. При этом, как правило, рассматриваются только вертикальные колебания.

Одним из основных свойств нелинейных колебаний вантовых покрытий является отсутствие изохронности. Частота нелинейных колебаний зависит от амплитуды. В вантовых покрытиях это свойство вызывается изменением жесткостных характеристик системы в процессе колебаний.

Вынужденные колебания происходят с периодами возмущающей гармонической силы или с кратными периодами. Поэтому опасность возникновения резонансных явлений в вантовых покрытиях большая, чем при колебаниях обычных конструкций. Возможно существование нескольких резонансных режимов. Вполне понятно, что принцип независимости колебательных движений неприменим.

Не продолжая перечень существенных отличий нелинейных колебаний вантовых покрытий можно сделать заключение о значительной сложности задачи динамического расчета, связанной с нелинейной деформативностью.

Однако поскольку при достаточно малых амплитудах колебаний вантовые покрытия ведут себя как линейно-деформируемая система, не следует категорически отвергать возможность рассмотрения колебаний вантовых покрытий как гармонических. При увеличенных амплитудах колебания вантовые покрытия можно рассматривать как квазигармонические.

* Методы динамического расчета вантовых покрытий разработаны канд. техн. наук Л. Г. Дмитриевым.

При динамическом расчете вантовых покрытий должны учитываться не только первые, низшие формы и частоты колебаний, но и весь спектр частот. Последнее обстоятельство повышает трудоемкость вычислений. Известные приближенные методы определения форм и частот колебаний (итерационный, спектральной функции и др.) оказываются практически неприменимыми.

Наиболее существенными работами, посвященными динамике вантовых систем, являются работы А. П. Синицына [42, 43], А. Р. Ржаницына [40], Л. Ф. Лилеева и Е. Н. Селезневой [27], Н. Н. Попова и Б. С. Расторгуева [31]. Методы расчета, освещаемые в них, носят либо постановочный характер, либо применимы к частным видам конструктивных схем — к отдельной нити.

Достаточно точный динамический расчет вантовых покрытий можно выполнить с помощью ЭВМ. Первые попытки исследования динамики вантовых покрытий с применением ЭВМ содержатся в работе [23].

Применение существующих ЭВМ связано с ограничениями в объеме информации, хранимой в оперативной памяти машины в процессе счета, в количестве вычислений и др. При расчете систем со многими степенями свободы существенное значение имеет сохранение заданной точности счета. Излагаемые методы решения задач динамики вантовых покрытий в определенной степени учитывают эти требования.

В настоящей главе изложены возможные практические пути динамического расчета вантовых покрытий. В ней не рассматриваются вопросы, связанные с единственностью решения, сходимостью и корректностью приближенных методов и др., относящиеся к области чистой математики.

§ 2. Колебания линейно-деформируемых вантовых систем

Динамические свойства шарнирно-стержневой линейно-деформируемой системы с n степенями свободы могут быть описаны следующей системой уравнений:

$$m_i \omega_i^{(2)} = P_i + \sum_{j=1}^n r_{ij} \omega_j = 0, \quad (V.1)$$

где m_i — масса, сосредоточенная в i -том узле системы;
 $\omega_i(j)$ — перемещение i -того узла;
 P_i — нагрузка на i -тый узел;
 r_{ij} — коэффициенты линейной системы уравнений;
 $\omega_i^{(2)}$ — вторая производная по времени t от перемещения в i -том узле.

Эту систему уравнений в дальнейшем будем называть исходной (ИС).

Рассмотрим колебания системы при начальных условиях ($P_i = 0$; при $t = 0$ $w_i = w_i(0)$, $w_i^{(1)} = 0$). Решение может быть представлено в виде ряда Маклорена

$$w_i = \sum_{k=0}^{\infty} w_i^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}.$$

Необходимые значения коэффициентов ряда Маклорена (КМ), представляющих собой значения производных при $t = 0$, вычисляются по рекуррентным формулам, полученным последовательным дифференцированием ИС (V.1):

$$w_i^{(2)}(0) = -\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n r_{ij} w_j(0);$$

$$w_i^{(4)}(0) = -\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n r_{ij} w_j^{(2)}(0);$$

$$w_i^{(2k+2)}(0) = -\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n r_{ij} w_j^{(2k)}(0); \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n; \\ k = 0, 1, 2, \dots; \end{matrix}$$

При рассматриваемых начальных условиях все нечетные производные равны нулю. Обозначим: $w_i^{(2k)}(0) = b_{ik}$. Тогда формулы для вычисления КМ примут вид:

$$b_{i,k+1} = -\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n r_{ij} b_{jk}; \quad (V.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Решение, найденное в виде бесконечного степенного ряда, практической ценности не имеет. Однако им можно воспользоваться для нахождения решения в традиционной форме тригонометрического ряда с конечным количеством членов, равным числу степеней свободы ИС.

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cos \omega_j t,$$

где ω_j — частота j -той формы колебаний ИС;

a_{ij} — амплитуда j -той формы колебаний ИС в i -том узле.

Последовательно дифференцируя этот ряд по t , получим при $t = 0$:

$$w_i^{(0)}(0) = \sum_{j=1}^n a_{ij};$$

$$-w_i^{(2)}(0) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j^2;$$

$$w_i^{(4)}(0) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j^4;$$

$$(-1)^k w_i^{(2k)}(0) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j^{2k};$$

Подставив вычисленные по формулам (V.2) значения КМ и обозначив $\omega_j^{2k} = \alpha_j^k$, получим уравнения:

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j^k, \quad (V.3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

При числе степеней свободы ИС, равном n , $2n$ таких уравнений позволяют определить все элементы (a_{ij} и ω_j) тригонометрического ряда. Для решения системы уравнений (V.3) произведем необходимые преобразования. Последовательно исключим a_{i1} , a_{i2} , a_{i3} , ... При исключении a_{i1} умножим k -тое уравнение на α_1 и вычтем из него $(k+1)$ -ое:

$$\alpha_1 b_{ik} - b_{i,k+1} = \sum_{j=2}^n a_{ij} (\alpha_1 - \alpha_j) \alpha_j^k.$$

Соответственно для a_{i2} умножим ранее преобразованное k -тое уравнение на α_2 и вычтем из него преобразованное $(k+1)$ -ое:

$$\alpha_1 \alpha_2 b_{ik} - (\alpha_1 + \alpha_2) b_{i,k+1} + b_{i,k+2} = \sum_{j=3}^n a_{ij} (\alpha_1 - \alpha_j) (\alpha_2 - \alpha_j) \alpha_j^k.$$

Проделав то же для a_{i3} , получим:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 b_{ik} - (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3) b_{i,k+1} + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) b_{i,k+2} - b_{i,k+3} = \sum_{j=4}^n a_{ij} (\alpha_1 - \alpha_j) (\alpha_2 - \alpha_j) (\alpha_3 - \alpha_j) \alpha_j^k.$$

Продолжая процесс, получим преобразованные уравнения:

$$\sum_{j=0}^n A_{n-j} b_{i,k+j} = 0; \quad (V.4)$$

где $A_0 = 1$;

$$-A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i;$$

$$A_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j;$$

$$-A_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n = \sum_{i, j, k=1}^n \alpha_i \alpha_j \alpha_k;$$

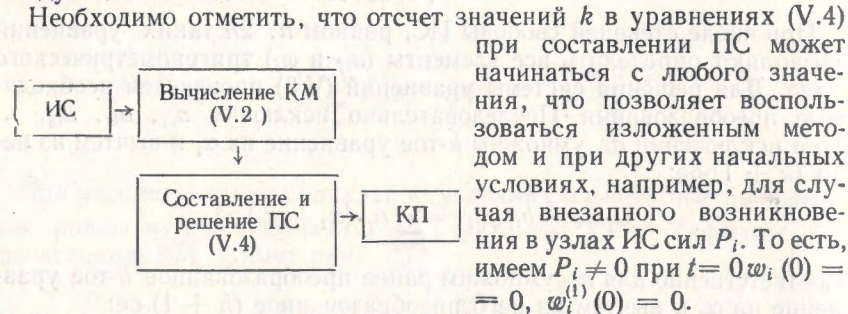
$$(-1)^n A_n = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n.$$

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ представляют собой коэффициенты полинома (КП), корни которого соответствуют значениям квадратов частот ($\alpha_1, \alpha_2, \dots$) колебаний ИС.

$$a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \dots + A_n = 0.$$

Таким образом, n уравнений (V.4) представляют собой линейную систему уравнений относительно неизвестных КП. В дальнейшем эту систему будем называть полной системой уравнений для определения коэффициентов полинома (ПС).

Итак, для определения КП необходимо выполнить вычисления в следующей последовательности:



Из начальных условий и формул (V.2) найдем КМ. Ряд Маклорена в этом случае будет иметь вид

$$w_i = 0 + b_{i1} \frac{t^2}{2!} + b_{i2} \frac{t^4}{4!} + \dots$$

Для того, чтобы формально свести задачу к предыдущему случаю начальных условий, перепишем ряд

$$w_i = -b_{i0} + \left(b_{i0} + b_{i1} \frac{t^2}{2!} + b_{i2} \frac{t^4}{4!} + \dots \right).$$

Тогда соответствующий ему тригонометрический ряд будет иметь вид

$$w_i = -b_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \cos \omega_j t.$$

В отличие от первого случая начальных условий нам неизвестно значение b_{i0} . Следовательно, при составлении ПС преобразования необходимо начинать с уравнения (V.4) при $k = 1$ и до $k = n$. В остальном последовательность вычислений остается прежней.

Значение b_{i0} вычисляется после определения КП из первого уравнения ПС (при $k = 0$)

$$b_{i0} = \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^n A_{n-j} b_{ij}. \quad (V.5)$$

Величина b_{i0} соответствует значению статического прогиба ($w_{ист}$) i -того узла ИС.

Значения a_{ij} — амплитуд колебаний i -того узла ИС вычисляются по формулам, полученным из преобразованных уравнений (V.3), когда исключены все a_{ij} , кроме вычисляемого

$$a_{ij} = \frac{\sum_{l=k+1}^{n+k-1} B_{j, n-l+k} b_{il, l-1}}{(B_{j, n-1} + \dots + B_{j1} \alpha_j^{n-2} + B_{j0} \alpha_j^{n-1}) \alpha_j^k}; \quad (V.6)$$

$$B_{j, n-(k+1)} \frac{A_{n-k} + B_{j, n-k}}{\alpha_j}. \quad (V.7)$$

В развернутой форме записи ПС имеют вид:

$$b_0 A_n + b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + \dots + b_n = 0;$$

$$b_1 A_n + b_2 A_{n-1} + \dots + b_n A_1 + b_{n+1} = 0;$$

$$b_2 A_n + \dots + b_n A_2 + b_{n+1} A_1 + b_{n+2} = 0;$$

$$\dots$$

$$b_{n-1} A_n + b_n A_{n-1} + b_{n+1} A_{n-2} + \dots + b_{2n-1} = 0.$$

Коэффициенты на каждой диагонали, включая свободные члены, одинаковы. ПС содержит всего $2n$ различных элементов (при порядке системы n) вместо $n^2 + n$ элементов для общего случая неоднородной системы линейных уравнений.

Для определения КП необходимо предварительно преобразовать ПС, обратив в нули коэффициенты на диагоналях, расположенных по одну сторону от главной диагонали матрицы. Если воспользоваться для этого алгоритмом Гаусса, то в преобразованной к треугольному виду ПС отсутствует равенство элементов на каждой диагонали и содержится $\frac{n^2 + n}{2} + n$ различных элементов. Для приведения ПС к треугольному виду с сохранением равенства элементов на каждой диагонали (в дальнейшем будем называть ее треугольной системой для вычисления коэффициентов полинома — ТС) применим специальный способ.

$2n$ — числа (КМ), составляющие элементы ПС, полностью характеризуют свойства i -того узла системы при заданных начальных

условиях. С их помощью можно определить все частоты ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$) и амплитуды соответствующих форм колебаний ($a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$). В случае $P_i \neq 0$ можно определить величину статического прогиба (b_{i0}) этого узла. $2n$ чисел содержат полную информацию о рассматриваемом узле системы. Они были вычислены по формуле (V.3), полученной последовательным дифференцированием исходной системы уравнений. Можно предположить, что эти числа могли быть получены и при рассмотрении какого-либо узла другой системы (с числом степеней свободы n), которую назовем эквивалентной системой (ЭС). Простейшей ЭС является трехдиагональная система; $2n$ чисел позволяют определить все $2n$ элементов ЭС.

Трехдиагональная ЭС обладает важным свойством: если в свободных членах содержится только одно значение в первом узле, отличное от нуля, то в последнем узле ($n - 1$) значение производных равно нулю. Воспользовавшись значениями КМ, вычисленными для последнего узла ЭС, можно составить треугольную систему уравнений для определения КП. Матрица эквивалентной системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 & & & \\ x_2 & y_2 & 1 & & \\ & x_3 & y_3 & 1 & \\ & & x_4 & y_4 & 1 \\ & & & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Вычисление элементов ЭС производится по следующим рекуррентным формулам:

$$y_i = \frac{b_{i,i}}{b_{i,i-1}} - \frac{b_{i-1,i-1}}{b_{i-1,i-2}};$$

$$b_{ij} = b_{i-1,j+1} - b_{i-1,j}y_{i-1} - b_{i-2,j}x_{i-2}; \quad (V.8)$$

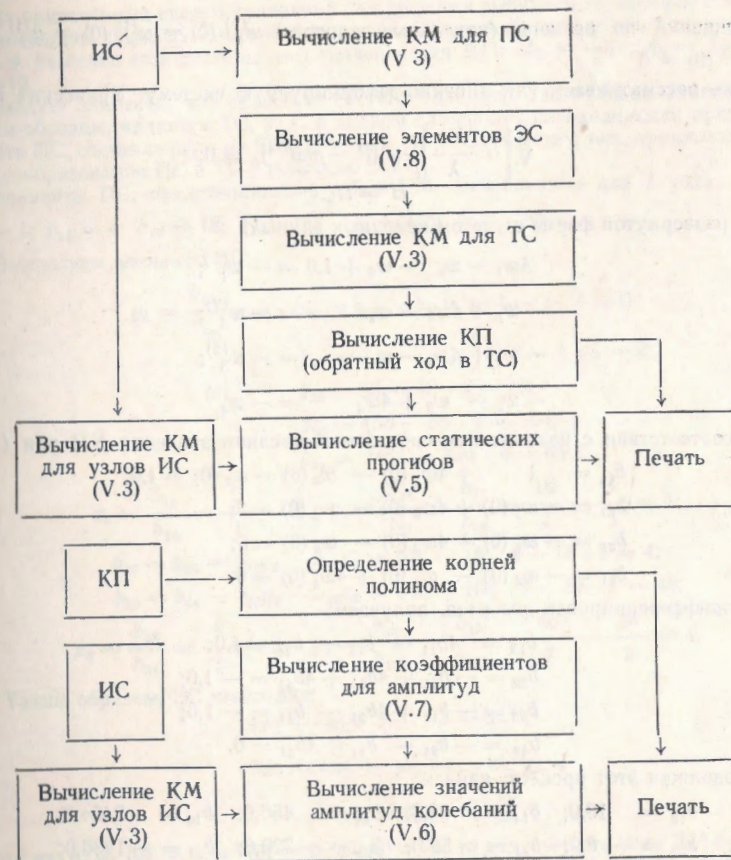
$$x_i = \frac{b_{i+1,i}}{b_{i,i-1}}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = i + 1, \quad i + 2, \dots, n - i.$$

Количество чисел, необходимых для вычислений, равно $4n$.

Таким образом, в процессе счета объем информации практически не увеличивается и лимитирующей является исходная информация о ИС. Это обстоятельство существенным образом расширяет возможности ЭВМ.

Общеизвестно, что в большинстве существующих программ расчета строительных конструкций именно блок решения системы уравнений лимитирует количество рассматриваемых параметров. По мнению авторов, изложенный метод имеет смысл применять не только для решения задач динамики, но и для статических задач.

В конечном итоге схема вычислений сводится к следующей последовательности:



Пример 1. Найти выражения, описывающие движение каждого узла плоской вантовой сети, нагруженной сосредоточенной силой, внезапно приложенной к узлу 1

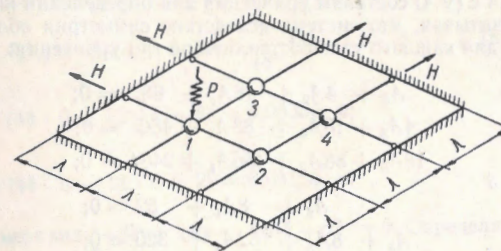


Рис. V. 1. К примеру 1.

(рис. V.1). Усилия в нитях $H_0 = 1$ т; массы $m = 1$ т/сек². м; расстояния между узлами $\lambda = 1$ м; $P_1 = 1$ т; $P_2 = P_3 = P_4 = 0$. В начальный период времени $t = 0$ перемещения $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = \omega_4(0) = 0$ и первые производные

перемещений по времени (начальные скорости) $w_1^{(1)}(0) = w_2^{(1)}(0) = w_3^{(1)}(0) = w_4^{(1)}(0) = 0$.

Сеть рассматриваем как линейно-деформируемую систему. Уравнения имеют вид:

$$\nabla \left[H \frac{\Delta w}{\lambda} \right]_t + (P - mw^{(2)})_k = 0;$$

$$H = H_0,$$

или в развернутой форме с учетом исходных данных:

$$\begin{aligned} 4w_1 - w_2 - w_3 + 1,0 &= -w_1^{(2)}; \\ -w_1 + 4w_2 - w_4 &= -w_2^{(2)}; \\ -w_1 + 4w_3 - w_4 &= -w_3^{(2)}; \\ -w_2 - w_3 + 4w_4 &= -w_4^{(2)}. \end{aligned}$$

В соответствии с изложенным способом вычисляем значения КМ при $t = 0$:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 1 + 4w_1(0) - w_2(0) - w_3(0) = 1,0; \\ b_{21} &= -w_1(0) + 4w_2(0) - w_4(0) = 0; \\ b_{31} &= -w_1(0) + 4w_3(0) - w_4(0) = 0; \\ b_{41} &= -w_2(0) - w_3(0) + 4w_4(0) = 0. \end{aligned}$$

Продифференцировав два раза, получаем:

$$\begin{aligned} b_{12} &= 4b_{11} - b_{21} - b_{31} = 4,0; \\ b_{22} &= -b_{11} + 4b_{21} + 4b_{41} = -1,0; \\ b_{32} &= -b_{11} + 4b_{31} - b_{41} = -1,0; \\ b_{42} &= -b_{21} - b_{31} + 4b_{41} = 0. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, найдем:

$$\begin{aligned} b_{13} &= 18,0; \quad b_{14} = 88,0; \quad b_{15} = 456,0; \quad b_{16} = 2464,0; \\ b_{23} &= -8,0; \quad b_{24} = -52,0; \quad b_{25} = -320,0; \quad b_{26} = -1936,0; \\ b_{33} &= -8,0; \quad b_{34} = -52,0; \quad b_{35} = -320,0; \quad b_{36} = -1936,0; \\ b_{43} &= 2,0; \quad b_{44} = 24,0; \quad b_{45} = 200,0; \quad b_{46} = 1440,0. \end{aligned}$$

В соответствии с (V.4) составим уравнения для определения коэффициентов полинома (КП). Учитывая, что система вследствие симметрии обладает тремя степенями свободы, для каждого узла составляем по три уравнения:

для узла 1

$$\begin{aligned} A_3 + 4A_2 + 18A_1 + 88 &= 0; \\ 4A_3 + 18A_2 + 88A_1 + 456 &= 0; \\ 18A_3 + 88A_2 + 456A_1 + 2464 &= 0; \end{aligned}$$

для узлов 2, 3

$$\begin{aligned} A_2 + 8A_1 + 52 &= 0; \\ A_3 + 8A_2 + 52A_1 + 320 &= 0; \\ 8A_3 + 52A_2 + 320A_1 + 1936 &= 0; \end{aligned}$$

для узла 4

$$\begin{aligned} 2A_1 + 24 &= 0; \\ 2A_2 + 24A_1 + 200 &= 0; \\ 2A_3 + 24A_2 + 200A_1 + 1440 &= 0. \end{aligned}$$

Из приведенных систем уравнений для решения выбираем то, которое содержит максимальное число нулевых коэффициентов, а именно систему, составленную для узла 4. Решение этой системы дает значение для КП: $A_3 = -48$; $A_2 = 44$; $A_1 = -12$.

Следует заметить, что решаемая система содержит две нулевые диагонали и, таким образом, является ТС, т. е. в данном случае нет необходимости преобразовывать ПС, составленную из КМ (для узла 1), в ТС. Вместе с тем, проиллюстрируем преобразование ПС в ТС с помощью ЭС.

Элементы ПС, представляющие собой КМ, вычисленные для 1 узла, равны: $b_{10} = 1$; $b_{11} = 4$; $b_{12} = 18$; $b_{13} = 88$; $b_{14} = 456$; $b_{15} = 2464$.

Вычисляем элементы ЭС:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_{11}}{b_{10}} = 4; \quad b_{20} = b_{11} - b_{10}y_1 = 4 - 1 \cdot 4 = 0; \\ b_{21} &= b_{12} - b_{11}y_1 = 18 - 4 \cdot 4 = 2; \\ b_{22} &= 88 - 18 \cdot 4 = 16; \\ b_{23} &= 456 - 88 \cdot 4 = 104; \\ b_{24} &= 2464 - 456 \cdot 4 = 640; \\ x_2 &= \frac{b_{21}}{b_{10}} = \frac{2}{1} = 2; \quad y_2 = \frac{b_{22}}{b_{21}} - \frac{b_{11}}{b_{10}} = \frac{16}{2} - \frac{4}{1} = 4; \\ b_{32} &= b_{23} - b_{22}y_2 - b_{12}x_2 = 104 - 16 \cdot 4 - 18 \cdot 2 = 4; \\ b_{33} &= b_{24} - b_{23}y_2 - b_{13}x_2 = 640 - 104 \cdot 4 - 88 \cdot 2 = 48; \\ x_3 &= \frac{b_{32}}{b_{21}} = \frac{4}{2} = 2; \quad y_3 = \frac{b_{33}}{b_{32}} - \frac{b_{22}}{b_{21}} = \frac{48}{4} - \frac{16}{2} = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, ЭС имеет вид:

$$\begin{aligned} 4w_1 + w_2 &= -w_1^{(2)}; \\ 2w_1 + 4w_2 + w_3 &= -w_2^{(2)}; \\ 2w_2 + 4w_3 &= -w_3^{(2)}; \end{aligned}$$

Если взять $w_1(0) = 1$, $w_2(0) = 0$, $w_3(0) = 0$, то для третьего узла КМ будут равны $b_{30} = 0$; $b_{31} = 0$; $b_{32} = 4$; $b_{33} = 48$; $b_{34} = 400$; $b_{35} = 2880$ и будут представлять собой элементы ТС.

Вычислим по формуле (V.5) значения статических прогибов каждого узла (нумерация КМ сдвигается в этом случае на единицу):

$$\begin{aligned} b_{10} &= \frac{1}{A_3} (A_2b_{11} + A_1b_{12} + b_{13}) = \frac{1}{48} (44 \cdot 1 - 12 \cdot 4 + 18) = 0,29166 \text{ м}; \\ b_{20} &= \frac{1}{48} (44 \cdot 0 + 12 \cdot 1 - 8) = 0,08333 \text{ м}; \\ b_{40} &= \frac{1}{48} (44 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 2) = 0,04166 \text{ м}. \end{aligned}$$

Полином имеет вид: $-48 + 44\alpha - 12\alpha^2 + \alpha^3 = 0$. Определяем корни полинома: $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha_3 = 6$.

В соответствии с (V.6), (V.7) вычисляем значения амплитуд колебаний каждого узла:

$$B_{12} = \frac{A_3}{\alpha_1} = -\frac{48}{2} = -24; \quad B_{11} = \frac{A_2 + B_{12}}{\alpha_1} = \frac{44 - 24}{2} = 10;$$

$$B_{10} = \frac{A_1 + B_{11}}{\alpha_1} = \frac{10 - 12}{2} = -1; \quad B_{22} = -\frac{48}{4} = -12;$$

$$B_{21} = \frac{44 - 12}{4} = 8.$$

$$B_{30} = \frac{8 - 12}{4} = -1; \quad B_{32} = \frac{-48}{6} = -8; \quad B_{23} = \frac{44 - 8}{6} = 6;$$

$$B_{30} = \frac{6 - 12}{6} = -1.$$

Тогда для узла 1:

$$a_{11} = \frac{B_{12}b_{11} + B_{11}b_{12} + B_{10}b_{13}}{(B_{12} + B_{11}\alpha_1 + B_{10}\alpha_1^2)\alpha_1} = \frac{-24 \cdot 1 + 10 \cdot 4 - 1 \cdot 18}{(-24 + 10 \cdot 2 - 1 \cdot 2^2)2} = 0,125;$$

$$a_{12} = \frac{-12 \cdot 1 + 8 \cdot 4 - 1 \cdot 18}{(12 + 8 \cdot 4 - 1 \cdot 4^2)4} = 0,125; \quad a_{13} = \frac{-8 \cdot 1 + 6 \cdot 4 - 1 \cdot 18}{(-8 + 6 \cdot 6 - 1 \cdot 6^2)6} = 0,04166.$$

Таким же образом вычислим и для других узлов:

$$a_{21} = 0,125; \quad a_{22} = 0; \quad a_{23} = -0,04166;$$

$$a_{41} = 0,125; \quad a_{42} = -0,125; \quad a_{43} = 0,04166.$$

Следовательно, решение имеет вид:
для узла 1

$$w_1 = 0,125 (1 - \cos \sqrt{2}t) + 0,125 (1 - \cos \sqrt{4}t) + 0,04166 (1 - \cos \sqrt{6}t);$$

в положении равновесия $w_1 = b_{10} = 0,2916$ м;
для узлов 2 и 3

$$w_2 = 0,125 (1 - \cos \sqrt{2}t) - 0,04166 (1 - \cos \sqrt{6}t);$$

в положении равновесия $w_2 = b_{20} = 0,0833$ м;
для узла 4

$$w_4 = 0,125 (1 - \cos \sqrt{2}t) - 0,125 (1 - \cos \sqrt{4}t) + 0,04166 (1 - \cos \sqrt{6}t);$$

в положении равновесия $w_4 = b_{40} = 0,04166$ м.

Для проверки решения подставляем значения b_{i0} в уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 0,29166 - 0,08333 - 0,08333 - 1 &= 0; \\ -0,29166 + 4 \cdot 0,08333 - 0,04166 &= 0; \\ -0,29166 + 4 \cdot 0,08333 - 0,04166 &= 0; \\ -0,08333 - 0,08333 + 4 \cdot 0,04166 &= 0, \end{aligned}$$

т. е. все уравнения удовлетворяются тождественно.

§ 3. Колебания нелинейно-деформируемых вантовых систем

Способ, изложенный в предыдущем параграфе, может быть использован при решении задач динамики нелинейно-деформируемых вантовых систем. Так, для вантовых систем с одной степенью свобо-

ды, свободные колебания которых описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} f\omega H + (m\omega^{(2)} - P) &= 0; \\ H &= H_0 + 2A\omega + A\omega^2, \end{aligned} \quad (V.9)$$

где f , A — некоторые коэффициенты, характеризующие жесткость и геометрию системы.

Рассмотрим случай начальных условий, когда $P = 0$ при $t = 0$, $w(0) = c$, $w^{(1)}(0) = 0$.

Решение будем искать в виде степенного ряда

$$w = w(0) + w^{(2)}(0) \frac{t^2}{2!} + w^{(4)}(0) \frac{t^4}{4!} \dots \quad (V.10)$$

Значения $w^{(2)}(0)$, $w^{(4)}(0)$, ... определяются по рекуррентным формулам:

$$\begin{cases} H(0) = H_0 + A[2w(0) + w^2(0)]; \\ -mw^{(2)}(0) = fH(0)w(0); \\ H^{(2)}(0) = A\{2w^{(2)}(0) + [w(0)w(0)]^{(2)}\}; \\ -mw^{(4)}(0) = f[H(0)w(0)]^{(2)}; \\ H^{(4)}(0) = A\{2w^{(4)}(0) + [w(0)w(0)]^{(4)}\}; \\ -mw^{(6)}(0) = f[H(0)w(0)]^{(4)} \text{ и т. д.} \end{cases}$$

В эти формулы входят члены, представляющие собой производные n -го порядка от произведения двух функций, вычисляемых по формуле Лейбница (аналогичной биному Ньютона). Например:

$$\begin{aligned} [H(0)w(0)]^{(4)} &= H^{(4)}(0)w(0) + 4H^{(3)}(0)w^{(1)}(0) + \\ &+ 6H^{(2)}(0)w^{(2)}(0) + 4H^{(1)}(0)w^{(3)}(0) + H(0)w^{(4)}(0). \end{aligned}$$

Будем полагать, что существует периодическое решение рассматриваемой задачи, которое можно искать в виде бесконечного тригонометрического ряда

$$w = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 3\omega t + a_3 \cos 5\omega t + \dots,$$

где неизвестными являются величины $a_1, a_2, \dots$ и ω . Для того чтобы воспользоваться способом, примененным для решения линейных систем, будем считать, что $\omega = \omega_1$, $3\omega = \omega_2$, $5\omega = \omega_3$ и так далее.

Таким образом, тригонометрический ряд примет вид:

$$w = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t + a_3 \cos \omega_3 t + \dots$$

Для определения коэффициентов полинома, как и для линейной системы со многими степенями свободы, можно составить уравнения ПС, если ограничимся конечным числом членов тригонометрического ряда. Таким образом, дальнейшие вычисления можно производить в последовательности, указанной в предыдущем параграфе.

Рассмотрим другой случай, когда $P \neq 0$ при $t = 0$, $w(0) = 0$, $w^{(1)}(0) = 0$. При таких начальных условиях можно построить степенной ряд по t и искать решение в виде

$$w_i = -b_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cos \omega_j t,$$

аналогично тому, как было выполнено для линейных систем; найти положение равновесия, т. е. величину статического прогиба $w_{ст}$ от силы P , преобразуя исходное уравнение подстановкой $w_1 = w + w_{ст}$, затем искать решение при начальных условиях $P = 0$, при $t = 0$ $w(0) = -w_{ст}$, $w^{(1)}(0) = 0$.

Для вантовых систем со многими степенями свободы, свободные колебания которых описываются уравнениями:

$$\nabla_k \left[H \frac{\Delta z}{l} \right]_i + (P - m\omega^{(2)})_k = 0;$$

$$H_i = H_0 + \frac{EF}{L_i} \left[\sum \frac{\Delta z_0 \Delta w}{l} + \frac{1}{2} \sum \frac{\Delta w^2}{l} \right]_i$$

применим тот же способ.

Значения КМ определяются по рекуррентным формулам:

$$H_i(0)_i = H_0 + \frac{EF}{L_i} \left[\sum \frac{\Delta z_0 \Delta w(0)}{l} + \frac{1}{2} \sum \frac{(\Delta w(0))^2}{l} \right]_i;$$

$$(m\omega(0)^2)_k = P + \nabla_k \left[H(0) \frac{\Delta z_0}{l} \right]_i + \nabla_k \left[H(0) \frac{\Delta w(0)}{l_i} \right]_i;$$

$$H(0)_i^{(2)} = \frac{EF}{L_i} \left\{ \sum \frac{\Delta z_0 \Delta w(0)^{(2)}}{l} + \frac{1}{2} \sum \frac{[\Delta w(0) \Delta w(0)]^{(2)}}{l} \right\}_i;$$

$$-(m\omega(0)^4)_k = \nabla_k \left[H(0)^{(2)} \frac{\Delta z_0}{l} \right]_i + \nabla_k \left[H(0) \frac{\Delta w(0)}{l} \right]_i^{(2)} \text{ и т. д.}$$

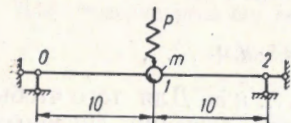


Рис. V. 2. К примеру 2.

$m = 0,2 \text{ м/сек}^2 \cdot \text{м}$, расстояние между узлами $\lambda = 10 \text{ м}$.

Уравнения имеют вид:

$$m\omega_1^{(2)} = H \left[\frac{(w_2 - w_1)}{\lambda} - \frac{(w_1 - w_0)}{\lambda} \right] = -\frac{H}{\lambda} 2w_1; \quad w_1^{(2)} = -Hw_1;$$

$$H = H_0 + \frac{EF}{2} \left[\frac{(w_2 - w_1)^2}{\lambda^2} + \frac{(w_1 - w_0)^2}{\lambda^2} \right] = H_0 + \frac{EF}{2} \cdot \frac{2w_1^2}{\lambda^2} = 1 + w_1^2.$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений:

$$\begin{cases} w^{(2)} = -Hw \\ H = 1 + w^2, \end{cases}$$

или

$$w^{(2)} + w + w^3 = 0.$$

В качестве начальных условий примем: при $t = 0$, $w(0) = 0,5$; $w(0)^{(1)} = 0$. Определим значения КМ, ограничиваясь первыми шестью членами разложения.

$$H(0) = H_0 + w(0)w(0) = 1 + 0,5 \cdot 0,5 = 1,25;$$

$$b_1 = w(0)^{(2)} = H(0)w(0) = 1,25 \cdot 0,5 = 0,625.$$

Продолжая таким образом, найдем:

$$b_2 = 1,09375; \quad b_3 = 5,4297; \quad b_4 = 62,2363; \quad b_5 = 1057,9159.$$

Система уравнений для определения коэффициентов полинома ПС имеет вид:

$$0,5 \cdot A_3 + 0,625 \cdot A_2 + 1,093 \cdot A_1 + 5,4297 = 0;$$

$$0,625 \cdot A_3 + 1,093 \cdot A_2 + 5,4297 \cdot A_1 + 62,2363 = 0;$$

$$1,093 \cdot A_3 + 5,4297 \cdot A_2 + 62,2363 \cdot A_1 + 1057,9159 = 0.$$

Решив эту систему, найдем

$$-A_3 = 439,4913; \quad A_2 = 423,8475; \quad -A_1 = 46,2525.$$

Составляем полином третьей степени

$$439,4913 - 423,8475\alpha + 46,2525\alpha^2 - \alpha^3 = 0,$$

корни которого равны:

$$\alpha_1 = 1,19; \quad \alpha_2 = 10,8; \quad \alpha_3 = 34,25.$$

Вычислим амплитуды

$$a_1 = 0,4967; \quad a_2 = 0,0032; \quad a_3 = 0,0000.$$

Таким образом, решение имеет вид:

$$w = 0,4967 \cos \omega_1 t + 0,0032 \cos \omega_2 t;$$

$$\omega_1^2 = 1,19 \text{ и } \omega_2^2 = 10,8.$$

Представляет интерес сравнение результатов расчета данного примера с решением, полученным по методу А. Н. Крылова и приведенным в работе [1, стр. 585]. В указанной работе решение уравнения типа

$$w^{(2)} + w + w^3 = 0$$

при начальных условиях $w(0) = c$, $w(0)^{(1)} = 0$ имеет вид:

$$w = c \cdot \cos \omega t + \frac{c^3}{32\omega^2} (\cos^3 \omega t - \cos \omega t);$$

$$\omega^2 = 1 + 0,75c^2.$$

Подставив в это решение условия рассмотренного примера, получим:

$$\omega^2 = 1 + 0,75 \cdot 0,5^2 = 1,19; \quad (3\omega)^2 = 10,71;$$

$$w = 0,4967 \cos \omega t + 0,0033 \cos (3\omega) t.$$

Графики зависимости основных частот для различных значений параметров и начальных условий приведены на рис. V.3.

Проверим равновесие узла системы в положении максимального прогиба:

$$w_{\max} = 0,4967 + 0,0032 = 0,4999 \text{ м};$$

$$w_{\max}^{(2)} = -0,4967\omega_1^2 - 0,0032\omega_2^2 = -0,593 - 0,036 = -0,629 \text{ м/сек}^2;$$

$$H = 1 + w_{\max}^2 = 1,25 \text{ м}.$$

Невязка $\Delta P = w_{\max}^{(2)} - Hw_{\max} = 0,629 - 0,625 = 0,004 \text{ м}$, что составляет менее 1% от $mw_{\max}^{(2)} = 0,629 \text{ м}$.

Как показали результаты решения различных задач динамики вантовых систем, при большом количестве степеней свободы трудно обеспечить устойчивость счета. Для этого необходимо применять специальные приемы, которые не затрагивая существа способа, приводят к некоторым изменениям в алгоритме.

Во многих случаях решения задач динамики нелинейно-деформируемых вантовых систем целесообразно применять метод неопределенных коэффициентов.

Алгоритм выбора аппроксимирующей функции проиллюстрируем на двух задачах.

1. Для вантовой системы с одной степенью свободы рассмотрим задачу свободных колебаний, описываемых уравнением

$$H_0 w + \mu w^3 + w^{(2)} = 0$$

с начальными условиями при $t = 0$ $w(0) = 2\lambda$, $w^{(1)}(0) = 0$.

Аналогичная задача была решена в примере 2 при $H_0 = 1 \text{ м}$ и $\mu = 1 \text{ м/м}^2$.

Считаем λ малой величиной ($\lambda \rightarrow 0$).

В первом приближении ищем решение с точностью до $o(\lambda^2)$. Полагаем, что существует периодическое решение в виде:

$$w = \bar{c}_0 e^{\alpha} + c_0 e^{\bar{\alpha}},$$

где $\bar{c}_0$ и c_0 — неизвестные комплексно-сопряженные коэффициенты; $\bar{\alpha}$ и α — неизвестные комплексно-сопряженные функции от t .

Подставим это решение в исходное уравнение и приравняем нулю члены, содержащие $\bar{c}_0 e^{\alpha}$ и $c_0 e^{\bar{\alpha}}$.

$$\begin{cases} H_0 + \alpha^{(2)} + \alpha^{(1)2} = 0; \\ H_0 + \bar{\alpha}^{(2)} + \bar{\alpha}^{(1)2} = 0. \end{cases}$$

Принимая условие при $t = 0$ $\alpha = 0$, $\bar{\alpha} = 0$, получаем решение

$$\alpha = i\sqrt{H_0}t, \quad \bar{\alpha} = -i\sqrt{H_0}t.$$

Из начальных условий $w(0) = 2\lambda$ и $w^{(1)}(0) = 0$ получаем уравнения

$$\begin{cases} \bar{c}_0 + c_0 = 2\lambda \\ \bar{c}_0 \alpha + c_0 \bar{\alpha} = 0, \end{cases}$$

откуда $\bar{c}_0 = c_0 = \lambda$.

Таким образом, решение исходного уравнения с точностью до $o(\lambda^2)$ имеет вид:

$$w = \lambda (e^{\alpha} + e^{\bar{\alpha}}).$$

Невязка равна

$$\Delta = \mu w^3 = \mu \lambda^3 (e^{3\alpha} + 3e^{\alpha} + 3e^{\bar{\alpha}} + e^{3\bar{\alpha}}).$$

Во втором приближении повысим точность до $o(\lambda^4)$. Ищем решение в виде:

$$w = \lambda (e^{\alpha} + e^{\bar{\alpha}}) + \lambda^3 (\bar{c}_1 e^{\alpha} + c_1 e^{\bar{\alpha}} + \bar{c}_2 e^{3\alpha} + c_2 e^{3\bar{\alpha}}),$$

где c_1 , c_2 , $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ — неизвестные комплексно-сопряженные коэффициенты;

α и $\bar{\alpha}$ — неизвестные комплексно-сопряженные функции от t .

Подставим это решение в исходное уравнение и приравняем нулю сумму членов, содержащих λe^{α} , $\lambda e^{\bar{\alpha}}$, $\lambda^3 e^{3\alpha}$, $\lambda^3 e^{3\bar{\alpha}}$.

$$\begin{cases} H_0 + 3\mu\lambda^2 + \alpha^{(2)} + \alpha^{(1)2} = 0; \\ H_0 + 3\mu\lambda^2 + \bar{\alpha}^{(2)} + \bar{\alpha}^{(1)2} = 0; \\ \mu + \bar{c}_2 (H_0 + 3\alpha^{(2)} + 9\alpha^{(1)2}) = 0; \\ \mu + c_2 (H_0 + 3\bar{\alpha}^{(2)} + 9\bar{\alpha}^{(1)2}) = 0. \end{cases}$$

Принимая условие при $t = 0$ $\alpha = 0$, $\bar{\alpha} = 0$, получим решение:

$$\alpha = i\left(\sqrt{H_0} + \frac{3\mu\lambda^2}{2\sqrt{H_0}}\right)t, \quad \bar{\alpha} = -i\left(\sqrt{H_0} + \frac{3\mu\lambda^2}{2\sqrt{H_0}}\right)t,$$

$$\bar{c}_2 = c_2 = \frac{\mu}{8H_0}.$$

Для удовлетворения начальных условий составим уравнения

$$\begin{cases} \bar{c}_1 + c_1 + \bar{c}_2 + c_2 = 0; \\ \alpha^{(1)}\bar{c}_1 + \bar{\alpha}^{(1)}c_1 + 3\bar{c}_2\alpha^{(1)} + 3c_2\bar{\alpha}^{(1)} = 0, \end{cases}$$

откуда найдем $\bar{c}_1 = c_1 = -\frac{\mu}{8H_0}$.

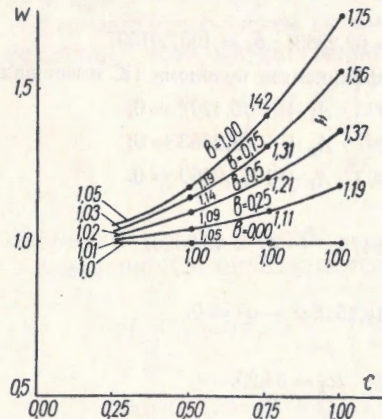


Рис. V.3. Зависимость основных частот от амплитуд для системы с одной степенью свободы.

Невязка равна

$$\Delta = \frac{3\mu^2\lambda^5}{8H_0} (e^{5\alpha} + e^{5\bar{\alpha}} + e^{3\alpha} + e^{3\bar{\alpha}} - 2e^\alpha - 2e^{\bar{\alpha}}).$$

Точность до $O(\lambda^4)$ обеспечена.

В третьем приближении повысим точность до $O(\lambda^6)$. Ищем решение в виде:

$$\omega = \lambda (e^\alpha + e^{\bar{\alpha}}) + \frac{\mu\lambda^3}{8H_0} (e^{3\alpha} + e^{3\bar{\alpha}} - e^\alpha - e^{\bar{\alpha}}) + \lambda^5 (\bar{c}_1 e^\alpha + c_1 e^{\bar{\alpha}} + \bar{c}_2 e^{3\alpha} + c_2 e^{3\bar{\alpha}} + \bar{c}_3 e^{5\alpha} + c_3 e^{5\bar{\alpha}}).$$

Приравнявая нулю сумму членов, содержащих λe^α , получим:

$$H_0 + 3\mu\lambda^2 - \frac{3}{8}\mu^2\lambda^4 + \alpha^{(2)} + \alpha^{(1)2} = 0,$$

откуда (при $t = 0, \alpha = 0$)

$$\alpha = i \left(\sqrt{H_0} + \frac{3\mu\lambda^2}{2\sqrt{H_0}} - \frac{3}{16} \frac{\mu^2\lambda^4}{\sqrt{H_0}} \right) t.$$

Вычислив значения коэффициентов c_1, c_2, c_3 и $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$, получим решение с точностью до $O(\lambda^6)$.

Пример 3. Продолжим решение примера 1, повысив точность до $O(\lambda^4)$. В качестве начальных условий в этом случае примем: при $t = 0, P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0, w_1(0) = 2\lambda, w_2(0) = w_3(0) = w_4(0) = 0, w_1^{(1)}(0) = w_2^{(1)}(0) = w_3^{(1)}(0) = w_4^{(1)}(0) = 0$. Жесткость всех нитей равна $EF = 3m$.

С учетом симметрии ($w_2 = w_3$) колебания системы описываются уравнениями

$$\begin{cases} 4H_1 w_1 - 2H_1 w_2 + w_1^{(2)} = 0; \\ -H_1 w_1 + (2H_1 + 2H_2) w_2 - H_2 w_4 + w_2^{(2)} = 0; \\ -2H_2 w_2 + 4H_2 w_4 + w_4^{(2)} = 0, \end{cases}$$

где $H_1 = 1 + w_1^2 - w_1 w_2 + w_2^2$;

$H_2 = 1 + w_2^2 - w_2 w_4 + w_4^2$.

Решение в первом приближении, найденное в примере 1 с погрешностью до $O(\lambda^2)$, в комплексной форме записи имеет вид:

$$w_1 = \frac{\lambda}{4} (e^{i\omega_1 t} + 2e^{i\omega_2 t} + e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_1 t} + 2e^{-i\omega_2 t} + e^{-i\omega_3 t});$$

$$w_2 = \frac{\lambda}{4} (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_1 t} + \dots);$$

$$w_4 = \frac{\lambda}{4} (e^{i\omega_1 t} - 2e^{i\omega_2 t} + e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_1 t} + \dots),$$

где $\omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 4, \omega_3^2 = 6$.

Определим невязки. В первом уравнении невязка равна:

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\lambda^3}{32} & \left[\frac{33}{4} e^{i\omega_1 t} + 30e^{i\omega_2 t} + \frac{105}{4} e^{i\omega_3 t} + \frac{1}{4} e^{3i\omega_1 t} + \right. \\ & + 4e^{3i\omega_2 t} + \frac{9}{4} e^{3i\omega_3 t} + \frac{3}{2} e^{i(2\omega_1 - \omega_3)t} + 3e^{i(2\omega_2 - \omega_1)t} + \\ & + \frac{3}{4} e^{i(2\omega_3 - \omega_1)t} + \frac{3}{4} e^{i(2\omega_1 - \omega_2)t} + 9e^{i(2\omega_2 - \omega_3)t} + \frac{15}{2} e^{i(2\omega_3 - \omega_2)t} + \\ & + \frac{3}{2} e^{i(2\omega_1 - \omega_2)t} + 3e^{i(2\omega_2 + \omega_1)t} + \frac{3}{4} e^{i(2\omega_3 + \omega_1)t} + \frac{3}{4} e^{i(2\omega_1 + \omega_2)t} + \\ & + 9e^{i(2\omega_2 + \omega_3)t} + \frac{15}{2} e^{i(2\omega_3 - \omega_2)t} + 3e^{i(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t} + 3e^{i(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)t} + \\ & \left. + 3e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t} + 3e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t} + \frac{33}{4} e^{-i\omega_1 t} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Аналогичный вид имеют невязки во втором и третьем уравнениях.

Для второго приближения (погрешность $O(\lambda^4)$) решение ищем в виде:

$$w_1 = \frac{\lambda}{4} (e^{i\omega_1 t} + 2e^{i\omega_2 t} + e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_1 t} + \dots) +$$

$$+ \lambda^3 (a_1 e^{i\omega_1 t} + b_1 e^{i\omega_2 t} + c_1 e^{i\omega_3 t} + \dots);$$

$$w_2 = \frac{\lambda}{4} (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_3 t} + \dots) +$$

$$+ \lambda^3 (a_2 e^{i\omega_1 t} + b_2 e^{i\omega_2 t} + c_2 e^{i\omega_3 t} + \dots);$$

$$w_4 = \frac{\lambda}{4} (e^{i\omega_1 t} - 2e^{i\omega_2 t} + e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_1 t} + \dots) +$$

$$+ \lambda^3 (a_4 e^{i\omega_1 t} + b_4 e^{i\omega_2 t} + c_4 e^{i\omega_3 t} + \dots).$$

Подставив эти значения в исходные уравнения и приравняв нулю сумму членов, содержащих $\frac{\lambda}{4} e^{i\omega_1 t}$, получим:

$$2 + \frac{33}{32} \lambda^2 + 8\lambda^2 a_1 - 8\lambda^2 a_2 = \omega_1^2;$$

$$2 + \frac{9}{32} \lambda^2 - 4\lambda^2 a_1 + 8\lambda^2 a_2 - 4\lambda^2 a_4 = \omega_1^2;$$

$$2 + \frac{33}{32} \lambda^2 + 8\lambda^2 a_4 - 8\lambda^2 a_2 = \omega_1^2.$$

Исключив a_1, a_2, a_4 , получим $\omega_1^2 = 2 + \frac{21}{32} \lambda^2$.

Аналогичным образом определяются остальные величины.

2. Для вантовой системы с одной степенью свободы рассмотрим задачу затухающих колебаний, описываемых уравнением

$$H_0 w + 2kw^{(1)} + \mu w^3 + w^{(2)} = 0.$$

Начальные условия: при $t = 0, w(0) = 2\lambda, w^{(1)}(0) = 0$.

Как и в первой задаче, будем считать λ малой величиной ($\lambda \rightarrow 0$). В уравнении имеется малый параметр ($k \rightarrow 0$).

В первом приближении будем искать решение с погрешностью до $o(\lambda^2)$, $o(k^2)$ в виде

$$w = \lambda (\bar{c}_0 e^{\alpha} + c_0 e^{\bar{\alpha}}),$$

где $\bar{c}$ и c_0 — неизвестные комплексно-сопряженные коэффициенты; α и $\bar{\alpha}$ — функции от t .

Подставим это решение в исходное уравнение и приравняем нулю сумму членов, содержащих $\lambda \bar{c}_0 e^{\alpha}$ и $\lambda c_0 e^{\bar{\alpha}}$.

$$\begin{cases} H_0 + 2k\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(1)2} = 0; \\ H_0 + 2k\bar{\alpha}^{(1)} + \bar{\alpha}^{(2)} + \bar{\alpha}^{(1)2} = 0. \end{cases}$$

Принимая условие $t = 0$, $\alpha = 0$, $\bar{\alpha} = 0$, получим решение

$$\alpha = (-k + i\sqrt{H_0})t; \quad \bar{\alpha} = (-k - i\sqrt{H_0})t.$$

Из начальных условий $w(0) = 2\lambda$, $w^{(1)}(0) = 0$ получаем уравнения:

$$\begin{cases} \lambda(\bar{c}_0 + c_0) = 2\lambda; \\ \alpha^{(1)}\bar{c}_0 + \bar{\alpha}^{(1)}c_0 = 0, \end{cases}$$

откуда находим $c_0 = 1 + \frac{ki}{\sqrt{H_0}}$, $\bar{c}_0 = 1 - \frac{ki}{\sqrt{H_0}}$.

Таким образом, решение исходного уравнения с погрешностью до $o(\lambda^2)$, $o(k^2)$ имеет вид:

$$w = \lambda \left[\left(1 - i\frac{k}{\sqrt{H_0}} \right) e^{(-k+i\sqrt{H_0})t} + \left(1 + i\frac{k}{\sqrt{H_0}} \right) e^{(-k-i\sqrt{H_0})t} \right].$$

Невязка равна

$$\Delta = \mu\lambda^3 (\bar{c}_0^3 e^{3\alpha} + c_0^3 e^{3\bar{\alpha}}) + \mu\lambda^3 e^{-2kt} (3\bar{c}_0 e^{\alpha} + 3c_0 e^{\bar{\alpha}}).$$

Во втором приближении повысим точность до $o(\lambda^4)$. Ищем решение в виде:

$$w = \lambda (\bar{c}_0 e^{\alpha} + c_0 e^{\bar{\alpha}}) + \lambda^3 (\bar{c}_1 e^{\alpha} + c_1 e^{\bar{\alpha}}) + \lambda^3 e^{-2kt} (\bar{c}_2 e^{\alpha} + c_2 e^{\bar{\alpha}}) + \lambda^3 (\bar{c}_3 e^{3\alpha} + c_3 e^{3\bar{\alpha}}).$$

Подставим это решение в исходное уравнение и приравняем нулю сумму членов, содержащих λe^{α} , $\lambda e^{\bar{\alpha}}$, $\lambda^3 e^{3\alpha}$, $\lambda^3 e^{3\bar{\alpha}}$.

$$\begin{cases} H_0 + \alpha^{(2)} + \alpha^{(1)2} + \alpha^{(1)} \left(2k - \frac{4k\lambda^2 e^{-2kt} c_2}{\bar{c}_0} \right) + 3\mu\lambda^2 e^{-2kt} = 0; \\ H_0 + \bar{\alpha}^{(2)} + \bar{\alpha}^{(1)2} + \bar{\alpha}^{(1)} \left(2k - \frac{4k\lambda^2 e^{-2kt} c_2}{c_0} \right) + 3\mu\lambda^2 e^{-2kt} = 0; \\ \bar{c}_3 (H_0 + 3\alpha^{(2)} + 9\alpha^{(1)2} + 6k\alpha^{(1)}) + \mu\bar{c}_0^3 = 0; \\ c_3 (H_0 + 3\bar{\alpha}^{(2)} + 9\bar{\alpha}^{(1)2} + 6k\bar{\alpha}^{(1)}) + \mu c_0^3 = 0. \end{cases}$$

Принимая $c_2 = 0$, $\bar{c}_2 = 0$ и при $t = 0$ $\alpha = 0$, $\bar{\alpha} = 0$, получим решение:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[-k + \frac{3}{2} \frac{\mu k \lambda^2}{H_0} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2kt} \right) \right] t + i \left[\sqrt{H_0} + \frac{3\mu k \lambda^2}{2\sqrt{H_0}} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2kt} \right) \right] t; \\ \bar{\alpha} &= \left[-k + \frac{3}{2} \frac{\mu k \lambda^2}{H_0} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2kt} \right) \right] t - i \left[\sqrt{H_0} + \frac{3\mu k \lambda^2}{2\sqrt{H_0}} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2kt} \right) \right] t; \\ c_3 &= \mu \left(\frac{1}{8H_0} + i \frac{9k\sqrt{H_0}}{16H_0^2} \right); \quad \bar{c}_3 = \mu \left(\frac{1}{8H_0} - i \frac{9k\sqrt{H_0}}{16H_0^2} \right). \end{aligned}$$

Для удовлетворения начальных условий находим неизвестные из системы уравнений:

$$\begin{cases} \bar{c}_1 + c_1 + \bar{c}_3 + c_3 = 0; \\ \frac{6\mu k}{H_0} + \alpha^{(1)}(0)\bar{c}_1 + \bar{\alpha}^{(1)}(0)c_1 + 3\alpha^{(1)}(0)\bar{c}_3 + 3\bar{\alpha}^{(1)}(0)c_3 = 0; \end{cases}$$

$$\bar{c}_1 = \mu \left[-\frac{1}{8H_0} + i \frac{71k\sqrt{H_0}}{16H_0^2} \right]; \quad c_1 = \mu \left[-\frac{1}{8H_0} - i \frac{71k\sqrt{H_0}}{16H_0^2} \right].$$

Окончательное решение с погрешностью $o(\lambda^4)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} w &= \lambda e^{-\gamma t} \left[\left(1 - i\frac{k}{\sqrt{H_0}} \right) e^{i\omega t} + \left(1 + i\frac{k}{\sqrt{H_0}} \right) e^{-i\omega t} \right] - \\ &- \frac{\mu\lambda^3}{8H_0} e^{-\gamma t} \left[\left(1 - i\frac{71k}{2\sqrt{H_0}} \right) e^{i\omega t} + \left(1 + i\frac{71k}{2\sqrt{H_0}} \right) e^{-i\omega t} \right] + \\ &+ \frac{\mu\lambda^3}{8H_0} e^{-3\gamma t} \left[\left(1 - i\frac{9k}{2\sqrt{H_0}} \right) e^{3i\omega t} + \left(1 + i\frac{9k}{2\sqrt{H_0}} \right) e^{-3i\omega t} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= k \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\mu\lambda^2}{H_0} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2kt} \right) \right]; \\ \omega &= \sqrt{H_0} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\mu\lambda^2}{H_0} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{2kt} \right) \right]. \end{aligned}$$

В заключение формулируем алгоритм выбора аппроксимирующей функции для решения задач динамики нелинейно-деформируемых вантовых систем.

ВОПРОСЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ ВАНТОВЫХ ПОКРЫТИЙ

Если известно решение с погрешностью до $O(\lambda^{k+1})$ $w = \bar{a}_1 e^{\alpha_1^{(1)} t} + \bar{a}_2 e^{\alpha_2^{(1)} t} + \dots$ и невязка

$$\Delta = k^{k+m} (\bar{b}_1 e^{\beta_1 (\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_n^{(1)}) t} + \bar{b}_2 e^{\beta_2 (\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_n^{(1)}) t} + \dots) + \dots,$$

то для повышения точности до $O(\lambda^{k+m+1})$ аппроксимирующую функцию следует принять в виде

$$w = \bar{a}_1 e^{\alpha_1} + \bar{a}_2 e^{\alpha_2} + \dots + \lambda^{k+m} (c_1 e^{\alpha_1} + c_2 e^{\alpha_2} + \dots + c_{n+1} e^{\beta_1 (\alpha_1 \dots \alpha_n)} + c_{n+2} e^{\beta_2 (\alpha_1 \dots \alpha_n)} + \dots),$$

где $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots$ — комплексно-сопряженные коэффициенты, содержащие λ в степенях от 0 до k ;

$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots$ — комплексно-сопряженные коэффициенты;

$c_1, c_2, \dots$ — неизвестные коэффициенты;

$\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — неизвестные функции по t ;

$\beta_1, \beta_2, \dots$ — линейные комбинации функций $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

Таким образом, искомое решение раскладывается в ряд по степеням величины λ .

Для улучшения сходимости ряд по степеням λ необходимо преобразовать в ряд по степеням коэффициента при члене, содержащем низшую частоту ($\alpha_{\min}$). Это преобразование обязательно при решении задач, описываемых неоднородными уравнениями.

§ 1. Материалы, применяемые для вантовых покрытий

Для вантовых покрытий с точки зрения использования различных материалов представляют интерес гибкие ванты, так как жесткий опорный контур не имеет существенных отличий по сравнению с обычными конструкциями, работающими на сжатие, изгиб, кручение или на различные комбинации этих воздействий.

Для вант применяют стальные изделия: канаты, арматурные пучки из высокопрочной проволоки и арматурные стержни. Сечения других видов стальных изделий (полосовая и профильная прокатная сталь) обладают чрезмерной жесткостью в плоскости или из плоскости покрытия и в вантовых сетях применяют в исключительных случаях. Неметаллические материалы (органические, синтетические и др.) применяются редко и не могут быть рекомендованы для стационарных сооружений.

Стальные канаты изготавливают на заводах из канатной проволоки по ГОСТ 7372—55. Расчетный предел прочности проволоки при растяжении колеблется в пределах 100—260 кг/мм² и определяется сортом катанки, диаметром проволок и типом покрытия (светлая или оцинкованная).

Наиболее употребительная проволока с расчетным пределом прочности 120 ÷ 190 кг/мм². Проволока, а следовательно, и канаты выпускаются нашей промышленностью трех марок: высшей, первой и второй. Канаты марки В (высшей) отличаются от канатов марок I (первой) и II (второй) минимально допустимым разбегом предела прочности проволоки, из которой они выполнены. В ответственных вантовых покрытиях необходимо принимать канаты из проволок марки В.

Канаты в зависимости от методов изготовления подразделяют на: одинарной свивки в пряди (спиральные), двойной свивки (тросовые, т. е. когда проволоки скручиваются в пряди, а пряди в канаты) и многократной свивки (кабельтовые).

Для вантовых покрытий наибольший интерес представляют стальные канаты одинарной и двойной свивки. В зависимости от типа свивки, или, иначе, от касания проволок между слоями в прядях, канаты разделяют на канаты: ТК (точечное касание), ЛК (линейное касание), ТЛК (точечно-линейное касание). При этом проволоки

в слоях могут быть одинакового или разных диаметров, например ЛК-О или ЛК-Р. Канаты ЛК являются более гибкими по сравнению с канатами типа ТК.

Канаты для вантовых покрытий желательно употреблять нераскручивающиеся и некрутящиеся крестовой или односторонней свивки. Канаты односторонней свивки (направление свивки проволок в пряди и прядей в канаты одинаково) обладают большей гибкостью по сравнению с канатами крестовой свивки.

В вантовых покрытиях рекомендуется применять канаты с металлическим сердечником, изготовленные из проволок диаметром не менее 1 мм. Краткая характеристика некоторых типов стальных канатов с металлическим сердечником приведена в табл. VI.1.

Таблица VI.1

ГОСТ	Свивка каната	Количество проволок в канате, шт.	Формула размещения проволок в прядях	Диаметр каната, мм
3062—55	Одинарная: с линейным касанием проволок в пряди (ЛК—0) . . .	1×7=7	1+6	0,66÷13,5
3063—55	с точечным касанием отдельных проволок между слоями пряди (ТК)	1×19=19	1+6+12	1,1 ÷22,5
3064—55	то же	1×37=37	1+6+12+18	1,54÷31,5
3065—55	»	1×61=61	1+6+12+18+24	1,98÷40,5
3066—55	Двойная: с линейным касанием проволок в пряди (ЛК—0) . . .	7×7=49	1+6	1,8 ÷27,0
3067—55	с точечным касанием отдельных проволок между слоями (ТК)	7×19=133	1+6+12	3,0 ÷60,0
3068—55	то же	7×37=259	1+6+12+18	4,62÷73,5

Сопротивление каната характеризуется двумя величинами: P_c — суммарным разрывным усилием проволок каната и P_a — действительным разрывным усилием каната, разница между ними в процентах характеризует потери от свивки. В зависимости от конструкции каната эти потери составляют 10—20%. В качестве расчетных разрывных усилий для канатов из светлой и оцинкованной проволоки принимают соответственно $P_p = 0,65P_a$ и $P_p = 0,60P_a$.

Недостатком канатов, как элементов строительных конструкций, является их сравнительно невысокий первоначальный модуль упругости, обусловленный витой структурой. Если модуль упругости проволоки, из которой изготавливается канат, равен $2\,000\,000\text{ кг/см}^2$, т. е. близок к своему теоретическому пределу, то для канатов одинарной свивки он меньше на 15—35%, а для канатов двойной свивки — на 50—65%.

Для повышения первоначального модуля упругости и устранения неупругих деформаций, канаты подлежат обязательной предварительной вытяжке усилием 65—75% разрывного усилия каната в течение 0,5—2 ч. Модули упругости для некоторых типов канатов, без предварительного вытягивания и с предварительным вытягиванием, приведены в табл. VI.2.

Таблица VI.2

ГОСТ	Тип каната	Количество проволок в канате, шт.	E, кг/см ²	
			без предварительного вытягивания	с предварительным вытягиванием
3062—55	Спиральный	1×7	1 480 000	1 750 000—2 100 000
3063—55		1×19	1 450 000	1 700 000—1 800 000
3064—55		1×37	1 250 000	1 530 000—1 610 000
3065—55	Трос	1×61	1 150 000	1 500 000
3066—55		7×7	1 250 000	1 400 000
3067—55		7×19	1 100 000	1 250 000
3068—55		7×37	980 000	1 150 000

Средний модуль упругости для канатов одинарной свивки может быть принят $1\,650\,000 - 1\,700\,000\text{ кг/см}^2$.

Пучки или пряди для вант изготавливают из высокопрочной проволоки на специально оборудованных стендах, иногда непосредственно на строительной площадке. Для пучков применяют проволоку круглую углеродистую по ГОСТ 7348—63 и холоднотянутую периодического профиля по ГОСТ 8480—63.

Расчетные сопротивления высокопрочной арматурной проволоки зависят от диаметра ее и уменьшаются с увеличением его. Приемлемые расчетные характеристики и сравнительно хорошая коррозионная устойчивость делают проволоку диаметром $4 \div 6\text{ мм}$ наиболее употребительной.

В зависимости от расчетного усилия в вантах, типа анкерного крепления и конструкции домкрата формируют пучок по форме и количеству проволок в нем. Конструкции некоторых анкеров требуют изготовления пучков одновременно с их монтажом.

Через 70—100 см по длине пучков проволоки их связывают мягкой вязальной проволокой диаметром 1—1,5 мм.

Модуль упругости пучков из высокопрочной проволоки принимается равным $1\,800\,000 - 1\,900\,000\text{ кг/см}^2$. Для выравнивания проволок и создания равномерного распределения усилий между ними, пучки рекомендуется вытягивать усилием, превышающим расчетное разрывное примерно на 10%. Этим одновременно достигается повышение модуля упругости до $2\,000\,000\text{ кг/см}^2$.

Предварительное вытягивание канатов и пучков необходимо выполнять вместе с присоединенными концевыми креплениями (см. § 2 гл. VI).

Арматурная сталь, круглая или периодического профиля, имеет прочностные характеристики ниже, чем у канатов, но более коррозиестойчива, позволяет применять сварку и более простые соединения.

Рекомендуется применять арматурные стержни периодического профиля класса А-III ($R_a = 3400 \text{ кг/см}^2$) и А-IV ($R_a = 5100 \text{ кг/см}^2$), изготовленные из стали марок Ст.5, 35ГС, 25Г2С, 15Г2С, 30ХГ2С и др.

Арматурная сталь может применяться в вантовых покрытиях значительных пролетов. Максимальный диаметр одиночных арматурных стержней для вант по условиям жесткости обычно равен 36 мм. При больших площадях сечения применяют спаренные ванты с расположением стержней в поверхности сети в один ряд.

Термическая обработка или холодная вытяжка (наклеп) повышают прочность арматурных стержней. Термически обработанные круглые стержни можно применять в вантах без сварных соединений, так как при сварке прочность таких сталей несколько падает. При холодной вытяжке увеличивается область упругой работы материала. При применении холодноупрочненных стержней следует особое внимание обращать на конструирование узлов вант, не допуская концентрации напряжений, так как вместе с повышением предела упругости (для арматуры класса А-III R_a увеличивается до 4500 кг/см^2) пластичность материала падает и возрастает опасность хрупкого разрушения.

Соединять арматурные стержни необходимо контактной электросваркой в стык вантым или электрошлаковым способом. Типы сварных стыковых соединений могут быть приняты в соответствии с табл. 35 СНиП II-B.1—62 «Бетонные и железобетонные конструкции». Технология сварки принимается по действующим нормативным документам. При применении термически упрочненных стержней, соединение вант желательно выполнить на муфтах с резьбой. Ванная сварка таких холодноупрочненных стержней не рекомендуется, так как приводит к снижению предела текучести и тем больше, чем больше диаметр стыкуемых стержней.

При выборе марок стали для вант в виде арматурных стержней можно руководствоваться положениями 2.7—2.19 и табл. 32 СНиП II-B.1—62 «Бетонные и железобетонные конструкции».

§ 2. Концевые крепления вант

В предыдущих главах было показано, что усилия в нитях вантового покрытия не зависят от величины пролета последних и определяются их кривизной, т. е. формой. Это положение свойственно любым напряженным криволинейным поверхностям, однако в вантовых покрытиях, ввиду дискретной структуры их, оно является более наглядным. Основываясь на этом положении, укажем возможные причины разрушения сети вантового покрытия:

Предположим, что по каким-либо причинам, нагрузка на вантовое покрытие по сравнению с расчетной увеличилась, и за счет деформации первоначальные стрелки вант изменились. Увеличение стрелок вант приведет к уменьшению усилий в них и в определенный момент времени покрытие «зависает». Если учесть, что стальные ванты могут разрушиться только при значительном развитии пластических деформаций (физическая нелинейность работы), которые, в свою очередь, также ведут к увеличению стрелок вант, конструкции вантовых покрытий представляются наиболее безопасными.

Особое внимание необходимо уделять конструированию узлов вантовых покрытий, так как концентрация напряжений в узлах и другие факторы могут привести к хрупкому разрушению, сопровождающемуся малыми деформациями, и происходящему внезапно.

Выбор концевой крепления вант зависит от материалов применяемых вант и бортового элемента, конструктивного решения его, степени капитальности сооружения, методов предварительного натяжения сети, наличия соответствующих механизмов и оборудования для натяжения вант и других факторов.

Наиболее простым концевым креплением вант из канатов может служить петля с коушем на зажимах или с вплетенным коушем (рис. VI.1, а, б). Зажимы для закрепления концов каната могут быть в виде двух гнутых стержней с проушинами или в виде дужки с планкой (одинарные). Роль планки в одинарном зажиме иногда выполняет специально отлитая стальная накладка с углублением для каната и отверстием для дужки («коренной зуб»). Зажимы устанавливаются таким образом, чтобы затягивающие гайки их размещались со стороны рабочей ветви каната и с шагом, равным не менее 6 диаметрам каната. Многолетней практикой эксплуатации

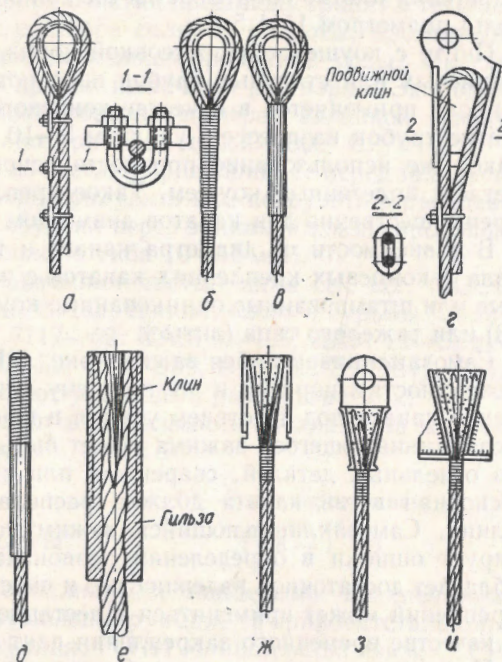


Рис. VI.1. Концевые крепления вант из стальных канатов.

и испытаний концевых креплений канатов на зажимах установлено, что разрывное усилие каната с таким соединением должно быть уменьшено по сравнению с расчетным на $20 \div 25\%$.

При применении петли с вплетенным коушем канат огибает его по дуге, равной 4—6 диаметрам каната и вплетается в основную ветвь каната на длину, равную примерно 25 диаметрам каната. Место вплетения плотно обматывается мягкой вязальной проволокой (бензель) диаметром 1—1,5 мм.

Петля с коушем с запрессовкой конца каната при помощи алюминиевых или стальных трубок овального сечения (рис. VI.1, в) широко применяется в качестве концевой фиксации. Плотное обжатие трубок на прессе с усилием 5—10 т обеспечивает примерно такое же использование прочности основного каната, как и при петле с вплетенным коушем. Такое крепление следует применять преимущественно для канатов диаметром до 20 мм.

В зависимости от диаметра каната и конструктивного решения узла в концевых креплениях канатов с петлями применяют кованные или штампованные оцинкованные коуши легкого (ГОСТ 2224—43) или тяжелого типа (литые).

Самозаклинивающийся зажим (рис. VI.1, г), благодаря боковым поверхностям корпуса и внутреннему клину, обеспечивает закрепление каната под действием усилия в канате. Основной корпус самозаклинивающегося зажима может быть литым или составленным из отдельных деталей, сваренных или склепанных в одно целое. Основная ветвь каната должна располагаться на прямой части клина. Самозаклинивающийся зажим ускоряет монтаж, компенсирует ошибки в определении первоначальных длин вант, но не обладает достаточной надежностью и вместе с предыдущими типами креплений может применяться в стационарных сооружениях или в качестве временного закрепления вант в процессе строительства.

При применении канатов небольших диаметров может быть применено концевое крепление, основанное на запрессовке каната на гидравлической протяжной установке. Длина участка запрессованного каната зависит от диаметра. Обжатие каната и втулки, заканчивающейся резьбой, происходит по периметру (рис. VI.1, д). На принципе обжатия основан и гильзо-клиновой анкер для вант из канатов. Фасонный клин, имеющий волнистую форму, приблизительно совпадающую с формой расплетенных прядей каната, обеспечивает обжатие внутренних проволок каната, а гильза, выполненная из мягкой стали, при протяжке на гидравлическом прессе претерпевает пластические деформации и плотно обжимает наружные слои проволок (рис. VI.1, е).

Наиболее надежны заливные концевые крепления канатов. Основная деталь концевой заливной фиксации — стакан может иметь различную конструкцию: точеную, литую, сварную с последующим креплением к опорному контуру при помощи гайки, шарнира, упора и т. д. (рис. VI.1, ж, з, и).

Подготавливают канат к изготовлению заливного концевой фиксации следующим образом. Ниже предполагаемого конца заливного стакана на расстоянии, равном примерно 5—6 диаметрам каната, его оплетают мягкой вязальной проволокой диаметром 1—1,5 мм, после чего проволоку каната распускают, сохраняя естественную витую форму. Промывают проволоку бензином, керосином или газойлем. После первоначальной очистки проволоку травят в течение 1—2 мин в 50-процентном растворе соляной кислоты, промывают в кипящей воде с добавлением кальцинированной соды. Иногда обезжиривают проволоку в других щелочных растворах. Заливной стакан очищают аналогичным образом и перед заливкой вместе с продетым канатом нагревают примерно до 250—300° С.

При применении канатов из светлой проволоки, ее перед заливкой в пределах втулки желательно пролудить или погрузить в расплавленный цинк. В некоторых случаях перед заливкой концы проволок дополнительно отгибают (длина отгиба 10—15 мм).

Для заливки стаканов применяют чистый цинк Ц1, Ц2, (ГОСТ 3640—65), сплавы алюминия, цинка, свинца, олова и сурьмы. Сплавы на основе цинка (ГОСТ 7117—62: ЦАМ 9—1,5, ЦАМ 10—5) дешевле баббитов (ГОСТ 1320—55: Б16, Б89, БТ, Б6, БК, БН, БС), содержащих олово, и позволяют уменьшить размеры втулок.

Размеры стаканов назначают в зависимости от диаметра каната по следующим соотношениям:

Высота	4,5—5 диаметров каната
Наружный диаметр	3 то же
Конусность внутренней полости	1 : 8 — 1 : 10

Большой опыт работы с заливными концевыми креплениями накоплен в ГПИ Проектстальконструкция, Укрпроектстальконструкция, Промстальконструкция, ГСПИ Министерства связи СССР и в других организациях. ГПИ Проектстальконструкция разработал нормы заливных втулок различных конструкций для канатов с расчетным усилием от 4 до 77 т, которыми рекомендуется пользоваться.

Концевые крепления для вант из пучков высокопрочной проволоки более разнообразны, чем для вант из канатов, и закрепление проволок во всех типах осуществляется за счет сил трения, перегиба или заклинивания.

Гильзо-стержневой анкер системы НИИ-200 основан на запрессовке концов пучка между гильзой из мягкой стали и закаленным стержнем, изготавливаемым из качественной углеродистой стали марки Ст.45 (ГОСТ 1050—60). Опыт применения анкеров системы НИИ = 200 (рис. VI.2, а) показывает, что высокая твердость стержня после термообработки (твердость по Бринелю равна 240) плохо отражается на прочности его, увеличивает чувствительность к монтажным перекосам и хрупкость. Несущая способность пучка может снизиться до 60—70% расчетного разрывного усилия.

Частично это можно компенсировать применением для стержня качественной рессорно-пружинной кремнистой стали марки Ст. 55С2 (ГОСТ 2052—53) с аналогичной твердостью по Бринелю и сферических шайб, исключающих перекося.

При двухслойном расположении проволок в анкере может быть применена видоизмененная конструкция анкера НИИ-200 — анкер типа ПИ-1 (рис. VI.2, б).

Модернизацию анкера НИИ-200 предложил М. К. Бородин * (рис. VI.2, в). Вместо термически упрочненного стержня применяется спираль из высокопрочной проволоки, одетая на стержень из обычной малоуглеродистой стали. Гильза, как и в анкере системы НИИ-200, изготавливается из мягкой стали. При опрессовке на гидравлической установке проволока пучка между витками спирали изгибается, а более твердая спираль при этом вдавливается в более мягкий стальной стержень.

Существует несколько типов анкеров, в которых стержни отсутствуют, а проволока защемляется непосредственно в стальной гильзе.

В анкере конструкции Н. Е. Носенко (рис. VI.2, г) резьба выполняется после запрессовки пряди.

Модификацией анкера Н. Е. Носенко является анкер, разработанный бывш. Ленинградским филиалом АС и А СССР (рис. VI.2, д). Если в анкере конструкции Н. Е. Носенко резьба выполняется после запрессовки пряди, то в последнем анкере эту операцию возможно выполнить заранее.

Оригинальны, хотя, на наш взгляд, многодельны и трудоемки в изготовлении, анкера, предложенные И. М. Портновым, Е. Ф. Лысенко ** и Б. А. Котениным, В. Я. Телегиным ***.

Анкер, предложенный И. М. Портновым и Е. Ф. Лысенко (рис. VI.2, е), представляет собой гильзу с наружной и внутренней резьбой, в которую вставляется втулка с набранным вокруг нее пучком. На наружной резьбе гильзы располагается гайка. Анкерение проволок осуществляется при помощи развальцованной втулки. Диаметр втулки увеличивается, заполняя все пустоты, а внутренняя резьба гильзы вбивается в проволоки.

Цилиндрический гильзовый обжимной анкер Б. А. Котенина и В. Я. Телегина (рис. VI.2, ж) использует для анкерования силы трения, перегиба и заклинивания. Гильза имеет по диаметру двухступенчатое отверстие, и на участке большего диаметра между проволоками пучка располагают специально изготовленные конические вкладыши. При запрессовке конические вкладыши заклинивают и перегибают проволоки.

* М. К. Бородин. Авторское свидетельство на изобретение № 147312.

** И. М. Портнов и Е. Ф. Лысенко. Авторское свидетельство на изобретение № 124615.

*** Б. А. Котенин и В. Я. Телегин. Авторское свидетельство на изобретение № 134414.

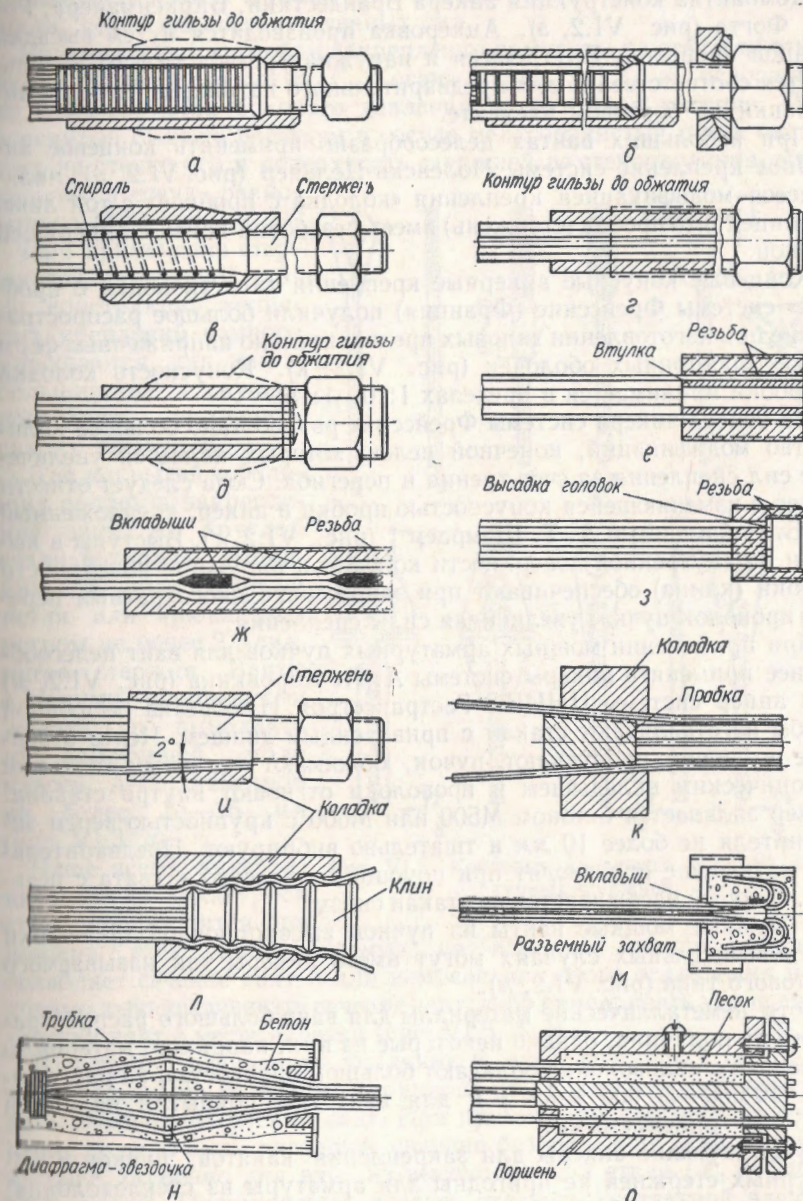


Рис. VI.2. Концевые анкерные крепления вант из пучков высокопрочной проволоки.

Компактна конструкция анкера Брандестини, Биркенмайера, Роса, Фогта (рис. VI.2, з). Анкеровка производится путем высадки концов проволок. Внутренняя и наружная резьба гильзы используется соответственно для предварительного натяжения пучка и анкеровки на бортовом элементе.

При небольших вантах целесообразно применять концевое анкерное крепление системы Поленски-Цельнер (рис. VI.2, и), являющееся модификацией крепления «колодка с пробкой» с той лишь разницей, что пробка (стержень) имеет резьбовой конец с анкерящей гайкой.

Концевые конусные анкерные крепления типа «колодки с пробкой» системы Фрейссине (Франция) получили большое распространение при изготовлении типовых предварительно напряженных ферм и железобетонных оболочек (рис. VI.2, к). Конусность колодки и пробки принимается в пределах 1:10—1:15.

На основе анкера системы Фрейссине разработано большое количество модификаций, конечной целью которых является увеличение сил сцепления за счет трения и перегиба. Сюда следует отнести анкер с изменяющейся конусностью пробки и анкер, предложенный И. Б. Ройзманом и А. Т. Шамраем * (рис. VI.2, л). Выступы и выемки на внутренней поверхности колодки и наружной поверхности пробки (клина) обеспечивают при запрессовке многократный перегиб проволок пучка, увеличивая силы сцепления.

При применении мощных арматурных пучков для вант целесообразнее применять анкеры системы А. П. Коровкина (рис. VI.2, м) или анкер системы ЦНИИС Гострансстроя. Из обрезка бесшовной трубы изготавливают стакан с приваренным днищем. Через отверстие в днище пропускают пучок, обжимают стальным кольцом с коническим вкладышем и проволоки отгибают внутрь стакана. Анкер заливается бетоном М500 или М600 с крупностью зерен заполнителя не более 10 мм и тщательно вибрируют. Предварительное натяжение производят при помощи кольцевого захвата с резьбой, который насаживается на стакан снизу.

Отдельные мощные ванты из пучков высокопрочной проволоки в исключительных случаях могут иметь анкеры так называемого мостового типа (рис. VI.2, н).

Хотя неметаллические материалы для вант большого распространения не получили, однако некоторые из них, например, материалы на основе стекловолокна обладают большой прочностью на растяжение ($10\,000\text{--}20\,000\text{ кг/см}^2$) и для вантовых покрытий являются наиболее приемлемыми.

Существующие анкеры для закрепления канатов, пучков и арматурных стержней не пригодны для арматуры из стекловолокна; характерными особенностями являются хрупкость, плохая сопро-

* И. Б. Ройзман и А. Т. Шамрай. Авторское свидетельство на изобретение № 142008.

тивляемость изгибу и различным контактными напряжениями, в частности, действием сосредоточенных сил.

Оригинальным способом закрепления арматуры из стекловолокна является предложение В. С. Когана * (рис. VI.2, о), основанное на использовании бокового давления в грунтовой массе. Подвергнутый сжатию поршнем в сосуде мелкозернистый песок оказывает на стенки его и поверхность стержней из стекловолокна, помещенных в сосуд, равномерное давление.

При применении стержневой арматурной стали конструкции концевых креплений намного упрощаются, так как в большинстве случаев позволяют применить сварку элементов.

Для покрытий небольших пролетов закрепление вант из круглой стали возможно выполнить в виде простой петли или крюка диаметром не менее 2,5 диаметра стержня. Ванты с такими креплениями желательно выполнять из арматурной стали класса А-I диаметром не более 14—16 мм (рис. VI.3, а).

Чаще всего анкерование вант из арматурной стали производится при помощи гаек, навинчиваемых на нарезные концы. Нарезка ослабляет сечение вант и для компенсации этого ослабления необходимо либо увеличивать сечение вант, либо приваривать утолщенные участки вант в месте нарезки (рис. VI.3, б, в).

Для вант с небольшими усилиями и, следовательно, с небольшими поперечными сечениями (примерно до 18 мм) можно рекомендовать увеличение сечения вант. При применении хвостовиков соединение должно быть тщательно сварено без смещения осей стержней в стыке, особенно для вант из высокопрочной стали ($R_a = 3400\text{--}5100\text{ кг/см}^2$). Преимущество следует отдавать контактной электросварке. Резьба на концах вант должна быть ровной и чистой и вы-

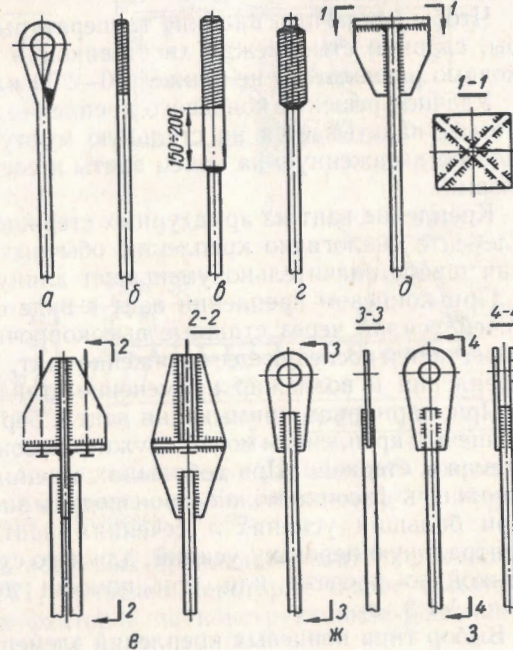


Рис. VI.3. Концевые крепления вант из арматурных стержней.

* В. С. Коган. Авторское свидетельство на изобретение № 126247.

полняться на токарном или резбонарезном станке. Для обеспечения высококачественной накатки резьбы для хвостовиков применяют хромистую марганцовистую сталь. Длина нарезки вант зависит от конструктивного решения узла примыкания вант к борту и методов предварительного натяжения (места под ключ, типа домкрата и т. д.). Расстояние от конца нарезки до упорной гайки (запас резьбы) равно примерно 50—100 мм и определяется в соответствии с длиной ванты.

Чтобы исключить влияние температуры сварки на качество резьбы, сварной стык между хвостовиком и основным стержнем необходимо располагать не ближе 150—200 мм от начала резьбы.

Удачное решение концевое крепление показано на рис. VI.3, г. Резьба накатывается на стальную муфту (отрезок трубы и т. п.), плотно насаженную на конец ванты и соединенную с ней сварными швами.

Крепление вант из арматурных стержней в монолитном бортовом элементе аналогично креплению обычных анкерных болтов. Упорная шайба значительно уменьшает длину заделки (рис. VI.3, д).

При концевом крепении вант в виде сварного башмака с передачей усилий через стяжные высокопрочные болты (рис. VI.3, е) облегчается последующее натяжение вант, упрощается изготовление крепления и возможно применение стандартных стяжных болтов.

При шарнирном примыкании вант к бортовому элементу простым концевым креплением может служить фасонка с отверстием, привариваемая к стержню. При небольших сечениях вант (до 16 мм) сварку стержня к фасонке можно производить внахлестку (рис. VI.3, ж). При больших усилиях и сечениях вант необходимо обеспечить центральную передачу усилий, для чего стержень соединяется с фасонкой по прорези или при помощи двух спаренных фасонки (рис. VI.3, з).

Выбор типа концевых креплений элементов для вантовых покрытий является ответственным этапом в проектировании. Тщательный анализ условий работы анкера, которые могут возникнуть в процессе монтажа или эксплуатации покрытия, поможет проектировщику выбрать правильное концевое крепление. Прочность почти всех концевых креплений в той или иной степени меньше прочности основного сечения вант. Температура заливки сплавов при изготовлении заливных креплений, всевозможные механические повреждения, концентраторы напряжений (подрезы, перегибы, эксцентricность, явления контактного трения, наличие дефектов в теле анкера и т. д.) влияют на прочность вант в месте крепления.

§ 3. Узлы примыкания вант к бортовым элементам

Узлы вантовых покрытий рассматриваемого класса можно разделить на узлы: примыкания вант к бортовым элементам и пересечения вант в пролете.

Конструктивные решения узлов примыкания вант к бортовому элементу определяются:

концевыми креплениями вант (следовательно, и материалом вант); материалом бортового элемента и его конструктивным решением; методами предварительного натяжения сети.

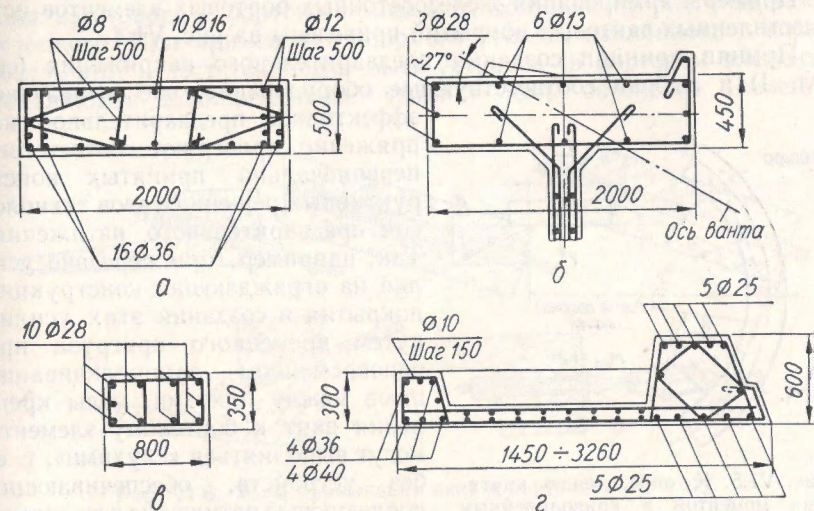


Рис. VI.4. Примеры армирования сечений бортовых элементов покрытий: а — киноконцертного зала в Харькове; б — стадиона в Монтевидео; в, г — крытого рынка в Черкассах и Киеве.

Не останавливаясь на концевых креплениях вант, подробно рассмотренных в § 2 гл. VI, приведем некоторые общие положения о влиянии двух других факторов на конструктивное решение узлов примыкания.

В настоящее время для конструкций бортовых элементов применяют железобетон, металл и дерево. Статическая работа опорного контура вантовых покрытий предопределяет рациональное применение железобетона в его конструкциях и поэтому большинство вантовых покрытий имеет железобетонные бортовые элементы. Однако обеспечение надежности соединений металлических конструкций вант с железобетонным бортовым элементом вызывает затруднения.

Металлические бортовые элементы имеют преимущества по сравнению с железобетонными элементами (небольшой собственный вес, упрощение примыкания вант, индустриальное решение стыков монтажных марок и др.), однако в целях экономии материала чисто металлические бортовые элементы применяют редко.

Деревянные бортовые элементы сплошного сечения или в виде сплаченного пакета бревен, досок применяют в покрытиях временного назначения сравнительно небольших пролетов.

Сечение бортового элемента должно быть прочным, жестким и способным воспринимать все комбинации силовых воздействий, которые могут возникнуть в период эксплуатации и монтажа. Прочность и жесткость сечений бортового элемента из железобетона, металла и дерева проверяются по СНиП.

Примеры армирования железобетонных бортовых элементов осуществленных вантовых покрытий приведены на рис. VI.4.

Приняв принцип создания предварительного напряжения (см. гл. I) и выбрав соответствующее оборудование, обеспечивающее

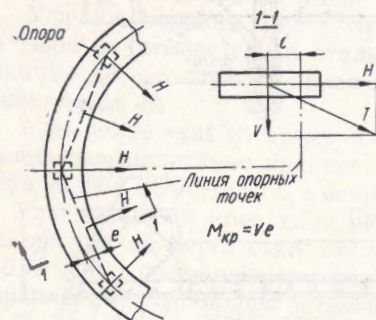


Рис. VI.5. К определению крутящих моментов в криволинейных бортовых элементах.

При создании предварительного натяжения последовательным натяжением каждой ванты сети в отдельности, один из узлов примыкания вант должен иметь устройство для последующей регулировки усилий и изменения первоначальных длин (резьбовой конец ванта или винтовая стяжка).

Решение узла примыкания ванта должно быть согласовано с габаритами применяемого оборудования (домкрата, ключа и т. д.). В большей степени это касается назначения размеров поперечного сечения бортового элемента.

Центрация силовых потоков (пересечение направлений усилий в вантах с центром опор) в узле является желательной. Если опора под борт является сплошной круговой стеной, то вертикальная составляющая усилий в вантах полностью передается на нее. При отдельно стоящих опорах, расставленных с достаточно большим шагом, необходимо учитывать дополнительные крутящие моменты в криволинейном бортовом элементе за счет эксцентричного приложения вертикальных составляющих усилий в вантах относительно линии опорных точек бортового элемента (рис. VI.5).

При круговом очертании опорного контура при радиальных вантах плоскость кольца обычно расположена горизонтально и не совпадает с направлением усилий в вантах (рис. VI.6, а). При при-

менении нарезного концевого крепления необходимо закладывать в железобетонный бортовой элемент для пропуска вант наклонные трубки, фиксирующие проектное положение вант. Установка подобных закладных деталей затруднительна, кроме того, крепление вант производится за различные уступы, приливы, что также усложняет изготовление бортового элемента, особенно сборного железобетонного. При применении опорного кольца, наклонного к горизонту, этот недостаток может быть устранен (в бортовом элементе появляются дополнительные усилия). Ось бортового элемента

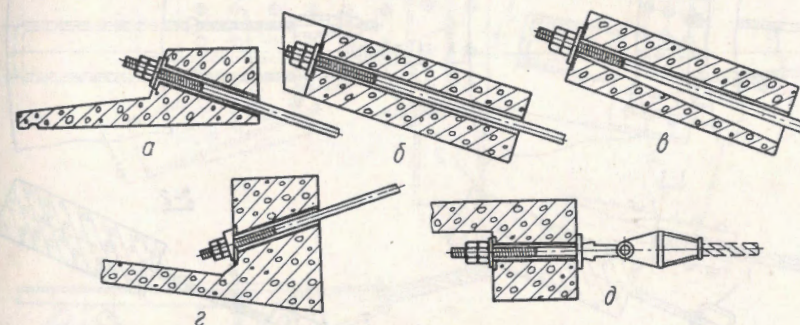


Рис. VI.6. Узлы примыкания вант к бортовому элементу.

наклоняется таким образом, что одновременно является касательной к геометрической линии вант в точке примыкания к опорному контуру (рис. VI.6, б). Иногда вместо трубки для пропуска вант предусматривают отверстие, уширяющееся к внутренней кромке (в вертикальной плоскости) борта для обеспечения большей свободы деформации вант при нагружении (рис. VI.6, в).

При более сложном очертании опорного контура закладные фиксирующие трубки имеют для каждого ванта различные, меняющиеся по длине бортового элемента, привязочные размеры (рис. VI.6, г). Чтобы сохранить постоянное расположение закладных деталей по длине бортового элемента, ванты иногда крепят шарнирно на некотором расстоянии от борта (рис. VI.6, д). При меняющемся наклоне вант это приводит к появлению дополнительных усилий и эксцентричного приложения вертикальной составляющей усилий.

Упрощенное решение примыкания вант к бортовому элементу переходным кольцом представлено на рис. VI.7, а. В бортовой элемент, наклонный к горизонту, забетонированы радиально расположенные круглые арматурные стержни, к которым сваркой крепится стальное коробчатое кольцо из прокатных профилей или цельногнутое. Основные несущие ванты крепятся через это кольцо. Сечение переходного кольца может быть замкнутым и открытым, состоящим из двух швеллеров, соединенных стенками на прокладках. Дополнительный расход стали на устройство переходного коль-

ца окупается простотой изготовления бортового элемента и упрощенным монтажом вант. Подобное решение узлов нашло применение в покрытии промышленного здания в г. Мехико.

Простым в изготовлении является решение узла примыкания при помощи двух выпусков, забетонированных в бортовом элементе (рис. VI.7, б). В узлах примыкания можно применять высокопрочные болты (рис. VI.7, в).

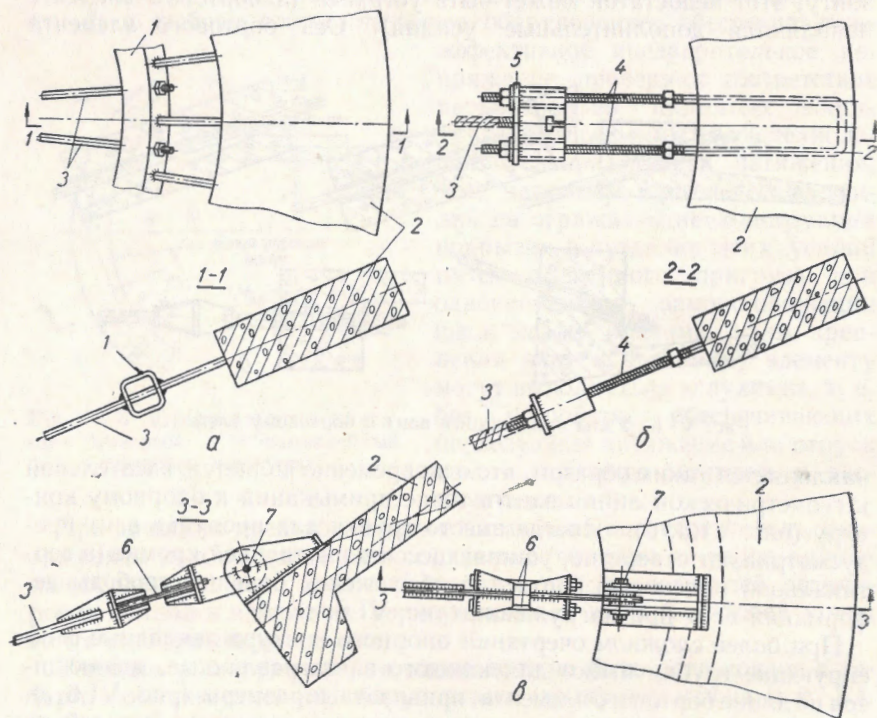


Рис. VI.7. Примыкание вант к железобетонному бортовому элементу при помощи:

а — переходного кольца; б — спаренных выпусков; в — стяжных болтов; 1 — коробчатый кольцевой элемент; 2 — бортовой железобетонный элемент; 3 — ванты; 4 — спаренные выпуски с нарезкой; 5 — заливная втулка конструкции ПСК; 6 — высокопрочные болты; 7 — шарнир.

При помощи стяжного приспособления с высокопрочными болтами на конце ванта легко производить выверку положения сети в плане и предварительное натяжение сети. Равномерное подтягивание башмака путем навинчивания гаек исключает закручивание ванта, а шарнирное примыкание к бортовому элементу обеспечивает свободу поворота их в вертикальной плоскости при нагружении.

В качестве вант используют стальные канаты и арматурные стержни с концевым креплением соответственно заливным и в виде сварного башмака. Применяют также спаренные выпуски в виде

одной петли. При таком решении концевого крепления вант соединение можно производить по типу «стыка Передерия».

К металлическим бортовым элементам ванты из канатов с заливными концевыми креплениями удобно крепить наглухо (рис. VI.8, а) или на шарнирах (рис. VI.8, б). Последнее решение характерно для антенно-мачтовых сооружений (верхнее крепление оттяжки мачты) и проверено практикой. Заливная втулка (см. рис. VI.8, а)

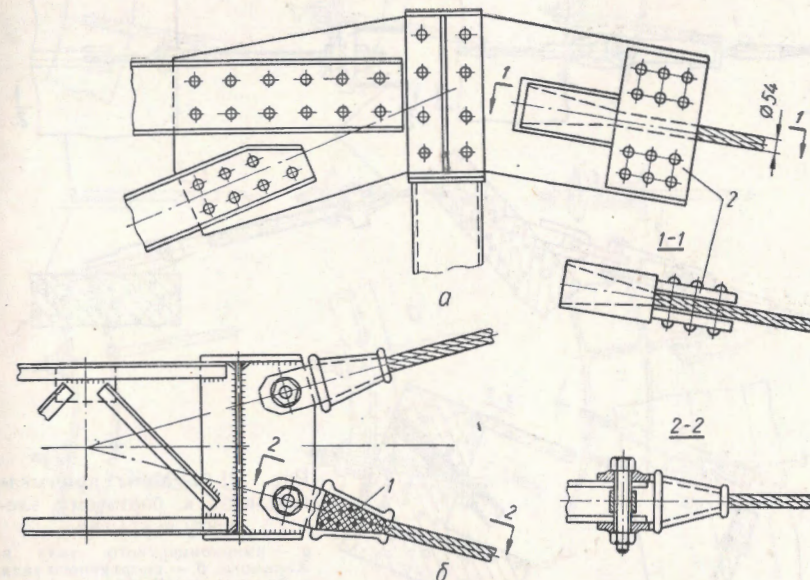


Рис. VI.8. Примыкание вант к металлическому бортовому элементу:

а — глухое; б — шарнирное; 1 — заливная втулка; 2 — накладка-траверса.

располагается в прорези стальной фасонки и передает усилия на нее при помощи стальных накладок, прикрепленных заклепками или болтами. Таким образом спаренные накладки служат своеобразной траверсой.

С точки зрения производства работ ванты удобно крепить металлическими тягами, забетонированными в бортовой элемент. Шарнирность соединения компенсирует ошибки, которые могут возникнуть из-за неправильного положения тяг. Это решение узлов было применено при строительстве покрытия киноконцертного зала в Харькове (рис. VI.9, а).

В покрытии спортивного зала в Братиславе (ЧССР) заливные втулки с вантами пропущены через закладные трубы большого диаметра (рис. VI.9, б). Положение натягаемых вант фиксировано при помощи нескольких вилкообразных шайб. Однако применение шайб может привести к потере предварительного напряжения за счет обмятия, перекосов и др.

Сечение внутреннего опорного контура вантовых сетей определяется усилием растяжения и, в некоторых случаях, методами предварительного натяжения и может быть принято в виде стального листа, спаренных швеллеров, прокатных или сварных двутавров, стальных бесшовных труб, гнутых фасонных профилей и др. (рис. VI.10) [47].

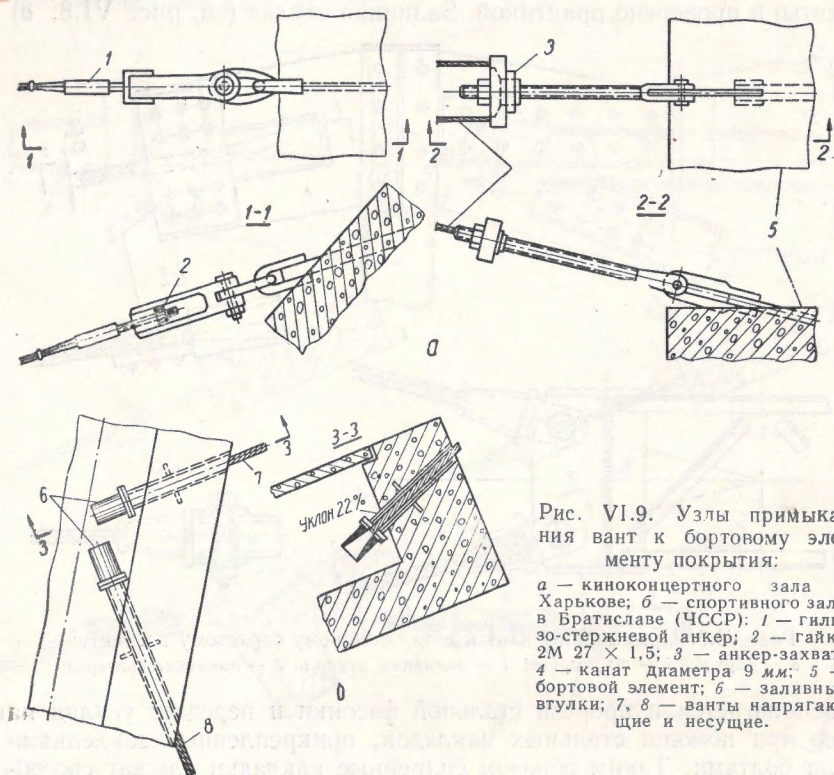


Рис. VI.9. Узлы примыкания вант к бортовому элементу покрытия:

а — киноконцертного зала в Харькове; б — спортивного зала в Братиславе (ЧССР): 1 — гильзо-стержневой анкер; 2 — гайка 2М 27 × 1,5; 3 — анкер-захват; 4 — канат диаметра 9 мм; 5 — бортовой элемент; 6 — заливные втулки; 7, 8 — ванты натягивающие и несущие.

При промежуточной опоре в центре покрытия узел примыкания вант к ней может решаться путем непосредственного примыкания вант к опоре, либо путем примыкания вант через промежуточное опорное кольцо.

Для первого случая характерно решение узла примыкания к железобетонной опоре вант сети с треугольной структурой. Фиксация положения непрерывных вант на центральной опоре обеспечивается упорными элементами в виде выпуска стержня с приваренной ограничительной шайбой (рис. VI.11, а). Для второго, случая характерно примыкание вант сети с шестиугольной структурой. Переходное кольцо, в данном случае из бесшовной трубы, с закрепленными на нем вантами притягивается к центральной опоре при

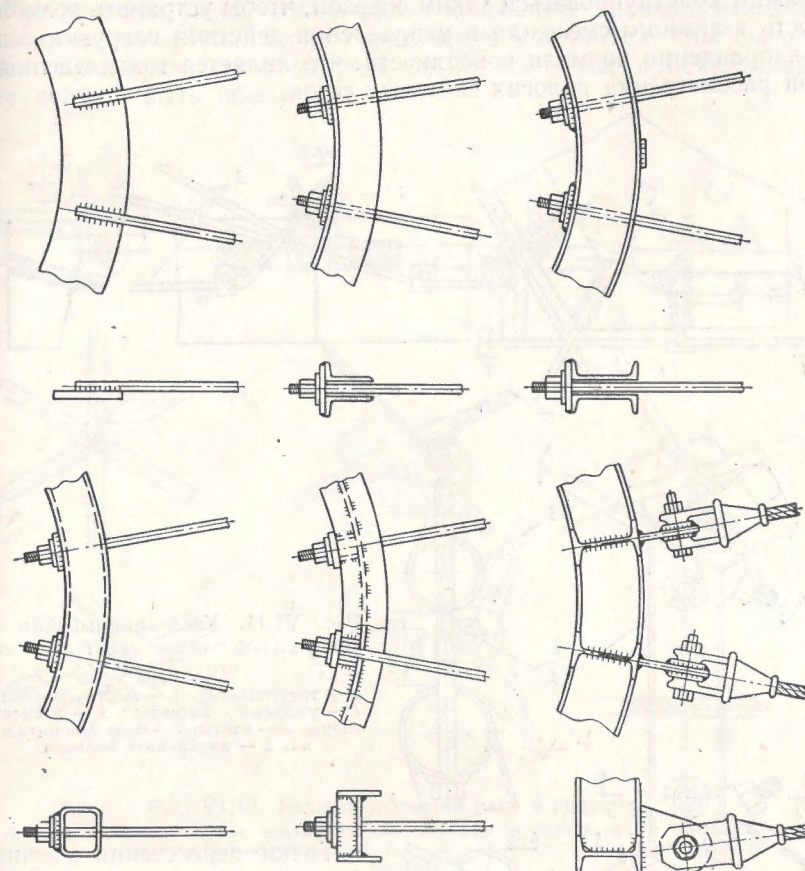


Рис. VI.10. Примыкание вант к внутреннему опорному контуру радиальных сетей (варианты).

помощи полиспаатов или путем навинчивания гаек на болты, выпущенные из тела опоры (рис. VI.11, б). Ход натяжки регулирует предварительное натяжение и геометрию поверхности. После выверки положения сети внутреннее кольцо соединяют с центральной опорой на сварке.

§ 4. Узлы пересечения вант в пролете и ограждающие конструкции

В зависимости от структуры сети ванты представляют собой или непрерывные нити с точками закрепления на контуре или состоят из отдельных элементов с концевыми креплениями вне контура.

Для обеспечения совместной работы всех пересекающихся семейств гибких нитей, образующих сеть, узлы пересечения вант

должны конструироваться таким образом, чтобы устранять возможность взаимного смещения в направлении действия нагрузки, или в направлении нормали поверхности, что является тождественным при рассмотрении пологих вантовых сетей.

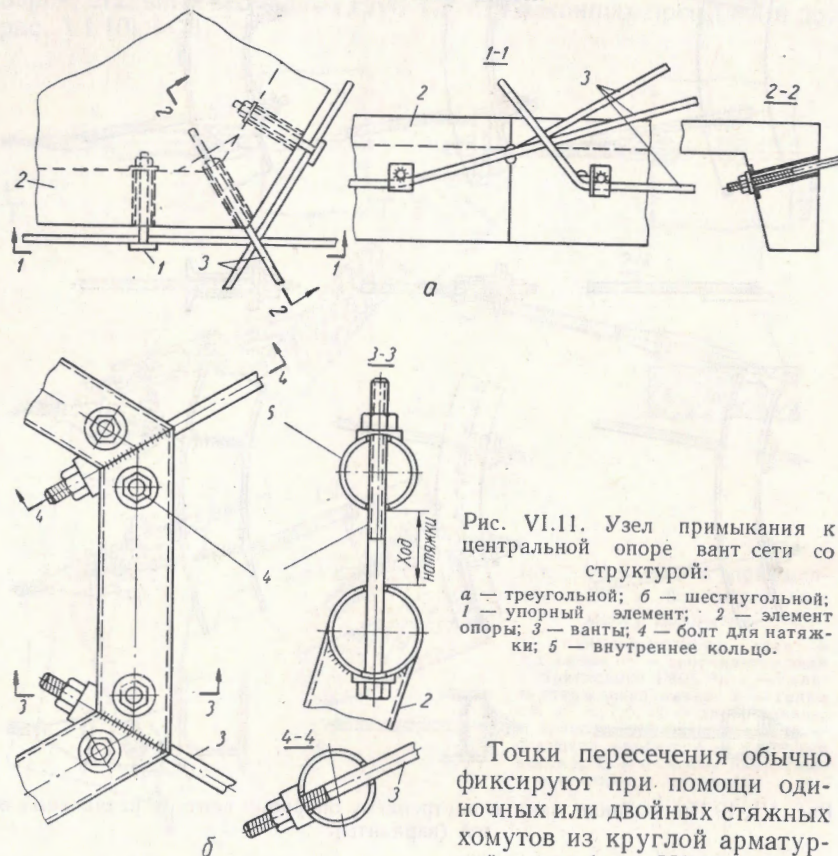


Рис. VI.11. Узел примыкания к центральной опоре вант сети со структурой:

а — треугольной; б — шестиугольной; 1 — упорный элемент; 2 — элемент опоры; 3 — ванты; 4 — болт для натяжки; 5 — внутреннее кольцо.

Точки пересечения обычно фиксируют при помощи одиночных или двойных стяжных хомутов из круглой арматурной стали (рис. VI.12 а, б).

В случае пересечения двух семейств нитей конструкция узлов может допускать взаимное проскальзывание вант или исключать его. Для смонтированной и напряженной вантовой сети допустимы оба решения, так как на распределения усилий в вантах это практически не отражается.

Однако во время сборки вантовой сети и выполнения предварительного натяжения необходимо обеспечивать взаимное проскальзывание вант в поверхности сети в связи с возможным появлением значительных горизонтальных смещений.

При пересечении трех и более семейств нитей расчетная схема вантовой сети существенно зависит от способа крепления вант в узлах пересечений.

При решении узлов, исключающих какое-либо проскальзывание, усилия по длине вант могут существенно изменяться. При выполнении предварительного напряжения таких сетей проскальзывание должно быть обеспечено.

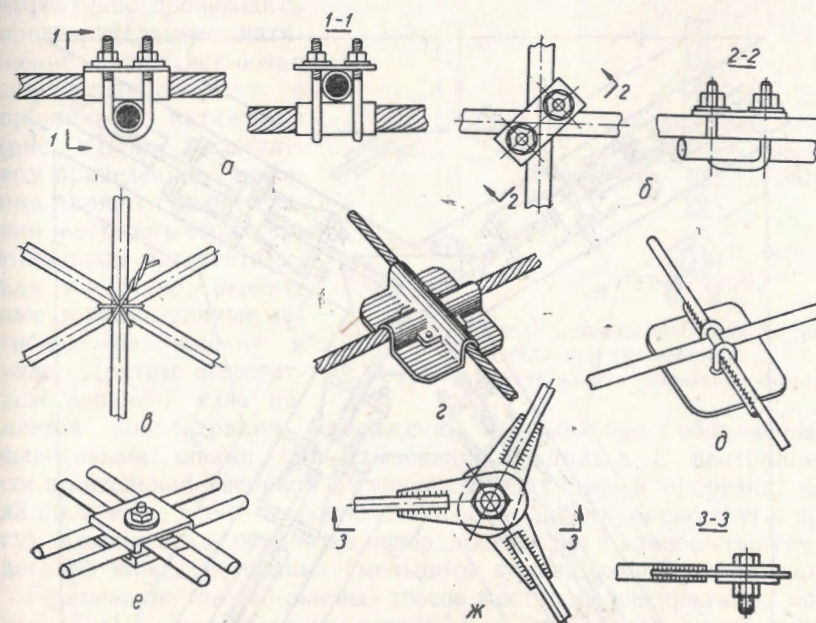


Рис. VI.12. Узлы пересечения вант в пролете:

а, б — на стяжных хомутах, соответственно двойных и одиночных; в — проволоочными скрутками; г — штампованной накладкой; д — на хомутах с опорным листом; е, ж — на болтах.

При применении вант из стальных канатов участки последних, в пределах узла, предохраняют от повреждений кожухами из оцинкованной стали. Окончательное затягивание гаек хомутов производится после предварительного натяжения сети.

В других случаях, особенно при применении вант из арматурной стали, в качестве узлового крепления может служить простая скрутка из мягкой проволоки диаметром 2,5—4 мм (рис. VI.12, в) или кольцо из арматуры.

Иногда узлы пересечения вант ортогональной структуры фиксируют при помощи специальных штампованных стальных элементов (рис. VI.12, г). Участки этих элементов в углах ячейки используют как монтажные столики для ограждающих плит покрытия. Учитывая то обстоятельство, что четыре точки на криволинейной поверхности в общем случае не лежат в одной плоскости, углы

плоских ограждающих плит покрытий необходимо «анкерить», т. е. притягивать к узлу при помощи вязальной проволоки.

Решение узла пересечения вант из арматурных стержней, продиктованное конструкцией ограждающей плиты и удобством опирания ее, приведено на рис. VI.12, д.

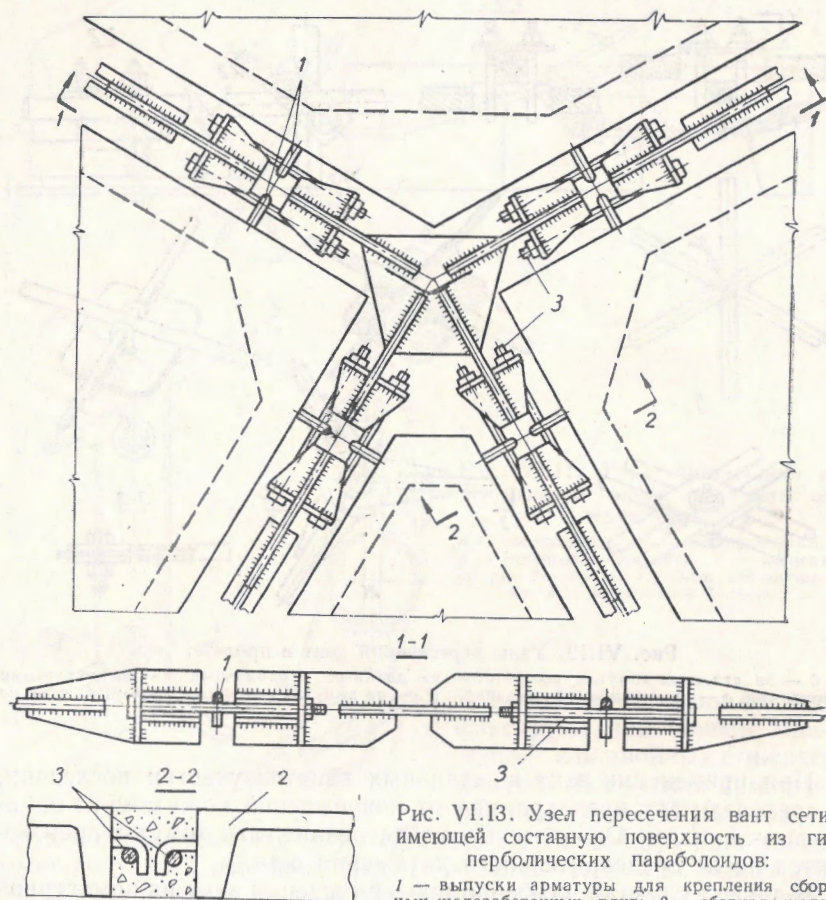


Рис. VI.13. Узел пересечения вант сети, имеющей составную поверхность из гиперболических параболоидов:

1 — выпуски арматуры для крепления сборных железобетонных плит; 2 — сборная железобетонная плита; 3 — стяжные болты.

Конструктивное решение узлов пересечения вант в сети шестиугольной структуры представлено на рис. VI.12, ж. Вантовая сеть собирается при помощи болтовых соединений. Решение узла несколько сложное, хотя и полностью отвечает расчетным предпосылкам схемы сети.

При вантах из спаренных арматурных стержней могут применяться гнутые элементы из полосовой стали, стягиваемые болтами (рис. VI.12, е).

В сетях, имеющих поверхность сочлененных гиперболических параболоидов без переломов по линиям сопряжения их, ванты, сходящиеся в узлах, по линиям имеют излом в горизонтальной плоскости. Применение стяжных приспособлений в каждом узле и на концах вант, примыкающих к бортовому элементу, дает возможность эффективно производить

предварительное натяжение сети, исключая закручивание вант в процессе натяжения (рис. VI.13). Недостатком приведенного решения является значительная жесткость его в вертикальной плоскости и, как следствие, вероятные дополнительные изгибные напряжения в узле. Другим недостатком решения узла является концентрация напряжений, вызываемая сближенными фланговыми швами при стыковании башмаков с центральной соединительной фасонкой (наличие сварных швов в прорезях, когда стыкуемые элементы располагаются перпендикулярно друг к другу). Механическая обработка поверхности швов и концов стыкуемых деталей может несколько уменьшить концентрацию напряжений.

Применение так называемых тросов жесткости (специальных мощных вант), воспринимающих вертикальные и горизонтальные составляющие от тяжений примыкающих вант, улучшает поверхность вантового покрытия (§ 2 гл. I). Узлы примыкания вант к тросам жесткости должны обеспечивать передачу тяжений и не допускать взаимного проскальзывания вант. Тросы жесткости могут конструироваться и из прокатных сечений: швеллеров, двутавров и др. При этом профили необходимо располагать так, чтобы обеспечить минимальные моменты сопротивления сечения из поверхности сети. Некоторые решения узлов примыкания вант к тросу жесткости приведены на рис. VI.14.

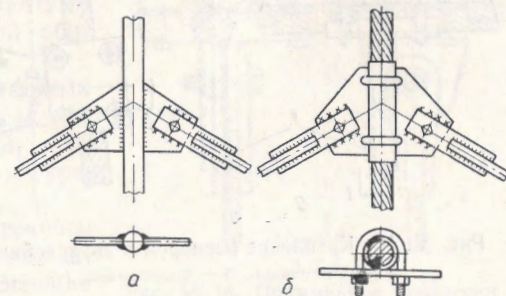


Рис. VI.14. Узел примыкания вант к тросу жесткости при применении:

а — арматурных стержней; б — стальных канатов.

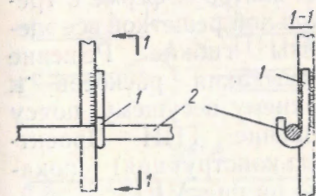


Рис. VI.15. Фиксация положения вант:

1 — фиксатор; 2 — натягающий вант.

решения узлов примыкания вант к тросу жесткости приведены на рис. VI.14.

В некоторых положениях натягающие ванты ортогональных секток лежат в плоскостях, наклонных к горизонту. При создании предварительного натяжения такие ванты стремятся «сползти» и занять более устойчивое положение. Для фиксации их проектного положения можно применить специальные крючья, привариваемые

к напрягаемым вантам из арматурной стали (рис. VI.15), или прикрепляемые каким-либо другим образом к вантам из канатов или пучков высокопрочной проволоки.

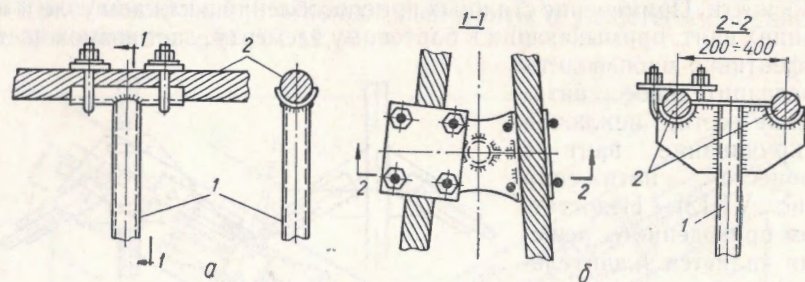


Рис. VI.16. Крепление распорок в двухслойных покрытиях для вант: а — одиночных; б — спаренных: 1 — распорка; 2 — вант.

Крепление распорок к несущим и напрягающим вантам двухслойных радиальных сетей или вантовых ферм может быть выполнено по рис. VI.16, а. Сжатая распорка должна обладать равноустойчивостью в двух вертикальных плоскостях и поэтому конструируется из труб, элементов крестового сечения.

По середине распорки иногда располагают винтовую стяжку, при помощи которой производят предварительное напряжение поясов.

В двухслойных вантовых сетях, когда ванты располагаются достаточно часто, применяют одну распорку на две пары вант (рис. VI.16, б).

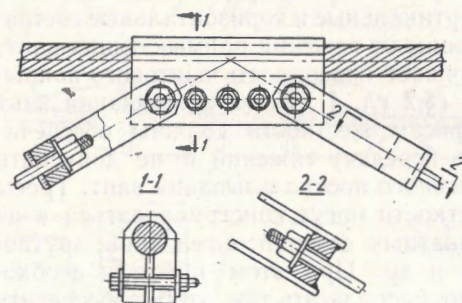


Рис. VI.17. Узел раскосной вантовой фермы.

В вантовой ферме с треугольной решеткой все элементы гибкие. Решение примыкания раскосов к верхнему несущему поясу (решение ГПИ Проект-стальконструкция) показано на рис. VI.17.

Пояса вантовых ферм больших пролетов иногда более целесообразно конструировать из нескольких тросов, располагаемых в один или несколько горизонтальных рядов (рис. VI.18). Такое решение узла характерно для висячих мостов, воздушных трубопроводов над оврагами, реками и т. д., однако может применяться в покрытиях.

В качестве ограждающих конструкций покрытия можно применять асбоцементные, стальные, алюминиевые, синтетические листы

и панели, пленки или ткани (без связи в работе с вантовой сеткой). Широко распространены сборные железобетонные или армоцементные плиты с последующим омоноличиванием швов вместе с вантами и обеспечением совместной работы их с вантами в составе железобетонной оболочки.

Конструкция железобетонных или армоцементных плит может быть различной: плоской, ребристой, с выпусками арматуры полки и т. д. (рис. VI.19).

Большое значение для точного определения геометрии ограждающих плит имеет определение внутренней геометрии сети (см. § 2 гл. I). Применяемый авторами термин «ортогональные сети» не во всех случаях является строгим [14], так как при отсутствии тангенциальных закреплений в узлах предварительно напряженные перекрестные нити располагаются вдоль геодезических линий по

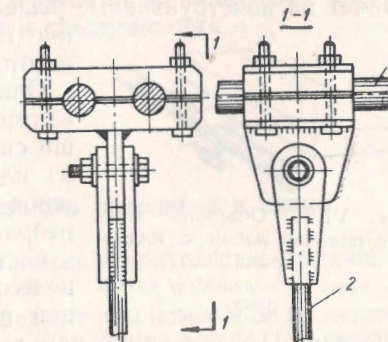


Рис. VI.18. Примыкание подвески к поясу фермы из спаренных вант: 1 — пояс фермы; 2 — подвеска.

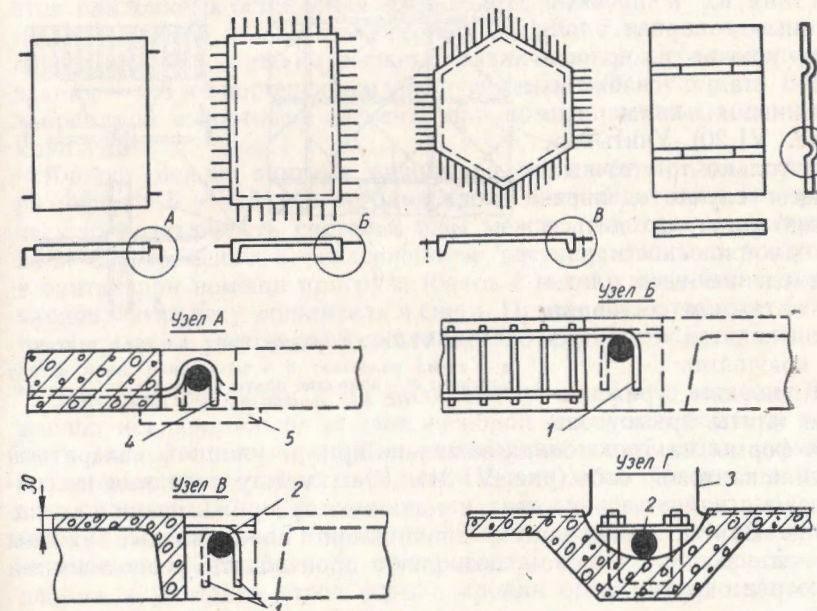


Рис. VI.19. Ограждающие плиты и детали опирания их: 1 — выпуски арматуры; 2 — вант; 3 — арматурная сетка; 4 — крюк; 5 — опалубочная доска.

верхности, а образованные ячейки представляют собой в общем случае параллелограммы. Разница в углах четырехугольника мало влияет на конструктивные решения, но имеет существенное значение при назначении швов, допусков на изготовление и монтаж.

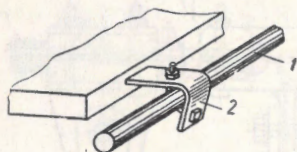


Рис. VI.20. Опирающие лапки с клеммами при помощи лапок с клеммами:

1 — вант; 2 — лапка с клеммой.

к несущим вантам снизу при помощи специальных выпусков. При этом ванты располагают в желобах и после монтажа бетонируют. Консольные участки стыкуют замоноличиванием выпусков арматурных сеток.

В некоторых случаях для предупреждения сползания плит и обеспечения плотного прилегания их к проектируемым опорным точкам крючья из полосовой стали снабжены стяжными клеммами (рис. VI.20). Учитывая, что только три точки в общем случае одновременно могут находиться на одной плоскости, распределение веса плиты в монтажном состоянии производится между тремя крючьями.

Крепление ограждающей плиты прямоугольной формы на трех точках возможно при регулярной квадратной ячейке вантовой сети (рис. VI.21). Швы между панелями не совпадают с направлением вант и заполняются прижимными накладками. Ванты, находящиеся значительно ниже плиты, удобны в эксплуатации, так как позволяют производить периодический осмотр и окраску.

Во всех случаях применения панелей и плит без обеспечения совместной работы их с вантовой сетью возникают трудности устройства достаточно надежных герметичных стыков, кровель.

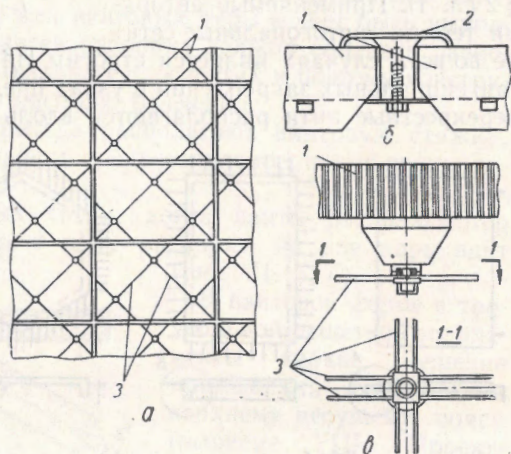


Рис. VI.21. Опирающие плиты на трех точках: а — схема разрезки; б — заполнение швов между плитами; в — опирание плиты на узел вант; 1 — плиты; 2 — нащельник; 3 — ванты.

ПРИМЕРЫ ВАНТОВЫХ ПОКРЫТИЙ ИЗ ПРАКТИКИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И СТРОИТЕЛЬСТВА

§ 1. Покрытия прямолинейного очертания в плане

В 1965 г. в Красноярске закончено строительство гаража на 176 автомобилей [28].

Пролет здания, равный 78 м, перекрыт при помощи 58 параллельных вант, выполненных из арматурной стали класса А-IIIВ (25Г2С), упрочненной вытяжкой с контролем деформаций и напряжений. Ванты с шагом 1,5 м подвешены к бортовым элементам — наклонным железобетонным балкам двутаврового сечения высотой 2,2 м, опирающимся через 12 м по длине здания на треугольные рамы (сжатые стойки сечением $0,7 \times 0,7$ м и наклонные предварительно напряженные железобетонные оттяжки двутаврового сечения $1,0 \times 0,7$ м). Треугольные рамы служат также для крепления импостов наклонного остекления продольных стен.

Для удобства отвода атмосферных осадков с кровли здания общей длиной 84 м ванты подвешены с различным провесом: в середине здания — 6,8 м с постепенным увеличением до 9,85 м у торцов. Ванты закрепляли в бортовом элементе при помощи нарезных концевых креплений.

Ячейки между вантами заполняли железобетонными плитами размером $1,5 \times 1,5$ м с ребрами вдоль вант. Учитывая кинематическую податливость системы, швы между панелями замоноличивали одновременно с поддержанием растягивающих напряжений в вантах при помощи пригруза (баков с водой), величина которого эквивалентна весу утеплителя и снега. Приведенная толщина бетона на покрытие с учетом опор составила $25,3 \text{ см/м}^2$, а расход стали — $38,6 \text{ кг/м}^2$.

Вантовые покрытия с прямолинейным контуром воспринимают распор исключительно за счет изгибной жесткости борта и являются малоэкономичными. Для уменьшения изгибающих моментов в бортовых элементах их связывают между собой при помощи жестких распорок [57]. Примером такого решения может служить покрытие зала выставок и ярмарок в Варшаве. Покрытие в плане имеет размеры 30×36 м. За счет разности провесов в средней части здания и у торцов отвод воды с кровли организован аналогично покрытию в Красноярске.

Основные ванты из арматурных стержней диаметром 18 мм расположены с шагом $30 \div 45 \text{ см}$ и прикреплены к бортовым балкам

при помощи забетонированных петлевых выпусков. Петли вант и петлевидные выпуски бортового элемента соединяют поперечными стержнями диаметром 18 мм. В продольном направлении от распорки до торцов уложены стержни диаметром 8 мм. Образованная

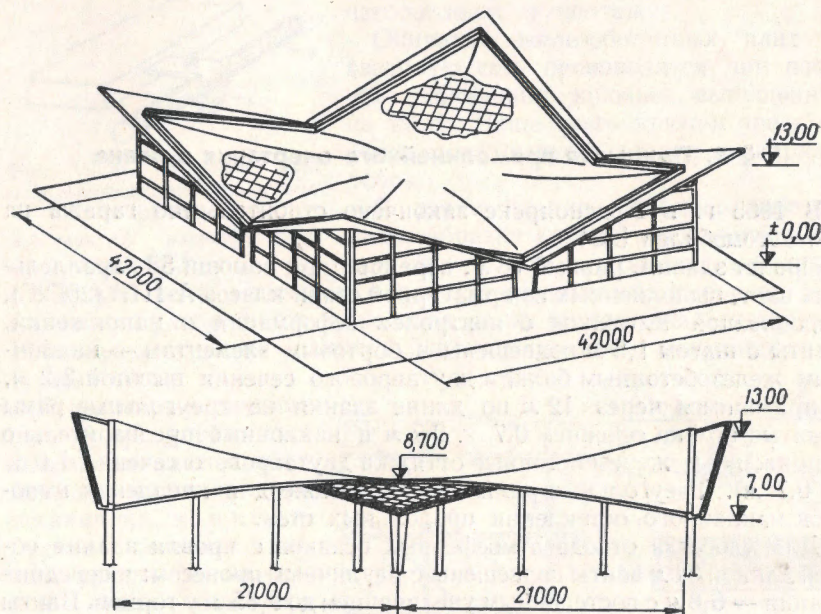


Рис. VII.1. Покрытие крытого рынка в Киеве.

таким образом вантовая сетка замоноличена бетоном (слой толщиной 5 см).

Большое количество вантовых покрытий осуществлено с применением напряженных ферм самых разнообразных схем.

В настоящее время по проекту КиевЗНИИЭП* ведется строительство крытого рынка размером в плане 42×42 м (рис. VII.1).

Поверхность покрытия состоит из четырех «искаженных» гиперболических параболоидов на квадратном плане. Пониженные точки опорного контура располагаются по серединам сторон квадрата, повышенные — по углам квадрата.

Вантовая ортогональная сеть с ячейкой $1,1 \times 1,1$ м, имеющая направления соответственно параллельные диагоналям квадрата, подвергнута предварительному натяжению с передачей усилий на пространственный прямолинейный замкнутый симметричный контур, работающий на сжатие с изгибом.

* Авторы проекта архитекторы Г. И. Ратушинский, К. П. Фельдман, инж. Б. А. Беднарский, канд. техн. наук Л. Г. Дмитриев.

Бортовой элемент представляет собой ребристую панель переменного сечения, увеличивающегося к углам здания в соответствии с эпюрой изгибающих моментов. Жесткое соединение колонн с бортовым элементом обеспечивает совместную их работу на изгиб.

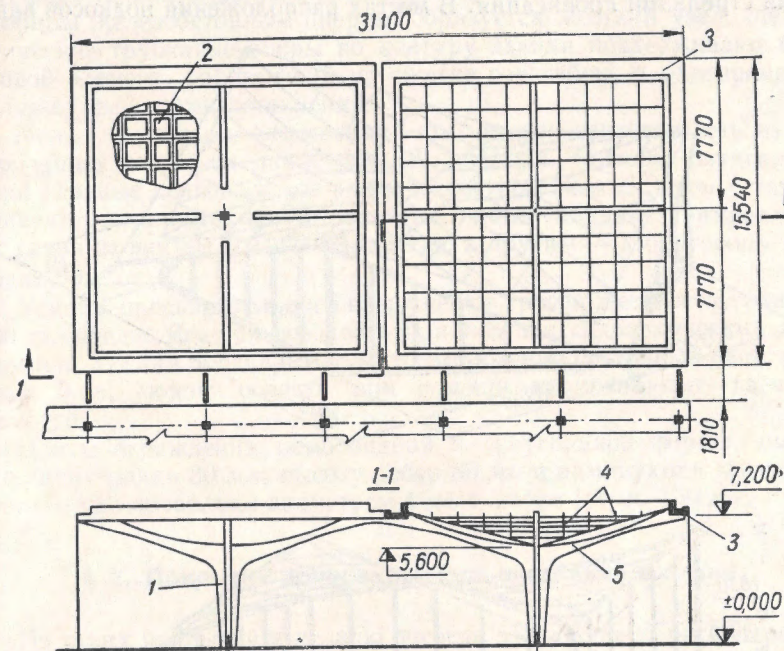


Рис. VII.2. Покрытие выставочного зала торговой палаты в Киеве:
1 — центральная опора; 2 — сборные железобетонные плиты; 3 — бортовой элемент; 4 — ванты; 5 — подкос.

Ванты запроектированы из стержневой арматуры класса А-III ($\varnothing 16 \div 40$) и А-I ($\varnothing 16$). Последние приняты для напрягающих вант. Концы всех вант имеют нарезные хвостовики и закрепляются на бортовом элементе гайками. Усилия предварительного натяжения обычных вант и тросов жесткости составляют соответственно 3 и 15 т.

Панели оболочки представляют собой ребристые плиты размером 1×1 м, толщиной 3 см и высотой ребер 15 см. Приведенная толщина бетона составляет 6 см, а расход стали — 15 кг/м^2 (без учета бортовых элементов).

Покрытие над выставочным залом Украинского отделения Всесоюзной торговой палаты в Киеве запроектировано КиевЗНИИЭП в виде двух сочлененных висячих оболочек с размерами в плане каждой $15,54 \times 15,54$ м (рис. VII.2). Плоский опорный контур каждой оболочки представляет собой замкнутую раму Г-образного

сечения, опирающуюся на четыре наклонных подкоса. Наклонные подкосы, сходящиеся в центре, образуют основные несущие опоры. Несущие свободно провисшие ванты направлены параллельно сторонам бортового элемента и образуют ортогональную сетку с различными стрелками провисания. В местах расположения подкосов ван-

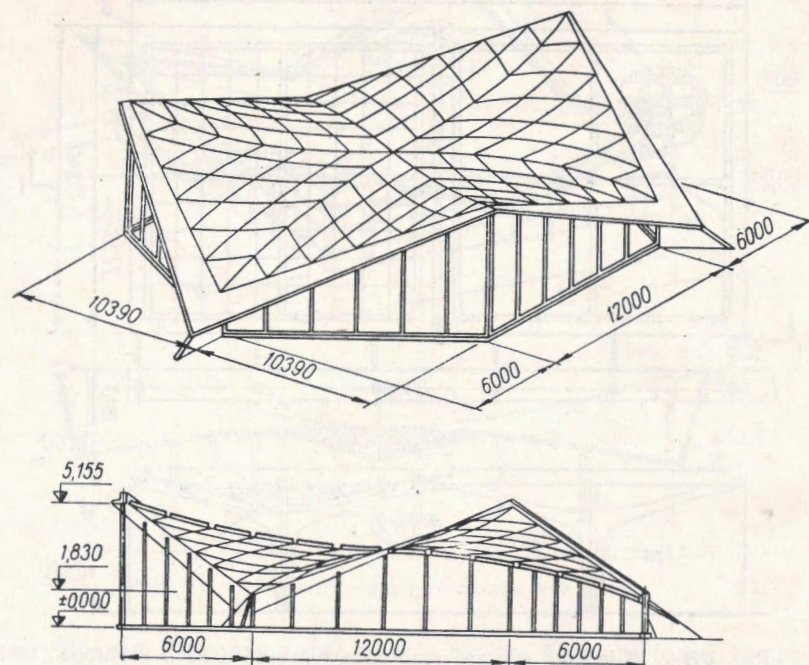


Рис. VII.3. Покрытие над рестораном в Киеве.

ты, запроектированные из арматурной стали класса А-III, с хвостовиками с нарезкой на концах, пропускают в предусмотренные отверстия и крепят на бортовом элементе при помощи гаек.

Ячейки между вантами заполняют сборными железобетонными плитами одного типоразмера с толщиной полки 30 мм и высотой контурного ребра 120 мм.

Учитывая незначительные растягивающие напряжения в оболочке от временной нагрузки, предварительное напряжение не производится, однако при монтаже и замоноличивании швов предусматривают меры для ограничения кинематической податливости сети. Покрытие выставочного зала в настоящее время находится в стадии строительства.

Более сложное вантовое покрытие с прямолинейным очертанием в плане представлено на рис. VII.3 и запроектировано КиевЗНИИЭП над рестораном на 200 мест в Киеве.

Контур его, шестиугольный в плане, изломан в пространстве и имеет три приподнятые и три опущенные узловые точки. В верхних точках бортовые сборные железобетонные элементы соединяются шарнирно, что обеспечивает удобство при монтаже. В трех опущенных точках соединения элементов (в местах примыкания к распорным железобетонным опорам) образуется жесткий узел. Металлические трубчатые опоры по контуру здания поддерживают бортовой элемент, работающий на сжатие с изгибом, и одновременно служат импостами остекления.

Между бортовыми элементами натягивается вантовая сеть из арматурных стержней диаметром 16 ÷ 20 мм. Сначала натягивают три главные диагональные ванты диаметром 32 мм. Затем устанавливают остальные ванты, которые одним концом прикрепляют к главным вантам (тросу жесткости), а другим — к бортовому элементу.

Усилия предварительного напряжения тросов жесткости, равные 30 т, предполагается создавать при помощи гидравлических домкратов. Усилия предварительного напряжения остальных вант, равные 5 т, можно создать при помощи тарированных гаечных ключей.

Плиты ограждения ромбовидной и треугольной формы, имеют толщину полки 30 мм, высоту ребер 80 мм и армируются плоскими сетками из проволоки диаметром 4 мм с шагом 100 × 100 мм.

§ 2. Покрытия криволинейного очертания в плане

Из таких покрытий в первую очередь заслуживают рассмотрения круглые в плане с радиальной системой вант.

Ленинградским Промстройпроектом совместно с НИИЖБ Госстроя СССР запроектировано два круглых в плане покрытия над шламбассейнами для цементных заводов [28, 29].

Одно покрытие диаметром 40 м представляет собой радиальную систему вант со стойкой в центре.

Несущие ванты диаметром 32 мм в количестве 40 шт. из арматурной стали класса А-III, упрочненной вытяжкой до 5500 кг/см², закреплены к центральному металлическому кольцу диаметром 1,3 м, находящемуся на стойке, и наружному железобетонному контуру сечением 1000 × 250 мм.

Для уменьшения деформативности покрытия швы между ограждающими армоцементными плитами замоноличиваются под временным пригрузом.

В покрытии почти вся вертикальная нагрузка передается на центральную опору, что обеспечивается соответствующей кривой провисания вант (гл. I). Кроме того, в целях обеспечения свободы деформации при односторонних нагрузках, центральная стойка выполнена качающейся и, таким образом, работает только на сжатие.

По данным Ленинградского ПСП приведенная толщина бетона составляет $7,1 \text{ см/м}^2$ и расход стали — $13,9 \text{ кг/м}^2$.

Одним из недостатков покрытия следует считать сравнительно большое количество типоразмеров трапециевидных ограждающих плит.

Наиболее простым по конструкции двухслойным радиальным вантовым покрытием следует считать покрытие павильона США на Всемирной выставке в Брюсселе [52].

На 72 стальных трубчатых колоннах диаметром 318 мм, расположенных в плане по двум concentрическим окружностям диаметрами соответственно 92 и 104 м, находится наружное кольцо в виде решетчатой фермы шириной 6 м, выполненной из прокатных двутавров.

В центре павильона располагается решетчатый барабан диаметром 20 м и высотой 3,5 м, состоящий из двух колец, распертых вертикальными стойками. Стойки выполнены из двутавровых балок и раскреплены уголками, образующими ромбическую шпренгельную решетку.

В радиальном направлении от наружного контура к внутреннему барабану располагают 72 верхних и 36 нижних троса диаметром соответственно 32 и 54 мм. Таким образом, в каждом секторе с центральным углом в 10° находятся один нижний и два верхних троса. По верхним вантам дополнительно укладываются кольцевые ванты с шагом 3 м.

Покрытие рассчитано на собственный вес, снег, в виде равномерно распределенной нагрузки интенсивностью 35 кг/м^2 , и ветровую нагрузку с активным давлением $41 \div 63 \text{ кг/м}^2$ и отсосом $82 \div 126 \text{ кг/м}^2$. При этом распределенная нагрузка воспринимается только верхними тросами.

В связи с отсутствием промежуточных связей между верхним и нижним тросами в пределах от внутреннего до наружного контура, покрытие павильона обладает повышенной деформативностью, несмотря на то, что тросы в процессе строительства подвергнуты предварительному напряжению. В этом отношении более целесообразно вантовое радиальное покрытие муниципального зала в Нью-Йорке и аудитории в Утика (США).

Покрытие аудитории в Утика представляет собой наружный железобетонный опорный контур, диаметром 73,15 м, на который натянуты в двух уровнях радиальные тросы (нижние — $\varnothing 51 \text{ мм}$, верхние — $\varnothing 41 \text{ мм}$). В центре здания ванты крепятся также к внутреннему барабану (высота 5,5 м) диаметром 7 м, состоящему из двух растянутых колец и стоек.

Пояса, расположенные в одной вертикальной плоскости, соединены не только в центре, но и по длине при помощи сжатых распорок трубчатого сечения. Такое решение двухпоясных радиальных покрытий более оправдано и впоследствии повторено во многих объектах.

Преимуществами в статическом и конструктивном отношениях

обладают вантовые покрытия шестиугольной структуры (см. гл. I). В КиевЗНИИЭП на основании предложенной авторами структуры сети запроектировано покрытие крытого рынка в Черкассах *, находящегося в стадии строительства (рис. VII.4). Здание крытого рынка имеет круглый план диаметром 50,8 м, с наружным опорным контуром, располагаемым на отметке 9,65 м от уровня пола. В центре сооружения находится опора с внутренним кольцом на отметке 4,57 м. В конструктивном отношении центральная опора представляет собой решетчатую пространственную конструкцию из стальных труб, стойки которой используют для внутреннего водоотвода.

Между внутренними и наружными контурами, расположенными на разных уровнях, натягивается сеть шестиугольной структуры (см. гл. I).

Наружный контур собирается из сборных железобетонных криволинейных элементов сечением $800 \times 350 \text{ мм}$ и опирается на сплошную стену из бетонных блоков.

Вантовая сеть имеет шестиугольную ячейку с размером одной стороны примерно 1,5 м. Ванты сечением $\varnothing 32 \text{ мм}$ приняты из арматурных стержней класса А-III и собираются в сеть при помощи болтовых соединений (см. рис. VI.12, ж). Примыкание вант к наружному контуру решено при помощи нарезных хвостовиков с гайками.

Ограждающие плиты толщиной 30 мм с высотой контурных ребер 200 мм армируются сварными сетками и каркасами.

Собранную провисшую вантовую сеть предварительно натягивают путем притягивания последней к центральной опоре. После предварительного напряжения поверхность сети принимает отрицательную кривизну, а образующая поверхности вращения имеет форму кривой типа экспоненты.

Положительным является тот факт, что предварительным натяжением можно существенно изменять в количественном отношении

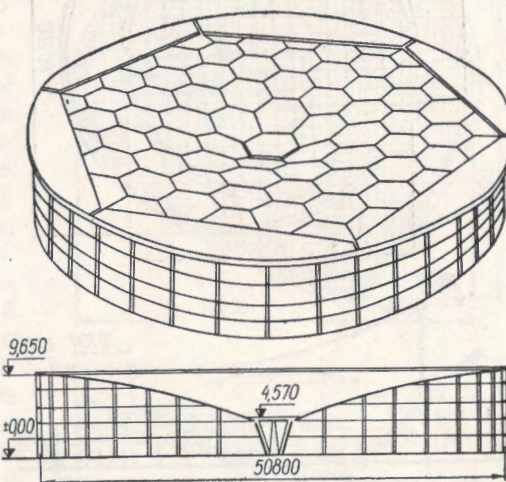


Рис. VII.4. Покрытие крытого рынка в Черкассах.

* Авторы проекта канд. архит. Н. Б. Чмутина, архит. А. М. Анищенко, кандидаты техн. наук Л. Г. Дмитриев, Г. Б. Гильман.

геометрию поверхности, так как нетрудно найти вполне определенные отношения между величиной силы предварительного натяжения в виде сосредоточенной нагрузки, прикладываемой в центре сети, и заданной величины нагрузки в виде сосредоточенных узловых сил по всей сети.

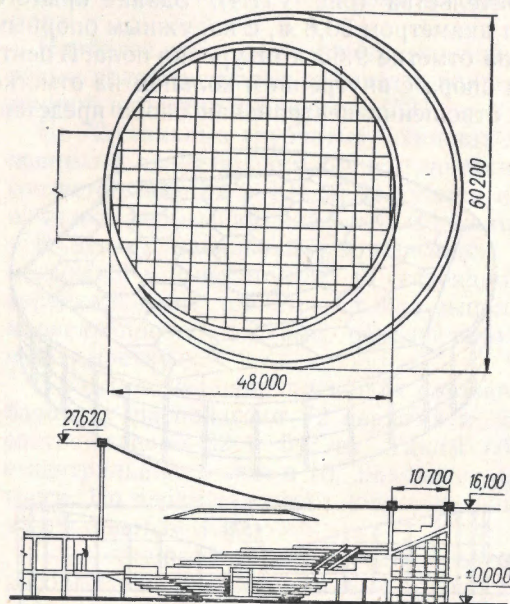


Рис. VII.5. Покрытие цирка в Новосибирске.

сплошную кирпичную стену, находящуюся выше верхнего яруса несущих рам.

Поверхность вантовой сети, представляющая собой гиперболический параболоид, предопределила соответствующее очертание опорного контура. Кроме этого, предусмотрен перепад высот симметричных точек бортового элемента по продольной оси здания примерно на 11 мм, что вызвано особенностью технологии цирковых зданий и размещением главной арены. Несущие ванты приняты из спаренных тросов диаметром 59 мм и расположены параллельно продольной оси здания с шагом 3 м. Перпендикулярно им с шагом 3 м располагают натягающие спаренные тросы диаметром 55 мм.

В качестве ограждающих плит приняты сборные железобетонные панели с последующим омоноличиванием швов между ними и превращением конструкции в железобетонную оболочку. Стати-

* Авторы проекта — архитекторы Г. В. Наприенко, С. М. Гельфер, инж. В. Г. Корнилов.

ческий расчет покрытия выполнялся в КиевЗНИИЭП. Испытания модели (1/15 натуральной величины), проведенные в ЛенЗНИИЭП, показали незначительные отклонения от усилий и перемещений, полученных теоретически.

Схема вантового покрытия в виде ортогональной сети, натянутой на опорный контур в виде двух наклонных к горизонту арок, впервые воплощенная в здании Ралей-арены, стала уже классической и применена с теми или иными отличиями во многих объектах. Такая схема легла в основу покрытия киноконцертного зала, построенного в Харькове*. Поверхность оболочки представляет собой часть гиперболического параболоида, ограниченного двумя параболическими арками, наклоненными к горизонту под углом соответственно 12 и 45°. Габаритные размеры плана зала составляют 45 × 48 м (рис. VII.6).

Опорный контур (монолитные железобетонные арки сечением 2000 × 500 мм) к фундаментам-устоям примыкают шарнирно и по периметру здания опираются шарнирно на сборные железобетонные стойки. Перпендикулярно основанию арок подвешивают несущие ванты, выполненные из пучков параллельных проволок (10 × 5). Натягающие ванты приняты из спаренных тросов диаметром 9 мм и образуют ортогональную сеть с размерами ячеек примерно 1 × 1 м.

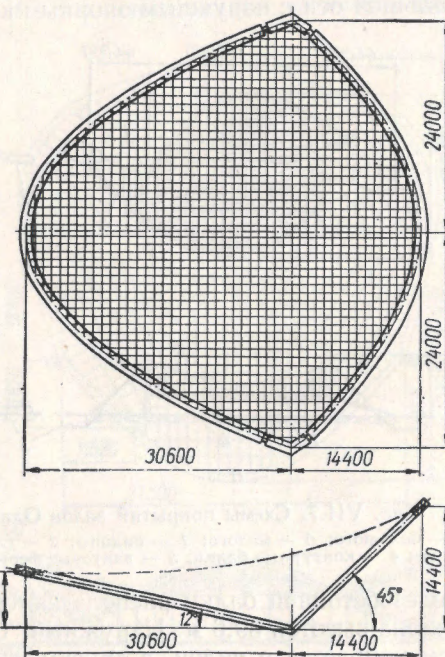


Рис. VII.6. Схема покрытия киноконцертного зала в Харькове.

§ 3. Покрытия комбинированного очертания в плане

К Олимпийским играм 1964 г. в Токио построено два спортивных сооружения с вантовыми покрытиями. Этот спортивный комплекс, известный под названием Ийюги, состоит из отдельно стоящих большого и малого залов [59].

* Авторы архит. В. С. Васильев, Ю. А. Плаксиев, В. А. Реусов, инж. Л. Б. Фридган.

Большой зал (рис. VII.7) в плане имеет форму овала с размерами по осям 126 и 114 м. Улиткообразные входы (длина 44 м) располагаются с противоположных сторон большой оси. На пересечении большой оси с наружным опорным контуром в виде криволинейной

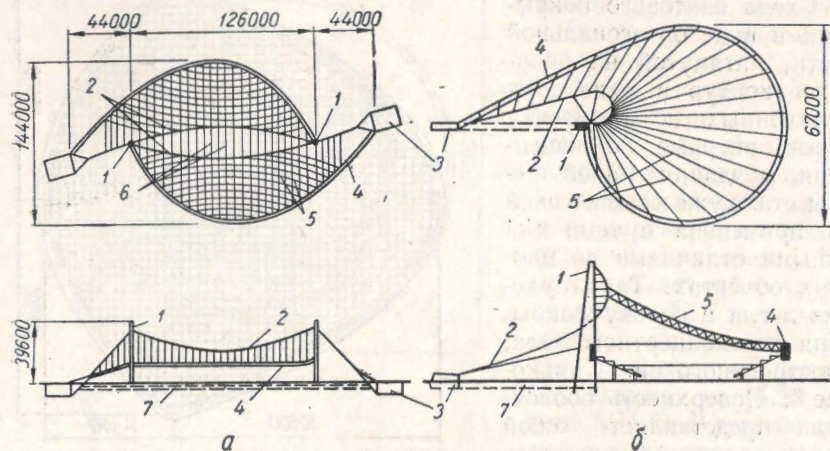


Рис. VII.7. Схемы покрытий залов Олимпийского комплекса в Токио:
а — большого; б — малого; 1 — пилоны; 2 — главные ванты; 3 — анкерные фундаменты; 4 — контурные балки; 5 — вантовые фермы; 6 — связи; 7 — распорные балки.

железобетонной балки располагаются два прямоугольных в плане пилон высотой 39,6 м. Наружный бортовой элемент одним концом упирается в пилон, а другим пониженным концом — в анкерный блок. Крайние анкерные блоки связаны двумя железобетонными балками, находящимися ниже отметки пола.

Между пилонами и анкерными блоками подвешены два главных ванта, состоящие из 31 высокопрочного стального каната, диаметром 51 мм. Между пилонами ванты вместе со связями, состоящими из шести стальных канатов, диаметром 35 мм создают горизонтальную вантовую безраскосную ферму высотой в середине пролета 15,2 м, используемую для организации светового фонаря и подвески сантехнических устройств.

Перпендикулярно главной оси здания с шагом 4,5 м располагаются поперечные вантовые фермы, выполненные из угловой стали. Один конец ферм закрепляется на главных вантах, а другой — на железобетонном наружном контуре. Возникающий распор от ферм воспринимается верхней фермой и конструкцией трибун. В качестве ограждающих конструкций покрытия приняты стальные листы толщиной 5 мм, соединенные сваркой. В качестве утеплителя применена минеральная вата с подшивкой снизу алюминиевыми листами.

Малый зал в плане имеет форму круга диаметром 67 м с одним улиткообразным выходом. Наружный опорный контур, являющийся конструкцией трибун, представляет собой железобетонную бал-

ку, имеющую в плане форму незамкнутого кольца, один конец которой плавно опускается к анкерному блоку. Внутренний опорный контур выполнен в виде ванта, состоящего из семи высокопрочных канатов диаметром 45 мм, спускающегося от вершины пилон по спиральной линии к анкерному блоку. Анкерный блок и пилон ниже уровня пола связаны железобетонной балкой, воспринимающей все горизонтальные усилия.

Вантовые фермы между бортовой балкой и главным вантом располагаются по радиально расходящимся линиям, обеспечивая хороший водоотвод с покрытия.

Покрытие с тремя арками положено в основу покрытия бассейна, запроектированного в КиевЗНИИЭП. При этом использованы общие методы образования ортогональных вантовых сетей, предложенные авторами и рассмотренные в § 3 гл. I.

Поверхность покрытия пролетом 67, 99 м имеет плавное очертание в плане и состоит из шести гиперболических параболоидов с ортогональной сеткой вант в пределах каждого из них (рис. VII.8). Опорный контур (железобетонные элементы лоткообразного сечения) состоит из участков с кривизной в одной из плоскостей — вертикальной или горизонтальной.

Бортовые элементы опираются на сборные железобетонные колонны, расположенные по периметру здания с шагом 4 м, уменьшающимся до 3 м в пониженных участках покрытия.

По трем осям симметрии у пяти аркообразных элементов располагаются монолитные железобетонные фундаменты-контрфорсы, воспринимающие часть горизонтальных и вертикальных составляющих усилий в бортах.

В качестве несущих и натягающих вант предполагается использовать арматурную сталь класса А-III. Учитывая относительно большой пролет, перекрываемый предлагаемой системой вантов, большинство последних выполнено из сдвоенных стержней. Это об-

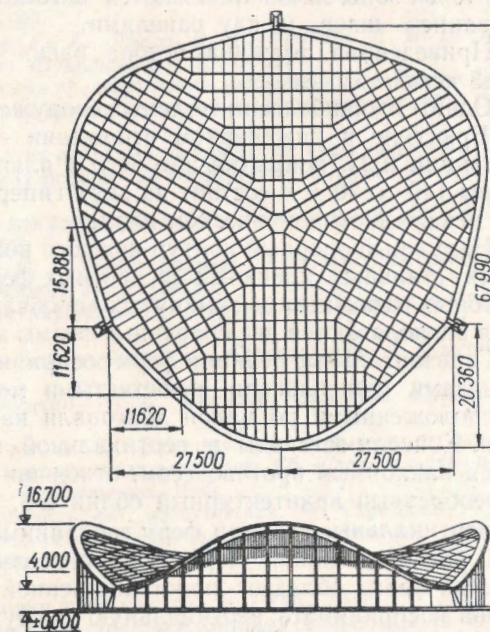


Рис. VII.8. Схема покрытия бассейна в Аркадии (Одесса).

стоятельство во многом предопределило конструктивные решения узлов.

Заполнение ячеек между вантами предусмотрено сборными железобетонными панелями: ромбовидной и прямоугольной форм. Прибортовые зоны замоноличиваются бетоном одновременно с бетонированием швов между панелями.

Приведенная толщина бетона равна 7,4 см, расход стали — 20,3 кг/м².

Одним из наиболее интересных сооружений Всемирной выставки в Брюсселе в инженерном отношении следует считать павильон Франции [62], покрытие которого в плане имеет габаритные размеры 140 × 70 м и состоит из двух гиперболических параболоидов на искаженном ромбическом плане.

Наружный опорный контур каждого ромба состоит из трех плоских стальных клепаных сегментных ферм пролетом 70 м, пояса которых выполнены из замкнутых коробчатых профилей. По оси здания располагаются две спаренные фермы аналогичной конструкции.

Горизонтальные реакции ферм воспринимаются специальными эстакадами (консольными решетчатыми мостами пролетом 91,5 м), расположенными по малой диагонали каждого ромба внутри здания. Консоли-эстакады в вертикальной плоскости уравниваются наклонным противовесом, отходящим от здания и создающим своеобразный архитектурный облик его.

Вертикальные реакции ферм воспринимаются трубчатыми стойками, расположенными через 3 м по контуру здания. Средняя спаренная ферма обладает пространственной жесткостью и сама способна воспринимать вертикальную нагрузку с передачей реакций на специально предусмотренную стойку и основную опору.

Параллельно большой диагонали длиной 106 м с шагом 1,5 м располагаются несущие ванты из параллельных пучков 8 ∅ 7 мм. Параллельно малой диагонали длиной 91,5 м с таким же шагом натянуты напрягающие ванты из пучков 6 ∅ 7 мм предел прочности проволок 150 кг/м². Усилие предварительного напряжения 6—7 т создается при помощи специальных натяжных фаркопов.

Поверх вантовой сети укладывается сетка, используемая в процессе строительства в виде монтажных лесов, стекловолок и металлические листы, покрытые пластиком. Расход стали на покрытие составляет 6 кг/м².

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. Гостехтеориздат, М., 1958.
2. Беленя Е. И. Предварительно напряженные металлические несущие конструкции. Госстройиздат, М., 1963.
3. Васильев В. С., Плаксий Ю. А., Реусов В. А., Фридган Л. Б. Висячее седлообразное покрытие. Изд-во «Будівельник», К., 1965.
4. Гликин И. Д. Расчет пологих предварительно напряженных вантовых ферм по предельному состоянию. «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 5.
5. Гордеев В. Н. Расчет висячих покрытий на некоторые виды нагрузок. «Теория пластин и оболочек». Труды II Всесоюзной конференции. К., изд-во АН УССР, 1962.
6. Гордеев В. М. Рівняння для розрахунку тканинних оболонок. «Прикладна механіка». Вип. 6, т. VIII, 1962.
7. Дмитриев Л. Г. и Сосис П. М. Программирование расчета пространственных конструкций. К., Госстройиздат УССР, 1963.
8. Дмитриев Л. Г. До розрахунку вантових покриттів. «Вісник АБ і А УРСР», 1961, № 2.
9. Дмитриев Л. Г. Расчет висячих покрытий. «Строительство и архитектура», 1963, № 2.
10. Дмитриев Л. Г., Городецкий А. С. Висячие покрытия. «Строительство и архитектура», 1962, № 7.
11. Дмитриев Л. Г., Касилов А. В. Вантовые сети большепролетных покрытий на опорном контуре из аркообразных элементов. Сб. «Строительство и архитектура». Вып. 2. К., изд-во «Будівельник», 1965.
12. Дривинс А. Я. Устойчивость мачт на оттяжках. М., Стройиздат, 1964.
13. Загорянский Л. А. Практический способ расчета ортогональных предварительно напряженных вантовых сеток. Сб. «Висячие покрытия». М., Госстройиздат, 1962.
14. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. М., ОГИС, 1947.
15. Касилов А. В. О поверхности и структуре вантовых сетей покрытий. «Строительство и архитектура», 1965, № 3.
16. Касилов А. В. Признаки классификации висячих покрытий. «Промышленное строительство и инженерные сооружения», 1965, № 4.
17. Касилов А. В., Дмитриев Л. Г. Узлы вантовых покрытий. «Строительство и архитектура», 1964, № 11.
18. Караджи К. М. Расчет тросовых сетчатых покрытий по предельному состоянию. «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 4.
19. Качурин В. К. Гибкие нити с малыми стрелками. М., Гостехтеориздат, 1956.
20. Качурин В. К. Теория висячих систем. Л.—М., Госстройиздат, 1962.
21. Качурин В. К. О подборе сечений гибкой нити. «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 2.
22. Кирсанов Н. М. Вопросы проектирования висячих покрытий. Сб. «Висячие покрытия». М., Госстройиздат, 1962.
23. Кислюцкий В. Н., Синяевский А. Л. Нелинейные колебания пологих ортогональных вантовых сетей. Сб. «Сопротивление материалов и теория сооружений». Вып. 1. К., изд-во «Будівельник», 1965.
24. Кузнецов Э. Н. Радиальные вантовые системы. М., Госстройиздат, 1963.
25. Кузнецов Э. Н. Некоторые вопросы расчета висячих покрытий. Сб. «Висячие покрытия», М., Госстройиздат, 1962.
26. Кузнецов Э. Н. Мгновенно-жесткие вантовые сетки. Сб. «Исследования по теории сооружений», Вып. 13, М., Стройиздат, 1964.
27. Лилеев Л. Ф., Селезнева Е. Н. Методы расчета пространственных вантовых систем. М., Госстройиздат, 1965.
28. Липницкий М. А. О применении висячих конструкций в промышленном строительстве. «Промышленное строительство», 1962 № 5.

ОГЛАВЛЕНИЕ

29. Людковский И. Г. Характеристика вантовых систем и висячих оболочек и некоторые рекомендации по их проектированию. Труды НИИЖБ. Вып. 2. М., Госстройиздат, 1962.
30. Маркус Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных покрытий (перевод с немецкого) ДНТВУ, 1936.
31. Мацелинский Р. Н. Статический расчет гибких висячих конструкций. М., Госстройиздат, 1950.
32. Мацелинский Р. Н. Статический расчет упругой нити. «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 4.
33. Москалев Н. С. Расчет двухпропятных вантовых ферм. Сб. ЦНИИСК «Стальные предварительно напряженные и тросовые конструкции». М., Стройиздат, 1964.
34. Попов Н. Н., Расторгуев Б. С. Динамический расчет висячих конструкций. М., Стройиздат, 1966.
35. Пшеничных Г. И. К расчету висячих покрытий, круглых в плане. «Инженерный журнал», вып. 3, т. 2, 1963.
36. Рабинович И. М. Основы строительной механики стержневых систем. М., Госстройиздат, 1960.
37. Рабинович И. М. Мгновенно-жесткие системы, их свойства и основы расчета. Сб. «Висячие покрытия», М., Госстройиздат, 1962.
38. Райнус Г. Э. Принципы расчета висячих покрытий с несущей конструкцией из гибких нитей. Сб. «Висячие покрытия», М., Госстройиздат, 1962.
39. Райнус Г. Э. К расчету висячих покрытий с пространственной предварительно напряженной сеткой из тросов. Сб. «Армоцементные конструкции в строительстве», Л.—М., Госстройиздат, 1962.
40. Ржаницын А. Р. Статика и динамика пологой упругой нити. Сб. «Висячие покрытия», М., Госстройиздат, 1962.
41. Самойлов Б. Н., Битюцкий А. И. Расчет висячих и вантовых покрытий. Учебное пособие. Куйбышевский инж.-стр. институт, 1963.
42. Сеницын А. П. Расчет сеток. «Вестник ВИА», 1936.
43. Сеницын А. П. Динамика гибких покрытий с большими прогибами. Сб. «Висячие покрытия». Госстройиздат, М., 1962.
44. Скуратовский М. Н. Некоторые вопросы статического расчета висячих покрытий. «Строительная механика и расчет сооружений», № 6, 1965.
45. Сobotka З. Висячие покрытия (перевод с чешского). М., Стройиздат, 1964.
46. Сосис П. М. Алгол-60 и применение его в строительной механике. К., изд-во «Будівельник», 1965.
47. Стрелецкий Н. С. Металлические конструкции. М., Госстройиздат, 1961.
48. Фрей О. Висячие покрытия (перевод с немецкого). М., Госстройиздат, 1960.
49. Харитонова Е. П. Экспериментальные исследования висячих предварительно напряженных оболочек кругового очертания в плане. Сб. «Висячие покрытия», М., Госстройиздат, 1962.
50. Щедров В. С. Основы механики гибкой нити, М., Машгиз, 1961.
51. Bandel H. K. Das ortogonale Seilnetz Hyperbolischprabilischer Form... «Bauingenieur», 1959, № 10.
52. Corneliuss W. Die statische Berechnung eines seilverspannten Dachen... «Der Stahlbau», 1958, № 4.
53. Rivlin R. S. Plane strain of a net formed by inextensible cords. «Journal of rational mechanics and analysis», 1955, № 6.
54. Shleir F. K. Die Berechnung von Seilwerken. 1962.
55. Eras und Elze. Berechnungsverfahren für vorgespannte, doppelt, gekrummte Seilnetzwerke. «Bauplanung. Bautechnik», 1961, № 7.
56. D. Jawerth. Ginige Bauten min vorgespannten Hangekonstruktion aus gegensinning gekruemmtten Seilen. 1962.
57. «Inzynieria i budownictwo», 1962, № 7.
58. «Inzenyrske stavby», 1963, № 2.
59. «Engineering News-Record», 1963, v. 171, № 4.
60. «Engineering News-Record», 1963, v. 170, № 1.
61. «Architectural Forum», 1957, № 1.
62. «Deutsche Architektur», 1962, № 7.

Предисловие	3
Глава I. Общие сведения о вантовых покрытиях	
§ 1. Основные понятия и определения	5
§ 2. Типы вантовых покрытий. Их свойства и особенности	9
§ 3. Развитие конструктивных форм вантовых покрытий, очерченных по поверхности гиперболических параболоидов	25
§ 4. Обеспечение предварительного натяжения вантовых покрытий	30
Глава II. Основные зависимости напряженно-деформированного состояния вантовых покрытий	
§ 1. Понятия о нелинейно-деформируемых и мгновенно-жестких системах	34
§ 2. Пологие гибкие нити	38
§ 3. Радиальные системы	48
§ 4. Перекрестные сети из двух семейств нитей	51
§ 5. Вантовые сети произвольной структуры	54
§ 6. Вантовые фермы	60
Глава III. Расчет вантовых покрытий	
§ 1. Общие положения	64
§ 2. Вантовые системы с одним нелинейным параметром	66
§ 3. Вантовые системы с двумя нелинейными параметрами	75
§ 4. Вантовые системы со многими нелинейными параметрами	81
§ 5. Расчет бортового элемента и учет его податливости	95
§ 6. Некоторые вопросы расчета оптимальных вантовых покрытий	97
Глава IV. Программирование расчета вантовых покрытий	
§ 1. Основные положения программирования	100
§ 2. Программа расчета вантовых сетей произвольной структуры	101
§ 3. Программа расчета вантовых ферм покрытий	106
Глава V. Динамика вантовых покрытий	
§ 1. Особенности динамического расчета вантовых покрытий	110
§ 2. Колебания линейно-деформируемых вантовых систем	111
§ 3. Колебания нелинейно-деформируемых вантовых систем	120
Глава VI. Вопросы конструирования вантовых покрытий	
§ 1. Материалы, применяемые для вантовых покрытий	131
§ 2. Концевые крепления вант	134
§ 3. Узлы примыкания вант к бортовым элементам	142
§ 4. Узлы пересечения вант в пролете и ограждающие конструкции	149
Глава VII. Примеры вантовых покрытий из практики проектирования и строительства	
§ 1. Покрытия прямолинейного очертания в плане	157
§ 2. Покрытия криволинейного очертания в плане	161
§ 3. Покрытия комбинированного очертания в плане	165
Литература	169

Леонид Георгиевич Дмитриев,
Александр Васильевич Касилов

ВАНТОВЫЕ ПОКРЫТИЯ

Редактор *В. А. Кочан*
Рецензент д-р техн. наук проф. *Я. Д. Лившиц*
Обложка художника *А. О. Шоломца*
Художественный редактор *В. В. Красий*
Технический редактор *Л. А. Серафин*
Корректор *Л. П. Смирнова*

БФ 38917 Сдано в набор 24/IV—1967 г. Подписано к печати 27/XI—
1967 г. Бумага типографская № 60×90¹/₁₆—5,375 бумажных, 10,75 физ.
10,75 усл. печатных 10,26 уч.-изд. л. Тираж 6000. Цена 89 коп.
№ Зак. 27.

Издательство «Будівельник», Киев, Владимирская, 24.

Отпечатано с матриц ф-ки набора в Киевской типографии № 6,
Киев, Выборгская, 84.