

**1Київський національний університет будівництва і архітектури
Науково-дослідний
ІНСТИТУТ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ**

А.В. Перельмутер

**БЕСІДИ
ПРО БУДІВЕЛЬНУ МЕХАНІКУ**

**Видавництво «Сталь»
Київ 2024**

*Рекомендовано до друку
Вченою радою Київського національного
університету будівництва і архітектури*

Рецензенти:

Перший заступник голови правління Українського інституту сталевих конструкцій ім. В.М. Шимановського, заслужений діяч науки і техніки, доктор технічних наук, професор

Гордєєв В.М.

Завідувач кафедри комп'ютерних технологій будівництва та реконструкції аеропортів Національного авіаційного університету, доктор технічних наук, професор

Махінько А.В.

УДК 624.0.07

Перельмутер А.В.

Бесіди про будівельну механіку — К.: Видавництво «Сталь», 2024.— 324 с.

У книзі обговорюються деякі принципи питання сучасної будівельної механіки, які, як свідчить досвід спілкування з користувачами програмних засобів, недостатньо засвоюються під час навчання у вищій школі. Метою книги є поглиблений виклад основ тих методів, що використовуються у розрахункових програмних системах з акцентом на аналіз основних передумов та пояснення фізичного змісту розрахункових операцій.

Книга народилась у співпраці Інституту будівельної механіки КНУБА і науково-виробничого об'єднання СКАД Софт. Багато в чому на її зміст вплинули запитання, що виникають у користувачів розрахунково-проектного комплексу СКАД і пов'язані з необхідністю більш глибокого занурення у проблеми будівельної механіки. Книга не розрахована на студентів, які тільки починають вивчати курсу будівельної механіки, вона орієнтована на інженерів-будівельників, які бажають поглибити свою теоретичну підготовку. Книга також може бути рекомендована аспірантам, що спеціалізуються на розрахунках будівельних конструкцій.

Передмова

Задум

На початку XX століття в Санкт-Петербурзі збирався невеликий гурток, де видатний інженер і професор, який виховав кілька поколінь інженерів, В.Л. Кирпічев вів розмови про механіку. Вони потім були видані у вигляді книги [4], що витримала багато видань і досі не втратила своєї актуальності. Автору здалося, що є необхідність певною мірою відтворити цей досвід у наш час, розглянувши ту область знань, яку називають *будівельна механіка в широкому значенні цього слова*.



В.Л. Кирпічев

Справа в тому, що практичний розрахунок будь-якої більш-менш складної системи в даний час виконується з використанням комп'ютерних технологій. Як показує досвід, у багатьох випадках навчання користування програмними системами для розрахунку конструкцій, такими як ЛІРА, SCAD, ANSYS та ін, дозволяє користувачеві тільки натискати кнопки, щоб викликати до життя ту чи іншу функцію програми. З'ясовується також, що будь-яке керівництво до програми майже безглуздо, якщо користувач не розуміє основ тих методів, які використані в програмній системі.

При цьому важливим є розуміння основних принципів, які, на жаль, не дуже добре викладаються в сучасних вузівських підручниках. Я неодноразово ставив початківцям інженерам питання: чи можна створити попереднє напруження в статично визначеній системі? І надто часто отримував позитивну відповідь. А на підтвердження своєї точки зору вказувалося, що існують переднапружені залізобетонні балки. Про те, що вони статично невизначені, студенту не сказали.



К. С. Заврієв

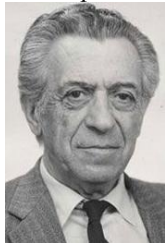
Важливим аспектом проблеми є співвідношення між знанням і розумінням (навіть чи потрібно доводити, що це не одне й те саме). Розуміння приходить тоді, коли одному й тому явищу дається кілька інтерпретацій, зіставляючи які можна зрозуміти значно більше, ніж із докладного опису, незалежно від форми цього опису (креслення, схема, математична модель тощо.)

Блискучим прикладом є питання, яке Киріак Самсонович Заврієв, професор Тбіліського інституту інженерів шляхів сполучення, задавав своїм студентам²:

² Мені про це розповів Л.Г. Дмитрієв, учень Киріака Самсоновича.

Робота несивої конструкції багато в чому визначається плечем внутрішньої пари. У ферми воно дорівнює відстані між поясами, в арці - відстані від замку до затяжки, у купола - приблизно відстані між вершиною та опорним кільцем. А яке плече внутрішньої пари у оболонки двоякої кривизни на прямокутному плані?

Відповідь на це питання вимагає розуміння роботи конструкції «в цілому», що багато в чому протилежно детальному аналізу напружено-деформованого стану, що використовується на практиці. Такий аналіз спрямований на вивчення деталей (відшукування піків напруження, місць з максимальними прогинами тощо), і іноді відводить від розгляду цілісної картини явища. За образним висловом А. Пуанкаре «... чи став би думати якийсь натураліст, що він досить знає слона, якби він завжди вивчав цю тварину під мікроскопом?»[3].



Я.Г. Пановко

Вважаю також доречним процитувати уривок із передмови до книги Я.Г. Пановко [2]:

«Ленінградський художник-графік Б. Семенов ... згадує, як свого часу, при відвідуванні художньої галереї, йому, тоді ще хлопчику, батько сказав: «Розуміти мистецтво — це, брате, наука».

Від себе зазначу, що наведена фраза припускає змістовну інверсію: «Розуміти науку - це, брате, мистецтво», яка могла б служити епіграфом до цієї книжки.

Зміст книги багато в чому визначився тими питаннями, які ставили користувачі програмної системи SCAD її розробникам, до складу котрих належить і автор. Вони наївно вважали, що розробники програм повинні заповнити недоліки їх освіти, а нам дуже хотілося замість точної відповіді на задане запитання надіслати запитувача до певної сторінки університетського підручника. Але доводилося виступати з роз'ясненнями та давати відповіді на наївні запитання.

Тоді виник задум написання відповідної книги. Автор самовпевнено вважає, що практикуючі інженери-розрахунники захочуть прочитати цю книгу, основною метою якої є навчання свідомому використанню сучасних комп'ютерних методів розрахунку складних і відповідальних будівельних конструкцій. Втім, надія на Юзера³, який читає щось, крім програмного Help, не надто реалістична, і ця проста думка змушує автора урізноманітнити свій виклад неформальними порівняннями і вставними байками. А раптом допоможе.

Форма викладу

Оскільки ми орієнтуємося на читача, який хоча б формально прослухав університетський курс будівельної механіки, виклад ведеться у фрагментар-

³ *Юзер* (від англійського user-користувач) - напевно, найчисленніша частина комп'ютерного населення нашої планети (вже не *Чайник* і ще не *Ламер*) – Юзер-ламерський тлумачний словник PC ARGO..

ному стилі, без обов'язкового дотримання структури якогось підручника. Пропущено, наприклад, тему про обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь методу сил і методу переміщень, оскільки у формі, орієнтованій на скорочення ручних обчислень, ці відомості досить докладно представлені в університетському курсі, а самі ці обчислення сьогодні приховані в тих програмних комплексах, за допомогою яких сьогодні розраховуються практично всі конструкції.

По можливості автор намагався викладати матеріал у простій формі (як кажуть «без формул»), опускаючись у деяких випадках до простих ілюстрацій положень, що викладаються. Докладніше викладаються розділи стійкості та динаміки, які у сучасних університетських курсах майже не висвітлюються. Дуже часто деякі важливі властивості системного або іншого виду викладаються як «дані згори».



Якщо читач не повірить авторові і почне шукати докази (сам чи в літературі), то автор вважатиме, що він досяг своєї мети, бо саме він викликав цікавість до предмета викладу. Взагалі, читач, який бажає мати суворіші докази, може звернутися до інших джерел, і таке звернення з боку автора не зустрінє нічого, крім схвалення.

Книга написана з розумінням того, що «...при вивченні наук приклади не менш повчальні, ніж правила» (І. Ньютон). При цьому слід мати на увазі, що є два різновиди прикладів: а) які пояснюють техніку (методику, алгоритм) розв'язання задачі; б) ілюструють деякі властивості, явища чи ефекти. Ми віддаємо перевагу другому типу прикладів, і при запозиченні чужих результатів не наводимо шлях їх отримання, відсилаючи в необхідних випадках до оригіналу.

У сучасних умовах комп'ютеризованого проектування красиві аналітичні побудови рішень приватних завдань поступово (але неухильно) поступаються місцем досить універсальним чисельним методам розрахунку, що реалізуються в багатьох широко поширених програмних розробках. Само собою зрозуміло, що це не означає повної відмови від приведення аналітичних рішень, особливо тоді, коли вони несуть у собі інформацію якісного характеру або є прикладами, що опукло пояснюють окремі аспекти теорії.

Але сьогодні, на думку автора, важливіше глибоке вивчення принципових аспектів теорії, що дозволяє інженеру усвідомлено (і прискіпливо!) користуватися наявним у нього під рукою інструментом обчислень, а також оцінювати хоча б на якісному рівні результати таких обчислень. А досяжність цього безпосередньо залежить і від розуміння інженером принципів (а в деяких випадках і деталей), на яких засноване використовуване програмне забезпечення.

При цьому основна складність полягала у визначенні тієї межі, котра лежить між точним (і найчастіше складним) описом проблеми і в деякому сенсі ілюстративним викладом її основних моментів. З такого ж приводу

відомий популяризатор математичних знань В. Босс [1] каже: *«Переспостити, навіть прибрехати трохи, бо дозування правди наріжний камінь пояснення. Результати, перевантажені деталями, не пролазять куди треба»*

Імітуючи стиль бесід, виклад побудовано таким чином, що основні відомості по кожному з цих питань вкладені в уста лекторів, питання задають учні, а відповідають на них знавці. У багатьох із цих персонажів є реальні чи віртуальні прототиби, проте представлені вони у книзі набором умовних картинок, лише віддалено (і то, лише автора) нагадують реальних людей. А самі картинки безсоромно взяті з Інтернету (запитати у когось дозволу на їх використання не вдалося).

Що стосується змісту запитань, то багато з них майже дослівно повторюють ті реальні запитання, які користувачі задавали розробникам комплексу SCAD, інші вигадані автором, який спробував уявити допитливого та скрупульозного учня (трапляються і такі).

Подяки

У книзі використовуються, часом у спрощеній формі, витяги з робіт автора, що раніше видавалися, написаних ним самим або у співавторстві з В.І. Слівкером, внесок якого у формування багатьох ідей цієї книги важко переоцінити.

Наша багаторічна творча дружба виробила загальний стиль роботи та форму представлення результатів. Думаю, що читат це помітить.



В.І. Слівкер

Під час роботи над рукописом я знайомив з ним (цілком або окремими частинами) моїх колег і друзів. Їхні зауваження та пропозиції були з вдячністю мною прийняті. Згадаю тих із них, які справили найбільший вплив — проф. Л.С. Ляхович, проф. В.М. Гордєєв, проф. О.В. Кабанців.

Особлива подяка проф. П.П. Лізунову і колективам Кафедри будівельної механіки та НДІ Будівельної механіки, чия безцінна підтримка дозволила випустити це видання.

Література

1. **Босс В.** Интуиция и математика. — М. 2003.
2. **Пановко Я.Г.** Механика деформируемого твердого тела — М.: Наука, 1985.
3. **Пуанкаре А.** О науке. — М.: Наука, 1983.
4. **Кирпичев В.Л.** Беседы о механике / Издание 5-е.— М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951.

Цикл 1

Основи статики і кінематики



Бесіда 1.1. Трохи про розрахункову модель: аналіз гіпотез



Сучасні будівлі та споруди найчастіше бувають складними конструктивними багатоелементними комплексами, що створюються для виконання великої кількості різних функцій, і їхній життєвий цикл пов'язаний з можливістю реалізації багатьох робочих станів.

З погляду розраховувача найбільше значення мають конструктивні особливості об'єкта, з якими пов'язана проблема оцінки його несівної здатності, але як така конструктивна функція не завжди постає у рафінованій формі.

Виділення конструктивної схеми

Якщо в каркасній будівлі досить просто вказати на основні конструктивні елементи (хоча і тут є певні проблеми), то для споруди іншого типу це вдається зробити далеко не відразу й то – лише після попереднього аналізу кількох конкуруючих гіпотез.

Виділення з об'єкта його несівної частини є першим кроком ідеалізації. Умовність і неоднозначність цього кроку пов'язана з різною роллю окремих елементів споруди за різних режимів навантаження – за одних навантажень якісь елементи виконують лише роль огорожувальних, а за інших вони суттєво впливають на гру сил.

Геометричний образ

Після того, як обрано частину об'єкта, яка фігуруватиме в розрахунку, починається ідеалізація її геометричного образу – *геометричне моделювання*.

Лише у тривіальних випадках реальна тривимірна геометрія конструкції представляється такою ж у розрахунковій моделі. В дійсності ця модель збирається з таких ідеалізованих об'єктів, як лінія (вісь стрижня) або поверхня (серединна поверхня плити або оболонки). Тобто геометрія розрахункової схеми оперує одновимірними та двовимірними геометричними образами замість тривимірних. І тут може стати причиною появи сил взаємодії об'єктів різної розмірності, що невластні реальній конструкції – зосереджених впливів, що породжуються примиканням осі стрижня, або розподілених по лінії впливів при примиканні пластин і оболонок. Про проблеми, що при цьому виникають, йтиметься далі.

А тут лише зазначимо, що ідеалізовані образи частин споруди (стрижень, пластина чи ін.) використовуються не тому, що з їхньою допомогою спрощується геометрична картина завдання, а тому, що такі об'єкти добре вивчені, їхні внутрішні властивості відомі, різноманітні варіанти поведінки є очікуваними. Отже, завдання зводиться до визначення взаємодії об'єктів з відомими властивостями.

Слід зупинитися ще на одному аспекті геометричного моделювання. Справа в тому, що в багатьох випадках деякі частини системи можуть бути

представлені у вигляді, абсолютно відмінному від їхнього реального геометричного образу. Якщо з будь-яких причин детальна картина напружено-деформованого стану таких частин не становить інтересу, то реальне геометричне моделювання можна не проводити – важливо, щоб була змодельована їхня функціональна роль у роботі досліджуваної системи. Наприклад, реальну палю може змодельовати пружна пружинна опора.

Модель матеріалу

Наступним етапом є *ідеалізація матеріалу* конструкції, вірніше набору його фізико-механічних параметрів. Найчастіше матеріал наділяється властивостями ідеальної пружності чи ідеальної пластичності. Значення параметрів, що характеризують властивості матеріалу (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, межа плинності та ін.) приймаються за довідковими значеннями і передбачаються однаковими в межах досить великих частин споруди (або по всій споруді), і відповідність їхніх реальних значень прийнятим аналізується досить рідко.⁴

Особливо слід зупинитися на коефіцієнті Пуассона. При всебічному стисканні напруженнями $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ зразка пружного матеріалу, у якого об'єм дорівнює V_0 , модуль пружності – E і коефіцієнт Пуассона ν – відбувається зміна початкового об'єму тіла. Новий обсяг зменшується на величину $\Delta V = kV_0$, де коефіцієнт об'ємного стискування $k = (1 - 2\nu)\sigma / E$. Неважко помітити, що при $\nu > 0,5$ стиснутий зразок збільшує свій об'єм, що фізично неможливо (можна показати, що якби це було так, можна було б сконструювати вічний двигун). Звідси з'явилося жорстке обмеження $\nu \leq 0,5$, яке є загальним для всіх суцільних середовищ – пружних і пластичних тіл, а також рідин, для яких часто використовується умова стискання $\nu = 0,5$.

Але в нормах проектування дерев'яних конструкцій з'являється твердження, що для фанери коефіцієнт Пуассона слід вважати таким, що дорівнює 0,6 (для деяких видів навіть 0,7). Справа тут у тому, що зазначений вище коефіцієнт об'ємного стиснення відноситься до ізотропного матеріалу, а дерево та фанера є анізотропними матеріалами. Вони характеризуються різними модулями пружності E_0 і E_{90} (вздовж і поперек волокон), а також коефіцієнтами Пуассона $\nu_{0,90}$ і $\nu_{90,0}$, між якими існує співвідношення $E_0\nu_{0,90} = E_{90}\nu_{90,0}$. При цьому обмеження типу $\nu_{0,90} \leq 0,5$ або $\nu_{90,0} \leq 0,5$ відсутні.

З коефіцієнтом Пуассона пов'язана одна характерна помилка, що зустрічається, наприклад, при аналізі згинаних плит. Задавши для прямокутної плити умови шарнірного спирання з обох протилежних сторін і вважаючи дві інші сторони вільними, розраховувач очікує, що отримає картину циліндричного вигину (балкова схема роботи). Але картина переміщень (ізолінії представ-

⁴ На жаль, висновки цього використовуються і далеко за межами своєї обґрунтованості. Досить сказати, що ідеалізованими та однаковими за простором властивостями нерідко наділяються ґрунти основи, для яких припущення про малу мінливість параметрів не надто виправдане, а найчастіше просто не узгоджується з результатами інженерно-геологічних вишукувань.

лені на рис. 1.1) не підтверджує це очікування, а внутрішні зусилля не зводяться тільки до моментів і поперечних сил одного напрямку, обчислення дають ненульові значення для M_x , M_y , M_{xy} , Q_x і Q_y . І лише задавши коефіцієнт Пуассона таким, що дорівнює нулю, ми отримаємо картину циліндричного вигину.

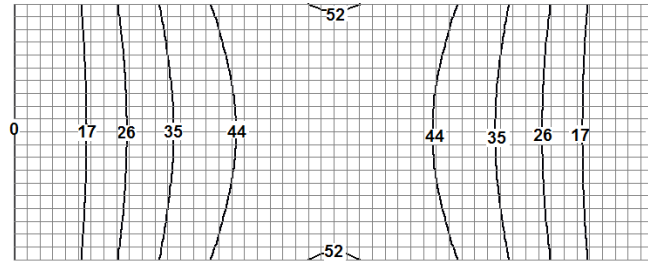


Рис. 1.1

Моделювання навантажень

Досить серйозною процедурою є *ідеалізація навантажень*, що діють на конструкцію в різних режимах роботи. Взагалі навантаження є однією з найменш вивчених компонентів системи, вони мають велику мінливість у часі та просторі, а ті розрахункові моделі, якими оперує проєктна практика, є досить умовними.

Поняття навантаження є зручним способом опису взаємодії конструкції з навколишнім середовищем, але це не єдина форма такої взаємодії. Часто необхідно описати не силову, а кінематичну взаємодію, коли деякі, зовнішні по відношенню до системи, що розраховується, пристрої стискають переміщення або повороти окремих точок або нав'язують їй свої переміщення. Такі умови, звані зв'язками, майже завжди мають місце в розрахунковій моделі. Зауважимо принагідно, що задане переміщення будь-якої точки завжди реалізується у вигляді зміщення зв'язку, а звичайний зв'язок-опора є окремим випадком такого кінематичного впливу, коли згадане задане переміщення має нульове значення. Звісно, нескінченно жорсткий зв'язок, який абсолютно точно нав'язує системі певне (можливо, нульове) значення переміщення, є ідеалізацією; насправді взаємодія з навколишнім середовищем реалізується через певні пристрої, що мають, можливо дуже велику, але не нескінченно велику жорсткість.

Моделювання зв'язків та умов примикання

Ідеалізація зв'язків поширюється на опис законів взаємодії окремих елементів системи один з одним. Прийняті найчастіше умови повного збігу переміщень або взаємних поворотів у точках з'єднання (абсолютно жорсткий зв'язок), так само як і їхня альтернатива, тобто відсутність будь-якої взаємодії щодо розглянутих видів переміщень (шарнір, повзунок), звісно є досить сильною ідеалізацією реальної картини взаємодії.

При цьому найчастіше виходять не з кінематичних умов сполучення, а з гіпотез, що пов'язані з силовими аспектами взаємодії. Так, дивлячись на

конструкцію вузла деякої ферми (рис. 1.2), важко прийняти рішення про повну свободу взаємних кутів повороту кінцевих перерізів стрижнів, що сходяться у вузлі. У той же час, гіпотеза, що призводить до такого ж висновку, про малу роль моментів, що згинають, у разі суто вузлових навантажень інтуїтивно сприймається як цілком розумна підстава покласти моменти такими, що дорівнюють нулю, для чого й запровадити шарніри.

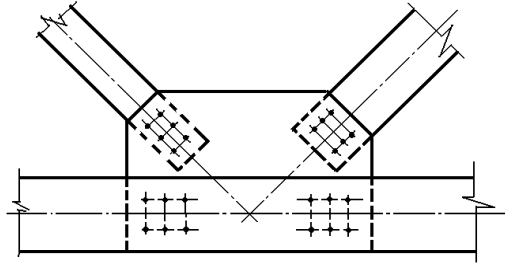


Рис. 1.2.

На закінчення цієї бесіди, яка є вступною, зауважимо, що переважна кількість проектних розрахунків ґрунтується на лінійних пружних розрахункових моделях. Під час їхньої побудови, крім гіпотези щодо справедливості закону Гука, використовуються припущення щодо можливості розгляду умов рівноваги в геометрії недеформованої системи, можливості застосування принципу суперпозиції (незалежності дії сил), ідеальності зовнішніх і внутрішніх зв'язків і справедливості принципу Сен-Венана. Взагалі, кожна з цих гіпотез не є універсальною і потребує свого обґрунтування.



Питання:

Зв'язки трактувалися як обмеження, що накладаються на переміщення. А в прикладі з обґрунтуванням можливості ввести шарнірну схему ферми раптом ідеться про зусилля. Чи немає тут протиріччя?

Відповідь:

На підставі принципу звільнюваності від зв'язків роль зв'язку може відігравати її реакція, яка забезпечує такі ж умови рівноваги.

Звідси випливає можливість двоїстого силового і кінематичного опису умов зв'язку.

Вона зводиться до однієї з двох формул:

- «неможливе якесь взаємне переміщення» $\equiv$ «сприймається відповідна сила»;
- «допускається якесь взаємне переміщення» $\equiv$ «не сприймається відповідна сила»



Використання такого підходу дуже полегшує аналіз. Зокрема, міркування подібного роду доречні під час розгляду умов взаємодії елементів розрахун-

кової схеми один з одним. І якщо залізобетонна плита перекриття, покладена на цегляну стіну, не передає цегляній кладці момент (оскільки кладка не може його сприйняти), то тим самим виникає необхідність у розрахунковій моделі передбачити відповідну свободу взаємного повороту елементів (установити шарнір).

Особливо важливо виконати такий аналіз стосовно температурного навантаження. Навіть незначне взаємне прослизання в сполученнях елементів різко (в рази!) змінює напружений стан, спричинений температурним навантаженням. Тому встановлення «повзунів» або моделювання пружного сполучення замість жорсткого примикання може тут виявитися дуже важливим прийомом.



Питання:

Продовжуючи попереднє питання: зв'язки трактувалися як обмеження або деякі інші умови, яким повинні підкорятися переміщення, а чи можливі зв'язки, що накладають обмеження на зусилля?

Відповідь:

Так, можна уявити випадки, коли обмеження накладаються на зусилля/напруги в елементах системи. Прикладом може бути конструкція гідродомкратів, що спираються на систему (така ситуація виникає іноді при аналізі монтажних станів).



Вимога рівності тисків у рідині в кожному з домкратів, об'єднаних загальною гідросистемою, призводить до деякої системи рівнянь між реакціями, що передаються на систему цими домкратами.

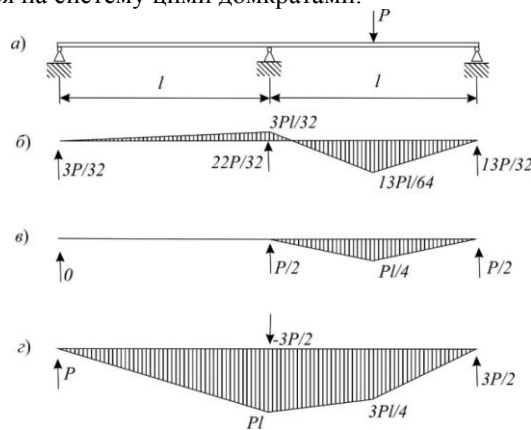


Рис. 1.3.

Якщо як приклад розглянути двопрогону нерозрізну балку (рис. 1.3.а), у якій за звичайних умов опорні реакції різні (рис. 1.3.б), то зміни, що вносять-

ся силовими зв'язками, можна проілюструвати випадком, коли висувається вимога рівності двох реакцій. (рис. 1.3.в) або коли потрібно, щоб ця пара реакцій мала різні знаки (рис. 1.3.г).

Механічну інтерпретацію представлених вище силових зв'язків представлено на рис. 1.4.

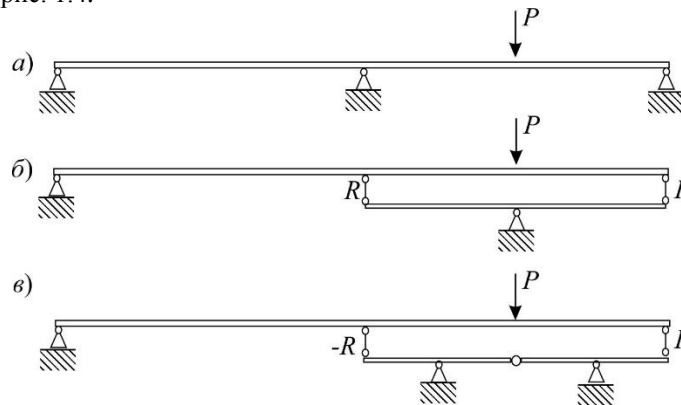


Рис. 1.4

Неважко побачити, що система за рис. 1.4.а утворюється з модифікованих систем за рис. 1.4.б або за рис. 1.4.в, якщо закріпити відповідні балансири від повороту.

Накладення силового зв'язку відповідає зняттю деякого кінематичного зв'язку. І, навпаки, введення в систему кінематичного зв'язку еквівалентно усуненню деякого силового зв'язку.

Питання:

Чи не можна детальніше про принцип Сен-Венана, у стандартних курсах будівельної механіки про нього майже не згадується.



Відповідь:



Суть принципу Сен-Венана полягає в тому, що якщо в межах деякої області пружного тіла докладено систему сил, то на відстанях, які суттєво перевищують характерні розміри взятої області, напруження і деформації практично однакові для всіх статично еквівалентних сил (наприклад, для заданої групи сил та їхньої рівнодійної).

Принцип Сен-Венана дає змогу, наприклад, розподілене навантаження, що діє на малу частину поверхні тіла, замінити зосередженою силою, і навпаки, зосереджену силу можна замінити розподіленим навантаженням, приклавши його до малої частини поверхні.

Як приклад, що ілюструє принцип Сен-Венана, розглянемо зміну напруженого стану в металевій пластині розмірами 300×50×5 мм за різних варіан-

тів її завантаження статично еквівалентним навантаженням по торцях. Вид і схеми прикладання навантажень та ізолінії нормальних напружень (σ_x) представлені на рис. 1.5.

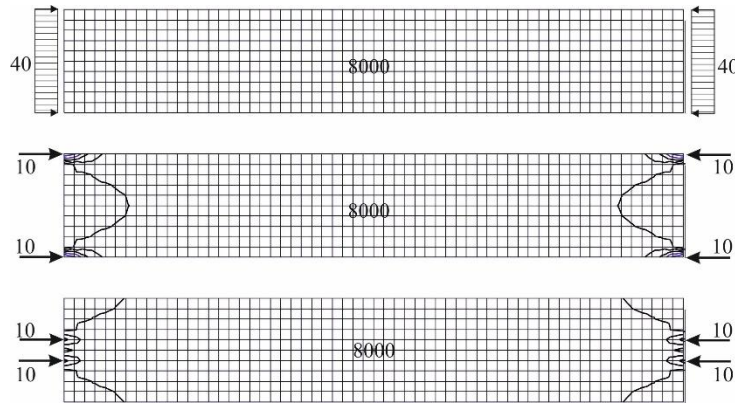


Рис. 1.5

Картини ізоліній показують, що в усіх варіантах зміни виду та схеми прикладання статично еквівалентного навантаження проявляються лише в торцевих зонах; у середній зоні пластини, що відходить від торців приблизно на 0,7 від ширини пластини, напружений стан стає однаковим.

Слід пам'ятати, що принцип Сен-Венана не є універсальним. Цей принцип порушується у тонкостінних стрижнях, де бімомент (вплив статично еквівалентний нулю) призводить до так званого стисненого кручення всього стрижня (рис. 1.6).

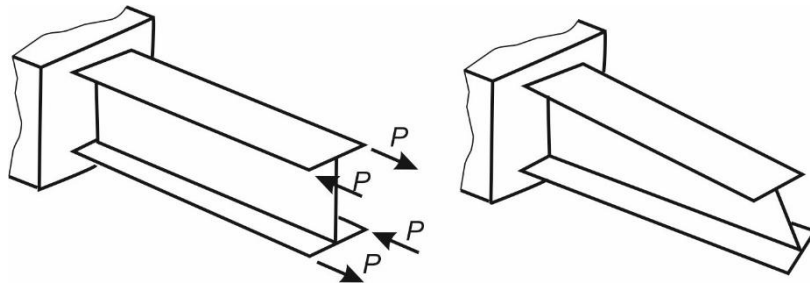


Рис. 1.6.

Цьому є просте фізичне тлумачення. Поперечний переріз тонкостінного стрижня характеризується, на відміну від суцільного перерізу, ще й товщиною. Кожна полиця двотаврового перерізу вигинається у своїй площині бо навантажена моментом (парою сил). І якби стінка профілю була відсутня, то полиці згиналися б незалежно, і питання полягає в тому, наскільки жорстким є зв'язок між полицями. Для суцільного перерізу цей зв'язок дуже жорсткий і розподіл напружень від кожної з чотирьох сил у поперечному перерізі об-

межений вузькою областю. Що менша товщина стінки, то помітніший ефект обмеженого кручення. Отже, ступінь загасання крайових особливостей визначається «демпфуючою» дією додаткових зв'язків, органічно присутніх у системі.

Бесіда 1.2. Основні поняття. Принцип можливих переміщень



Перш ніж продовжити цикл бесід про будівельну механіку, варто нагадати деякі основні поняття, можливо, сформулювавши їх чіткіше, ніж це прийнято в університетських підручниках. Обмеження, які стоять перед авторами цих підручників (необхідність звертатися до читача, який уперше знайомиться з предметом), не завжди дозволяють їм це зробити.

Отже, предметом розгляду в будівельній механіці є розрахункова модель деякої механічної системи.

Системою називатимемо сукупність елементів, певним чином з'єднаних між собою, які в силу цих з'єднань працюють спільно.

До числа елементів зазвичай відносять пружно або непружно деформовані тіла стандартної форми: стрижні, диски, пластини тощо. У загальному випадку

елементом будемо вважати матеріальний об'єкт (точніше його ідеалізацію чи абстракцію), вивчений тією мірою, якою це необхідно для аналізу його поведінки в системі.

Особливе місце займає нерухомий недеформований елемент, умовно званий «землею», з яким зазвичай пов'язують систему відліку переміщень і для якого не потрібно виконання умов рівноваги. Взаємодія елементів системи з об'єктами, які не входять в систему, представляється у вигляді сил. Використання таких ідеалізованих об'єктів, як «сила» і «земля» дозволяє локалізувати систему серед необмеженої множини взаємодіючих об'єктів.

При розгляді рівноваги твердого тіла (це основний об'єкт дослідження аналітичної механіки) достатньо знати які сили докладаються до тіла. При цьому не потрібно знати, який рух отримає тіло, якщо рівновага буде порушена. Але під час дослідження інших систем, відмінних від незмінного твердого тіла і таких, що складаються з частин, які взаємодіють між собою, необхідно знати, який рух відбудеться в разі порушення умов рівноваги.

Умова рівноваги в таких випадках тісно пов'язана з її можливими переміщеннями.

Можливі переміщення визначаються зв'язками, а саме тими геометричними умовами, які повинні бути обов'язково виконані при русі. Це може бути вимога, щоб деяка точка весь час залишалася на певній поверхні або щоб значення деякого переміщення дорівнювало заздалегідь заданій величині (у тому числі й нулю), або, наприклад, щоб відстань між якимись точками залишалася незмінною тощо. Важливо при цьому пам'ятати, що йдеться про

нескінченно малі переміщення, і лише у випадках лінійних систем можливі переміщення можна вважати кінцевими величинами.

Нескінченно малі можливі, тобто такі, що допускаються зв'язками, переміщення фігурують в умовах рівноваги системи.

При цьому передбачається, що всі зв'язки ідеальні і не створюють тертя тощо. Такі зв'язки не чинять жодної перешкоди можливим переміщенням. Вони являють собою деякі механічні пристрої, що змушують систему переміщатися цілком певним чином за рахунок того, що діють на систему внутрішніми силами, що виникають у зв'язках (реакціями зв'язків).

Взагалі, внутрішніми називаються сили, з якими одна частина тіла в якомусь перерізі діє на іншу його частину. На підставі закону дії та протидії внутрішні сили завжди попарно рівні за модулем і протилежні за напрямком. Якщо ліва частина тіла діє на його праву частину силою R , то, у свою чергу, права частина діє на ліву силою R .

Точно так само діють і реакції зв'язків, які можна зобразити на схемі, якщо уявити собі зв'язок розірваним (усуненим). Одна з пари компонентів реакції діє на «землю» і її вплив ніяк не проявляється, інша – на конструкцію, і її вплив якраз і нав'язує системі ті переміщення, які повинні виникати (або зникати) через накладений зв'язок.

Про це свідчить і відомий у механіці принцип звільнення від зв'язків: рівновагу системи не буде порушено і її конфігурація не зміниться, якщо зв'язок усунути, замінивши його вплив реакцією зв'язку.

У курсах теоретичної механіки загальне рівняння статички систем з ідеальними двосторонніми зв'язками формулюється у вигляді наступного початку можливих переміщень:

Необхідна і достатня умова рівноваги полягає в тому, що сума робіт усіх прикладених активних сил дорівнює нулю на кожному можливому переміщенні системи.

Відмінною властивістю реакцій, що розвиваються ідеальними зв'язками, є те, що сума елементарних робіт цих сил за будь-якого переміщення точок їхнього прикладання, що допускається зв'язками, виявляється такою, що дорівнює нулю. Це впливає із зазначеної вище властивості парності сил, що виникають у зв'язках. Тому в наведеному вище формулюванні йдеться тільки про активні прикладені сили і замовчується про реакції зв'язків.

За бажанням розглядати тертя в з'єднаннях частин, потрібно буде силу тертя вважати однією із зовнішніх прикладених сил і приєднати її до інших зовнішніх сил. Також потрібно приєднати до них і сили в'язкості, сили пружності тощо, якщо вони діють.

Тіло, що деформується, можна розглядати як деяку змінну систему матеріальних точок, переміщення яких обмежені силами пружності. Якщо сили пружності враховуються явно, то формулювання початку можливих переміщень перетворюється.

Тіло, що деформується, можна розглядати як деяку змінну систему матеріальних точок, переміщення яких обмежені силами пружності. Якщо сили

пружності враховуються явно, то формулювання початку можливих переміщень перетворюється:

*Необхідна й достатня умова рівноваги полягає в тому, що сума робіт усіх активних і реактивних сил дорівнює нулю на **будь-якому** переміщенні системи.*

Тут слід звернути увагу на те, що замість *можливих* переміщень розглядаються *будь-які* переміщення точок пружної системи, оскільки ввівши в рівняння робіт сили пружності (внутрішні напруження), ми зняли зв'язки, що обмежують можливі переміщення кожної точки пружної системи.

Неважко бачити, що з початку можливих переміщень випливає і такий висновок:

Якщо система перебуває в рівновазі, то ця рівновага не порушується введенням нових зв'язків, тобто додатковим стисненням її можливих переміщень.

Зокрема, з погляду початку можливих переміщень кожне рівняння рівноваги є виразом того закону, що сума робіт активних сил для деякого переміщення, дозволеного зв'язками, дорівнює нулю. Але можна застосовувати ті ж рівняння рівноваги, якщо в пружному тілі розглядати такі ж переміщення, як для твердого тіла.

Така заміна еквівалентна накладенню додаткових зв'язків, які, природно, не може порушити рівноваги. Це твердження відоме, як *принцип затвердіння*.

У теоретичній механіці вказується, що будь-яку систему сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, можна замінити іншою системою, статично еквівалентною першій, без порушення рівноваги тіла. У будівельній механіці, що розглядає тіла, які деформуються, замінювати одну систему сил іншою, статично їй еквівалентною, як правило, не можна.

Наприклад, балка, піддана впливу двох сил (рис. 1.7, а), і та сама балка, завантажена однією силою, що являє собою рівнодію зазначених вище сил, згинається по-різному (рис. 1.7, б).

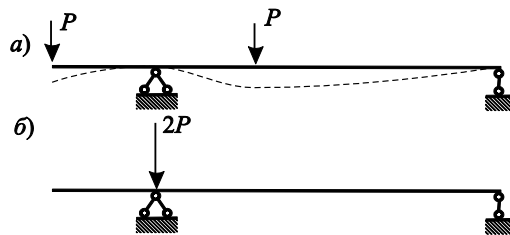


Рис. 1.7

До речі, тут можна згадати відомий жарт: рівнодіюча гідростатичного тиску, що діє на греблю, є сила, прикладена на висоті $1/3$ рівня рідини. Пропонується проробити в цьому місці мікроскопічний отвір у греблі (настільки малий, що витік води буде несуттєвим). Крізь цей отвір зосереджена сила полетить, і гребля не буде відчувати навантаження від тиску води. Розпові-

даючи цю байку, професор К.С. Заврієв просив студентів знайти помилки в міркуваннях.



Питання:

У формулюванні початку можливих переміщень фігурують лише зовнішні активні сили. Але в деяких випадках вплив на систему має кінематичний характер, наприклад, температурний вплив. Як треба чинити в цих випадках?

Відповідь:

Принцип можливих переміщень формує умови рівноваги з використанням тільки переміщень твердого тіла (системи твердих тіл). Якщо зв'язки системи не дозволяють їй мати такі переміщення, то не можна до неї прямо застосовувати рівняння рівноваги твердого тіла. Саме так виглядає випадок температурного впливу, коли наявність температурних подовжень частин системи не в'яжеться з припущенням про недеформованість твердого тіла.



Але тоді можна ті зв'язки, які перешкоджають зазначеним переміщенням, замінити силами і віднести сили зв'язку (реакції) до зовнішніх сил. Лише тоді виходить можливість застосувати до нашої системи рівняння рівноваги твердого тіла. Якщо ж цього не робити, то ми дійдемо парадоксального висновку, що робота внутрішніх сил тіла, підданого температурному впливу, дорівнює нулю (зовнішні сили тут відсутні).

Питання:

У навчальній літературі принцип можливих переміщень використовується для доведення деяких властивостей системи. А чи можна за його допомогою розв'язувати задачі про рівновагу безпосередньо, без складання та розв'язування рівнянь рівноваги?



Відповідь:

У деяких випадках пряме використання початку можливих переміщень дозволяє отримати рішення задачі більш простим шляхом, хоча слід зазначити, що такі випадки не надто часті і, що найголовніше, тут відсутні загальні та формалізовані прийоми.



Як приклад наведемо відому задачу де студенту пропонується переконатися в тому, що система, що складається з шести дисків, п'яти стрижнів і чотирьох однакових ділянок (рис. 1.8), геометрично незмінна, а зусилля в стрижні 1-2 — розтягувальне і дорівнює $4P$ (за кількості ділянок, що дорівнює n , зусилля в стрижні 1-2 дорівнює nP).

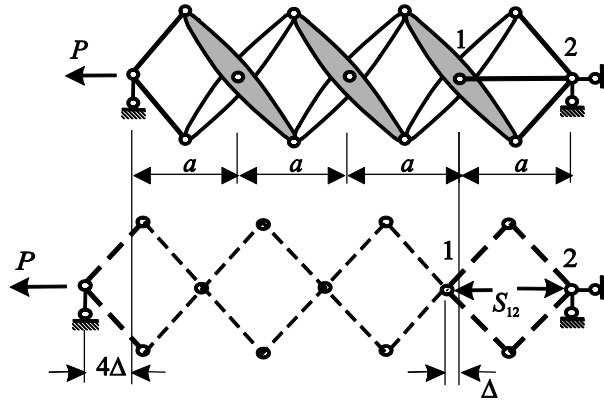


Рис. 1.8

Замінивши зв'язок 1-2 зусиллям S_{12} і звільнивши таким чином горизонтальне переміщення вузла 1, змістимо цей вузол на величину Δ . Неважко помітити, що при цьому всі клітини системи повинні спотворитися однаковим способом, і крайній лівий вузол зміститься на величину $n\Delta$. Тепер можна скласти рівняння робіт $(P \cdot n\Delta) - (S_{12} \cdot \Delta) = 0$ і отримати звідси необхідний розв'язок задачі.



Питання:

Скільки рівнянь рівноваги дає принцип можливих переміщень?

Відповідь:

Відповідно до цього початку для рівноваги необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю сума робіт активних сил для будь-якого можливого переміщення системи. Отже, воно дає нам стільки рівнянь, скільки різних можливих переміщень може мати система..

Тут потрібно вважати різними тільки ті переміщення, які не замінюються одні іншими. Якщо, маючи кілька різних переміщень, ми знайдемо ще переміщення, яке може бути замінено лінійною комбінацією попередніх, то це не буде принципово новим переміщенням. Воно не дасть нової умови рівноваги, а ми отримаємо лише рівняння, яке є наслідком інших рівнянь рівноваги, виведених для початкових різних переміщень.

Одним словом, число рівнянь рівноваги визначається числом незведених можливих переміщень, або, інакше: числом ступенів свободи системи.

Тут доречно нагадати той факт, що система нескінченно жорстких тіл (можливо, пов'язаних пружними пружинами) має скінченне число ступенів свободи, оскільки положення кожної точки такого тіла однозначно визнача-



ється зсувами деякої точки і поворотами навколо координатних осей. На відміну від цього, тіло, що деформується, має нескінченне число ступенів свободи (зміщення будь-якої його точки). Але якщо застосувати гіпотезу про набір деяких заздалегідь відомих форм деформування такого тіла, то число ступенів свободи дорівнюватиме числу параметрів, що визначають ці форми. Наприклад, припустивши, що стрижень може згинатися тільки за формою синусоїди з однією або двома напівхвилями, ми побачимо, що можливі переміщення визначаються тільки двома параметрами – амплітудними значеннями цих синусоїд.

Бесіда 1.3: Статичні та кінематичні рівняння



Якщо скористатися класичним методом вирізання вузлів, на які діють зусилля стрижнів, що примикають, S_j і зовнішні вузлові навантаження P_{rk} (компонента вузлового навантаження r -го вузла, спрямована вздовж координатної осі k), то для просторової шарнірно-стрижневої системи, яка складається з n стрижнів та m вузлів, можна записати умови рівноваги у вигляді дорівнення нулю суми проєкцій усіх діючих на вузол сил на координатні осі ⁵:

$$\sum_{j=1}^n D_{rj} C_{jk} S_j + P_{rk} = 0 \quad (r = 1, \dots, m; k = 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

Тут через D_{ij} позначені коефіцієнти інцидентів, які дорівнюють одиниці, якщо стрижень j примикає до вузла r (інцидентен цьому вузлу), і дорівнюють нулю за відсутності примикання, а через позначені косинуси кута нахилу стрижня j до координатної осі k . Структуру цих рівнянь видно з таблиці на рис. 1.9.

S_1	S_2	...	S_n	1		i
$D_{11}C_{11}$	$D_{12}C_{21}$	...	$D_{1n}C_{n1}$	P_{11}	Вузол 1, проєкція на вісь 1	1
$D_{11}C_{12}$	$D_{12}C_{22}$	...	$D_{1n}C_{n2}$	P_{12}	Вузол 1, проєкція на вісь 2	2
$D_{11}C_{13}$	$D_{12}C_{23}$	...	$D_{1n}C_{n3}$	P_{13}	Вузол 1, проєкція на вісь 3	3
$D_{21}C_{11}$	$D_{22}C_{21}$	...	$D_{2n}C_{n1}$	P_{21}	Вузол 2, проєкція на вісь 1	4
$D_{21}C_{12}$	$D_{22}C_{22}$	...	$D_{2n}C_{n2}$	P_{22}	Вузол 2, проєкція на вісь 2	5
$D_{21}C_{13}$	$D_{22}C_{23}$	...	$D_{2n}C_{n3}$	P_{23}	Вузол 2, проєкція на вісь 3	6
...	...	...	...	...	...	...
$D_{m1}C_{11}$	$D_{m2}C_{21}$	...	$D_{mn}C_{n1}$	P_{m1}	Вузол m , проєкція на вісь 1	$3m-2$
$D_{m1}C_{12}$	$D_{m2}C_{22}$	...	$D_{mn}C_{n2}$	P_{m2}	Вузол m , проєкція на вісь 2	$3m-1$
$D_{m1}C_{13}$	$D_{m2}C_{23}$	...	$D_{mn}C_{n3}$	P_{m3}	Вузол m , проєкція на вісь 3	$3m$

Рис. 1.9

Після відповідної перенумерації, пов'язаної з введенням нового індексу $i=r+m(k-1)$, що проілюстровано правим стовпчиком на рис. 1.9, та заміною добутку $D_{rj}C_{jk}$ на A_{ij} можна отримати компактніший запис.

⁵ Гіпотеза про прямолінійність стрижнів ферми дає підставу вважати її ступенями свободи лише усунення вузлів (стан кінцевих вузлів ферми повністю визначає положення всіх точок стрижня). Звідси випливає необхідна кількість рівнянь рівноваги.

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} S_j + P_i = 0 \quad (i=1, \dots, 3m). \quad (1.2)$$

Припустимо тепер, що стрижні ферми⁶ отримали деякі малі подовження λ_j ($j=1, 2, \dots, n$), а вузли – спільні з цими подовженнями переміщення u_i ($i=1, 2, \dots, 3m$), і при цьому в стрижнях ферми виникли зусилля S_j . Далі для скорочення запису ми використовуватимемо позначення $s=3m$.

Виходячи із загального в механіці *принципу* можливих переміщень, робота внутрішніх сил системи повинна дорівнювати роботі прикладених до неї зовнішніх сил:

$$\sum_{j=1}^n S_j \lambda_j = \sum_{i=1}^s P_i u_i. \quad (1.3)$$

Якщо підставити значення P_i з (1.2), то отримаємо:

$$\sum_{j=1}^n S_j \lambda_j = \sum_{i=1}^s \left(- \sum_{j=1}^n A_{ij} S_j \right) u_i = - \sum_{j=1}^n S_j \sum_{i=1}^s u_i A_{ij},$$

звідки приходимо до умов кінематичної сумісності подовжень λ_j з вузловими переміщеннями u_i .

$$\lambda_j = - \sum_{i=1}^s u_i A_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

Матриця коефіцієнтів цього рівняння є транспонованою зі зворотним знаком матрицею коефіцієнтів системи рівнянь рівноваги (1.2). Цей результат не випадковий, він є загальним для будь-яких систем, що розраховуються за недеформованою схемою, і справедливе таке твердження:

При розрахунку за недеформованою схемою система лінійних рівнянь рівноваги та система лінійних кінематичних рівнянь утворюють двійку пар у тому сенсі, що:

- а) невідомі однієї системи і вільні члени іншої системи є відповідними один одному узагальненими силами й узагальненими переміщеннями;*
- б) матриця коефіцієнтів однієї системи може бути отримана з іншої шляхом транспонування зі зміною знака.*

На практиці зазвичай будують ту матрицю, яку простіше отримати. Для стрижневих систем найчастіше легше формулюються умови рівноваги, і можна побудувати відповідну матрицю коефіцієнтів, а кінематична матриця утворюється транспонуванням. Для континуальних систем іноді легше сформулювати умови спільності.

⁶ Шарнірно-стрижневу систему часто називають фермою, хоча, дотримуючись етимології цього слова (французьке ferme, від латинського firmus міцний), фермами слід називати тільки міцні системи, незалежно від їхнього кінематичного типу. Існує легенда, що ця конструкція названа на честь П'єра Ферма, але це не так, хоча прізвище великого французького математика можливо пов'язане з поняттям «міцний».

Як приклад розглянемо ферму, зображену на рис. 1.10. Для неї потрібно знайти подовження стрижнів у тому випадку, коли вузол отримав переміщення Δ . Тут дуже легко скласти рівняння рівноваги

$$1 \cdot S_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S_2 + \frac{1}{2} \cdot S_3 + 0 \cdot S_4 = 0.$$

Транспонуючи матрицю-рядок коефіцієнтів цієї рівності, відразу ж отримаємо:

$$\lambda_1 = \Delta; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta\sqrt{3}}{2}; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta}{2}; \quad \lambda_4 = 0.$$

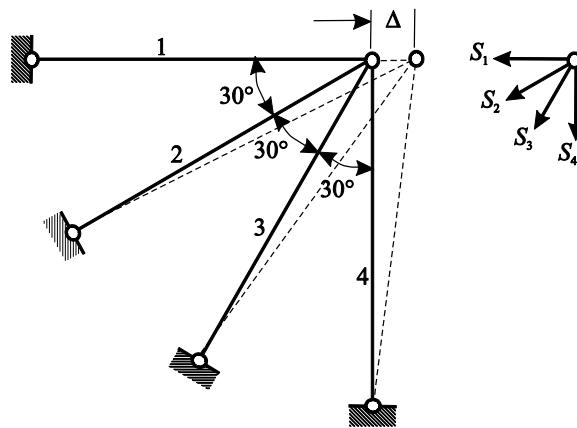


Рис. 1.10.

Точно кажучи, умови рівноваги (1.2) слід було б розглядати стосовно до деформованого стану системи (рис. 1.11, б), коли до рівняння увійдуть косинуси кутів φ^* (рис. 1.11, а). Ці кути враховують переміщення Δ , які визначаються подовженнями стрижнів Δl , а отже, своєю чергою залежать від зусиль в елементах системи.

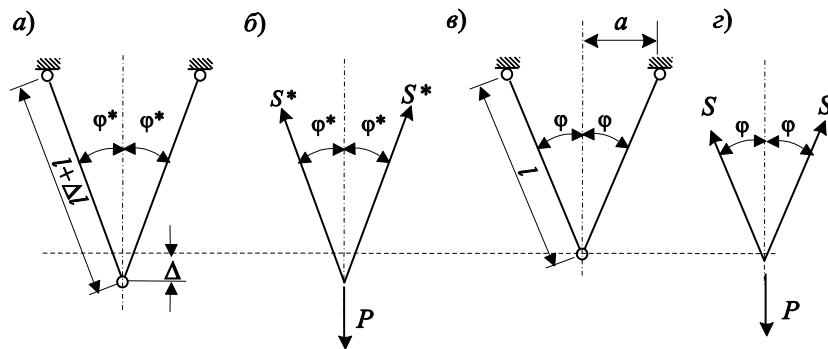


Рис. 1.11.

У такому разі ми змушені констатувати, що

у системі, що розраховується за деформованою схемою, знайти внутрішні зусилля лише з рівнянь рівноваги неможливо (система статично невизначена).

Дійсно, у простому прикладі за рис. 1.11.в, кут між стрижнями недеформованої системи дорівнює 2φ , а після деформування $2\varphi^*$, а різниця $(\varphi^* - \varphi)$ залежить від подовження стрижнів.

Для деформованої схеми рівняння рівноваги

$$S_1^* \sin \varphi^* - S_2^* \sin \varphi^* = 0; S_1^* \cos \varphi^* + S_2^* \cos \varphi^* - P = 0$$

приводять до розв'язку

$$S_1 = P / [2 \cos \varphi^*] = P / [2 \sqrt{1 - \sin^2 \varphi^*}] = P / [2 \sqrt{1 - a^2 / (l + \Delta l)^2}].$$

Якщо ж припущенням Δl можна знехтувати порівняно з l , то зусилля у стрижні визначається формулою

$$S_1 = P / [2 \sqrt{1 - a^2 / l^2}] = P / [2 \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}] = P / (2 \cos \varphi),$$

що відповідає розрахунку за недеформованою схемою, коли рівняння рівноваги мають вигляд

$$S_1 \sin \varphi - S_2 \sin \varphi = 0; S_1 \cos \varphi + S_2 \cos \varphi - P = 0.$$

Далі без спеціальних застережень ми розглядатимемо рівняння рівноваги, записані для недеформованої схеми.

Питання:

Чи правильно я зрозумів, що для розрахунку за недеформованою схемою достатньо, щоб очікувані значення переміщень були малими?



Відповідь:



Це не зовсім так. Справа в тому, що сам термін «малі значення переміщень» є невизначеним доти, поки не сказано, порівняно з чим малі переміщення. Швидше можна було б говорити про малість зміни кутів нахилу стрижнів порівняно з проєктним положенням (малість кутів перекосу стрижнів)

Але й ця ознака не завжди спрацьовує. У деяких випадках важливо врахувати той факт, що навіть при малих значеннях переміщень та перекосів зовнішні навантаження, що діють на систему, можуть спричинити помітний додатковий момент. Найпростішим прикладом може служити каркас високої будівлі, коли при відносно невеликих бічних зсувах значні вертикальні навантаження від власної ваги викликають додаткові згинальні моменти в основі. Ці моменти можна визначити лише у розрахунках за деформованою схемою. В англійській літературі це іноді називають $P-\Delta$ ефектом.

Бесіда 1.4: Властивості розв'язків



Під час виведення рівнянь (1.2) і (1.4), крім припущення про малість переміщень, жодних інших обмежень не запроваджували, тому ці рівняння справедливі для будь-якої кількості стрижнів n і вузлів m , а також для плоского ($k=1,2$) і просторового ($k=1,2,3$) випадку. У зв'язку з цим виникає питання про можливість розв'язку отриманих систем лінійних рівнянь, яким ми займемося далі.

Якщо зіставляти число невідомих зусиль n з кількістю рівнянь рівноваги $s=3m$ (числом ступенів свободи), то, взагалі кажучи, можливі три випадки (рис. 1.12): $n < s$, $n = s$ та $n > s$, які визначають конфігурацію матриці коефіцієнтів рівнянь рівноваги (мітка **с**) і рівнянь спільності деформацій (мітка **к**). Кожен із цих випадків розглянемо окремо, при цьому ранг матриці⁷ може бути повним, коли він дорівнює меншому з розмірів матриці, або неповним, і матриця виявляється виродженою. На схематичних зображеннях матриць коефіцієнтів, які подано біля кожної схеми на рис. 1.12, головний міnor, що має порядок r , затемнений.

Кількість невідомих зусиль менша за число ступенів свободи ($n < s$)

У цьому разі конструкція має недостатню кількість зв'язків, щоб забезпечити її незмінність і, по суті, є механізмом (рис. 1.12,а). Однак коли маємо $r < s$ (рис. 1.12,б) рухливість цього механізму обмежена тільки нескінченно малими переміщеннями, оскільки для їхнього розвитку нижній ланцюжок із трьох стрижнів має зазнати помітних деформацій. Таку систему називають *миттєво-жорсткою*.

Кількість невідомих зусиль дорівнює числу ступенів свободи ($n = s$)

Насамперед розглянемо той випадок, коли система рівнянь рівноваги така, що всі внутрішні зусилля можуть бути визначені з неї однозначно за довільних навантажень P_i . Для цього, як відомо з лінійної алгебри, необхідно і достатньо, щоб не тільки число рівнянь дорівнювало числу невідомих ($n = s$), але визначник системи рівнянь був би відмінний від нуля, або інакше $r = s$ (рис. 1.12,в).

Системи, що мають такі властивості, є *статично визначеними*. Якщо ж для визначення всіх внутрішніх зусиль рівнянь рівноваги недостатньо, то такі системи є *статично невизначеними*.

⁷ Нагадаємо, що рангом матриці називається максимальна кількість лінійно незалежних рядків (стовпців). Це те саме, що й розмір найбільшого з можливих визначників (головного міnorу), що не перетворюються на нуль, які можна скласти з елементів розглянутої матриці.

Ці властивості не залежать від того, виконані елементи системи з лінійно пружного (що підпорядковується закону Гука) або з фізично нелінійного матеріалу.

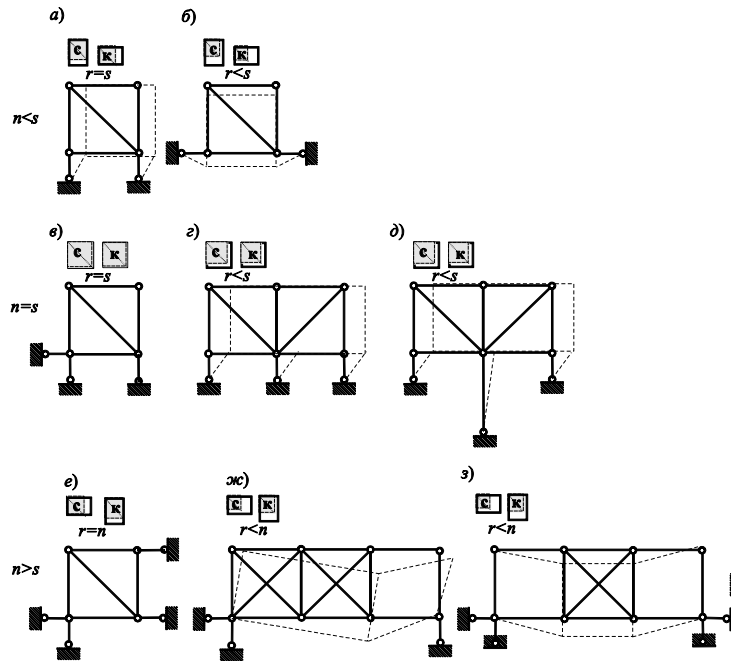


Рис. 1.12

В обох випадках чудовими властивостями статично визначених систем є:
 а) можливість представити всі внутрішні зусилля у вигляді лінійних комбінацій тільки зовнішніх навантажень;
 б) справедливості принципу незалежності дії сил.

Перше впливає безпосередньо з припущення про розв'язність системи лінійних рівнянь. Дійсно, якщо система розв'язна, то існує зворотна матриця

$$[\alpha_{ij}] = [A_{ij}]^{-1},$$

через елементи якої виражаються всі невідомі – внутрішні зусилля:

$$S_j = \sum_{i=1}^{3m} \alpha_{ij} P_i \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.5)$$

Що стосується другої властивості статично визначуваних систем, то справедливості її теж впливає з виразу (1.5). Слід зазначити, що в загальному випадку систем із нелінійно-пружних елементів лінійні вирази (1.5) відносяться тільки до статично визначуваних систем, для систем статично невизначуваних їх не можна застосовувати.

Залишаючись у межах припущення, що $n=s$, необхідно ще розглянути випадок, коли система рівнянь рівноваги має визначник, що дорівнює нулю,

тобто її ранг $r < s$ і розв'язок (1.5) отримати не можна. У таких випадках механічна система є *змінною* (рис. 1.12.з) або *миттєво-змінною* (рис. 1.12.д).

Відмінною особливістю миттєво-змінюваної системи є те, що в неї, як і в миттєво-жорсткої системи, рухливість обмежена тільки нескінченно малими переміщеннями. Зокрема, розвитку зсувів системи, показаної на рис. 1.12,д, заважає кут повороту центральної опорної стійки, який запізнюється щодо кутів повороту крайніх стійок.

Кількість невідомих зусиль більша за число ступенів свободи ($n > s$).

Система володіє надлишковим числом зв'язків і тут, у свою чергу, можуть бути розглянуті дві можливості:

- а) ранг r матриці $[A_{ij}]$ дорівнює числу рівнянь ($r = n$);
- б) матриця $[A_{ij}]$ має неповний ранг ($r < n$).

Як відомо з лінійної алгебри, у випадку $r = n$ (рис. 1.12.е) однорідна система лінійних рівнянь

$$-\sum_{i=1}^s A_{ij} u_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

може мати тільки нульовий розв'язок

$$u_i \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, s). \quad (1.7)$$

При цьому система є статично невизначеною, оскільки кількість невідомих зусиль перевищує число ступенів свободи.

Якщо ж $r < n$, то система (1.6) має, окрім тривіального розв'язку (1.7), ще й ненульові розв'язки, тобто стрижнева система, яку досліджують, допускає існування ненульових вузлових зсувів без подовжень її елементів (усі деформації $\lambda_j = 0$). Система є або геометрично змінюваною через неправильну структуру (зайві зв'язки в одній частині системи та відсутність необхідних зв'язків в іншій частині, як на рис. 1.12,ж), або миттєво змінюваною (як на рис. 1.12,з).

*На закінчення зауважимо, що обмежену рухливість миттєво-змінних і миттєво-жорстких систем (їх називають **особливими** системами) можна дослідити лише на основі геометрично нелінійного аналізу.*

Розв'язки системи рівнянь рівноваги

Крім питання про сумісність системи рівнянь рівноваги слід ще розглянути питання про те, який вигляд має розв'язок системи (1.2). У лінійній алгебрі доводиться, що якщо ранг матриці коефіцієнтів системи s рівнянь з n невідомими ($s \leq n$) дорівнює r , то достатньо розв'язати лише ті r рівнянь, що містять головний визначник щодо тих r невідомих, коефіцієнти при яких входять до головного визначника. Цей розв'язок дає вираз для r невідомих у вигляді лінійних функцій решти $(n-r)$ невідомих, значення яких залишаються незалежними та абсолютно довільними, тобто можна отримати лінійні співвідношення типу:

$$S_j = \sum_{\alpha=1}^r a_{\alpha j} P_{\alpha} + \sum_{\beta=r+1}^n b_{j\beta} S_{\beta} \quad (j=1, \dots, r). \quad (1.8))$$

Цей запис умовно передбачає, що головний визначник міститься в перших r стовпчиках матриці коефіцієнтів системи рівнянь рівноваги, а це означає, що рівняння рівноваги можуть бути записані у вигляді:

$$\sum_{j=1}^r A_{ij}^{(1)} S_j + \sum_{j=r+1}^n A_{ij}^{(2)} S_j + P_i = 0 \quad (i=1, \dots, s), \quad (1.9)$$

а матриця $[A_{ij}^{(1)}]$ має зворотну $[a_{ij}] = [A_{ij}^{(1)}]^{-1}$. За допомогою цієї оберненої матриці і знаходяться перші r зусиль, тобто отримується умова (1.8), в якій

$$b_{j\beta} = \sum_{\alpha=1}^r a_{j\alpha} A_{\alpha\beta}^{(2)}.$$

З формули (1.8) випливає можливість існування $(n-r)$ незалежних самонапружених станів, тобто таких наборів внутрішніх зусиль $S_1^0, S_2^0, \dots, S_r^0$, які задовольняють рівняння рівноваги за нульового зовнішнього навантаження.

Очевидно, що в статично визначених системах не можна створити жодного самонапруженого стану. Справедливість цього твердження випливає з того, що у статично детермінованій системі ранг матриці $r=n$ і, отже, кількість самонапружених станів $n-r=0$.

Зауважимо, що в статично невизначеній системі можуть знайтися стрижні, для яких у виразі (1.8) коефіцієнти $b_{j\beta} = 0 \quad (j=r+1, \dots, n)$, тобто в цих стрижнях не виникають зусилля самонапруження. Тоді замість (1.8) будемо, наприклад, мати

$$S_j = \sum_{\alpha=1}^r a_{\alpha j} P_{\alpha} + \sum_{\beta=r+1}^n b_{j\beta} S_{\beta} \quad (j=1, \dots, t)$$

$$S_j = \sum_{\alpha=1}^r a_{\alpha j} P_{\alpha} \quad (j=t+1, \dots, n)$$

Зусилля у стрижнях з номерами $j=t+1, \dots, r$ можуть визначитися лише з рівнянь рівноваги, тобто ці стрижні утворюють статично визначувану частину в цілому статично невизначуваній системі (рис. 1.13,а).

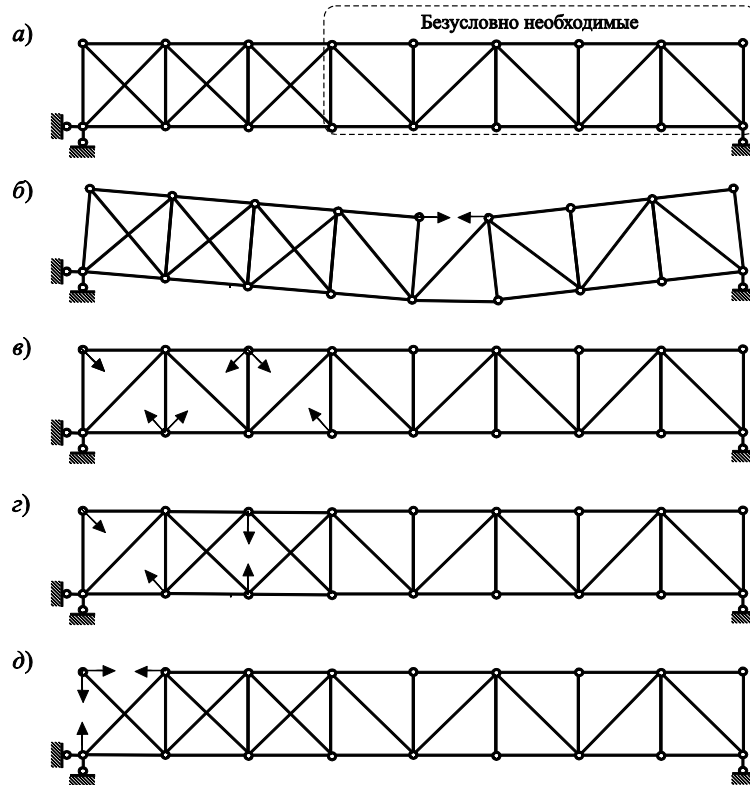


Рис. 1.13.

Природно, що як у будь-якої статично визначеної системи, де виключення з її складу хоча б одного стрижня перетворює її на механізм (рис. 1.13, б), аналогічно властивістю володіє і зазначена група стрижнів. Ця їхня властивість дала змогу назвати їх *безумовно необхідними*, на відміну від стрижнів з номерами $\beta = r+1, \dots, n$, які можуть бути видалені із системи без порушення її геометричної незмінності (рис. 1.13, в, г). Це так звані *зайві стрижні*, природно, їхня «надлишковість» відноситься тільки до функції забезпечення незмінності системи. Це не означає, що будь-яка комбінація зайвих стрижнів у кількості $n-r$ (ступінь статичної невизначеності) може бути видалена без порушення незмінності (рис. 1.13, д).



Питання:

У стандартних підручниках будівельної механіки йдеться про те, що змінювані системи не можуть використовуватися як конструкції. Чи означає це, що вони починають рухатися за будь-якого навантаження?

Відповідь:

Ні, не за будь-якого. Є навантаження, під час дії яких геометрично змінювана система зберігає рівновагу. З незліченної кількості можливих навантажень можна виділити певний клас *рівноважних навантажень*, таких, що під їхньою дією геометрично змінювана система перебуває в рівновазі.

Наприклад, дві рівні й протилежно спрямовані сили, прикладені вздовж осі стрижня, врівноважуються в межах цього стрижня.

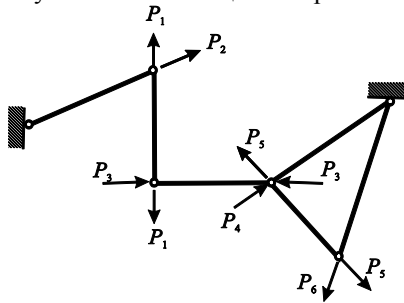


Рис. 1.14.

Отже, завжди можна сконструювати навантаження так, як це показано на рис. 1.14, причому для будь-якої лінійної комбінації таких попарно рівних сил отримане навантаження належатиме до класу рівноважних.

Питання:

Коли йшлося про безумовно необхідні стрижні, зазначалося, що зусилля в них можна знайти тільки з рівнянь статички. А якщо з рівнянь статички можна визначити не всі зусилля в стрижні, а тільки деякі – чи буде такий стрижень безумовно необхідним?



Відповідь:

Слід зазначити, що поняття статичної визначеності в загальному випадку є відносним. У найвужчому розумінні воно застосовується до якого-небудь одного внутрішнього зусилля. Якщо якесь внутрішнє зусилля може бути визначене тільки з умов рівноваги, то це зусилля можна назвати статично визначеним.

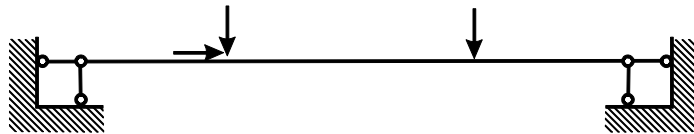


Рис. 1.15.

Наприклад, у балці, схему якої показано на рис. 1.15, з рівнянь статички можна знайти згинальні моменти, але не можна визначити поздовжні сили, для їхнього обчислення знадобиться скористатися ще й умовами сумісності деформацій.

Отже, можна говорити про статичну визначеність щодо якоїсь групи зусиль. Так, якщо реакції зв'язків, що з'єднують систему із землею, можуть бути визначені з умов рівноваги, то кажуть, що система *зовні статично визначена* (правильніше було б говорити про статичну визначеність щодо реакцій).

Питання:

Чи можна говорити про ступінь статичної невизначеності нестрижневої системи, наприклад пластини?



Відповідь:



Задачі розрахунку континуальних систем (пластин, оболонок, тривимірних тіл) статично невизначені і, як правило, ступінь їхньої статичної невизначеності нескінченний. Їхній скінченновимірний опис (наприклад, за допомогою методу скінченних елементів) є наближеним. Про це ми будемо говорити в наступних бесідах.

Але зі згаданого правила бувають винятки, один із них ми продемонструємо. Для цього розглянемо тканинну оболонку (рис. 1.16), утворену двома сімействами ниток, що лежать у площинах, паралельних координатним площинам XOZ и $Y0Z$, а поверхня оболонки описується рівнянням

$$z = \frac{4 f_1 x^2}{a^2} - \frac{4 f_2 y^2}{b^2}.$$

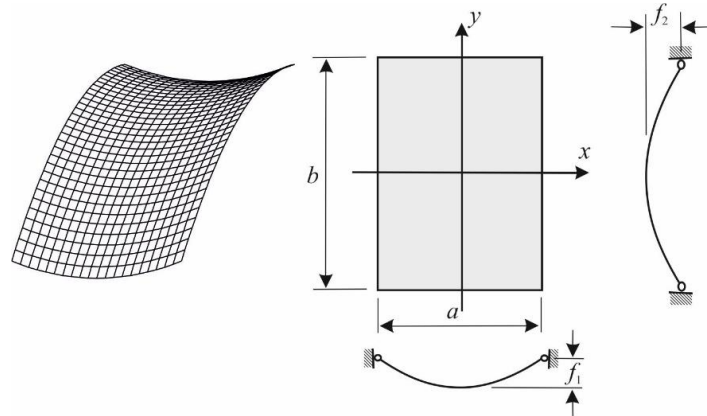


Рис. 1.16.

Визначимо, чи може існувати така форма оболонки без зовнішнього навантаження, і якщо так, то яке переднапруження вона допускає. Для цього розглянемо однорідні рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{8f_1x}{a^2}\sigma_x - \frac{8f_1y}{b^2}\sigma_y = 0.$$

З перших двох рівнянь випливає

$$\sigma_x = \sigma_x(y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x),$$

а це означає, що третє рівняння може бути задоволене лише за умови

$$\frac{f_1}{a^2}\sigma_x = \frac{f_1}{b^2}\sigma_y = C,$$

звідки

$$\sigma_x = \frac{Ca^2}{f_1}; \quad \sigma_y = \frac{Cb^2}{f_1}.$$

Таким чином, оболонка із зазначеною геометричною формою може існувати, допускаючи знайдене поле переднапружень, яке визначено з точністю до довільної постійної C . Той факт, що розв'язок однорідних рівнянь рівноваги містить одну довільну постійну, свідчить про однократну статичну невизначеність розглянутої системи. Цей абсолютно неочевидний результат було отримано в роботі В.М. Гордєєва [4].



Питання:

Змінність або незмінність подається у формі чорно-білої логіки «так – ні». А чи є якісь проміжні характеристики системи? Чи можна говорити про системи, що майже змінюються?

Відповідь:

Так, звісно. Коли ми говорили про розв'язність рівнянь рівноваги або спільності деформацій і визначали властивості їхніх розв'язків, то оперували поняттям виродженості (рівності нулю детермінанта системи). Але формально нерівний нулю детермінант може виявитися дуже малим, і система поводитиметься як «майже змінювана».

Як приклад можна розглянути просту статично визначувану систему, показану на рис. 1.11. Якщо кут φ близький до 90° , то система поводить як майже змінна. Вертикальне переміщення вузла Δ пов'язане з подовженням стрижня λ умовою $\Delta = \lambda / \cos \varphi$ і прямує до нескінченності навіть при малих подовженнях стрижнів (природно, що йдеться про аналіз лінеаризованої системи).

Слід зазначити, що класичне визначення змінюваності як властивості системи мати переміщення вузлів, які не спричиняють деформацій її елементів (переміщення як жорсткого механізму), було узагальнене і замінено таким:



Система вважається змінюваною, якщо вона допускає малі ненульові переміщення, при яких деформації елементів, якщо і відмінні від нуля, то є малими більш високого порядку.

Таким чином, логіка кінематичної класифікації перестала бути чорно-білою і збагатилася механізмом зіставлення порядків малості переміщень і деформацій.

Бесіда 1.5. Співставлення властивостей статично визначених і невизначених систем

З поняттям про статичну визначеність або статичну невизначеність студента знайомлять уже на самому початку вивчення будівельної механіки і потім досить швидко переходять до викладу способів розкриття статичної невизначеності, орієнтуючись в основному на техніку виконання розрахунків.



При цьому остеронь залишаються деякі питання загального характеру, на яких варто було б зупинитися більш детально. Згадане в передмові питання про можливість попереднього напруження статично визначуваної системи якраз і належить до числа такого роду «пропущених проблем».

Ми не будемо тут викладати подробиці, що стосуються технології складання класичних рівнянь методу сил або методу переміщень, вважаючи, що цей матеріал досить міцно забитий у голову читача тією системою «натаскування», яка характерна для сучасної інженерної освіти.

Виклад ілюструється аналізом дуже простих шарнірно-стрижневих систем, як це зроблено в підручнику А.П. Філіна [5], звідки запозичені наведені приклади. Але всі висновки можуть бути віднесені до довільних стрижневих систем, а також і до континуальних систем, якщо вони розглядаються в скінчено-елементному наближенні.

Розподіл зусиль. Розглянемо просту схему, показану на рис. 1.17, припускаючи, що площі поперечних перерізів стрижнів $A_1=A_2, A_3$ і модулі пружності $E_1=E_2, E_3$.

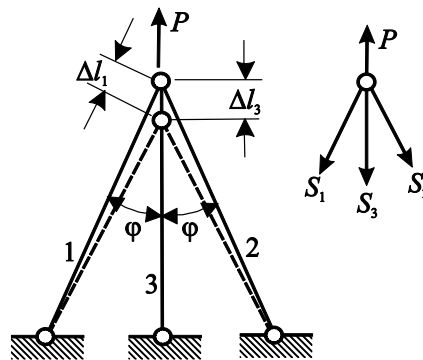


Рис. 1.17.

Рівняння рівноваги мають вигляд

$$-S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha = 0; \quad -S_1 \cos \alpha - S_3 - S_2 \cos \alpha + P = 0.$$

Умова кінематичної зв'язності записується у вигляді

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha.$$

Запишемо фізичні рівняння, що визначають співвідношення між подовженнями стрижнів і зусиллями в них

$$\Delta l_1 = S_1 l_1 / (E_1 A_1); \quad \Delta l_3 = S_3 l_3 / (E_3 A_3),$$

і з їхньою допомогою виразимо умову сумісності деформацій через зусилля

$$S_1 l_1 / (E_1 A_1) = S_3 l_3 \cos \alpha / (E_3 A_3).$$

З урахуванням того, що $l_3 = l_1 \cos \alpha$, маємо

$$S_1 = [E_1 A_1 / (E_3 A_3)] S_3 \cos^2 \alpha,$$

що дає можливість отримати значення всіх зусиль:

$$S_1 = S_2 = P \cdot \frac{E_1 A_1 \cos^2 \alpha / (E_3 A_3)}{1 + 2 E_1 A_1 \cos^2 \alpha / (E_3 A_3)},$$

$$S_3 = P \cdot \frac{1}{1 + 2 E_1 A_1 \cos^2 \alpha / (E_3 A_3)}.$$

Звідси видно, що в статично невизначеній системі зусилля залежать від співвідношень жорсткостей елементів системи. При цьому

чим відносно жорсткіший елемент статично невизначеної системи, тим більшу частку зовнішнього навантаження він сприймає на себе.

Роль збільшення жорсткості. Корисно розглянути, як впливає зміна площі поперечного перерізу умовно необхідного стрижня ферми на зусилля (зміна перерізу абсолютно необхідного стрижня ніяк не позначається на розподілі зусиль).

Щоб виконати такий аналіз, уявімо собі, що досліджуваний стрижень, який має довжину l і площу поперечного перерізу A , перерізаний, а його вплив на систему замінено зусиллями X (рис. 1.18).

Для визначення зусилля X можна використовувати рівняння методу сил, сенс якого, як відомо, полягає в тому, що насправді зміна відстані між кінцями нашого уявного розрізу дорівнює нулю:

$$\delta_{11} X + \delta_{1P} = 0,$$

де переміщення у напрямку досліджуваного стрижня δ_{11} (від дії сили $X=1$) і δ_{1P} (від дії навантаження) обчислені в системі з одним віддаленим стрижнем і ця система, можливо, ще залишалася статично невизначеною. Звідси знаходимо $X = -\delta_{1P} / \delta_{11}$.

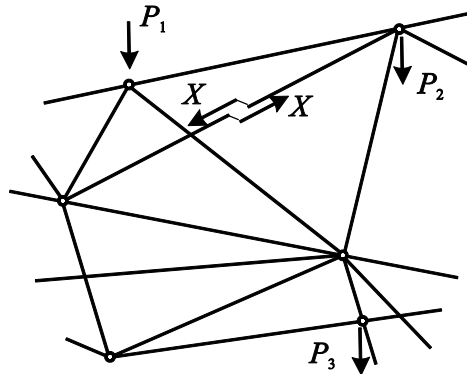


Рис 1.18.

Зауважимо, що переміщення δ_{11} можна представити у вигляді суми двох величин: зближення кінців стрижня Δ і подовження (вкорочення) самого стрижня, тобто:

$$X = -\frac{\delta_{1P}}{\Delta + l/EA}.$$

Аналіз цієї формули дає змогу дійти двох важливих висновків:

- а) при поступовому збільшенні площі поперечного перерізу (аж до нескінченності) зусилля в досліджуваному стрижні асимптотично прагне до кінцевої межі ;*
- б) ніякою зміною площі поперечного перерізу стрижня не можна домогтися зміни знака зусилля в ньому.*

Монтажні зусилля. Якщо який-небудь елемент статично визначеної системи виготовлено неточно, то під час складання такої системи спотворюється її конфігурація, але в елементах зусилля не виникають. Відповідну ілюстрацію наведено на рис. 1.19, де на рис. 1.19,а представлено проєктний вигляд системи, а на рис. 1.19,б – її фактичний вигляд (штрихова лінія) після складання за умови, що довжина правого стрижня менша за проєктну на δ .

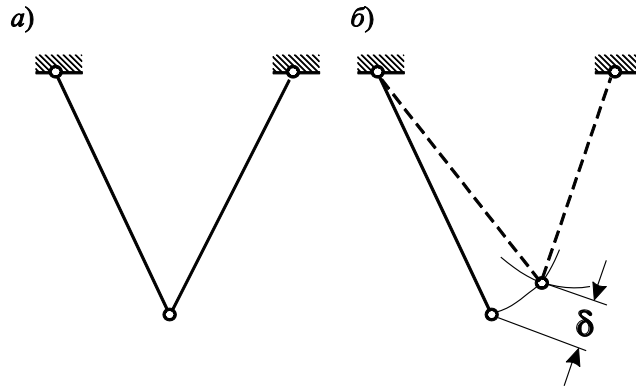


Рис. 1.19.

У разі ж статично невизначеної системи в такій ситуації виникають так звані монтажні зусилля, які є *самоврівноваженими*, тобто такими, що існують за відсутності зовнішнього навантаження.

На рис. 1.20,а показано схему системи, в якій довжина стрижня 2 виявилася меншою за проєкту. На рис. 1.20,б – вигляд системи після з'єднання елементів у нижньому вузлі (штрихова лінія) і на рис. 1.20,в – вузол і - картина самоврівноважених зусиль, що виникають в елементах ферми в результаті монтажу.

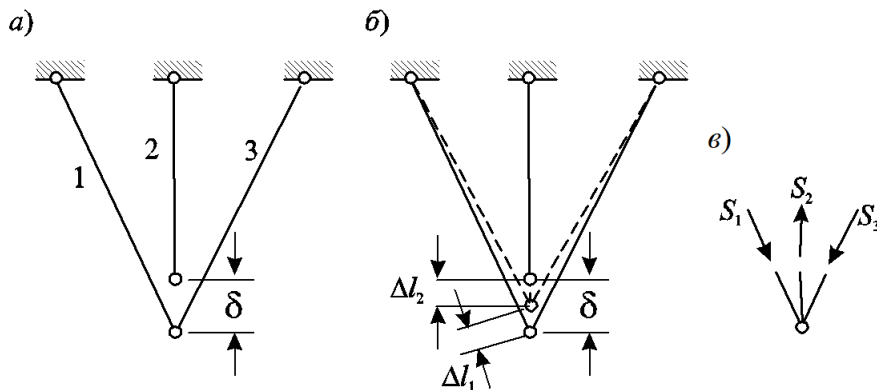


Рис. 1.20.

Для визначення величин цих зусиль використовуємо поряд із рівняннями рівноваги

$$S_1 = S_3; \quad 2S_1 \cos \varphi = S_2,$$

$$\delta = \Delta l_2 + \Delta l_1 / \cos \alpha$$

рівняння сумісності деформацій $\delta = \Delta l_2 + \Delta l_1 / \cos \alpha$. Враховуючи, що

$$\Delta l_1 = S_1 l_1 / EA_1; \quad \Delta l_2 = S_2 l_2 / EA_2,$$

отримуємо рівняння сумісності деформацій, виражене через зусилля

$$\delta = S_2 l_2 / EA_2 + S_1 l_1 / (EA_1 \cos \alpha).$$

Розв'язуючи це рівняння спільно з рівняннями рівноваги, отримуємо значення монтажних зусиль

$$S_1 = \frac{\delta}{[l_2 \cos \alpha / (E_1 A_1)] [1 / \cos^3 \alpha + 2EA_1 / (E_3 A_3)]};$$

$$S_2 = \frac{2\delta}{[l_2 / (E_1 A_1)] [1 / \cos^3 \alpha + 2EA_1 / (E_3 A_3)]}.$$

Підкреслимо, що, згідно з рис. 1.20, зусилля S_1 та S_3 – стискальні, а S_2 – розтягувальні.

Температурні зусилля. Якщо в статично визначуваній системі виникає *неоднорідне поле температурних прирощень* порівняно з температурним полем, за якого здійснено монтаж системи (температурою замикання), то відбувається зміна конфігурації системи, але зусилля в елементах не виникають (рис. 1.21,а). У разі ж статично невизначеної системи (рис. 1.21,б) в такій ситуації виникають так звані *температурні зусилля*, які є самоврівноваженими.

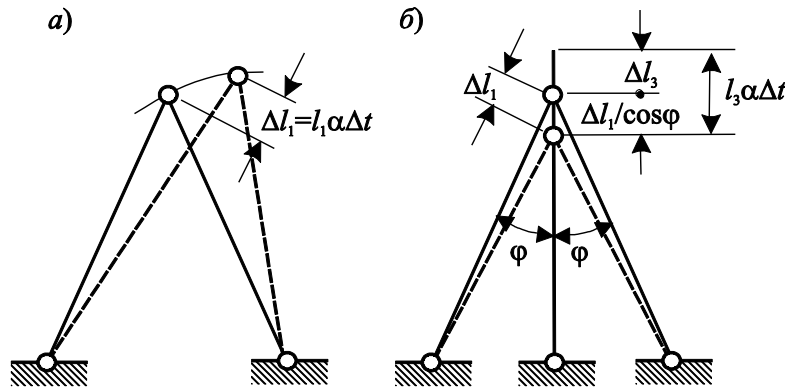


Рис. 1.21.

Рівняння рівноваги та фізичні рівняння мають той самий вигляд, що й під час визначення монтажних зусиль, а сумісність деформації виражається рівнянням

$$l_3 \alpha \Delta t = \Delta l_3 + \Delta l_1 / \cos \varphi.$$

Тоді рівняння сумісності деформацій, виражене через зусилля, записується так:

$$l_3 \alpha \Delta t = S_3 l_3 / (E_3 A_3) + S_1 l_1 / (E_1 A_1 \cos \varphi).$$

Розв'язуючи спільно статичні, кінематичні та фізичні рівняння, отримуємо температурні зусилля

$$S_1 = S_2 = \alpha \Delta t \cdot \frac{E_3 A_3 \cos^2 \varphi}{2 \cos^2 \varphi + E_3 A_3 / (E_1 A_1)},$$

$$S_3 = \alpha \Delta t \cdot \frac{E_3 A_3 \cos^3 \varphi}{2 \cos^2 \varphi + E_3 A_3 / (E_1 A_1)}.$$

Звідси видно, що температурні зусилля залежать від ступеня неоднорідності поля температурних нагрівів.

Дійсно, якщо у фермі при $A_1=A_2=A_3=A$, $E_1=E_2=E_3=E$ усі три стрижні були нагріті на одне й те саме число градусів, то зусилля в стрижнях не виникли б зовсім – зміна довжини середнього стрижня не зустріла б утисків з боку крайніх стрижнів.

Зусилля від зміщення опор. У статично визначуваній системі в разі відносного зміщення опор, що сталося з тієї чи іншої причини, виникає зміна конфігурації, але вона не супроводжується появою зусиль в елементах. Прикладом може слугувати система, показана на рис. 1.22,а. У статично ж невизначеній системі (рис. 1.22,б) в аналогічній ситуації (наприклад, під час опускання опорного вузла середнього стрижня на Δ) в елементах виникають самоурівноважені зусилля.

Рівняння рівноваги та фізичні рівняння мають той самий вигляд, що й під час визначення монтажних зусиль, а спільність деформації (рис. 1.22) виражається рівнянням

$$\Delta l_x = (\Delta - \Delta l_3) \cos \alpha.$$

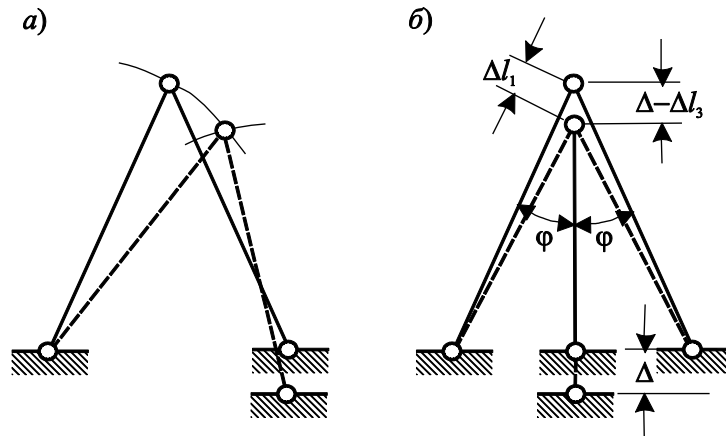


Рис. 1.22.

Розв'язуючи спільно рівняння рівноваги, фізичні рівняння й умову спільності деформацій, отримуємо значення внутрішніх зусиль

$$S_1 = S_2 = \frac{\Delta}{l_1} \cdot \frac{EA \cos \varphi}{(1 + 2 \cos^2 \varphi)}; \quad S_3 = \frac{\Delta}{l_1} \cdot \frac{EA \cos^2 \varphi}{(1 + 2 \cos^2 \varphi)}.$$

Тут, як і вище, ми маємо справу з системою самоврівноважених зусиль, характерних тільки для статично невизначених систем. У статично визначених системах такі зусилля не виникають.

Бесіда 1.6. Повторення – про метод сил і метод переміщень



У цій лекції ми розглянемо класичні методи будівельної механіки, оперуючи векторно-матричною символікою. Такий спосіб викладу є сьогодні загальноприйнятим, і автор заздалегідь просить вибачення в тих читачів, яким для сприйняття потрібно буде відновити в пам'яті найпростіші математичні поняття.

Утім, вони можуть пропустити цей розділ, повіривши на слово, що його висновки є обґрунтованими (щоправда, втративши певну частку можливості критичного підходу до наших тверджень).

Будемо розглядати досить загальну систему, поки що припускаючи, що вона містить деяку цілком певну кількість вузлів, до яких примикають пружні елементи.

Елементи системи вважаються приєднаними тільки до вузлів розрахункової схеми, *один з одним безпосередньо вони не з'єднуються*. Зазначену особливість побудови розрахункової схеми не завжди видно й під час використання традиційних способів зображення розрахункової схеми і тоді з'являється «каламутна» тема «кратності шарнірів» в аналізі кінематичних властивостей.

Наприклад, розрахункова схема, показана на рис. 1.23,а в традиційній формі, може навести на думку про безпосереднє з'єднання елементів одного з іншим, тоді як детальніше зображення на рис. 1.23,б дає змогу уникнути такого висновку. Зауважимо також, що в детальному зображенні видно й інші особливості реалізації розрахункової схеми, зокрема, можливість виконання однакових кінематичних умов з використанням різних наборів зв'язків (порівняйте різні способи опису опорних вузлів на рис. 1.23).

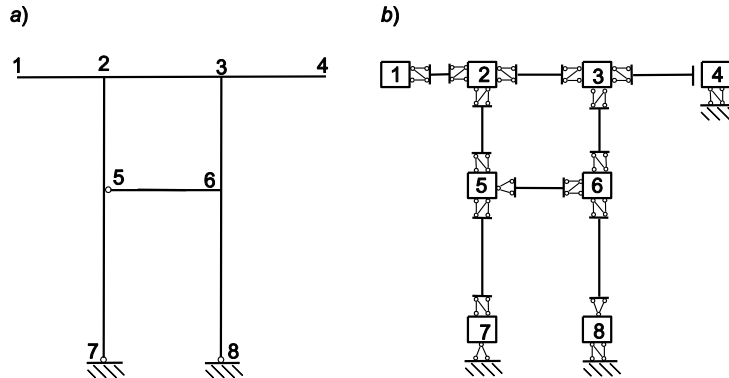


Рис. 1.23.

Якщо не вникати в подробиці, то всякий елемент системи може характеризуватися деяким набором *внутрішніх переміщень* (або, якщо завгодно, *деформацій*) $\mathbf{u}_e$ та відповідних їм *внутрішніх сил* (зусиль) $\mathbf{s}_e$. Тут і далі нижній індекс e підкреслює приналежність індексованої величини до окремого кінцевого елемента.

Вектори $\mathbf{u}_e$ і $\mathbf{s}_e$ у розглянутому тут випадку лінійно-пружної системи пов'язані один з одним законом стану (фізичним законом), що виражається рівністю

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{F}_e \mathbf{u}_e \quad (1.10)$$

з симетричною позитивно визначеною (отже, не виродженою) матрицею $\mathbf{F}_e$. Останнє передбачає, що будь-який, відмінний від нульового, вектор внутрішніх переміщень $\mathbf{u}_e$ спричиняє деформацію скінченного елемента (зміну його форми та/або розмірів), що супроводжується накопиченням строго позитивної внутрішньої енергії в елементі. Це означає, зокрема, що вектор $\mathbf{u}_e$ не містить форм переміщень кінцевого елемента як жорсткого тіла. Саме тому термінологічно допустимо ототожнювати, як це зроблено вище, внутрішні переміщення саме з *деформаціями* кінцевого елемента.

Переміщення $\mathbf{u}_e$ кінцевих точок елемента пов'язані з переміщеннями вузлів $\mathbf{u}$ умовами сумісності деформацій

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{Q}_e^T \mathbf{u} + \mathbf{d}_e,$$

де $\mathbf{d}_e$ – вектори кінематичних впливів, заданих на елементах системи (наприклад, температурні подовження), а зусилля $\mathbf{s}_e$ задовольняють умовам рівноваги

$$\mathbf{Q}_e \mathbf{s}_e = \mathbf{p}.$$

Для системи загалом повний набір рівнянь, що визначають її роботу, має вигляд:

$$\left. \begin{array}{l} \text{рівняння рівноваги} \\ \text{геометричні рівняння} \\ \text{фізичні рівняння} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{Q}_s = \mathbf{p} \\ \Delta = \mathbf{Q} \mathbf{u} + \mathbf{d} \\ \mathbf{s} = \mathbf{F} \mathbf{D} \end{array} \quad (1.11)$$

відносно невідомих $\mathbf{s}$, Δ та $\mathbf{u}$.

Перехід від невідомих $\mathbf{u}_e$ та $\mathbf{s}_e$ пов'язаний і з перенумерацією, він реалізується так званою *процедурою асемблювання* (складання) і є достатньою мірою формальним.

Розмірності «зведених» векторів $\mathbf{s}$, Δ , $\mathbf{d}$ однакові й дорівнюють сумарному за системою числу m – кількості *внутрішніх* невідомих сил. Розмірності векторів $\mathbf{u}$ та $\mathbf{p}$ також однакові і дорівнюють загальному числу невідомих вузлових переміщень n . Матриця рівнянь рівноваги $\mathbf{Q}$ має розмірність $n \times m$. Квадратна симетрична матриця $\mathbf{F}$ порядку m має блоково-діагональну структуру, число її блоків дорівнює кількості елементів, розмір кожного блока – кількості внутрішніх невідомих відповідного елемента. Зокрема, для ферм матриця $\mathbf{F}$ буде діагональною.

Метод переміщень

Якщо, як це прийнято у *методі переміщень*, як основні невідомі прийняти вузлові переміщення $\mathbf{u}$, слід виключити з (1.11) вектори $\mathbf{s}$ і Δ . Для цього їхні значення з другого та третього рівнянь (1.1) підставляються у перше рівняння, і ми отримуємо

$$\mathbf{QFQ}^T \mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{QF} \mathbf{d}.$$

Число невідомих компонентів n вектора переміщень $\mathbf{u}$ називають *ступенем кінематичної невизначеності системи*, а квадратну матрицю

$$\mathbf{K} = \mathbf{QFQ}^T$$

– *матрицею жорсткості системи*. З її допомогою розв'язувальні рівняння записуються у формі

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{p} - \mathbf{QF} \mathbf{d}. \quad (1.12)$$

З (1.12) отримуємо

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{QF} \mathbf{d}), \quad (1.13)$$

а зусилля в елементах вираховуються за формулою

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{d}) = \mathbf{FQ}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} + (\mathbf{I} - \mathbf{FQ}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{F} \mathbf{d}. \quad (1.14)$$

І цим завершується визначення параметрів напружено-деформованого стану системи.

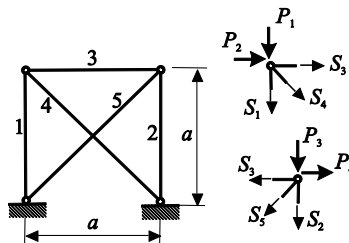


Рис. 1.24.

Проілюструємо все сказане прикладом найпростішої системи, схема якої показана на рис. 1.24.

Матриця $\mathbf{Q}$ рівнянь рівноваги для цієї конструкції має вигляд

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,7071 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,7071 \end{bmatrix}$$

Якщо жорсткості всіх елементів EF_i ($i = 1, \dots, 5$) вважати однаковими, то

$$\mathbf{F} = (EF/a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7071 \end{bmatrix}$$

Матриця жорсткості, обчислена як $\mathbf{K} = \mathbf{QFQ}^T$ буде дорівнювати

$$\mathbf{K} = (EF/a) \begin{bmatrix} 1,3536 & 0,3536 & 0 & 0 \\ 0,3536 & 1,3536 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1,3536 & 0,3536 \\ 0 & 1 & 0,3536 & 1,3536 \end{bmatrix}$$

Перетворюючи (1.13), отримаємо вектор вузлових переміщень у вигляді

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = (a/EF) \begin{bmatrix} 0,8845 & 0,5578 & 0,1155 & 0,4422 \\ 0,5578 & 2,1356 & 0,4422 & 1,6933 \\ 0,1155 & 0,4422 & 0,8845 & 0,5578 \\ 0,4422 & 1,6933 & 0,5578 & 2,1356 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Вектор внутрішніх сил s отримаємо (1.14) у вигляді

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = (EF/a) \begin{bmatrix} 0,8845 & 0,5578 & 0,1155 & 0,4422 \\ 0,1155 & 0,4422 & 0,8845 & 0,5578 \\ 0,1155 & 0,4422 & 0,1155 & 0,4422 \\ 0,1633 & 0,7887 & 0,1633 & 0,6253 \\ 0,1633 & 0,6253 & 0,1633 & 0,7887 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Метод сил

Можливий і другий шлях розв'язання – на основі *методу сил*. Тут важливу роль відіграють такі характеристики, як вже згадуваний ранг r матриці рівноваги $\mathbf{Q}$ і ступінь статичної невизначеності системи k , пов'язані наступним співвідношенням $r = \text{rank } \mathbf{Q}$, $k = m - r$.

Відповідно до (1.8) загальне рішення рівнянь рівноваги $\mathbf{Q}_s = \mathbf{p}$ представляється у вигляді⁸

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (1.15)$$

На математичному рівні перший доданок у правій частині (1.15) являє собою загальне рішення відповідних однорідних рівнянь рівноваги, а другий доданок – приватне рішення неоднорідних рівнянь. Всі стовпці матриці $\mathbf{A}$ лінійно незалежні, утворюючи так звану *фундаментальну* систему рішень однорідних рівнянь з матрицею $\mathbf{Q}$; таким чином, ранг $\mathbf{A}$ дорівнює k – ступеню статичної невизначеності системи.

Зауважимо, що рішення (1.8) передбачає можливість завдання зусиль, S_β у деяких стрижнях із номерами $\beta = r + 1, \dots, n$. Але щоб можна було задавати внутрішні зусилля S_β , стрижні з цими номерами мають бути розрізані, оскільки можна задати лише зовнішні, а не внутрішні сили. Отже, рівняння (1.8) можуть бути віднесені до системи, у якій частина стрижнів (у кількості, що дорівнює її ступеню статичної невизначеності) розрізана. Таку систему називають *основною системою методу сил*.

Таким чином, матриця $\mathbf{A}$ розмірами $m \times k$ – матриця зусиль в основній системі методу сил від дії одиничних значень невідомих $\mathbf{x}$, кількість яких дорівнює k , а матриця $\mathbf{B}$ розмірами $m \times n$ – матриця зусиль в основній системі від одиничних значень вузлових навантажень. Ці дві матриці такі, що

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad (1.16)$$

де $\mathbf{0}$ – прямокутна нульова матриця розмірами $n \times k$, $\mathbf{I}$ – одинична матриця порядку n .

Якщо знову звернутися до прикладу одноразово статично невизначеної системи за рис. 1.24, то для неї можна прийняти

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1,4142 \\ -1,4142 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,4142 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,4142 \end{bmatrix}.$$

Неважко переконатися в тому, що умови (1.16) виконуються для цих матриць, що підтверджує правильність їхньої побудови.

⁸ Порівняйте з (1.8)

Виключаючи з геометричних рівнянь групи (1.11) деформації Δ за допомогою фізичних рівнянь, отримаємо зв'язок між вектором внутрішніх сил $\mathbf{s}$ та вектором зовнішніх переміщень $\mathbf{u}$ у формі

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{s} - \mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{d},$$

звідки після підстановки (1.15) отримуємо

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Ax} - \mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{d} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{Bp}.$$

Помножуючи цю рівність зліва на $\mathbf{A}^T$, отримуємо

$$\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Ax} - \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{d} - \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Bp}. \quad (1.17)$$

З огляду на першу з умов (1.16), анулюється другий член у лівій частині (1.17). Вводячи матрицю податливості

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}$$

ми приходимо до розв'язного рівняння

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{A}^T\mathbf{d} - \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Bp}. \quad (1.18)$$

З цього рівняння випливає

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{d} - \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Bp}). \quad (1.19)$$

Внутрішні зусилля вираховуються після підстановки (1.19) в (1.15), що дає

$$\mathbf{s} = \mathbf{AD}^{-1}\mathbf{ATd} + (\mathbf{I} - \mathbf{AD}^{-1}\mathbf{ATF}^{-1})\mathbf{Bp}.$$

Цим завершується розрахунок за методом сил.



Питання:

В університеті нас навчали зовсім по-іншому. Там канонічні рівняння методу сил отримували з умови відсутності переміщень у тих розрізах, які було введено під час переходу від схеми, що розраховується, до її основної системи. Як усе це в'яжеться?

Відповідь:

Фізичний зміст розв'язних матричних рівнянь (1.12) і (1.18) можна побачити, якщо уважно розглянути ланцюжок наведених вище перетворень.

При виведенні рівнянь методу переміщень значення зусиль із третього рівняння (1.11) та вузлових переміщень з другого рівняння (1.11) підставляються у перше рівняння, яке було умовою рівноваги.



Отже, метод переміщень оперує з умовами рівноваги і його розв'язувальні рівняння виражають саме цю умову.

Тепер розглянемо якесь, наприклад, i -е, рівняння із системи (1.12), вважаючи для простоти, що є лише силові впливи, а вектор $\mathbf{d}$ дорівнює нулю.

$$K_{i1}u_1 + K_{i2}u_2 + \dots + K_{ij}u_j + \dots + K_{in}u_n - p_i = 0. \quad (1.20)$$

Кожен доданок цього рівняння типу $K_{ij}u_j$ є зусилля викликане невідомим переміщенням u_j , а створити у системі деяке вузлове переміщення можна лише у тому випадку, коли на систему накладено відповідний зв'язок, тобто, як у класичному поясненні, йдеться про систему з накладеними додатковими зв'язками – *основу систему методу переміщень*. Сама ж умова (1.20) говорить, що сумарне зусилля в i -го додаткового зв'язку дорівнює нулю, оскільки в реальній конструкції такий зв'язок відсутній.

Для рівняння методу сил внутрішні зусилля, отримані з рівнянь рівноваги у формі (1.15), після виключення вузлових переміщень (це зроблено за допомогою фізичних рівнянь) підставлялися в геометричні рівняння групи (1.11) і, отже, остаточно розв'язувальна система виражає умову сумісності деформацій.

Неважко помітити, що кожне із рівнянь (1.18) свілчить про відсутність переміщень у тих розрізах, які були зроблені в «зайвих» стрижнях при побудові основної системи методу сил.

Корисно звернути увагу на те, що в традиційному викладі канонічних методів розрахунку статично невизначених систем у явному вигляді не використовуються записи загальних рівнянь (1.11), так як це робиться в теорії пружності.

Наприклад, *рівняння рівноваги* в методі сил у явному вигляді ніяк не записувалися, хоча у неявному вигляді вони й використовувалися при побудові епюр в основній системі методу сил. Для всієї системи в цілому вони задовольнялися побічно через побудову епюр в основній системі способу сил. Аналогічно і з методом переміщень. Тут рівняння *сумісності деформацій* мають на увазі і задовольняються опосередковано щодо одиничних реакцій в основній системі методу переміщень. Цих недоліків позбавлений спосіб побудови канонічних рівнянь на основі перетворення загальної системи (1.11).

І, нарешті, корисно вказати на те, що основні методи будівельної механіки двоїсті і взаємно доповнюють один одного. Для методу сил, наприклад, справедливе твердження:

з усіх статично можливих розв'язків для розв'язуваної задачі дійсним буде те, яке задовольняє умовам сумісності деформацій, тобто канонічним рівнянням методу сил

У методі переміщень вищенаведеному твердженню відповідає двоїсте твердження:

з усіх кінематично можливих розв'язків для даної задачі дійсним буде те, що задовольняє рівнянням рівноваги, тобто канонічним рівнянням методу переміщень.

Грунтуючись на цих формулюваннях, можна дати ще одну інтерпретацію канонічним системам рівнянь.

У методі сил ми аналізуємо реакцію основної системи з вилученими зайвими зв'язками на всі можливі варіанти зміни напруженого стану і приймаємо за істинний той варіант, який відповідає умовам сумісності деформацій. Дійсно, напружений рівноважний стан однозначно визначається через зусилля в основній системі від зовнішнього навантаження, а зміни цього напруженого стану через зусилля від впливу невідомих методу сил.

У методі переміщень ми аналізуємо реакцію основної системи на всі можливі варіанти зміни переміщень додатково накладених зв'язків і приймаємо за істинний той варіант, який відповідає умовам рівноваги.

Питання:

Під час виведення формул використовували обернені матриці. А звідки випливає, що можна обернути матрицю жорсткості **K** або матрицю податливості **D**?



Відповідь:

Ці матриці визначаються добутками

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A},$$

у яких середній член пов'язаний з невиродженою матрицею зв'язку між напруженнями і деформаціями. Оскільки ранг матриці визначається рангом її співмножників, то нам слід розглянути матриці **Q** та **A**.

Для методу сил матриця податливості **D** не вироджена, якщо ранг матриці **A** дорівнює числу її стовпців *k*. Вище зазначалося, що всі її стовпці лінійно незалежні, що є умовою геометричної незмінності системи.

Аналогічно, для методу переміщень матриця жорсткості **K** не вироджена, якщо ранг *r* матриці **Q** дорівнює числу її рядків, що відповідає випадку геометричної незмінності системи.

Отже, у геометрично незмінній системі матриця жорсткості та матриця податливості не вироджені.

Питання:

Ви сказали про незмінність як умову розв'язання рівнянь методу сил чи методу переміщень. А що відбувається у разі «майже змінності»?





Відповідь:

Загальноприйнятою характеристикою якості системи лінійних рівнянь алгебри є так звана *обумовленість* матриці коефіцієнтів. Погано обумовлена матриця має таку властивість, що навіть дуже мала зміна значень її компонентів може призвести до помітної зміни розв'язання відповідної системи рівнянь.

Як приклад погано обумовленої системи лінійних рівнянь можна навести таку:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

Її розв'язок $X_1=X_2=X_3=X_4=1$, але якщо змінити значення першого коефіцієнта в першому рівнянні з 5 на 4,99, то отримаємо таке розв'язання:

$$X_1=6, X_2=-2,17, X_3=0,28 \text{ и } X_4=1.32.$$

У лінійній алгебрі доводиться, що погано зумовлена матриця має велике значення *числа зумовленості*, яке дорівнює відношенню найбільшого власного значення до найменшого.

Під час розв'язання задач розрахунку «майже змінних» конструкцій ми якраз і стикаємося з поганою обумовленістю розв'язних рівнянь. Наприклад, відомо, що погано обумовлені матриці жорсткості часто з'являються в тих випадках, коли в одному вузлі розрахункової моделі сполучаються елементи з різко відмінними параметрами жорсткості. Покажемо на простому прикладі як можна інтерпретувати таку ситуацію в термінах механіки [7].

На рис. 1.25 показано формально незмінну систему з двома ступенями свободи, матриця жорсткості якої має вигляд

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1+\alpha & -1 \\ -1 & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

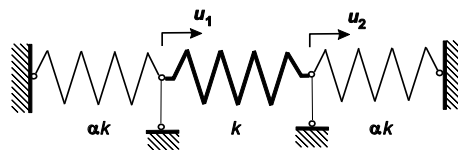


Рис. 1.25.

Власні числа цієї матриці $\lambda_1=\alpha$; $\lambda_2=2+\alpha$, а число обумовленості

$$H=\lambda_2/\lambda_1=1+2/\alpha.$$

За великої жорсткості середньої пружини порівняно з жорсткістю крайніх пружин параметр α малий і число H стає великим, що свідчить про погану

обумовленість і можливу втрату точності під час розв'язування рівнянь з такою матрицею.

Неважко помітити, що механічна поведінка конструкції, яку розглядають, наближається до поведінки змінюваної системи. Дійсно, можливе переміщення середньої пружинки як жорсткого тіла за умови нехтовно малого опору крайніх пружин. Їхня реакція, зважаючи на наведене співвідношення жорсткостей, спричиняє мізерний опір такій деформації, і компоненти напружено-деформованого стану можуть бути обчислені неточно під час розв'язання рівнянь, коли в гру вступають помилки округлення.

Якщо ж змінити співвідношення жорсткостей на зворотнє (крайні пружини жорсткі, середня – податлива), то матриця жорсткості матиме число обумовленості $H \approx 1$. У вузлі знову сходяться елементи з різко відмінними жорсткостями, але матриця жорсткості добре зумовлена і відповідає тепер пружній конструкції (середній пружинці), приєднаний до землі зв'язками, що практично не деформуються.

У тих випадках, коли в одному вузлі розрахункової моделі сполучаються елементи з різко відмінними параметрами жорсткості, можливе (але не обов'язкове) помітне зниження точності розрахунків.

Бесіда 1.7. Попереднє напруження системи



Вище вже йшлося про можливі самонапружені стани статично невизначеної системи. При цьому саме поняття самонапруження, тобто такого *самоврівноваженого напруженого стану системи, який існує без зовнішнього навантаження*, виникло як наслідок розв'язання рівнянь рівноваги [формула (1.8)].

Але до реального створення самонапруженого стану ми прийшли, розглядаючи випадки температурного навантаження, а також випадки монтажних зусиль або зусиль, що викликаються зміщенням опор. Останні два варіанти виникнення самоврівноважених зусиль самонапруження можуть бути використані свідомо з метою штучного регулювання зусиль.

Ідея активного втручання в роботу конструкції шляхом створення попереднього напруження відноситься до далеких часів. Її отримання можна побачити в спорудах із дерева, заліза, каменю, бетону, а останнім часом і в пластичних матеріалах. Часто попереднє напруження застосовували неусвідомлено, та й зараз є безліч попередньо напружених предметів, попереднє напруження яких ми не помічаємо. Досить вказати на дерев'яні бочки, стягнуті обручами, або на парасольки з гнучкого шовкового матеріалу, що натягнуті підпружиненими спицями.

У наш час попереднє напруження стало одним із робочих інструментів інженера і йому вже недостатньо покладатися тільки на емпірику, а потрібен більш детальний аналіз можливостей переднапруження.

Насамперед слід пам'ятати, що кількість різних лінійно незалежних варіантів самонапруженого стану системи дорівнює ступеню її статичної невизначеності.

Чи означає це, що цьому ж числу дорівнює кількість способів створення попереднього напруження? Безумовно, ні. Наприклад, у двопрогонної одного разу статично невизначеної балки (рис. 1.26,а) може існувати тільки одна форма епюри самоурівноважених моментів (рис. 1.26,б). А домогтися її реалізації можна підвищенням середньої опори (рис. 1.26,в), опусканням будь-якої з крайніх опор (рис. 1.26,г), задаванням згинаючих моментів за допомогою домкрата, який діє на конструкції, доки не буде виконано замонолічування середнього шарніра (рис. 1.26,д) та іншими способами.

Враховуючи, що стани самонапруження, які нас цікавлять, можуть бути створені шляхом температурної дії, а остання еквівалентна деяким заданим подовженням стрижнів, можна уявити собі, що якісь зі стрижнів забезпечені

регуляторами довжини, за допомогою яких можна створювати попереднє напруження системи. Цей прийом також використовується на практиці.

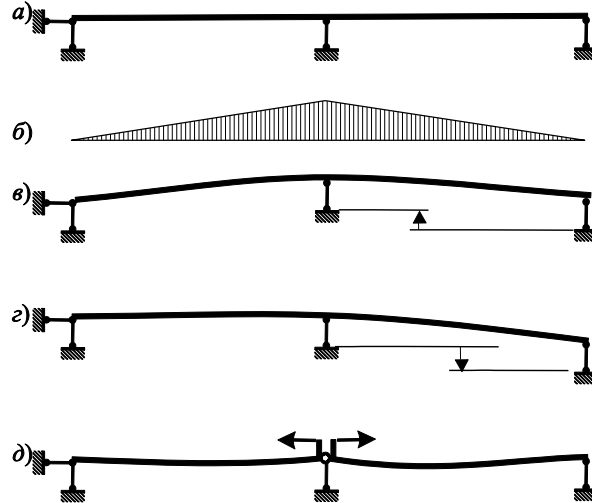


Рис. 1.26.

У розглянутому вище прикладі розподіл зусиль самонапруження єдиний. Якщо ж система є багаторазово статично невизначеною, то є можливість урізноманітнити цей стан, але не виходячи за певні рамки. Ці рамки визначаються деяким базисним набором із m лінійно незалежних станів самонапруження (m – ступінь статичної невизначеності)

$$S_{1k}^0, S_{2k}^0, \dots, S_{rk}^0 \quad (k=1, \dots, m) \quad (1.21)$$

Усі інші можливі стани самонапруження є їхніми лінійними комбінаціями, тобто алгебраїчними сумами базисних значень, узятих із числовими коефіцієнтами:

$$S_j^0 = \sum_{k=1}^m c_k S_{1k}^0 \quad (j=1, \dots, r) \quad (1.22)$$

Підбираючи коефіцієнти c_k , можна отримати різні розподіли зусиль S_j^0 , але й тільки. І якщо, наприклад, у всіх елементах набору (1.21) для якого-небудь стрижня з номером α значення $S_{\alpha k}^0 = 0 \quad (k=1, \dots, m)$, то ніякими хитрощами створити ненульове попереднє напруження в цьому стрижні не вдасться. Неважко збагнути, що такими будуть усі безумовно необхідні стрижні.

Сам набір (1.21) найпростіше отримати таким чином. У системі видаляються зайві зв'язки, так як це робиться при створенні статично визначеної основної системи методу сил. У кожному відкинутому зв'язку (у розрізі еле-

мента) вводять невідомі сили, і розрахунок на кожен з них дає один із комплектів самоврівноважених зусиль із набору (1.21).

Вилучення зайвих зв'язків, що перетворює статично невизначену систему на статично визначену, може бути виконаний різними способами, проте число зв'язків, що відкидаються, завжди буде одним і тим самим і дорівнюватиме ступеню статичної невизначеності m .

Як приклад розглянемо схему, представлену на рис. 1.27.

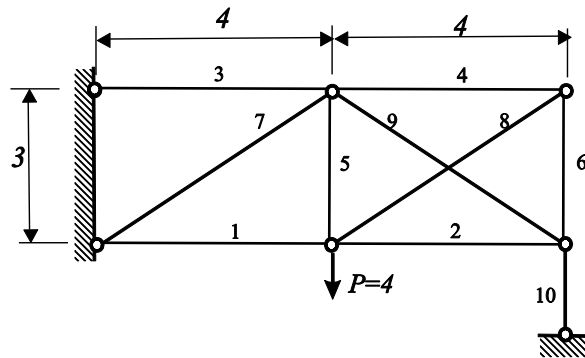


Рис. 1.27

Система двічі статично невизначена і в табл. 1.1 показано два варіанти зусиль самонапруження, отримані зазначеним вище способом

Таблиця 1.1

		Варіант 1			Варіант 2		
		P	X_1	X_2	P	X_1	X_2
S_1	=	0,000	1,333	0,000	2,667	-0,500	0,000
S_2	=	0,000	0,000	-0,800	2,667	-0,500	-0,800
S_3	=	5,333	-2,667	0,000	0,000	1,000	0,000
S_4	=	0,000	-1,333	-0,800	0,000	0,000	-0,800
S_5	=	4,000	-1,000	-0,600	4,000	0,000	-0,600
S_6	=	0,000	-1,000	-0,600	0,000	0,000	-0,600
S_7	=	-6,667	1,667	1,000	-3,333	-0,633	0,000
S_8	=	0,000	1,667	0,000	0,000	0,000	1,000
S_9	=	0,000	1,000	0,000	-3,333	0,633	1,000
S_{10}	=	0,000	0,000	0,000	-2,000	0,310	0,000

У загальному випадку можна собі уявити різні способи відкидання зайвих зв'язків під час перетворення статично невизначеної системи на статично визначену. При цьому виникають різні стани самонапруження, але всі вони

можуть бути отримані один з одного лінійними перетвореннями. Наприклад, для двічі статично невизначеної системи, показаної на рис. 1.28, а, легко отримати два стани самонапруження (рис. 1.28, б, в), а стан самонапруження, зображений на рис. 1.28, г, виходить як різниця станів самонапруження, показаних на рис. 1.28, б, в.

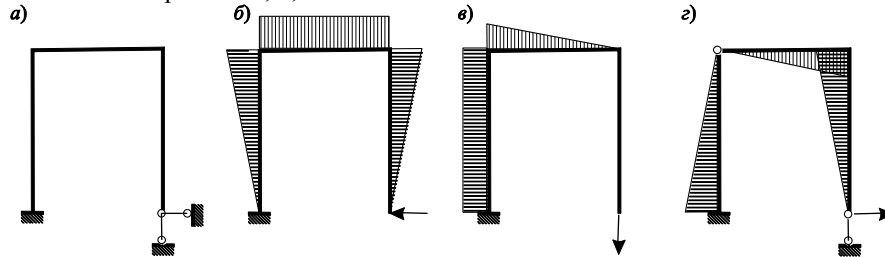


Рис. 1.28.

Висловимо одне корисне зауваження – зусилля в статично невизначеній системі, що зазнає температурного впливу, являють собою тільки лінійну комбінацію можливих самонапружених станів. Саме за допомогою деформацій, викликаних зусиллями самонапруження, незалежні температурні деформації окремих елементів системи доповнюються до стану, в якому реалізуються умови кінематичної зв'язності.

І взагалі, якщо звернутися до стандартного опису методу сил, коли через вибір значень зусиль у «зайвих» зв'язках (значень параметрів самонапруження) реалізуються умови замикання розрізів, введених у конструкцію під час створення основної системи, то стає зрозумілим, що саме зусилля самонапруження відіграють основну роль у забезпеченні умов кінематичної зв'язності системи.

Питання:

У тому, що було сказано, зусилля самонапруження виникали «самостійно й автоматично» під впливом навантажень або інших впливів, прикладених до системи. А чи можливо створити ці зусилля штучно так, щоб вони були відмінними від одержуваних автоматично.



Відповідь:

Є способи штучного регулювання напруженого стану системи, але якраз це може бути лише лінійною комбінацією можливих зусиль самонапруження.

Сам процес попереднього напруження часто пов'язаний з послідовністю операцій при створенні системи, коли в тому чи іншому порядку можуть виконуватися роботи зі встановлення та видалення деяких елементів, зміни деяких зв'язків тощо.

Такі операції над розрахунковою схемою виконуються завжди в процесі будівництва і призводять до замикання в системі деякого напружено-



деформованого стану, який може істотно впливати на роботу конструктивного комплексу [2].

Попереднє напруження конструкції у своїй основі орієнтоване на те, щоб використовувати цю можливість свідомо. І це робили навіть за тих часів, коли люди могли покладатися тільки на власну інтуїцію (дерев'яні бочки, стягнуті обручами, колесо з насадженим у нагрітому стані ободом тощо).

Для створення переднапруження можна використовувати силовий або кінематичний вплив:

- у разі використання силового впливу (домкрати, баластні вантажі тощо) можна регулювати і контролювати значення зусиль, але не можна контролювати деформацію;
- у разі використання кінематичного впливу (зміщення опор, температурний вплив тощо) можна регулювати і контролювати значення зміщення, але неможливий контроль зусиль.

Ті параметри, які не регулюються, можна обчислити або виміряти, але їх не можна змінити всередині використаного (силового або кінематичного) методу.

Слід пам'ятати, що силовий варіант можна реалізувати тільки в системі, структура якої відрізняється від остаточної, коли наявна свобода тих переміщень, у напрямку яких передбачається докладання зусиль переднапруження (рис. 1.29). Зокрема, такі зусилля можуть бути докладені і на тих етапах складання, на яких система є ще статично визначеною.

І навпаки, кінематичний варіант реалізується в частково або повністю складеній системі, коли система вже статично невизначена.

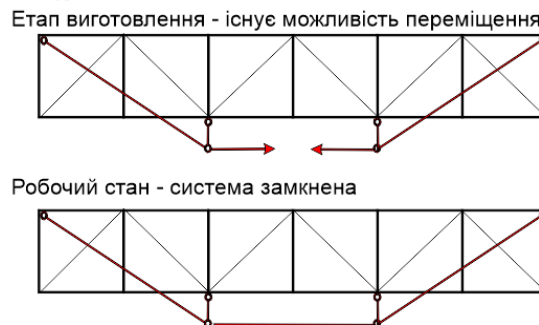


Рис. 1.29

На практиці найчастіше використовуються такі основні варіанти створення попереднього напруження в системі:

- а) шляхом використання тимчасових баластних вантажів на деяких стадіях монтажу;

- б) зміщення опор шляхом використання підкладок або інших аналогічних деталей;
- в) з використанням спеціальних натяжних пристосувань (форкопфа, домкрата, або іншого).

В останньому випадку слід розрізняти два варіанти задання умов функціонування натяжного пристосування:

- 1) Задається величина Δ вкорочення (подовження) пристрою (контролюється хід поршня в домкраті або стяжної муфти).
- 2) Задається зусилля N , яке має бути реалізовано в натяжному пристрої (контролюється зусилля, що задається домкратом).



Питання:

У літературі щодо попередньо напружених конструкцій найчастіше описується технологія використання натяжних пристроїв. Чи можна навести реальні приклади інших підходів?

Відповідь:

Витонченим прийомом можна вважати використання баластного вантажу, коли під час будівництва консольно-підкісного моста залізобетонні плити проїжджої частини було складовано на консолях (рис. 1.30, а) і в цьому стані встановлювали ненапружені підкоси (рис. 1.30, б). Потім плити привантаження було перенесено в прогонну частину моста і підкоси набули зусиль попереднього напруження (рис. 1.30, в).

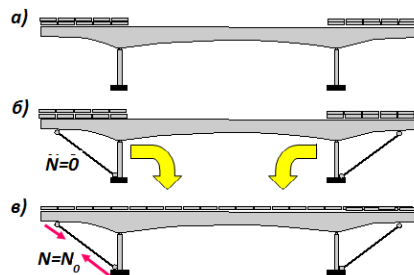


Рис. 1.30



Рис. 1.31

Прийом зміщення опор було використано під час влаштування двопрогнових підкранових балок, у яких переднапруження реалізували завдяки опусканню крайніх опор шляхом затягування болтів у вузлі А, і це затягування здійснювали доти, доки не замкнувся проміжок у 25 мм (рис. 1.32).

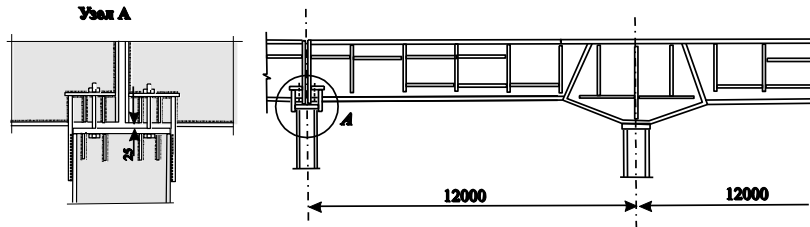


Рис. 1.32

Питання:

Під час проектування розтягнутих фланцевих з'єднань сильно затягнуті заздалегідь болти випробовують на зусилля розтягування, але у всіх інструкціях із розрахунку цей факт не враховують, а пропонують рахувати болти тільки на розтягвальну силу, а не на суму зусилля затягування та зовнішнього розтягування. Чи правильно це?



Відповідь:

Так це правильно, і для ілюстрації спершу розглянемо трубчастий стрижень, затягнутий болтом (рис. 1.33,а). За відсутності навантаження розтягвальне зусилля в болті N_1^0 дорівнює зусиллю стискання в трубці N_2^0 .

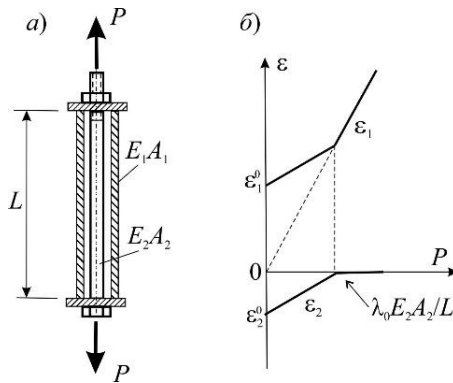


Рис. 1.33

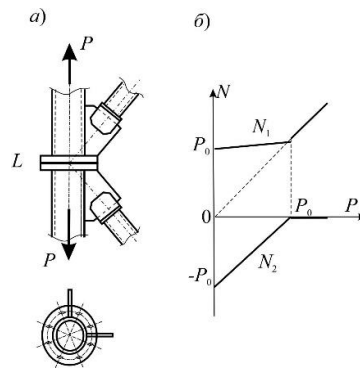


Рис. 1.34

Якщо до кінців болта прикласти зовнішню розтягвальну силу P , то внутрішні сили в болті та трубці визначаються з умови рівноваги внутрішніх і зовнішніх сил

$$N_1 + N_2 = P$$

і умови сумісності деформацій трубки та болта

$$N_1 / (E_1 A_1) - N_2 / (E_2 A_2) = \lambda_0.$$

Остання умова показує, що різниця між абсолютними подовженнями болта і стрижня дорівнює величині попереднього подовження болта λ_0 . Розв'язавши ці рівняння відносно N_1 і N_2 , отримаємо

$$N_1 = \frac{P / (E_2 A_2) + \lambda_0 L}{1 / (E_1 A_1) + 1 / (E_2 A_2)}; \quad N_2 = \frac{P / (E_1 A_1) + \lambda_0 L}{1 / (E_1 A_1) + 1 / (E_2 A_2)}.$$

Тут E_1 і A_1 означають модуль пружності та площу поперечного перерізу болта, а E_2 і A_2 – те саме, стрижня.

На рис. 1.33,б показано графіки залежності відносних подовжень болта $\epsilon_1 = N_1 / (E_1 A_1)$ і стрижня $\epsilon_2 = N_2 / (E_2 A_2)$ від величини зовнішньої сили P . Залежності ці лінійні аж до того моменту, коли зусилля в стрижні стане таким, що дорівнює нулю.

У разі подальшого збільшення сили P стрижень уже не зможе сприймати зусилля, які мають бути розтягувальними, і сила цілком передаватиметься на болт. Тому за $P = P_0 = \lambda_0 E_2 A_2 / L$ графіки залежностей $\epsilon_1(P)$ і $\epsilon_2(P)$ утворюють перелом, а за $P > \lambda_0 E_2 A_2 / L$ підуть так, як якби сила P сприймалася тільки болтом.

Таким чином, за малої сили P , що не гасить попередню напругу, подовження болта зростають повільніше і стрижень скидає попереднє стиснення (ніби залучається до роботи на розтягнення).

Така сама картина має місце в попередньо напружених залізобетонних конструкціях, де роль трубки відіграє бетон, що не працює на розтягнення, а роль болта – арматура, а також у фланцевих стиках (рис. 1.34,а), де роль стрижня відіграють фланці.

В останньому випадку жорсткість фланця набагато перевищує жорсткість болтів, і сумарне зусилля в болтах можна визначати, вважаючи $(E_2 A_2)$ таким, що прагне до нескінченності. З наведених вище формул видно, що при цьому зусилля N_1 приблизно дорівнює силі затягування болтів P_0 доти, доки фланці контактують один з одним, а потім дорівнює P (рис. 1.34,б). Іншими словами, перевірку міцності болтів слід проводити не на суму $P + P_0$, а на більше з цих двох значень.

Бесіда. 1.8. Варіаційні принципи



Фундамент механіки, закладений Ньютоном, ґрунтується на розгляді сил. Ця гілка механіки, яку можна назвати «векторною», будує свій аналіз на виявленні всіх сил, що діють на кожен елемент системи. Але водночас із Ньютоном Лейбніц будував механіку, оперуючи поняттям «робота сили» (силова функція, потенційна енергія), яке належить до системи загалом.

Можна сказати, що розгляд проблеми з погляду потенційної енергії нагадує погляд з висоти пташиного польоту, коли ми, втрачаючи деяку детальність картини, набуваємо широти кругозору [3].

Підхід Ньютона має перевагу наочності, підхід Лейбніца – спільності та компактності. Щоправда, ця компактність досягається за рахунок відмови від розгляду систем, які не ізольовані від зовнішнього середовища з погляду обміну енергією (наприклад, непружні системи або випадок неконсервативних зовнішніх впливів).

Раніше виклад будувався у стилі векторного підходу, у цьому розділі ми покажемо деякі елементи альтернативного підходу до проблем будівельної механіки.

* * *

Вище було запроваджено поняття про елементарну роботу на можливих переміщеннях точок системи. Аналогічно визначається елементарна робота на дійсних переміщеннях:

$$dW = \sum_{i=1}^m P_i du_i \quad (1.23)$$

Користуючись цією величиною, визначаємо роботу сил P_i на кінцевому переміщенні точок системи як інтеграл

$$W = \int_{(1)}^{(2)} dW = \int_{(1)}^{(2)} \sum_{i=1}^m P_i du_i ,$$

межі якого задаються значеннями координат точок системи в початковому (1) та кінцевому (2) положеннях.

Розглянемо випадок сил, які залежать лише від положень точок (вузлів) системи. Ці сили називаються потенційними, якщо існує однозначна функція

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_m, y_m, z_m),$$

така, що проекції на координатні осі сили, що діє на точку, дорівнюють взятим зі знаком мінус приватним похідним від Π за координатами цієї точки:

$$P_{i,x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad P_{i,y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad P_{i,z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}. \quad (1.24)$$

Передбачається, що функція Π залежить тільки від координат точок і час не входить явно до її виразу; тоді з рівностей (1.24) випливає, що вона визначена з точністю до адитивної постійної. Ця функція називається потенційною енергією.

Згідно з (1.23) та (1.24), елементарна робота потенційних сил на дійсних переміщеннях дорівнює

$$dW = -\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} dz_i \right) = -d\Pi, \quad (1.25)$$

де $d\Pi$ – повний диференціал потенційної енергії.

Робота потенційних сил на кінцевому переміщенні згідно (1.24) та (1.25) дорівнює

$$W_{(1) \rightarrow (2)} = \int_{(1)}^{(2)} dW = - \int_{(1)}^{(2)} d\Pi = \Pi_{(1)} - \Pi_{(2)}.$$

З цього виразу випливає, що потенційна енергія дорівнює роботі, яка була б проведена потенційними силами на кінцевому шляху з розглянутого положення системи в положення, де вона умовно може бути прийнята такою, що дорівнює нулю.

Якщо конфігурація системи визначається не координатами її вузлів, а деякими узагальненими координатами

$$u_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_m, y_m, z_m) \quad (i = 1, 2, \dots, 3m = n),$$

то після відповідних перетворень потенційна енергія стане функцією лише узагальнених координат

$$\Pi = \Pi(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Елементарна робота потенційних сил на віртуальному переміщенні згідно з (1.25) дорівнює

$$dW = -d\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} du_i \quad (1.26)$$

З іншого боку ця робота повинна виражатися через узагальнені сили Q_i , що відповідають узагальненим переміщенням du_i , як

$$dW = -\sum_{i=1}^n Q_i du_i. \quad (1.27)$$

Порівнюючи (1.26) з (1.27), приходимо до вираження узагальнених сил через потенційну енергію

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Нехай визначені узагальнені сили $Q_1, \dots, Q_n$, і вони залежали тільки від узагальнених координат $u_1, \dots, u_n$. Як впливає з останніх рівностей, ознакою потенційності сил є виконання наступних умов:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial u_j} = \frac{-\partial \Pi}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{-\partial \Pi}{\partial u_j \partial u_i} = \frac{\partial Q_j}{\partial u_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Якщо ці умови не виконані, то сили не є потенційними.

Важливою властивістю потенційних сил є те, що їхня робота залежить тільки від початкового та кінцевого положення точки прикладення і ніяк не пов'язана з тим шляхом, яким відбувся перехід з початкової точки в кінцеву. На перевірці зазначеної властивості побудовано твердження, що так звана «слідкуюча» сила не є потенційною [1].

Справді, розглядаючи подані на рис. 1.35 три варіанти переміщення стрижня, навантаженого слідкуючою силою, у стан з прогином і кутом повороту кінця консолі, можна помітити що у разі «а» (поворот на кут φ з наступним зсувом) робота сили P негативна, у разі «б» вона дорівнює нулю і у разі «в» (поворот на кут φ , зміщення та поворот на кут 2φ) робота позитивна.

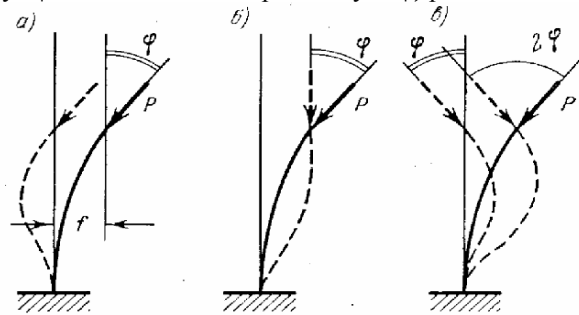


Рис. 1.35.

Найпростішим прикладом потенційних сил є сили незмінної величини та напрямки (наприклад, сила тяжіння поблизу поверхні Землі). Потенційна енергія системи у полі сили тяжіння визначається виразом

$$\Pi = \sum_{i=1}^m (gm_i) z_i,$$

де z_i – координата центра тяжіння, що вираховується по висхідній вертикалі від поверхні землі. Дійсно, енергія Π дорівнює роботі, яку виробили б сили ваги при переході точок системи з їхнього положення на поверхню землі.

Розглянемо тепер сили пружності. Ми обмежимося лише дискретними системами з кінцевим числом ступенів свободи, вважаючи, що кілька вузлових точок з'єднані пружними зв'язками між собою і, можливо, із землею.

Головною властивістю ідеально пружної системи є те, що пружні реакції, які виникають під час її деформації, залежать лише від величин, що визначають положення вузлів системи, але не від їхніх швидкостей, попередньої

історії деформування тощо. Тому приймається, що узагальнені сили пружних реакцій є функціями лише узагальнених координат системи

$$R_i = R_i(u_1, \dots, u_n). \quad (1.28)$$

Пружні сили є потенційними, це твердження ґрунтується на властивості пружного тіла накопичувати під час постійного навантажування потенційну енергію та повертати її без втрат, коли тіло під час поступового розвантажування повертається до вихідного натурального стану, в якому відновлюються його розміри та форма.

Отже, приймається, що функції координат (1.28) можна подати у вигляді

$$R_i = -\frac{\partial E}{\partial u_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.29)$$

де E – потенційна енергія пружних тіл, включених у систему.

Наслідком (1.29) є зазначені раніше співвідношення

$$\frac{\partial R_i}{\partial u_j} = \frac{\partial R_j}{\partial u_i}, \quad (1.30)$$

яким мають задовольняти потенційні сили.

Надалі припускається, що відлік узагальнених координат ведеться від тієї конфігурації системи, в якій пружні елементи перебувають у ненапруженому стані. Інакше кажучи, пружні реакції зникають, коли обертаються в нуль узагальнені координати:

$$R_i(0, \dots, 0) = 0.$$

Основним фізичним законом є закон Гука, що виражає наявність лінійних співвідношень між величинами, які визначають напружений стан у пружному тілі, і величинами, що характеризують його деформацію (відносні подовження і зсуви).

Хоча виконання закону Гука ще не зумовлює лінійну залежність між переміщеннями вузлів пружної системи та прикладеними до неї силами (між узагальненими силами пружних реакцій та узагальненими координатами), ми виходитимемо з цієї гіпотези, вважаючи, що виконуються лінійні співвідношення між силами, прикладеними до пружної системи, та переміщеннями її вузлів. Це дає підставу прийняти залежності пружних сил від координат у вигляді лінійних співвідношень

$$R_i = -\sum_{j=1}^n c_{ij} u_j \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.31)$$

де c_{ij} – постійні коефіцієнти, сукупність яких утворює матрицю жорсткостей

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Симетричність цієї матриці є наслідком потенційності пружних сил. Справді, з (1.30) і (1.31) отримуємо співвідношення

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Звичайно, рівняння (1.31) застосовне лише за досить малих значень узагальнених координат. Це відповідає передумові про малість деформацій у законі Гука і припущенню, що пружна система не допускає великих змін розмірів і форми.

Звернемося, нарешті, до поняття, що має важливе значення в механіці твердого деформованого тіла, – функції *повної потенційної енергії* деформованого тіла і навантаження, що діє на нього. Повна енергія U складається з потенційної енергії деформації тіла (потенціалу внутрішніх сил) E і енергії зовнішніх сил (потенціалу зовнішніх сил) $W = -\Pi$:

$$U = E + \Pi.$$

Зовнішні сили, прикладені статично до пружного тіла, що спричиняють зміну геометрії тіла, здійснюють роботу Π на відповідних переміщеннях. Одночасно з цим у пружному тілі накопичується потенційна енергія його деформування E . Таким чином, пружне тіло є акумулятором енергії. Цю властивість пружного тіла широко використовують у техніці, наприклад, у заводних пружинах годинникових механізмів, в амортизаційних ресорах тощо.

Будемо вважати, що розглядається ізольована система.

З припущення про ізольованість системи (відсутність обміну енергією із зовнішнім середовищем) випливає, що під час статичного навантаження пружної системи повна потенційна енергія її залишається постійною і лише переходить із потенційної енергії зовнішніх сил у потенційну енергію внутрішніх сил.

Частиними похідними від виразу повної потенційної енергії системи є сумарні сили, що діють на вузли системи (пружні та зовнішні), отже, умовою рівноваги є

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \frac{\partial E}{\partial u_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = R_i + P_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.32)$$

З іншого боку умови

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.33)$$

визначають стаціонарну точку функції повної потенційної енергії U . Стаціонарність, як відомо, є необхідною, але недостатньою умовою екстремуму функції.

Співвідношення (1.33) становить зміст варіаційної теореми Лагранжа:

Якщо система перебуває під дією потенційних сил, то її положення, в якому потенційна енергія досягає екстремуму, є положенням рівноваги.

Зворотний висновок невірний: якщо є рівновага сил, то виконуються умови (1.33), але вони недостатні для екстремуму і вказують лише на так звану стаціонарну точку.

Література

1. **Bolotin V.V.** Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability — Pergamon Press, 1963.
2. **Perelmuter A.V., Slivker V.I.** Numerical Structural Analysis: Models: Methods and Pitfalls.— Berlin-Heidelberg: Springer, 2003.
3. **Slivker V.I.** Mechanics of Structural Elements/ Theory and Applications — Berlin-Heidelberg: Springer, 2007.
4. **Гордєєв В.М.** Про поведінку тканинних оболонок під навантаженням // Теорія оболонок і пластин (російською) — Єреван: Вид-во АН АрмССР, 1964.— С. 391-398.
5. **Филин А.П.** Прикладна механіка твердого деформованого тіла. В 3-х томах (російською). – М.: Наука, 1978.

Цикл 2

Метод скінчених елементів



Бесіда 2.1. Ідея методу скінченних елементів



Метод скінченних елементів (МСЕ) – основний метод сучасної будівельної механіки, що лежить в основі переважної більшості сучасних програмних комплексів. Він призначений для виконання розрахунків будівельних конструкцій на ЕОМ і дозволяє практично повністю автоматизувати розрахунок стрижневих систем, хоча, як правило, вимагає виконання значно

більшої кількості обчислювальних операцій порівняно з класичними методами будівельної механіки. Однак у сучасних умовах великий обсяг обчислень не є серйозною проблемою, і у зв'язку з цим при впровадженні ЕОМ в інженерну практику МСЕ набув широкого поширення. Він дозволяє поширити принципи розрахунку стрижневих систем на випадок безперервних тіл і складних конструкцій, і це є ще однією привабливою рисою МСЕ.

Багато задач будівельної механіки чи прикладної теорії пружності призводять до необхідності розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних.

Наприклад, задача про вигин пластинки, що має товщину h і навантажена поперечним навантаженням $p(x,y)$, вимагає розв'язання диференціального рівняння Софі Жермен-Лагранжа

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D},$$

у якому невідомим є функція прогинів $w(x,y)$, а через D позначено циліндричну жорсткість

$$D = Eh^2 / [12(1-\nu^2)].$$

Як правило, точний розв'язок таких задач математики невідомий і можна говорити лише про той чи інший варіант пошуку наближеного розв'язання. При цьому, як правило, рішення шукають у деякому заздалегідь заданому вигляді, який визначає відповідь у формі функції, що **задається з точністю відносно невеликого числа параметрів**. Наприклад, для прямокутної пластинки зі сторонами a та b заздалегідь передбачається, що прогини мають форму добутку синусоїд

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

і шукається стрілка, що характеризує цю форму прогину, f (один невідомий параметр).

Однак вгадування форми невідомої нам функції є дуже важким завданням, особливо, якщо згадати, що така функція повинна бути придатною для всіх точок області, яку займає конструкція, що розраховується і, до того ж, задовольняти цілком певним умовам на межі області (приймати, наприклад,

нульові значення та мати нульову похідну). Набагато легше передбачити вигляд такої функції для малої частини області, більше того, саме через невелику кількість такої ділянки можна дозволити собі певну свободу вибору. Наприклад, важко визначити форму деякої кривої, за якою зігнеться дуже гнучка сталева рулетка, але майже очевидно, що, замінивши її справжню форму деякою ламаною лінією з малими ділянками, можна сподіватися, що ми знайдемо наближене уявлення форми такої кривої.

Ми підійшли тут дуже близько до ідеї методу скінченних елементів, зокрема одного із основних принципів цього методу:

Використовуючи дроблення області пошуку рішення на малі ділянки (скінченні елементи), можна дозволити собі заздалегідь задати вигляд функції всередині цієї ділянки, не ризикуючи зробити велику помилку для вирішення завдання в цілому.

Отже, ідею методу скінченних елементів можна подати таким чином. Припустимо, що деяке досліджуване пружне тіло займає область Ω (рис. 2.1,а).

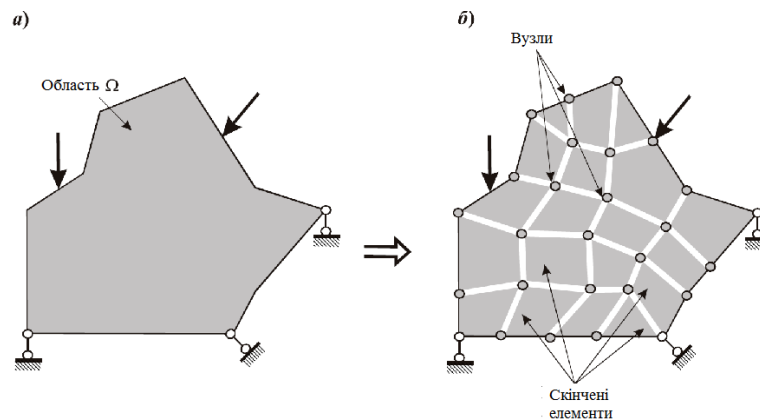


Рис. 2.1.

Невідома величина, що цікавить нас (наприклад, переміщення точок тіла, або напруження, або щось інше) змінюється безперервно по всьому тілу. При розв'язанні задачі методом скінченних елементів ця величина приблизно представляється своїми значеннями у скінченному числі обраних нами точок тіла (вузлів). Саме ці невідомі нам величини підлягають визначенню. Далі область Ω ділиться на скінченне число частин (скінченних елементів) так, щоб межі скінченних елементів проходили через вузли і вся область була покрита скінченними елементами. Вважається, що скінченні елементи взаємодіють один з одним тільки у вузлах і невідома величина, що визначається нами, є загальною для контактуючих з вузлом точок всіх елементів, які з'єднані з цим вузлом (для зірки елементів цього вузла).).

Розглянемо тіло, навантажене довільним чином. За допомогою сітки січних поверхонь розіб'ємо його на окремі частини. Приклад такого розбиття для двовимірного тіла показано на рис. 2.1,б. Отримані підобласті мають, хоч і малі, але все ж таки скінченні (не нескінченно малі) розміри, звідки і походить їхня назва «скінченні елементи».

Таким чином, безперервне тіло представляється у вигляді сукупності скінченних елементів, властивості кожного з яких розглядаються незалежно від інших. На межах між скінченними елементами вибираються деякі точки (вузли), переміщення яких приймаються як основні невідомі⁸.

Тут можна відразу побачити аналогію з методом переміщень для стрижневих систем, в якому за основні невідомі також приймають вузлові переміщення. Однак у разі безперервних тіл виникає ціла низка труднощів, які можна подолати лише за допомогою введення низки додаткових гіпотез.

А) Насамперед постає питання про те, як знайти переміщення (отже, деформації та напруження) усередині кожного скінченного елемента, знаючи переміщення його вузлів. Нагадаємо, що у разі стрижневих систем розрахунок базується на використанні технічної теорії розтягування, вигину та кручення бруса, що дозволяє виразити переміщення та напруження в будь-якому перерізі бруса через вузлові переміщення. Для двовимірного (пластина) або тривимірного (масив) суцільного тіла ця задача може бути вирішена тільки приблизно, наприклад, з використанням тих чи інших припущень про характер поля переміщень в елементі.

Точніше, необхідно вибрати деяку сукупність апроксимуючих функцій, які дозволяють приблизно представити поле переміщень усередині скінченного елемента за відомими вузловими переміщеннями. Зазвичай при побудові скінченно-елементного рішення набір локальних функцій, що визначають поле переміщень в межах скінченного елемента, задають так, щоб з кожною локальною функцією було пов'язане одне з вузових переміщень або поворотів. Тоді поле переміщень буде точно визначено, якщо всі переміщення задані у всіх вузлах, до яких примикає елемент.

Особливо зручно вибирати такі апроксимуючі функції, які набувають одиничного значення в деякому вузлі і нульове значення у всіх інших вузлах елемента. У методі скінченних елементів їх називають *функціями форми*. Під час вибору функцій форми істотну допомогу надає припущення про малість скінченного елемента, оскільки в малій області простору можна сподіватися⁹ на відносно малу похибку від наближеного опису поля переміщень і на те, що зі зменшенням розмірів скінченних елементів помилка апроксимації буде зменшуватися. Якщо, наприклад, скінченні елементи мають форму трикутника і вузлами, в яких визначаються невідомі переміщення, є

⁸ Тут розглядається розв'язок у переміщеннях. Існує різновид методу скінченних елементів, у якому як основні невідомі приймають сили взаємодії між елементами; можливе також змішане формулювання.

⁹ Це припущення може і не виправдатися.

його вершини (рис. 2.2.а), то можна уявити, що в межах скінченного елемента поле переміщень (сума цих площин) теж є площиною (рис. 2.2.б), і, отже, невідомий розподіл переміщень у всьому тілі апроксимується деяким багатогранником, близьким до шуканого розподілу переміщень.

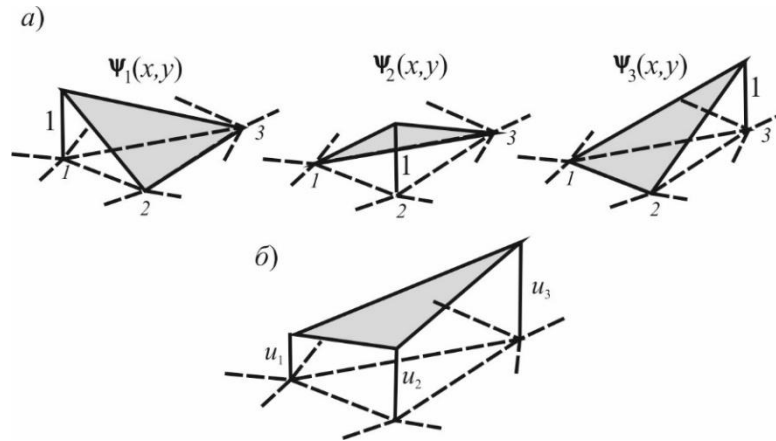


Рис. 2.2.

Вибір функцій форми – один із найбільш відповідальних і важливих етапів у методі скінченних елементів, цей вибір багато в чому визначає точність рішення.

Тому під скінченим елементом слід розуміти не просто деяку малу область тіла, а область тіла в сукупності із заданими в ній апроксимуючими функціями.

Б) Друга проблема виникає при формулюванні умов поєднання скінчених елементів у єдину систему. У розрахунку стрижневих систем це здійснювалося шляхом складання рівнянь рівноваги для вузлових точок, у яких елементи з'єднуються один з одним. У суцільному тілі число точок з'єднання між елементами нескінченно велике. Задаючись розподілом переміщень усередині кожного елемента, тим самим задаємо і розподіл напружень у всіх точках міжелементної межі. На межах розділу суміжних елементів напруження, знайдені для кожного елемента незалежно, взагалі збігатися не будуть. Отже, забезпечити точне виконання умов рівноваги по всій поверхні розділу неможливо.

Тому в методі скінченних елементів напруження, що діють на межі кожного елемента, можна умовно замінити деякими вузловими еквівалентними силами; і рівняння рівноваги складають для вузлів, на які діють зазначені еквівалентні сили.

При цьому еквівалентні вузлові сили визначаються з умови, щоб робота, яку вони виконують на вузлових переміщеннях, дорівнювала роботі дійсних напруг на переміщеннях точок граничної поверхні елемента.

В) Ще одна проблема виникає при обліку навантаження пружного тіла розподіленими поверхневими та об'ємними силами. Ці сили можуть бути враховані також заміною їх на еквівалентні в енергетичному сенсі зовнішні вузлові сили.

Після запровадження зазначених спрощень тіло можна розглядати як дискретну систему, тобто. як сукупність елементів, з'єднаних між собою у вузлових точках. Розбиття конструкції на підобласті та вибір апроксимуючих функцій для кожної з них можна здійснити різними способами. При цьому повинні бути враховані особливості геометрії тіла та забезпечена хороша апроксимація переміщень і виражених через переміщення деформацій та напружень для всього тіла загалом.

Питання:

Розкажіть докладніше про функції форми. Чи можна навести нескладний приклад?



Відповідь:

Як приклад розглядатимемо розв'язання плоскої задачі теорії пружності з використанням чотирикутних скінченних елементів. Кожен скінченний елемент визначається набором його чотирьох вузлів.

У разі плоскої задачі рішенням є два поля зміщень $u(x, y)$ і $v(x, y)$ і, отже, у кожному вузлі скінченно-елементної моделі є дві компоненти переміщень U_i і V_i , які є шуканими ступенями свободи.

Використовуватимемо лінійну інтерполяцію переміщень U і V , заданих в чотирьох вузлах:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 f_i(x, y)U_i, \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^4 f_i(x, y)V_i,$$

де $f_i(x, y)$ – інтерполюючі функції, або функції форми елемента.

Ці функції мають низку специфічних властивостей. Одна з основних властивостей – локальність, що означає, що ці функції задані тільки в межах даного елемента.

Уведемо в розгляд природну локальну систему координат на елементі, що відповідає геометрії даного типу елемента. Природною системою координат плоского чотиристороннього елемента є система координат (ξ, η) , показана на рис. 2.3.а.

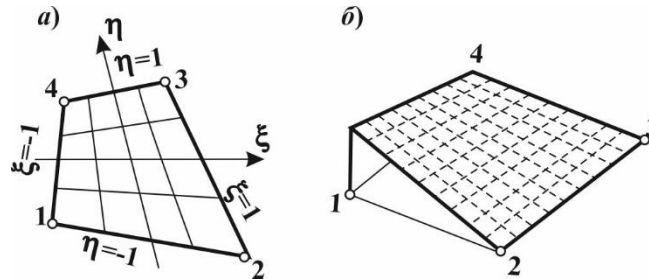


Рис. 2.3

Функції форми елемента виражені такими співвідношеннями через локальні природні координати:

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= 0,25(1-\xi)(1-\eta), & f_2(\xi, \eta) &= 0,25(1+\xi)(1-\eta), \\ f_3(\xi, \eta) &= 0,25(1+\xi)(1+\eta), & f_4(\xi, \eta) &= 0,25(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned}$$

Ці функції змінюються лінійно вздовж координатних ліній $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$. Функція $f_i(\xi, \eta)$ дорівнює одиниці у вузлі i та перетворюється на нуль у всіх інших вузлах. Однак вони не є лінійними поліномами і мають назву білінійних. На рис. 2.3,б наведено графічний вигляд однієї з функцій форми..



Питання:

Наскільки я зрозумів, розв'язання задачі методом скінченних елементів реалізується у переміщеннях. Але в попередньому циклі цей підхід пов'язувався з матрицею жорсткості. Як здійснюється перехід від функцій форми до матриці жорсткості?

Відповідь:

Найпростіше це показати, відштовхуючись від умов рівноваги у формі (1.33), тобто виходячи з вираження повної енергії системи. Не заглиблюючись у загальну теорію, розглянемо приклад побудови матриці жорсткості найпростішого стрижневого елемента для плоского випадку (рис. 2.4,а).

Якщо враховувати тільки деформації вигину, то повна потенційна енергія системи, що складається всього з одного стрижня, буде представлена як

$$U = E + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \vartheta^2 dx - \sum_{i=1}^4 P_i u_i,$$

где ϑ — кривизна деформованої осі стрижня.

Рівняння для опису вигнутої осі стрижня виражається через кінцеві переміщення за допомогою функцій форми $\psi_i(x)$, які за змістом є переміщення-



ми точок осі стрижня при $u_i=1, u_j=0$ ($i \neq j$). Тоді рівняння осі подається у вигляді суми

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) \cdot u_i,$$

а кривизна як $\mathcal{G}(x) = u''(x) = \sum_{i=1}^4 \psi_i''(x) u_i$.

Умови стаціонарності повної потенційної енергії

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u_i} dx - P_i = 0 \quad (i=1, \dots, 4).$$

Якщо підставити сюди вираз для кривизни, то отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_i} &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\sum_{j=1}^4 \psi_j''(x) u_j \right) \psi_i'' \cdot dx - P_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \left(\int_0^L EI \cdot \psi_i''(x) \cdot \psi_j''(x) \cdot dx \right) \cdot u_j - P_i = 0 \quad (i=1, \dots, 4). \end{aligned}$$

Розв'язання цих рівнянь визначає форму вигнутої осі стрижня і, отже, набір внутрішніх зусиль: згинальних моментів та поперечних сил. Задамо функції форми як поліномів Ерміта (рис. 2.4,б):

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \quad \psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2; \\ \psi_2(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \quad \psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right). \end{aligned}$$

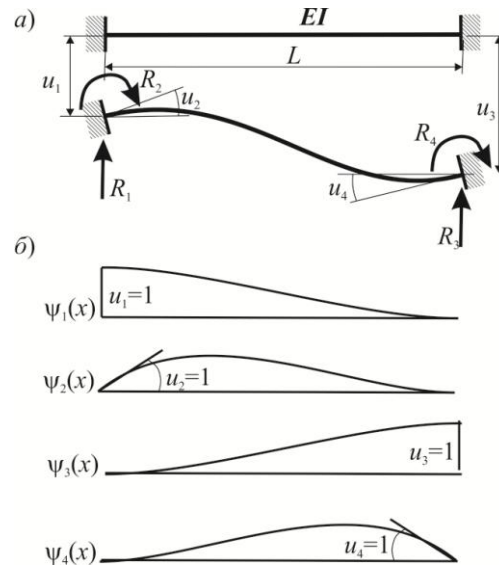


Рис. 2.4

Елементи матриці жорсткості стрижневого елемента визначаються як

$$r_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx .$$

Тоді після підстановок та інтегрування отримаємо

$$[r_{ij}] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} .$$

За аналогічною схемою знаходять матриці жорсткості скінченних елементів іншого типу. Природно, що вибором функцій форми займаються розробники програмного забезпечення, а інженери-практики використовують вже готові результати. Але для усвідомленого аналізу цих результатів інженери повинні знати, які функції форми використовуються програмою, і в тих випадках, коли в бібліотеці скінченних елементів є конкуруючі варіанти, вибирати для використання при розрахунку конкретного завдання найбільш вдалий варіант

Питання:

Чи можна за допомогою МСЕ отримати точний розв'язок задачі?





Відповідь:

Можна, якщо як функції форми використовувати такі функції, які за відомими вузловими переміщеннями визначають точний (відповідне рівнянням теорії пружності або опору матеріалів) розподіл переміщень всередині скінченного елемента. Це вдається зробити для скінченних стрижневих елементів, та й то не завжди.

Зокрема, кубічні залежності (*поліноми Ерміта*), які зазвичай використовують, є точними рішеннями для стрижня, але лише в статичних задачах і без урахування пружної основи. Форми власних коливань за допомогою цих поліномів уявляються вже наближено, а для двовимірних і тривимірних задач точних рішень, які могли б відігравати роль функцій форми, ми просто не знаємо.

Ілюстрацією до принципу накладання сітки вузлів на простір досліджуваної конструкції може бути зіставлення з растровим зображенням, коли його якість визначається кількістю точок (пікселів) на одиницю довжини чи площі. Якщо влаштовує грубе зображення (читай – досліджуваний результат розрахунку) – число пікселів (вузлів) можна прийняти мінімальним. При детальному дослідженні результату статичного розрахунку (читай – детальному розгляді зображення) кількість вузлів (пікселів зображення) має бути збільшено до необхідного рівня.

Важко визнати задовільним зображення, що складається з малої кількості пікселів (в абсолютному мінімумі – з одного пікселя) – таке зображення може відповідати будь-якому оригіналу.

Однак для скінченних елементів, для яких існує точний опис апроксимуючих функцій (наприклад, просторовий стрижень), застосування одного скінченного елемента для апроксимації одного конструктивного елемента цілком можливе за умови відсутності взаємодії такого конструктивного елемента з іншими конструкціями в проміжних точках.

Тут корисно зазначити, що в будівельній механіці стрижневих систем точний розв'язок для стрижня дає нам змогу як невідомі методи переміщень приймати зсуви й кути поворотів тільки у вузлах рами і саме це дає основу для більш ніж сумнівного поняття ступеня кінематичної невизначеності системи. Насправді ніщо не заважає нам призначити додаткові вузли і в інших місцях рами, тобто. ступінь кінематичної невизначеності (на відміну від ступеня статичної невизначеності) може бути будь-якою. Вона залежить тільки від того, що саме ми вважаємо заздалегідь вивченим елементом основної системи методу переміщень.

Питання:

Як співвідносяться поля переміщень та поля напруження, які отримують методом скінченних елементів?



Відповідь:

У класичному варіанті МСЕ, заснованому на вирішенні в переміщеннях, поле напружень отримується з поля деформацій, яке, в свою чергу, знаходиться шляхом диференціювання поля зсувів.

Диференціювання, присутнє в цьому процесі, грубо вирішує задачу відносно напружень, що можна продемонструвати наступним чином. Нехай, наприклад, скінченні елементи мають трикутну форму, а як функції форми використовуються лінійні функції. Тоді невідома функція переміщень стане у вигляді багатогранника з плоскими гранями, вершини якого (вузли сіткового розбиття) розташовуються поблизу шуканої функції переміщень (рис. 2.5,а).

Зауважимо, що вузлові усунення належать одночасно всім трикутним скінченним елементам, які сходяться на одному вузлі, тобто. забезпечується спільність переміщень у вузлах скінченно-елементної сітки. Але, з огляду на лінійність функцій форми, сумісність у парі вузлів означає і збіг переміщень у всіх точках міжелементної границі, що є відрізком прямої між парою вузлів, що розглядаються.

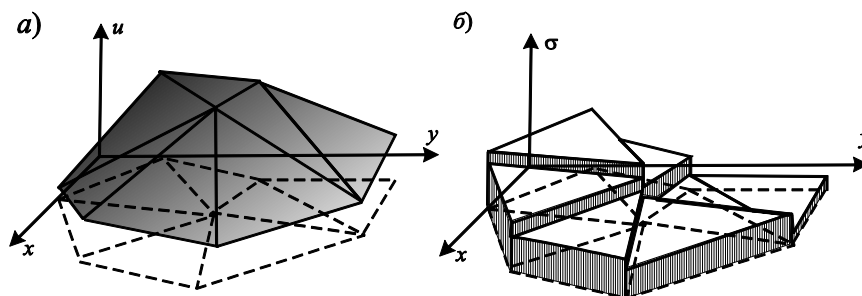


Рис. 2.5

Однак деформації (і, отже, напруження) визначаються першими похідними від переміщень, і в даному випадку лінійних функцій форми вони, як похідні від переміщень, дорівнюватимуть константам всередині елемента, причому ці константи не зобов'язані збігатися на сусідніх елементах. Отже, по лінії сполучення скінченних елементів напруження матимуть розриви, а просторова епюра напружень набуде ступінчастої форми (рис. 2.5,б).

Бесіда 2.2. Граничні умови та умови зв'язку



Важливими і відповідальними характеристиками розрахункової моделі МСЕ є зв'язки. Зрозуміло, що не всі шукані переміщення вузлів системи є незалежними, частина з них заздалегідь зумовлена граничними умовами або, скажімо, умовами симетрії. Можливі й інші, складніші залежності між компонентами вектора невідомих переміщень, що реалізують особливості поведінки конструкції, пов'язані з тими обмеженнями, які виникають через дію зв'язків.

У лінійних системах математично рівняння зв'язків записуються у вигляді лінійних однорідних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta_j = 0 \quad (i = 1, \dots, p),$$

де Δ_j – переміщення вузлів системи; c_{ij} – коефіцієнти; p – кількість зв'язків.

Наведене рівняння вказує на взаємозв'язок окремих переміщень і найчастіше відноситься до *внутрішніх зв'язків*. Наприклад, якщо зв'язок забороняє взаємну зміну відстані між вузлами 1 і 13 уздовж осі X, то ми матимемо умову $\Delta_{1,x} - \Delta_{13,x} = 0$, а якщо заборонене переміщення 16-го вузла під кутом 45° до координатних осей X і Y, то відповідний запис буде таким:

$$(\sqrt{2}/2)\Delta_{16,x} + (\sqrt{2}/2)\Delta_{16,y} = 0.$$

Найпростішим варіантом таких рівнянь є умова заборони на деякі переміщення

$$\Delta_j = 0,$$

де індекс j пробігає деяку множину значень. Цей варіант зв'язків описує приєднання системи до «землі», тобто належить до *зовнішніх зв'язків* конструкції й описує її граничні умови.

У зазначеному випадку зовнішнього зв'язку йдеться про зв'язки, що не зміщуються, і саме тому права частина рівності є нульовою. Якщо ж унаслідок прикладених до системи зовнішніх впливів реалізується деяке примусове зміщення зв'язку (випадок заданого переміщення), то в правій частині має фігурувати величина примусового зміщення.

Слід ще раз підкреслити, що задане зміщення реалізується тільки як зміщення зв'язку, зміщення вільних вузлів підкоряються грі сил у системі й не зобов'язані дорівнювати заданій ззовні величині.

Розглянуті обмеження, що накладаються зв'язками на переміщення системи Δj , реалізуються деякими матеріальними тілами або пристроями, які об'єктивно присутні в системі, і факт їхнього існування не залежить ні від бажання розрахувача, ні від варіанта навантаження, що діє на конструкцію. Тому може викликати тільки здивування, наприклад, така фраза з [3] «Якщо треба провести розрахунок на задане переміщення в одному навантаженні, а для інших навантажень відповідне вузлове переміщення є присутнім (тобто в цьому напрямку немає зв'язку), то необхідно використовувати дві різні матриці K (ідеться про матриці жорсткості – А.П.)».

Незмішуваний внутрішній зв'язок може мислитися як включене в конструкцію абсолютно жорстке тіло. З певної точки зору його доречно розглядати як деякий специфічний тип скінченного елемента. Зі скінченим елементом його ріднить хоча б те, що абсолютно жорстке тіло об'єднує інцидентні цьому тілу вузли. Грубо кажучи, абсолютно жорстке тіло можна розглядати як граничний випадок деякого скінченного елемента за умови спрямування жорсткісних характеристик цього елемента до нескінченності.

Часто ефект нескінченно жорсткого тіла намагаються описати як об'єднання переміщень різних вузлів схеми, тобто примусове нав'язування значень переміщень одного вузла іншому. Цей прийом використовують найчастіше для того, щоб промодельовати нехтування деякими деформаціями системи. Так, наприклад, якщо об'єднати горизонтальні переміщення вузлів у місцях примикання ригеля до колон одноповерхової рами, то це буде еквівалентно використанню гіпотези про абсолютну жорсткість ригеля щодо деформацій розтягування–стиснення.

Але об'єднання переміщень описує не всі властивості жорсткого тіла. Так, для багатоповерхового просторового каркаса часто можна знехтувати податливістю перекриттів, вважаючи їх абсолютно жорсткими дисками. Якщо в такій схемі об'єднати горизонтальні компоненти переміщень усіх вузлів кожного перекриття, то за такого підходу виявляться неможливими і закручування перекриттів, що спричиняють різні переміщення в різних точках перекриття.

На закінчення ще раз зауважимо, що конструкція, яка розраховується, завжди є частиною більш загальної системи і, виділяючи конструкцію з навколишнього середовища, ми або ідеалізуємо її вплив у формі абсолютної заборони на деякі види переміщень (приєднання системи до «землі»), або ж описуємо цей вплив у формі зовнішнього навантаження на систему. Це навантаження може бути задане явно або ж реалізуватися у вигляді реакції деяких пружних пристроїв (пружин), за допомогою яких конструкція прикріплена до землі. В останньому випадку кажуть, що на вузлові переміщення накладено пружні зв'язки (зв'язки скінченної жорсткості). Сюди ж відноситься спірання елементів системи на пружну основу, жорсткість якої характеризується коефіцієнтом постелі.

Зв'язки скінченної жорсткості є пружними елементами системи такими самими, як і інші пружні елементи (стрижні, пластини тощо). Використовуючи поняття зв'язку скінченної жорсткості, ми уникаємо докладного опису

тих пружних пристроїв, за допомогою яких такі зв'язки реалізуються (наприклад, пружного масиву, яким є основа споруди). Іншими словами – моделюється не *геометричний образ, а функція такого пристрою перекриття*.

Питання:

Наскільки малим може бути скінченний елемент? Адже в будівельній механіці стрижень визначали як об'єкт, один із розмірів якого (довжина) помітно перевищував інші, що визначали габарити поперечного перерізу. Те саме стосується пластин і оболонок?



Відповідь:

Дійсно, здавалося б, виникає явне порушення понять про те, що таке стрижень, пластина або оболонка. Насправді жодного порушення тут немає, а припущення про достатню подовженість стрижня або про малість товщини оболонки було необхідним лише для обґрунтування вигляду відповідного диференціального рівняння.



До речі, під час виведення цього диференціального рівняння взагалі розглядали нескінченно малий елемент, і цей факт чомусь не бентежить розрахувача. Що стосується методу розв'язання отриманого диференціального рівняння, коли використовується досить дрібне членування стрижня на ділянки (читай, інтервал інтегрування), то це ніяк не позначається на вигляді рівняння.

Тут слід пам'ятати, що представлення розрахункової моделі об'єкта у вигляді ансамблю скінченних елементів не відповідає «реальному моделюванню», коли об'єкт монтується з набору маленьких пластинок, стрижнів тощо. Скінченний елемент – не пластинка або стрижень у реально-механічному сенсі цього слова, а якийсь образ пластинки або стрижня, з якого запозичена геометрична форма, наділена набором функцій, що апроксимують деформований стан усередині елемента за переміщеннями його вузлів. Властивості стрижня, пластини або оболонки повинен мати об'єкт розрахунку, а не ті скінченні елементи, на які він розбитий.

Питання:

За дуже дрібного розбиття на кінцеві елементи деякі програми дають розв'язання з помилкою, більшою, ніж у разі використання більш грубої сітки. Чи не визначається тут порушення припущення про малість товщини?



Відповідь:

Справа не в тому, що порушено припущення про малу товщину (про це сказано вище), а в тому, що ми отримуємо погано зумовлену задачу. Консольна балка, завантажена силою на вільному кінці, може слугувати слушним прикладом для пояснення зазначеного ефекту.



Балка згинається за гладкою кривою, що нагадує першу власну форму вигину, при цьому жорсткісна характеристика балки пропорційна величині $G = EJ/L^3$. Помилки в обчислених прогинах можуть надати лінії вигину коливальний характер, близький до вищої власної форми вигину, при цьому параметр жорсткості пропорційний $K = EJ/(L/n)^3$, де n – кількість півхвиль або кількість кінцевих елементів по довжині балки.

Число обумовленості матриці жорсткості χ , що дорівнює відношенню екстремальних власних значень, приблизно відповідає відношенню G/K і має порядок $\chi \sim 1/n^3$, що вже за числа елементів $n = 50$ дає $\chi \sim 105$.

Про природу накопиченої помилки свідчать результати такого чисельного експерименту: розраховується консоль завдовжки 10 метрів, навантажена на вільному кінці силою 1 тонна. Момент у защемленні має дорівнювати 10 Тм. Якщо розбити стрижень на 2000 елементів, отримуємо момент 10,001 Тм, а якщо розбити стрижень на 8000 елементів, то отримаємо момент 9,619 Тм. Щоб переконатися в тому, що справа тут не в короткому елементі, розрахуємо консоль завдовжки 8000 метрів, при її розбитті на 8000 елементів замість моменту 8000 Тм ми отримуємо 7187,6 Тм..

Цікаво відзначити ще один факт: зміна використовуваних одиниць виміру може призвести до зміни числа обумовленості системи розв'язних рівнянь і до втрати точності розрахунку в разі, коли така зміна підвищує число обумовленості. Здавалося б, загальне масштабування, що відбувається під час заміни метрів на міліметри, не має впливати на обчислення. Але річ у тім, що під час такої заміни залишаються незмінними вимірювачі кутів повороту (вони були і залишилися радіанами). Тому для стрижневих елементів, наприклад, компоненти матриці жорсткості EAL , що відповідають лінійним зсувам, і $6EJ/L^2$, що відповідають кутам повороту, змінюються різною мірою, що й призводить до інших співвідношень між максимальним і мінімальним власними числами матриці, тобто до зміни числа обумовленості.

Бесіда 2.3: Параметри сіткового розбиття. Збіжність МСЕ



Під час застосування методу скінченних елементів найвідповідальнішими етапами розрахунку є розбивка на елементи та вибір функцій, що апроксимують поле переміщень. При цьому потрібно певне узгодження полів переміщень окремих елементів, що досягається вибором відповідних функцій форми.

Найпростішим і найбільш поширеним прийомом такого узгодження є використання так званих *сумісних елементів* (їх ще називають *конформними*). Функції форми у сумісних елементах такі, що при рівних вузлових переміщеннях сусідніх елементів на їхній міжелементній границі збігаються всі переміщення, а також ті похідні від переміщень по просторових координатах, які входять у вираз для потенційної енергії.

Однією з найважливіших характеристик скінченно-елементної моделі є максимальний діаметр елементів

$$h = \max_e \left(\sup_{x, y \in \Omega_e} |x - y| \right),$$

з яким часто пов'язують оцінки похибки методу. Інакше кажучи, h – це мінімальний діаметр кулі, в яку можна вкласти будь-який скінченний елемент розрахункової схеми (рис. 2.6). Крім того, зазвичай припускають, що за нескінченного зменшення діаметра, тобто при $h \rightarrow 0$, дотримуються такі умови регулярності – у кожен скінченний елемент можна вкласти кулю радіуса $\rho \leq Ch$, де константа C не залежить від h . Це запобігає використанню так званих «голчастих» елементів (занадто витягнутих прямокутників і трикутників з дуже малими кутами тощо).

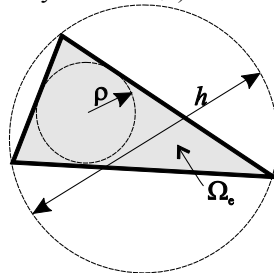


Рис. 2.6

Такі «неправильні» елементи можуть сильно спотворити результати скінченно-елементного аналізу. На таких елементах навіть мала похибка в обчислених переміщеннях призводить до великих помилок у кутах нахилу та кривизні (а вони пропорційні згинальним моментам), що ілюструється схематичним рис. 2.7, де мала помилка у прогині ϵ навіть змінила знак кривизни.

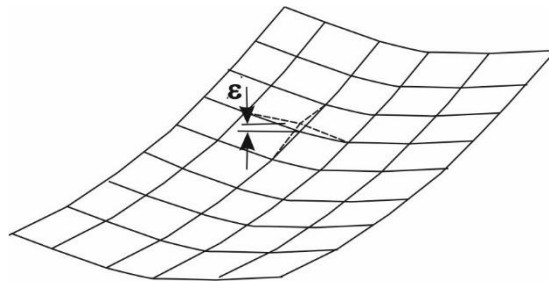


Рис. 2.7

Як правило, в МСЕ апроксимуючі функції є поліноміальними або кусково-поліноміальними (метод підобластей), хоча й існують елементи з дробово-раціональними (так званими ізопараметричними елементами), тригонометричними, логарифмічними та іншими апроксимаціями поля переміщень. Вибір ступенів свободи елемента і відповідних апроксимуючих функцій повністю визначає швидкість збіжності й оцінку похибки МСЕ.

Якщо зафіксувати всі параметри скінченно-елементної розрахункової моделі, за винятком розміру скінченних елементів h , то можна уявити, що, змінюючи цей розмір, ми отримаємо послідовність наближених рішень задачі $\mathbf{u}_h$. Коли говорять про збіжність МСЕ, то мають на увазі, що ця послідовність спрямовується до точного вирішення задач $\mathbf{u}^*$, коли $h \rightarrow 0$.

Інтуїтивно здається очевидним, що чим густіша сітка скінченних елементів, тим точніше одержуване рішення. Насправді така збіжність наближеного рішення до точного має місце лише при використанні скінченних елементів, що задовольняють певні вимоги, про які можна прочитати в більш серйозних книгах (дивитись, наприклад, [6]).

Будь-яке пружне тіло має нескінченно велике число ступенів свободи. Обмеження числа ступенів свободи набором вузлових зміщень зменшує свободу деформування, що рівнозначно введенню додаткових зв'язків, і це призводить до завищення жорсткості тіла порівняно з істинною жорсткістю. Переміщення, одержувані методом скінченних елементів у розглянутій формі цього методу, будуть у середньому меншими від їхніх точних значень.

У разі згущення сітки число вузлових переміщень (тобто ступенів свободи тіла) збільшується. Важливо встановити, за яких умов це супроводжуватиметься поліпшенням розв'язку, тобто його збіжністю з точним.

Доведено, що для забезпечення збіжності достатньо, щоб кожна компонента переміщення могла бути в границях скінченного елемента представлена

поліномом не нижче першого ступеня. Цю вимогу називають іноді умовою повноти скінченного елемента.

*Умову повноти можна сформулювати так. Елемент вважають повним, якщо, по-перше, до апроксимуючих функцій включено його **переміщення як жорсткого цілого** і, по-друге, якщо в елементі може **існувати однорідний** (тобто такий, що не залежить від координат) деформований стан із довільними компонентами деформації.*

Розглянемо ці умови докладніше. Припустимо, що вузли скінченного елемента отримують зміщення, що відповідають його переміщенню в просторі як абсолютно жорсткого тіла. Якщо при цьому деформації, знайдені за формулами теорії пружності, виявляться нульовими, то це означає, що жорсткі зміщення точно представлені в використовуваних апроксимуючих функціях.

Друга вимога ґрунтується на таких міркуваннях. У разі зменшення розмірів скінченних елементів зміни деформацій у границях кожного з них будуть дедалі менш істотними порівняно із самими деформаціями, тобто деформований стан наблизатиметься до однорідного. Для збіжності розв'язку необхідно, щоб функції, що апроксимують, давали змогу відтворити такий граничний стан.

Звернемося тепер до несумісних елементів. Збіжність розв'язку до точного має місце і в цьому випадку, якщо в границі (тобто в міру згущення сітки) в апроксимуючих функціях зникають члени, що створюють несумісність. Отже, збіжність буде гарантована, якщо несумісні скінченні елементи, по-перше, здатні відтворити в границі лінійне поле переміщень і, по-друге, виявляються водночас сумісними..

Зазвичай використовують більш жорстку вимогу, відповідно до якої має забезпечуватися суцільність тіла в умовах лінійного поля переміщень за будь-яких розмірів елемента, а не тільки в границі.

Корисно мати на увазі також таке міркування. Якщо елементи несумісні, то на їхніх границях можливі деякі переміщення, які не існують у континуальній розрахунковій моделі (наприклад, взаємні кути повороту пластин), які відповідають відсутності деяких зв'язків.

У разі збільшення кількості скінченних елементів і зменшення їхніх розмірів, зростає загальне число ступенів свободи конструкції і, отже, зменшується вплив накладених вузлових зв'язків. Цей процес при виконанні певних умов і забезпечує збіжність методу для сумісних скінченних елементів. З іншого боку, цей самий процес веде до того, що зменшуються взаємні переміщення на межелементних границях у несумісних елементах, що можна трактувати як певне замикання раніше знятих зв'язків. Отже, збіжність несумісних елементів може мати місце лише в тих випадках, коли позитивні тенденції від подолання накладених зв'язків превалюють над цією негативною тенденцією накладення зв'язків на міжелементних границях.

Тут важливо зауважити, що відсутність (зняття) зв'язків на міжелементних границях несумісних елементів не дає змоги стверджувати, що збіжність розв'язку в процесі згущення сітки матиме монотонний характер, а наведене вище твердження, що переміщення, які отримують методом скінченних елементів, будуть у середньому меншими від їхніх точних значень, втрачає свою справедливість. Якщо для сумісних елементів, у міру згущення сітки, переміщення тільки збільшувалися, монотонно наближаючись до точного розв'язання знизу, то для несумісних елементів можуть мати місце розв'язки то з нестачею, то з надлишком, тобто наближення до точного розв'язання з двох боків.



Питання:

Зрозуміло, що відсутність збіжності ставить під сумнів результати скінченно-елементного аналізу. А чи правильне зворотне твердження, що за доведеної збіжності результатами розрахунку можна безболісно користуватися?

Відповідь:

Варто враховувати, що відомі теоретичні оцінки швидкості збіжності орієнтовані на з'ясування асимптотичних властивостей розв'язку, а практичного розраховувача цікавить ступінь близькості наближеного розв'язку, отриманого на цілком певній сітці скінченних елементів.



Звісно, у більшості випадків асимптотична збіжність супроводжується і прийнятною «практичною збіжністю», під якою зазвичай розуміють можливість одержання прийнятної точності за порівняно грубого розбиття, але з цього правила є й винятки.

Слід також мати на увазі, що теоретичні оцінки швидкості збіжності будують, виходячи з деяких найгірших припущень щодо вигляду поля переміщень, які не обов'язково реалізують у конкретній задачі.

Крім того, у процесі доведення теорем збіжності, як правило, використовуються ланцюжки підсилювальних нерівностей і, нарешті, оцінки швидкості збіжності містять невідому константу. У зв'язку з цим, на практиці часто використовують аналіз послідовності рішень на скінченно-елементних сітках, що згущуються, і рішення про прийнятність прийнятої деталізації ухвалюють за результатами цього порівняння.

Приклад такого аналізу представлено на рис. 2.8, де показано чотири варіанти скінченно-елементного розбиття квадратної плити, затиснутої по контуру. Плита завантажена рівномірно розподіленим навантаженням, інтенсивність якого становить $q = 50 \text{ кН/м}^2$, модуль пружності матеріалу плити $E=880 \text{ кН/см}^2$, коефіцієнт Пуассона приймається таким, що дорівнює нулю.

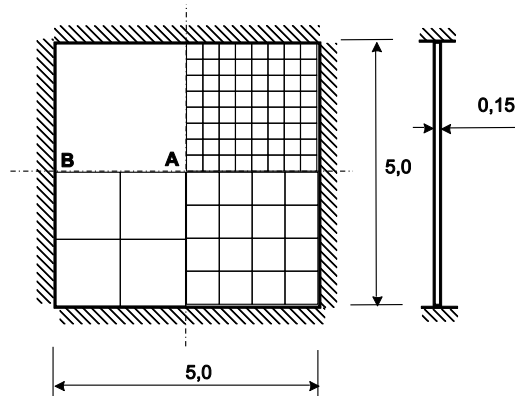


Рис. 2.8

Зміна результатів розрахунку для сіток різної густоти наведено у табл. 2.1. З цієї таблиці видно, що різні результати стабілізуються з різною швидкістю, і якщо для прогинів достатня сітка 8×8 , то для компонентів внутрішніх зусиль потрібна густіша сітка.

Таблиця 2.1

Результат розрахунку	Сітка 4×4	Сітка 8×8	Сітка 16×1	Точне рішення
Прогин у точці А, [мм]	17,25	16,34	16,07	16,00
Момент у точці А, [тм/м]	26,46	23,41	22,69	22,01
Момент у точці В, [тм/м]	59,20	63,72	64,95	64,43
Поперечна сила у точці В, [т/м]	66,63	88,60	100,12	111,61

Звісно, велику задачу навряд чи варто розв'язувати цілком на згущуваних сітках, але очевидно, що виконання такого аналізу для характерних фрагментів розрахункової схеми є раціональним. Емпірично встановлений факт стійкості результату під час згущення сітки є вельми переконливим доказом на користь правильності обраного підходу до розв'язання.

Питання:

Якщо доведено і підтверджено збіжність, то чи всім результатам можна довіряти з однаковим ступенем упевненості?





Відповідь:

За задовільної практичної збіжності за переміщеннями можуть не так добре збігатися внутрішні сили або напруження, що цікавлять розраховувача. Вони визначаються диференціюванням переміщень, а операція диференціювання є некоректною в тому сенсі, що незначній зміні функції може відповідати значна зміна похідної.

Дійсно, уявімо собі, що деяка функція $y=f(x)$ визначена з помилкою δ . Причому ми вважаємо помилку малою, тобто вважаємо, що значення $y_1=f(x_1)$ у деякій точці x_1 приблизно дорівнює $y_1 \pm \delta$. Якщо визначити похідну чисельно, приймаючи

$$f'(x_1) \cong [f(y_2) - f(y_1)] / (x_2 - x_1) = \Delta y / \Delta x,$$

то неважко помітити, що $f'(x_1) = \Delta y / \Delta x \pm 2\delta / \Delta x$.

За малої різниці Δy відносна помилка похідної $\varepsilon = 2\delta/\Delta y$ може виявитися досить помітною. І це відбувається під час кожного диференціювання, наприклад, тричі під час визначення поперечних сил (подивіться ще раз табл. 2.1). При цьому згущення сітки скінченних елементів може анітрохи не допомогти розв'язанню проблеми, оскільки водночас не тільки падає значення початкової помилки δ , але й зближуються вузлові значення функції (зменшується Δy) і, отже, може зростати відносна помилка. Саме для оцінки можливої появи ефектів такого роду і важливі дані про асимптотичну сходимость.



Питання:

Яке практичне значення має факт збіжності скінченно-елементного розв'язку до точного результату?

Відповідь:

Дані про значення параметра збіжності дають можливість приблизно призначити необхідну густоту сітки скінченних елементів, виходячи з такого вельми характерного міркування, яке ми запозичуємо з [5, с.55]:

«...зауважимо лише, що за природних обмежень на вихідні дані та сітку області збіжність має місце, і похибка у визначенні напружень і деформацій має порядок $C(h/L)$, де через C позначена константа, залежна від форми області; h – крок сітки; L — характерний розмір області. Ця оцінка слугує орієнтиром під час призначення кроку сітки залежно від бажаної середньої, наприклад, задавши точність наближеного розв'язання 5%, необхідно вибрати крок сітки рівним приблизно $1/20$ від характерного розміру...», тобто. для характерної двовимірної плями необхідно мати близько 400 вузлів, а в тривимірному завданні – приблизно 8000.



Водночас слід пам'ятати, що наведене вище міркування справедливе тільки в середньому і, крім того, точність дуже залежить не тільки від типу скінченного елемента, а й від способу розташування скінченних елементів і їхньої орієнтації щодо потоків основних напружень. Про останнє свідчить характерний приклад, запозичений з роботи [2] і показаний на рис. 2.9.

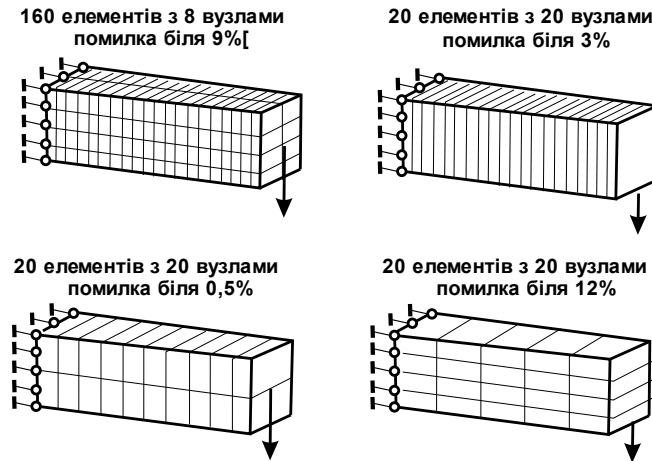


Рис. 2.9.

Звісно, у більшості випадків асимптотична збіжність супроводжується і прийнятною «практичною збіжністю», під якою ми розумітимемо можливість одержання прийнятною точності за порівняно грубого розбиття, але з цього правила є й винятки. Наведемо у зв'язку з цим висловлювання великого математика і фізика А. Пуанкаре (цитуються за [1, с.52]):

«...з двох рядів, у котрих загальні члени суть $1000n/n!$ і $n!/1000n$, математики назвуть перший таким, що сходиться, тому що мільйонний член набагато менший за 999 999-го, другий же ряд вони розглядають як такий, що розходиться, бо його загальний член може безмежно зростати. Астрономи, навпаки, візьмуть перший ряд за такий, що розходиться, тому що перші його 1000 членів ідуть зростаючи; другий ряд вони вважатимуть таким, що сходиться, тому що перші його 1000 членів ідуть спадаючи, і на початку спадання вельми швидко». І далі абсолютно запаморочливий висновок: «Обидва погляди законні: перше – в дослідженнях теоретичних, друге – в чисельних додатках».

Зауважимо, що велику задачу навряд чи варто розв'язувати цілком на згущених сітках, але очевидно, що виконання такого аналізу для характерних фрагментів розрахункової схеми є раціональним. Емпірично встановлений факт стійкості результату під час згущення сітки є вельми переконливим доказом на користь правильності обраного підходу до розв'язання.

Бесіда 2.4. Скінченні елементи бувають різними



Зі сказаного вище зрозуміло, що однакові за формою скінченні елементи можуть мати різні властивості, якщо вони побудовані на основі різних функцій форми. Зокрема, існують так звані гібридні моделі методу скінченних елементів, де поле переміщень визначено тільки на границях елементів, а всі інші характеристики знаходяться виходячи з передбачуваного розподілу напружень.

Треба віддати належне цим елементам у тому сенсі, що в багатьох чисельних експериментах гібридні скінченні елементи дійсно демонструють чудові результати, особливо на помірних за розмірами сітках. Однак, твердження про те, що гібридні елементи в будь-яких ситуаціях перевершують класичні скінченні елементи, побудовані на апроксимаціях полів переміщень, є невірним.

Ми тут відзначимо іншу класифікацію відмінностей між скінченними елементами. Вона пов'язана з тією обставиною, що на деякі компоненти вузлових зміщень елемент може не реагувати (відсутня відпорність) і не сприймати відповідні компоненти вузлового навантаження. Наприклад, реакція однакових за формою двовимірних скінченних елементів плити, що згинається, плоскої задачі теорії пружності або оболонки різняться так, як це показано в таблиці 2.2.

Цю властивість елементів слід враховувати, і, щоб уникнути геометричної змінюваності, у деяких випадках слід вводити вузлові зв'язки в тих напрямках, де елементи, що використовуються, не можуть забезпечити необхідну нерухомість.

Таблиця 2.2

Елементи	Зміщення						Навантаження					
	X	Y	Z	φ_x	φ_y	φ_z	P_x	P_y	P_z	M_x	M_y	M_z
Плити, що згинаються			+	+	+				+	+	+	
Плоскої задачі	+	+					+	+				
Оболонки	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	

Крім того, певні проблеми виникають і під час стикування елементів з різними вузловими опірностями, тобто силовими реакціями на зміщення вузла.

Наприклад, відсутність опірності за кутом повороту в елементах плоскої задачі (під час повороту вузла не виникає пружний момент, що чинить опір цьому повороту) спричиняє ефект шарнірного прикріплення, якщо до стінки, змодельованої такими елементами, приєднується стрижень (рис. 2.10).

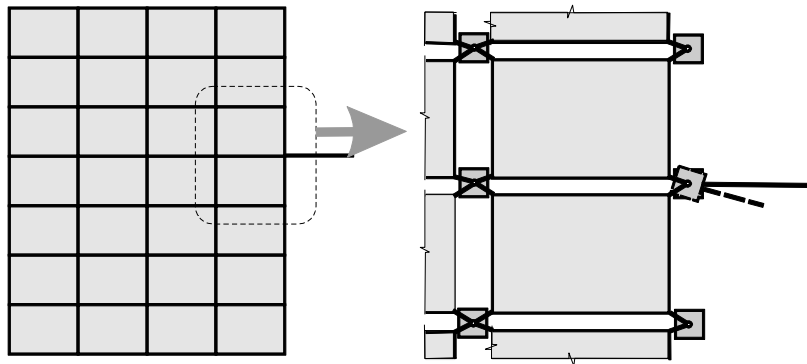


Рис. 2.10

У загальному випадку, якщо деякий (наприклад, i -й) скінченний елемент не має всіх ступенів свободи, передбачених у вузлі розрахункової схеми, то:

- «незв'язаний» ступінь свободи у вузлі «бовтається» і для правильного розв'язання задачі в деяких випадках на такий ступінь свободи необхідно накласти зв'язок;
- інші скінченні елементи, що примикають до цього вузла (кажуть, що вони входять у *зірку елементів* цього вузла), не будуть взаємодіяти з i -м елементом.

Вимога узгодженості властивостей, використовуваних у розрахунку скінченних елементів, є вельми істотною, відомі випадки допущення серйозних помилок унаслідок порушення цих вимог.

Взагалі можливість виконання практичних розрахунків будь-якої складної конструкції багато в чому визначається тим, які скінченні елементи доступні для використання. Як правило, використовуються елементи або групи елементів, які утворюють *бібліотеку скінченних елементів*. Це не просто зібрання формул і програм, що їх реалізують, а певною мірою структурована система, об'єднана прийнятими правилами опису невідомих, побудови матриць жорсткості, обчислення напруг і, зокрема, можливостями узгоджень умов сполучення елементів.

У сучасних універсальних програмних системах бібліотека скінченних елементів представлена елементами стрижнів, мембран, пластинок, оболонок, тривимірних тіл (рис. 2.11) тощо.

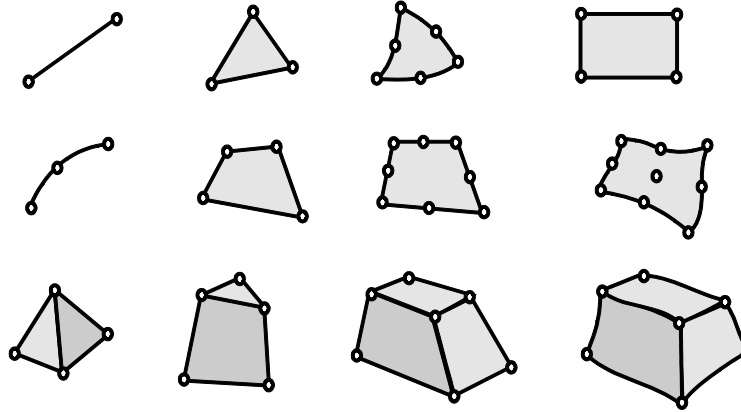


Рис. 2.11

- Кожен скінченний елемент, що входить до бібліотеки, характеризується такими властивостями:
- розмірністю використовуваного простору (одновимірний, двовимірний, тривимірний);
- геометричною формою, яка найчастіше є однією з найпростіших геометричних фігур (відрізок прямої, трикутник, прямокутник, чотирикутник, тетраедр тощо);
- набором вузлів, що розташовуються (як правило, хоча і не завжди) на лініях (поверхнях) розділу елементів і є загальними для елементів, що межують один з одним;
- набором використовуваних ступенів свободи, віднесених найчастіше до вузлів (хоча й не обов'язково до вузлів) – переміщення, повороти тощо;
- системою апроксимуючих функцій, що визначають усередині області Ω_e наближені вирази для компонент переміщень і їхнім зв'язком зі ступенями свободи скінченного елемента;
- фізичним законом, що зв'язує напруження і деформації;
- визначенням класу задач, до яких можна застосувати цей тип скінченного елемента (СЕ пластини плоского напруженого стану, СЕ плити Кірхгофа-Лява, СЕ плити Рейсснера, що перебуває на пружній двопараметровій основі, стрижень Тимошенка для просторової задачі тощо.).

Однією з найважливіших характеристик сукупності скінченних елементів є набір ступенів свободи, віднесених до їхніх вузлів. Ця характеристика дає змогу виокремити серед інших типів клас скінченних елементів, у яких усі ступені свободи мають сенс лінійних переміщень і/або поворотів вузлів.

Зазвичай скінченні елементи, представлені в бібліотеці будь-якого програмного комплексу, перевірені на збіжність рішення до точного розв'язку під час згущення сітки. Як приклад у табл. 2.3 наведено відомості про збіжність

елементів бібліотеки програмної системи SCAD за переміщеннями (u), напруженнями (σ), моментами (M) і поперечними силами (Q).

Таблиця 2.3.

Найменування елемента	Показник ступеня в оцінках швидкості збіжності за:			
	u	σ	M	Q
Прямокутний елемент плити	2	—	1	—
Трикутний елемент плити	2	—	1	0
Чотирикутний (від 4 до 8 вузлів) елемент плити	2	—	1	0
Прямокутний елемент плоскої задачі теорії пружності	2	1	—	—
Трикутний елемент плоскої задачі теорії пружності	2	1	—	—
Чотирикутний (від 4 до 8 вузлів) елемент плоскої задачі теорії пружності	2	1	—	—
Чотирикутний (від 4 до 12 вузлів) елемент плоскої задачі теорії пружності угости	2	1	—	—
Паралелепіпед	2	1	—	—
Тетраедр	2	1	—	—
Тригранна призма	2	1	—	—
Просторовий ізопараметричний шестивузловий елемент	2	1	—	—
Просторовий ізопараметричний восьми-вузловий елемент	2	1	—	—
Просторовий ізопараметричний двадцяти-вузловий елемент	2	1	—	—
Прямокутний елемент оболонки	2	1	1	0
Трикутний елемент оболонки	2	1	1	0
Чотирикутний елемент оболонки	2	1	1	0
Чотирикутний (від 4 до 8 вузлів) скінченний елемент оболонки 2 1 1 0	2	1	1	0

Нагадаємо, що збіжність є асимптотичною властивістю і її наявність не звільняє від необхідності виконання перевірки розв'язку на сітках, що загущуються. Асимптотична оцінка збіжності оперує оцінками похибки типу h^m , де h – максимальний із характерних розмірів скінченного елемента, а показник ступеня m характеризує швидкість зменшення помилки під час прагнення m максимальний із характерних розмірів скінченного елемента, а показник ступеня m характеризує швидкість зменшення помилки під час спрямування h до нуля.

Із цієї таблиці, наприклад, видно, що під час згущення сітки помилка в переміщеннях зменшується з квадратичною швидкістю, а в напруженнях – найчастіше лінійно.

Більш груба помилка в моментах, і ще грубіша помилка в поперечних силах пояснюється тим, що перехід до них пов'язаний з числовим диференціюванням прогинів. Навіть незначна помилка в прогині, коли замість точної величини u_i ми використовуємо величину $u_i + \varepsilon$, дає значення першої похідної $(u_i + \varepsilon - u_{i+1})/h = u' + \varepsilon/h$, де похибка ε/h може бути вельми помітною за малого кроку h .

Бесіда 2.5. Розбиття на скінченні елементи



Розглянемо, яким чином створюється скінченно-елементна сітка на площині або на криволінійній поверхні. Найпростішим способом є пряме задання координат вузлів, за допомогою яких потім формуються скінченні елементи (для чого слід зазначити, які із зазначених вузлів і в якій послідовності створюють контур скінченного елемента).

Такий спосіб застосовується переважно в нескладних моделях або ж у тих випадках, коли потрібно розширити вже наявну скінченно-елементну модель. Однак основним способом створення скінченно-елементних моделей є автоматичний спосіб формування. Сучасний персональний комп'ютер дає змогу розв'язувати задачі з числом вузлів, що вимірюється тисячами і десятками тисяч. Природно, що в таких умовах неможливо собі уявити «ручне» складання скінченно-елементної сітки, і більшість сучасних програмних засобів мають ті чи інші автоматичні сіткові генератори.

Найпростішим варіантом генерації є випадок створення *прямокутної сітки елементів* на прямокутній області площини. При цьому може бути створено сітку зі змінним або постійним кроком, наприклад, у площині XOY . Введення параметрів сітки виконується заданням величини кроків і кількості повторень за кожним напрямком.

Так, наприклад, у разі завдання таких параметрів розбивки:

Крок уздовж осі X	Кількість кроків	Крок уздовж осі Y	Кількість кроків
0.5	6	0.25	8
0.25	8	0.5	6
1	5		

отримаємо схему, показану на рис. 2.12.

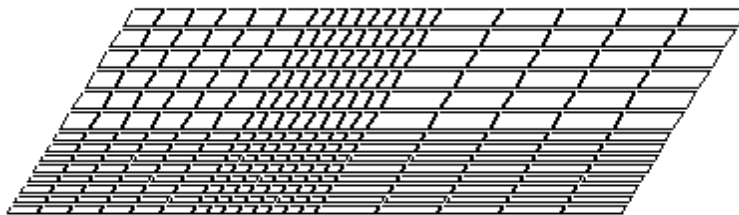


Рис. 2.12.

Створення сітки трикутних скінченних елементів (тріангуляція) у замкненій області довільної форми на площині є одним із найбільш універсальних засобів формування сіток скінченних елементів. Ця операція автоматично виконується практично в будь-якій сучасній програмній системі.

Зручність застосування трикутників як елементарних областей, які займають окремі скінченні елементи, визначається тим, що за їхньою допомогою легко описувати границі тіл досить складної форми. Крім того, трикутна сітка корисна під час згущення елементів у тій частині розрахункової області, де передбачаються високі градієнти напруженого стану конструкції, наприклад, у місцях концентрації напружень біля вирізів, вхідних кутів тощо. Трикутники добре пристосовані для автоматичної побудови сітки скінченних елементів, до того ж більшість відомих генераторів сіток, що входять до складу розвинених програмних комплексів, ґрунтуються на тріангуляції області. Саме ці переваги трикутних скінченних елементів і зумовлюють їхнє широке використання в програмних комплексах.

Для тріангуляції області найчастіше використовують метод, що ґрунтується на побудові діаграми Вороного (рис. 2.13,а), за допомогою якої можна розділити площину на області тяжіння заданої множини вузлів. Кожне ребро цієї діаграми є відрізком прямої, що перпендикулярна відрізку, який з'єднує пару найближче розташованих точок і ділить цей відрізок навпіл. Якщо тепер з'єднати відрізками кожен пару точок, що мають спільне ребро в діаграмі Вороного (мал. 2.13,б), то ми отримаємо систему трикутних фігур, які покривають розглянуту множину вузлів (*тріангуляція Делоне*).

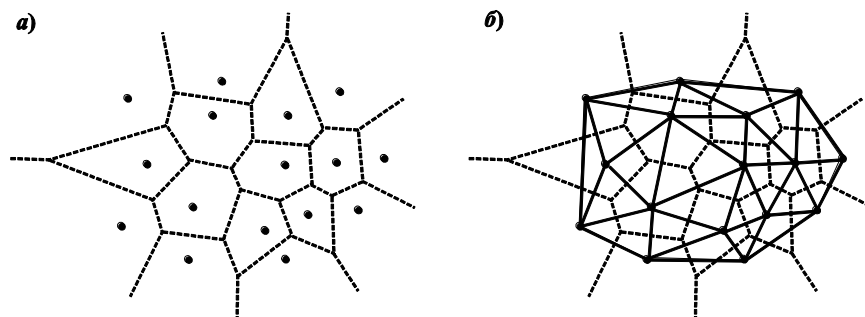


Рис. 2.13.

Важливою властивістю скінченно-елементної сітки є її гладкість (поступова зміна розмірів елементів), оскільки різка зміна характерних розмірів елемента вносить чутливе збурення в картину напружено-деформованого стану. Особливо це помітно під час розгляду напружень, представлених лініями рівня. У хороших сіткових генераторах є можливості управління згущенням (до точки, до лінії, до центра або периметра області тощо), які дають змогу витримати заздалегідь заданий ступінь гладкості розбивки. А

сам механізм згущення сітки дає можливість більш детально досліджувати місця концентрації напружень, зони крайового ефекту в оболонках тощо.

Густота розбиття сітки в автоматичних генераторах керується такими параметрами, як задана максимальна відстань між вузлами і допустимий мінімальний кут у вершині трикутника.

З погляду скінченно-елементного аналізу можна сміливо говорити про те, що оптимальним є розбиття на елементи, які мають форму найпростіших рівносторонніх фігур (рівносторонній трикутник, квадрати, рівносторонній тетраedr, куб). Практично ця вимога досягається дуже рідко, і отримане розбиття на скінченні елементи відрізняється від оптимального. Тому виникає завдання оцінювання якості отриманого сіткового розбиття, для чого будуються різні вимірники (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Параметр	Трикутники		Чотирикутники	
	Оптимум	Рекомендується	Оптимум	Рекомендується
Коефіцієнт форми		1 ... 1,3		1 ... 4
Мінімальний кут, градуси	60	30 ... 60	90	45 ... 90
Мінімальний кут, градуси	60	60 ... 90	90	90 ... 135
Відношення максимального кута до мінімального	1		1	
Відношення максимальної сторони до мінімальної	1	1 ... 4	1	1 ... 4
Відношення площі до квадрата периметра	$2/\sqrt{3}$	0,5 ... 2	0,0625	0,04 ... 0,1
Витягнутість	—	—	1	0,25 ... 1

Одним із таких вимірників є коефіцієнт форми, який обчислюють так. Для кожної сторони елемента L_i визначається площа ідеального елемента такої величини (для рівностороннього трикутника вона дорівнює $0,433(L_i)^2$, а для квадрата – $(L_i)^2$), і потім ці площі усереднюються.

Відношення цієї усередненої «ідеалізованої» площі до реальної площі елемента приймається як міра якості.

Для чотирикутних елементів слід обмежити їхнє прагнення до «голчастої форми», для чого використовується такий вимірник, як витягнутість. Використовують й інші вимірники, дані про які наведено в таблиці 2.4, де також зазначено рекомендовані та оптимальні значення відповідних заходів якості.

Бесіда 2.6. Дещо про розрахункові моделі МСЕ

Одним з основних переваг методу скінченних елементів є його здатність розв'язувати задачі, де в розрахунковій схемі взаємодіють елементи різного типу (стрижневі, оболонкові, плитні тощо).

Але потрібно пам'ятати, що метод скінченних елементів є способом наближеного розв'язання деяких диференціальних рівнянь, якими описується точна постановка задачі. Тому слід розуміти, якими властивостями наділені ці диференціальні рівняння і до яких результатів можуть призводити їхні розв'язки.

Так, стикування скінченних елементів різної розмірності (отже, націлених на розв'язання різних диференціальних рівнянь) може призвести до несподіваних неприємностей. На одну з них ми вже вказали, коли розглядали примикання згинального стрижня до балки-стілки, змодельованої елементами плоскої задачі теорії пружності (рис. 2.10). Там причиною була різна розмірність відповідних диференціальних рівнянь (відповідно, і числа ступенів свободи у вузлі). Для стрижня вузол має мати три ступені свободи, для плоскої задачі теорії пружності – два.

Однак виникнення неприємностей може бути пов'язане і з різними властивостями розв'язків, що відповідають різним диференціальним рівнянням. Так, для деяких двовірних задач теорії пружності зосереджені впливи дають нескінченні розв'язки в точці прикладання такого впливу. До чого це призводить у скінченно-елементному поданні задачі покажемо на прикладі стикування плити, що згинається, і стрижневого елемента.

Отже, розглянемо дискретну розрахункову схему, що поєднує в собі скінченні елементи плити і стрижневі елементи, жорстко приєднані до плити. Сітку скінченних елементів плити вибирають так, щоб стрижні каркаса будівлі потрапляли у вузли сіткового розбиття плити. Така розрахункова схема забезпечить у вузлах стикування плитних і стрижневих елементів сумісність як вертикальних переміщень плити та каркаса (переміщень у напрямку, перпендикулярному площині плити), так і відповідних кутів повороту. Однак, одержувані в цій розрахунковій схемі згинальні моменти в перерізах стійок, що примикають до плити, не мають відношення до істинного розподілу внутрішніх зусиль. А якщо це так, то це позначиться і на розподілі внутрішніх зусиль в інших елементах каркаса будівлі.

Дійсно, уявімо собі, що сітка плити згущується, і розраховувач, переконаний щодо збіжності використовуваного скінченного елемента плити очікує все більшого уточнення результатів розрахунку. Однак, починаючи з деякої сіткової розбивки, подальше дроблення сітки повинно призводити до зменшення абсолютних значень згт наочних моментів у стрижнях у місцях їхньо-

го закладення в плиту. У випадку спрямування максимального розміру сіткової клітинки до нуля, ці згинальні моменти також повинні спрямовуватися до нуля, а це означає, що дана розрахункова схема забезпечує не жорстке, а шарнірне приєднання елементів каркаса до плити.

Те, що користувач формально за обраної ним сітки отримує деякі відмінні від нуля чисельні значення зги наючих моментів свідчить лише про похибку дискретизації в методі скінченних елементів, але немає жодних підстав похибку дискретизації сприймати за гідний довіри результат!

Справді, згинальний момент у стрижні в описаній вище розрахунковій схемі, незалежно від розмірів сітки, передається на плиту як момент, зосереджений у вузлі сітки. З іншого боку, плита під дією зосередженого згинального моменту отримує нескінченний кут повороту в площині дії моменту в місці його прикладання, а точніше, у виразі для кута повороту виникає особливість логарифмічного типу. Таким чином, плита не чинить опору на зосереджений поворот, а отже, і не защемляє елементів каркаса.

Як тестовий приклад наведемо результати розрахунку защемленої за контуром квадратної плити з одиночною стійкою, закладеною в центрі плити

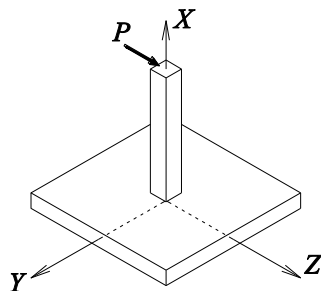


Рис. 2.14.

На вільному верхньому кінці стійки прикладена зовнішня зосереджена сила P , спрямована вздовж глобальної осі Z (рис. 2.14). У цьому разі згинальний момент у нижньому перерізі стійки буде величиною постійною, що не залежить від розмірів сітки скінченних елементів, тому що система статично визначена щодо стійки.

Однак, той самий ефект проявляється в горизонтальному переміщенні вершини стійки, необмежено наростаючому під час згущення сітки за рахунок зростання кута повороту в центральному вузлі плити.

У другому рядку табл. 2.5 наведено результати обчислення переміщення w_n вільного кінця стійки в напрямку осі Z залежно від використовуваної сітки ($n \times n$) скінченних елементів на чверті плану плити.

Таблиця 2.5.

$n \times n$	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64
$w_n \times 10^4$	11,826	11,996	12,162	12,326	12,492	12,659
$w_n \times 10^4$	—	11,209	11,194	11,180	11,172	11,169

Під час розрахунку прийнято такі вихідні дані до задачі::

- товщина плити $h = 0,5$ м;
- повні розміри плити в плані $10,0 \times 10,0$ м;
- розміри поперечного перерізу стійки $0,5 \times 0,5$ м;

- характеристики матеріалу плити і стійки $E=3 \cdot 10^7 \text{ т/м}^2$, $\nu=0,25$.

Легко помітити, що за кожного подвоєння сітки зростання прогину w_n відбувається практично на одну й ту саму величину $\Delta \cong 0,167 \cdot 10^{-4}$, інакше кажучи, прогин стійки зростає лінійно разом зі зростанням $\log_2 n$, точніше

$$w_n = w_n + \Delta \cdot \log_2(n-1),$$

звідки, як і слід було очікувати, і впливає необмежене зростання кута повороту кореневого перерізу стійки разом із подібненням сітки скінченних елементів.

Звідси можна дійти до важливого практичного висновку: під час створення розрахункової моделі слід врахувати фактичні умови сполучення колони з плитою. Для цього часто використовують прийом, який полягає в тому, що по контуру габариту колони передбачають вузли, через які передають на плиту зусилля від колони (рис. 2.15, а). Альтернативним прийомом є передача навантаження від колони у вигляді розподіленого по «плямі контакту» (рис. 2.15, б).

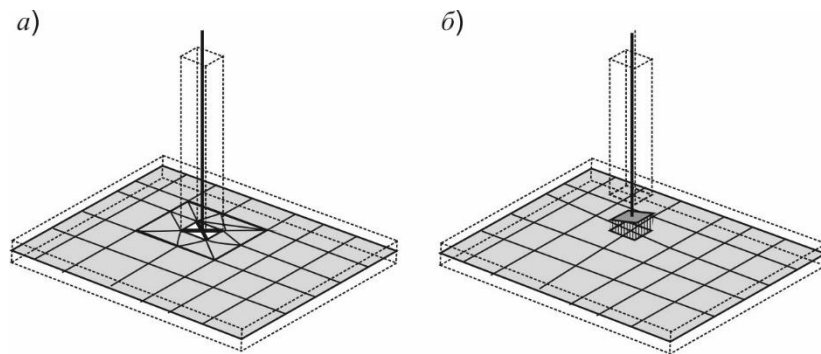


Рис. 2.15.

Перейдемо тепер до розгляду поздовжніх і поперечних сил у стрижневих елементах, що примикають до диска. Можна показати, що під час дії зосередженої сили в плоскій задачі теорії пружності переміщення точки прикладання цієї сили в напрямку дії сили має особливість.

Повторюючи попередні міркування для згинального моменту, ми доходимо висновку, що при точному розв'язанні задачі з точковим спряженням (тобто спряженням в одиничному вузлі) стрижня та за плоскою задачею теорії пружності зусилля, що передається на стрижень, має дорівнювати нулю. І знову-таки, відмінні від нуля значення поперечних і поздовжніх сил, які формально отримують у стрижнях унаслідок розрахунку дискретної моделі, зобов'язані своїм походженням винятково похибці дискретизації. Сама ж розрахункова схема (не плутати з її дискретним аналогом!) наводить як нульові моменти, так і нульові зусилля в стрижнях.

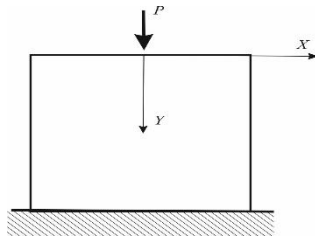


Рис. 2.16

До цього ж висновку можна дійти і в результаті чисельних експериментів, якщо уважно проаналізувати результати розрахунків, що отримуються при згущенні сітки у випадку дії зосередженої сили на пластину. З цією ціллю звернемося до задачі, зображеної на рис. 2.16.

Нехай задача характеризується такими даними:

- товщина пластини $h = 1,0$;
- габаритні розміри пластини в площині (X,Y) $16,0 \times 16,0$;
- характеристики матеріалу $E=3 \cdot 10^5$, $\nu=0,25$;
- чинне навантаження $P=1000$.

У табл. 2.6 наведені результати розв'язання цієї задачі, де v_n – переміщення точки докладання сили P у напрямку осі Y , і зрозуміло, що переміщення, яке відслідковують, як і слід було очікувати, необмежено зростає разом зі згущенням сітки скінченних елементів.

Отже, загальний висновок такий: точкове спряження стрижневих елементів і елементів плоскої задачі теорії пружності, в принципі, призводить до некоректної постановки задачі.

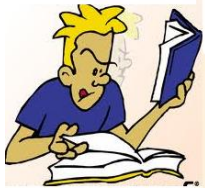
Таблиця 2.6.

$n \times n$	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64
$v_n \times 10^4$	55,278	68,282	82,665	97,296	111,989	126,695

Взагалі, поблизу особливих точок, таких, де є різка концентрація напружень, застосування скінченних елементів (так само як й інших методів дискретизації) зазвичай ускладнене, особливо в представленні поля напружень. Доводиться різко згущувати сітку скінченних елементів і суттєво збільшувати розмірність задачі.

Однак згадане згущення сітки може й не привести до результату, що підштовхує до додаткового аналізу ситуації. Одним із найпоширеніших суджень є таке: зосереджена сила є абстракцією, якої не існує в природі, і якби вона була створена, то, простроївши конструкцію будь-якої міцності та не зустрічаючи опору, понеслася б у нескінченність. Виходить, що ця ідеалізація створює штучну складність, у боротьбі з якою можна здійснювати героїчні подвиги, але практична значущість таких подвигів вельми відносна.

Слід було б пам'ятати про те, яким чином фактично реалізовано в конструкції ту силу, що ідеалізується у формі зосередженої, тоді можуть відпасти й питання про збіжність скінченно-елементного розв'язку до точного.



Питання:

Яким чином слід відкоригувати скінченно-елементну модель задачі, щоб уникнути згаданих неприємностей?

Відповідь:

Насамперед слід детальніше розглянути конструктивні особливості сполучення стрижня і діафрагми. Нехай, наприклад, сталевий ригель двотаврового перерізу, заведений на частині своєї довжини в цегляну стіну, як це показано на рис. 2.17,а.

Тоді в розрахунковій схемі, у тому числі й у дискретному її аналогу, достатньо врахувати одновимірний елемент-стрижень, що проникає на відповідну довжину в ділянку плоскої задачі, як це показано на рис. 2.17,б.

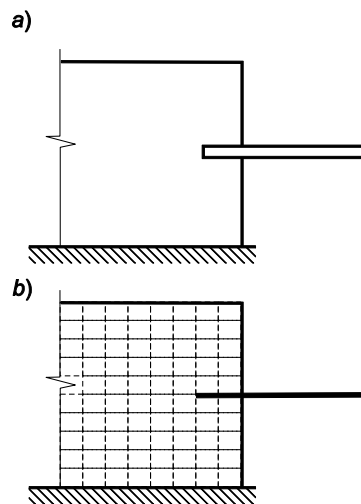


Рис. 2.17.

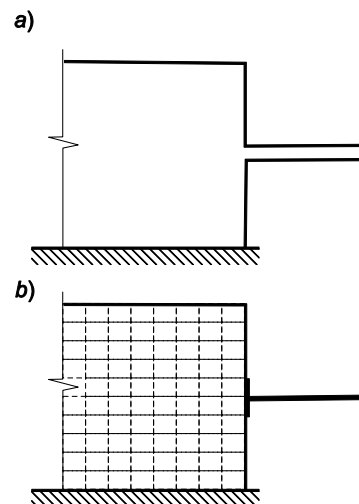


Рис. 2.18

Інший варіант розрахункової схеми можна запропонувати в разі монолітного спряження залізобетонної стінової панелі та ригеля каркаса будівлі – рис. 2.18,а. Тут можна врахувати фактичні розміри перерізу – висоту ригеля, впродовж якої вздовж границі стіни доречно розмістити абсолютно жорстке тіло, як це показано на рис. 2.18,б. Це абсолютно жорстке тіло для самого ригеля кореспондується з гіпотезою плоских перерізів, згідно з якою переріз ригеля залишається після його деформації плоским і не змінює своїх розмірів.

Зрозуміло, наведені тут два варіанти формування розрахункових схем не вичерпують усього розмаїття можливих ситуацій, тож у кожному конкрет-

ному випадку розраховувач має виходити з конструкційних особливостей задачі, а не з якихось заздалегідь вигаданих, умовних і таких, що підходять на всі випадки життя, схем.

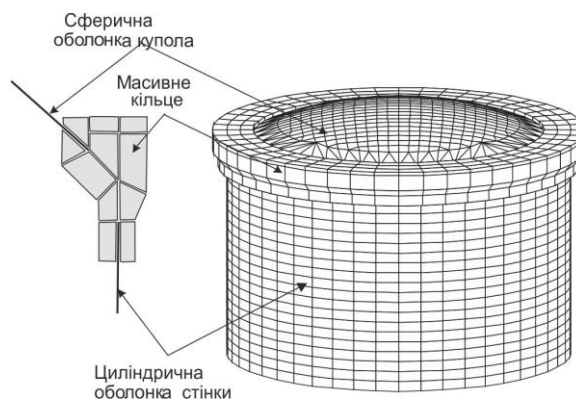


Рис. 2.19.

Водночас слід зазначити, що прийом «рознесення області примикання» на кшталт рис. 2.18 можна використовувати і в інших випадках спряження елементів різної розмірності.

На рис. 2.19 показаний приклад такого спряження, в якому циліндрична оболонка стінки і сферична оболонка кришки захисної конструкції атомного реактора поєднується з масивним кільцем.

Бесіда 2.7. Прийоми аналізу результатів розрахунку



Побудова розрахункової схеми передуює розв'язанню задачі, а деякі передумови, що використовуються під час моделювання, спираються на очікувані властивості розв'язання. Наприклад, припущення про малість переміщень і, особливо кутів повороту, слугує підставою для розв'язання задачі в геометрично лінійній постановці, а припущення про відсутність різких концентраторів напружень лежить в основі застосування приблизно рівномірної сітки скінченних елементів.

Тому необхідний апостеріорний аналіз отриманого рішення і, за необхідності, коригування розрахункової схеми відповідно до результатів такого аналізу.

Виконання аналізу результатів розрахунку значно полегшується при використанні наочних і простих моделей, для яких накопичено великий досвід застосування і очікувані результати легко передбачаються.

Але завжди слід пам'ятати, що розрахункова схема є деякою абстракцією, створеною для певних цілей, і тому ставлення до неї не має перетворюватися на обожнювання.

Певне почуття гумору щодо розрахункової схеми характеризує досвідченого і грамотного розраховувача. Цей же розраховувач зазвичай використовує (іноді не явно) не одну, а кілька у певному сенсі близьких розрахункових схем і, якщо результати аналізу такого роду набору схем близькі одна до одної, то впевненість у їхній правильності різко зростає.

Під час проектування сучасних відповідальних об'єктів дедалі частіше використовують вельми складні та надмірно деталізовані розрахункові схеми. Передбачається, що таким чином гарантується відшукання найбільш напружених місць конструкції. Але потрібно враховувати, що зазначений результат може бути все одно загублений через труднощі аналізу та осмислення надлишкової інформації. Річ у тім, що, починаючи з деякого рівня складності системи, здатність людини формулювати осмислені й точні твердження про поведінку системи починає різко падати. Тут має місце деякий аналог принципу невизначеності Гейзенберга щодо детальності та інформативності результатів розрахунку, які виступають у ролі альтернативних параметрів.

Маючи справу із завданнями великої розмірності, розраховувач навряд чи зуміє в одній розрахунковій моделі відобразити всі її особливості так, щоб не просто одержати певний набір результатів, а зробити це доступним для розуміння і якісного аналізу.

Найбільш повне і багатостороннє уявлення, природно, може бути отримано в тому разі, коли конструкція представлена цілою серією моделей, кожна з яких присвячена іншій характерній рисі споруди.

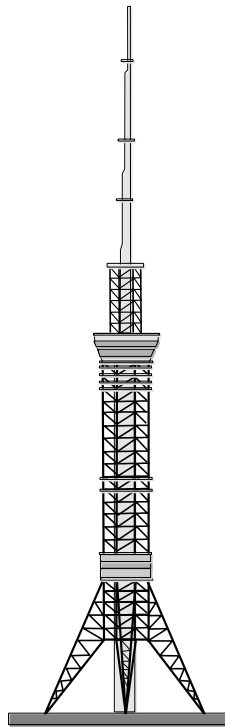


Рис. 2.20.

Так, наприклад, телевізійна вежа, представлена на рис. 2.20, розраховувалася:

- як консольний стрижень змінної жорсткості для оцінки її динамічних характеристик;
- як просторова ферма з нерозрізними поясами – для визначення невідповідних комбінацій зусиль і розрахункових значень зусиль у стрижнях;
- як оболонкова система (фрагментарно) – для визначення напружено-деформованого стану вузлових з'єднань;
- спільно з ґрунтовою основою – для визначення тривалих осідань і кренів тощо.

Таким чином, використання декількох розрахункових схем, які певною мірою взаємно доповнюють одна одну й орієнтовані на різні властивості системи, дає змогу провести більш переконливий аналіз.

При цьому одночасно досягається й інший результат, парируються можливі помилки, оскільки необхідність у поясненнях розбіжності результатів розрахунку за різними схемами досить швидко локалізує причини таких розбіжностей.

Досвід проєктної роботи останніх десятиліть показує, що розвиток засобів автоматизації інженерних розрахунків чинить найсерйозніший (на жаль, як позитивний, так і негативний) вплив на якість розрахункових обґрунтувань проєктних рішень. Той рівень детальності і точності розрахунку, який сьогодні доступний проєктувальникам у масовому порядку, вчора ще був недосяжним навіть для найбільш кваліфікованих організацій і фахівців. Водночас масова доступність сучасних потужних розрахункових обчислювальних комплексів (надалі ОК) створює і цілу низку нових проблем.

Іноді лунає заклик до виконання розрахунків за двома програмами, але цей прийом може бути і шкідливим.

Ми говоримо про можливу шкоду тільки в тому сенсі, що виконання розрахунку за двома програмами, але з однією і тією ж розрахунковою моделлю, провокує породження небезпечної ілюзії подвійного контролю і нібито подвійної надійності результатів інженерних розрахунків. Однак можливість перенесення помилки в моделюванні об'єкта може все звести нанівець.

Питання:

Якщо виконувався подвійний розрахунок, то як слід оцінювати міру розбіжності результатів? Як приймається рішення про задовільний (не задовільний) результат зіставлення?



Відповідь:

Для того, щоб точніше виконати зіставлення, слід використовувати нормування розбіжностей. Наприклад, якщо розбіжності в поздовжній силі підраховують як співвідношення

$$\Delta_N = \frac{|N_1 - N_2|}{N_1} \times 100 (\%),$$

для малих значень зусиль ми отримаємо спотворену картину (в районі нуля всі такі оцінки великі).

Логічніше зіставляти нормовані величини, наприклад, порівнювати помилку в напруженнях $\sigma_0 = |N_1 - N_2|/A$, викликану модулем різниці зіставних значень (A – площа поперечного перерізу), відносячи її до розрахункового опору матеріалу R_y

$$\Delta_{0,N} = \frac{\sigma_{0,N}}{R_y} = \frac{|N_1 - N_2|}{AR_y}.$$

Аналогічно слід чинити і зі згинальними моментами (W – момент опору)



$$\Delta_{0,M} = \frac{|M_1 - M_2|}{WR_y}$$

Тоді розбіжності стають фізично значущими, а не формальними, що легко побачити з наведеної таблиці, запозиченої з розрахунку складного об'єкта.

Елемент	N ₁	N ₂	Δ _N , %	Δ _{0N} , %
1	-220,0	-222,4	1,073	0,166
2	-14,9	-12,1	18,403	0,262
3	-460,9	-462,2	0,281	0,168
4	61,7	58,7	4,891	0,181

Ми бачимо, що розбіжність зусиль у другому елементі, яка здається великою, насправді не така вже й значна.

Питання:

Що робити, коли розрахунки на сітках скінченних елементів, що згущуються, вказують на відсутність збіжності результатів? Чи можна вірити таким розрахункам?



Відповідь:

Нагадаю, що для методу скінченних елементів розмова про «збіжність узагалі» позбавлена сенсу, оскільки збіжність може стосуватися не всіх результатів, що наочно демонструє таблиця 2.3.

Цю тезу легко проілюструвати на елементарному шкільному прикладі.

Так, при обчисленні площі прямокутного трикутника можна використати розбиття його на елементарні прямокутники з розмірами сторін $\Delta x = a/n$ і $\Delta y = b/m$ (рис. 2.21) і наближено обчислювати площу як суму елементарних площадок, отримуючи все більш точний результат при збільшенні кількості n і m . Але як би не збільшували число дроблень, довжина гіпотенузи буде у нас такою, що дорівнює $a+b$.

Чи означає це, що результат, який не сходиться, не можна ніяк використовувати? Ні, він просто відноситься не до первісно обраної розрахункової схеми, а до її модифікації в стилі методу скінченних елементів. І, як у будь-якому іншому випадку, ця нова розрахункова схема може потребувати своєї верифікації.

Її «схожість» на початкову розрахункову схему може якоюсь мірою проілюструвати поведінку інших компонент результату. Наприклад, можна про-

аналізувати, наскільки гладкими є поля напруг, для чого слід розглянути їхні значення не тільки у вузлах, а й у вершинах скінченних елементів, що приликають до вузла (така можливість є, наприклад, у програмі SCAD), і оцінити величину стрибків. (рис. 2.5).

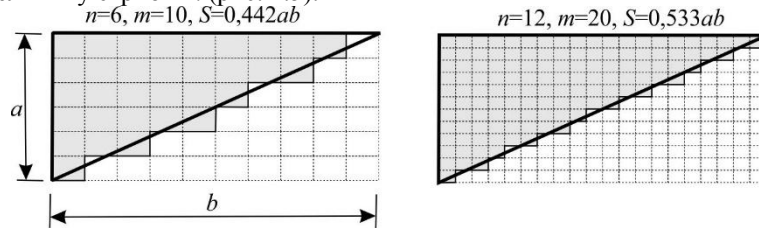


Рис. 2.21

Найхарактернішим прикладом появи сумнівних результатів, пов'язаних із відсутністю збіжності, є спостережуване в багатьох випадках нереально велике значення поперечних сил у оболонкових скінченних елементів. У цьому разі можливим прийомом верифікації може слугувати локальне згущення скінченноелементної сітки. Часто за такого згущення сплеск поперечної сили локалізується і в міру згущення сітки починає займати дедалі меншу область. Розраховувач має вирішити, чи можна знехтувати такого роду «концентратором».

Інший, правильніший, метод полягає в тому, що локальну ділянку розглядають як фрагмент зі скінченно-елементним розбиттям іншого типу, за якого використовують елементи іншої природи (наприклад, тривимірні просторові). Тоді з'являється можливість отримати уточнений розв'язок задачі й прийняти правильне рішення щодо можливості використання розбіжних розв'язків.

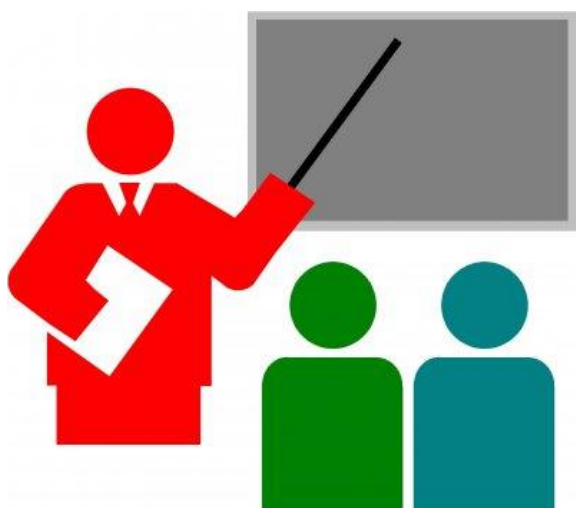
Зауважимо, що використання розбіжних рядів є досить поширеним прийомом прикладної математики [1].

Література

1. **Blekhman I.M., Myshkis A.D., Panovko Ya.G.** Applied mathematics: the subject, the logic, the features of the approaches (in Russian) — Moscow: KomKniga Publ., 2005.
2. **Chen X., Liu Y.** Finite Element Modelling and Simulation with ANSYS Workbench — CRC Press Taylor & Francis Group, 2015.
3. **Perelmuter A.V., Slivker V.I.** Numerical Structural Analysis — Berlin-Heidelberg: Springer, 2003.
4. **Slivker V.I.** Mechanics of Structural Elements/ Theory and Applications — Berlin-Heidelberg: Springer, 2007.
5. **Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А.** Розрахунок потужних гідротехнічних споруд з урахуванням розкриття тріщин (російською). - М.: Енергія, 1981.
6. **Городецкий О.С., Євзеров І.Д.** Комп'ютерні моделі конструкцій (російською) — К.: Факт, 2005.

Цикл 3

Нелінійні задачі статики



Бесіда 3.1. Початкові відомості про нелінійні задачі



Лінійна будівельна механіка, про яку йшлося в бесідах перших двох циклів, є найбільш вживаною, але вона не всемогутня. Завдання розрахунку несівних конструкцій, орієнтовані на уточнене передбачення особливостей поведінки системи на всіх етапах її роботи, включно з етапами, що передують руйнуванню, найчастіше не можуть бути вирішені методами лінійної будівельної механіки..

Відхилення від закону Гука (*фізична нелінійність*), відмова від розгляду умов рівноваги в геометричних термінах недеформованого стану (*геометрична нелінійність*), врахування можливої зміни розрахункової схеми в процесі деформації (*конструктивна нелінійність*) становлять звичайний набір нелінійностей, до якого апелює більшість дослідників і навчальна література.

Цей набір далеко не повний. Він не включає розгляд ефектів, що виникають під час протікання реологічних процесів у матеріалі (наприклад, повзучість) і нелінійні ефекти опору руху на кшталт сухого тертя або іншої природи, крім того, він опускає нелінійності, пов'язані з накопиченням напруг і деформацій у процесі зміни конструкції при її створенні (*генетичну нелінійність*). Останній тип нелінійності, звісно, можна розглядати як варіант конструктивної нелінійності, оскільки розглядаються системи з мінливою розрахунковою схемою, але тут зміни відбуваються не внаслідок дії навантаження, а цілеспрямовано, за задумом проектувальника, що дає підстави для її окремого розгляду та найменування.

У таблиці 3.1, яку варто уважно проаналізувати, проводять зіставлення між лінійними та нелінійними задачами будівельної механіки. Неважко помітити, що при переході до нелінійного аналізу багато звичних підходів стають непридатними, і про багато питань, які раніше навіть не привертати до себе уваги, необхідно подумати.

Не зупиняючись на подробицях, сформулюємо хоча б деякі застереження загального плану щодо проблематики нелінійного розрахунку. Зокрема, корисно навести тут перелік запитань з [4], які має поставити собі розраховувач перед спробою розв'язання нелінійної задачі.

Ці питання виникають унаслідок цілої низки особливостей нелінійних задач, багато з яких незвичні для фахівців, чиє становлення відбувалося під впливом лінійних розв'язувань:

- наскільки точно вивчені властивості матеріалу?
- чи впливає на результат початковий напружено-деформований стан, наприклад, наявні в системі залишкові напруження? Якщо так, як він може бути визначений?
- чи є можливість існування неоднозначності розв'язання, наприклад, різні шляхи в проблемах випучування або більше ніж один післякритичний стан? Якщо так, то, можливо, знадобиться створити деякі штучні початкові недосконалість, за допомогою яких буде досягнуто тільки одне рішення, що цікавить користувача?

- чи впливає на поведінку конструкції історія навантаження?
- чи буде поведінка матеріалу однаковою при навантаженні та розвантаженні?
- у разі великих зміщень або великих поворотів чи залишатиметься постійним напрямом дії навантаження, чи він буде слідувати за спотворенням форми?
- чи повинен використовуватися більший коефіцієнт запасу для компенсації можливої похибки або невпевненості в адекватності рішення?
- яким чином будуть перевірятися розв'язки?

Таблиця 3.1.

Особливість	Лінійні задачі	Нелінійні задачі
Залежність зміщень від навантаження	Зміщення лінійно залежать від прикладеного навантаження	Залежність зміщення від навантаження нелінійна
Зв'язок між напруженою та деформацією	Приймається лінійна залежність між напруженням та деформацією	У задачах, де розглядають фізичну нелінійність, залежність «напруження-деформація» може бути нелінійною функцією напруження, деформації та/або часу
Величина зміщення	Зміна в геометрії завдяки зміщенню вважається малою та ігнорується під час перевірки рівноваги	Зміщення можуть бути не малими, для перевірки рівноваги необхідно використовувати деформований стан
Оборотність	Усі деформації повністю оборотні та зникають під час розвантаження системи	Після зняття навантаження стан системи може відрізнитися від початкового
Граничні умови	Граничні умови протягом розрахунку залишаються незмінними	Граничні умови можуть змінюватися, наприклад, змінюються площадки контакту
Використання результатів	Результати розрахунку на різні навантаження допускають додавання або множення на деякі коефіцієнти з метою об'єднання розрахункових станів	Розкладання задачі на складові дії та подальше об'єднання результатів неможливе
Початковий напружено-деформований стан	Початковий напружено-деформований стан є несуттєвим	Початковий напружено-деформований стан зазвичай потрібно задати, особливо для нелінійності, пов'язаної з поведінкою матеріалу

Слід мати на увазі, що, яким би не було походження нелінійності, під час практичного розв'язання задачі виникає проблема розв'язку відповідної системи нелінійних рівнянь рівноваги

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.1)$$

Є багато методів їхнього розв'язання, але, мабуть, найпопулярнішим є крокова процедура, що стала невід'ємною частиною нелінійного скінченно-елементного аналізу.

Загальні описи крокової процедури добре відомі й пов'язані з розв'язанням лінеаризованих рівнянь за поступового зростання деякого часоподібного параметра t (наприклад, інтенсивності навантаження). Насамперед необхідно зазначити, що сам перехід від системи нелінійних рівнянь рівноваги до рівнянь з параметром

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

і далі до ланцюжка лінеаризованих рівнянь крокового методу залежить від способу введення в систему параметра t , прирости якого реалізують перехід від кроку до кроку.

Якщо такий параметр обрано так, що відоме рішення системи (3.2) за деякого значення $t=t_0$, а при $t=t^*$ система (3.2) тотожно збігається з (3.1), то диференціювання за t призводить до системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.3)$$

з відомими при $t = t_0$ початковими умовами. Розв'язуючи для системи рівнянь (3.3) задачу Коші, отримуємо інтегральну криву

$$x_1=x_1(t), \quad x_2=x_2(t), \quad \dots, \quad x_n=x_n(t), \quad (3.4)$$

яка при $t = t^*$ призводить до розв'язання початкової задачі (3.1).

Відомо кілька варіантів крокової процедури, які, по суті, різняться лише способами введення параметра t та/або використовуваними методами чисельного розв'язування зазначеної вище задачі Коші, зокрема є можливість скористатися такими модифікаціями крокового методу:

- простий покроковий метод;
- кроковий процес з уточненнями;
- кроково-ітераційний.

У першому випадку на кожному кроці, коли реалізується збільшення навантаження ΔP , розв'язують лінеаризовану задачу, і за припущенням, що це розв'язання є досить точним, реалізують перехід до наступного кроку навантаження. Практично, ця процедура відповідає найпростішому способу розв'язання системи диференціальних рівнянь, що ґрунтується на побудові ламаної Ейлера (рис. 3.1) замість побудови інтегральної кривої (3.4). Похибка розв'язання нелінійної задачі, тобто відхід ламаної Ейлера в процесі розв'язування не контролюється – припускають, що похибка мала завдяки вибору малого кроку чисельного інтегрування. При цьому жорсткість лінеаризованої системи (тангенс кута нахилу ϕ) приймається без урахування розбіжності в зусиллях..

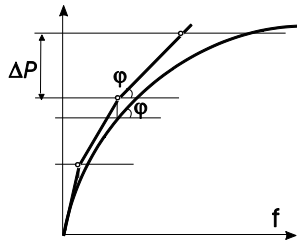


Рис. 3.1

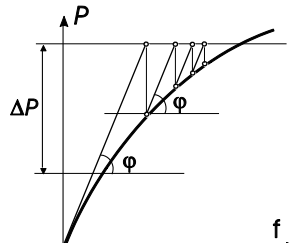


Рис. 3.2

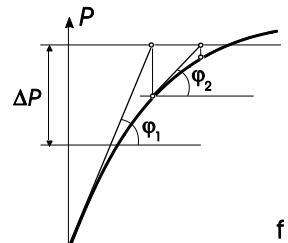


Рис. 3.3

Другий варіант передбачає контроль відхилення на кожному кроці та ітераційне уточнення навантаження чергового кроку за рахунок урахування розбіжності в рівняннях рівноваги. При цьому ітерації виконуються з незмінним значенням лінеаризованої матриці жорсткості (рис. 3.2), яка була обчислена на початку чергового кроку (кут φ залишається незмінним на кроці).

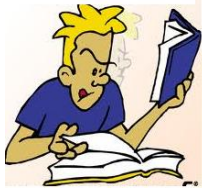
Нарешті, у третьому випадку (рис. 3.3) здійснюють ітераційне уточнення розв'язку на кожному кроці ΔP з коригуванням лінеаризованої матриці жорсткості на кожній ітерації (кут φ змінюється всередині кроку).

Описані варіанти крокової процедури стають непридатними, коли нахил дотичної наближається до нуля. У цих випадках часто застосовують зміну параметра навантаження, переходячи від нарощування інтенсивності навантаження до збільшення переміщення, але найкращий ефект дає метод довжини дуги (Arc Length Method), відомий у вітчизняній літературі як метод продовження за найкращим параметром. Метод ґрунтується на ідеї просування вздовж множини можливих рішень (за кривою станів рівноваги) з урахуванням на кожному кроці інформації про розв'язки, отримані на попередніх кроках.

Слід зазначити, що, варіюючи спосіб введення параметра t , можна отримати змістовну інформацію про поведінку системи під навантаженням. Якщо вважати, що такий параметр присутній як множник у всіх членів рівнянь (3.1), які безпосередньо описують зовнішні впливи, то його монотонному збільшенню від $t_0=0$ до $t^*=1$ відповідає пропорційне збільшення навантажень, а інтегральна крива (3.4) описує поведінку узагальнених координат у процесі такого навантаження. Можна уявити собі й інші, складніші та ближчі до реальності способи докладання та чергування навантажень. Варіюючи їх, можна виконати серію «математичних експериментів» з аналізу поведінки конструкції за різних режимів навантаження.

Важливою особливістю крокової процедури та її привабливою відмінністю від інших методів розв'язування нелінійних рівнянь є те, що лінеаризовану в околі деякого навантаження систему можна аналізувати звичайними методами лінійної будівельної механіки. Мають сенс оцінки коефіцієнта запасу стійкості (природно, що вони характеризують можливість зростання інтенсивності навантаження від уже досягнутого рівня) або частоти і форми власних коливань такої лінеаризованої системи. Зазначені особливості кро-

кової процедури характеризують її не тільки як спосіб отримання розв'язку задачі, а й як інструмент аналізу властивостей конструкції.



• **Питання:**

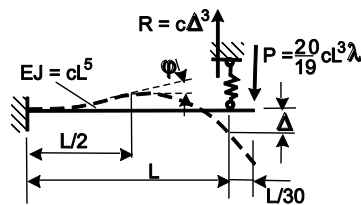
- Було названо безліч відмінних особливостей нелінійних задач будівельної механіки. Чи не можна вказати на найважливішу відмінність лінійних і нелінійних задач, яка змушує переглянути основні положення розрахунку?

• **Відповідь:**

- На мій погляд, це порушення принципу незалежності дії сил, який у лінійних задачах дає можливість виконати низку незалежних розрахунків конструкції, проаналізувавши в такий спосіб низку характерних розрахункових ситуацій, а потім комбінувати отримані результати, розглядаючи, наприклад, спільну дію окремих навантажень.



a)



b)

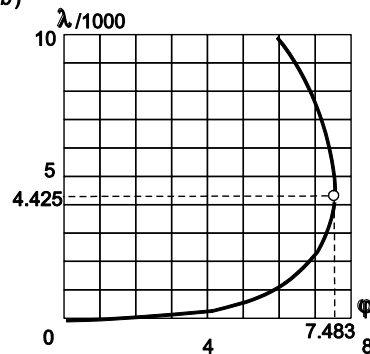


Рис. 3.4

Крім того, у лінійних задачах невигідна комбінація тимчасових навантажень або включає таке навантаження в повному обсязі, або (якщо її дія розвантажувальна) повністю виключає таке навантаження. У нелінійних задачах така «чорно-біла логіка» впливу тимчасових навантажень може виявитися хибною, є приклади, коли невигідним є врахування деякої частини навантаження, а не її повного значення.

Один із таких прикладів наведено на рис. 3.4, де для стрижня, опертого на нелінійно-пружну опору, реакція якої пропорційна кубу зміщення, залежність між кутом повороту ϕ і силовим параметром λ така, що тільки при $0 \leq \lambda \leq 0,004425$ кут повороту зростає, а за великих значень інтенсивності навантаження λ він починає зменшуватися.

Бесіда 3.2. Проблеми фізичної нелінійності



По-перше, слід застерегти від нерозбірливого використання терміна «фізична нелінійність». Річ у тім, що часто розглядають задачу, яка відрізняється від лінійної тільки тим, що функціональну лінійну залежність між напруженнями й деформаціями замінено деякою нелінійною функцією.

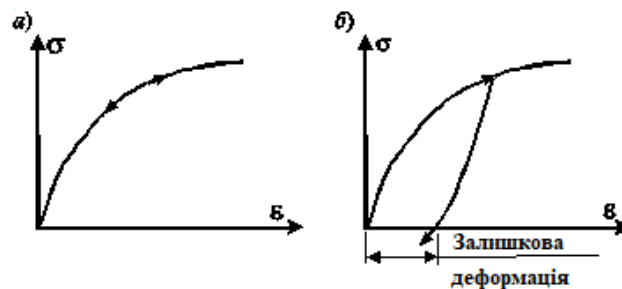


Рис. 3.5.

При цьому така функція приймається однозначною й однакою для навантаження і розвантаження. Однак такі нелінійно-пружні матеріали (рис. 3.5,а) в природі майже не трапляються, а відхилення від закону Гука у більшості конструкційних матеріалів пов'язані з явищами пластичності. Але який же пластичний матеріал після розвантаження не дає залишкових деформацій? Власне, в утворенні залишкової (пластичної) деформації й криється те явище, яке ми називаємо пластичною течією (рис. 3.5,б).

Наведене вище зауваження часто парирується посиланням на те, що розглядатимуться такі історії поведінки конструкції, коли всі навантаження тільки зростають. Але річ у тім, що зростання навантажень не гарантує зростання напружень у всіх точках тіла, тому, навіть прийнявши таке самообмеження, не можна повністю застрахуватись від помилки.

Потрібно чітко уявляти собі, що пружно-пластична поведінка матеріалу відрізняється від поведінки нелінійно-пружного матеріалу, і заздалегідь невідомо, що заміна однієї задачі іншою є розв'язком у запас надійності.

По-друге, нема незалежності дії сил, на використанні якого побудовані всі методи відшукування невідгідної комбінації навантажень. Навіть саме поняття комбінованої дії навантажень потребує уточнення, оскільки важливу роль

може відігравати не тільки склад комбінації, а й послідовність дії її складових.

Проілюструємо це твердження простим прикладом розрахунку системи (рис. 3.6), що складається з чотирьох деформованих стрижнів, сполучених із жорсткою балкою. Стрижні мають однакові площі поперечних перерізів і виконані з ідеального пружно-пластичного матеріалу. До складу зовнішнього впливу входять сили, що незалежно змінюються, P_1 і P_2 .

Умови рівноваги балки зводяться до двох рівностей

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)A &= P_1 + P_2 \\ (\sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4)A &= 3P_2 \end{aligned} \right\}, \quad (3.5)$$

де A – площа поперечного перерізу стрижня.

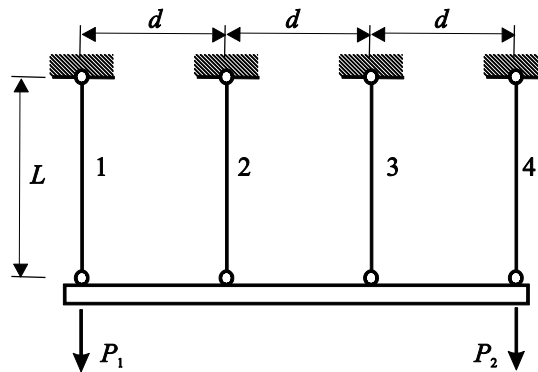


Рис. 3.6.

Оскільки балка жорстка, то переміщення нижніх кінців стрижнів пов'язані співвідношеннями

$$\left. \begin{aligned} 3\Delta_2 &= 2\Delta_1 + \Delta_4 \\ 3\Delta_3 &= \Delta_1 + 2\Delta_4 \end{aligned} \right\}. \quad (3.6)$$

Відносні подовження стрижнів пропорційні переміщенням

$$\varepsilon_i = \Delta_i / L \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (3.7)$$

При цьому фізичні залежності мають вигляд

$$\varepsilon_i = \sigma_i / E + \varepsilon_{i,pl} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (3.8)$$

де E – модуль пружності матеріалу, а через $\varepsilon_{i,pl}$ позначена пластична частина деформації.

Розв'язуючи систему рівнянь (3.5) – (3.8) відносно напружень, отримаємо залежності

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,pl} \\ \varepsilon_{2,pl} \\ \varepsilon_{3,pl} \\ \varepsilon_{4,pl} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Зазначимо ще, що залежності (3.5) справедливі не тільки для σ , P і ε_{pl} , але й для приростів $\Delta\sigma$, ΔP і $\Delta\varepsilon_{pl}$.

З рівностей (3.3) – (3.5) знаходимо залежності переміщень кінців балки від сил і пластичних деформацій

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,pl} \\ \varepsilon_{2,pl} \\ \varepsilon_{3,pl} \\ \varepsilon_{4,pl} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Співвідношення (3.9) – (3.10) дають змогу простежити за процесом зміни пластичних деформацій у стрижнях і переміщень балки за заданої програми навантаження.

Розглядається випадок послідовного застосування і зняття навантажень, які незалежно діють і змінюються в діапазоні $0 \leq \alpha_1 = P_1/(A\sigma_T) \leq 1,62$ і $0 \leq \alpha_2 = P_2/(A\sigma_T) \leq 1,62$.

Нехай спочатку росте тільки P_1 , а $P_2=0$. Першим буде текти стрижень 1 і це почнеться тоді, коли $0,7\alpha_1=1$, тобто при $\alpha_1=1,429$. Залежність пластичної деформації в першому стрижні за параметра навантаження $\alpha_1=1,62$, при якому, як неважко перевірити, відсутня плинність інших стрижнів, знайдемо з першого рівняння (3.9), припустивши $\sigma_1 = \sigma_T$ і всі пластичні деформації стрижнів 2, 3 і 4 відсутніми, матимемо

$$\sigma_T = 0,7 \cdot 1,62 \cdot \sigma_T - 0,3E\varepsilon_{1,pl} = 1,134\sigma_T - 0,3E\varepsilon_{1,pl}$$

$$\text{або } \varepsilon_{1,pl} = 0,447(\sigma_T/E).$$

Якщо цю рівність підставити в (3.5), то отримаємо

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \sigma_T \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,648 \\ 0,162 \\ -0,413 \end{bmatrix}.$$

Видно, що всі стрижні, крім першого, працюють пружно. Якщо тепер розвантажити конструкцію, то знову звертаючись до (3.5) і підставивши туди нульове значення навантаження і $\varepsilon_{1,pl} = 0,447(\sigma_T/E)$, отримаємо значення залишкових напружень

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \sigma_4^0 \end{bmatrix} = \sigma_T \begin{bmatrix} -0,134 \\ 0,178 \\ 0,045 \\ -0,089 \end{bmatrix}.$$

Якщо тепер довантажити систему повним значенням другого навантаження $P_2 = 1,62A\sigma_T$, то, припускаючи, що система сприйматиме це навантаження як пружне, за допомогою (3.9) отримаємо:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \sigma_T \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,648 \\ 0,162 \\ -0,413 \end{bmatrix} + \sigma_T \begin{bmatrix} 1,62 \cdot -0,2 \\ 1,62 \cdot 0,1 \\ 1,62 \cdot 0,4 \\ 1,62 \cdot 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,134 \\ 0,810 \\ 0,810 \\ 0,721 \end{bmatrix}.$$

Наше припущення про пружний характер роботи конструкції під час довантаження підтвердилося, і наведене вище розв'язання можна вважати правильним.

Однак слід звернути увагу на характерну особливість отриманого рішення:

За абсолютно симетричної конструкції й однакових за величиною впливів P_1 та P_2 ми прийшли до несиметричної відповіді за рахунок того, що несиметричною була послідовність навантаження конструкції – спершу P_1 і потім лише P_2 .

Неважко бачити, що в разі зворотної послідовності навантаження (спершу P_2 і потім P_1) розв'язання було б

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \sigma_T \begin{bmatrix} 0,721 \\ 0,810 \\ 0,810 \\ -0,134 \end{bmatrix}.$$

Тут корисно зауважити, що в разі використання нелінійно-пружної (оборотної) моделі матеріалу замість пластичного матеріалу, що працює в різний спосіб під час навантаження і розвантаження, ефект впливу послідовності навантаження зникає.

Питання:

Останнім часом активно пропагують ідею деформаційного аналізу, коли обмежуються не напруження (наприклад, не вище за границі плинності або інше значення розрахункового опору), а деякі значення граничних деформацій. Як при цьому можуть інтерпретуватися результати пружно-пластичного аналізу?





Відповідь:

Обмеження граничних деформацій має вельми непряме відношення до фізики пружно-пластичної поведінки. Теорія пластичності оперує поняттям допустимої області в просторі напружень і не вводить жодних обмежень у просторі деформацій. При цьому розглядається силове навантаження конструкції. Якщо ж розглядати вплив у вигляді примусової формозміни (кінематичне або деформаційне навантаження), то може мати сенс введення відповідних обмежень.

Різниця між силовим і деформаційним навантаженням дуже чітко проявляється, коли розглядають питання про те, чи є достатньою характеристикою надійності коефіцієнт запасу, обчислений за напруженнями.

Відповідь на це питання негативна, для чого корисно розглянути два способи створення напружень у стрижні – застосування деякого навантаження P , що викликає в перерізі стрижня напругу σ , і примусовим деформуванням, що створює таку деформацію, що їй відповідає така ж напруга σ (рис. 3.7).

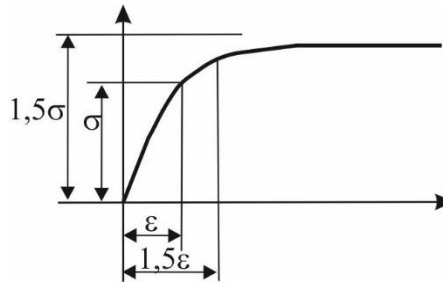


Рис. 3.7

У першому випадку збільшення напруги у 1,5 раза призведе до розриву стрижня, у другому (збільшення деформації у ті ж 1,5 раза) – лише до зростання залишкових деформацій.

Питання:

У деяких нормах проектування залізобетонних конструкцій наводиться діаграма роботи матеріалу з падаючою віткою кривої «напруга – деформація». Чи можна, використовуючи таку діаграму, орієнтуватися на визначення граничного навантаження?



Відповідь:

Коли в Єврокод-2 для бетону наведено залежність між деформаціями і напруженнями



$$\frac{\sigma}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta}, \quad (3.11)$$

де $\eta = \epsilon / \epsilon_{c1}$; ϵ_{c1} – деформація, що відповідає максимальному напруженню f_{cm} . (ϵ_{c1} і f_{cm} задаються для кожної марки бетону); $k = 1,05E\epsilon_{c1}/f_{cm}$, то

слід пам'ятати, що спадаюча вітка цієї кривої (рис. 3.8,*a*) може реалізуватися тільки в умовах примусового деформування і її ніяк не можна виявити при силовому навантаженні.

Тому для перевірочних розрахунків ті самі норми рекомендують залежність

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] && \text{для } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{c2} \\ \sigma &= f_{cd} && \text{для } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu2} \end{aligned} \right\}, \quad (3.12)$$

що не володіє спадаючою віткою (рис. 3.8.*b*).

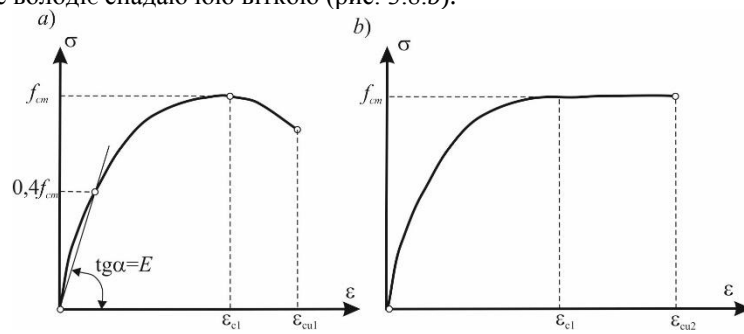


Рис. 3.8

Відсутність такого застереження у вітчизняних нормах є недоглядом їхніх укладачів.

Бесіда 3.3. Робота пружно-пластичної системи під час зростання навантаження



Розглянемо знову найпростішу конструкцію, що складається з жорсткої балки та чотирьох деформованих стрижнів, але навантаженої силою P , розташованою під другим стрижнем (рис. 3.9). Відстані c і площі перерізів стрижнів A однакові; матеріал ідеальний пружно-пластичний. Простежимо за змінами напружень у стрижнях і переміщенням лівого кінця балки в процесі зростання сили P аж до її граничного значення.

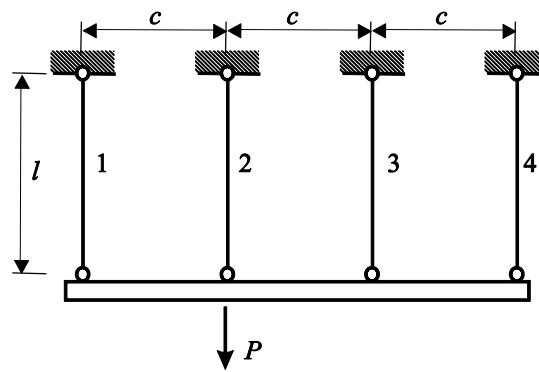


Рис. 3.9

Рівняння рівноваги, записані за допомогою зусиль у стрижнях, мають вигляд:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 &= P; \\ N_2 c + 2N_3 c + 2N_4 c &= P c. \end{aligned}$$

Після скорочення на c і ділення на A приходимо до рівностей у напругах:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = P/A; \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 + 2\sigma_4 = P/A. \quad (3.13)$$

Умови сумісності деформацій можна записати так:

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1/3 + \Delta l_4/3, \quad \Delta l_3 = \Delta l_1/3 + 2\Delta l_4/3.$$

Після ділення на $l/3$ маємо:

$$3\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_4, \quad 3\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_4. \quad (3.14)$$

Зауважимо, що рівності (3.13) і (3.14) не залежать від наявності та ступеня розвитку пластичних деформацій.

Пружна стадія роботи. На початку навантаження всі стрижні працюють пружно, є справедливим закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \sigma_1 / E, \quad \varepsilon_2 = \sigma_2 / E, \quad \varepsilon_3 = \sigma_3 / E, \quad \varepsilon_4 = \sigma_4 / E.$$

Із цієї рівності та співвідношень (3.10) випливає: $3\sigma_2 = 2\sigma_1 + \sigma_4$; $3\sigma_3 = \sigma_1 + 2\sigma_4$. Додаючи ці рівності до рівнянь (3.7) і розв'язуючи систему, отримуємо:

$$\sigma_1 = 0,4P / A, \quad \sigma_2 = 0,3P / A, \quad \sigma_3 = 0,2P / A, \quad \sigma_4 = 0,1P / A$$

Переміщення лівого кінця балки $\Delta l_1 = \varepsilon_1 l = 0,4Pl / (EA)$.

З представленого розв'язу видно, що найбільші напруження виникають у першому стрижні. У ньому буде раніше досягнута границя плинності. Щойно це станеться, конструкція перейде в *пружно-пластичну* стадію роботи. Граничне пружне навантаження P_{e1} знайдемо з умови $\sigma_1 = \sigma_T$, звідки $P_{e1} = 2,5\sigma_T / A$.

Пружно-пластична стадія – у стані плинності перебуває перший стрижень. Коли зростаюча сила P перевищить граничне пружне значення, перший стрижень потече, напруження в ньому будуть постійними $\sigma_1 = \sigma_T$. Другий, третій і четвертий стрижні ще працюватимуть пружно. Рівняння рівноваги (3.11) після цього набудуть вигляду:

$$\sigma_T + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = P / A; \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 + 2\sigma_4 = P / A \quad (3.15)$$

За останньою рівністю визначаємо

$$\Delta l_1 = (4P - 7\sigma_T A) l / (3EA).$$

Зіставляючи величини напружень (3.13), бачимо, що плинність у другому стрижні почнеться раніше, ніж у третьому або четвертому. Позначимо силу, що відповідає початку плинності другого стрижня P_{e2} , і знайдемо її значення: $\sigma_T = \sigma_2 = (5P_{e2} - 8\sigma_T A) / (6A) \Rightarrow P_{e2} = 2,8\sigma_T / A$.

Пружно-пластична стадія – у стані плинності перший і другий стрижні.

Щоб відобразити роботу конструкції на цьому етапі, в рівняння рівноваги (3.9) введемо рівності $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T$. У підсумку отримаємо

$$\sigma_3 = (2P - 5\sigma_T A) / A, \quad \sigma_4 = (3\sigma_T A - P) / A \quad (3.16)$$

Деформації стрижнів 3 і 4 знайдемо за законом Гука:

$$\varepsilon_3 = (2P - 5\sigma_T A) / (EA), \quad \varepsilon_4 = (3\sigma_T A - P) / (EA)$$

Підставляючи цей результат у другу рівність (3.10), отримуємо $\varepsilon_1 = (8P - 21\sigma_T A) / (EA)$, звідки $\Delta l_1 = (8P - 21\sigma_T A) l / (EA)$.

Якщо в стан плинності перейде стрижень 3 або 4, конструкція стане геометрично змінюваною і зруйнується. Знайдемо руйнівне навантаження P_u . Третій стрижень потече, коли $\sigma_3 = (2P - 5\sigma_T A) / A = \sigma_T$ тобто – при $P_u = 3\sigma_T A$, а четвертий – при $\sigma_4 = (3\sigma_T A - P) / A = \sigma_T$, що дає $P_u = 4\sigma_T A$. Із двох рішень справді менше $P_u = 3\sigma_T A$.

Незважаючи на простоту розглянутої стрижневої системи, в її роботі проявилися такі особливості (рис. 3.10), що притаманні й складнішим конструкціям.

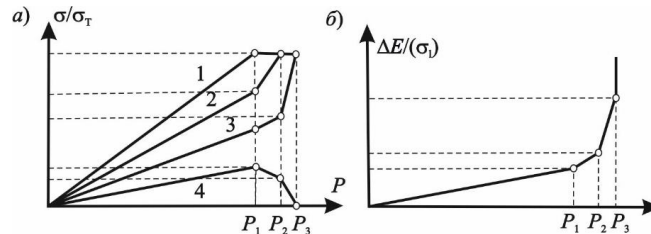


Рис. 3.10

Перша особливість (рис. 3.10,а) – граничне пружне навантаження P_e , що відповідає граничному пружному напруженню в небезпечній точці, менше за руйнівне P_u (граничне за несною здатністю). Це свідчить про те, що методи розрахунків, які враховують пластичні властивості матеріалів, повніше використовують резерви міцності конструкцій.

Друга особливість – перерозподіл напружень у пружно-пластичній стадії. Дійсно, за пружної роботи характеристики напружено-деформованого стану зростали пропорційно зростанню навантаження. Взаємодія між ними залишалася постійною. З появою пластичних деформацій ці співвідношення змінюються. Так, напруження σ_1 , досягнувши границі плинності, рости перестало, але збільшилися швидкості зростання напружень σ_2 і σ_3 .

Третя – незважаючи на монотонне зростання сили, можливе локальне розвантаження (див. зменшення напруження в четвертому стрижні, рис. 3.10,а).

Питання:

Які із зазначених особливостей поведінки пружно-пластичної конструкції не можуть бути знайдені за допомогою моделі нелінійно-пружного матеріалу?



Відповідь:

Насамперед це вже згадувана раніше відсутність залишкових деформацій.

Але не менше значення має знайдена в наведеному прикладі властивість локального розвантаження системи при монотонному зростанні інтенсивності навантаження.

Посиланнями на зростання навантаження дуже часто аргументують можливість використання нелінійно-пружного підходу, але він може бути виправданий лише в тому разі, коли монотонно зростають внутрішні зусилля, а саме це ніяк не можна гарантувати.

Бесіда 3.4. Екстремальні властивості граничного стану плинності



Розглянемо задачу визначення граничного навантаження, що діє на пружно-пластичну статично невизначену систему із матеріалу з діаграмою роботи, близькою до діаграми Прандтля. Навантаження при цьому вважають заданим за напрямком і за співвідношеннями між окремими зовнішніми силами, які його складають.

Визначенню підлягає лише числовий коефіцієнт пропорційності, що характеризує величину граничного навантаження.

Попередньо введемо кілька визначень. Будемо називати напружений стан системи *статично допустимим*, якщо він задовольняє умови рівноваги. Напружений стан системи, за якого в жодному з її елементів не перевищено границі плинності, називатимемо *безпечним*.

Нехай S_j – деякий розподіл внутрішніх зусиль, що задовольняють рівняння рівноваги, і нехай $\dot{u}_i$ – деяке поле швидкостей, що задовольняє умови, накладені на вузлові переміщення зовнішніми зв'язками. Цьому полю швидкостей відповідають швидкості деформацій $\dot{\lambda}_j$ елементів системи. Введені поля швидкостей $\dot{u}_i$ і внутрішніх зусиль S_j в решті довільні й ніяк не пов'язані між собою, важливо лише те, що поле швидкостей має відповідати умовам нерозривності деформацій (кінематично допустимим), а поле внутрішніх зусиль – рівнянням рівноваги (статично допустимим).

Якщо система перебуває в стані пластичного деформування і пружні деформації нехтувано малі порівняно з пластичними, то справедливою є така умова енергетичного балансу:

$$\sum_{j=1}^n S_j \dot{\lambda}_j = \sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i, \quad (3.17)$$

в якій ліва частина є швидкістю дисипації енергії, а права частина – потужністю зовнішніх навантажень, тобто здійснюваною за одиницю часу роботою цих навантажень, яка необхідна для пластичного деформування.

Обидва ці вирази є невід'ємними, тобто

$$\sum_{j=1}^n S_j \dot{\lambda}_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i \geq 0, \quad (3.18)$$

що впливає з енергетичних міркувань, а саме рівняння (3.17) відіграє в теорії пластичної течії ту саму роль, що в статичці відіграє рівняння (1.3) принципу можливих переміщень.

Дві теореми, наведені нижче, дають змогу одержати нижню і верхню оцінку для параметра навантаження. Ці теореми були вперше сформульовані й доведені А.А.Гвоздьовим у 1936 р.; потім вони ще багаторазово формувалися різними авторами.

Теорема про нижню оцінку несівної здатності (статична). Нехай S_j ($j=1, \dots, n$) і $\dot{u}_i$ ($i=1, \dots, s$) – невідомий нам істинний розв'язок задачі про граничний стан системи, що зазнає дії навантажень P_i ($i=1, \dots, s$) і S_j^* ($j=1, \dots, n$) – деякий допустимий розподіл зусиль, що відповідає цим навантаженням на систему. Ми вважаємо, що для допустимого розподілу зусиль виконуються рівняння рівноваги й умова неперевищення граничних значень, які визначаються границею плинності $S_j \leq S_{j, \text{lim}}$ ($j=1, \dots, n$).

Складемо умови рівноваги у формі принципу можливих переміщень, як для істинного, так і для припустимого стану, приймаючи за поле віртуальних швидкостей істинне поле швидкостей (заздалегідь невідоме)

$$\sum_{j=1}^n S_j \dot{\lambda}_j = \sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i, \quad (3.19)$$

$$\sum_{j=1}^n S_j^* \dot{\lambda}_j = \sum_{i=1}^s P_i^* \dot{u}_i. \quad (3.20)$$

Тут P_i – істинні навантаження, що відповідають граничному стану системи, P_i^* – навантаження, що відповідають допустимому стану S_j^* .

Виразивши (3.20) з (3.19), отримаємо

$$\sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i - \sum_{i=1}^s P_i^* \dot{u}_i = \sum_{j=1}^n (S_j - S_j^*) \dot{\lambda}_j. \quad (3.21)$$

Але внаслідок (3.18) права частина невід'ємна, тому

$$\sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i \geq \sum_{i=1}^s P_i^* \dot{u}_i. \quad (3.22)$$

Отже, потужність зовнішніх сил у дійсному граничному стані не менша, ніж потужність статично можливих зовнішніх сил.

Нерівність (3.22) слугує для нижньої оцінки несівної здатності. Якщо навантаження задано у вигляді μP_i ($i=1, \dots, s$) і статично допустимий стан

відповідає умовам рівноваги з навантаженнями $\mu^* P_i$ ($i=1, \dots, s$), то з (3.20) легко можна отримати

$$\mu \geq \mu^*. \quad (3.23)$$

Таким чином, сформульовано статичну екстремальну властивість граничного навантаження для статично невизначеної системи з ідеального пружно-пластичного матеріалу:

Інтенсивність навантажень, урівноважених внутрішніми силами, які ніде не перевищили своїх граничних значень, має значення менше, ніж у дійсному граничному стані.

Теорема про верхню оцінку несівної здатності (кінематична). Нехай $\dot{u}_i^{**}, \dot{\lambda}_j^{**}$ – довільне кінематично допустиме поле швидкостей і швидкостей деформації, тобто таке поле, яке задовольняє граничним умовам. За заданими швидкостями деформації $\dot{\lambda}_j^{**}$ визначаються внутрішні зусилля S_j^{**} , які, взагалі кажучи, не задовольняють рівнянням рівноваги.

Випишемо рівняння (3.19) приймаючи $\dot{u}_i^{**}$ за поле віртуальних швидкостей

$$\sum_{j=1}^n S_j \dot{\lambda}_j^{**} = \sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i^{**}. \quad (3.24)$$

Додамо і віднімемо в правій частині цієї рівності величину потужності пластичної формозміни, що відповідає кінематично допустимому полю $\dot{u}_i^{**}$. Отримаємо

$$\sum_{j=1}^n S_j \dot{\lambda}_j^{**} = \sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i^{**} - \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j^{**} (S_j^{**} - S_j). \quad (3.25)$$

Але другий член у правій частині невід'ємний, тому

$$\sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i^{**} \leq \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j^{**} S_j^{**}. \quad (3.26)$$

Отже, потужність зовнішніх сил у дійсному граничному стані на кінематично можливих швидкостях переміщень менша за потужність сил, що відповідають зазначеним можливим швидкостям..

Якщо, як і раніше, зовнішнє навантаження представляється з точністю до одного множника, тобто μP_i ($i=1, \dots, s$), то з (3.26) випливає

$$\mu \leq \frac{\sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j^{**} S_j^{**}}{\sum_{i=1}^s P_i \dot{u}_i^{**}}. \quad (3.27)$$

Права частина цієї нерівності відома, коли задано кінематично можливе поле швидкостей

Якщо врахувати, що $S_j^{**} = \mu^{**} S_j$, то з урахуванням (3.24) отримуємо

$$\mu \leq \mu^{**}. \quad (3.28)$$

Таким чином, сформульовано кінематичну екстремальну властивість граничного навантаження для статично невизначеної системи з ідеального пружно-пластичного матеріалу:

Інтенсивність навантажень, обчислена за будь-якою з кінематично можливих схем пластичного руйнування більша, ніж у дійсному граничному стані.

Застосовуючи оцінки (3.21) і (3.25), можна одержати інтервал, у якому містяться справжнє значення граничного навантаження. Якщо верхня оцінка і нижня оцінка збігаються, то ми отримуємо точний розв'язок задачі про несівну здатність.

Приклад. Розрахуємо кінематичним і статичним методами систему, зображену на рис. 3.9, детальний розрахунок якої було зроблено вище.

А. Кінематичний метод.

Будемо вважати, що підвіски однаково працюють на розтягнення і на стиск. Крім того, вважатимемо пружні деформації підвісок настільки малими, що ними можна знехтувати порівняно з деформаціями плинності.

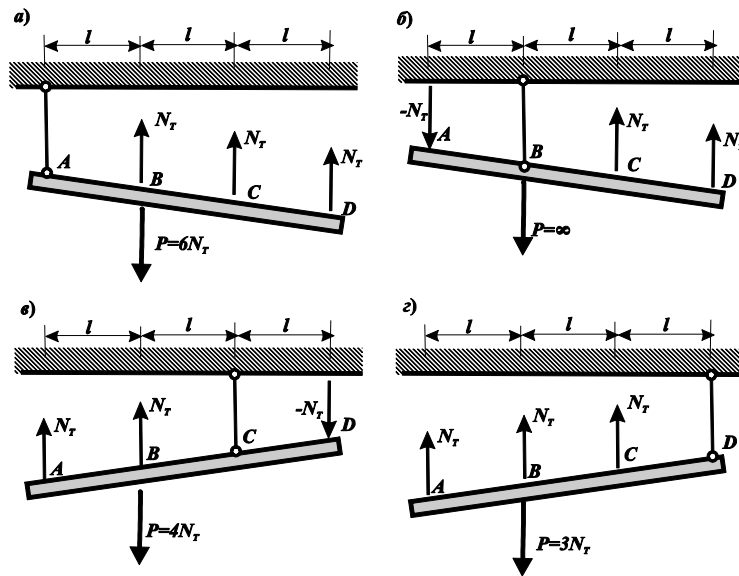


Рис. 3.11

Тоді можна задатися чотирма кінематично можливими формами руйнування системи, а саме: поворотами балки на малий кут навколо точки при-

ріплення кожної підвіски (рис. 3.11). Врівноважувальне навантаження дорівнюватиме:

- при повороті навколо точки А (рис. 3.11,а)

$$P = N_T (l + 2l + 3l) / l = 6N_T;$$
- при повороті навколо точки В (рис. 3.11,б), оскільки плече сили відносно точки повороту дорівнює нулю

$$P = \infty;$$
- при повороті навколо точки С (рис. 3.11,в)

$$P = N_T (2l + l + l) / l = 4N_T;$$
- при повороті навколо точки D (рис. 3.11,г)

$$P = N_T (3l + 2l + l) / 2l = 3N_T.$$

Ми бачимо, що мінімальне зусилля $P = P_{np}$, що дорівнює $3N_T$, отримується під час повороту балки навколо точки D, тобто коли в стані плинності перебувають перша, друга і третя підвіски. Цей результат збігається з проведенням вище повним розрахунком.

Б. Статичний метод.

Оскільки система двічі статично невизначена, задаватимемося такими її напруженими станами, за яких три елементи перебувають у стані плинності, причому зусилля в четвертому елементі має бути меншим від граничного.

Тут можливі такі комбінації:

- $N_1 = N_2 = N_3 = N_T;$
- $N_1 = N_2 = N_4 = N_T;$
- $N_1 = N_3 = N_4 = N_T;$
- $N_1 = N_3 = N_4 = N_T.$

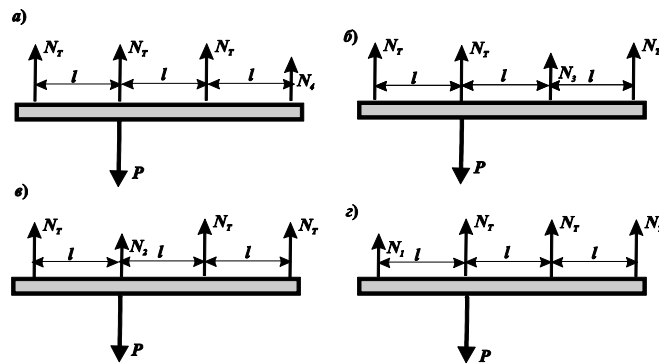


Рис. 3.12

Ці стани показано на рис. 3.12. Зусилля в елементі, що залишився, який не досяг плинності, треба визначити з умови, що момент усіх сил відносно точки прикладання зовнішньої сили дорівнює нулю. При цьому отримаємо:

- для випадку а: $N_4 = 0;$
- для випадку б: $N_3 = -N_T;$
- для випадку в: $N_2 = \infty;$
- для випадку г: $N_1 = 3N_T.$

Ми бачимо, що 3-й і 4-й випадки відпадають, оскільки зусилля в них виходять великими N_T ; 2-й випадок можливий якщо вважати 3-й елемент таким, що однаково працює на розтягнення і на стиск.

Для 1-го випадку отримуємо граничне навантаження $P_{пр}=3N_T$, а для 2-го випадку $P_{пр}=3N_T - N_T = 2N_T$.

Істинним станом граничної рівноваги буде той, за якого навантаження досягає максимального значення. Тому в розглянутій системі стан граничної рівноваги виникне відповідно до 1-го випадку розподілу граничних зусиль. Цей результат збігається з тим, що дає кінематичний метод і повний розрахунок системи.



Питання:

Як впливає на значення граничного навантаження початковий напружений стан системи?

Відповідь:

Зауважимо, що в стані граничної рівноваги система, що розглядається, є змінюваною (механізмом), тому початкові напруження, які могли б існувати в системі (наприклад, зварювальні), не впливають на величину граничного навантаження.



Це навантаження визначається з рівнянь рівноваги, до яких самонапруженні стани не входять, але саме із самонапруженнями пов'язані початкові напруження, які відповідають нульовому зовнішньому навантаженню.

Бесіда 3.5. Геометрична нелінійність



Коли йдеться про геометрично нелінійні задачі, то насамперед потрібно чітко визначитися, про який рівень геометричної нелінійності мається на увазі. Для цього використовуватимемо класифікацію геометрично нелінійних постановок задач, що представлену в класичній праці В.В. Новожилова [2].

Спираючись на цю класифікацію, виділимо такі 4 поверхи геометрично нелінійних постановок задач для скінченновимірних систем.

На нижчому, *нульовому поверсі* природно розташувати всі задачі, у яких можна повністю знехтувати будь-якими геометрично нелінійними ефектами. Інакше кажучи, нульовий поверх належить до геометрично лінійних постановок задач.

Перш ніж підніматися хоча б на один щабель вище, варто звернути увагу на те, що геометрична нелінійність здатна просочуватися в розв'язуючі рівняння задачі двома каналами: через рівняння, які пов'язують переміщення з деформаціями, і через рівняння рівноваги. Тому на першому поверсі ми залишимо завдання, де припустимо відкрити для геометричної нелінійності шляхи лише одного з цих каналів, а саме – через рівняння рівноваги.

До *першого поверху* геометричної нелінійності віднесемо найслабший варіант геометрично нелінійної теорії. У цьому варіанті теорії вважають, що рівняння рівноваги слід записувати для деформованого стану системи. Що стосується зв'язку деформацій із переміщеннями, то ці співвідношення для першого поверху геометрично нелінійних задач приймаються в лінійному варіанті. У будівельній механіці задачі першого поверху геометричної нелінійності іноді називають *розрахунком за деформованою схемою*. В англомовній літературі вживається назва *теорія другого порядку*.

Для конструкцій, використовуваних у будівельному проектуванні, перший поверх геометричної нелінійності охоплює досить широке коло завдань і, насамперед, задачі розрахунку стрижневих систем, згинальні моменти в елементах яких обчислюють з урахуванням поправок від впливу поздовжніх сил.

Піднімаючись сходами вище, зупиняємося на *другому поверсі* ієрархії геометрично нелінійних постановок задач. Відмінністю від першого поверху слугує розкриття другого каналу проникнення геометричної нелінійності – через геометричні рівняння, що зв'язують переміщення з деформаціями. Порівняно з першим поверхом істотним тут є розрізнення порядків малості деформацій і поворотів, водночас вважають, що квадрати кутів поворотів елементів розрахункової схеми, яку розглядають, є величинами того самого

порядку малості, що й компоненти деформації, які, зі свого боку, нехтувано малі порівняно з одиницею. Малі порівняно з одиницею і самі повороти. Характерний приклад задач цього поверху нелінійності – теорія гнучких пластин на основі рівнянь Кармана.

До *третього поверху* геометричної нелінійності можна віднести задачі, в яких деформації малі порівняно з одиницею, тоді як щодо поворотів таких припущень зробити не можна. Конструкції з гнучкими нитками слугують чудовим прикладом задач цього поверху геометричної нелінійності.

Нарешті, на вершині цієї ієрархії розташовані найскладніші завдання – завдання *четвертого поверху* геометричної нелінійності, коли самі відносні деформації не можна вважати малими величинами порівняно з одиницею. Необхідність проведення розрахунків виробів із гуми та гумоподібних матеріалів змушує розраховувачів підніматися і на ці висоти.

Для дискретних розрахункових схем геометрична нелінійність жодним чином не позначається на топологічній інформації про розрахункову схему, а сама топологія системи нечутлива до взаємовідносин порядків геометричної нелінійності на рівні окремого скінченного елемента. Скориставшись такою можливістю для ілюстрації описаної вище чотириповерхової будівлі геометричної нелінійності, звернемося до найпростішого прикладу скінченного елемента – стрижня ферменного типу. Для спрощення розглянемо плоску задачу.

Нехай у вихідному стані стрижень займає положення MN з початком у вузлі M і кінцем у вузлі N. Під *вихідним* тут розуміється стан стрижня після отримання ним попередньої d . У результаті подальшої деформації стрижень, залишаючись прямолінійним, займе положення M^*N^* , як це показано на рис. 3.13.

Уведемо такі позначення:

L_x, L_y – проєкції стрижня на відповідні осі у вихідному стані;

L і L^* – довжина стрижня у вихідному й остаточному станах відповідно;

u_M, u_N, v_M, v_N – переміщення вузлів M і N у напрямках осей x і y відповідно;

e_x, e_y – подовження проєкцій початкового стану стрижня на координатні осі;

Δ – повне подовження стрижня;

N – подовження сила в стрижні, позитивна під час розтягування.

Розглянемо сукупність векторів $\mathbf{s}$ (зусилля), $\mathbf{\Delta}$ (подовження), $\mathbf{u}$ (вузлові зміщення), $\mathbf{p}$ (вузлові навантаження), що відносяться до окремого елемента (стрижня), у яких для скорочення запису опущено нижній індекс «e», використаний нами раніше, щоб підкреслювати, що йдеться про елемент¹¹.

Маємо:

$$\mathbf{s} = [N], \mathbf{\Delta} = [\Delta], \mathbf{u}^T = [u_M \ v_M \ u_N \ v_N], \mathbf{p}^T = [P_{Mx} \ P_{My} \ P_{Nx} \ P_{Ny}]. \quad (3.29)$$

¹¹ Дивитися бесіду 5 із циклу 1.

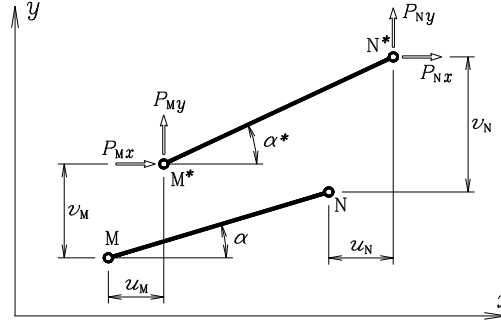


Рис. 3.13

З геометричних міркувань (рис. 3.13) отримуємо

$$e_x = u_N - u_M, \quad e_y = v_N - v_M, \quad \Delta = (L^* - L), \quad (3.30)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2, \quad L^{*2} = (L_x + e_x)^2 + (L_y + e_y)^2. \quad (3.31)$$

Нехай $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_x^*, \lambda_y^*$ – направляючі косинуси відрізків MN і M^*N^* по відношенню до нерухомої системи осей (x, y) . рис. 3.13), тобто

$$\lambda_x = \cos \alpha = L_x / L, \quad \lambda_y = \sin \alpha = L_y / L, \quad (3.32)$$

$$\lambda_x^* = \cos \alpha^* = (L_x + e_x) / L^*, \quad \lambda_y^* = \sin \alpha^* = (L_y + e_y) / L^*. \quad (3.33)$$

Введемо в розгляд такі важливі геометричні параметри, які знадобляться нам у подальшому:

$$e = \lambda_x e_x + \lambda_y e_y, \quad \omega = (\lambda_x e_y - \lambda_y e_x) / L, \quad \varepsilon = e + 0,5(e^2 + \omega^2 L^2) / L. \quad (3.34)$$

Геометричний зміст параметра e очевидний – це проєкція різниці переміщень кінців стрижня на напрямок осі стрижня в його недеформованому стані. Що стосується параметра ω , то він являє собою кут повороту стрижня за умови його малості порівняно з одиницею і малості порівняно з одиницею відносного параметра e/L .

Параметр e у матричній формі представимо у вигляді

$$e = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{Q}^T = [-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y], \quad (3.35)$$

при цьому $\mathbf{Q}$ – матриця рівнянь рівноваги в геометрично лінійній постановці задачі.

Зазначимо, що, вводячи в розгляд матрицю обертання $\mathbf{\Omega}$,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

отримаємо $(\mathbf{\Omega Q})^T = [\lambda_y - \lambda_x - \lambda_y \lambda_x]$, тож параметр повороту ω також можна представити в матричній формі

$$\omega L = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega}^T \mathbf{u}, \quad (3.37)$$

що буде зручно для нас надалі.

Виходячи з визначальних співвідношень (3.30), (3.31) і (3.34), можна одержати формулу, що зв'язує деформацію стрижня Δ з переміщеннями його кінців, виражену через введені геометричні параметри, а саме:

$$\Delta \left[1 + \frac{\Delta}{2L} \right] = \varepsilon, \quad (3.38)$$

справедливість якої перевіряється безпосередньою підстановкою. Дійсно, ліва частина в (3.38) ланцюжком перетворень приводиться до вигляду

$$\begin{aligned} (L^* - L) \left[1 + \frac{\Delta}{2L} \right] &= \frac{L^{*2} - L^2}{2L} = \\ &= \frac{(L_x + e_x)^2 + (L_y + e_y)^2 - L_x^2 - L_y^2}{2L} = \lambda_x e_x + \lambda_y e_y + \frac{e_x^2 + e_y^2}{2L}, \end{aligned}$$

і до точно такого ж вигляду приводиться і вираз для ε за (3.22), якщо врахувати, що $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$.

З формули (3.38) негайно випливає вираз для деформації стрижня

$$\Delta = L \left(\sqrt{1 + 2\varepsilon / L} - 1 \right). \quad (3.39)$$

Звернемо увагу, що під час виведення формули (3.39) ми не користувалися жодними спрощувальними припущеннями, пов'язаними із зіставленням порядків малості величин, що входять до цієї формули. Тому формула (3.39) якраз і є тим нелінійним геометричним рівнянням, що зв'язує деформацію Δ з компонентами вектора переміщень $\mathbf{u}$, яке розміщене на найвищому – четвертому поверсі геометричної нелінійності.

Вводячи різні спрощувальні припущення, які дають змогу знехтувати тими чи іншими компонентами, можна отримати рівняння, що пов'язують деформацію Δ з компонентами вектора переміщень для інших поверхів геометричної нелінійності. Відповідні результати наведено в табл. 3.2..

Таблиця 3.2

ПОВЕРХ	Малі величини	Геометричні рівняння
IV	—	$\Delta = L(\sqrt{1+2e/L} - 1)$
III	$\frac{\Delta-d}{L} \ll 1$	$\Delta = e + 0,5(e^2 + w^2 L^2) / L$ $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2L} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u}$
II	$e/L \ll 1$ $\omega^2 \approx e/L$	$\Delta = e + 0,5w^2 L$ $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega}^T \mathbf{u}$
I	$\omega^2 \ll e/L$	$\Delta = e$ $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}$
0	$\omega \ll 1$	$\Delta = e$ $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}$

Перейдемо тепер до розгляду рівнянь рівноваги, використовуваних на різних поверхнях будівлі геометричної нелінійності. У загальному випадку, записуючи ці рівняння для деформованого стану стрижня, отримаємо

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{s} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{Q}^{*T} = [-\lambda_x^* \quad -\lambda_y^* \quad \lambda_x^* \lambda_y^*], \quad (3.40)$$

і нам залишилося тільки знайти вирази для напрямних косинусів осі стрижня в його деформованому стані.

Скористаємося формулами (3.32) і тією обставиною, що кут β , на який повертається стрижень, може бути представлений як $\beta = \alpha^* - \alpha$ (рис. 3.13), отримаємо

$$\begin{aligned} \lambda_x^* &= \cos(\alpha + \beta) = \lambda_x \cos \beta - \lambda_y \sin \beta, \\ \lambda_y^* &= \sin(\alpha + \beta) = \lambda_y \cos \beta + \lambda_x \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Враховуючи, що

$$\operatorname{tg} \alpha^* = (\lambda_y L + e_y) / (\lambda_x L + e_x), \quad \operatorname{tg} \alpha = \lambda_y / \lambda_x, \quad (3.42)$$

і скориставшись формулою для тангенса різниці двох кутів, а також співвідношенням $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$, отримаємо після нескладних перетворень

$$\operatorname{tg} \beta = (\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha) / (1 - \operatorname{tg} \alpha^* \cdot \operatorname{tg} \alpha) = \omega L (L + e). \quad (3.43)$$

Синус і косинус кута повороту стрижня β , що входять у формули (3.41) можна виразити через тангенс цього ж кута

$$\begin{aligned}\cos\beta &= 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = 1 / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}, \\ \sin\beta &= \operatorname{tg}\beta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \left[1 / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2} \right] \omega L / (L + e),\end{aligned}\quad (3.44)$$

так що

$$\begin{aligned}\lambda_x^* &= [\lambda_x - \lambda_y \omega L / (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}, \\ \lambda_y^* &= [\lambda_y + \lambda_x \omega L / (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}.\end{aligned}\quad (3.45)$$

Формули (3.33) для напрямних косинусів осі стрижня в деформованому стані є точними, оскільки під час їхнього виведення не використовували жодних припущень щодо малості параметрів деформації (четвертий поверх). Для інших поверхів результати подано в табл. 3.3.

Таблиця 3.3.

ПОВЕРХ	Малі величини	Параметри рівнянь рівноваги
IV	—	$\lambda_x^* = [\lambda_x - \lambda_y \omega L (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 (L + e)^2}$ $\lambda_y^* = [\lambda_y - \lambda_x \omega L (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 (L + e)^2}$
III	$\frac{\Delta - d}{L} \ll 1$	$\lambda_x^* = [\lambda_x - \lambda_y \omega L (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 (L + e)^2}$ $\lambda_y^* = [\lambda_y - \lambda_x \omega L (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 (L + e)^2}$
II	$e / L \ll 1$ $\omega^2 \approx e / L$	$\lambda_x^* = \lambda_x - \lambda_y \omega, \quad \lambda_y^* = \lambda_y - \lambda_x \omega$ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \frac{1}{2L} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{u}$
I	$\omega^2 \ll e / L$	$\lambda_x^* = \lambda_x - \lambda_y \omega, \quad \lambda_y^* = \lambda_y - \lambda_x \omega$ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \frac{1}{2L} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{u}$
0	$\omega \ll 1$	$\lambda_x^* = \lambda_x, \quad \lambda_y^* = \lambda_y$ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}$

Виходячи зі співвідношень, зазначених у таблиці 3.3, можна було будувати розв'язні нелінійні рівняння, а потім шукати способи їхнього розв'язання. Але, маючи на увазі подальше використання в тій чи іншій формі крокових процедур під час розв'язування нелінійних задач, доцільно відразу будувати необхідні рівняння в приростах. Точніше кажучи, не конкретизуючи тип скінченного елемента, з'ясуємо структуру геометрично нелінійних рівнянь у приростах, що виявляється спільною для всіх дискретних систем.

Будемо вважати відомою деяку (початкову) конфігурацію системи, що характеризується вузовими переміщеннями $\mathbf{u}_0$, які можуть бути і нульовими, якщо вибір такого початку відліку зручний. У цій конфігурації виконуються умови рівноваги

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0)\mathbf{s}_0 = \mathbf{p}_0 \quad (3.46)$$

між початковими вузовими навантаженнями $\mathbf{p}_0$ і початковими зусиллями $\mathbf{s}_0$. Нехай тепер навантаження отримало приріст $\delta\mathbf{p}$, якому мають відповідати прирости зусиль $\delta\mathbf{s}$ і переміщень $\delta\mathbf{u}$. У збуреному стані рівняння рівноваги запишуться як

$$[\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0) + \delta\mathbf{Q}](\mathbf{s}_0 + \delta\mathbf{s}) = \mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}, \quad (3.47)$$

а після розкриття дужок і з урахуванням (3.46) вони набувають вигляду

$$\delta\mathbf{Q}\mathbf{s}_0 + \mathbf{Q}(\mathbf{u}_0)\delta\mathbf{s} + \delta\mathbf{Q}\delta\mathbf{s} = \delta\mathbf{p}. \quad (3.48)$$

Якщо компоненти вектора додаткових переміщень $\delta\mathbf{u}$ відносно невеликі (але все ж таки потребують геометрично нелінійного аналізу), то для отримання рівнянь у варіаціях можна обмежитися рівнем другого поверху геометрично нелінійної постановки задачі. У цьому випадку добуток $\delta\mathbf{Q}\mathbf{s}_0$ може бути представлений як лінійна функція від приросту переміщень, що призводить до рівнянь

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0)\delta\mathbf{s} + \mathbf{T}(\mathbf{s}_0)\delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{Q}\delta\mathbf{s} = \delta\mathbf{p}. \quad (3.49)$$

Наприклад, для ферменного стрижня в плоскій задачі, спираючись на таблицю 3.3, вважаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) &= [-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y], \\ \mathbf{T}(\mathbf{s}_0) \delta\mathbf{u} &= [\lambda_y \quad -\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x]^T \delta\omega N_0 = \frac{N_0}{L} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T \delta\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

де λ_x і λ_y – напрямні косинуси стрижня в початковій конфігурації системи N_0 – початкове зусилля в стрижні.

Залежність між приростами деформацій елементів $\delta\Delta$ і приростами вузових переміщень визначимо виразами

$$\delta\Delta = \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) \delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{Q}^T \delta\mathbf{u}. \quad (3.51)$$

Фактично співвідношення (3.51) являють собою проварьовані геометричні рівняння другого поверху нелінійності. Наприклад, у випадку ферменного стрижня матимемо

$$\delta\Delta = \delta e + \omega \delta\omega = \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) \delta\mathbf{u} + \mathbf{u}_0^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T / L \delta\mathbf{u}, \quad (3.52)$$

тож у цьому випадку

$$\delta\mathbf{Q}^T = \mathbf{u}_0^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T / L. \quad (3.53)$$

Підставляючи (3.51) у фізичні рівняння, що зв'язують зусилля і деформації, які для прорістів виконуються у формі

$$\delta \mathbf{s} = \mathbf{F} \delta \Delta, \quad (3.54)$$

і вводячи потім отримані вирази для $\delta \mathbf{s}$ в (3.49), отримаємо

$$[\mathbf{QFQ}^T + \mathbf{T}(\mathbf{s}_0) + \mathbf{QF} \delta \mathbf{Q}^T + \delta \mathbf{QFQ}^T + \delta \mathbf{QF} \delta \mathbf{Q}^T] \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{p}. \quad (3.55)$$

В інших позначеннях ці рівняння можна записати як

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)] \delta \mathbf{u} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G) \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{p}. \quad (3.56)$$

Тут чітко видно, що до звичайної матриці жорсткості $\mathbf{K}_0 = \mathbf{QFQ}^T$ додається матриця початкових напружень $\mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0) = \mathbf{T}(\mathbf{s}_0)$, лінійно залежна від зусиль у системі перед початком приросту навантаження, і матриця початкових поворотів

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0) = \mathbf{QF} \delta \mathbf{Q}^T + \delta \mathbf{QFQ}^T + \delta \mathbf{QF} \delta \mathbf{Q}^T,$$

що не більш ніж квадратично залежна від переміщень. Матрицю

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)$$

прийнято називати *матрицею геометричної жорсткості*.

Як приклад наведемо вирази для згаданих матриць жорсткості простого скінченного елемента у вигляді стрижня плоскої розрахункової схеми шарнірно-стрижневої системи (рис. 3.14).

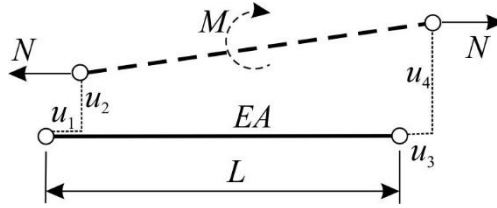


Рис. 3.14

$$\mathbf{K}_0 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0) = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0) = \frac{EA(u_1 - u_3)}{4L^3} \begin{bmatrix} 3(u_1 - u_3) & 2(u_2 - u_4) & -3(u_1 - u_3) & -(u_2 - u_4) \\ 2(u_2 - u_4) & (u_1 - u_3) & -2(u_2 - u_4) & -(u_1 - u_3) \\ -3(u_1 - u_3) & -2(u_2 - u_4) & -3(u_1 - u_3) & 2(u_2 - u_4) \\ -(u_2 - u_4) & -(u_1 - u_3) & 2(u_2 - u_4) & (u_1 - u_3) \end{bmatrix}.$$

При малих перекосах $(u_2 - u_4)/L$. При малих перекосах і відносних подовженнях стрижня $(u_1 - u_3)/L$ матриця $\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)$ мала порівняно з іншими, і її впливом можна знехтувати.

У тих випадках, коли можна обмежитися першим поверхом геометричної нелінійності, у розрахунках припустимо знехтувати матрицею $\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)$.

Неважко також помітити, що в разі розтягнутого стрижня, коли $N > 0$, виникає опір перекосу стрижня за рахунок виникнення відновлювального моменту $M = N(u_2 - u_4)/L$, і чим більше розтягнення тим сильніший опір перекосу.

Цей ефект забезпечує працездатність багатьох вантових конструкцій, які в рамках кінематичного аналізу класифікуються як миттєво-жорсткі системи.

Питання:

Чи існують задачі, де заздалегідь ясно, що розрахунок слід виконувати з урахуванням геометричної нелінійності системи?



Відповідь:

Звичайно, існують. Насамперед можна назвати проблему оцінки поведінки систем, які під час лінійного аналізу було визначено як геометрично змінювані. Деякі з таких змінюваних систем володіють можливістю сприймати зовнішні навантаження в змінній геометричній конфігурації, яку вони набувають під впливом того ж навантаження.



Як приклад можна розглянути просту систему з трьох фермових стрижнів завдовжки $L=5000$ мм, розташованих на одній прямій (рис. 3.15). Очевидно, що така конструкція двічі змінювана, і з лінійного аналізу випливає, що вона не може нести поперечне навантаження (кН)

$$P_1 = 0,029; \quad P_2 = 16,072; \quad P_3 = -0,029; \quad P_4 = 16,072.$$

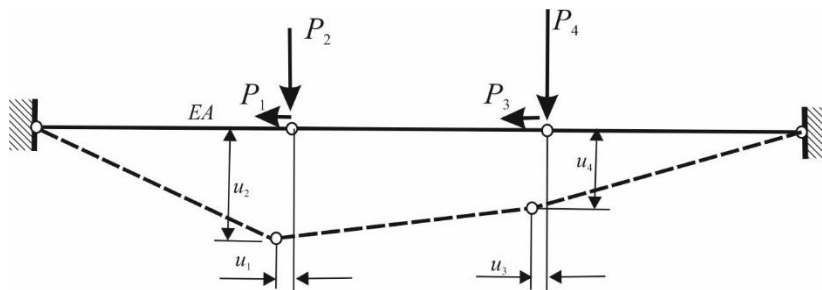


Рис. 3.15

Виконаємо геометрично нелінійний розрахунок у припущенні, що жорсткість усіх стрижнів $EA = 1000$ кН і конструкція в її вихідному стані попередньо напружена силою 25,4 кН. У результаті отримаємо, що переміщення вузлів рівні:

$$u_1 = 1500; \quad u_2 = 75; \quad u_3 = 1500; \quad u_4 = -75,$$

а зусилля в стрижнях (кН):

$$N_1 = 53,573; \quad N_2 = 53,603; \quad N_3 = 53,573.$$

Це не важко перевірити простою підстановкою в точні рівняння для геометричної зв'язності та рівноваги вузлів, які запишуться для деформованої схеми як:

$$\left. \begin{aligned} (L - u_1)^2 + u_2^2 &= (L + N_1 L / (EA))^2 \\ (L + u_1 - u_2)^2 + (u_3 - u_4)^2 &= (L + N_2 L / (EA))^2 \\ (L + u_3)^2 + u_4^2 &= (L + N_3 L / (EA))^2 \\ N_1 \cos \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 + P_1 &= 0 \\ N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2 - P_2 &= 0 \\ N_2 \cos \alpha_2 - N_3 \cos \alpha_3 + P_3 &= 0 \\ N_2 \sin \alpha_2 - N_3 \sin \alpha_3 - P_4 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

При цьому потрібно врахувати, що

$$\sin \alpha_1 = u_1 / (L - u_1);$$

$$\sin \alpha_2 = (u_3 - u_4) / (L + u_1 - u_2);$$

$$\sin \alpha_3 = u_3 / (L + u_3).$$

Бесіда 3.6. Конструктивна нелінійність

Системи, де обмеження на переміщення визначені умовами-нерівностями (односторонні зв'язки) зустрічаються частіше, ніж про це зазвичай думають. Конструкція, вільно оперта на деяку поверхню, що забороняє переміщення в бік цієї поверхні й не перешкоджає переміщенню в протилежному напрямку, гнучкі нитки, які дозволяють зблизитися своїм кінцевим точкам і не дозволяють їм віддалятися

більше, ніж на довжину нитки, є найпростішими прикладами. Типовими прикладами можуть також слугувати: кам'яна кладка, виконана насухо, зв'язок між фундаментом споруди і ґрунтом, що підстилає його. Сипучі ґрунти або абсолютно гнучкі мембрани можуть слугувати прикладами складніших систем з односторонніми зв'язками.

Відмінною особливістю одностороннього зв'язку є параметри його вихідного стану. Наприклад, для найпростішої моделі стрижня, здатного сприйняти розтягнення, який вимикається з роботи в разі появи стиснення (рис. 3.16,а), можна врахувати зазор Δ_0 в однібічному зв'язку або ж переднапруження (натяг), що може бути інтерпретовано і як від'ємний зазор, тобто $\Delta_0 < 0$.

Під час роботи такого стрижня в системі, щоб зв'язок увімкнувся в роботу, має бути попередньо обраний зазор, або ж, щоб він вимкнувся з роботи, має бути подолано натяг.

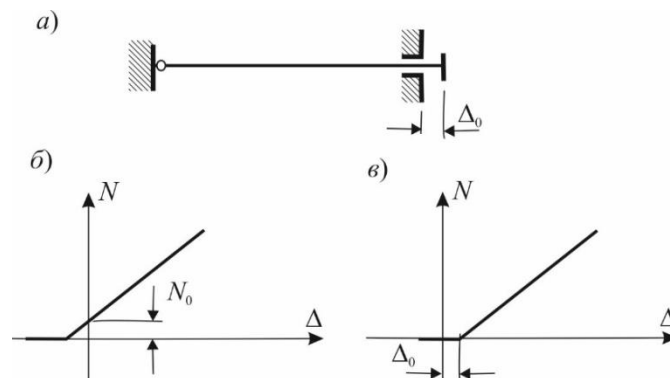


Рис. 3.16

Два варіанти діаграми роботи такого елемента у вигляді залежності поздовжньої сили N від збільшення відстані між кінцевими точками Δ представлені на рис. 3.16,б і 3.16,в, де випадку «а» відповідає варіант із попереднім напруженням (натяг дорівнює N_0), а випадку «б» – варіант системи із зазором Δ_0 .

Тангенс кута нахилу діаграми дорівнює величині EA/L (EA – жорсткість стрижня на розтягнення, L – довжина стрижня).

Корисно вказати на деякі особливості, пов'язані з описом потенційної енергії системи з односторонніми зв'язками, що в розглядуваному випадку не є гладкою функцією узагальнених координат.

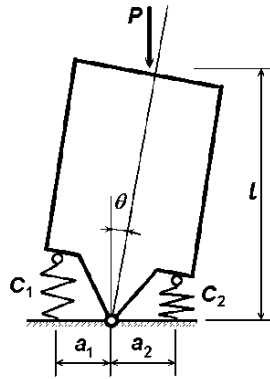


Рис. 3.17

Так, наприклад, для системи з одним ступенем свободи, що складається з жорсткого диска, положення якого визначається кутом повороту θ , і двох пружних елементів із жорсткостями, що працюють тільки на стиск, з жорсткостями C_1 і C_2 (рис. 3.17), вираз для потенційної енергії має вигляд

$$U = \begin{cases} \frac{C_1}{2} a_1^2 \sin^2 \theta - Pl \sin \theta & \text{для } \theta \geq 0 \\ \frac{C_2}{2} a_2^2 \sin^2 \theta - Pl \sin \theta & \text{для } \theta < 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

Видно, що при $C_1 a_1 \neq C_2 a_2$ функція $U(\theta)$ має розрив другої похідної на початку координат, наявність цього розриву пов'язана з миттєвою зміною жорсткості в момент перемикання односторонніх зв'язків.

Далі ми розглядатимемо випадок малих переміщень для того, щоб за можливості спростити викладення. У цьому випадку замість (3.57) будемо мати

$$U = \begin{cases} \frac{C_1}{2} a_1^2 \theta^2 - Pl \sin \theta & \text{для } \theta \geq 0 \\ \frac{C_2}{2} a_2^2 \theta^2 - Pl \sin \theta & \text{для } \theta < 0. \end{cases} \quad (3.57, a)$$

Друга характерна особливість пружних систем з односторонніми зв'язками полягає в тому, що, якщо система має абсолютно жорсткі односторонні зв'язки, то потенційна енергія її стає функцією, визначеною не за всіх можливих значень узагальнених координат. Зазвичай же в будівельній механіці пружних систем потенційна енергія записується у вигляді функції узагальнених координат, які можуть набувати довільних значень, і як область визначення функції потенційної енергії виступає деяка відкрита множина.

Для умов-нерівностей, що з'являються в разі врахування односторонніх зв'язків, ця властивість уже не дотримується, і потенційна енергія може виявитися функцією, визначеною на замкнутій множині значень узагальнених координат.

Характерний приклад показано на рис. 3.18,а, де система з одним ступенем свободи може мати лише переміщення $x \geq -\Delta$. Її потенційна енергія (рис.3.18,б)

$$U = \begin{cases} \frac{C}{2} x^2 - Px & \text{для } x \geq -\Delta \\ \text{не визначена} & \text{для } x < -\Delta \end{cases} \quad (3.58)$$

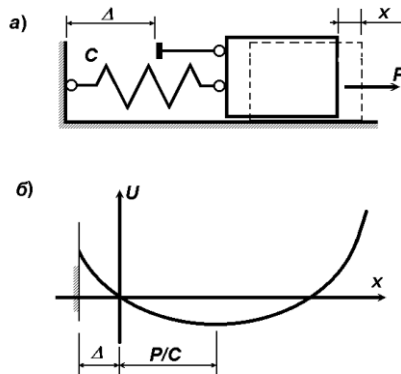


Рис.3.18

Нарешті, на рис. 3.19,а наведено просту систему з двома ступенями свободи, яка має обидві зазначені особливості.

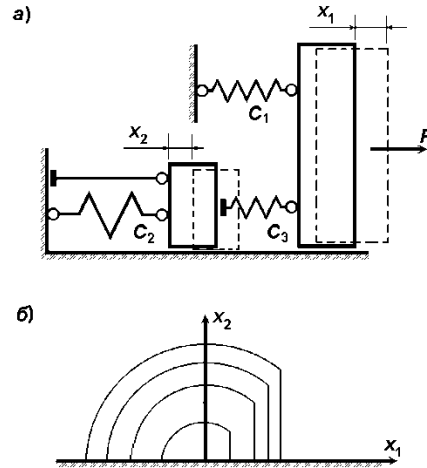


Рис. 3.19

Потенційна енергія цієї системи описується як

$$U = \begin{cases} \frac{1}{2} c_1 x_1^2 - P x_1 & \text{для } x_1 \geq x_2; x_2 \geq 0 \\ \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} (c_1 + c_2) (x_1 - x_2)^2 + \\ + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 - P x_1 & \text{для } x_1 < x_2; x_2 \geq 0 \\ \text{не визначена} & \text{для } x_2 < 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

Поверхня $U=U(x_1, x_2)$ показана за допомогою ліній рівня на рис. 3.19,б. Функція (3.59) визначена на замкнутій множині (півплощина $x_2 \geq 0$) і має розрив у похідній уздовж лінії $x_1=x_2$, пов'язаний із перемиканням одностороннього зв'язку. Слід зауважити, що від негладкості функції U можна, взагалі кажучи, позбутися шляхом введення додаткових невідомих (надлишкових координат). Так для системи, зображеної на рис. 3.17, можна крім переміщення θ , ввести ще два невідомих переміщення x_1 і x_2 точок, розміщених у місцях спірання пружин на основу, і тоді

$$U(\theta, x_1, x_2) = \frac{c_1}{2} (a_1 \theta - x_1)^2 + \frac{c_2}{2} (a_2 \theta - x_2)^2 - P l \theta, \quad (3.60)$$

але при цьому повинні ще виконуватися обмеження

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (3.61)$$

тобто гладка функція (3.60) визначена тепер на замкнутій множині. Нижче цей прийом буде широко використовуватися під час міркувань, пов'язаних з побудовою так званих допоміжних систем.

Розглянемо тепер деяку пружну систему з односторонніми зв'язками в кількості s , і прийнемо надалі угоду про індексацію односторонніх зв'язків грецькими літерами. Виберемо правило знаків для реакцій R у цих зв'язках таким, щоб припустимо за природою зв'язку зусилля (стиснення для зв'язку-упору або розтягнення для зв'язку у вигляді гнучкої нитки) вважати додатним. Будемо також вважати позитивними ті переміщення u , які не обмежуються одностороннім зв'язком (наприклад, зближення кінців гнучкої нитки). Оскільки односторонній зв'язок може перебувати тільки в одному зі станів: робочому (зв'язок увімкнено), коли $R > 0$ та $u = 0$ або неробочому (зв'язок вимкнено), за якого $R = 0$ і $u > 0$, то для всіх односторонніх зв'язків системи мають виконуватися такі нерівності та рівності::

$$R_{\alpha} \geq 0; \quad u_{\alpha} \geq 0; \quad R_{\alpha} u_{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (3.62)$$

Ці умови записані для абсолютно жорстких односторонніх зв'язків, таких, наприклад, як односторонній зв'язок-упор. У разі пружних односторонніх зв'язків (скажімо, для пружин скінченної жорсткості, які працюють тільки на розтягнення) замість (3.62) за прийнятого правила знаків слід було б написати

$$R_{\alpha} = \frac{1}{2} k_{\alpha} (|u_{\alpha}| - u_{\alpha}) \quad (\alpha = 1, \dots, s), \quad (3.63)$$

де k_{α} – жорсткість пружного одностороннього зв'язку.

Дійсно, при позитивному переміщенні u_{α} , якому односторонній зв'язок не чинить опору, з (3.62) отримуємо $R_{\alpha} = 0$, тоді як при негативному переміщенні з (3.63) випливає лінійна залежність $R_{\alpha} = -k_{\alpha} u_{\alpha}$ з позитивним (і, отже, сприйнятим одностороннім зв'язком) зусиллям. Надалі будемо вважати, що в розглянутій системі всі односторонні зв'язки є жорсткими. Насправді, як це буде показано наприкінці цього розділу, зазначена обставина не є обмеженням на клас односторонніх зв'язків, оскільки будь-який пружний елемент, що односторонньо працює, може бути змодельований за допомогою розміщеного на його кінці жорсткого одностороннього зв'язку, як це показано на рис. 3.16.

Основна проблема розрахунку системи з односторонніми зв'язками полягає в тому, що потрібно з'ясувати, які з цих зв'язків беруть участь у роботі під час дії заданого навантаження, тобто встановити *робочу систему*. Слід зауважити, що простий перебір варіантів призведе до необхідності аналізувати 2^s різних схем, що в більшості випадків практично нереально (вже за $s=10$ це дає 1024 варіанти!).

Якщо робочу систему встановлено, то, замінюючи працюючі (активні) односторонні зв'язки двосторонніми і відкидаючи неактивні зв'язки, ми отримуємо звичайну систему, аналіз якої можливий будь-якими відомими в будівельній механіці способами. Само собою зрозуміло, що результат розрахунку робочої системи має бути таким, що зусилля в заміненіх зв'язках і

переміщення в напрямку відкинутих зв'язків мають відповідати характеру роботи односторонніх зв'язків, які фактично наявні в системі та лише подумки видозмінені під час переходу до робочої системи. Якщо такої відповідності немає, то розбіжність свідчить про помилковість прийнятої робочої системи.

Корисно вивчити поведінку системи при зміні навантаження. Найпростішим випадком змінного навантаження є однопараметричне, коли співвідношення між усіма навантаженнями на систему задано, а змінюється лише інтенсивність компонент навантаження.

Насамперед розглянемо деякі якісні міркування, засновані на фізично очевидних припущеннях і уявленнях про поведінку системи під навантаженням.

Якщо якомусь значенню параметра інтенсивності зовнішнього навантаження (рівню навантаження) відповідає деяка робоча система, то можна припускати, що та ж сама робоча система відповідає й іншим близьким за величиною рівням навантаження. Тобто в деякому діапазоні навантажень (можливо, і в діапазоні нульової довжини) робоча система не змінюється, а задана система з односторонніми зв'язками поводить як звичайна конструкція, що лінійно деформується.

У разі, коли односторонні зв'язки встановлені без зазорів і відсутнє попереднє напруження, просте збільшення інтенсивності навантаження (множення всіх сил на позитивне число $\lambda > 0$) не може призвести до зміни робочої системи. Якщо ж є зазори в односторонніх зв'язках, то не виключено, що за деякого значення λ система «вийде на зв'язок», тобто зазор буде обрано і відбудеться зміна робочої системи. Те саме може статися, коли наявне попереднє напруження деякого одностороннього зв'язку зі зростанням навантаження буде вичерпане і система «зійде зі зв'язку».

Якщо уявити залежність між якимось зусиллям S_k у k -му елементі системи і параметром інтенсивності навантаження P у вигляді графіка, то деякому діапазону зміни P , за якого не змінюється робоча система, відповідатиме відрізок прямої. Кут нахилу цього відрізка залежить від жорсткісних характеристик системи і стану її односторонніх зв'язків.

Якщо змінюється робоча система, то може змінитися і кут нахилу відрізка прямої, оскільки в новій робочій системі, що відповідає новому діапазону зміни навантажень, змінюється стан односторонніх зв'язків (рис. 3.20). Із фізичних міркувань зрозуміло: якщо на графік нанести залежності між зусиллями в різних елементах системи S_k та інтенсивністю навантаження P , то всі точки зламів розташовуватимуться на одних і тих самих вертикалях (це зображено на рис. 3.20), хоча для деяких з S_k може трапитися, що нахили двох суміжних ділянок графіка випадково збігаються.

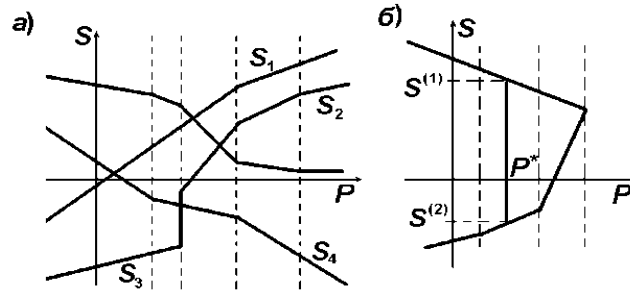


Рис. 3.20

Покажемо тепер, що неможливий графік $S_k = S_k(P)$ такого виду як на рис. 3.20,б. Це випливає з того, що зусилля $S_k^{(1)}$ и $S_k^{(2)}$ належать одній і тій самій робочій системі, а оскільки вона є зазвичай пружною системою, то для неї має виконуватися теорема про єдиність розв'язку.

Зі сказаного вище, на жаль, не випливає, що залежність між зусиллям (переміщенням) і параметром P є монотонною, оскільки можливі такі криві $S_k = S_k(P)$, у яких різним значенням параметра інтенсивності навантаження відповідають одні й ті самі значення зусиль або переміщень. Найпростіший приклад наведено на рис. 3.21, де представлено систему з двома односторонніми зв'язками та графік залежності зусилля в першому односторонньому зв'язку від P .

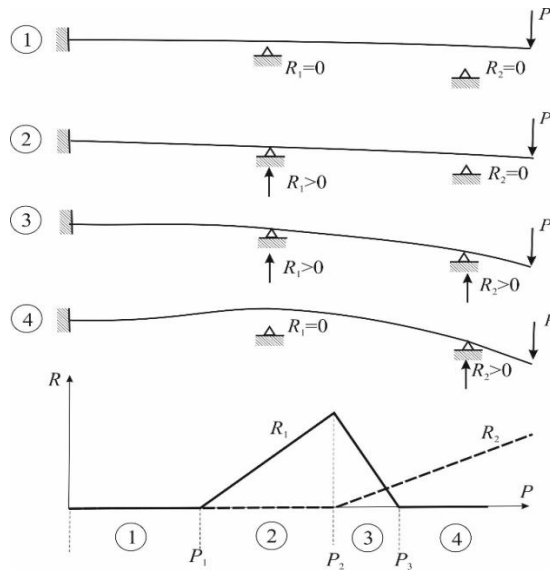


Рис. 3.21

До тих пір, поки $P < P_1$, стрижень не торкається жодного зі зв'язків і маємо $R_1=0$, потім при $P=P_1$ перший з односторонніх зв'язків включається в роботу і зусилля в ньому зростає, доки при $P=P_2$ не включиться в роботу другий односторонній зв'язок. При подальшому збільшенні P зусилля в першому зв'язку починає зменшуватися, і при $P=P_3$ відбувається відрив, тоді зв'язок виключається з роботи.

Ми тут знову зіткнулися з ефектом, про який ішлося раніше (рис. 3.4), а саме – максимальне значення одного з параметрів напружено-деформованого стану реалізується не за граничних значень інтенсивності навантаження.

Важливо підкреслити таке: незважаючи на те, що крива $S_k = S_k(P)$, зображена на рис. 3.20, має дві ділянки, що зливаються з віссю, вони відповідають різним робочим системам.

Бесіда 3.7. Генетична нелінійність

Процес фактичного створення складної системи в загальному випадку є багатоетапним і тісно пов'язаний із послідовністю виконуваних операцій зі складання системи. При цьому, в тому чи іншому порядку, можуть виконуватися роботи з установлення і видалення деяких елементів системи, установлення або видалення баластних вантажів, регулювання довжин тих чи інших елементів, зміни стану деяких зв'язків тощо.



Більшість дій, що виконуються в процесі монтажу, призводять до зміни розрахункової схеми та/або напруженого і деформованого стану системи.

Усі розрахунки, пов'язані з монтажем системи і з процесом створення попереднього напруження, як правило, виконуються в припущенні справедливості звичайних припущень лінійної будівельної механіки для кожного етапу монтажу. Однак, загалом, за рахунок зміни розрахункової схеми під час переходу від етапу до етапу, задача є нелінійною. Така нелінійність, зумовлена історією створення системи, називається *генетичною*.

Для кожної стадії монтажу можна використовувати будь-який класичний метод будівельної механіки, але, з урахуванням специфіки багатоетапного розрахунку, корисно представити ці методи у формі, де відображається змінність системи. Для розв'язних рівнянь методу переміщень, наприклад, будемо писати

$$\mathbf{K}_r \Delta \mathbf{u}_r = \Delta \mathbf{q}_r, \quad (3.64)$$

де $\mathbf{K}_r$ — матриця жорсткості системи на r -му етапі, а $\Delta \mathbf{u}_r$ і $\Delta \mathbf{q}_r$ — вектори додаткових переміщень і додаткових наведених вузлових навантажень, що належать до r -го етапу. Знаючи $\Delta \mathbf{u}_r$, можна визначити прирости зусиль $\Delta \mathbf{N}_r$ і отримати накопичені за всіма попередніми етапами значення переміщень $\mathbf{u}_r$ і зусиль $\mathbf{s}_r$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{r-1} + \Delta \mathbf{u}_r, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{N}_r = \mathbf{N}_{r-1} + \Delta \mathbf{N}_r. \quad (3.66)$$

Співвідношення (3.65) і (3.66) доречно називати *законами успадкування монтажних станів* конструкції. Одночасне виконання лінійних співвідношень (3.62) і законів успадкування (3.65) – (3.66) якраз і породжує генетичну нелінійність задачі.

Під час переходу до наступного етапу розрахунку змінюється матриця жорсткості $\mathbf{K}_r$, яка отримує приріст $\Delta \mathbf{K}_{r+1}$, позитивне, якщо в систему на етапі $r+1$ додаються елементи, і від'ємне, якщо елементи вибувають із системи на етапі $r+1$:

$$\mathbf{K}r+1 = \mathbf{K}r + \Delta\mathbf{K}r+1. \quad (3.67)$$

Більш детально:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(r+1)} & \mathbf{K}_{12}^{(r+1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^{(r+1)} & \mathbf{K}_{22}^{(r+1)} & \mathbf{K}_{23}^{(r+1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32}^{(r+1)} & \mathbf{K}_{33}^{(r+1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(r)} & \mathbf{K}_{12}^{(r)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^{(r)} & \mathbf{K}_{22}^{(r)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta\mathbf{K}_{22}^{(r)} & \Delta\mathbf{K}_{23}^{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta\mathbf{K}_{32}^{(r)} & \Delta\mathbf{K}_{33}^{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

і система розв'язних рівнянь $(r+1)$ -го етапу має вигляд

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(r+1)} & \mathbf{K}_{12}^{(r+1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^{(r+1)} & \mathbf{K}_{22}^{(r+1)} & \mathbf{K}_{23}^{(r+1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32}^{(r+1)} & \mathbf{K}_{33}^{(r+1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_1^{(r+1)} \\ \Delta\mathbf{u}_2^{(r+1)} \\ \Delta\mathbf{u}_3^{(r+1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{u}_2^{(r+1)} \\ \Delta\mathbf{u}_3^{(r+1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Тут $\Delta\mathbf{u}_1^{(r+1)}$ – приріст переміщень відповідно в раніше змонтованій і незмінній частині споруди, $\Delta\mathbf{u}_2^{(r+1)}$ – приріст переміщень у тих вузлах, до яких примкнули нові елементи, $\Delta\mathbf{u}_3^{(r+1)}$ – переміщення вузлів, що знову з'явилися. Правий нульовий блоковий стовпчик і нижній нульовий блоковий рядок матриці жорсткості відносяться до ще не включеної частини споруди.

Зрозуміло, що для впливів, які стосуються різних стадій одного й того самого етапу монтажу, діють звичайні лінійні закони механіки – за раніше наведеною термінологічною домовленістю розрахункова схема конструкції змінюється тільки під час переходу до наступного монтажного етапу.

Підкреслимо, що в деяких випадках частина навантажень діє тільки в рамках r -го етапу монтажу, і під час переходу до наступних етапів знімається. Така ситуація типова, наприклад, для навісного монтажу конструкції, коли вага кранового обладнання враховується під час формування вектора $\Delta\mathbf{q}_r$ з розміщенням кранів, що відповідають саме цьому етапу. Під час переходу до наступного $(r+1)$ -го етапу монтажу вектор вузлових навантажень формується з урахуванням нового положення кранового обладнання, але при цьому потрібно пам'ятати про необхідність застосування на $(r+1)$ -му етапі і від'ємних кранових навантажень, що анулюють їхні впливи на систему, які відносяться до попереднього етапу. Якщо цього не зробити, то закони успадкування (3.65) і (3.66) працюватимуть невірно.

Результати розрахунків, що враховують процес монтажу, можуть значно відрізнятися від звичних, коли система передбачається створеною відразу в повному обсязі, і лише потім до неї починають прикладати зовнішні навантаження.

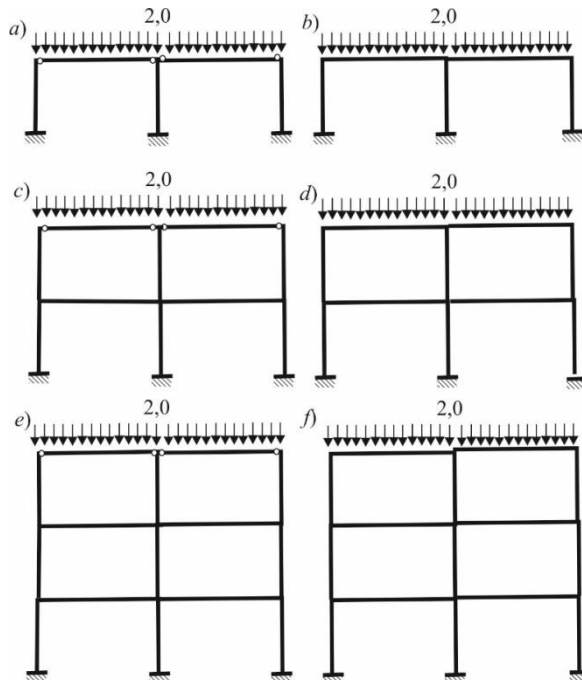


Рис. 3.22

Необхідність урахування послідовності монтажу можна проілюструвати на простому прикладі розрахунку двопрогенової триповерхової рами. Під час монтажу кожного поверху ригель приєднується до стійок шарнірно і несе при цьому навантаження $2,0 \text{ т/м}$. Потім вузли приєднання ригелів омонолічують, і ригелі довантажують вагою плит перекриття, які створюють додаткове навантаження $2,0 \text{ т/м}$. Так монтуються всі поверхи (рис. 3.22).

Послідовний розрахунок конструкції на стадіях монтажу *a*) ... *f*) і підсумовування отриманих результатів дає епюру згинальних моментів, представлену в лівій частині рис. 3.23. Для порівняння праворуч наведено епюру моментів, яку було б отримано в повністю готовій системі, якби до її ригелів було прикладене навантаження $4,0 \text{ т/м}$.

Процес фактичного створення складної системи в загальному випадку є багатоетапним. При цьому в тому чи іншому порядку можуть виконуватися роботи з установлення та видалення деяких елементів системи, установлення або видалення баластних вантажів, регулювання довжин тих чи інших елементів, зміни стану деяких зв'язків тощо.

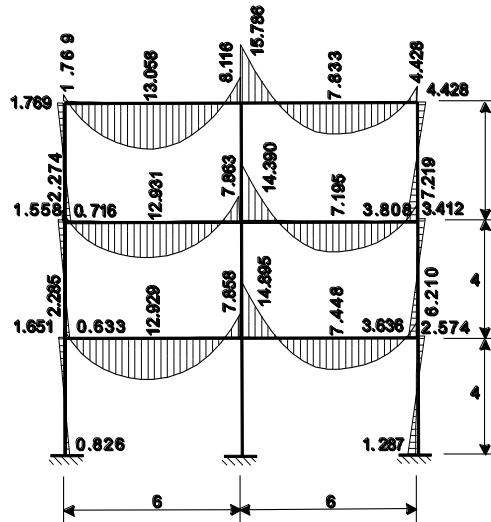


Рис. 3.23

Деякі можливості моделювання такого процесу передбачені в багатьох сучасних програмних комплексах, у ПК ЛІРА і ВК SCAD є спеціальний режим МОНТАЖ, у системі ANSYS це називається «схема розмноження і загибелі елементів».

Усі згадані операції над розрахунковою схемою призводять до замикання в системі деякого попереднього напружено-деформованого стану, що може суттєво впливати на роботу конструкційного комплексу. Якщо деяку частину конструкції може бути додано або видалено із системи, то певні елементи розрахункової моделі можуть стати «існуючими» або «неіснуючими». Таку можливість треба враховувати під час моделювання земляних робіт (наприклад, під час влаштування котлованів або під час будівництва тунелів), багатоступінчастого будівництва (як під час монтажу прогонової будови моста або зведення багатоповерхової будівлі) та в багатьох інших задачах.

Можна розглядати два способи видалення і включення елементів у систему («народження» і «смерті» або «активації і деактивації» за термінологією різних програмних продуктів). Схематично вони показані на рис. 3.24.

У першому випадку монтований елемент М встановлюють так, що один його кінець примикає до вже зібраної частини системи, а другий – до вузла, що перебуває в проєктному положенні. У другому випадку для «ефекту смерті» фактично не видаляють «убиті» елементи. Замість цього він деактивується множенням їхньої жорсткості на відчутний коефіцієнт зменшення, наприклад, на 10^{-6} . Тоді монтований елемент М, який раніше не брав участі в роботі системи через практично нульову жорсткість, вмикається в роботу за рахунок набуття реальної жорсткості і починає впливати на поведінку системи.

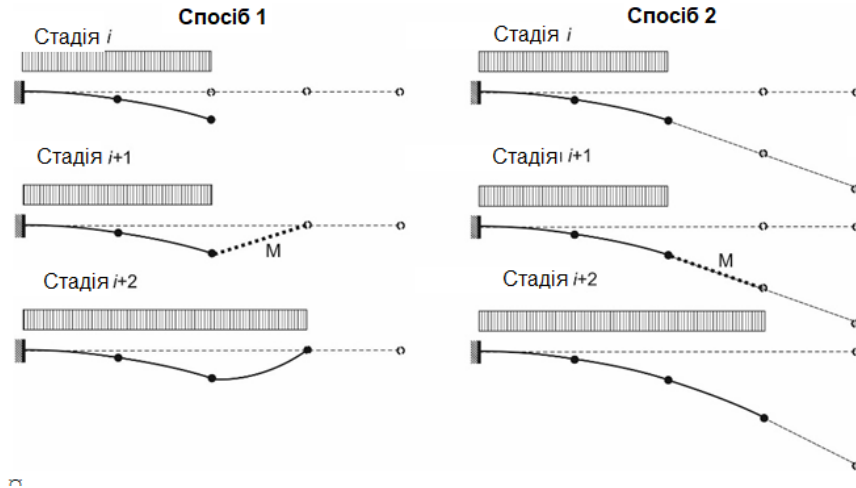


Рис. 3.24

Для геометрично лінійного розрахунку, коли геометрія деформованої схеми ототожнюється з вихідною геометрією, практичної різниці між цими випадками немає. Але не так йде справа в геометрично нелінійному варіанті розрахунку, що наочно демонструє рисунок 3.24, де схематично показано процес навісного монтажу. Для другого способу вузли, що належать не змонтованій частині системи, під дією навантаження на вже створену частину виходять із проектного положення, і система не набуває ніяких непередбачуваних зламів, які виникають за першого способу розрахунку.

Розрахунок за першим способом особливо доречний під час проектування багатоповерхових будівель із залізобетонним каркасом. Річ у тім, що під час зведення кожного поверху опалубку виставляють у такий спосіб, щоб верхня поверхня перекриття, що бетонується, була горизонтальною і вийшла на проектну позначку. По суті, коригується проектна довжина колон, які нарощуються на величину осідання вже зведеної частини будівлі.

Графічно ця технологія ілюструється рисунком 3.25, на якому цифрами позначено: 1 – побудована частина будівлі, 2 – опалубка, 3 – проектні позначки, 4 – додаткова ділянка колони.

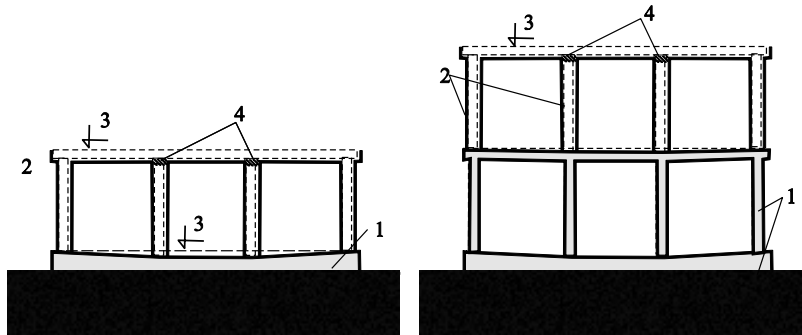


Рис. 3.25

Найвний досвід виконання послідовності розрахунків на монтажні стани показує, що часто не можна не враховувати той напружено-деформований стан, що визначається історією створення конструкції й виявляється «запаяним» у системі.

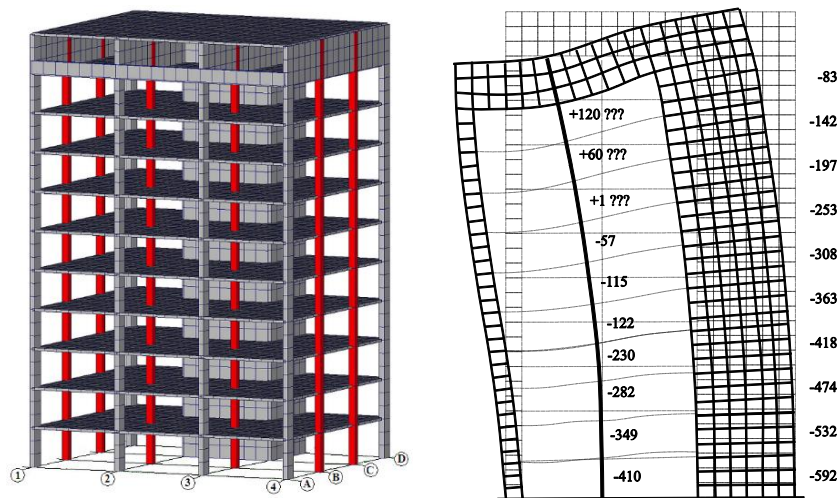


Рис. 3.26

У деяких випадках ідеться навіть не про кількісні, а про якісні відмінності. Приклад (рис. 3.26) показує, до чого може призвести ігнорування процесом монтажу. Для розглянутої конструкції колона виявляється «підвішеною» до жорсткої стіни верхнього ярусу і в результаті з'являється зусилля розтягування в колоні, що досягає 120 тонн.

Якщо ж вести розрахунок з урахуванням послідовності зведення і докладання навантажень, то ніякого розтягування тут немає, і зусилля стиснення в

колоні змінюється від 83 тонн (верхній поверх) до 592 тонн (перший поверх), що повністю відповідає очікуваній картині розподілу зусиль.

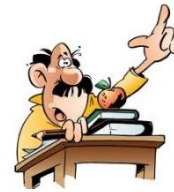
Цікаво зазначити, що дослідження генетичної нелінійності розпочалося значно пізніше, ніж інші варіанти нелінійного аналізу, і стартувало воно з піонерської роботи Е.І. Рашби [5], у якій розв'язували механічну задачу про нарощування деякого твердого тіла (греблі) в полі масових сил. Крім того, в ній уперше було явно вказано на неможливість використання умов сумісності деформацій під час розрахунку напруженого стану нарощуваного тіла.

У своїх мемуарах [6] Е.І. Рашба пише¹²:

«Я зрозумів, що стандартний метод відповідає нефізичному режиму, коли пружне тіло будується за відсутності сили тяжіння і воно стає об'єктом сили тяжіння тільки після свого встановлення, і що розбіжність у результатах для такої нефізичної моделі і для реальності величезна, особливо стосовно плоских гребель. Висновок полягав у тому, що гравітаційні напруження залежать в основному від того порядку, в якому будують греблю, оскільки вага нижніх шарів не повинна впливати на напруження у верхніх шарах».

Питання:

Як впливає на напружено-деформований стан системи, що вже перебуває під навантаженням, додавання або видалення зв'язку?



Відповідь:

Потрібно пам'ятати, що накладення зв'язку – це формулювання заборони на якесь переміщення, і важливо, в який момент існування конструкції таку заборону було реалізовано. Адже заборона на переміщення пов'язана з фізичним втручанням у конструктивне рішення. Якщо в системі з'явився деякий болтовий або зварений стик, додаткова опора або щось подібне іншого типу, то такий зв'язок не змінює існуючого напружено-деформованого стану і сам залишається ненапруженим доти, доки не зміниться навантаження на систему.



¹² Еммануїл Йосипович Рашба написав роботу [5] будучи дослідником-початківцем, коли він тимчасово працював простим обчислювачем в Інституті гідромеханіки АН УРСР. Згодом він став одним із провідних фахівців у фізиці твердого тіла і теорії напівпровідників, його роботи в цій галузі удостоєно Ленінською премією і набули світового визнання.

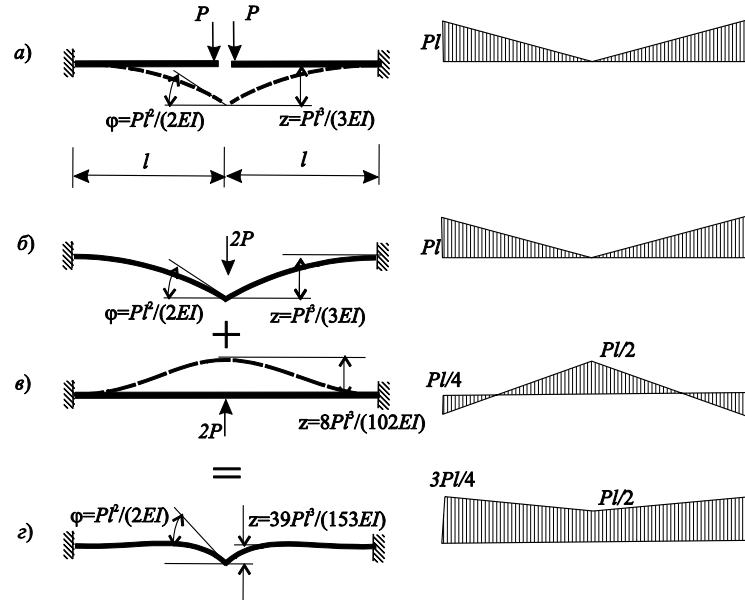


Рис. 3.27

Так, якщо в конструкції, що перебуває під навантаженням і складається з двох консолей (рис. 3.27.а), ці консолі зв'язати між собою, то напружений стан не зміниться (рис. 3.27.б).

Якщо ж видалити навантаження, що раніше існувало з погляду розрахунку (це відповідає застосуванню його зі зворотним знаком, як показано на рис. 3.27.в), то в системі, що змінилася, буде збережено деяке переднапруження (рис. 3.27.г), у сприйнятті якого бере участь і конструкція накладеного стику.

Якщо в напружену систему вводиться додатковий зв'язок (додається елемент, збільшується жорсткість уже існуючого елемента), то такий зв'язок є ненапруженим, а напружений стан системи змінюється лише при зміні навантаження на неї.

Зовсім по-іншому йде справа з видаленням зв'язку. Річ у тім, що в статичному варіанті перш ніж видалити зв'язок, його потрібно зробити ненапруженим. Так, для напруженого лука зняття напруженого зв'язку без попереднього обнуління реакції (поступового відпускання тятиви) призводить до динамічного ефекту, обумовленого потенційною енергією, що вивільняється.

Зв'язок, що видаляється (елемент, що видаляється, жорсткість, що зменшується), відразу ж змінює наявний напружено-деформований стан системи.

Література

1. **Grigoliuk E.I., Shalashilin V.I.** Problems of nonlinear deformation — Springer Dordrecht, 1991
2. **Novozhilov V.V.** Theory of Elasticity — London: Pergamon Press, . 1961.
3. **Perelmuter A.V.** Ustroje pretowo-ciegnowe — Warszawa: Arkadi, 1972.
4. **Perelmuter A.V., Slivker V.I.** Nimerical Structural Analysis — Berlin-Heidelberg: Springer, 2003.
5. **Раиба Э.И.** Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения // Сборник трудов института строительной механики АН УССР. 1953. № 18. — С. 23-27.
6. **Раиба Э.И.** О себе и моих учителях, коллегах, друзьях. // <http://scientists-academia-ussr.blogspot.com/>
7. **Bolotin V.V.** Nonconservative Problems of the Theory of Eelastic Stability — Pergammon Press, 1963.

Цикл 4

Стійкість рівноваги



Бесіда 4.1. Основні поняття теорії стійкості



З поняттям стійкості рівноваги на інтуїтивному рівні людина, яка навіть не має інженерної освіти, стикається в повсякденному житті повсюдно. Щоб пояснити цю думку, розглянемо зображені на рис. 4.1 дві механічні системи, що перебувають у рівноважному стані.

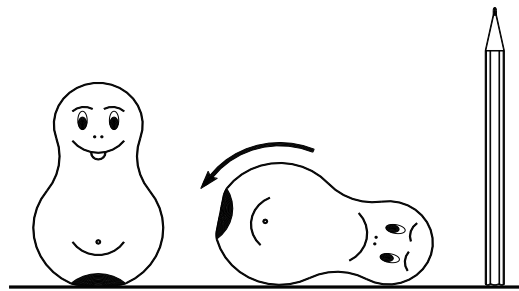


Рис. 4.1.

Хто не пам'ятає знайому з дитячих років іграшку під назвою «Ванька-встанька»? Як не укладай дерев'яного Ваньку на горизонтальну поверхню, упертий Ванька, отримавши свободу, негайно повертається у вертикальне положення. Важка свинцева заливка в основі Ваньки створює той відновлювальний момент, який і змушує впертого Ваньку знову і знову по-солдатськи підхоплюватися. Запитайте будь-яку людину, навіть далеку від інженерних проблем, чи стійкий Ванька у своєму вертикальному положенні. Правильна відповідь очевидна, і відповідь ця підказана інтуїтивним уловлюванням смислового значення терміна стійкість як здатності системи ігнорувати впливи, що обурюють.

З іншого боку, звичайний олівець, за відомого старання, можна поставити «на попа» так, що олівець стоятиме вертикально, тобто перебуватиме в рівновазі. Але вже на життєвому рівні ми подумки співвідносимо цей стан олівця з нестійкою рівновагою. Чому? Тому, що достатньо лише малого збурення (слабкого клання по олівцю, легкого подиху, погойдування основи тощо), щоб ця рівновага була порушена без будь-якої надії на самостійне повернення олівця до вертикального рівноважного стану.

Однак під час розгляду інженерних задач інтуїтивне розуміння проблеми стійкості рівноваги мало допомагає і має поступитися місцем математично витриманому визначенню цього поняття. На основі такого визначення і будуються методи аналізу якості рівноважного стану.

Визначення поняття стійкості рівноваги пов'язане з розглядом тих рухів, які система буде здійснювати, будучи виведеною з положення рівноваги шляхом надання їй точкам вельми малих початкових відхилень від положення рівноваги і вельми малих початкових швидкостей. Якщо після порушення рівноваги система у своєму подальшому русі буде вельми мало відхилятися від досліджуваного рівноважного положення, то таке положення рівноваги називається стійким.

Дуже простим прикладом, що дає уявлення про стійкість і нестійкість стану рівноваги, є механічна система у вигляді важкої кульки, що переміщується без тертя деякою поверхнею (рис. 4.2). Якщо кулька має одиничну вагу, то потенційна енергія такої системи дорівнює ординаті U -тої точки поверхні, де перебуває кулька:

$$U = U(x),$$

де абсциса x є параметром переміщень кульки.

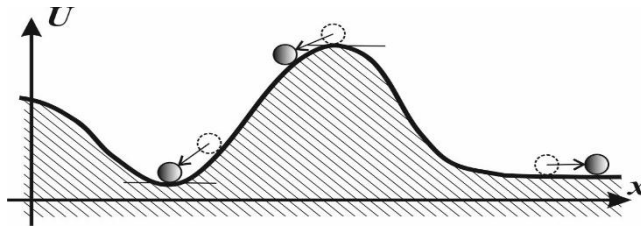


Рис. 4.2

Кулька перебуває в стані рівноваги, коли

$$dU/dx = 0,$$

і ця рівновага стійка, якщо кулька розміщена на дні заглиблення.

Тоді за будь-якого малого відхилення кульки від початкового стану вона повернеться до цього стану щойно причину відхилення буде усунуто. Таким чином, положення рівноваги на дні западини є стійким. При цьому очевидно, що потенційна енергія вихідного стану рівноваги буде меншою, ніж потенційна енергія будь-якого відхиленого стану. Таким чином, стійкому стану рівноваги розглянутої системи відповідає мінімум потенційної енергії. Аналітична умова мінімуму функції U виражається як

$$dU/dx = 0; \quad d^2U/dx^2 > 0.$$

У разі максимуму U за будь-якого якнайменшого відхилення кульки від вихідного положення вона самотійно не повернеться до цього положення після усунення збурення і продовжуватиме рух до нового стану рівноваги. Отже, положення рівноваги на вершині не є стійким, і такому положенню системи відповідає максимум потенційної енергії, коли

$$dU/dx = 0; \quad d^2U/dx^2 < 0.$$

Третій випадок положення кульки ілюструє так звану байдужу рівновагу, коли після усунення збурення кулька не відхиляється далі, але й не повертається до початкового стану. Потенційна енергія при цьому не змінюється і тут:

$$dU/dx = 0; \quad d^2U/dx^2 = 0.$$

У курсі теоретичної механіки доводиться така теорема Лагранжа-Діріхле:

Якщо на досліджуваному рівноважному стані потенційна енергія системи набуває строго мінімального значення в деякій околиці цього стану, то цей рівноважний стан консервативної механічної системи є стійким у сенсі наведеного вище визначення.

Тут варто підкреслити, що вимога саме строгого мінімуму потенційної енергії в досліджуваному положенні рівноваги системи істотна для справедливості теореми Лагранжа-Діріхле. Дійсно, уявімо собі матеріальну точку, розміщену на дні яру, що має циліндричну форму. Потенційна енергія точки в полі тяжіння в цьому положенні мінімальна, але мінімум цей не є строгим, тому що матеріальна точка здатна переміщатися вздовж дна яру зі збереженням значення потенційної енергії.

Але якщо надати матеріальній точці збурення у вигляді як завгодно малої початкової швидкості, то точка рухатиметься із заданою швидкістю вздовж дна яру і після достатнього часу відійде від вихідного рівноважного стану на будь-яку наперед задану відстань. Висновок – індиферентний стан рівноваги цієї найпростішої системи не можна вважати стійким.

Звернемо увагу на те, що теорема Лагранжа-Діріхле дає лише достатні умови стійкості рівноважного стану. Цю важливу обставину не завжди підкреслюють. Більш того, в технічній літературі трапляються необґрунтовані твердження про те, що рівновага нестійка, якщо потенційна енергія не досягає строгого мінімуму.

Питання:

Ви весь час говорите про стійкість стану рівноваги, а не про стійкість системи (конструкції, споруди). Чи правильно це, і в чому різниця між цими поняттями?



Відповідь:

Втрата стійкості рівноважного стану – зміна якості рівноваги (втрата стійкості, перетворення на індиферентний або нестійкий).

Задача про стабільність статичної рівноваги є надзвичайно важливою в практичному відношенні, тому що переважна частина споруд і конструкцій, що зазнають механічних впливів у вигляді сил, повинна, згідно зі своїм призначенням, перебувати в станах сталої рівноваги. Втрата стійкості рівноваги

статичної системи в більшості випадків еквівалентна її руйнуванню. Навпаки, будь-яке руйнування конструкції можна трактувати як явище загальної або місцевої втрати стійкості. Особливо наочно це проявляється під час руйнування розтягнутого металевго стрижня.

Якщо зовнішній вплив на стрижень виражається в його примусовому деформуванні (а не навантаженні), то за малих деформацій стрижень зберігає первісну циліндричну форму своєї поверхні, а потім у межах невеликої ділянки довжини стрижня виникатиме звуження (шийка), тобто циліндрична форма втрачається, і відбувається втрата стійкості процесу деформування.

Можна вказати і на явище втрати стійкості під час впливу пульсуючого навантаження. Нехай стрижень із шарнірно закріпленими кінцями, з яких один має рухливість уздовж осі стрижня, завантажений зовнішньою позовжньою силою, що змінюється в часі за гармонійним законом. Будемо вважати, що система знаходиться далеко від резонансу позовжніх коливань. Проте існують ситуації, за яких позовжня форма коливань системи динамічно нестійка, тобто будь-яке початкове відхилення збуджує поперечні коливання (параметричний резонанс), амплітуда яких швидко зростає до дуже великого значення – спостерігається втрата стійкості руху.

У загальному випадку стійкість конструкції – це збереження форми конструкції, що виключає можливість таких залишкових деформацій, які роблять конструкцію непридатною для експлуатації або призводять до її руйнування. Як бачите, тут мається на увазі ширше визначення, ніж поняття стійкості рівноваги.

З іншого боку, потрібно мати на увазі, що під час аналізу стійкості рівноваги реальна механічна система для її вивчення ідеалізується, і зрештою ми маємо справу не з механічним об'єктом, а з системою рівнянь, які відображають дійсні властивості об'єкта лише наближено. Розв'язання задач стійкості рівноваги – це є розв'язання математичної задачі, тобто дослідження властивостей рівнянь. Перенесення результатів цього дослідження на реальний об'єкт, тобто передбачення механічного ефекту, має робитися з обережністю, тому що не всі властивості рішень рівнянь рівноваги є властивостями механічної системи.

Але в практичних розрахунках споруд і конструкцій термін «втрата стійкості» прийнято умовно використовувати і стосовно самої системи, хоча теоретично це некоректно.

Питання:

У підручнику з будівельної механіки уявлення про стійкість рівноваги спирається на зовсім інше визначення, в якому поняття руху взагалі не бере участі. Вважається, що рівновага механічної системи стійка, якщо ця система після виведення її з рівноважного стану малим збуренням узагальнених координат повертається у вихідний рівноважний стан.





Відповідь:

Зазначена схема міркування належить Л. Ейлеру. По суті, ейлерове уявлення про стійкість рівноваги спирається на зовсім інше визначення, в якому поняття руху взагалі не бере участі. За Ейлером вважають, що рівновага механічної системи стійка, якщо ця система після виведення її з рівноважного стану малим збуренням повертається до вихідного рівноважного стану..

У цій схемі міркувань величину зовнішнього навантаження також подумки нарощують і припускають, що в процесі такого нарощування, у певний момент, разом із рівноважним станом, що розглядається, виникає можливість реалізації іншого рівноважного стану, суміжного з досліджуваним у тому сенсі, що він відрізняється від досліджуваного рівноважного стану нескінченно малими збуреннями в значеннях узагальнених координат системи. Інакше кажучи, розглянутий рівноважний стан системи перестає бути однозначним.

Те значення параметра навантаження $\lambda = \lambda_c$, за якого така неоднозначність форми рівноваги допускається механічною системою, називається критичним (за Ейлером). Вважається також, що за значень навантаження, менших за ейлерове критичне значення, стан рівноваги стійкий, за значень же навантаження, більших за ейлерове критичне значення λ_c , стан рівноваги нестійкий.

Здавалося б, що ейлерова постановка задачі стійкості не містить і натяку на наведене вище визначення стійкості рівноваги і на теорему Лагранжа-Діріхле, яка вимагає мінімальності повної потенційної енергії системи в її стійкому рівноважному стані. Водночас традиційна система освіти інженера, яка багато в чому зберігається і в наш час, не тільки навчає інженера, а й привчає його саме до підходу Ейлера в дослідженні стійкості рівноваги пружних систем, залишаючи більш послідовний аналіз за Лагранжем-Діріхле лише в ранньому за часом вивчення курсі теоретичної механіки, не переносючи його на задачі будівельної механіки.

Звичайно ж, за певних умов обидва ці підходи призводять до однакових результатів. Обґрунтування їхньої еквівалентності наведено, наприклад, у книзі [6], там же можна знайти і вказівку на клас задач, де підхід Ейлера не застосовний.

Бесіда 4.2. Стійкість системи з одним ступенем свободи



Повністю сутність задачі стійкості розкривається лише в разі врахування скінченних деформацій і переходу до нелінійних рівнянь рівноваги. Зазвичай для ілюстрації цього явища використовують задачу про позадвжній вигин центрально-стиснутого тонкого стрижня, розв'язану понад 200 років тому Л.Ейлером.

Але ця задача описує явище, яке є досить складним для первісного пояснення поняття стійкості, і доцільніше спочатку розглянути простіші системи зі скінченим числом ступенів свободи і, зокрема, системи з одним ступенем свободи.

Отже, розглянемо просту систему з одним ступенем свободи, що являє собою абсолютно жорсткий стрижень, пружно затиснутий в основі (рис. 4.3). Переміщення цієї системи характеризуються кутом відхилення φ від початкового вертикального положення. При цьому в пружному закладенні виникає реактивний момент $C\varphi$, де C – коефіцієнт жорсткості закладення.

Систему навантажено вертикальною силою P , яка не змінює свого напрямку під час переміщення точки свого прикладання. Легко бачити, що у відхиленому стані сила P створює перекидний момент, і за значної величини сили P система не зможе втриматися в первісному не відхиленому положенні за будь-якого малого збурення, тобто вона стане нестійкою.

Розглянемо потенційну енергію U цієї системи. Під час відхилення системи від вертикалі сила P здійснює роботу, що дорівнює добутку P на вертикальний зсув кінця стрижня $\Delta = l(1 - \cos \varphi)$. Потенційна енергія зменшується на величину роботи $P\Delta$.

З іншого боку, в пружному закладенні накопичується потенційна енергія внутрішніх сил, що дорівнює $0,5C\varphi^2$.

Таким чином, загальна потенційна енергія системи виражається як:

$$U = 0,5C\varphi^2 - Pl(1 - \cos \varphi), \quad (4.1)$$

а умова рівноваги тут має вигляд

$$dU/d\varphi = C\varphi - Pl \sin \varphi = 0. \quad (4.2)$$

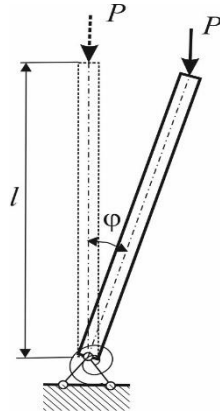


Рис. 4.3

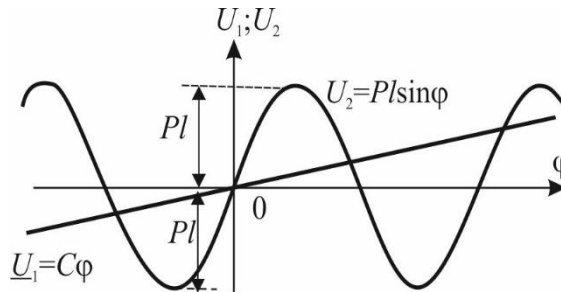


Рис. 4.4

Із (4.2) можна визначити всі положення рівноваги системи, корені цього рівняння відповідають точкам перетину прямої $U_1 = C\varphi$ і синусоїди $U_2 = Pl \sin \varphi$ (рис. 4.4). Число положень рівноваги залежить від величини P , тому що під час зміни амплітуди синусоїди Pl змінюватиметься кількість точок перетину останньої з прямою $U_1 = C\varphi$.

Зрозуміло, що не всі стани рівноваги будуть стійкими. Рівновага буде стійкою, коли потенціальна функція набуває мінімального значення, а нестійким станам рівноваги відповідають максимуми.

Аналітично умова стійкості стану рівноваги виражається нерівністю

$$d^2U/d\varphi^2 > 0,$$

причому φ тут має задовольняти умови рівноваги.

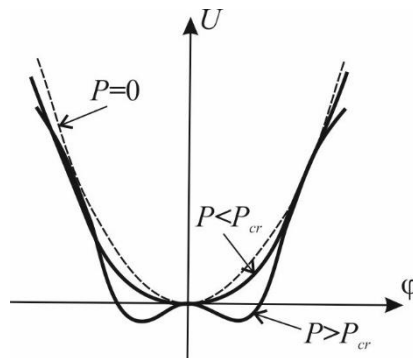


Рис. 4.5

У разі збільшення сили P крива U змінюється, і точки, що відповідають положенням рівноваги, взагалі кажучи, зміщуються. Для тих же, які зали-

шаються на місці (у нашому випадку точка $\varphi=0$), стан рівноваги може переходити зі стійкого в нестійкий (рис. 4.5).

Очевидно, що за деякого значення сили P має існувати проміжний стан рівноваги, за якого не тільки дорівнює нулю перша похідна, але переходить через нуль і друга похідна $\partial^2 U / \partial \varphi^2$. Це положення рівноваги, проміжне між стійким і нестійким, називається *критичним станом* рівноваги. Таким чином, аналітично критичний стан системи визначається двома рівняннями: для розглянутої системи ці рівняння дають рівності (4.2), і

$$d^2 U / d \varphi^2 = \varphi - Pl \cos \varphi = 0. \quad (4.5)$$

Якщо йдеться про початкове положення рівноваги $\varphi=0$, за якого умова (4.2) виконується за будь-якого P , то умова (4.5) дає:

$$C - Pl = 0. \quad (4.6)$$

Звідси знаходимо критичне значення сили P для положення рівноваги $\varphi=0$:

$$P_c = C/l. \quad (4.7)$$

У розглянутому прикладі потенційна енергія U є функцією деформації φ і зовнішньої сили P . Тому умову рівноваги (4.2) правильніше подати у вигляді

$$\partial U(P, \varphi) / \partial \varphi = U_0(P, \varphi) = 0. \quad (4.8)$$

Залежність між P і φ , задана цим рівнянням у неявному вигляді, визначає в координатах φ, P деяку криву, яку називають *кривою станів рівноваги*.

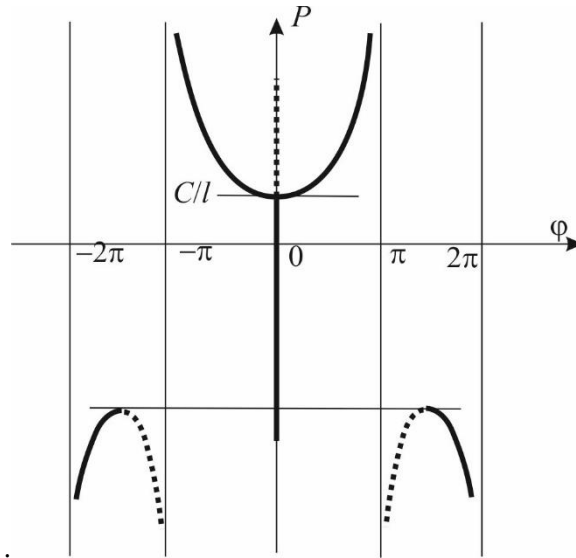


Рис. 4.6

У нашому випадку це буде залежність

$$P = C\varphi / (l \sin \varphi), \quad (4.9)$$

що отримується з (4.2) і зображена на рис. 4.6. На цьому рисунку ділянки стійких станів рівноваги позначено суцільними лініями, а нестійких – штриховими. Покажемо, що екстремальні точки кривої станів рівноваги (4.9), для яких виконується рівність

$$\partial P / \partial \varphi = 0, \quad (4.10)$$

відповідають критичним станам рівноваги (*граничні точки*). Дійсно

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{\partial U_0(P, \varphi) / \partial \varphi}{\partial U_0(P, \varphi) / \partial P} = - \frac{\partial^2 U / \partial \varphi^2}{\partial^2 U / (\partial \varphi \partial P)}, \quad (4.11)$$

і, отже, рівність (4.11) виконується при $\partial^2 U / \partial \varphi^2 = 0$.

Ми отримали другу умову критичного стану рівноваги, в якій звичайна похідна замінена на часткову, тому що тут P вже не вважається постійною величиною.

Вище зазначалося, що там, де похідна $\partial^2 U / \partial \varphi^2$ змінює знак, відбувається перехід від стійких станів системи до нестійких або навпаки. Але з виразу (4.11) видно, що зміну знака $\partial^2 U / \partial \varphi^2$ супроводжує зміна знака у похідній, тобто зміна напрямку нахилу кривої станів рівноваги. Звідси випливає, якщо підйом кривої станів рівноваги відповідає стійким положенням системи, то після переходу через максимум на ділянці падіння кривої (4.9) ми маємо нестійкі положення.

Крива станів рівноваги (див. рис. 4.6) має також вертикальну вітку, яка збігається з віссю $\varphi = 0$ і відповідає невідхиленому положенню системи та довільному значенню сили P .

У точці ($\varphi = 0$, $P = C/l$) має місце розгалуження станів рівноваги, що виражається в появі близьких відхилених стійких станів і зміні на вертикальній вітці стійких станів (за $P < C/l = P_{cr}$) на нестійкі (за $P > P_{cr}$). Така точка називається *точкою біфуркації* (від латинського *bis* – двічі, *furca* – вила, *bifurcatio* – розгалуження). У ній обертаються в нуль обидві другі похідні $\partial^2 U / \partial \varphi^2$ і $\partial^2 U / (\partial \varphi \partial P)$, що означає особливу точку кривої станів рівноваги, а саме вузол перетину двох її відгалужень.

Під час біфуркації виникає можливість існування двох форм рівноваги – вихідної та деякої якісно нової, що відрізняється від первісної форми тим, що в ній з'являється деякий вид деформації, який був відсутній у докритичних станах системи.

Повернемося знову до системи, зображеної на рис. 4.3. Майже всі стани рівноваги, які можна отримати з рівняння (4.2), крім початкового стану $\varphi = 0$, відповідають великим і в звичайних умовах практично недосяжним кутам повороту стрижня. Тому можна обмежитися розглядом деформованих станів, що мало відхиляються від нульового положення рівноваги, і спростити задачу, нехтуючи членами, у які малі деформації φ входять у вищих сту-

пенях. Розкладаючи точний вираз (4.1) у ряд за ступенями φ і нехтуючи ступенями φ вище за другу, отримаємо:

$$U = (C/2)\varphi^2 - Pl\left(1 - 1 + \varphi^2/2! - \varphi^4/4! + \dots\right) \approx (C/2)\varphi^2 - (Pl/2)\varphi^2. \quad (4.12)$$

Наближений вираз функції U графічно може бути представлений у вигляді параболи, графік якої можна трактувати як дещо спотворене зображення окреслень точки $\varphi = 0$ на точній кривій (рис. 4.5). На відміну від точної кривої крива (4.9) дає завжди лише одне положення рівноваги, яке може бути стійким, нестійким і критичним залежно від величини сили P .

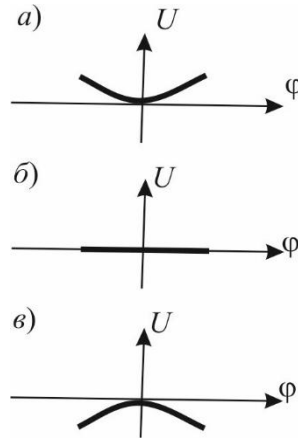


Рис. 4.7

Стійка рівновага буде, коли вершина параболи (4.9) звернена вниз, тобто коли при $\varphi = 0$ має місце мінімум U (рис. 4.7,а). Нестійкій рівновазі відповідає парабола, звернена вершиною вгору (рис. 4.7,в). Нарешті, проміжний, критичний стан рівноваги має місце при виродженні параболи (4.9) у пряму, що збігається з віссю абсцис (рис. 4.7,б). Останнє відбувається за $P = C/l = P_{cr}$, що повністю збігається з критичним значенням критичного навантаження, знайденим із точного виразу для потенційної енергії.

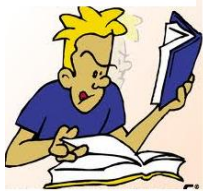
Таким чином, під час розгляду малих деформацій системи критичне навантаження визначається як таке, за якого стан рівноваги системи стає байдужим, і деформація системи може мати будь-яку величину, причому умови рівноваги не порушуються. Що стосується умови (4.5) обернення в нуль другої похідної від потенціальної функції, то її дотримуються і в цьому випадку:

$$\partial^2 U / \partial \varphi^2 = C - Pl = 0, \quad (4.13)$$

однак вона не зумовлена будь-якою певною величиною деформації, як у випадку точного розв'язку.

Таким чином, лінійне рівняння дало змогу знайти критичну силу і конфігурацію системи, що втратила стійкість первісної форми рівноваги, з точністю до деякого невідомого малого параметра (множника).

У разі використання лінеаризованого рівняння судити про закритичну поведінку системи не є можливим; ціною саме цієї втрати й досягнуто спрощення, що полягає в лінеаризації задачі.



Питання:

В основі визначення стійкості рівноваги лежить властивість системи чинити опір малим збуренням. Чи можна вказати, як змінюється ця властивість зі зростанням навантаження?

Відповідь:

Розглянемо знову систему з одним ступенем свободи, яка показана на рис. 4.3. Якщо вважати, що за малих збурень слід очікувати малих відхилень у положенні системи, то в першому наближенні можна прийняти $\sin \varphi = \varphi$. Тоді рівняння рівноваги (4.2) запишеться у вигляді $(C - Pl)\varphi = 0$ або $C(1 - P/P_{cr})\varphi = 0$.



Величина $C(1 - P/P_{cr})$ називається *ефективною жорсткістю системи* і характеризує можливість системи протистояти відхиленню від вертикального положення. У міру зростання сили P від нульового значення до P_{cr} ефективна жорсткість системи зменшується і стає такою, що дорівнює нулю за $P = P_{cr}$.

Характер падіння ефективної жорсткості, продемонстрований на цьому прикладі, зберігається і в інших випадках.

Питання:

Мале (пробне) збурення, за допомогою якого перевіряється стійкість системи, можна уявити собі у вигляді поперечного навантаження на верхньому кінці досліджуваного консольного стрижня. А якщо таке навантаження є по суті, то чи означає це, що не потрібно перевіряти стійкість?



Відповідь:

У цьому випадку початковий, недеформований стан системи не є положенням рівноваги. Так, стійка, зображена на рис. 4.3, може бути навантажена, крім поздовжньої сили P , також бічною силою Q (рис. 4.8.). Будемо вважати, що в процесі деформування системи сили P і Q не змінюються ні за величиною, ні за напрямком.

Рівняння рівноваги цієї системи буде

$$C\varphi - Pl \sin \varphi - Ql \cos \varphi = 0, \quad (4.14)$$

а якщо вважати переміщення φ (кут повороту стійки) малим, то

$$C\varphi - Pl\varphi = Ql. \quad (4.15)$$

Рівняння (4.14) і (4.15) неоднорідні в тому сенсі, що нульове значення змінної φ не є коренем цих рівнянь.

Якщо обмежитися розглядом малих переміщень, то наближений вираз потенційної енергії стійки, зображеної на рис. 4.8, у положенні, відхиленому на малий кут φ від початкового положення:

$$U = 0,5C\varphi^2 - 0,5Pl\varphi^2 - Ql\varphi.$$

У цьому виразі є члени, які залежать від навантаження і містять змінну φ у першому і в другому ступені. Та частина навантаження, яка виконує роботу на переміщеннях, пропорційних квадрату φ і які входять у вираз для потенційної енергії системи в другому ступені (у нашому випадку сила P), називається *параметричним навантаженням*. Інша частина навантаження, що виконує роботу на переміщеннях, пропорційних першому ступеню параметра переміщень (у нашому випадку сила Q), являє собою *активне навантаження*.

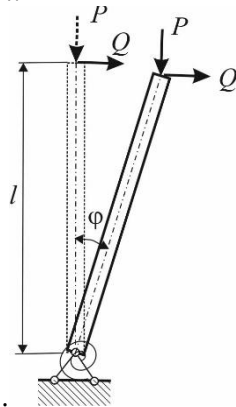


Рис. 4.8

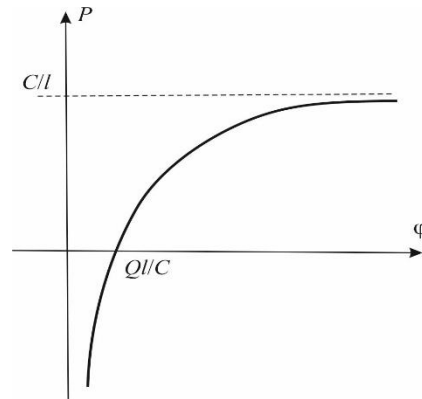


Рис. 4.9

У рівняння рівноваги (4.2) активне навантаження входить у вільний член, який не залежить від переміщень, а параметрична – у член, що містить величину переміщення в першому ступені.

Розв'язавши рівняння (4.2) щодо φ , знайдемо переміщення, що відповідає заданому навантаженню:

$$\varphi = Ql / (C - Pl) = \frac{Ql/C}{1 - P/P_{cr}}. \quad (4.16)$$

Переміщення φ пропорційне активному навантаженню і нелінійно залежить від параметричного навантаження. За деякого значення параметричного навантаження переміщення обертається на нескінченність за будь-якої скінченної активної сили зі значенням $P = C/l$, яке збігається з критичним значенням навантаження в однорідній задачі, тобто в стійці без активної сили Q .

Залежність P від φ за постійної сили Q має вигляд гіперболи

$$P = -(-Ql + C\varphi)/(l\varphi), \quad (4.17)$$

що асимптотично спрямована до горизонталі $P = C/l$ (рис. 4.9).

Бесіда 4.3. Про роль початкових недосконалостей

Численні дослідження показали, що в багатьох випадках рішення, отримане за допомогою ідеальної лінеаризованої розрахункової моделі, може досить далеко відхилятися від експериментальних даних. Було звернуто увагу на те, що експериментальні результати для оболонок вельми чутливі до недосконалостей реальної конструкції, тобто до відхилень реальних конструкцій від їхніх ідеалізованих розрахункових схем.



Тому постає питання оцінки чутливості теоретичного розв'язання задачі стійкості до недосконалостей системи, пояснення механізму виникнення підвищеної чутливості та передбачення випадків, коли така поведінка можлива.

Зважаючи на труднощі достовірного опису характеру недосконалостей, було запропоновано критерії якісного характеру. Ця ідея, висловлена В. Койтером ще 1945 року [8], пов'язує вплив неминучих недосконалостей реальних конструкцій з позакритичною поведінкою ідеальної конструкції відповідної форми, до того ж для аналізу залучають компоненти функції повної потенційної енергії системи, які мають порядок, вищий за квадратичний.

Підхід В. Койтера дає змогу насамперед уточнити уявлення про поведінку системи поблизу точки біфуркації, тобто за навантажень, що мало відрізняються від критичного значення..

Сила цього підходу полягає в тому, що якісна оцінка позакритичної поведінки системи передбачається на основі її вивчення в одній тільки критичній точці.

Основну ідею легко продемонструвати на прикладі системи з одним ступенем свободи. Позначимо параметр навантаження через λ і параметр обраного узагальненого переміщення (наприклад, стріли прогину) – через v . Нехай у виразі для повної потенційної енергії U утримано ступені v до четвертого включно, так що цей вираз має вигляд

$$U = C_2 (\lambda_c - \lambda) v^2 + C_3 v^3 + C_4 v^4, \quad (4.18)$$

де λ_c – критичне значення параметра навантаження; C_i – деякі постійні. Ми припускаємо тут, що відлік переміщень v ведеться від досліджуваного рівноважного стану. Звідси й випливає, що лінійний за переміщеннями член у розкладанні (4.18) відсутній, тому що в стані рівноваги, тобто за $v=0$, має виконуватися

$$\frac{dU}{dv}(0) = 0.$$

Розглянемо насамперед критичний стан, тобто покладемо $\lambda = \lambda_{cr}$. Та обставина, що квадратичний член у (4.18) за цих умов зникає, також зрозуміло, оскільки за самим визначенням у критичному стані системи виконується умова

$$\frac{d^2 U}{dv^2}(0) = 0.$$

Припустимо спочатку, що $C_3 \neq 0$, тоді член, що містить C_4 , можна відкинути, тож в околі критичної точки буде $U = C_3 v^3$. За $C_3 > 0$ і $v < 0$ або за $C_3 < 0$ і $v > 0$ перехід до суміжного стану супроводжуватиметься падінням повної енергії, тому тут рівноважний стан, що відповідає λ_{cr} , виявиться нестійким. Якщо ж $C_3 = 0$, то треба дослідити вираз $U = C_4 v^4$. За $C_3 = 0$ і $C_4 > 0$ відхилення системи від основного стану буде пов'язане з підвищенням рівня енергії і критичний стан виявиться стійким. Навпаки, за $C_3 = 0$ і $C_4 < 0$ він буде нестійким.

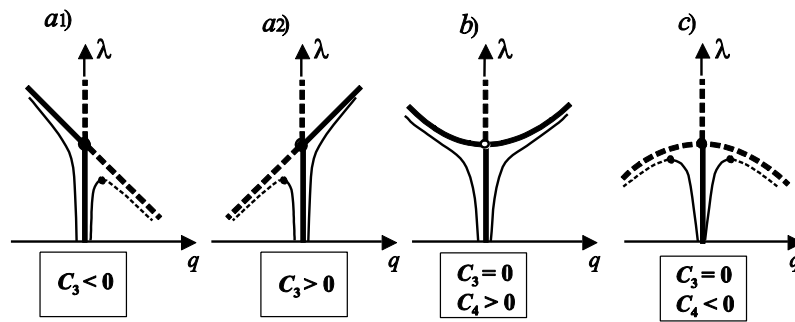


Рис. 4.10.

Якщо тепер розглянути криві рівноважних станів (рис. 4.10), на яких вітки стабільних станів зображено суцільними лініями, а нестійких – пунктиром, то ми побачимо, що в критичній точці відбувається обмін стійкістю між вітками, причому сама критична точка належить або до нестійкої вітки (зачорнене коло), або до стійкої вітки (світле коло). На цих же рисунках жирні лінії відносяться до ідеальної системи, тоді як більш тонкі лінії відображають поведінку системи з початковими недосконаlostями.

Неважко навести найпростіші приклади механічних систем (рис. 4.11), поведінка яких відповідає схемам рисунка 4.10.

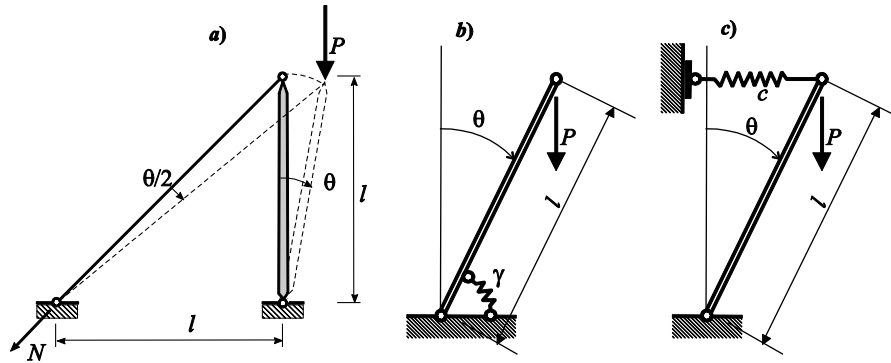


Рис. 4.11.

А. Якщо розглянути жорстку стійку, підкріплену пружним похилим зв'язком із параметром жорсткості k (рис. 4.11,а), і вважати узагальненою координатою цієї системи кут відхилення стійки θ , то можна написати рівняння рівноваги в моментах відносно нижньої точки стійки

$$Pl \sin \theta = Nl \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right),$$

де N – це сила натягу відтяжки.

Легко зрозуміти, що відносне подовження ε відтяжки визначається величиною

$$\varepsilon = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) - 1.$$

Тому

$$N = k [\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) - 1].$$

Після підстановки в отримане вище рівняння рівноваги та перетворень це дає

$$P = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{[\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) - 1][\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)]}{\sin \theta}.$$

Якщо зобразити графік функції $P=P(\theta)$, то він виглядатиме так, як це показано на рис. 4.12

Вираз для потенційної енергії очевидно має вигляд

$$U = \frac{1}{2} kl \sqrt{2} [\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) - 1]^2 - Pl(1 - \cos \theta).$$

Розкладання в ряд Тейлора з утриманням членів до четвертого ступеня включно дає

$$U = \frac{l}{2} \left(\frac{k}{2\sqrt{2}} - P \right) \theta^2 - \frac{kl}{8\sqrt{2}} \theta^3 + \frac{l}{24} \left(P - \frac{kl}{8\sqrt{2}} \right) \theta^4 + \dots$$

Звідси видно, що в цьому випадку $C_3 < 0$, причому

$$P_{cr} = \frac{k}{2\sqrt{2}}.$$

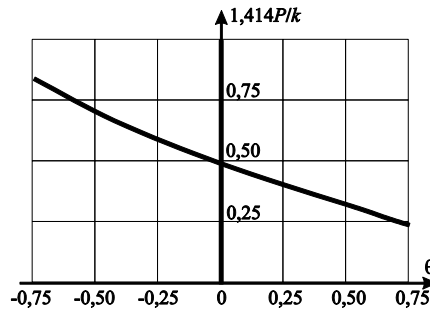


Рис. 4.12.

Зрозуміло також, що при $\theta=0$ рівновага витримується за будь-якого значення навантаження P – вертикальна лінія на рис.4.12. Як бачимо з цього рисунку, якісна картина поведінки системи справді збігається з картиною, зображеною на рис. 4.10,а (асиметрична біфуркація).

В. Для жорсткої стійки, пружно закріпленої від повороту навколо опорного шарніра пружиною з жорсткістю γ , маємо вираз

$$U = \frac{\gamma}{2} \theta^2 - Pl(1 - \cos \theta) = (\gamma - Pl) \frac{\theta^2}{2} + Pl \frac{\theta^4}{24} \dots$$

Розкладання функції повної енергії системи в ряд за ступенями θ при $P = \gamma/l = P_{cr}$ має вигляд $U = (P_{cr}l/24)\theta^4 > 0$, отже, відгалужена крива симетрична як на рис. 4.10,б (симетрична стійка біфуркація).

С. Якщо жорстка стійка утримується від повороту пружиною, що зберігає своє горизонтальне положення, як це показано на рис. 4.11,с, то повна енергія системи є

$$U = \frac{cl^2}{2} \sin^2 \theta - Pl(1 - \cos \theta) = (cl^2 - Pl) \frac{\theta^2}{2} + \left(\frac{Pl}{24} - \frac{cl^2}{6} \right) \theta^4 + \dots$$

Критичне значення навантаження, що відповідає точці біфуркації, дорівнює $P_{cr} = cl$, при цьому в самій точці біфуркації

$$U = -\frac{cl^2}{8} \theta^4 < 0,$$

і ми маємо випадок, що відповідає рис. 4.10,с (симетрична нестійка біфуркація)).

Від типу критичної точки залежить співвідношення між критичними навантаженнями ідеальних систем і граничними навантаженнями систем із недосконалотями, тобто тут може формуватися уявлення про міру небезпеки досягнення критичного стану.

Проілюструємо це положення аналізом прикладу системи, показаної на рис. 4.11,с.

Уведемо в розгляд безрозмірний параметр x , який визначає величину початкової недосконалості системи. Точніше кажучи, величина початкового відхилення стійки від вертикалі нехай дорівнюватиме xl . Водночас yl позначає повне відхилення вершини стійки від вертикалі, де y можна розглядати як безрозмірний параметр, що характеризує це відхилення (рис.4.13).

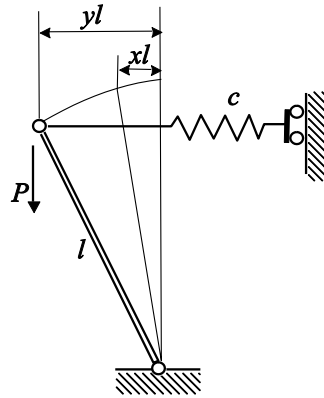


Рис. 4.13.

Умову рівності нулю моментів відносно опорної точки запишемо як

$$Pyl = c(yl - xl) \left[l\sqrt{1 - y^2} \right],$$

або

$$Py = cl(y - x)\sqrt{1 - y^2}. \quad (4.19)$$

Критичну силу P_{cr} визначаємо з умови $dP/dy=0$, що призводить до рівняння

$$\frac{dP}{dy} = cl \left(\frac{x}{y^2} \sqrt{1 - y^2} - \frac{y - x}{\sqrt{1 - y^2}} \right) = 0.$$

З цього рівняння слідує, що

$$\frac{x}{y^3} (1 - y^2) - \left(1 - \frac{x}{y} \right) = 0; \quad y = x^{1/3}. \quad (4.20)$$

Підстановка (4.20) у (4.19) дає змогу визначити залежність критичного навантаження від безрозмірного параметра недосконалості системи

$$P_{cr} = cl \left(1 - x^{2/3} \right)^{3/2}.$$

Оскільки у цій задачі за відсутності початкових недосконалостей $P_{cr,id}=cl$, то чутливість критичного навантаження до недосконалостей системи визначиться відношенням $\eta=P_{cr}/P_{cr,id}=(1-x^{2/3})^{3/2}$.

Класичний результат Койтера полягає в тому, що зниження критичного навантаження за рахунок початкових недосконалостей підпорядковане ступеневому закону з показником ступеня $1/2$ для асиметричної біфуркації і показником ступеня $1/3$ для нестійкої симетричної біфуркації.

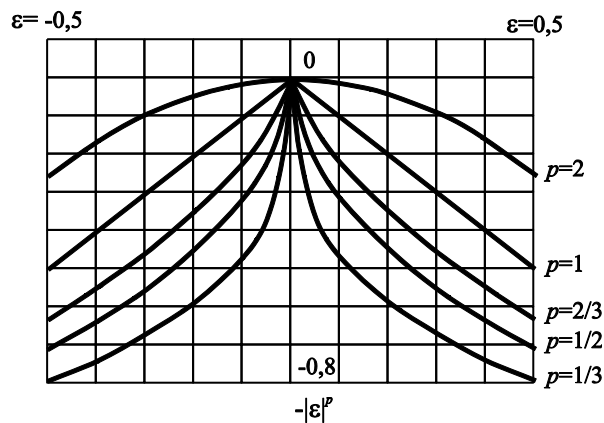


Рис. 4.14

Таким чином, граничне навантаження реальної системи має поправку на неідеальність типу $k|\varepsilon|^p$, де k — деяка додатна постійна, що визначається конкретними особливостями задачі, а показник ступеня p , що залежить від типу біфуркації, є додатним раціональним дробом. Чим менше значення p , тим гостріше реагує система на недосконалості (рис. 4.14).

Зазначимо, що системи, які мають стійку точку біфуркації, малочутливі до недосконалостей. Навпаки, системи з нестійкою точкою біфуркації виявляють помітну чутливість до недосконалостей. Навіть невеликі відмінності реальної конструкції від ідеалізованої розрахункової схеми можуть призвести до помітного зниження значення критичної сили.

На закінчення цього розділу зауважимо таке: вище ми описували перехід від ідеальної системи до недосконалої, вводячи параметр початкового збурення, але в реальній дійсності логіка дослідження є зворотною — ми створюємо модель ідеалізованої системи, відкидаючи її початкові недосконалості. Отже, у «загальному положенні» (тобто для всіх випадків, окрім деяких виняткових) реальна конструкція поводить себе інакше, ніж ідеальна, і аналіз, що обмежується тільки відшукуванням точок біфуркації, може виявитися недостатнім. Зокрема, у разі нестійкої точки біфуркації, перехід від ідеальної системи до недосконалої призводить до помітного зниження значення критичного навантаження, тобто тут є висока чутливість до впливу недосконалостей, чого немає для стійких точок біфуркації.

Тут було б доречним сказати, що дослідження ідеалізованої (отже, в якомусь сенсі виродженої) системи дає важливу інформацію про ширший клас невироджених систем, оскільки дає змогу передбачати їхні властивості за умови, що «неідеальність» реальної конструкції є досить малою, як це справді часто буває.

Виявлення нестійкої точки біфуркації слугує попередженням про сильну чутливість системи до початкових недосконалостей, що, як мінімум, порушує питання про збільшення значення коефіцієнта запасу стійкості, яке зазвичай використовують.

Бесіда 4.4. Стійкість у великому. Верхнє та нижнє критичне навантаження



Корисно розглянути приклад конструкції, у якій втрата стійкості реалізується не в точці біфуркації, а в граничній точці. Одним із найпростіших таких прикладів є ферма Мізеса (рис. 4.15,а).

Тут припускається, що підкоси нестисливі, а всю пружну частину системи зосереджено в зтяжці, деформованість якої моделюють вставленою в неї пружиною жорсткістю c . Сам деформований стан характеризується кутом θ .

Вираз для потенційної енергії цієї системи

$$U = \frac{1}{2}c\Delta_1^2 - P\Delta_2 = 2cL^2(\cos\theta - \cos\alpha)^2 - PL(\sin\alpha - \sin\theta).$$

Звідси випливає, що крива станів рівноваги визначається рівнянням

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -4cL^2(\cos\theta - \cos\alpha)\sin\theta + PL\cos\theta = 0,$$

або

$$P = 4cL^2 \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\right) \sin\theta. \quad (4.21)$$

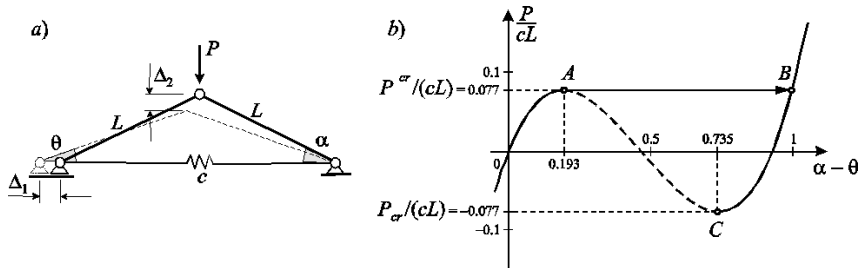


Рис. 4.15.

Графік такої залежності для значення $\text{tg} = 0,5$ показано на рис. 4.15,б. У граничній точці реалізується умова

$$\frac{dP}{d\theta} = 4cL \left(\cos \theta - \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \theta} \right) = 0 \quad (4.22)$$

Цей приклад, крім усього іншого, демонструє явище перескоку, коли система, навантажувана зростаючим навантаженням, доходить до граничної точки А і потім стрибком переходить у точку В на новій стійкій гілці станів рівноваги. При цьому хлопок пов'язаний з досить великими переміщеннями.

Очевидно, що точка А рівноважної траєкторії, показаної на рис. 4.15,б, відповідає нестійкому рівноважному стану системи. Водночас будь-яку точку на ділянці рівноважної траєкторії від точки 0 до точки А (за винятком самої точки А) ми маємо віднести до категорії точок зі стійким рівноважним станом.

Ми бачимо, втім, що перескок на гілку С-В рівноважної траєкторії можна здійснити не тільки з точки А, а й з довільної точки на ділянці 0-А. Для цього достатньо лише подіяти на систему деяким збуренням скінченної величини (а не нескінченно малим, що входить у саме визначення класичного поняття втрати стійкості).

У теорії стійкості рівноваги такого роду ефекти визначаються поняттям втрати стійкості у великому. На відміну від класичного поняття втрати стійкості в малому, для реалізації втрати стійкості у великому, тобто для здійснення перескоку на іншу рівноважну траєкторію системи, потрібне подолання певного енергетичного бар'єру скінченної величини. Якщо цей бар'єр реально можна подолати за рахунок зовнішнього збурення, то інженер не може залишатися байдужим до такої можливості. Однак для оцінювання ступеня небезпеки перескоку потрібна свідомо більша інформація, що стосується очікуваних зовнішніх збурень.

З поняттям стійкості у великому тісно стикаються і такі поняття, як верхнє критичне навантаження і нижнє критичне навантаження. Якщо знову звернутися до рис. 4.15,б, то навантаження P , що відповідає точці А рівноважної траєкторії, прийнято називати *верхнім критичним навантаженням*. Водночас навантаження P , що відповідає точці С рівноважної траєкторії, називають *нижнім критичним навантаженням*.

У тому випадку, коли для нас буде істотно розрізнення верхнього і нижнього критичних навантажень, то для цих величин ми будемо користуватися роздільним позначенням, прийнявши для визначеності:

P^{cr} – верхнє критичне навантаження;

P_{cr} – нижнє критичне навантаження.

Сенс введення понять верхнього і нижнього критичних навантажень полягає в тому, що саме явище втрати стійкості у великому можливе тільки за таких навантажень P , які укладені в межах

$$P_{cr} \leq P \leq P^{cr}.$$

Наведемо ще один приклад простої механічної моделі (рис. 4.16,а), що дає змогу пояснити поведінку циліндричної панелі, стислої уздовж твірних.

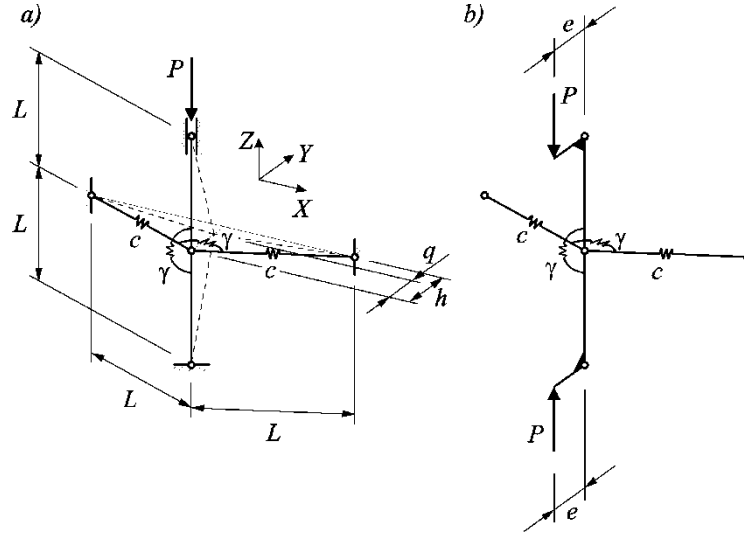


Рис. 4.16.

Модель складається з чотирьох абсолютно жорстких на вигин стрижнів з шарнірним закріпленням у кінцевих перетинах. Два горизонтальні стрижні мають можливість змінювати свою довжину за рахунок вставлених у ці стрижні телескопічних пружин жорсткістю c . У центральному вузлі моделі розміщено дві поворотні пружини, кожна жорсткістю γ . Одна з цих пружин чинить опір зміні кута між вертикальними стрижнями, друга – між горизонтальними. У початковому (недеформованому) стані горизонтальні пружини мають перелом у центральному вузлі. Величина цього перелому характеризується стрілою підйому h , як це показано на рис. 4.16,а.

Характерною особливістю задачі є помітна нерівноправність напрямків переміщення центрального вузла – ми вважатимемо, що система має тільки один ступінь свободи (переміщення q центрального вузла уздовж осі Y), тоді як переміщення цього ж вузла уздовж осі X , які порушують симетрію системи, виключені.

Передбачається, що втрата стійкості призводить до появи вузлового переміщення q і за малої стрілки h куту перелому θ вертикальної та горизонтальної стрижневих компонент схеми такі: $\theta=2q/L$.

Вертикальне переміщення точки прикладання сили P за малих деформацій може бути визначено як

$$u = 2L \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) \approx 2L \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \right] = \frac{q^2}{L}$$

Потенційна енергія дається виразом

$$U = 4\gamma q^2 / L^2 + c \Delta^2 - P q^2 / L. \quad (4.23)$$

у якому Δ – це осьове вкорочення поперечних стрижнів. З використанням передумови про малість кутів повороту θ величина Δ виражається через переміщення q як

$$\Delta = (q/L)(h - q/2) \quad (4.24)$$

Якщо в (4.23) підставити (4.24) і перейти до безрозмірного переміщення

$$\delta = q/h,$$

а довільне співвідношення між оберальною жорсткістю пружин γ , що перешкоджають взаємному повороту ланок, і подовжньою жорсткістю c замінити фіксованим співвідношенням, яке для зручності подальших записів приймемо у вигляді $\gamma = ch^2/8$, то отримаємо

$$U = c \frac{\delta^2 h^4}{2L^2} + c \frac{\delta^2 h^4}{L^2} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Ph^2 \delta^2}{L} \quad (4.25)$$

Диференціюючи (4.25) за δ , приходимо до умови рівноваги у вигляді

$$\frac{dU}{d\delta} = \frac{2\delta h^2}{L} \left[\frac{ch^2}{2L} (3 - 3\delta + \delta^2) - P \right] = 0,$$

що для випадку $\delta \neq 0$ дає залежність

$$P = \frac{3ch^2}{2L} (1 - \delta + \delta^2 / 3). \quad (4.26)$$

У лінійному аналізі в дужках цієї формули опускають члени, які містять δ і δ^2 , що відповідає нехтуванню роботою горизонтальних пружин, які не включаються в роботу в початковому недеформованому стані системи (у докритичному стані системи). Це призводить до лінійного критерію втрати стійкості рівноваги

$$P^{cr} = \frac{3ch^2}{2L}. \quad (4.27)$$

Використаний тут верхній індекс cr у позначенні критичного навантаження не випадковий; його застосування покликане підкреслити, що формула (4.27) визначає саме верхнє критичне навантаження. У рамках лінеаризованої моделі поведінка розглянутої системи за $P = P^{cr}$ описується горизонтальною прямою 1 – 2, зображеною на рис. 4.17.

Якщо взяти до уваги подовжні напруження, спричинені великими деформаціями, то поведінка, яка настає після випучування, описується рівнянням (4.26) і кривою 1 – 3 – 5 на рис. 4.17. Нелінійна модель реалізується, починаючи з гранично допустимого навантаження P^{cr} . Але, згідно з (4.26), навантаження, необхідне для збереження рівноваги, має зменшуватися зі збільшенням деформації, і це зменшення превалює в разі не надто великих значень δ , коли квадратичний член ще малий. Зрештою, оскільки деформації продовжують збільшуватися, рівноважне навантаження стає зростаючим, починаючи від точки мінімуму 3 і рухаючись до точки 5. При цьому для всіх

значень P від рівня точки 1 (верхнє критичне навантаження P^{cr}) до рівня точки 3 (нижнє критичне навантаження P_{cr}) система має, крім початкового, ще два зміщених положення рівноваги.

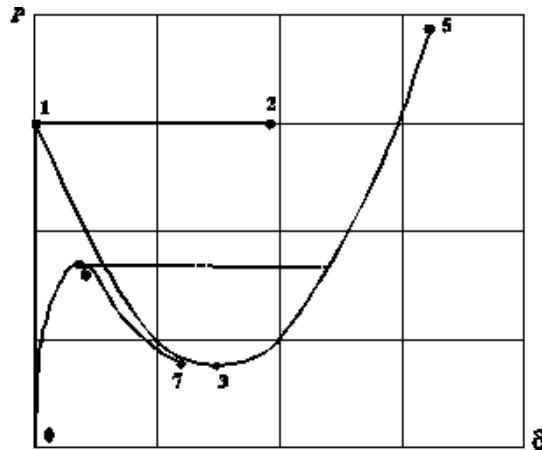


Рис. 4.17.

Якщо в аналізованій задачі розглядати неідеальну модель, наприклад, урахувати ексцентричність прикладання навантаження, як це показано на рис. 4.16,b, то до виразу для повної потенційної енергії додається член $-2Peq/L$, де e – ексцентриситет прикладання навантаження. У цьому разі зв'язок переміщення з навантаженням стає таким

$$P = \left[\frac{3ch^2}{2L} (1 - \delta + \delta^2 / 3) \right] \frac{1}{1 + e/(h\delta)} \quad (4.28)$$

Графік (4.28) за $e/h = 0,1$ показано у формі кривої 0 – 6 – 7 на рис. 4.17. Згідно з цією кривою, стійкість рівноваги вичерпується в точці 6 при навантаженні, що приблизно дорівнює 55% від верхнього критичного навантаження за (4.27), яке дає лінійна теорія.

Питання:

Ви згадали про необхідність подолання енергетичного бар'єра кінцевої величини. Але найчастіше говорять про мале (навіть нескінченно мале) пробне збурення, за допомогою якого перевіряють стійкість системи. А що можна сказати про випробування стійкості рівноваги не дуже малим збуренням?





Відповідь:

Для аналізу цього випадку необхідно розглядати нелінійну поведінку системи. Частина кривої потенційної функції, що лежить між двома її мінімумами, називається енергетичним бар'єром. Вершиною енергетичного бар'єра є нестійкий стан рівноваги, у якому потенційна функція має максимум.

Подолання енергетичного бар'єра може бути здійснено за допомогою штучного збурення системи, тобто додання їй деформації, що виводить систему за вершину енергетичного бар'єра. При цьому в період до переходу через вершину має витрачатися енергія, що дорівнює висоті бар'єра, яка повертається після подолання останнього. Збурення, за якого система досягає вершини енергетичного бар'єра, назвемо критичним збуренням.

Але в низці випадків енергетичний бар'єр виявляється досить незначним, і тоді стійкий стан рівноваги практично рівносильний нестійкому стану внаслідок великої ймовірності появи збурень системи, що перевищують критичне.

Як приклад візьмемо абсолютно жорсткий дуже високий паралелепіпед, який спирається на жорстку горизонтальну площину і навантажений у верхній основі осьовою вертикальною силою P (мал. 4.18,а). Такий паралелепіпед є теоретично стійким за будь-якого значення P . Однак достатньо дуже малого нахилу осі паралелепіпеда, щоб сила P перейшла за ребро нижньої основи і відбулося перекидання.

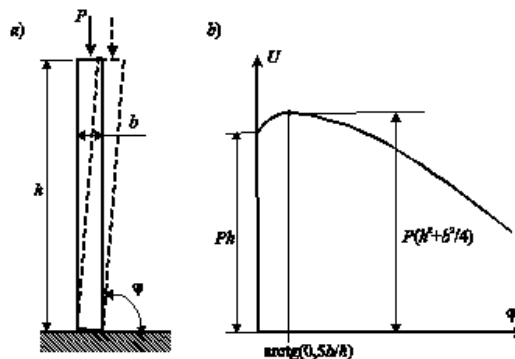


Рис. 4.18

Потенційна енергія системи тут дорівнює

$$U = P(h \cos \varphi + 0,5a \sin \varphi)$$

де φ – кут нахилу осі паралелепіпеда до вертикалі, h – висота, b – ширина основи.

Графік цієї функції показано на рис. 4.18,б. При $\operatorname{tg} \varphi = b/2h$ має місце максимум, тобто вершина енергетичного бар'єра. Тому критичним збуренням

буде відхилення осі паралелепіпеда від вертикалі на кут, що дорівнює, $\arctg(b/2h)$. Оскільки в розглянутому прикладі висота енергетичного бар'єра і величина критичного збурення незначні, то практично, за великих відношень h/b система нестійка.

Бесіда 4.5. Стійкість систем із кількома ступенями свободи



Ми почнемо цю бесіду з розгляду прикладу найпростішої системи з двома ступенями свободи, що дає змогу розглянути практично всі особливості задач зі скінченним числом ступенів свободи, більшим за одиницю.

Розрахункова схема досліджуваної системи надана на рис. 4.19. Вона представляє собою ланцюг із трьох жорстких брусів,

шарнірно скріплених один з одним і опертих у місцях скріплення на пружні опори. До вільних кінців стрижнів прикладена стислива сила P . Довжини стрижнів і коефіцієнти жорсткості пружних опор будемо вважати однаковими. Як незалежні параметри, що визначають деформований стан системи, візьмемо осідання опор u_1 і u_2 .

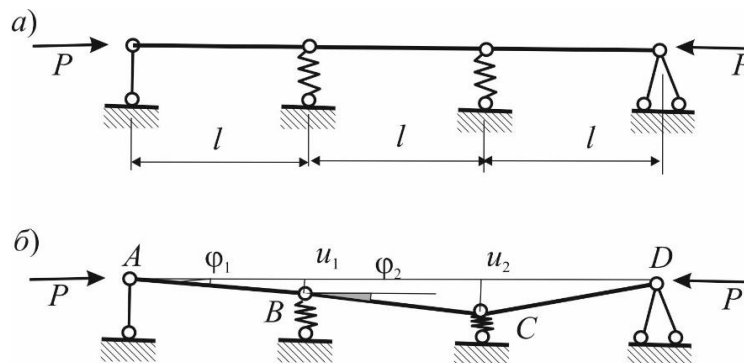


Рис. 4.19

Розв'яжемо задачу про стійкість такої системи в припущенні, що деформації u_1 і u_2 малі порівняно з довжинами стрижнів. При цьому в рівняннях рівноваги можна обмежитися членами, що містять u_1 і u_2 лише в першому ступені, а у виразі потенційної енергії – членами не вище другого ступеня u_1 і u_2 .

Як перше рівняння рівноваги візьмемо умову рівності нулю проекцій на вертикальну вісь усіх сил, що сходяться у вузлі B , а як друге – умову рівності нулю проекцій на вертикальну вісь усіх сил, що сходяться у вузлі C (рис. 4.19, б).

У вузлі B діють реакція опори B , що дорівнює βu_{13} , де β – коефіцієнт жорсткості опори, і дві сили, що діють уздовж першого та другого стрижнів, які

дорівнюють $P \cdot \cos\varphi_1$ і $P \cdot \cos\varphi_2$ та спрямовані під кутами φ_1 та φ_2 до первісного напрямку осі стрижня. Вважаючи з точністю до величин першого порядку малості синуси кутів φ_1 і φ_2 такими, що дорівнюють їхнім тангенсам u_1/l і $(u_2-u_1)/l$, а косинуси – рівними одиниці, рівняння рівноваги напишемо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} -\beta u_1 + Pu_1/l + P(u_1 - u_2)/l &= 0 \\ -\beta u_2 + Pu_2/l + P(u_2 - u_1)/l &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.29)$$

Після спрощень цим рівнянням можна надати вигляд

$$\left. \begin{aligned} (2P - \beta l)u_1 - Pu_2 &= 0 \\ -Pu_1 + (2P - \beta l)u_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.30)$$

Один із розв'язків отриманої системи рівнянь $u_1 = u_2 = 0$ означає, що рівноважною формою за будь-яких P буде недеформований стан системи. Крім цього тривіального розв'язку, існують ще й невизначені розв'язки, одержувані з умови рівності нулю детермінанта коефіцієнтів системи (4.30):

$$\begin{vmatrix} 2P - \beta l & -P \\ -P & 2P - \beta l \end{vmatrix} = 0. \quad (4.31)$$

Рівняння (4.31) дає:

$$(2P - \beta l)^2 = P^2; \quad P_1 = \beta l / 3, \quad P_2 = \beta l. \quad (4.32)$$

Таким чином, критичні стани системи виникатимуть за $P = P_1$ і за $P = P_2$. Із двох отриманих критичних сил практичне значення має лише менша з них.

Складемо тепер вираз для потенційної енергії системи, який буде являти собою квадратичну форму:

$$U = 0,5\beta u_1^2 + 0,5\beta u_2^2 - Pl \left\{ 0,5(u_1/l)^2 + 0,5[(u_2 - u_1)/l]^2 + 0,5(u_2/l)^2 \right\}. \quad (4.33)$$

Перші два члени представляють тут пружну енергію опор, а вираз, що стоїть у фігурних дужках, дає вкорочення проєкції ламаної осі стрижня після деформації.

Поверхня, зображувана цією формулою, в прямокутних координатах u_1, u_2 є поверхнею другого порядку. За $P=0$ вона являє собою параболоїд обертання з вершиною на початку координат (рис. 4.20,а). За $0 < P < \beta l / 3$ поверхня (4.33) буде еліптичним параболоїдом (рис. 4.20,б), який має одну екстремальну точку $u_1=0, u_2=0$, де U є мінімальним. Отже, за $u_1=u_2=0$ матиме місце в даному випадку стійкий стан рівноваги.

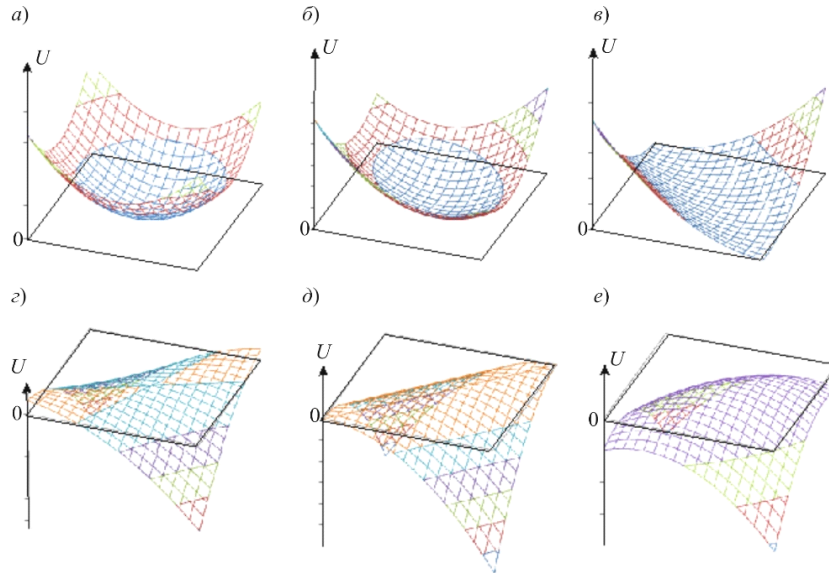


Рис. 4.20

При $P = \beta/3$ функція (.33) набуває вигляду

$$U = (\beta/6)u_1^2 + (\beta/3)u_1u_2 + (\beta/6)u_2^2 - (\beta/6)(u_2 + u_1)^2.$$

Поверхня, що виражається цією функцією, є параболічним циліндром з твірними, паралельними до лінії $u_1 + u_2 = 0$, що лежить у площині $U=0$ (рис. 4.20,в). Тут ми маємо вже не одну мінімальну точку, а цілу лінію, на якій функція і досягає мінімального значення, що дорівнює нулю. Це відповідає індиферентному стану рівноваги, характерному для критичних станів системи в межах її малих деформацій.

За $P_1/3 < P < P_1$ поверхня (4.33) перетворюється на гіперболічний параболоїд, що має сідлоподібну форму (4.20,г). На початку координат ми маємо тут положення рівноваги, але воно буде нестійким у напрямку однієї з головних кривизн поверхні.

При $P=P_1=\beta l$ формула (4.33) обертається у

$$U = (\beta/2)(u_2 - u_1)^2.$$

Поверхня U набуває знову вигляду параболічного циліндра, але вже зверненого опуклістю догори (рис. 4.20,д). У цьому випадку є нескінченна кількість положень рівноваги, що визначаються лінією $u_1 = u_2$, але всі вони будуть нестійкими.

Нарешті, за $P > \beta l$ поверхня U стає знову еліптичним параболоїдом, але з вершиною, зверненою догори (рис. 4.20,е). У цьому випадку є одне поло-

ження рівноваги, нестійке в будь-якому напрямку. Система при цьому матиме два ступені нестійкості.

З формули (4.33) легко виходять рівняння рівноваги, як умови рівності нулю похідних $\partial U / \partial u_1$, $\partial U / \partial u_2$, які повинні дотримуватися в екстремальних точках поверхні U .

У критичних станах $P=P_1$ і $P=P_2$ умови рівноваги набувають вигляду:

$$u_1 + u_2 = 0 \quad (\text{при } P = \beta l / 3);$$

$$u_1 - u_2 = 0 \quad (\text{при } P = \beta l).$$

Тут є невизначеність розв'язку, яка виражається в невизначеності чисельних значень прогинів u_1 і u_2 . Співвідношення ж між ними в критичних станах рівноваги виходять цілком визначеними і визначають форми втрати стійкості, що відповідають тому й іншому критичному навантаженню. Першій критичній силі відповідає оберненосиметрична форма втрати стійкості, показана на рис. 4.21,а, у якій $u_1 = -u_2$. Другій критичній силі відповідає симетрична форма втрати стійкості, показана на рис. 4.21,б. У цій формі $u_1 = u_2$. Дійсною формою втрати стійкості буде форма, що відповідає меншій критичній силі, тобто оберненосиметрична.

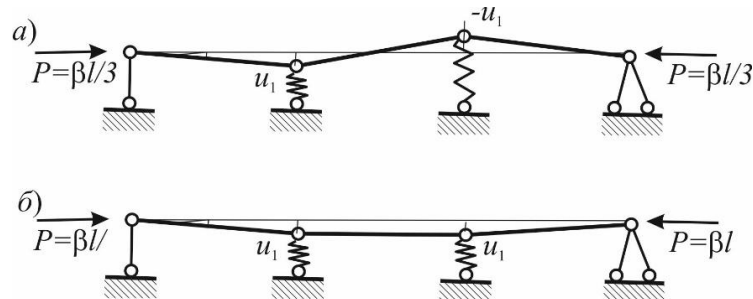


Рис. 4.21

Неважко узагальнити підхід, продемонстрований у розглянутому прикладі, і на загальний випадок системи з n ступенями свободи. Якщо деформований стан системи визначається кількома параметрами $u_1, u_2, \dots, u_n$, то потенційна енергія буде функцією цих параметрів

$$U = U(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (4.34)$$

У стані рівноваги мають виконуватися такі рівняння

$$\partial U / \partial u_1 = 0; \quad \partial U / \partial u_2 = 0; \quad \dots \quad \partial U / \partial u_n = 0. \quad (4.35)$$

1 1 2 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

1. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

• • • • •

Journal of Management Inquiry 18(6)

$$D = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.39)$$

Саме ця умова відповідає критичному стану системи.

Корисно пов'язати коефіцієнти рівняння (4.38) з виразами для енергії системи. Для цього розглядатимемо випадок навантаження системи «мертвими» зовнішніми силами $P_1, P_2, \dots, P_n$, які не змінюють свого напрямку під час деформації системи. Нехай ці сили змінюються синхронно пропорційно параметру інтенсивності навантаження λ і зберігаючи співвідношення між своїми компонентами. Тоді існує потенціал зовнішніх сил $\Pi_s(u_1, \dots, u_n)$ і для відповідних компонент навантаження виконується рівність

$$P_i = \lambda \frac{\partial \Pi_s(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.40)$$

Якщо позначити потенційну енергію деформацій через $E(u_1, \dots, u_n)$, то в положенні рівноваги системи її повна потенційна енергія U

$$U = E(u_1, \dots, u_n) - \lambda \Pi_s(u_1, \dots, u_n) \quad (4.41)$$

розглянута як функція узагальнених координат, набуває стаціонарного значення. Іншими словами, у рівноважному стані

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \frac{\partial E}{\partial u_i} - \lambda \frac{\partial \Pi_s}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.42)$$

Розкладемо вираз для потенційної енергії деформації та вираз для силового потенціалу в ряди в околі досліджуваного стану рівноваги

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial u_i} u_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 E}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} u_i u_j u_k + \dots, \\ \Pi_s &= \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi_s}{\partial u_i} u_i + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi_s}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j + \dots \end{aligned} \quad (4.43)$$

Та обставина, що недеформований стан системи є самозрівноваженим, означає, що за відсутності зовнішніх впливів

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \frac{\partial E}{\partial u_i} - \lambda \frac{\partial \Pi_{\text{в}}}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Крім того, з урахуванням малості зміщень u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можна обмежитися тільки квадратичними членами ряду. Тоді

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi_s}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j$$

і рівняння рівноваги

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial u_i \partial u_j} u_j - \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi_s}{\partial u_i \partial u_j} u_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Матрицю коефіцієнтів цієї системи лінійних відносно u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) рівнянь

$$\mathbf{R}_\lambda = \left[\left[\frac{\partial^2 E}{\partial u_i \partial u_j} - \lambda \frac{\partial^2 \Pi_s}{\partial u_i \partial u_j} \right] \right] \quad (4.44)$$

називають *повною дотичною матрицею жорсткості системи*. Сенс такого іменування випливає з того міркування, що ця матриця являє собою узагальнену характеристику миттєвої жорсткості системи в певній точці її рівноважного стану.

Поняття повної дотичної матриці жорсткості системи є одним із ключових у теорії стійкості рівноважного стану механічної системи. Тому має сенс зупинитися на цьому понятті трохи детальніше, проілюструвавши його застосування на прикладі простої механічної системи (рис. 4.22). При цьому можна продемонструвати техніку отримання компонент матриці дотичної жорсткості без залучення виразів для енергії деформації та роботи зовнішніх сил, тобто у спосіб, що ґрунтується на одних лише рівняннях рівноваги.

Але ці рівняння мають бути складені для деформованого стану системи з урахуванням тих внутрішніх сил, які виникають в елементах системи в її рівноважному стані, досліджуваному на стійкість.

Будемо вважати, що зображені на рис. 4.22 стрижні завдовжки l є абсолютно твердими, тож усі деформації зосереджені в трьох пружинах, твердості яких позначені відповідно як c_1 , c_2 , c_3 .

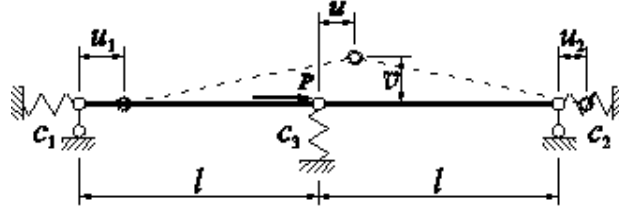


Рис. 4.22

Як узагальнені координати системи візьмемо горизонтальне u і вертикальне v переміщення точки докладання сили P . Дійсно, цими двома параметрами повністю визначається положення в просторі механічної системи, оскільки довжини стрижнів вважаються незмінними. Якщо позначити u_1 і u_2 величини горизонтальних переміщень кінцевих точок першої та другої пружин відповідно (на рис. 4.22 уявний деформований стан системи зображено пунктирною лінією), то з умови недеформованості стрижнів знаходимо

$$u_1 = l + u - l\sqrt{1 - (v/l)^2}, \quad u_2 = -l + u + l\sqrt{1 - (v/l)^2}.$$

Позначимо через N_1 поздовжню силу, що виникає в стрижні 1, а через N_2 – поздовжню силу в стрижні 2. Ці зусилля вважаються обчисленими на досліджуваному рівноважному стані системи. Очевидно, що

$$N_1 = c_1 u_0 = P \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \quad N_2 = c_2 u_0 = P \frac{c_2}{c_1 + c_2}.$$

При цьому зусилля N_1 виходить позитивним у разі розтягування стрижня 1, а зусилля N_2 – позитивним у разі стиснення стрижня 2.

Рівняння рівноваги щодо поздовжнього переміщення u центрального вузла має вигляд

$$(c_1 + c_2)u = P.$$

Для складання другого рівняння рівноваги розглянемо деформований стан системи з урахуванням тих відхилень від досліджуваного стану рівноваги, що можуть виникнути під час втрати стійкості.

Якщо проаналізувати рівновагу кожного з елементів системи, то виявимо (рис. 4.23), що в лівому стрижні розвивається поперечна сила $Q_1 = N_1 v/l$, а в правому стрижні – поперечна сила $Q_2 = N_2 v/l$.

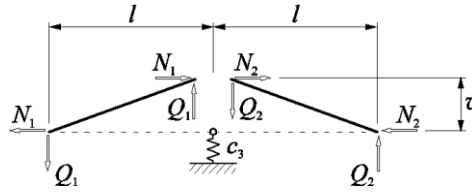


Рис. 4.23

Тому в разі поперечного відхилення центрального вузла на одиничну величину $v=1$ сумарна реактивна сила r_{22} , що діє на цей вузол, складатиметься з двох величин

$$r_{22} = c_3 + \left(\frac{N_1}{l} - \frac{N_2}{l} \right) = c_3 - P \frac{c_2 - c_1}{(c_1 + c_2)l}$$

Таким чином, повна дотична матриця жорсткості має такий вигляд:

$$\mathbf{R}_\lambda = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_3 - \lambda \frac{c_2 - c_1}{l(c_1 + c_2)} \end{bmatrix}$$

або

$$\mathbf{R}_\lambda = \mathbf{R}_0 - \lambda \mathbf{G} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2 - c_1}{l(c_1 + c_2)} \end{bmatrix},$$

причому перший рядок і перший стовпець у цих матрицях відносяться до поздовжнього переміщення u центрального вузла, а другий рядок і другий стовпець – до поперечного переміщення v цього ж вузла.

Структура і склад матриці $\mathbf{R}_0$ цілком зрозумілі. Її компоненти відповідають звичайній лінійній постановці задачі. А матриця $\mathbf{G}$, яку називають геометричною матрицею жорсткості якраз і характеризує завдання перевірки стійкості.



Питання:

У першій бесіді цього циклу було сказано, що перевірку стійкості виконують для того, щоб зрозуміти, як система реагує на мале відхилення від положення рівноваги. Але, можливо, слід задати таке збурення або ж врахувати, що під навантаженням система відхиляється від вихідної конфігурації (отже, отримує збурення) і виконати розрахунок з урахуванням цієї обставини?

Відповідь:

У бесіді 4.2 вже розглядалося це питання, але стосовно системи з одним ступенем свободи. Там було показано, що за деякої інтенсивності параметричного навантаження система отримує нескінченно великі переміщення і, отже, втрачає стійкість.



Але для системи з багатьма (іноді з нескінченно великим числом) ступенів свободи перевірка деякого варіанта збурення є явно недостатньою. Щоб переконатися в стійкості, слід було б перебрати всі можливі варіанти такого збурення. Якщо ж обмежитися лише деякими варіантами, то можна опинитися в ситуації, коли ми впевнені, що під час розглянутих збурень система перебуває всередині області стійкості, але невідома відстань до її границі, і можливо, що під час інших збурень, яких ми не розглядали, ця відстань занадто мала або ж взагалі ми вийдемо з області стійкості.

Ось як справи з тією перевіркою, про яку Ви говорите (її називають *розрахунком за деформованою схемою*, а в зарубіжних джерелах – «*P-Δ аналізом*»). Він може виявитися корисним, але, взагалі кажучи, не може замінити перевірку на стійкість.

Бесіда 4.6. Багатопараметричне навантаження. Теорема Папковича



Випадок, коли конструкція піддається тільки одному фіксованому виду зовнішніх впливів, є радше винятком, ніж правилом. Практично завжди інженер має справу із сукупністю незалежних навантажень, причому ці навантаження можуть діяти в найрізноманітніших комбінаціях.

У зв'язку з цим виникає проблема вибору найгіршої комбінації зовнішніх впливів, як у сенсі міцності конструкції, так і щодо запасу стійкості в тих рівноважних станах, які відповідають різним комбінаціям зовнішніх впливів.

Ми почнемо наш розгляд з простого прикладу. Уявімо собі, що на пружну систему, зображену на рис. 4.24, можуть діяти дві незалежні сили P_1 і P_2 , причому самі ці сили можуть змінюватися в широких межах за своєю величиною і можуть діяти в прямому та зворотному напрямках. Три стрижні в цій системі вважаються абсолютно жорсткими. Якщо ми зафіксуємо відношення між силами P_1/P_2 , то, дотримуючись стандартної процедури, зможемо знайти рівноважний стан системи і визначити межі області стійкості цього рівноважного стану.

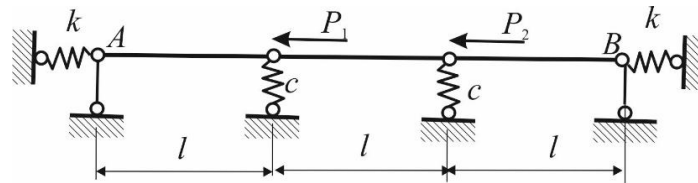


Рис. 4.24

Складемо рівняння рівноваги для того деформованого стану системи, який вважається реалізованим у момент втрати стійкості рівноваги. На рис. 4.25 показано можливу форму втрати стійкості системи.

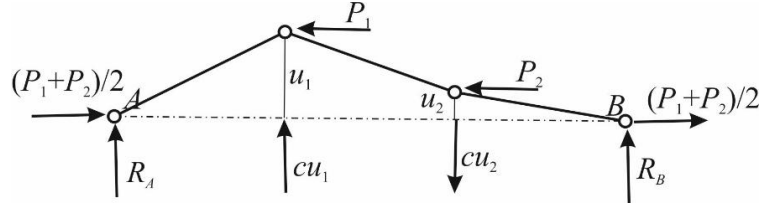


Рис. 4.25

У лінійній постановці задачі стійкості рівноважного стану, що нас цікавить, реакції, що виникають у горизонтальних пружинах жорсткістю c , будуть однаковими і дорівнюють $(P_1 + P_2)/2$, як це показано на рис. 4.25.

Реакції R_A і R_B вертикально нерухомих опор легко визначаються складанням рівнянь рівноваги в моментах відносно точок A і B . Маємо

$$R_A = \frac{1}{3} \left(2c + \frac{P_1}{l} \right) u_1 + \frac{1}{3} \left(c + \frac{P_2}{l} \right) u_2, \quad R_B = \frac{1}{3} \left(c - \frac{P_1}{l} \right) u_1 + \frac{1}{3} \left(2c - \frac{P_2}{l} \right) u_2.$$

Скористаємося тепер умовою рівності нулю моментів у шарнірних вузлах. Це дає

$$R_A l - \frac{P_1 + P_2}{2} u_1 = 0, \quad R_B l + \frac{P_1 + P_2}{2} u_2 = 0.$$

Підставивши сюди отримані вище вирази для реакцій R_A і R_B , доходимо до системи двох лінійних однорідних рівнянь відносно u_1 і u_2

$$\begin{aligned} (4cl - P_1 - 3P_2)u_1 + (2cl + 2P_2)u_2 &= 0, \\ (2cl - 2P_1)u_1 + (4cl + 3P_1 + P_2)u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Прирівнявши визначник цієї системи рівнянь до нуля, отримаємо, що в критичному стані системи виконується рівність

$$4c^2 l^2 + 4cl(P_1 - P_2) - (P_1 + P_2)^2 = 0. \quad (4.45)$$

Зручно перейти до безрозмірних силових змінних p_1 і p_2 , поклавши

$$p_1 = P_1 / (cl), \quad p_2 = P_2 / (cl).$$

У безрозмірних силових параметрах рівняння (4.45) перепишеться у вигляді

$$4 + 4(p_1 - p_2) - (p_1 + p_2)^2 = 0. \quad (4.46)$$

На площині параметрів p_1 і p_2 це рівняння визначає деяку криву, як це показано на рис. 4.26.

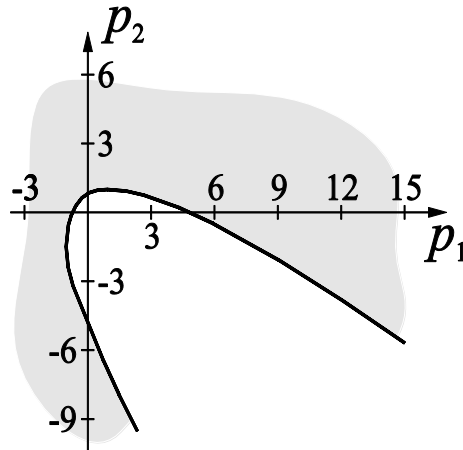


Рис. 4.26

Зрозуміло, що двовимірна область обмежена цією кривою, є областю стійкості рівноваги системи. Поза межами цієї області рівновага нестійка. На рис. 4.26 показано область стійкості Ω (не затемнену), границя якої задовольняє рівняння (4.46). Як бачимо, точка $(p_1=0, p_2=0)$ належить області стійкості Ω , що й зрозуміло, оскільки ця точка відповідає незавантаженій системі. Однак найголовніше полягає в тому, що область Ω є опуклою областю.

До речі, звернемо увагу, що критичні навантаження в цій задачі не залежать від жорсткості горизонтальних пружин k^{13} .

Властивість опуклості області Ω не випадково виявилася в цій задачі. Виявляється, що справедливою є така найважливіша теорема, що належить П.Ф. Папковичу

При комбінованому навантаженні пружної механічної системи область стійкості рівноваги Ω , побудована в просторі навантажень у рамках лінеаризованої постановки задачі стійкості рівноваги, є опуклою областю, що містить початок системи координат..

Найважливіше прикладне значення теореми Папковича полягає в можливості на основі її висновків виконувати розрахунки стійкості рівноважних станів конструкції не для всіх можливих комбінацій навантажень, а тільки лише для окремих фіксованих варіантів навантажень. Потім, з гаран-

¹³ Тут важливо лише, що обидві горизонтальні пружини (на лівому і на правому кінці системи) мають однакову жорсткість. За інших співвідношень жорсткостей цих пружин критичні сили будуть іншими.

тованим знаком похибки можна оцінювати область стійкості, замінюючи її справжню межу сукупністю гіперплощин. Зупинимось на цьому докладніше.

Класична теорія стійкості рівноваги, яку викладають у більшості курсів будівельної механіки та зазвичай використовують під час розрахунку будівельних конструкцій, припускає (на жаль, найчастіше мовчки), що всі внутрішні сили зростають пропорційно одному параметру, а співвідношення між ними водночас залишається незмінним. Така схема поведінки внутрішніх сил характерна далеко не для всіх систем, для багатьох із них (особливо нелінійних) необхідно зважати на те, що співвідношення між внутрішніми силами в системі змінюються зі зростанням інтенсивності навантаження. Тому, якщо відшукується критична, в сенсі стійкості, інтенсивність навантаження і саме з нею пов'язують поняття про коефіцієнт запасу за стійкістю, то розрахунок необхідно виконати, імітуючи зростання навантаження, а не зростання внутрішніх сил.

Але навіть для лінійних систем отриманий класичним способом коефіцієнт запасу стійкості може не мати чіткого фізичного сенсу. Дійсно, уявімо собі конструкцію з елементами, сильно стиснутими завдяки постійному навантаженню G_0 від власної ваги і на додачу навантаженими тимчасовим навантаженням P_0 (рис. 4.27).

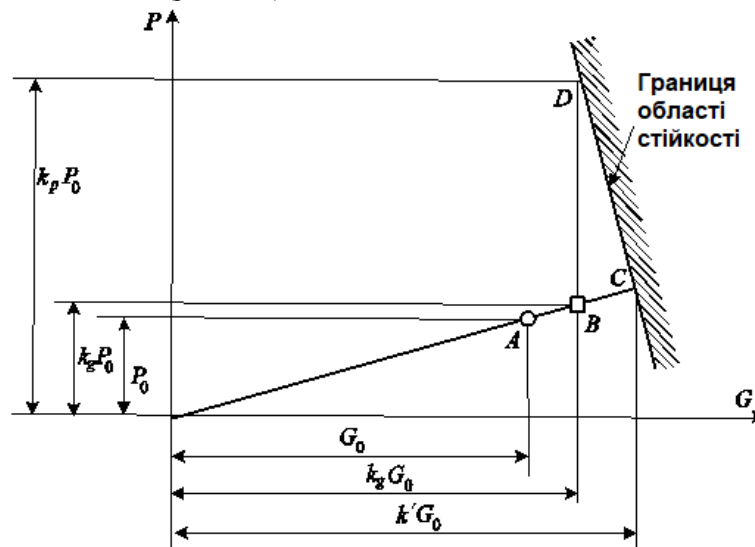


Рис. 4.27

Коефіцієнт запасу $k'=1,25$ для сумарного навантаження відповідає явно нереальному зростанню власної ваги на 25%. Якщо ж виокремити можливе зростання власної ваги, наприклад, на 10% (тобто покласти $k_g=1,1$), то для досягнення критичного стану тимчасове навантаження повинно зрости набагато більше. Природно, що за такого міркування, графічна ілюстрація якого

представлена на рис. 4.27, досить скромний коефіцієнт запасу 1,25 постає зовсім в іншому світлі ($k_p > 1,25$).

Результат, зрозуміло, буде сильно залежати від вигляду межі області стійкості, і за іншої її конфігурації всі коефіцієнти запасу можуть виявитися такими, що значення $k_p P_0$ буде істотно меншим. Але важливо відзначити сам факт недостатньої точності аналізу системи зі звичним трактуванням коефіцієнта запасу за стійкістю.

Для відповідальних випадків слід було б обчислювати значення критичного параметра навантаження за кожним варіантом навантаження окремо. Якщо такі результати отримано і визначено критичні навантаження $P_{i,cr}(i = 1, \dots, m)$ за кожним із m навантажень, то для лінійної системи далі можна скористатися теоремою Папковича про опуклість області стійкості.

З цієї теореми, зокрема, випливає, що площина

$$\sum_{i=1}^m \frac{P_i}{P_{i,cr}} = 1 \quad (4.47)$$

розміщена не далі від початку координат, ніж справжня межа області стійкості, що для двовимірного випадку проілюстровано на рис. 4.28.

Пряма (4.47) на рисунку позначена як АВ, і вона замінює справжню межу області стійкості з великим запасом. Рішення можна уточнити, відшукавши критичне значення системи для деякої комбінації навантажень (точка С на промені ОС) і наблизивши криву АВ ламаною АСВ.

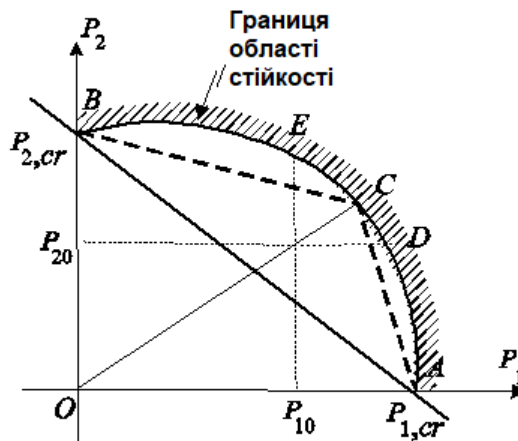


Рис. 4.28



Питання:

У нормах проєктування пропонується перевіряти стійкість кожного стрижня, але практично нічого не говориться про перевірку стійкості системи в цілому. Чи означає це, що система, в якій усі елементи стійкі, сама є стійкою?

Відповідь:

Ні, це не так. Для підтвердження звернемося до прикладу найпростішої конструкції з двох шарнірно з'єднаних стрижнів, яка показана на рис. 4.29 (висока ферма Мізеса). На відміну від пологої ферми Мізеса, втрата стійкості якої проявляється у формі «проклацування» центрального вузла, у нашому випадку формою втрати стійкості системи є бічний зсув (рис. 4.29,а), і критичним є навантаження $P=24235$ тонн.

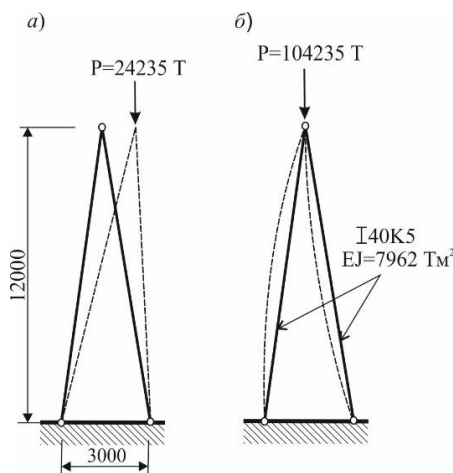


Рис. 4.29

Місцеве випучування стрижнів (рис. 4.29,б) відбувається за набагато більшого навантаження $P=104235$ тонн і є менш небезпечним, а за навантаження $P=24235$ тонн обидва стрижні системи є стійкими.

Бесіда 4.7. Розрахункові довжини



Створення норм розрахунку стрижнів на стійкість завжди базувалося на експериментах, де найчастіше випробуванню піддавалися стрижні, шарнірно оперті по кінцях. Поширення результатів на складніші прикріплення стрижнів здійснювалося за теорією так званого «еквівалентного» стрижня та його розрахункової довжини.

Поняття розрахункової (вільної, еквівалентної) довжини було введено Ф.С. Ясинським з метою узагальнення формули Ейлера на випадок центрального стиснення лінійно пружного плоского стрижня з довільними закріпленнями кінців. Наслідуючи Ф.С. Ясинського, під розрахунковою довжиною стрижня зазвичай розуміють умовну довжину однопрогонного стрижня, критична сила якого в разі шарнірного закріплення його кінців така сама, як для заданого стрижня. Цей підхід був широко прийнятий і увійшов у норми проектування майже всіх країн.

На жаль, слід визнати, що у такого підходу до вирішення проблеми стійкості стрижневих конструкцій немає ясного теоретичного обґрунтування. По суті одна проблема, яку важко розв'язувати (перевірка стійкості довільного стрижня) була замінена іншою не менш складною – визначенням еквівалентних (розрахункових) довжин стрижнів.

Згідно з усталеною традицією і визначенням Ф.С. Ясинського, для встановлення розрахункової довжини необхідно застосовувати метод розрахунку на стійкість систем із прямими стрижнями під час прикладання навантажень у вузлах і в припущенні пружних деформацій. При цьому слід враховувати поздовжні зусилля в стрижнях і, як правило, виключати з розгляду поперечні навантаження та ексцентриситети, які спричиняють вигин стрижнів.

Під час проектування розрахункову довжину стрижня l_0 зазвичай визначають за формулою

$$l_0 = \mu l, \quad (4.48)$$

де μ – коефіцієнт розрахункової довжини, що залежить від умов закріплення кінців стрижня та виду навантаження; l – геометрична довжина стрижня, що розглядається.

Якщо звернутися до результатів дослідження стійкості однопрогонних стрижнів за різних кінцевих умов і підібрати довжини стрижнів l кожного з цих стрижнів так, щоб критична сила в них виявилася однаковою, то можна помітити, що форми втрати стійкості таких стрижнів є різними ділянками дуги однієї і тієї ж синусоїди

$$y = \sin \frac{\pi x}{l_0}. \quad (4,49)$$

На рис. 4.30 цей факт проілюстровано графічно, тут слід зауважити, що розрахункова довжина l_0 дорівнює відстані між суміжними точками перегину, тобто півхвилі синусоїди (4.49).

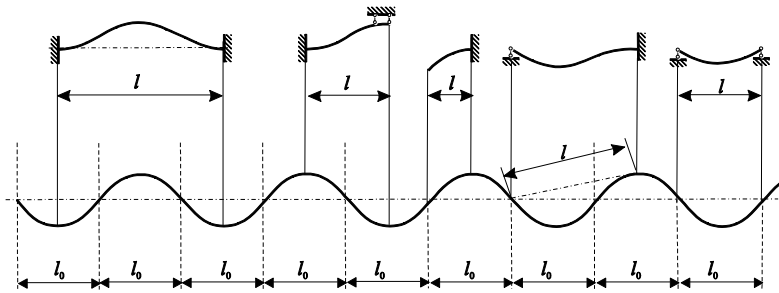


Рис. 4.30

Але все сказане вище, по суті, стосувалося розгляду плоских розрахункових моделей і, відповідно, плоских схем деформування. Тільки для них має сенс розгляд відстані між точками перегину зігнутої осі, що приймається як розрахункова довжина.

У просторових схемах форма втрати стійкості може виявитися такою, що вигнута вісь стрижня, навіть залишаючись плоскою кривою, не належить одній з головних площин інерції. Тоді одразу ж виникають питання: в якій площині розрахункова довжина дорівнює відстані між точками перегину.

Оскільки навіть для плоских стрижневих систем розрахункову довжину стиснутих стрижнів слід визначати як у площині, так і з площини системи, то й тут виникає розбіжність із визначенням Ф.С. Ясинського. Дійсно, уявімо собі просторовий шарнірно опертий в обох головних площинах стрижень, у якого поперечний переріз має моменти інерції I_x і $I_y = 4I_x$. У разі центрального стиснення такий стрижень втрачає стійкість при навантаженні

$$P_{cr,x} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} \quad (l_{0,x} = l). \quad (4,50)$$

Якщо тепер формально знайти розрахункову довжину $l_{0,y}$ таку, щоб втрата стійкості і в цій площині відбувалася б за того самого значення навантаження, то з рівності

$$\frac{\pi^2 E (4I_x)}{l_{0,y}^2} = P_{cr,x} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} \quad (4,51)$$

буде впливати, що $l_{0,y} = 2l$, хоча, виходячи з умов шарнірного обпирання кінців, має бути $l_{0,y} = l$.

Норми вимагають, щоб стійкість стрижня була перевірена незалежно у двох його головних площинах. Але до такої рекомендації можна дійти тільки в тому разі, коли розрахунок стійкості в кожній із площин виконують незалежно, вважаючи, що деформація з площини, що розглядається, неможлива. Для цього практикуючі інженери повинні діяти в такий спосіб: виконати два розрахунки на стійкість, у яких поперемінно забороняється деформування то в одній, то в іншій головній площині інерції (наприклад, вважаючи то $I_x = \infty$, то $I_y = \infty$), і з них визначають коефіцієнти розрахункової довжини μ_x і μ_y .

Інші проблеми виникають у тих випадках, коли в просторовій системі головні осі інерції елементів не паралельні одна одній і форма втрати стійкості, як і розрахункові довжини, виявляється залежною від орієнтації цих осей у системі.

Повчальним є приклад за рис. 4.31, де розглянуто чотиристійкову просторову раму, у якій вершини стійок пов'язані недеформованими стрижнями, що шарнірно примикають до стійок.

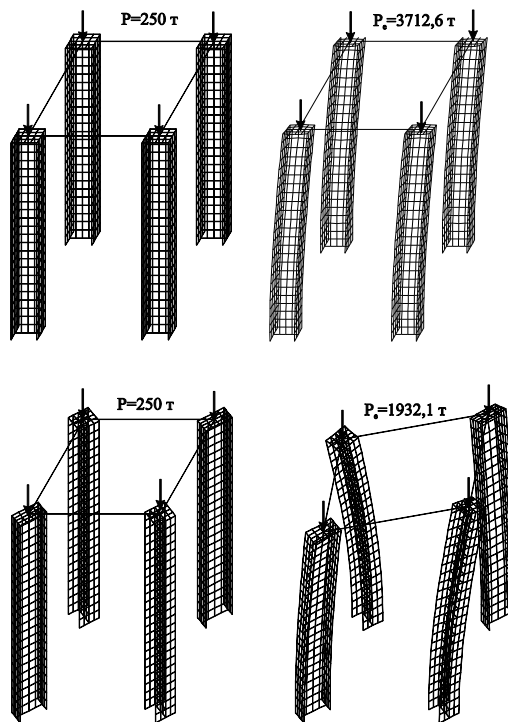


Рис. 4.31

У першому варіанті затиснуті в основі двотаврові стійки заввишки по 6 метрів (стінка 800×30 , полиці 600×30) орієнтовані таким чином, що їхні стінки паралельні, а в другому прикладі вони розгорнуті на 45° і утворюють циклічно симетричну систему. Стискальні сили по 250 т прикладені до вершини кожної стійки.

У першому випадку коефіцієнт запасу стійкості виявився 14,851, і він відповідає синхронній вигнутій формі випучування. Форма втрати стійкості в другому випадку така, що стійки, крім вигину, відчують і закручування, що призводить до коефіцієнта запасу 8,728.

Не змінювалася схема кінцевого закріплення стрижня, не змінювався його переріз і прикладена сила, а ось критична сила системи P_e (отже, і вільні довжини) змінилися практично вдвічі. Виходить, що достовірно можна передбачити розрахункову довжину тільки для окремого (не включеного до просторової конструкції) стрижня, але говорити про втрату стійкості окремого стрижня, що належить до якоїсь конструкції, у загальному випадку взагалі безглуздо, оскільки конструкція втрачає стійкість цілком.

Нарешті, можна згадати ще одну проблему, яка не виникає під час розгляду плоских розрахункових схем: ідеться про те, що навіть у разі шарнірного обпирання кінців самі шарніри можуть бути орієнтовані не за напрямком головних осей інерції поперечного перерізу. Наприклад, якщо циліндричні шарніри повернені відносно головних осей інерції на кут φ (рис. 4.32,а). Критичне навантаження при цьому змінюється в досить широких межах, які залежать від співвідношення головних моментів інерції і значення кута φ . Відповідні результати графічно представлені на рис. 4.32,б [6].

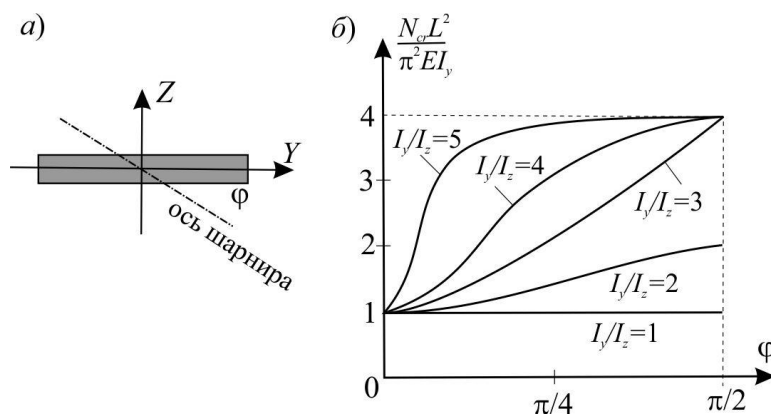


Рис. 4.32.

Використання розрахункових довжин має таку популярність вочевидь тому, що дає змогу вельми ретельно дослідити поведінку лише одного стандартного об'єкта – шарнірно обпертого стрижня. Для нього оцінюється вплив неточностей виготовлення і монтажу, роль непружної роботи тощо, і всі

результати такого дослідження формують розрахункові графіки і таблиці, орієнтовані на практичне використання проектувальником. Таким чином, через розрахункову довжину перекидається місток між загальним розрахунком системи на стійкість і нормативними перевірками. Але з наведених прикладів видно, що цей місток у деяких відношеннях виявляється занадто вузьким.

Зауважимо ще, що розрахункова довжина стрижнів однієї й тієї самої системи різна в разі різних сполучень навантажень, хоча в проектній практиці зазвичай використовують спрощений підхід (його дозволено, наприклад, п. 6.11* СНиП II-23-81*), згідно з яким допускається визначати розрахункові довжини лише для комбінації навантажень, яка дає найбільші значення поздовжніх сил і одержувані значення використовувати для інших комбінацій навантажень. При цьому неявно передбачається, що є така комбінація, в якій максимальні значення набувають зусилля стиснення у всіх елементах. Але неважко уявити собі приклад конструкції, де це припущення не виконується і, отже, проблему вибору поєднання навантажень для перевірки стійкості системи не можна вважати вирішеною.

Водночас слід визнати, що багато завдань отримують цілком задовільне розв'язання за методом розрахункових довжин, і його загальну присутність у нормах проектування несівних конструкцій не запламовано скільки-небудь частими відмовами конструкцій, побудованих за такими нормами. Це свідчить про те, що можна сподіватися на вдосконалення цього прийому, для чого важливо зрозуміти його переваги і недоліки.

Література

1. **Alfutov N.A.** Stability of Elastic Structures — Berlin-Heidelberg: Springer, 2000.
2. **Vol'mir A.S.** *Stability of elastic systems.* — **National Technical Information Service, 1966**
3. **Корнюхов Н.В.** Избранные труды по строительной механике. — Киев: АН УССР, 1963.
4. **Panovko Ya.G., Gubanova I.I.** Stability and Oscillations of Elastic Systems: Paradoxes Fallacies and New Concepts — Springer US, 1965.
5. **Панкович П.Ф.** Труды по строительной механике корабля. Т.4 Устойчивость стержней, перекрытий и пластин — Л.: Судостроение, 1963.
6. **Perelmuter A.V., Slivker V.I.** Handbook of Mechanical Stability in Engineering. Vol.1. General theorems. individual members of mechanical systems .— New Jersey-London-Shanghai-Beijing-Singapore-Hong Kong-New Delhi: World Santific Publ., 2013
7. **Feodosiev V.I.** Advanced Stress and Stability Analysis Worked Examples — Berlin-Heidelberg: Springer, 2005.
8. **Koiter W.T.** Over de stabiliteits van het elastisch evetwicht. PhD Thesis. Delft University of Technology, Amsterdam - Paris — 1945

Цикл 5

Основи динамічного аналізу



Бесіда 5.1. Статичний і динамічний розрахунок конструкцій



Система інженерної освіти побудована таким чином, що завданням динаміки приділяється незаслужено мало уваги. Завдяки численним вправам у студентів виробляється певна інтуїція з проблем статичного аналізу конструкцій, але «динамічне чуття» залишається зовсім не розвиненим.

Більш того, практично відсутнє вміння описувати динамічні впливи і вирішувати питання про критерії, коли слід звернутися до динамічного розрахунку (можливо, за винятком кількох випадків, безпосередньо зазначених у нормах проєктування).

У статичних розрахунках, які розглядалися в попередніх розділах, ігнорувалася чинник часу, тобто всі параметри від часу не залежали. Ті розрахунки, в яких чинник часу присутній, здавалося б, слід вважати динамічними. Однак на практиці виокремлюють досить велику групу завдань, у яких, з одного боку, вплив і/або властивості системи змінюються з часом, але, з іншого боку, це відбувається настільки повільно, що реакцію системи в кожен момент часу можна одержати статичним розрахунком, використовуючи параметри впливу та системи, які відносяться до цього моменту часу. Такий розрахунок називається *квазістатичним*; ще кажуть, що зміни впливу, параметрів системи та реакції відбуваються в *повільному часі*.

Якщо ж завдання таке, що розгляд його в повільному часі є неприйнятним, то говорять про зміни в *швидкому часі*. У розрахунках при цьому з'являються додаткові сили, що залежать від похідних за часом. Це перші похідні (швидкості), з якими зазвичай пов'язані опори руху, і другі похідні (прискорення), з якими пов'язані сили інерції.

Слід зауважити, що межа між «повільним» і «швидким» часом доволі умовна і, крім того, індивідуальна для кожної системи. Одна й та сама швидкість зміни впливу для однієї системи може дати змогу проводити розрахунки «в повільному часі», а для іншої системи змусить вести розрахунки «в швидкому часі».

Найчастіше необхідність виконання розрахунків у «швидкому часі» пов'язують із відносними значеннями інерційних членів рівнянь руху – якщо добуток мас на прискорення досягає значущих часток від сил, породжених жорсткістю, то в цьому разі необхідні розрахунки у швидкому часі. Це міркування цілком справедливе, але слід мати на увазі ще одну можливість: відносно великими можуть бути не тільки інерційні сили, пов'язані з прискореннями, а й сили, пов'язані зі швидкостями.

У літературі найчастіше квазістатичні розрахунки розглядають як окремий клас задач, а під динамічними розрахунками розуміють розрахунки у швидкому часі. При цьому на відміну від статичних задач, які найчастіше

розв'язуються за допомогою звичайних алгебраїчних або трансцендентних рівнянь, тут потрібне вже розв'язання диференціальних рівнянь із похідними за часом.

Важливою характеристикою системи є число її *динамічних ступенів свободи*. Воно дорівнює числу незалежних параметрів, що визначають положення всіх мас за будь-яких можливих переміщень системи в будь-який момент часу. У тих випадках, коли маси зосереджені в певних точках системи, говорять про системи зі скінченним числом ступенів свободи (дискретні системи). Якщо ж маси розподілені вздовж елементів системи, то така система має нескінченно велике число ступенів свободи і називається системою з розподіленими параметрами.

Неважко помітити, що в разі дискретної системи число динамічних ступенів свободи може не дорівнювати числу статичних ступенів свободи. Наприклад, для системи, представленої на рис. 5.1, унаслідок подовження, вигину й закручування стрижня, розташована на кінці маса може одержати зміщення $\Delta_x \Delta_y$ і Δ_z у напрямку координатних осей, а також повороти φ_x , φ_y і φ_z навколо цих осей, тобто система має шість динамічних ступенів свободи (число статичних ступенів свободи, якими визначається конфігурація стрижня, нескінченне).

Однак під час розв'язання деяких задач можливі спрощення. Так, наприклад, можна знехтувати подовженням стрижня Δ_x порівняно з переміщеннями Δ_y і Δ_z , крім того, часто нехтують кутами повороту маси, і тоді залишається система з двома динамічними ступенями свободи.

Звідси видно, що кількість динамічних ступенів свободи залежить не тільки від геометрії системи та її мас, а й від того, з якою точністю потрібно розв'язати задачу.

Системи з розподіленими параметрами, рух яких описується диференціальними рівняннями в часткових похідних, зазвичай дискретизуються тим чи іншим способом. Найпростішим прийомом є зосередження точкових мас в окремих точках споруди або введення жорстких тіл, які мають, окрім маси, ще й момент інерції цих мас. Інший спосіб дискретизації полягає у використанні узагальнених переміщень, що описуються деякими функціями, подібно до того, як це робиться в методі скінченних елементів.

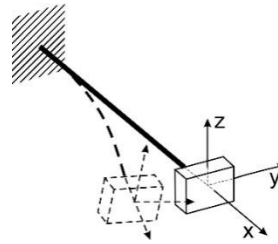


Рис. 5.1

Бесіда 5.2. Коливання системи з одним ступенем свободи



У курсах механіки вказано основні типи сил, які можуть діяти на матеріальну точку; сили, що залежать від часу; сили, що залежать від положення точки; сили, що залежать від швидкості точки. Здебільшого до цих типів зводяться і ті узагальнені сили, які діють під час коливань механічних систем. Розглянемо їх докладніше, обмежуючись тут системами з одним ступенем свободи.

Узагальнені примусові сили – *зовнішні сили* типу $P(t)$, що є заданими функціями часу; такі сили спричиняють вимушені коливання. Джерела виникнення вимушених сил дуже різноманітні, дуже різні й закони їхньої зміни в часі, хоча за практиці найчастіше трапляються періодичні вимушені сили.

У деяких випадках збудження коливань задається кінематично, коли будь-яким точкам системи «наказаний» деякий певний рух. Зокрема, кінематичним є сейсмічний рух основи споруди або збудження коливань транспортно-го засобу під час руху нерівним шляхом. Як буде показано нижче, будь-яке кінематичне збудження може бути представлено у вигляді деякого еквівалентного силового збудження, тобто замінено дією відповідних сил.

Узагальнені *позиційні сили* – сили, що залежать від конфігурації системи, тобто від узагальнених координат. Серед позиційних сил особливе значення мають відновлювальні сили, які виникають у разі відхилень системи від положення рівноваги і спрямовані так, щоб повернути систему в це положення. Саме відновлювальні сили зумовлюють здатність здійснювати вільні коливання.

У механічних системах із пружними елементами відновлювальні сили виникають унаслідок деформування цих елементів під час коливань (пружні сили). В інших випадках роль відновлювальної сили може відігравати сила тяжіння (маятник) або архімедова сила (корабель).

Залежності відновлювальних сил від узагальнених координат зазвичай нелінійні; однак під час дослідження малих коливань (що в багатьох випадках достатньо) найчастіше допустима лінеаризація таких залежностей.

Узагальнені сили тертя залежать від узагальнених швидкостей (принаймні від їхнього знака) і спрямовані протилежно руху. Сили тертя виникають у зчленуваннях і опорах механічної системи (*конструкційне тертя*), а також у матеріалі її елементів (*внутрішнє тертя матеріалу*). До цієї ж категорії належать і сили опору середовища (рідина, газу), у якому відбуваються коливання; такі та їм подібні сили нижче умовно також називаються силами тертя. Найчастіше сили тертя перешкоджають розвитку коливань, наприклад, спричиняють загасання вільних коливань; механічні системи, в яких діють такі сили, називаються дисипативними.

Під час складання розрахункової моделі велике значення має розумне нехтування несуттєвими складовими сил, а для складових, які враховуються в аналізі, – правильна схематизація їхніх властивостей. Так, під час визначення власних частот механічних систем здебільшого припустимо нехтувати дією сил тертя; ними можна нехтувати, але подібні спрощення потрібно робити обережно, маючи на увазі, що здавалося б малі впливи іноді можуть стати причиною важливих наслідків принципового характеру. Так, навіть дуже малі сили тертя необхідно враховувати під час аналізу загасання вільних коливань, а також під час визначення резонансних або наводорезонансних амплітуд вимушених коливань.

Відмінною особливістю задач динаміки є врахування сил інерції I , які чинять інерційний опір зміні швидкості. Ці сили, відповідно до другого закону Ньютона, визначаються як добуток маси на прискорення. Тут завжди потрібно пам'ятати, що інерційна характеристика, яку ми називаємо масою, не є вагою тіла. Вага G – це сила, з якою тіло тисне на опору, що підтримує його, сила ваги визначається за формулою $G = mg$ (m – маса, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння) і, якщо тіло важить 10 кГ (кілограм-сил), то його маса дорівнює 1,0191 кГ (кілограм-маса) або 1,019 кГс/м.

Якщо ж тіло здійснює поворот, характеристиками якого є кутова швидкість $\dot{\varphi}$ (рад/с) і кутове прискорення $\ddot{\varphi}$ (рад/с²), то мірою його інерції є не маса, а момент інерції маси J_{ω} (кГ м²=Кг м·с²). Інерційний опір повороту реалізується у вигляді моменту $M = J_{\omega}\ddot{\varphi}$.

У тих випадках, коли деформація системи визначається переміщенням однієї точки, в якій зосереджено всю масу конструкції, система має один динамічний ступінь свободи. Для простоти викладу ми вважатимемо, що пружний опір R моделюється пружиною, а в'язкий опір руху Q – певним демпфуючим пристроєм (рис. 5.2, а).

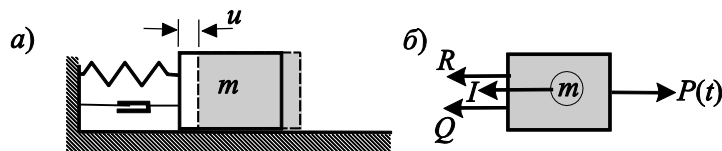


Рис. 5.2

Рівняння руху можна скласти на основі принципу Д'Аламбера, згідно з яким, якщо до заданих (активних) сил, що діють на точки механічної системи, приєднати сили інерції, то вийде врівноважена система сил. Принцип Д'Аламбера дає змогу застосувати до розв'язання задач динаміки простіші методи статички, тому ним широко користуються в інженерній практиці, у формі методу кінетостатики.

Враховуємо, що на масу чинять вплив (рис. 5.2, б):

- збурювальна сила $P(t)$;
- сила інерції $I(t) = m\ddot{u}(t)$;
- сила пружного опору $R(t) = ku(t)$, де k – жорсткість пружини;
- сила непружного опору, яку вважатимемо пропорційною швидкості (модель Фойгта) $Q(t) = c\dot{u}(t)$, де c – постійна загасання.

Відповідно до принципу Д'Аламбера ці сили в будь-який момент часу перебувають у динамічній рівновазі:

$$I(t) + Q(t) + R(t) = P_i(t),$$

що приводить нас до диференціального рівняння руху системи з одним ступенем свободи

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t). \quad (5.1)$$

Отримані вище рівняння записано для випадку, коли збурювальна сила прикладена безпосередньо до маси. Покажемо, як зміняться рівняння руху, якщо ця умова не виконується (рис. 5.3). Використовуємо тут інше позначення жорсткості $r_{11} = k$. Тоді рівняння рівноваги маси під дією всіх, прикладених до системи сил, матиме вигляд

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + r_{11}u = r_{11}\Delta(t),$$

а переміщення точки розташування маси

$$u = -\delta_{11}m\ddot{u} - \delta_{11}c\dot{u} + \Delta(t),$$

де $\Delta(t)$ – змінне в часі переміщення маси від статично прикладеного навантаження;

$\delta_{11} = \frac{1}{r_{11}} = \frac{1}{k}$ – податливість системи в місці розташування маси.

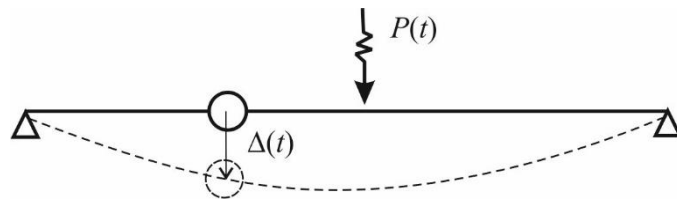


Рис. 5.3

Таким чином, задача про коливання системи з одним ступенем свободи зводиться до звичайного диференціального рівняння другого порядку. Нагадаємо, що рівняння називається звичайним, якщо шукана функція залежить від однієї змінної, а найвищий порядок похідної, що входить до диференціального рівняння, називається порядком цього рівняння.

Вільні коливання

З курсу математики відомо, що повний розв'язок диференціального рівняння є сумою двох розв'язків: розв'язку однорідного рівняння, в якого права частина дорівнює нулю (загальний розв'язок), та якого-небудь розв'язку неоднорідного рівняння (частковий розв'язок). Стосовно до рівняння (5.1), однорідне рівняння

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

приводять до вигляду

$$\ddot{u} + (c/m)\dot{u} + \omega^2 u = 0, \quad (5.2)$$

де введено позначення $k/m = \omega^2$.

Рівняння (5.2), у якому відсутня збурювальна сила $P(t)$, описує поведінку системи, що в початковий момент часу виведена зі стану рівноваги й потім залишена сама собі. Кажуть, що така система здійснює *вільні коливання*¹⁴.

Параметр ω є постійною величиною, що залежить винятково від пружних та інерційних властивостей системи і не залежить від умов збудження коливань, а тому називається *власною частотою* системи $\omega = \sqrt{k/m}$. Власна частота являє собою число вільних коливань за 2π одиниць часу. *Період* вільних коливань, тобто тривалість одного повного циклу коливань, визначається формулою $T = 2\pi / \omega$.

Розв'язок рівняння (5.2) шукають у формі $u = Ge^{st}$, що після підстановки в (5.2) дає

$$\left[s^2 + (c/m)s + \omega^2 \right] Ge^{st} = 0.$$

Оскільки Ge^{st} не дорівнює тотожно нулю, то після скорочення ми отримуємо квадратне рівняння, розв'язок якого має вигляд

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}. \quad (5.3)$$

Характер рішення залежить від співвідношення величин $\alpha = c / (2m)$ і частоту ω .

¹⁴ Вивчення вільних коливань представляє певний інтерес у зв'язку з практичними завданнями про рух механічної системи після будь-якого збурення її стану рівноваги. Однак не тільки цим визначається важливість дослідження вільних коливань. Як буде зрозуміло з подальшого, характеристики вільних коливань повністю визначають індивідуальні динамічні властивості механічної системи і мають першорядне значення також під час аналізу її вимушених коливань.

За відсутності тертя, коли $c=0$ і, отже, $\alpha=0$ розв'язок рівняння (5.2) набуває вигляду:

$$u(t) = u_0 \cdot \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \cdot \sin \omega t. \quad (5.4)$$

Таким чином, вільні коливання консервативної системи з одним ступенем свободи є гармонійними (рис. 5.4) і реалізуються з власною частотою системи.

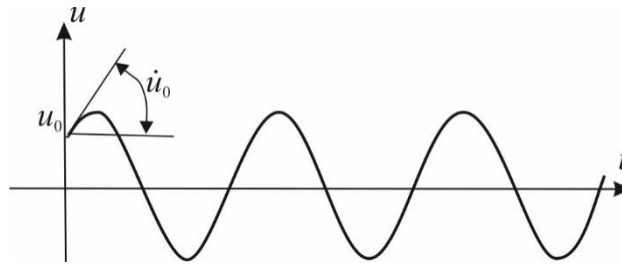


Рис. 5.4

У загальному випадку за малого демпфірування, коли $\alpha^2 < \omega^2$, розв'язок (5.3) дає пару комплексно спряжених коренів $s_{1,2} = \alpha \mp i\omega$ і загальний розв'язок однорідного рівняння

$$u = C_1 e^{(\alpha+i\omega)t} + C_2 e^{(\alpha-i\omega)t}.$$

Перехід від показникової функції уявного аргументу до тригонометричної форми запису дає остаточний вираз для загального розв'язку

$$u = e^{\alpha t} (A \cos \tilde{\omega} t + B \sin \tilde{\omega} t).$$

Тут A, B – довільні постійні, що визначаються початковими умовами, тобто переміщенням $u_0 = u(0)$ і швидкістю $\dot{u}_0 = \dot{u}(0)$ у початковий момент часу, а через $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ позначено кутову (кругову) частоту системи з в'язким тертям. Часто використовується величина $n = \tilde{\omega}/(2\pi)$ – технічна частота і $T = 1/n$ – період.

Знайдемо постійні інтегрування з початкових умов. Нехай у початковий момент часу маса мала координату u_0 і швидкість $\dot{u}_0$.

Тоді маємо $u_0 = A$, та

$$\dot{u}_0 = -\alpha e^{-\alpha t} (A \cos \tilde{\omega} t + B \sin \tilde{\omega} t) + \tilde{\omega} e^{-\alpha t} (-A \sin \tilde{\omega} t + B \cos \tilde{\omega} t) = -\alpha A + \tilde{\omega} B.$$

Звідси $B = (\dot{u}_0 + \alpha u_0) / \tilde{\omega}$, і

$$u(t) = e^{-\alpha t} \left(u_0 \cos \tilde{\omega} t + \frac{\dot{u}_0 + \alpha u_0}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} t \right). \quad (5.5)$$

Характер поведінки $u(t)$ показано на рис. 5.5.

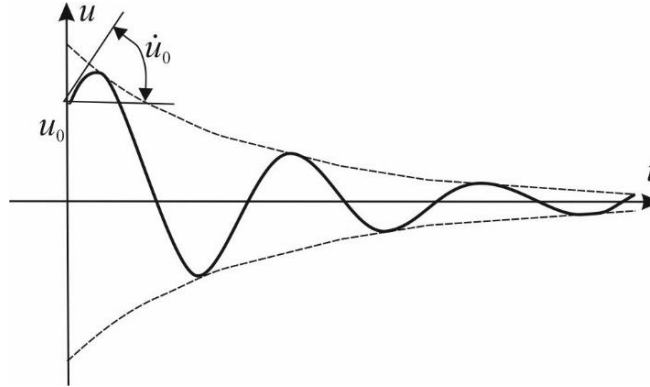


Рис 5.5

Зауважимо, що відношення двох послідовних максимальних відхилень залишається постійним:

$$\frac{u(t)}{u(t+T)} = \frac{Ae^{-\alpha t}}{Ae^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T}.$$

Отже, зменшення максимальних відхилень відбувається в геометричній прогресії. Натуральний логарифм відношення двох послідовних максимальних відхилень називається *логарифмічним декрементом* загасання

$$\delta = \ln \frac{A \cdot e^{-\alpha t}}{A \cdot e^{-\alpha(t+T)}} = \alpha T. \quad (5.6)$$

Безрозмірна величина δ характеризує швидкість загасання. Наведемо деякі значення:

- металеві мости: $\delta = 0,085$;
- з.-б. балкове покриття $\delta = 0,28$;
- з.-б. мости $\delta = 0,315$.

Зауважимо, що множник $e^{-\alpha t}$ у (5.5) стає таким, що дорівнює 0,01 уже за $\alpha t = \delta(t/T) = 4,53$. Це означає, що первісна амплітуда зменшується у сто разів (що практично означає припинення коливань), наприклад, для металевих мостів через $4,53/0,085=53$ коливання, а для залізобетонних мостів – через 15 коливань.

Якщо ж демпфірування настільки велике, що $\alpha^2 > \omega^2$, то корені $s_{1,2}$ – дійсні, від'ємні.

Загальний розв'язок: $u = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ являє собою функцію, що спадає. Після відхилення коливання не виникають, система повертається в положення рівноваги (рис. 5.6).

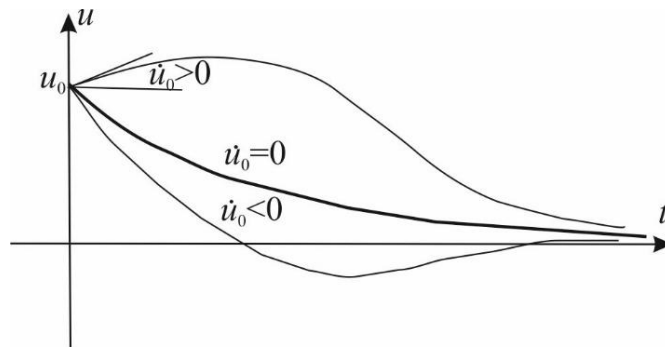


Рис. 5.6

Зауважимо, що в'язка дисипативна сила зменшує амплітуду вільних коливань за експоненціальним законом, але її вплив на частоту і, відповідно, на період вільних коливань є незначним.

Дійсно, розглянемо малі коливання з помітною дисипацією, наприклад, у разі зменшення наступної амплітуди вдвічі порівняно з попередньою, тобто $A_n / A_{n+1} = 2$. Тоді логарифмічний декремент загасання $\delta = \ln 2 = 0,693 = \alpha T$, і параметр $\alpha = 0,693 / (2\pi)$. Отже, $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = 0,994\omega$.

Вимушені коливання при гармонійному збудженні

Повернемося знову до рівняння (5.1), вважаючи, що збурювальна сила змінюється в часі за законом $P = P_0 \sin \theta t$, і опір відсутній, отже, матимемо

$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin \theta t, \quad (5.7)$$

або

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{P_0}{m} \sin \theta t. \quad (5.8)$$

Частковий розв'язок рівняння (5.8) має вигляд

$$u(t) = C \sin \theta t, \quad (5.9)$$

і, підставляючи (5.9) у (5.8), отримуємо

$$(-\theta^2 + \omega^2)C \sin \theta t = \frac{P_0}{m} \sin \theta t. \quad (5.10)$$

Рівність (5.10) має виконуватися за будь-яких значень часу t , а це може бути тільки тоді, коли $(-\theta^2 + \omega^2)C = P_0/m$, значить

$$C = \frac{P_0}{m\omega^2(1 - \theta^2/\omega^2)}. \quad (5.11)$$

Враховуючи, що $m\omega^2 = k$, і вводячи параметр відносної частоти збурення $\beta = \theta/\omega$, запишемо

$$u(t) = \frac{P_0}{k(1 - \beta^2)} \sin \theta t. \quad (5.12)$$

Додаючи до (5.12) загальний розв'язок однорідного рівняння, що є реакцією системи під час вільних коливань, отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$u(t) = A \sin \theta t + B \cos \theta t + \frac{P_0}{k(1 - \beta^2)} \sin \theta t. \quad (5.13)$$

Константи A і B обираються так, щоб задовольнити початкові умови. За нульових початкових умов

($u(0) = \dot{u}(0) = 0$) матимемо

$$u(t) = \frac{P_0}{m(\theta^2 - \omega^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (5.14)$$

Отриманий розв'язок являє собою різницю двох гармонійних складових з різними частотами. Насправді цей процес можна спостерігати лише на самому початку, оскільки невраховані під час складання рівняння сили опору спричиняють поступове загасання коливань із власною частотою ω . Тому, після закінчення деякого часу, коливання стають практично моногармонійними з частотою θ .

Таким чином, найсуттєвіша, стаціонарна частина процесу (*усталені* вимушені коливання) описується виразом (5.12).

Амплітуда цих коливань, що відбуваються з частотою θ , визначається виразом

$$A = \frac{P_0}{k|\theta^2 - \omega^2|}, \quad (5.15)$$

знаменник якого (*динамічна жорсткість*) характеризує ефективну жорсткість системи за гармонійного збудження. Виразу (5.15) можна надати вигляд

$$A = u_{st} \mu, \quad (5.16)$$

де $\mu = 1 / |1 - \theta^2 / \omega^2|$ – коефіцієнт динамічності. Він показує, у скільки разів амплітуда сталих вимушених коливань A більша за переміщення $u_{st} = P_0 / k$, що викликається статично прикладеною силою P_0 .

Неважко бачити, що за $\theta \rightarrow \omega$ (резонансний режим) коефіцієнт динамічності прямує до нескінченності. Насправді розв'язок є скінченним, у чому можна переконатися, якщо розглянути систему з тертям.

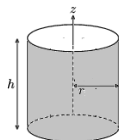


Питання:

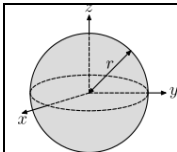
Було сказано, що для поворотних ступенів свободи мірою інерції є не маса, а момент інерції маси J_ω . Чи можна навести приклади?

Відповідь:

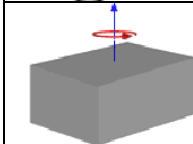
Моменти інерції мас для трьох найпростіших тіл:



$J_z = mr^2 / 2$ (суцільний циліндр радіусом r , заввишки h і масою m);



$J_z = 2mr^2 / 5$ (тверда куля радіусом r і масою m);



$J_h = m(w^2 + d^2) / 12$ (твердий кубоїд із висотою h , шириною w , глибиною d і масою m)



Питання:

Інерційна сила пропорційна прискоренню за законом Ньютона, пружна сила пропорційна зміщенню за законом Гука, а на підставі чого загасання пропорційне швидкості руху? Яка фізична природа сил непружного опору?





Відповідь:

Природа виникнення дисипативних сил, які є обов'язковими супутниками будь-яких коливальних процесів, різноманітна і складна. Якщо вважати, що опір руху чинить зовнішнє середовище (рідке або газоподібне, тертя в опорах) або ж сили внутрішнього тертя (термін збірний і умовний, оскільки внутрішні процеси можуть бути не пов'язаними з тертям), то експериментально встановлено, що величина дисипативних сил тим чи іншим способом пов'язана з величиною швидкості.

Для спрощення аналізу силам дисипації приписують властивості в'язкості, для яких встановлено лінійну залежність від швидкості.

На рис. 5.7 представлено залежності сил так званого в'язкого опору (рис. 5.7.a) і сухого тертя (рис. 5.7.b і 5.7.c) від швидкості.

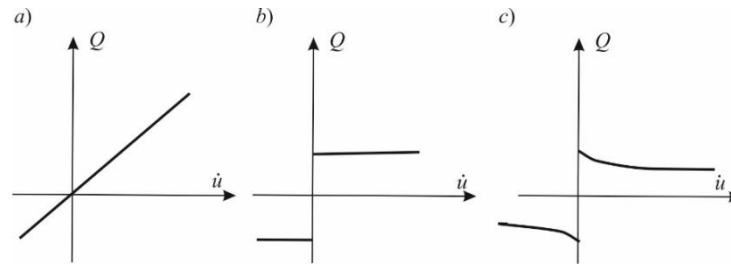


Рис. 5.7

Дисипативна сила *в'язкого тертя* пропорційна швидкості $Q = c\dot{u}$. Коефіцієнт $c = \text{const}$.

Сила *сухого тертя* залежить від знака швидкості і тому описується розривною функцією, яка в найпростішому випадку так званого Кулонова тертя є кусково-постійною і описується математичним виразом

$$Q = c \cdot \text{sign } \dot{u}.$$

Введення подібного доданка в рівняння коливань перетворює його на нелінійне.

Якою б не була природа дисипативних сил, їхній напрямок у будь-який момент часу протилежний напрямку швидкості.

Бесіда 5.3. Дещо про резонанс



Більшість інженерів обізнані про резонансний режим коливань, коли збіг частоти зовнішнього впливу з частотою власних коливань призводить до різкого наростання амплітуд. Для ідеальної системи без втрат енергії резонанс визначає необмежене зростання амплітуд, але і для реальної системи це зростання може бути дуже великим.

Вплив тертя на вимушені коливання, що відбуваються далеко від резонансних режимів, зазвичай невеликий, і в практичних розрахунках ним найчастіше нехтують. Однак поблизу резонансу врахування тертя стає необхідним: без цього помилки у визначенні амплітуд вимушених коливань стають неприпустимо великими. З урахуванням в'язкого тертя рівняння руху набуде вигляду

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \theta t, \quad (5.17)$$

або

$$\ddot{u} + 2\omega\zeta\dot{u} + \omega^2 u = (P_0 / m) \sin \theta t, \quad (5.18)$$

де ω – частота власних коливань недемпфированої системи;

$\zeta = C/C_{cr}$ – відносне демпфірування;

$C_{cr} = 2\sqrt{km}$ – критичне демпфірування, тобто таке значення коефіцієнта C , починаючи з якого виведена зі стану рівноваги система повертається до цього стану без осциляцій.

Не зупиняючись на деталях пошуку розв'язку рівняння (5.18), які можна знайти в будь-якій книжці з динаміки споруд, запишемо остаточний вигляд розв'язку:

$$\begin{aligned} u(t) = & e^{-\omega\zeta t} \left(u_0 \cos \tilde{\omega} t + \frac{\dot{u}_0 + \omega\zeta u_0}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} t \right) - \\ & - e^{-\omega\zeta t} \left(B_1 \cos \tilde{\omega} t + \frac{\beta B_1 + \theta B_2}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} t \right) + \\ & + B_1 \cos \theta t + B_2 \sin \theta t. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Тут введено позначення

$$B_1 = -\frac{P_0}{m} \cdot \frac{2\omega\zeta\theta}{(\omega^2 - \theta^2) + (2\omega\zeta\theta)^2}; \quad B_2 = \frac{P_0}{m} \cdot \frac{\omega^2 - \theta^2}{(\omega^2 - \theta^2) + (2\omega\zeta\theta)^2}.$$

Таким чином, зміщення під час дії гармонійного збурення складається з трьох складових:

- вільні згасаючі коливання з частотою $\tilde{\omega}$, що залежать від початкових умов;
- вільні згасаючі коливання з частотою $\tilde{\omega}$, що залежать не від початкових умов, а від параметрів збурювальної сили;
- суто вимушені коливання з частотою θ .

Для випадку $\theta > \tilde{\omega}$, коли на низькочастотний процес вимушених коливань накладається високочастотний процес згасаючих вільних коливань, графік руху наведено на рис. 5.8,а (відносно високочастотні власні коливання загасають швидко, якщо час вимірювати періодами вимушених коливань), а для випадку $\theta < \tilde{\omega}$ (рис. 5.8,б) демонструє зворотну картину «повільного» загасання перехідних процесів.

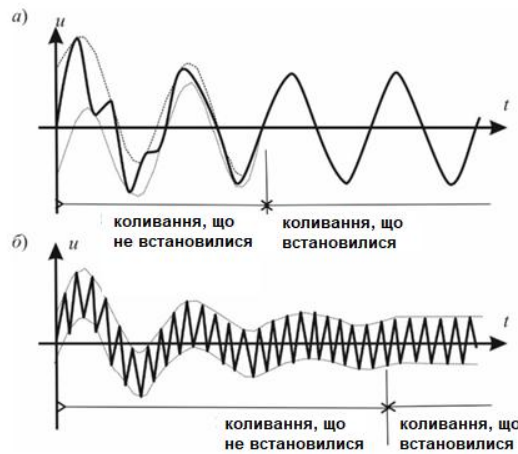


Рис. 5.8

Після завершення перехідного процесу, коли реалізуються усталені вимушені коливання, рух під дією вібраційного навантаження є гармонійним і описується виразом

$$u(t) = B_1 \cos \theta t + B_2 \sin \theta t, \quad (5.20)$$

або (з урахуванням того, що $B_1 < 0$)

$$q(t) = B \sin(\theta t - \psi), \quad (5.21)$$

де $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + (2\omega\zeta\theta)^2}}$ – амплітуда сталих вимушених

коливань;

ψ – кут, що являє собою різницю фаз між рухом маси і силою, що збурює.

Отримані формули дають змогу дійти до таких висновків:

- переміщення системи відбуваються з частотою сили, що обурює, але відстають за фазою;

- за малих частот збурення θ порівняно з власною частотою ω відставання невелике;
- за рівності частот збурення і власної $\omega = \theta$ фаза $\psi = \pi/2$, тобто в той момент, коли сила максимальна, переміщення дорівнює нулю.

Динамічний коефіцієнт μ , тобто відношення амплітуди вимушених коливань $|u(t)|_{\max}$ до зміщення маси від статично прикладеної сили, визначається формулою

$$\mu = \frac{|u(t)|_{\max}}{u_{\text{ст}}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + (2\omega\zeta\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + (2\zeta\xi)^2}},$$

де $\xi = \theta / \omega$.

Ця амплітуда має максимальне значення за $\theta/\omega = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, коли $\mu = 1 / \sqrt{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$, графік її зміни у функції від відношення θ/ω подано на рис. 5.9.

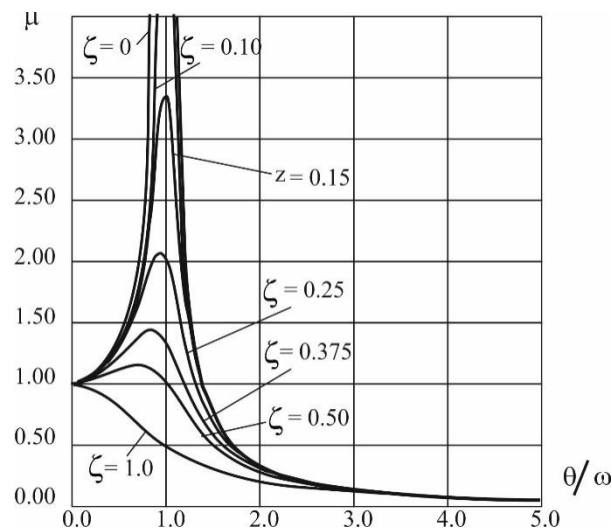


Рис. 5.9

Корисно звернути увагу на те, що з погляду зменшення амплітуд коливань вигіднішим є збільшення частоти власних коливань порівняно з частотою збурення, оскільки область $\theta/\omega > 1$ характеризується меншими значеннями коефіцієнта динамічності.

Крім того, за малих значень $\xi = \theta / \omega$ коефіцієнт динамічності мало відрізняється від одиниці. Якщо, наприклад, нехтувати динамічними ефектами, що мають значення близько 5%, то легко підрахувати, що за відсутності

загасання $\mu < 1,05$, коли $\xi < 0,218$ або, що те саме, $T_b/T_0 > 4,59$ (T_b – період вимушеної сили, T_0 – період власних коливань).

З цього прикладу та з розгляду деяких аналогічних задач [3, 5] можна зробити висновок, що силу збурення, яка змінюється в часі, можна вважати такою, що діє статично, коли її період у 5÷7 разів перевершує період власних коливань.

Спеціальний випадок збудження представлено на рис. 5.10, де коливання викликаються незбалансованою масою m_e , що має ексцентриситет e та обертається з кутовою швидкістю θ . Сила збурення при цьому визначається як $P = em_e \theta^2 \sin \theta t$, а безрозмірна амплітуда

$$\mu = \frac{u_{\max} m}{em_e} = (\theta/\omega)^2 \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (5.22)$$

має максимальне значення $\mu_{\max} = (1 - 2\zeta^2) / (2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})$. Графік цієї функції показано на рис. 5.10, з нього видно, що в зазначеному випадку рекомендація щодо відведення від резонансу має прямо протилежний характер.

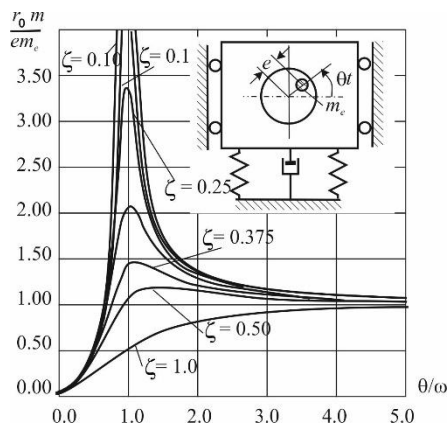


Рис. 5.10

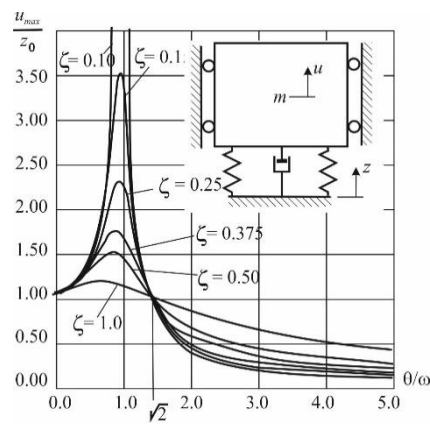


Рис. 5.11

Нарешті, можна розглянути ще один випадок гармонійного збудження, коли за законом $z = z_0 \sin \theta t$ рухається основа. Безрозмірна амплітуда переміщень визначається виразом

$$\frac{y_0}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\theta/\omega)^2}{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\theta/\omega)^2}} \quad (5.23)$$

Графік цієї функції показано на рис. 5.11. Він нагадує графік на рис. 5.9, але тут усі криві проходять через точку з абсцисою $\theta/\omega = 1,414$. У цьому разі

також доцільно зменшувати частоту власних коливань, і саме таким чином будуються майже всі системи сейсмоізоляції, у яких зниження власних частот досягається за рахунок усякого роду податливих опор.

Схема за рис. 5.11 застосовується в системах віброізоляції, і відношення $u_{\max}/z_0$ у певному розумінні характеризує якість віброізоляції, яка, як видно з графіка, є ефективною лише за частот $\theta/\omega > 1,414$, водночас наявність у ній згасання, узагалі кажучи, є небажаною.

Бесіда 5.4. Рівняння руху системи з кількома ступенями свободи



Будь-яка реальна конструкція має масу, розподілену по всьому об'єму. Однак досить точні результати її аналізу можна отримати, вважаючи, що маса конструкції зосереджена в деяких її характерних точках. Тому для простоти розглядатимемо систему, що складається з невагомих пружних елементів, які несуть точкові маси (рис. 5.12,а), тобто систему зі скінченним числом ступенів свободи.

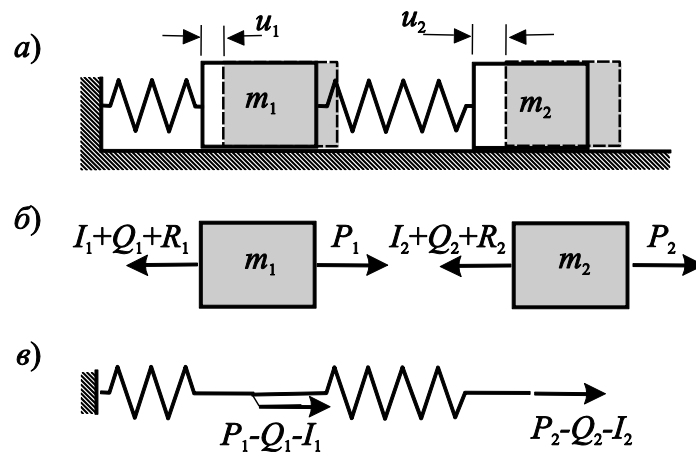


Рис. 5.12

Рівняння руху систем такого типу можна отримати прямим або зворотним способом.

Згідно з *прямим способом* із системи відокремлюють зосереджені маси, і кожну з них розглядають як вільну матеріальну точку, що перебуває під дією сил, які виражають через обрані узагальнені координати (рис. 5.12,б).

Зворотний спосіб протилежний прямому: після відокремлення зосереджених мас розглядають «безмасовий скелет» системи, що залишився, і для точок розташування мас визначають переміщення, що виникають від дії

зовнішніх сил і сил інерції (рис. 5.12,в). Мається на увазі, що реальна сила інерції прикладена не до маси, а діє на пружний скелет конструкції¹⁵.

Скористаємося *прямим способом*, враховуючи, що на кожному (наприклад, I –ю) масу чинять вплив:

- збурювальна сила $P_i(t)$;
- сила інерції $I_i(t)$;
- сила пружного опору $R_i(t)$;
- сила непружного опору $Q_i(t)$.

Відповідно до принципу Даламбера ці сили перебувають у будь-який момент часу в динамічній рівновазі:

$$I_i(t) + Q_i(t) + R_i(t) = P_i(t) \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.24)$$

Використовуючи компоненти матриці жорсткості K , можна силу пружного опору виразити через переміщення

$$R_i(t) = \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j(t) \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.25)$$

Далі вважаємо, що сила непружного опору пропорційна швидкості (умова в'язкого тертя) і, отже, з використанням матриці коефіцієнтів дисипації C отримуємо:

$$Q_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \dot{u}_j(t) \quad (i=1, \dots, n), \quad (5.26)$$

Сили інерції дорівнюють добутку маси на прискорення, отже, рівняння динамічної рівноваги матимуть вигляд:

$$m_i \ddot{u}_i(t) + \sum_{j=1}^n C_{ij} \dot{u}_j(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j(t) = P_i(t) \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.27)$$

Інерційні характеристики

Якщо для деякої маси необхідно враховувати інерцію повороту, то її переміщення зручно пов'язати з центром маси C (рис. 5.13). Сили інерції I_i і I_j прикладаються в точці C . Кутовому переміщенню u_k відповідає момент інерції I_k .

Найпростіший спосіб переходу від реальної конструкції до розрахункової моделі із зосередженими масами ґрунтується на тому, що сумарна маса кожного стрижня зосереджується на його кінцях, тобто в точках, де визначаються переміщення системи.

¹⁵ Я.Г.Пановко зазначає [6]: «... вираз «на балку під час коливань діють сили інерції» містить двозначність, оскільки неясно, що в цьому виразі слід розуміти під «балкою». Якщо тут мається на увазі сама балка, тобто пружна система, що має масу, то наведений вираз, по суті, неправильний; якщо ж «балкою» названо її пружний скелет, то він стає правильним, але тоді слід було б його краще сформулювати».

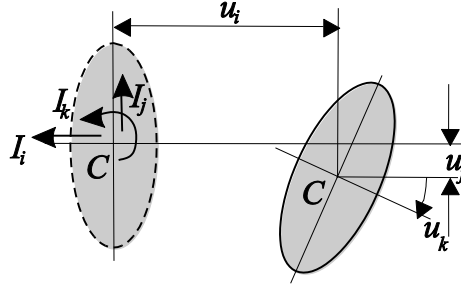


Рис. 5.13

Наприклад, раму (рис. 5.14,а) з розподіленими масами $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ на стрижнях розбивають на три ділянки, і масу кожної з них розподіляють порівну між кінцями ділянки (рис. 5.14,б) у вигляді точкових мас m_1, m_2, m_3 , так що

$$\begin{aligned} m_1 &= \tilde{m}_1 a / 2, \\ m_2 &= \tilde{m}_2 b / 2, \\ m_3 &= \tilde{m}_3 c / 2. \end{aligned}$$

У результаті задану схему замінюють невагомою рамою (мал. 5.14,в) з двома точковими масами, кожна з яких дорівнює сумі точкових мас, що розташовувалися на кінцях стрижнів, що примикають до вузла.

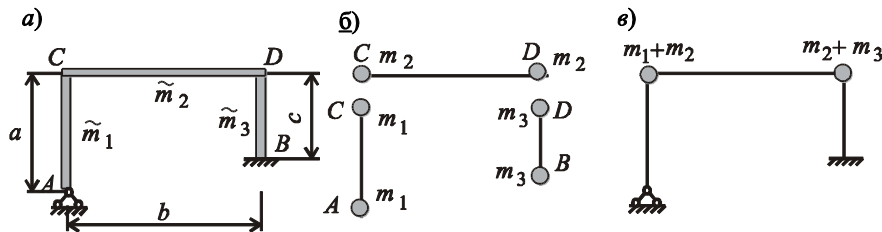


Рис. 5.14

За іншого підходу враховують, що в процесі коливань сили інерції в стрижнях пропорційні прискоренням точок, розміщених на осі стрижня, тобто, в ідеології методу скінченних елементів визначаються функціями форми, оскільки просторовий розподіл прискорень збігається з просторовим розподілом переміщень. Ці сили визначають кінцеві реакції, і вузловим точкам приписують умовні маси та моменти інерції мас, такі, що вони створюють вузлові інерційні сили та моменти, які викликають ті самі реакції, що й інерційні сили реальних розподілених мас.

Так, наприклад, елементи матриці мас стрижневого елемента, який розглядався в бесіді 2.1, обчислюються за формулами:

$$m_{ij} = \int_0^L \psi_i(x) \cdot \tilde{m} \cdot \psi_j(x) \cdot dx,$$

де $\psi(x)$ – функції, що інтерполюють переміщення точок у межах скінченного елемента. Якщо задати ці функції у вигляді поліномів Ерміта, то отримаємо матрицю мас:

$$[m_{ij}] = \frac{\tilde{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}.$$

Така матриця мас називається узгодженою, на відміну від методу точкових мас, вона не має діагональної форми, що викликає певні складнощі в обчисленнях. У зв'язку з цим віддають перевагу методу точкових мас або використовують інші наближені прийоми діагоналізації матриці мас.

Одним із таких способів є прийом, коли розподілену масу розглядають як навантаження на елемент (інакше кажучи, припускають, що інерційні сили є постійними за довжиною), і її приводять у вузли за формулою

$$m_i = \int_0^L \tilde{m} \cdot \psi_i(x) \cdot dx.$$

Тоді матриця мас простого стрижня матиме вигляд

$$[m_{ij}] = \frac{\tilde{m}L}{12} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix},$$

тобто перенесена в кінцевий вузол половинна маса стрижня набуває ще й момент інерції, що дорівнює $\tilde{m}L^2 / 12$.

Власні коливання

Якщо задати системі початкові зміщення (наприклад, приклавши деяку силу P_0), то надалі, під час розвитку вільних коливань, конфігурація переміщень зміниться, оскільки до справи долучаться сили інерції $I(t)$, які не брали участі в початковому деформуванні системи (рис. 5.15).

Але існують такі форми збурень (власні форми), у яких конфігурація зберігається.

Для того, щоб продемонструвати справедливості цього твердження, розглянемо рівняння (5.27), вважаючи, що зовнішні сили, що обурюють, і сили опору відсутні. Тоді матимемо

$$m_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.28)$$

Припустимо, що вільні коливання є гармонійними з поки що невідомою нам частотою ω :

$$u_i(t) = X_i \sin \omega t. \quad (5.29)$$

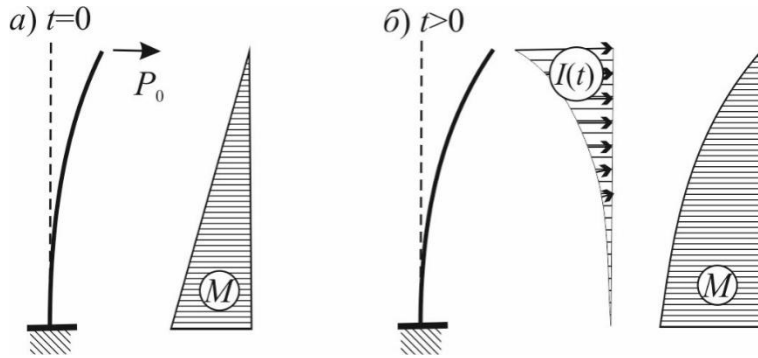


Рис. 5.15

Підстановка (5.20) у (5.28) дає систему рівнянь

$$-m_i X_i \omega^2 \sin \omega t + \sum_{j=1}^n K_{ij} X_j \sin \omega t = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.30)$$

І оскільки ці рівняння мають виконуватися завжди, то їх можна скоротити на $\sin \omega t$ і отримати рівняння щодо амплітуд X_i :

$$\left(\sum_{j=1}^n K_{ij} - m_i \omega^2 \right) X_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.31)$$

Рівняння (5.31) мають тривіальний розв'язок $X_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$, що відповідає нерухомій системі, але, крім того, вони можуть мати ненульовий розв'язок, якщо детермінант цієї системи рівнянь дорівнює нулю. Це може статися за деяких значень частоти (*власної частоти*), для яких справедлива рівність

$$\det \begin{bmatrix} K_{11} - \omega_0^2 m_1 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} - \omega_0^2 m_2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} - \omega_0^2 m_n \end{bmatrix} = 0. \quad (5.32)$$

Останній вираз називається *характеристичним рівнянням* задачі, і при розгортанні визначника перетворюється в алгебраїчне рівняння n -го ступеня відносно ω_0^2 . Як відомо з курсу математики, алгебраїчне рівняння n -го ступеня має n коренів

$$\omega_{0,k}^2 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Упорядкована в порядку зростання і пронумерована сукупність позитивних значень $\omega_{0,k}$ утворює так званий *спектр власних частот*

$$\omega_{0,1} \leq \omega_{0,2} \leq \dots \leq \omega_{0,n}.$$

Кожному власному числу, як і кожній власній частоті, відповідає свій набір амплітуд узагальнених координат, що задовольняє рівнянню (5.32).

Якщо підставити одне зі значень власної частоти (наприклад, ω_s) у рівняння (5.31), то можна спробувати розв'язати отриману систему щодо величин $X_i^{(s)}$ ($i=1, \dots, n$), сукупність яких становить власний вектор (*форму власних коливань*), що відповідає цій частоті. Оскільки підстановка ω_s призводить до рівнянь із виродженою матрицею коефіцієнтів, знайти всі значення $X_i^{(s)}$ ($i=1, \dots, n$) не вдається. Можна задатися довільно однією з компонент власного вектора, тоді інші $(n-1)$ компонент власного вектора знайдуться з усіченої в такий спосіб системи рівнянь.

З огляду на те, що ми довільним способом задалися однією з компонент власного вектора, практично знайдено не величини $X_i^{(s)}$ ($i=1, \dots, n$), а тільки співвідношення між ними.

Розглянемо приклад простої системи з двома ступенями свободи (рис. 5.16).

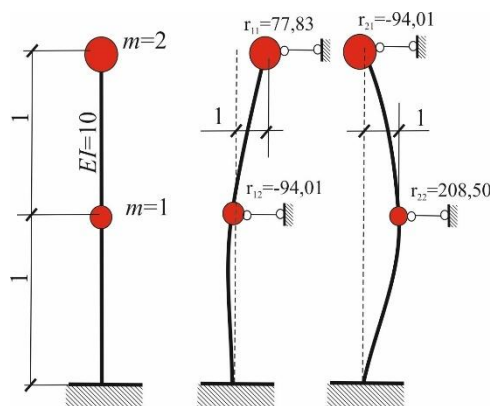


Рис. 5.16

Рівняння типу (5.31) для цієї системи мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} (77,83 - 2\omega^2)X_1 - 94,01X_2 &= 0 \\ -94,01X_1 + (208,50 - \omega^2)X_2 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Прирівнюючи детермінант системи рівнянь до нуля, отримуємо бікватратне рівняння

$$(77,83X_1 - 2\omega^2)(208,50 - \omega^2) - 94,01^2 = 0,$$

або

$$2\omega^4 - 494,83\omega^2 + 7389,675 = 0,$$

рішення якого дає два значення власної частоти

$$\omega_{0,1} = 3,995; \quad \omega_{0,2} = 15,213.$$

Відповідні їм форми власних коливань (рис. 5.17) визначимо з першого рівняння, поклавши $X_1=1$

$$X_2^{(1)} = 1; \quad X_1^{(1)} = (208,5 - 15,964)/94,01 = 2,048;$$

$$X_2^{(2)} = 1; \quad X_1^{(2)} = (208,5 - 231,451)/94,01 = -0,244.$$

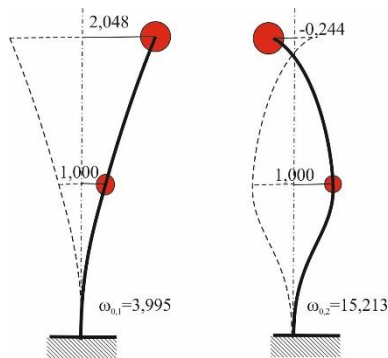


Рис. 5.17

Форми власних коливань іноді називають *модами*, а процес їх отримання *модальним аналізом*.



Питання:

Якщо початкове відхилення виконано за формою власних коливань, то вільні коливання зберігають цю форму, а який вигляд мають вільні коливання в разі довільної форми початкового відхилення системи?

Відповідь:

Якщо систему з n ступенями свободи відхилено від положення рівноваги довільним чином і представлено після цього саму по собі, то збуджені в такий спосіб вільні коливання можна подати у вигляді суми n доданків, кожен з яких є однією з власних форм, що змінюється з відповідною цій формі власною частотою і швидкістю згасання.



Найчастіше спостерігається така картина: у початковий момент відхилення системи має задану форму, але з плином часу вільні коливання відбуваються за однією з власних форм і з відповідною частотою. Це відбувається внаслідок того, що власні коливання за іншими формами (складові сумарного руху) швидко затухають.

Бесіда 5.5. Властивості форм власних коливань



Власні форми є характеристиками динамічної системи (їхнім паспортом), оскільки вони не пов'язані з жодними зовнішніми впливами. Їхня роль у динамічному аналізі велика, тому варто уважніше розглянути основні властивості власних форм.

Як зазначалося вище, у системи з n ступенями свободи є рівно n власних частот, кожний з них відповідає певна форма власних коливань.

Власні форми є тільки в лінійних системах, нелінійні системи форм власних коливань не мають.

З цього твердження, серед іншого, випливає, що власні форми характеризують малі пружні коливання, тобто для нелінійно-пружної системи модальний аналіз може стосуватися лише її лінеаризованого аналога (*малі коливання в околиці зміщеного стану рівноваги*).

Якщо система має дві або кілька близьких за значенням власних частот, то виникають певні труднощі в правильному визначенні відповідних власних форм. І що ближче одна до одної розміщені власні частоти, то важче розрізнити форми власних коливань. Підвішений на сферичному шарнірі маятник може здійснювати вільні коливання в одній площині (скажімо, в XOZ), а також у перпендикулярній їй площині YOZ , при цьому частота коливань буде одна й та сама. Таким чином, можна вважати, що коливання в кожній із зазначених площин відбуваються за власною формою. Зрозуміло й те, що маятник може здійснювати коливання і в будь-якій іншій площині, причому такий рух можна уявити як суму коливань у площинах XOZ і YOZ .

У розглядуваному випадку кратного власного значення будь-яка лінійна комбінація двох власних форм також є власною формою.

У загальному випадку справедливості цього твердження впливає з такого міркування: якщо одному й тому самому значенню власної частоти ω_0 відповідають форми власних коливань $X_i^{(k)}$ і $X_i^{(s)}$ ($i = 1, \dots, n$), то розглянемо рівняння, яким задовольняють ці форми

$$\left(\sum_{j=1}^n K_{ij} - m_i \omega_0^2 \right) X_i^{(s)} = 0;$$

$$\left(\sum_{j=1}^n K_{ij} - m_i \omega_0^2 \right) X_i^{(k)} = 0 \quad (i=1, \dots, n).$$

Помножимо першу систему рівнянь на a , другу – на b і складемо їх, отримаємо систему рівнянь

$$\left(\sum_{j=1}^n K_{ij} - m_i \omega_0^2 \right) (aX_i^{(k)} + bX_i^{(s)}) = 0 \quad (i=1, \dots, n),$$

яку за довільних a і b задовольняє лінійна комбінація форм

$$X_i = aX_i^{(k)} + bX_i^{(s)} \quad (i=1, \dots, n).$$

Здавалося б, що можливість створення будь-якого числа лінійних комбінацій власних форм, яка проявляється у випадку кратних частот, суперечить твердженню про те, що система має рівно n власних форм (за числом власних частот), але система має саме n незалежних власних форм.

Кожна власна форма визначається лише з точністю до множника, її частота не залежить від амплітуди.

Справедливість цього твердження випливає з того, що якщо $X_i^{(s)} (i=1, \dots, n)$ є розв'язком системи рівнянь (5.31), то й $aX_i^{(s)} (i=1, \dots, n)$ задовольняє ці рівняння.

З приводу сказаного тут можна зауважити, що якщо рояльна струна налаштована на певну ноту (частоту власних коливань), то від сили удару по клавіші цей тон не змінюється, хоча й змінюється гучність звуку.

Власні форми ортогональні.

Між амплітудами $X_j^{(s)}$ і $X_j^{(k)}$, що визначають дві будь-які власні форми (s і k), існує співвідношення, що виражає важливу властивість *ортогональності* власних форм. Установимо це співвідношення, виходячи із загальної форми рівнянь (5.31) для амплітуд. При $\omega^2 = \omega_{0,s}^2$ будь-який i -й рядок цієї системи, записаний для s -ї частоти, може бути поданий у вигляді

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} X_j^{(s)} = m_i \omega_{0,s}^2 X_i^{(s)} \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.33)$$

Помножимо кожен з рівностей (5.33) на відповідні компоненти власної форми $X_i^{(k)}$ і підсумуємо всі отримані вирази. Приходимо до рівності

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} X_j^{(s)} X_i^{(k)} = m_i \omega_{0,s}^2 \sum_{i=1}^n X_i^{(s)} X_i^{(k)}. \quad (5.34)$$

Але згідно з (5.31)

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} X_j^{(k)} = m_i \omega_{0,k}^2 X_i^{(k)}, \quad (5.33)$$

і, підставивши цей вираз у (5.34), ми отримаємо

$$m_i \omega_{0,k}^2 \sum_{i=1}^n X_i^{(s)} X_i^{(k)} = m_i \omega_{0,s}^2 \sum_{i=1}^n X_i^{(s)} X_i^{(k)}. \quad (5.35)$$

Оскільки $\omega_{0,s}^2 \neq \omega_{0,k}^2$, то рівність (5.35) може виконуватися тільки в тому випадку, коли виконується перша умова ортогональності

$$\sum_j X_j^{(k)} m_j X_j^{(s)} = 0. \quad (5.36)$$

І абсолютно аналогічно виходить друга умова ортогональності

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i^{(k)} K_{ij} X_j^{(s)} = 0. \quad (5.37)$$

Умови (5.36) і (5.37) показують, що форми власних коливань ортогональні щодо як мас, так і жорсткостей. Вони називаються відповідно умовами *ортогональності за кінетичною енергією* та умовами *ортогональності за потенційною енергією*.

Форми власних коливань і пов'язані з ними власні частоти повністю визначаються жорсткісними та інерційними властивостями системи і не можуть підкорятися нашим бажанням. Водночас слід мати на увазі, що ортогональність форм власних коливань не обов'язково пов'язана з ортогональною декартовою системою координат, у якій описано розрахункову схему, яку обирають за нашою сваволею.

Запитання на кшталт «Яка частота власних коливань уздовж будівлі?» може не мати жодного сенсу, якщо форма власних коливань не орієнтована таким чином. Найчастіше ці питання є відгомонами якихось інструкцій, що стосуються будівель певного типу (наприклад, одноповерхових промислових будівель із системою паралельних несівних рам), некритично перенесеними в невідповідну ситуацію.



Питання:

У деяких посібниках із проектування рекомендується уникати рішень, де крутильна форма власних коливань присутня серед перших.

У чому тут справа? Чи є споруди з крутильною формою власних коливань у чомусь збитковими?

Відповідь:

Нічого поганого в такій конструкції немає. Згадані рекомендації найімовірніше походять від традиції використання плоских розрахункових схем, коли фактично просторовий несівний каркас уявляли набором плоских рам або ферм.



Але приклад простої споруди, схему якої представлено на рис. 5.18, дає уявлення про цілком пристойну конструкцію, у якій перша (кратна) частота власних коливань є крутильною: тут три перші власні частоти дорівнюють і мають значення $\omega_0 = \sqrt{2c/(\mu a)}$, де c – жорсткість пружної опори (стійки), μ – маса одиниці площі перекриття. Навряд чи конструкція зазначеного типу може вважатися міцною.

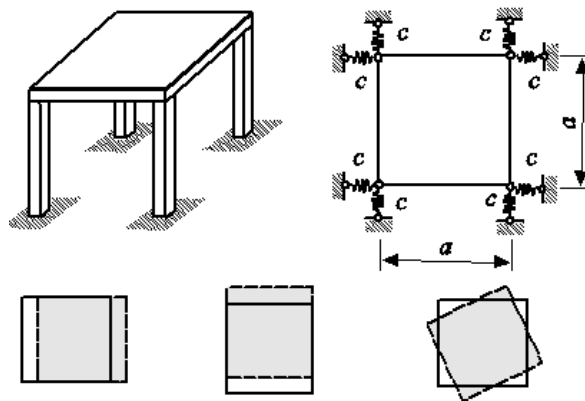


Рис. 5.18

Існує ще одна причина походження згаданої рекомендації, яка пов'язана з розрахунками на сейсміку. Річ у тім, що найбільш вивченими є поступальні коливання основи, які виникають під час землетрусів, і саме про них найчастіше йдеться в розрахунку. Але під час землетрусу основа може мати і ротацийні збурення, на які помітним чином реагує та споруда, де крутильна форма власних коливань присутня в числі перших. І звичайно, якщо ця ситуація погано враховується стандартним методом розрахунку, то давайте уникати її, оголосивши, що відповідні споруди не рекомендуються до використання. Ось уже де, воістину, хвіст крутить собакою.



Питання:

Як можна розумним способом розпорядитися свавіллям у виборі масштабного множника до форми власних коливань? Чи є якісь рекомендації з цього питання?

Відповідь:

Найпростіший метод полягає в тому, що максимальна з компонент форми власних коливань приймається такою, що дорівнює одиниці, а всі інші компоненти задаються в частках від цієї одиниці. Такий процес є одним зі способів *нормування* форм власних коливань.



Форми власних коливань, показані на рис. 5.17 були пронормовані саме в такий спосіб.

У деяких розрахункових програмах для нормування форм власних коливань використовують поняття узагальненої маси

$$M^{(s)} = \sum_{i=1}^n X_i^{(s)} m_i X_i^{(s)} \quad (s=1, \dots, n),$$

і переходять до величин $Z_i^{(s)} = X_i^{(s)} / \sqrt{M^{(s)}}$ (ортонормованих форм), що призводить до залежностей

$$\sum_{i=1}^n Z_i^{(s)} m_i Z_j^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

У розглянутому вище прикладі

$$M^{(1)} = 2,0 \cdot 2,048^2 + 1,0 \cdot 1,0^2 = 9,389,$$

$$M^{(2)} = 2,0 \cdot 0,244^2 + 1,0 \cdot 1,0^2 = 1,119.$$

Ортонормовані форми власних коливань були б представлені як вектори

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{9,389}} \begin{bmatrix} 2,048 \\ 1,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,668 \\ 0,326 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1,119}} \begin{bmatrix} -0,244 \\ 1,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,231 \\ 0,945 \end{bmatrix}.$$

Пронормовані в такий спосіб форми стосовно матриці жорсткості дотримуються умови

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i^{(s)} K_{ij} X_j^{(s)} = \begin{cases} \omega_{0,s}^2, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Бесіда 5.6. Вимушені коливання систем зі скінченним числом ступенів свободи

Динамічні впливи за своїм характером дуже різноманітні. Вони можуть бути силовими, коли на конструкцію діє зовнішнє навантаження, або кінематичними, коли задано вимушене деформування окремих елементів системи, але і в тому, і в іншому випадку вплив змінює в часі свою інтенсивність або місце прикладання, а можливо, що і обидві ці характеристики разом.



Вимушені коливання лінійної дискретної системи описуються системою звичайних диференціальних рівнянь (5.27). Ми почнемо аналіз цих рівнянь із важливого окремого випадку, коли система рівнянь має праву частину, що змінюється за синусоїдальним законом, і рівняння за відсутності в'язкого опору мають вигляд

$$m_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j(t) = P_i \sin \theta t \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.38)$$

де P_i – амплітудне значення навантаження, що діє у напрямку переміщення u_i ; θ – частота збурення.

Частковий розв'язок неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$u_i = X_i \sin \theta t \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.39)$$

де X_i – амплітудне значення переміщення $u_i(t)$.

Тоді $u_i = -\theta^2 X_i \sin \theta t$, і підстановка в рівняння (5.38) приводить ці рівняння до вигляду

$$-\theta^2 m_i X_i \sin \theta t + \sum_{j=1}^n K_{ij} X_j \sin \theta t = P_i \sin \theta t \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.40)$$

Оскільки t – довільний момент часу, цьому запису еквівалентна система неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n (K_{ij} - \theta^2 m_i) X_j = P_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.41)$$

Якщо матриця $\mathbf{K}_\theta = \llbracket K_{ij} - \theta^2 m_i \rrbracket$ має обернену $\mathbf{K}_\theta^{-1} = \llbracket d_{ij} \rrbracket$, то

$$X_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} P_j \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.42)$$

Таким чином, амплітудні значення переміщень залежать від навантаження, мас і частоти сили, що збуджує (оскільки вони визначають значення коефіцієнтів d_{ij}), але не залежать від часу. Частковий розв'язок описує усталені вимушені коливання.

Корисно пам'ятати, що участь інерційних сил $\theta^2 m_i$ у формуванні коефіцієнтів рівнянь (5.41) призводить до деяких незвичних ефектів. Так, відомі випадки, коли в конструкції, підданій дії гармонійно мінливої в часі зосередженої сили $P \sin(\omega t)$, максимальна амплітуда коливань спостерігатиметься не під силою, а зовсім в іншому місці. Власне, на цьому принципі ґрунтуються динамічні гасителі коливань (антивібратори), і приклад такої конструкції представлено на рис. 5.19,а.

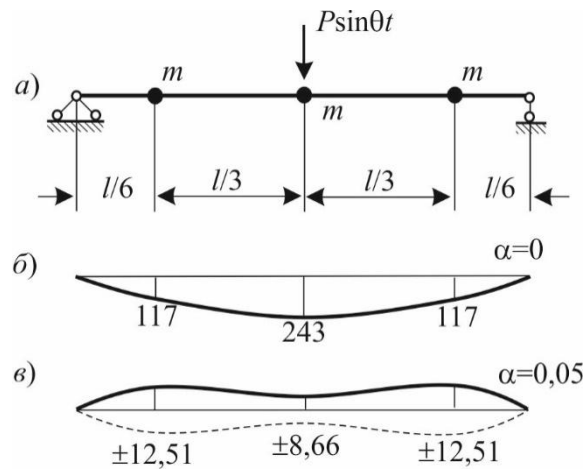


Рис. 5.19

Не зупиняючись тут на деталях обчислень (їх корисно виконати самостійно), наведемо розв'язок цієї задачі. Амплітуди коливань мас, розміщених ближче до опор, дорівнюють

$$X_1 = X_3 = \frac{P}{\beta} \cdot \frac{117}{1 - 369 m \theta^2 / \beta + 3240 (m \theta^2 / \beta)^2},$$

а для маси в центрі балки

$$X_2 = \frac{P}{\beta} \cdot \frac{243 - 3240 m \theta^2 / \beta}{1 - 369 + 3240 (m \theta^2 / \beta)^2}.$$

У цих формулах позначено $\beta = 9 \cdot 1296 EJ / l^3$. На рис. 5.19,б показано форму статичного прогину, обчислену при значенні $\alpha = m \theta^2 / \beta = 0$, при цьому приймалося, що $P / \beta = 1$. Якщо ж покласти $\alpha \neq 0$, то отримаємо форму коли-

вань, показану на рис. 5.19, в, у якій амплітуди коливань крайніх мас перевищують амплітуду в центрі балки, де діє навантаження.

Чому ж тут у «статично вимуштрованого» читача виникає відчуття якогось фокусу, неправдоподібного казусу? Мабуть, річ у тім, що, дивлячись на розрахункову схему, ми бачимо пружну систему і прикладену до неї силу, а про існування ще однієї дійової особи, а саме, сил інерції, схема явно нічого не говорить.

Незалежність і незмінність у часі конфігурації дають змогу використувати власні форми як вимірювач будь-яких коливань лінійної системи, подібно до того, як незалежність і стабільність ваги набору гир дає змогу зважити будь-яке тіло.

Зокрема, одним з основних способів розв'язання диференціальних рівнянь руху є розкладання цього руху за формами власних коливань. Тут істотну роль відіграє властивість ортогональності власних форм.

Як і в задачі про вільні коливання, почнемо з рівнянь, що не містять доданків, які описують дисипативні сили:

$$m_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j(t) = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.43)$$

Вважаючи заздалегідь визначеними власні форми коливань динамічної системи $X_i^{(s)}$ ($i, s = 1, \dots, n$), шукатимемо рішення у вигляді суми

$$u_i(t) = \sum_{s=1}^n X_i^{(s)} \Psi_s(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.44)$$

де $\Psi_s(t)$ ($s = 1, \dots, n$) – деякі функції часу.

Зауважимо, що подання розв'язку у вигляді суперпозиції власних форм припустиме тільки для лінійних задач.

Тоді рівняння руху набуває вигляду

$$m_i \sum_{s=1}^n X_i^{(s)} \ddot{\Psi}_s(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} \sum_{s=1}^n X_j^{(s)} \Psi_s(t) = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.45)$$

Помножимо кожне рівняння на $X_i^{(k)}$ і підсумуємо їх, тоді після зміни порядку підсумовування отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X_i^{(k)} m_i X_i^{(s)} \right) \ddot{\Psi}_s(t) + \\ & + \sum_{s=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} X_i^{(k)} X_j^{(s)} \right) \Psi_s(t) = \sum_{i=1}^n X_i^{(k)} P_i(t). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Завдяки властивості ортогональності власних форм у лівій частині рівності залишаються тільки доданки з $k=s$, усі інші дорівнюють нулю. Отже, рівняння набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X_i^k m_i X_i^{(k)} \right) \Psi_k(t) + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} X_i^k X_j^{(k)} \right) \Psi_k(t) = \sum_{i=1}^n X_i^{(k)} P_i(t),$$

а з урахуванням того, що

$$\sum_{i=1}^n K_{ij} X_j^{(k)} = \theta^2 m_i X_i^{(k)},$$

після елементарних перетворень приходимо до системи

$$[\Psi_k(t) + \theta^2 \Psi_k(t)] \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^{(k)} m_i X_i^{(k)} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^{(k)} P_i(t) \right\}. \quad (5.47)$$

Вирази, узяті у фігурні дужки, являють собою числа. У лівій частині його називають наведеною масою $M_k = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^{(k)} m_i X_i^{(k)} \right\}$, а в правій – наведеною

узагальненою силою $Q_k = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^{(k)} P_i(t) \right\}$ при коливаннях за власною формою з номером k .

Після введення цих позначень рівняння набуває вигляду рівняння вимушених коливань системи з одним ступенем свободи:

$$M_k \ddot{\Psi}_k(t) + \theta^2 M_k \Psi_k(t) = Q_k(t). \quad (5.48)$$

Врахуємо, що індекс k набуває значень від 1 до n і, отже, ми маємо n рівнянь типу (5.48). Таким чином, завдяки вибору власних форм як узагальнених координат, отримуємо n окремих диференціальних рівнянь, кожне з яких визначає одну невідому функцію $\Psi(t)$ замість системи n диференціальних рівнянь відносно n невідомих функцій. Розв'язком системи рівнянь є сума розв'язків кожного з рівнянь, як це впливає з (5.44).

У зв'язку з відсутністю надійної вихідної інформації про розподіл сил непружного опору руху, як правило, виявляється достатнім врахувати демпфірування на стадії дослідження вже перетвореної системи, вводячи в кожне з отриманих окремих рівнянь доданок, пропорційний швидкості, і замість (5.48) використовують рівняння

$$M_k \ddot{\Psi}_k(t) + C_k \dot{\Psi}_k(t) + \theta^2 M_k \Psi_k(t) = Q_k(t). \quad (5.48.a)$$

Викладений вище метод, застосований під час розв'язання задачі про вимушені коливання системи за відсутності дисипації, називають *методом головних, або нормальних, координат*.

Більшість рекомендованих довідковою і нормативною літературою методів динамічного розрахунку конструкцій оперують із розкладанням (5.44) за формами власних коливань. При цьому розрахунок ведеться за системою рівнянь, що розпалася, кожне з яких визначає значення переміщення під час руху за тією чи іншою власною формою

$$u_i^{(s)}(t) = X_i^{(s)} \Psi_s(t) \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.49)$$

Реакції системи, які цікавлять розрахунка (наприклад, моменти або напруження), також визначають за формулами на кшталт (5.49) для кожної з форм власних коливань окремо, з тією лише різницею, що величини $X_i^{(s)}$ замінюються на пов'язані з відповідною формою власних коливань величини M^s або σ^s (замість символів $X^{(s)}$, $M^{(s)}$, $\sigma^{(s)}$ тощо надалі вживатимемо узга- гальнений символ $A^{(s)}$).

Зазначені реакції є функціями часу, і їх підсумовування необхідно виконувати для одних і тих самих моментів руху. Але для цього слід розв'язувати нестационарну задачу динаміки і враховувати всі перехідні процеси в системі, для чого потрібна інформація завідомо детальніша, ніж та, яку зазвичай має у своєму розпорядженні розрахунок. Найчастіше є можливість для кожної власної форми визначити тільки так званий модальний відгук $A_{\max}^{(s)} = \max_t |A^{(s)} \Psi_s(t)|$, який є максимальним значенням реакції системи для i -ї форми. Виникає проблема підсумовування модальних відгуків, які в загальному випадку досягаються не одночасно, і екстремальне значення, що нас цікавить, – це

$$A_{\max} = \max_t \left| \sum_{s=1}^n A^{(s)} \Psi_s(t) \right| \quad (5.50)$$

визначити досить складно, що змушує отримувати лише більш-менш вдалі оцінки цієї величини.

Є кілька способів підсумовування модальних відгуків. Найпростіше отримати верхню оцінку, яка не враховує того факту, що модальні відгуки досягають свого екстремального значення в різні моменти часу

$$A_U = \sum_{s=1}^n |A_{\max}^{(s)}|. \quad (5.51)$$

Відмінність між A_U і $A_{\max}$ може бути досить великою, тому було запропоновано й інші оцінки. У теорії сейсмостійкості користується великою популярністю оцінка для інерційних сил

$$I_R = \sqrt{\sum_{s=1}^n (I_{\max}^{(s)})^2}, \quad (5.52)$$

яку зазвичай називають «найбільш імовірним значенням реакції».

Такий підхід ґрунтується на гіпотезі про те, що час досягнення екстремуму у всіх модальних реакціях є рівномірно розподіленою випадковою величиною, що узгоджується з багатьма спостереженнями, хоча і не є точно встановленим фактом.

Самі підсумовувані інерційні сили за рівномірної вибірки часів вважаються нормально розподіленими і центрованими. Далі реалізується правило підсумовування дисперсій нормально розподілених величин, яке й приводить до формули (5.52). Головну роль тут відіграє статистична незалежність величин, що підсумовуються, – правило «корінь квадратний із суми квадратів (ККСК)» для підсумовування дисперсій справедливе тільки в цьому випадку. Випадок близьких власних частот, як і випадок неблизьких, але високих (відносно несівних частот впливу) власних частот – приклади того, що статистична незалежність іноді порушується. Тому правило ККСК у цих випадках некоректне, причому найчастіше воно дає помилку не в запас надійності.

Слід зауважити, що використання формули (5.52) «гасить» знаки модальних компонент сейсмічної реакції, що в деяких випадках може призводити до непорозумінь. Наприклад, зникають стиснуто-вигнуті перерізи, всі вони виявляються розтягнуто-вигнутими.

Досить типовим прикладом такої ситуації може слугувати випадок кратних частот, коли форми власних коливань, що відповідають такій частоті, визначаються з точністю до деякого довільного. Так, наприклад, вертикально розміщений консольний стрижень з однаковими головними жорсткостями поперечного перерізу має кратні форми власних коливань, які визначаються з точністю до довільного повороту навколо осі Z , як це показано в плані на рис. 5.20, де у варіанті a) власні форми спрямовані вздовж координатних осей, а у варіанті b) – повернуті на 45° . Якщо сейсмічний імпульс діє вздовж осі X , то для варіанта a) реакція за другою формою буде відсутня, і всі переміщення виявляються такими, що лежать у площині (X, Z) .

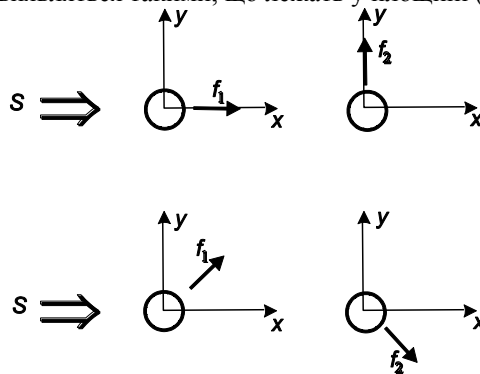


Рис. 5.20

Для варіанта b) збуджуватимуться обидві форми власних коливань, але той факт, що компоненти за віссю Y мають різні знаки та гасять одна одну,

виявиться втраченим у разі використання правила «корінь із суми квадратів». У результаті виявиться, що збуджуються переміщення не тільки у напрямку дії сейсмічного поштовху, а й у перпендикулярному напрямку. Як бачимо, висновок залежить від довільності при виборі пари власних форм, що відповідають кратній частоті.



Питання:

Вище демонструвався прийом, коли в методі нормальних координат демпфірування враховували вже після розкладання за формами власних коливань. Наскільки цей прийом є універсальним?

Відповідь:

Модальний метод динамічного розрахунку, як метод розкладання за формами власних коливань, є найбільш широко використовуваним у задачах динаміки лінійних систем. При цьому найчастіше застосовується розкладання за формами власних коливань недемпфованої системи.



Однак в узагальнених модальних координатах матриця демпфірування, на відміну від матриць мас і жорсткостей, не приводиться до діагонального вигляду. Часто її «діагоналізують» простим відкиданням недіагональних членів, тим паче, що це відбувається автоматично, коли використовується демпфірування за Релеєм (*пропорційне згасання*), тобто матриця згасання C із рівняння (5.61) формується як зважена сума матриці жорсткості та матриці мас.

$$C_{ij} = \alpha m_{ij} + \beta K_{ij},$$

де α і β – довільні коефіцієнти пропорційності [Ошибка! Источник ссылки не найден.].

Але навіть у разі використання прийому Релея для систем, у яких різні частини мають різне демпфірування, недіагональні члени в нуль не зводяться. Особливо часто це спостерігається в розрахункових схемах типу «споруда плюс основа». Для споруди відносний рівень конструкційного демпфірування, тобто перехід механічної енергії в теплову, становить 3–7 % від критичного. А для ґрунтової основи панівний механізм демпфірування пов'язаний з винесенням енергії від споруди хвилями, що йдуть на нескінченність, і він може досягати 30–70%. У цьому разі використання модального методу виявляється сумнівним, більше того, він може призвести до рішень «не в запас».

Крім того, використання форм власних коливань, які, як сказано вище, вважаються незмінними в часі, неявно припускає, що будь-яке збурення відразу ж пошириться на всю конструкцію, тобто швидкість поширення хвиль, що біжать, є нескінченною. Насправді ця швидкість є скінченною і кінематичне збудження коливань (наприклад, від сейсмічного руху основи) доходить до віддалених точок споруди за деякий час. Якщо цей час нехтувано малий порівняно з основним періодом власних коливань, то гіпотеза про

миттєве поширення збурень виявляється прийнятною. Але для дуже високих споруд час проходження хвилі збурення може виявитися не малим, і тут необхідно уточнювати модальний аналіз. Нехтування хвильовими ефектами може давати похибку близько 30% у будівлях заввишки 100 метрів і більше.



Питання:

Як визначається динамічний вплив від обладнання?
Де можна знайти відповідні вихідні дані?

Відповідь:

Ці відомості, взагалі кажучи, мають міститися в документації на встановлюване обладнання. За відсутності такої документації деякі дані можна знайти в літературі. Але дещо можна розрахувати і самостійно.



Прикладом може слугувати навантаження від машин з невідносно великими обертовими масами. Нехай, наприклад, верстат загальною масою M , що приведена до осі вала, встановлено на конструкції (рис. 5.21). На валу з кутовою швидкістю ω обертається невідносно велика маса m , віднесена від осі обертання на відстань r .

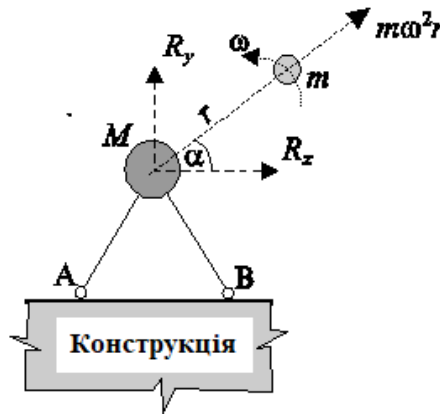


Рис. 5.21

Відцентрова сила $m\omega^2 r$, що виникає при цьому, в деякий момент часу t діє під кутом $\alpha = \omega t$. Таким чином, на вал діють сили $R_x = m\omega^2 r \cos(\omega t)$ і

$R_y = m\omega^2 r \sin(\omega t)$ (той факт, що слід докласти обидві ці сили, часто не береться до уваги).

Під час передачі цих сил на конструкцію слід врахувати, що верстат кріпиться до конструкції в точках А і В, розміщених на деякій відстані від осі обертання.



Питання:

У лекції було сказано, що використання формули (5.52) для підсумовування модальних відгуків призводить до втрати знаків реакцій. Чи є ще якісь інші неприємності, пов'язані з використанням (5.52)?

Відповідь:

Під час використання (5.52) не тільки губляться знаки окремих компонентів внутрішньої реакції споруди, а й порушується відповідність між переміщеннями, зусиллями, моментами, поперечними силами тощо. Зокрема, не виконується теорема Журавського. Це наочно ілюструє рис. 5.22.

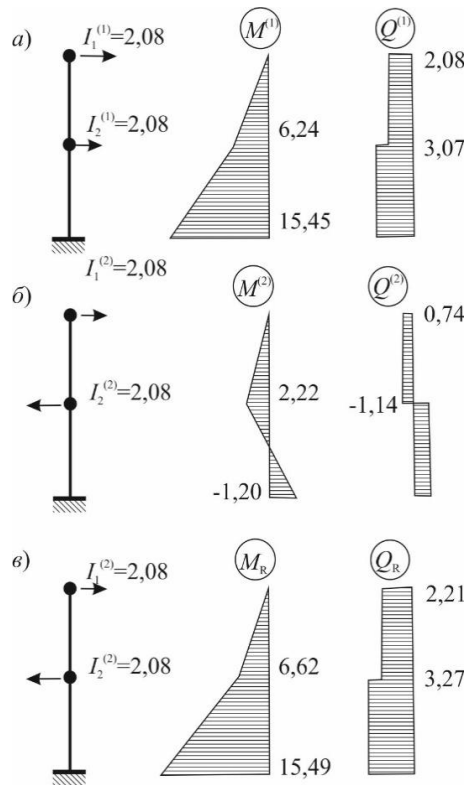


Рис. 5.22

Крім того, якщо перевіряти рівновагу вузлів, то виявиться, що в кожній формі власних коливань вона виконується, а в сумарному режимі рівновага відсутня.

Питання:

Що робити, якщо число динамічних ступенів свободи не дорівнює числу статичних ступенів свободи? Чи виникають тут якісь специфічні труднощі?



Відповідь:



Під час динамічного розрахунку n – число компонент вектора $\mathbf{u}$, з якими пов'язані інерційні сили (кількість динамічних ступенів свободи), дуже часто буває набагато меншим, ніж під час статичного розрахунку. Типовим прикладом можуть слугувати повороти вузлів, які зазвичай чинять значно менший динамічний вплив, ніж їхні лінійні зсуви, і тому їх не враховують у числі динамічних ступенів свободи (нехтування їхніми моментами інерції).

Якщо частина інерційних складових навантаження не враховується, то виникає завдання динамічного аналізу системи з неповним числом мас.

Для розв'язання цього завдання слід розділити компоненти вектора переміщень на дві частини, з яких перша частина $\mathbf{X}_0$ містить переміщення, для яких сили інерції дорівнюють нулю, а друга частина $\mathbf{X}_1$ – переміщення, пов'язані з інерційними силами, і тоді можна записати систему (5.31) у формі

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Із цієї системи виключається підвектор $\mathbf{X}_0$ і в результаті зазначеної процедури *статичного ущільнення* розмірність задачі модального аналізу різко зменшується, і ця задача набуває вигляду

$$(\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01}) \mathbf{X}_1 = \mathbf{0}. \quad (5.54)$$

Покажемо на прикладі, як реалізується ця ідея. Будемо розглядати балку, на якій розміщені дві точкові маси $m_1 = m$ і $m_2 = 2m$ (рис. 5.23,а). Довжина прогону $l=3$ м. Балка має постійну згинальну жорсткість $EI = \text{const}$ і нескінченно велику жорсткість щодо поздовжніх деформацій: $EA = \infty$.

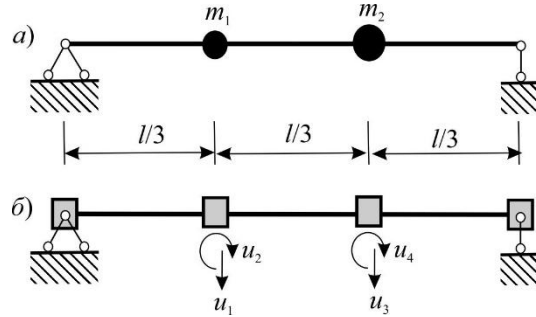


Рис. 5.23

Розрахункова модель балки з чотирма ступенями свободи u_1, u_2, u_3, u_4 представлена на рис. 5.23,б.

Матриця жорсткості будується за звичайними правилами і має вигляд

$$[K] = EI \begin{bmatrix} 0,555 & -0,333 & -0,444 & -0,666 \\ -0,333 & 2,333 & 0,666 & 0,666 \\ -0,444 & 0,666 & 0,555 & 0,333 \\ -0,666 & 0,666 & 0,333 & 2,333 \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

а система рівнянь, що описують вільні коливання:

$$\left. \begin{aligned} [0,555 - m\omega^2/(EI)] X_1 - 0,333X_2 - 0,444X_3 - 0,666X_4 &= 0 \\ -0,333X_1 + 2,333X_2 + 0,666X_3 + 0,666X_4 &= 0 \\ -0,444X_1 + 0,666X_2 + [0,555 - 2m\omega^2/(EI)] X_3 + 0,333X_4 &= 0 \\ -0,666X_1 + 0,666X_2 + 0,333X_3 + 2,333X_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

Друге і четверте рівняння з (5.56) не містять інерційних сил, з них слід виразити амплітуди переміщень X_2 і X_4 , а потім підставити їх у перше і третє рівняння.

Розв'язуючи спільно друге і четверте рівняння, знаходимо

$$\begin{aligned} X_2 &= 0,0667X_1 - 0,2667X_3; \\ X_4 &= 0,2667X_1 - 0,0667X_3. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Підставляючи отримані величини в перше і третє рівняння системи (5.56), отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} (0,355 - \lambda) X_1 - 0,311X_2 &= 0 \\ -0,156X_1 + (0,178 - \lambda) X_2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5.58)$$

де позначено:

$$\lambda = m\omega^2 / (EI). \quad (5.59)$$

Прирівнявши нулю визначник системи (5.58), можемо записати умову існування власних коливань:

$$\begin{vmatrix} (0,355 - \lambda) & -0,311 \\ -0,156 & (0,178 - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.60)$$

або

$$(0,355 - \lambda) \cdot (0,178 - \lambda) - 0,311 \cdot 0,156 = 0.$$

Розв'язання цього квадратного рівняння

$$\lambda = 0,2667 \pm 0,2373 = \begin{cases} 0,0294, \\ 0,5040, \end{cases}$$

а частоти власних коливань:

$$\begin{aligned} \omega_{0,1} &= \sqrt{0,0294EI/m} = 0,1715\sqrt{EI/m}, \\ \omega_{0,2} &= \sqrt{0,5040EI/m} = 0,7099\sqrt{EI/m}. \end{aligned}$$

Для визначення форм власних коливань відкинемо в системі (5.60) одне з рівнянь, наприклад, друге. У рівняння, що залишилося, підставимо значення першої власної частоти:

$$(0,355 - 0,0294)X_1 - 0,311X_3 = 0,$$

звідки, прийнявши $X_1^{(1)} = 1,0$, отримуємо $X_3^{(1)} = 1,0482$. А зі співвідношень (5.57) можна отримати:

$$X_2^{(1)} = -0,2128, \quad X_4^{(1)} = 0,1968.$$

Аналогічно обчислюються амплітуди переміщень другої форми власних коливань.

Під час розв'язування динамічних задач не обов'язково враховувати всі знайдені форми власних коливань, багато хто з них фактично не збуджуються під час конкретного зовнішнього впливу. Проблема коректного задання необхідного числа враховуваних форм власних коливань у загальному випадку вирішується методом спроб, оскільки отримати апіорну оцінку досить важко. Однак є й такі випадки, коли в нормативних документах, що регламентують розрахунок на той чи інший динамічний вплив, рекомендується врахування певного числа форм власних коливань. Так, наприклад, СНиП 2.01.07-85 обмежує діапазон частот, які слід враховувати під час розрахунку конструкцій на пульсації вітрового потоку, а СНиП II-7-81 регламентує використання щонайменше 10 форм коливань під час сейсмічного розрахунку бетонних гребель і щонайменше 15 форм для гребель із ґрунтових матеріалів. Більш послідовними є норми США й останні редакції вітчизняних норм, які вимагають, щоб сума узагальнених мас за формами власних коливань,

що враховуються, була не меншою, ніж деяка частина загальної маси системи.

Визначення відсотка утриманої маси особливо важливе в тих випадках, коли в нижній частині спектра містяться локальні форми коливань із низькою частотою. Одним з очевидних випадків такої ситуації є приклад будівель і споруд, підсистеми яких мають значно відмінні жорсткісні або інерційні характеристики (рис. 5.24).

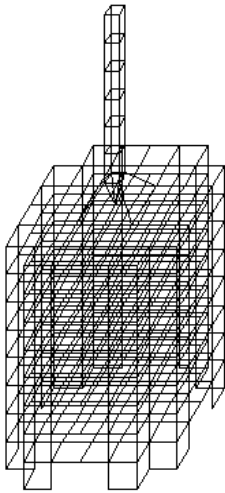


Рис. 5.24.

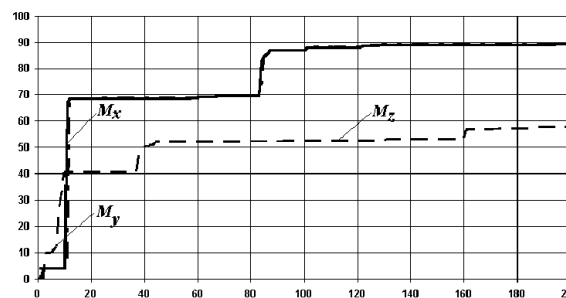


Рис. 5.25.

Для цієї конструкції на рис. 5.25 показано залежність відсотка утриманих мас за напрямками X, Y і Z від кількості врахованих форм власних коливань. Тут M_x , M_y , M_z – сума модальних мас відповідно під час впливу вздовж X, Y і Z. З цього рисунка видно, що перші 6-7 власних форм просто не впливають на рішення, оскільки вони пов'язані з локальними рухами легкої надбудови (витяжної труби) і реалізують відомий «ефект хлиста».

При виконанні норми про утримання певної частини загальної модальної маси споруди знижується ризик того, що якась дуже гнучка частина споруди («хлист»), практично ізолювані власні коливання якої визначають перші власні форми, буде врахована, а коливання всієї решти споруди виявляться проігнорованими.



Питання: Вище розглядалися випадки, коли коливання системи були викликані мінливими в часі силами, прикладеними до конструкції. Але сейсмічні коливання пов'язані з рухом основи, на якій розташовується споруда. Як у цьому випадку формулюється завдання?

Відповідь:

Будемо виходити з рівняння (5.27), яке в матричному вигляді матиме форму

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u} + \mathbf{Z}_0}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.61)$$

Тут враховано, що інерційні сили (перший доданок) визначаються абсолютними прискореннями мас, переміщення яких дорівнюють сумі переміщень основи $\mathbf{Z}_0$, спричинених землетрусом, і відносних переміщень $\mathbf{u}$, з якими пов'язані деформації споруди (рис. 5.26).

Переносячи задане прискорення основи в праву частину, отримаємо

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{Z}_0}{dt^2}. \quad (5.62)$$

Якщо зміщення основи $\mathbf{Z}_0$ не збігаються за напрямком із переміщеннями за ступенями свободи $\mathbf{u}$, то замість (5.62) слід записати

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{Z}_0}{dt^2} \mathbf{J}_x, \quad (5.63)$$

де $\mathbf{J}_x$ – вектор, компонентами якого є косинуси кутів між напрямком зміщення основи і переміщеннями за ступенями свободи системи.

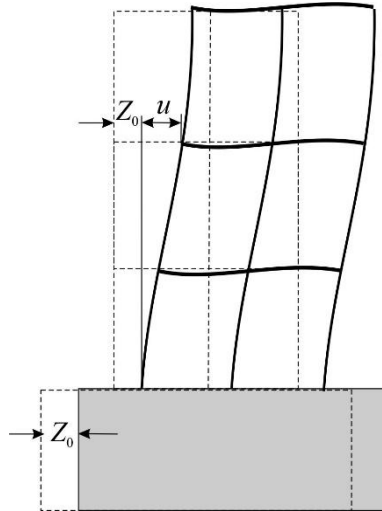


Рис. 5.26

У разі *лінійної* системи можна розв'язувати систему рівнянь (5.63) способом розкладання за формами власних коливань, розшукуючи рішення у формі

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Psi} \mathbf{X}(t), \quad (5.64)$$

де $\mathbf{X}(t)$ – вектор невідомих поки що нормальних координат, які є функціями часу, а не просторового положення точки. Їхня зміна у просторі цілком визначається видом форм власних коливань, що представлені стовпчиками матриці Ψ . Матриця Ψ задовольняє умови ортогональності

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \mu_j & j = k \end{cases}; \quad \Psi^T \mathbf{K} \Psi = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \omega_j^2 & j = k \end{cases}, \quad (5.65)$$

де ω_j – частота власних коливань системи за j -ю формою, а μ_j є відповідною цій формі *модальною масою*.

Підстановка (5.64) у (5.63) і множення зліва на матрицю Ψ^T дає

$$\Psi^T \Psi \ddot{\mathbf{X}} + \Psi^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \Psi \dot{\mathbf{X}} + \Psi^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \Psi \mathbf{X} = -\Psi^T \mathbf{Z}_0 \mathbf{J}_x$$

Якщо припустити (випадок пропорційного демпфірування), що для матриці дисипації $\mathbf{C}$ виконуються умови ортогональності, аналогічні (5.65), то система рівнянь розпадається на окремі рівняння виду

$$m_j \ddot{X}(t) + 2z_j w_j m_j \dot{X}(t) + w_j^2 m_j X(t) = -\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{J}_x \mathbf{Z}_0(t) \quad (j) = 1, \dots, n)$$

або, після ділення на μ_j

$$\ddot{X}(t) + 2z_j w_j \dot{X}(t) + w_j^2 X(t) = -G_j \mathbf{Z}_0(t) \quad (j) = 1, \dots, n), \quad (5.66)$$

де

$$\Gamma_j = \frac{\Psi^T \mathbf{M} \mathbf{J}_x}{\mu_j}.$$

Величина Γ_j називається *коефіцієнтом участі*, вона показує, який внесок робить j -та форми власних коливань у загальний відгук системи.

Рівняння (5.66) є рівнянням коливань одномасової системи з власною частотою ω_j і коефіцієнтом непружного опору ζ_j , розв'язок якого легко одержати для будь-якого заданого впливу за фіксованого значення опору ξ_j і заданої власної частоти ω_j (періоду власних коливань) $T_j = 2\pi/\omega_j$

Таким чином, за допомогою коефіцієнтів участі кінематичне збудження $\ddot{\mathbf{Z}}_0$ посідає місце в правій частині рівнянь динамічної рівноваги, тобто набуває форми сил, що діють на маси системи.

Питання:

Для системи з одним ступенем свободи було продемонстровано небезпеку виникнення резонансу в разі збігу частоти сили, що збуджує, з власною частотою. А як виникає резонанс у системах із багатьма ступенями свободи? Чи є тут додаткові особливості?




$$P_i = P_i^0 \sin \theta t \quad (i=1, \dots, n),$$
$$u_i = X_i \sin \theta t \quad (i=1, \dots, n),$$
$$\left. \begin{aligned} K_{11}X_1 + K_{12}X_2 + \dots + K_{1n}X_n - m_1\theta^2 X_1 &= P_1^0 \\ K_{21}X_1 + K_{22}X_2 + \dots + K_{2n}X_n - m_2\theta^2 X_2 &= P_2^0 \\ &\vdots \\ K_{n1}X_1 + K_{n2}X_2 + \dots + K_{nn}X_n - m_n\theta^2 X_n &= P_n^0 \end{aligned} \right\}$$
$$X_i = D_i/D \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Коли частота θ збігається з однією з власних частот, визначник D обертається на нуль, а амплітуди X_j — на нескінченність.

У системах із кількома ступенями свободи можна крім резонансу спостерігати і протилежне в деякому сенсі явище, яке можна назвати *антирезонансом* [5].

$$P = P_0 \sin \omega t .$$


Рівняння руху цієї системи мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} -k_1 u_1 + k_2 (u_2 - u_1) + P_0 \sin \omega t &= m_1 \ddot{u}_1 \\ -k_2 (u_2 - u_1) &= m_2 \ddot{u}_2 \end{aligned} \right\}$$

Нехай коливання відбуваються з частотою збуджувальної сили, тобто зміщення виражаються як:

$$u_1 = A_1 \sin \omega t, \quad u_2 = A_2 \sin \omega t.$$

Тоді для амплітуд повинні виконуватися умови

$$\left. \begin{aligned} -A_1 m_1 \omega^2 + k_1 A_1 - k_2 (A_2 - A_1) &= P_0 \\ A_2 m_2 \omega^2 + k_2 (A_2 - A_1) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

які дають такі рішення:

$$A_1 = \frac{P_0 (k_2 - m_2 \omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2},$$

$$A_2 = \frac{P_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}$$

Видно, що амплітуди залежать від частоти збудження, вони обертаються на нескінченність, коли знаменник у їхніх виразах стає таким. Що дорівнює нулю

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2 = 0,$$

а це свідчить про виникнення резонансів. Оскільки зазначена умова є квадратним рівнянням відносно квадрата частоти, то такі резонанси (корені рівняння) виникають на двох частотах. Ці резонансні частоти в точності дорівнюють власним частотам розглядуваної системи.

Але корисно зауважити, що в нуль може обернутися й амплітуда A_1 , що відбувається при частоті збудження

$$\omega^* = \sqrt{k_2 / m_2}.$$

За цієї частоти матимемо

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -P_0 / k_2.$$

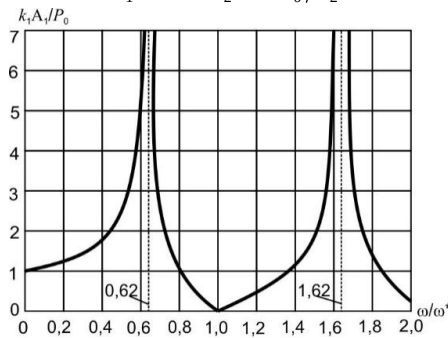


Рис. 5.28.

На особливу увагу заслуговує рівність $A_1 = 0$: перша маса залишається нерухомою, хоча саме до неї прикладено збурювальну силу. Цей дивовижний ефект неможливий у статичних задачах, а в задачі динамічній він виникає завдяки тому, що в місці прикладання збурювальної сили діє точно така ж, як і вона, за величиною і протилежна за напрямком, інерційна сила. На використанні явища антирезонансу побудовано численні конструкції *динамічних гасителів коливань*.

На рис. 5.28 показано зміну амплітуди A_1 залежно від частоти збудження ω^* , у випадку, коли $P_0=1$, $k_1=k_2=1$ і $m_1=m_2=1$. Тут чітко видно антирезонанс за $\omega=\omega^*$, а також два резонанси за $\omega=0,62$ і $\omega=1,62$.

Бесіда 5.7: Квazистатичний розрахунок і коефіцієнт динамічності



Одним із найпоширеніших способів наближеної оцінки динамічних ефектів від навантаження, значення або положення якого змінюється в часі, є використання *динамічного коефіцієнта*, на який множиться зазначене навантаження, що розглядається як статичне. Такого типу спрощений розрахунок називають *квazистатичним*.

Раніше (див. бесіду 5.3) динамічний коефіцієнт визначали як відношення амплітуди вимушених коливань $|u(t)|_{\max}$ до зміщення маси від статично прикладеної сили. З таким самим успіхом можна розглядати таке відношення для будь-якої з реакцій системи (внутрішньої сили, напруження або ін.) до відповідної статичної реакції. Але важливо зазначити, що в усіх таких випадках може йтися тільки про систему з одним ступенем свободи, і для цього необхідно звести конструкцію до еквівалентної системи з одним ступенем свободи («еквівалентного лінійного осцилятора»).

Дійсно, зазначені співвідношення, наприклад, для зміщень різних мас у системі з багатьма ступенями свободи не обов'язково однакові. Прикладом може слугувати система, показана на рис. 5.13, у якій динамічний коефіцієнт середньої маси дорівнює $\mu_1 = 8,66/24,3 = 0,36$, а для крайніх мас $\mu_2 = 12,51/11,7 = 1,17$.

Водночас у нормативних документах із проєктування ми часто зустрічаємо рекомендації щодо призначення динамічних коефіцієнтів до того чи іншого навантаження без жодної згадки про те, що розглядаються тільки системи з одним ступенем свободи. А в технічній літературі, присвяченій цим нормам, на додачу до всього йдеться про те, що динамічний коефіцієнт встановлено за результатами серії експериментів. У чому ж справа, чи немає тут протиріччя?

Зазначимо насамперед, що те, що зазвичай називають динамічним навантаженням, часто навантаженням у строгому сенсі цього слова не являється. Споруда зазнає впливу, що змінюється в часі, і під час руху споруди, викликаного цим збудженням, виникають інерційні сили, які в багатьох випадках і прийнято називати динамічними навантаженнями. Крім того, поняття про швидкість зміни навантаження не є абсолютним, ця швидкість завжди має бути виміряна з використанням природної для розглянутої конструкції одиниці часу, яка визначається періодом власних коливань.

Таким чином:

У загальному випадку динамічне навантаження невіддільне від динамічних властивостей споруди і часто являє собою не вплив, а результат взаємодії навантаження і споруди

Оскільки результати динамічного розрахунку залежать як від властивостей діючого навантаження, так і від властивостей конструкції, на яку це навантаження діє, то в загальному випадку значення динамічного коефіцієнта має сенс лише тоді, коли визначено обидві ці компоненти розрахункової моделі та, крім того, зазначено, по відношенню до чого цей коефіцієнт вводить.

Сказане вище стосується тих ситуацій, у яких частотні характеристики навантаження знаходяться в навіолорезонансній зоні. Якщо ж коливання відбуваються далеко від резонансу, то можна говорити про динамічний коефіцієнт деякого навантаження, визначаючи його як відношення динамічного впливу на конструкцію до його статичної складової. Досить типовим тут є випадок впливу рухомого навантаження, коли ефекти від ударів колеса на стиках рейок або інші динамічні ефекти рухомого складу створюють навантаження на підтримувальні конструкції, що перевищує навантаження від ваги рухомого вантажу.

Так виглядає справа, наприклад, коли говорять про динамічний коефіцієнт $k_d=1,1$ або $k_d=1,2$ для кранового навантаження (залежно від режимної групи роботи кранів). Для мостів у нормах проектування встановлюють різні значення динамічного коефіцієнта $(1+\mu)$, залежно від прогону (довжини ділянки лінії впливу), виду навантаження (рухомий склад залізниць або автомобільне навантаження) та від конструктивного рішення (балкові або аркові мости, сталеві або залізобетонні тощо). Ці коефіцієнти узагальнюють численні експериментальні дані, які регулярно отримують мостовипробувальні станції під час приймальних випробувань, а також дані спеціально поставлених досліджень, і також відносяться до значень максимальних компонентів внутрішніх зусиль і використовуються тільки під час перевірки конструкцій за першим граничним станом.

Зауважимо, наприклад, що для залізничних мостів значення $1+\mu$ змінювалися під час переходу від норм 1931-56 рр. до норм 1962 року і пізніших. Це пов'язано з тим, що раніше розглядалися навантаження від паровозів, які мають значні неврівноважені маси, а потім, як основне навантаження почали розглядати тепловози та електровози, у яких ці маси значно менші.

А повертаючись до загального випадку, коли конструкція заздалегідь невідома, іноді використовують модальні коефіцієнти динамічності. Їх застосовують до результатів розрахунку за кожною з форм власних коливань, тобто, по суті, до набору окремих систем, кожна з яких має один ступінь свободи.

Тут використовується той факт, що для системи з одним ступенем свободи, що перебуває під впливом деяких типів «стандартних» навантажень, відомі точні розв'язки динамічної задачі і, отже, вирази для коефіцієнта динамічності. До таких навантажень належать усілякі імпульсні впливи, графі-

ки коефіцієнтів динамічності для короткочасних впливів різної форми показано на рис. 5.29 залежно від відносної тривалості впливу $\tilde{\tau} = \omega\tau / (2\pi)$.

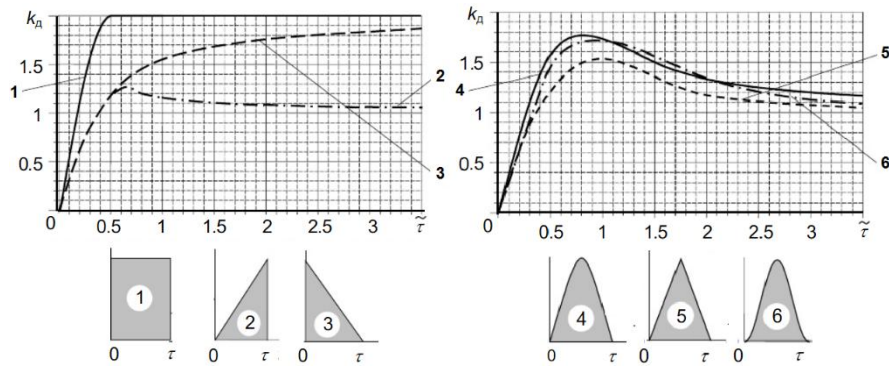


Рис. 5.29

Відомі й інші значення коефіцієнтів динамічності, наприклад, від удару падаючого літака [1], від вантажу, що вільно падає з висоти h , $k_d = 1 + \sqrt{1 + 2h / z_{ст}}$ ($z_{ст}$ – прогин у разі статичного прикладання сили, що дорівнює вазі падаючого вантажу) тощо.

Питання:

У сейсмічних нормах наведено значення «спектрального коефіцієнта динамічності β ». Що це таке?



Відповідь:

Це невдалий термін, який використовується тільки у вітчизняних нормах. У зарубіжних нормах цей самий коефіцієнт називається спектром реакцій (відгуку або відповіді), що більше відповідає фізичній сутності цього параметра під час розрахунку на сейсмостійкість. Дійсно, під коефіцієнтом динамічності зазвичай розуміють множник, що показує, у скільки разів реакція на динамічний вплив перевищує реакцію на статичний вплив. Але для сейсмічного впливу не існує такого статичного впливу, який треба множити на коефіцієнт динамічності. А з назви «спектральний коефіцієнт динамічності» не зрозуміла фізична сутність цієї величини.

По суті ж в основу нормативного розрахунку на сейсмічний вплив покладено так звану лінійно-спектральну теорію М. Біо. Ця теорія використовує прискорення маятників, що мали різні періоди власних коливань, під дією землетрусу. Максимальні значення прискорень цих маятників від впливу струсів основи під час реальних землетрусів подаються як функція періоду

власних коливань маятника (пробного осцилятора) і утворюють спектр реакцій, що слугує основою для визначення сейсмічного навантаження (рис. 5.30).

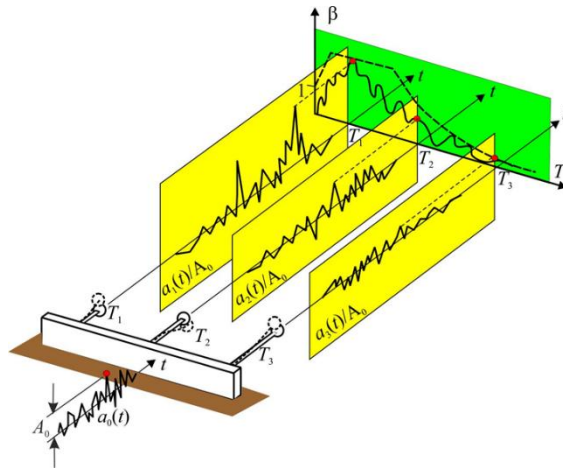


Рис. 5.30

Виходячи зі спектра відповіді, знаходять внесок кожної власної форми в сейсмічну реакцію споруди, а саме, визначають ті інерційні сили (сейсмічне навантаження), які виникають під час руху власними формами

Література

1. **Dritler K., Gruner P.** The Force Resulting from Impact of Fast-Flying Military Aircraft upon a Rigid Wall // Nuclear Engineering and Design, 1976, Vol. 37 — P. 245-248.
2. Динамічний розрахунок будівель і споруд (довідник проєктувальника) - М.: Стройиздат, 1984. (російською)
3. **Clough R., Penzien J.** Dynamics of Structures New York: McGraw Hill Book Co, 1975
4. **Panovko Ya.G.** Introduction to the theory of mechanical vibrations (in Russian) — Moscow: Science Publishers, 1971
5. **Panovko Ya.G., Gubanov I.I.** Stability and Oscillations of Elastic Systems: Paradoxes Fallacies and New Concepts — Springer US, 1965.
6. **Perelmuter A.V., Slivker V.I.** Numerical Structural Analysis — Berlin-Heidelberg: Springer, 2003.

Цикл 6

Після будівельної механіки



Будівельна механіка є теоретичним підґрунтям для низки більш конкретних дисциплін, таких як загальні курси будівельних конструкцій (металевих, залізобетонних, дерев'яних тощо) або як спеціальні курси на кшталт курсу мостів. Однак перехід від загальнотеоретичного обґрунтування до більш

конкретизованого розгляду задач міцності, жорсткості та стійкості конструкцій того чи іншого типу пов'язаний не тільки з проблемою вибору накопиченого всередині будівельної механіки інструментарію, а й найчастіше і з використанням деяких додаткових гіпотез або методик.

Останні часто присутні в рекомендаціях норм проектування, хоча внаслідок застарілої і по суті неправильної традиції в явній формі не описані. На жаль, ця ж традиція є і в навчальній літературі, де курси конструкцій, що містять і рекомендації з розрахунку, побудовані суто рецептурно і нагадують у цьому відношенні куховарську книгу. Іншими словами, як це сказано у відомій байці, з усім багажем, який має будівельна механіка, ще належить злетіти.

Якщо дотримуватися поширеної думки про те, що будівельна механіка має на меті розроблення методів розрахунку конструктивних систем на міцність і стійкість, то зміст цього циклу можна було б визначити як «біля будівельної механіки» або «після будівельної механіки».

Бесіда 6.1. Про метод розрахункових граничних станів

Як показує багатовіковий досвід будівництва, проблема міцності та безпеки споруд існувала завжди, актуальна вона і сьогодні. Розвиток філософії забезпечення безпеки проєктованих будівель і споруд відбувався окремими етапами, і у своєму основному руслі завжди розвивався під гаслом дедалі детальнішого прогнозування роботи конструкцій, вивчення природи навантажень, що діють на ці споруди, виразнішого опису вимог до конструктивної форми та умов виконання таких вимог.



Історія будівництва свідчить, що навіть у найдосконаліших стародавніх спорудах можна знайти грубі помилки, які виявляють незнання основ опору матеріалів і теорії споруд. Забобонний страх перед непізнаваною таємницею матеріалу змушував будівельників навіть звертатися по допомогу до потойбічних сил із залученням молитов (що триває й нині), змов і навіть жертвоприношень. З давніх часів професія будівельника вважалася вельми відповідальною, і можливі будівельні помилки мали дуже серйозні наслідки для тих, хто їх допускав.

Норми ж щодо забезпечення безпеки конструкцій були зазвичай вельми нечіткими. Зазвичай визнають, що найбільш ранні відомі письмові будівельні норми і правила включено до Кодексу Хаммурапі, що датується приблизно 1772 роком до н.е. Там сказано:

- якщо будівельник будує дім для когось, і не будує його належним чином, а дім, який він побудував, обвалюється і вбиває його власника, тоді цей будівельник має бути страчений;
- якщо вб'є сина власника, то син будівельника має бути страчений.

- якщо вб'є раба власника, то він має заплатити за раба власника будинку;
- якщо зруйнує товари, то будівельник повинен зробити компенсацію за все, що було зруйновано, і оскільки він не будував належним чином, і будинок, який він побудував, впав, він повинен повторно звести будинок за рахунок своїх власних коштів;
- якщо будівельник будує будинок для когось, навіть при тому, що він ще не закінчив будівництво, і якщо тоді стіни виявляться зруйнованими, то будівельник повинен зробити стіну за його власні кошти.
- якщо людина була недбайливою щодо зміцнення греблі, що знаходиться на її землі, то в покарання вона повинна відшкодувати збитки аж до продажу її самої в рабство.

Будівельні норми і правила можна відшукати навіть у Біблії (Второзаконня, глава 22, вірш 8): «Якщо будуватимеш новий дім, то зроби поруччя біля покрівлі твоєї, щоб не навести тобі крові на дім твій, коли хто-небудь упаде з нього».

Будівельники визначали міцність інтуїтивно, методом численних проб і помилок, вони вчилися оглядаючись на обвалення конструкцій. Кожна аварія додавала будівельникам нові знання, ставила нові завдання. Коли ж знань бракувало, в інженерні розрахунки вводили (і вводять зараз) *коефіцієнт запасу* і обмежували допустимі напруження. Оскільки ніхто не знав, які непередбачувані, непізнані явища враховує цей коефіцієнт і чи має він бути саме таким, а не меншим, він був по суті *коефіцієнтом незнання*.

Теоретичні основи розрахунку конструкцій сформульовані в методах будівельної механіки, яка оформилася як самостійна наукова дисципліна до середини XIX століття. З її появою з'явилася можливість встановити правила проектування споруд. Уперше в будівельну науку коефіцієнт запасу ввів знаменитий французький інженер і вчений К. Л. М. А. Нав'є, який запропонував у 20-ті роки XIX століття встановити розрахункові допустимі напруження, що мають бути набагато меншими від тих, що руйнують, за яких конструкція має працювати надійно.

У.Дж. Ренкін, знаменитий шотландський інженер, фізик і механік, визначив коефіцієнт запасу як відношення межі міцності матеріалу до максимально допустимого напруження під час дії дійсного або робочого навантаження на конструкцію. Ренкін також вказав на відмінність між постійно діючим навантаженням, яке може бути точно визначене, і тимчасовим навантаженням, величина якого не може бути встановлена з такою ж точністю. Він вважав прийнятним значення коефіцієнта запасу $k=4,0$.

До кінця XIX і початку XX століття це допустиме робоче напруження було включено до будівельних норм для різних матеріалів і будівельних конструкцій.

Допустимі напруження, прийняті в різних країнах, помітно відрізнялися одне від одного. Так, в Англії для конструкційної сталі допустимі зусилля ґрунтувалися на чотирикратному запасі *міцності по відношенню до середньої границі міцності*, що дорівнювало приблизно 432-494 Н/мм². Лондонсь-

кий закон 1909 року Ради графства визначив допустиме напруження під час вигину, розтягування і стиснення величиною 116 Н/мм^2 . Для конструкцій зі зварювального заліза в Росії Урочним положенням були встановлені допустимі напруження, що дорівнюють приблизно 80 Н/мм^2 для розтягування і 65 Н/мм^2 для стиснення. А в Німеччині ці величини відповідали 115 і 95 Н/мм^2 .

Пізніше значення допустимих напружень неодноразово переглядалися, і до сорокових років двадцятого століття для сталевих конструкцій вони приблизно відповідали двократному коефіцієнту запасу, *але вже стосовно бракувального мінімуму границі плинності σ_t , а не до середньої границі міцності*.

У Радянському Союзі, наприклад, для сталі марки Ст3 значення σ_t приймалося 240 Н/мм^2 . Коефіцієнт запасу враховував багато чинників, що несприятливо впливали на роботу конструкцій і, зокрема, залежав від кількості та характеру навантажень, на які розраховували конструкцію. До 1942 року найбільший коефіцієнт запасу $k=1,7$ і найменше допустиме напруження $[\sigma]=140 \text{ Н/мм}^2$ приймали під час розрахунків на навантаження, які діяли постійно або часто збігалися, наприклад, постійні навантаження і сніг. У разі врахування більшої кількості і більш випадкових навантажень (вітер ураганної інтенсивності, вплив температури) допустиме напруження приймали $[\sigma]=170 \text{ Н/мм}^2$, а $k=1,4$. У 1942 році значення допустимих напружень було підвищено до 160 і 180 Н/мм^2 . Коефіцієнти запасу приймалися відповідно $1,5$ і $1,33$.

Спочатку, тобто наприкінці XIX століття, залізобетонні конструкції також розраховували за допустимими напруженнями, ґрунтуючись на законах поведінки пружних матеріалів. Але вже 1904 році А.Ф. Лоллейт у своїй роботі «Про коефіцієнт міцності залізобетонних споруд» показав, що розрахунок залізобетонних елементів, що згинаються, за пружною стадією їхньої роботи абсолютно неприпустимий. Він писав: «критичне навантаження, що відповідає миттєвій рівновазі, яка безпосередньо передує руйнуванню... дає можливість визначити запас міцності з точністю, що задовольняє найсуворішим вимогам практики».

Ідеї Артура Фердинандовича Лоллейта (як і аналогічні ідеї американського інженера Чарльза С. Вітні) увійшли в практику в 30-х роках XX століття. Однак перехід від граничного напруження до граничного зусилля не змінив основної парадигми розрахунку за допустимими напруженнями. Просто замість граничного напруження матеріалу на коефіцієнт запасу ділилося граничне навантаження залізобетонного елемента.

Таким чином, починаючи з XIX століття, метод допустимих напружень на основі коефіцієнта запасу, який встановлювали на основі інженерної інтуїції, досвіду проектування та експлуатації конструкцій, використовували в будівельних розрахунках до 50-х років XX століття.

Тим часом у низці робіт обґрунтовувалися пропозиції щодо розвитку методів розрахунку конструкцій. У 1926 році М. Маєр запропонував замість розрахунку за допустимими напруженнями використовувати ймовірнісні методи для вибору значень параметрів, що вводяться в розрахунок [21]. У

1929 році Н.Ф. Хоціалов, беручи до уваги мінливість основних параметрів, запропонував виконувати проєктування конструкцій, виходячи з деякої регламентованої ймовірності аварійної відмови конструкції. Однак, формулювання М.Ф. Хоціалова «Проектиувати з урахуванням можливості аварії» зустріло сильний опір, і його ідеї були надовго відкинута. Істотним розвитком ідей М. Майєра і Н.Ф. Хоціалова стали роботи М.С. Стрілецького, В. Вержбицького і А.М. Фрейденталя [Ошибка! Источник ссылки не найден., 19], де як випадкові величини використовували не тільки характеристики міцності матеріалу, а й параметри навантажень, при цьому йшлося вже про ймовірність відмови у вигляді порушення деяких регламентованих вимог, а не про ймовірність аварії.

Однак метод розрахунку конструкцій за допустимими напруженнями має й низку інших недоліків, до головних із яких можна віднести такі: усі конструкції розраховували з єдиним коефіцієнтом запасу незалежно від видів навантажень і умов роботи елементів конструкцій; коефіцієнт запасу не враховував експлуатаційних вимог.

Тому істотним етапом у розвитку розрахунку конструкцій з'явився напівоімовірнісний метод розрахункових граничних станів, який, за ідеєю, позбавлений зазначених недоліків і, по суті, реалізує практичний варіант використання деяких положень імовірнісного підходу. Будучи за формою детермінованим, він ґрунтується на використанні методів статистичного аналізу при знаходженні коефіцієнтів надійності, характерних для цього методу. Умовна система згаданих коефіцієнтів надійності була запропонована в 1945 році І.І. Гольденблатом, М.Г. Костюковським і О.М. Поповим і покладена в основу схеми розрахунку для розроблення будівельних норм і правил.

Метод розрахункових граничних станів було запроваджено в СРСР як керівний принцип розрахунків будівельних конструкцій з 1 січня 1955 року під час затвердження першого видання Будівельних норм і правил. Надалі розрахунок за граничними станами набув широкого визнання в усьому світі й наразі його покладено в основу більшості міжнародних і національних стандартів із проєктування, зокрема в системі Єврокодів, де він дістав назву «метод часткових коефіцієнтів надійності» [18].

Дві назви – «метод граничних станів» і «метод часткових коефіцієнтів надійності» – відображають найсуттєвіші сторони методу, при цьому кожна з цих сторін має певну незалежність.

Якщо розглядати цей метод з погляду використання граничних станів, то потрібно пам'ятати, що в основі методу лежить ідея відмови від детального аналізу всіх станів конструкції, окрім граничних, щодо яких і формулюються розрахункові вимоги до об'єкта. Такий підхід, окрім відомих переваг, має і серйозний недолік, оскільки, прийнявши, наприклад, за один із граничних станів умову міцності та запроектвавши конструкцію так, щоб із певним ступенем упевненості можна було казати, що впродовж усього терміну експлуатації цю умову не буде порушено, ми майже нічого не можемо сказати про те, який рівень фактичних напружень буде відповідати нормальному

(неграничному) стану за найпоширеніших умов експлуатації, які найчастіше реалізуються.

Наприклад, норми проєктування залізобетонних конструкцій побудовані на ідеї розгляду граничного стану перерізу, коли внаслідок пластичної деформації арматури досягли граничного значення і напруження стискання в бетоні. Але в нормальних умовах ця гіпотеза А.Ф. Лоллейта не виконується і реалізується зовсім інша картина напруженого стану. Саме вона має бути покладена в основу вивчення таких, наприклад, реологічних процесів, як плинність.

Стани конструкції, що найчастіше реалізуються в умовах експлуатації, найчастіше визначають і її довговічність. Але з погляду граничного аналізу майже рівноправними можуть виявитися конструкція греблі, звичайний рівень навантаження якої не дуже далекий від гранично припустимого (наприклад, він становить 80% розрахункового), і конструкція димаря, в якій поява розрахункового навантаження є досить рідкісною подією, а звичайне навантаження відповідає, наприклад, 15% розрахункового.

Якщо ж фіксувати увагу на системі часткових коефіцієнтів надійності, то побачимо, що відбулася заміна одного загального коефіцієнта запасу добутком кількох (часткових) коефіцієнтів, кожен із яких пов'язаний із певною проблемою безпеки – характером навантаження, властивостями матеріалу, ступенем відповідальності об'єкта тощо.

Ця складова методу граничних станів мала позитивним наслідком значну активізацію досліджень зазначених коефіцієнтів і розвиток норм проєктування. Саме деталізація в застосуванні комбінації часткових коефіцієнтів надійності забезпечує (точніше, має забезпечувати) ситуацію рівної ймовірності реалізації граничного стану розглянутих вище двох об'єктів, звичайний стан яких різко відрізняється ступенем близькості до граничного.

Але й тут є певна неузгодженість, оскільки ми можемо покладатися на рівнонадійність тільки стосовно тих чинників (наприклад, зовнішніх впливів), які бралися до уваги під час проєктування і статистичні характеристики яких використано під час призначення розрахункових коефіцієнтів методу. І в разі деякого не передбаченого проєктом (і нормами) випадкового збурення ймовірність вичерпання 20% запасу в першому випадку набагато вища, ніж вичерпання 85% запасу в другому випадку.

У другій половині XX століття було виконано численні роботи, присвячені становленню й удосконаленню ймовірнісних методів, тобто по суті тривала робота з підготовки переходу до наступного етапу розвитку розрахунків конструкцій – безпосереднього розрахункового оцінювання надійності конструкцій. Однак при цьому встановилася традиція ототожнювати надійність тільки з безвідмовністю, і це стало майже стандартом у роботах як вітчизняних, так і зарубіжних дослідників.

В основоположних стандартах вводяться дві групи граничних станів: 1-ша група охоплює граничні стани, що призводять до повної непридатності об'єкта до експлуатації, 2-га – граничні стани, що ускладнюють нормальну експлуатацію об'єкта або зменшують його довговічність порівняно з

передбаченим терміном служби. У попередніх виданнях норм і стандартів розглядали і 3-тю групу граничних станів щодо утворення або надмірного розвитку тріщин, однак потім від її окремого розгляду відмовилися.

*Відповідно до чинних норм розрахунку конструкцій за методом граничних станів припускають, що експлуатація будівлі або споруди припиниться раніше, ніж буде вичерпано її фактичну несівну здатність, і цей факт став одним із **постулатів** методу розрахунку за граничними станами.*

Саме таким чином формулює умову першого граничного стану ДСТУ 27751-88, що діяв багато років, де до граничних станів 1-ї групи віднесено «... граничні стани, що призводять до повної непридатності до експлуатації конструкцій, основ (будівель або споруд загалом) або до повної (часткової) втрати несівної здатності будівель і споруд загалом». Це формулювання передбачає, що окрім втрати несівної здатності як критерій граничного стану 1-ї групи можуть мати місце й такі події, як припинення експлуатації у зв'язку з економічною недоцільністю подальшого утримання. Таким чином, наприклад, завершила своє існування вежа Київського телецентру, побудована на Хрещатику на початку 50-х років, для якої перехід до нових типів антен виявився пов'язаним із надто дорогою модернізацією. Іншими словами, формулювання ДСТУ 27751-88 передбачає серед причин переходу до граничних станів 1-ї групи не тільки фізичний, а й моральний знос.

До речі, сам термін «повна непридатність об'єкта до експлуатації» в кожному конкретному випадку потребує визначення. Якщо в старій будівлі виходить з ладу водопостачання, ми можемо вирішувати, чи варто встановлювати нові труби, чи знести будівлю. Якщо будівля становить історичний інтерес, можна перетворити її на нежитлове музейне приміщення, і в цьому випадку ми встановлюємо непридатність будівлі як житлового будинку.



Рис. 6.1.

Багато відомих старих будівель і пам'ятників фактично давно вийшли з ладу в цьому сенсі. Наприклад, піраміди в Гізі (рис. 6.1) часто наводять як приклад довговічності, але в строгому сенсі слова вони вже давно вийшли з ладу. Вони більше не слугують і не можуть слугувати тій меті, для якої були призначені, поверхня їхніх граней сильно зруйнована.

Обґрунтовуючи наведений вище постулат (припинення експлуатації передусім вичерпанню несівної здатності), вказують на те, що діаграма роботи матеріалу не є ідеальною (рис. 6.2, а), а має зростаючу гілку (рис. 6.2, б) або на те, що поступова втрата зв'язності статично невизначених систем відбувається не в усіх видах конструкцій, проте ці доводи стосуються не всіх видів конструкцій і не всіх форм вичерпання несівної здатності (наприклад, раптових відмов на кшталт втрати стійкості або крихкого руйнування). Саме з цим, мабуть, пов'язаний двоїстий характер формулювання ДСТУ 27751-88.

Формально виходить, що аварійні обвалення є в певному сенсі занормативними подіями, і статистику аварій не можна використати для оцінювання фактичного рівня надійності, оскільки до цієї статистики не внесено багато випадків безаварійного зняття конструкцій з експлуатації.

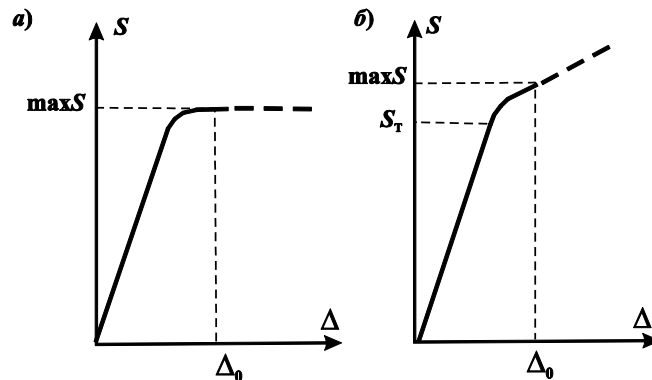


Рис.6.2.

У певному сенсі послідовнішими є укладачі міжнародного стандарту ISO 2394 [20], які визначили, що

«3.1.1. ... граничні стани 1-ї групи, які відповідають максимальній несівній здатності (пов'язані з безпекою)»

або Єврокоду-0 [18], де зазначено, що:

«3.3. (1) Абсолютні граничні стани (ultimate limit state) – це такі граничні стани, що асоціюються з руйнуванням або з іншим подібним видом відмови.

(2) Стани, що безпосередньо передують руйнуванню, які для простоти розглядаються замість руйнування як такого, належать також до абсолютних граничних станів.

(3) Абсолютні граничні стани мають відношення до:
безпеки конструкції та її оточення;
безпеки людей».

Аналогічне трактування мають і вітчизняні норми, де вводяться такі граничні стани:

- перша група граничних станів – стани будівельних об'єктів, перевищення яких веде до втрати несівної здатності будівельних конструкцій;
- друга група граничних станів – стани, при перевищенні яких порушується нормальна експлуатація будівельних конструкцій, вичерпується ресурс їхньої довговічності або порушуються умови комфортності;

В останні роки все частіше розглядаються також *особливі граничні стани* – стани, що виникають під час особливих впливів і ситуацій і перевищення яких призводить до руйнування будівель і споруд із катастрофічними наслідками.

Зв'язок між вимогами надійності та розрахунком за граничними станами зазвичай вважається очевидним і вказується за допомогою простого ототожнення відмови (основного поняття теорії надійності) з досягненням граничного стану. І хоча поняття відмови загалом ширше за перелік ситуацій, що пов'язуються з граничними станами, як перше наближення з цим можна погодитися.

Слід також зауважити, що і в нормативній, і в науковій літературі з надійності будівельних конструкцій за традицією практично розглядаються тільки принципи забезпечення надійності, засновані на забезпеченні «безпечного ресурсу», тобто тією чи іншою мірою зводяться до призначення запасів несівної здатності конструкцій. Шлях забезпечення надійності, пов'язаний із проведенням контрольно-перевірочних робіт, ремонтом і заміною частин конструкцій та іншими діями під час експлуатації, досліджений набагато меншою мірою і практично не унормований.

Водночас за ширшого погляду на надійність слід було б розглянути весь комплекс проблем, що призводять до можливих відмов (рис. 6.3). Тоді стануть очевидними місце і роль норм проектування в забезпеченні надійності, а також їхній взаємозв'язок із проблемами контролю та його повною достовірністю.

Схема формування потоку відмов, зображена на рис. 6.3, містить усі основні етапи життєвого циклу (проектування, заводське виготовлення, роботи на будмайданчику та технічна експлуатація), які зображені жирними прямокутниками. Світлими прямокутниками показано нормативні документи, що регламентують згадані етапи, затіненими – процеси, що реалізуються під час створення конструкцій. Використання рекомендацій і регламентуючих вказівок нормативних документів лише частково перешкоджає виникненню помилок на відповідних етапах роботи. А самі процеси життєвого циклу можуть породжувати помилки, які, за ідеєю, мають парироватися відповідними контрольними процедурами, проте жоден

контроль не може гарантувати абсолютну відсутність помилок, і частина з них потрапляє на наступні етапи життєвого циклу конструкції.

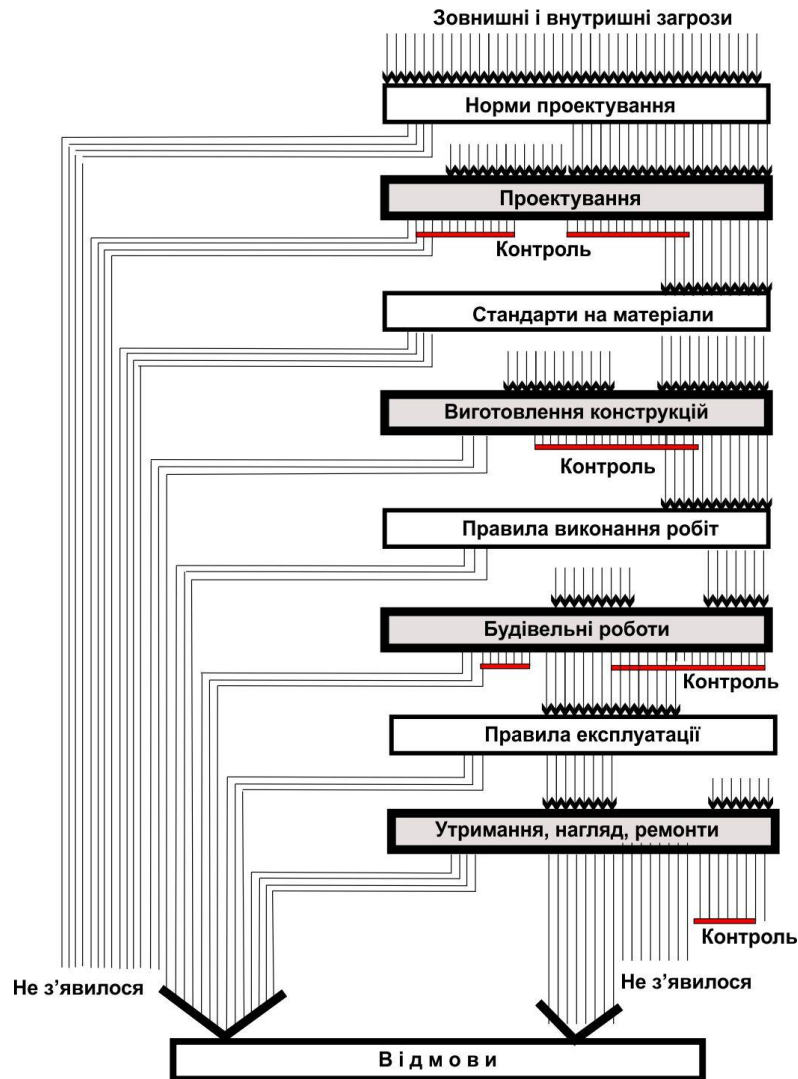


Рис.6.3.

Об'єктивні та суб'єктивні небезпеки зображено у вигляді двох потоків, конфігурація яких умовно характеризує ступінь допущення об'єктивних небезпек і можливість накопичення помилок.

Слід зазначити, що небезпеки можуть не тільки накопичуватися під час переходу від одного етапу до іншого, а й взаємодіють одна з одною, і помилки, допущені на одному етапі життєвого циклу,

стимулюють помилки іншого етапу

Найпростішим прикладом може слугувати помилка під час вибору об'ємно-планувального рішення (етап проектування), що ускладнює доступ до конструкції і, як наслідок, ініціює помилку на етапі технічної експлуатації через неякісний догляд за конструкцією.



Питання:

Відомо, що за кордоном впровадження методу розрахункових граничних станів розтягнулося на десятки років. Чи пояснюється це простим незнанням робіт вітчизняних учених, чи тут мали місце інші міркування?

Відповідь:

Вважаю, що основну роль тут відіграла відсутність у середині 50-х років необхідного статистичного матеріалу для обґрунтування значень часткових коефіцієнтів надійності (про це чесно говорили автори методу, які при цьому поклалися на майбутні дослідження, а на перших порах підганяли результати під рішення, перевірені попереднім досвідом).



У західних країнах, де не прийнята командна система впровадження нововведень, це не давало можливостей переконати інженерну громадськість у терміновій необхідності зміни підходу до проектування, тим паче, що підгонка під попередній досвід не давала помітного економічного ефекту. Зокрема, деякої економії було досягнуто для конструкцій, на які діють переважно постійні навантаження з мінімальними коефіцієнтами перевантаження, а саме, економія 3...10% для кроквяних і підкrokвяних ферм, тоді як підкранові балки залишилися практично незмінними, а колони виробничих будівель або залишилися без змін, або навіть стали дещо важчими.

Слід зазначити, що і в західних нормах ідея наступності також присутня. Так у передмові до британського стандарту CP110 [16] стверджується, що «... відповідні статистичні дані недостатні, щоб дозволити методу часткових коефіцієнтів надійності бути розвиненим у повній згоді з теорією ймовірності, і значення коефіцієнтів, що використовуються, були засновані на поточній практиці». Однак було сказано, що метод часткових коефіцієнтів надійності має перевагу, яка полягає в тому, що «Згодом це спростить внесення поправок до Кодексу, у міру того як нове знання стає доступним щодо змін у навантаженнях і опорах».

А під час формування Єврокодів Європейська комісія з нормування (CEN) зіткнулася з тим, що частина країн, у яких використовували метод розрахункових граничних станів, побоювалася, що деякі розрахунки, засновані на методі допустимих напружень, вкажуть на формальне порушення вимог методу граничних станів. Інші країни, в яких використовували метод допус-

тимих напружень, вказували, що вже побудовані споруди виявляються менш економічними при перерахунку за граничними станами. Таким чином, сучасні Єврокоди – це результат компромісу, і тільки в наступних редакціях Єврокодів можна очікувати повної ймовірнісної обґрунтованості всіх нормативних вимог.



Питання:

Яка роль будівельної механіки в тих етапах життєвого циклу за рис. 6.2, які виходять за межі проектування?

Відповідь:

Розрахункові проблеми, взагалі кажучи, виникають на всіх етапах життєвого циклу конструкції і тому звернення до методів будівельної механіки неминуче. Як приклад вкажемо лише на завдання, про які майже не згадують в університетських курсах.



Перше з таких завдань виникає під час випробувань будівельних конструкцій, а самі випробування можуть бути, наприклад, приймальними під час введення в експлуатацію, або регулярними контрольними випробуваннями масових конструкцій в умовах заводського виготовлення. Тут потрібно розв'язати принаймні дві розрахункові задачі – вибрати схему (набір схем) контрольного навантаження максимально ефективну з погляду перевірки міцності всіх елементів конструкції, а також виробити переконливий показник, що оцінює відповідність результатів випробування необхідному рівню якості.

Друга задача пов'язана з організацією моніторингу експлуатованої конструкції, коли необхідно знайти найбільш інформативний набір контрольованих параметрів, а також розробити методику оцінювання стану конструкції за результатами їхнього вимірювання. Типовою тут можна назвати проблему вібродіагностики наявної конструкції, коли за допомогою вимірювання тренду значень власних частот намагаються оцінити рівень пошкодженості.

Останній напрямок став вельми модним і тому варто зробити наступне попереджувальне зауваження. Деякі автори пропонують визначати динамічні характеристики конструкції шляхом аналізу результатів впливів малої інтенсивності (наприклад, природних мікросейсмів). Але динамічні характеристики будівлі, отримані під час збудження впливами малої інтенсивності, відповідають динамічній системі, що охоплює не тільки несівні конструкції будівлі, а й комплекс другорядних ненесівних елементів, які під час розрахункових навантажень виключаються з роботи. Таким чином, результат може стосуватися не тієї системи, яка нас цікавить.

Питання:

Перший граничний стан зазвичай пов'язують із досягненням будь-яким параметром конструкції критичного значення (досягнення границі міцності, втрата стійкості рівноваги тощо). А що можна сказати з цього приводу щодо другого граничного стану?



Відповідь:

Найчастіше тут є помітна невизначеність і призначення якихось границь багато в чому є умовним. Але останнім часом (див., наприклад, Єврокод-0 [18]) намагаються розрізняти зворотні та незворотні варіанти другого граничного стану.

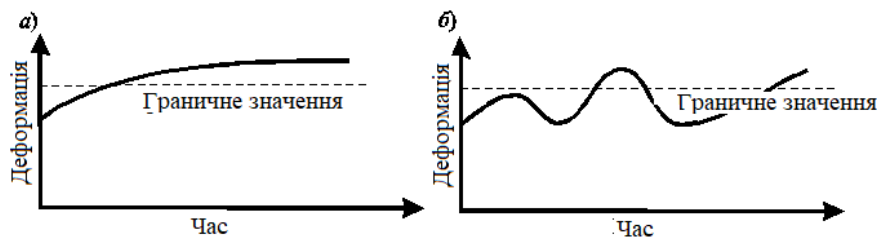


Рис. 6.4

Незворотні граничні стани (рис. 6.4,а) – це такі стани, що не зникають і після того, як ті впливи, що їх спричинили, припинилися (наприклад, локальне пошкодження або деформації від повзучості бетону). А зворотні граничні стани (рис. 6.4,б) не розвиваються, а інколи зникають після того, як ті впливи, що їх спричинили, припинились (наприклад, переміщення під дією вітрового навантаження або надмірна вібрація).

Для незворотних граничних станів другої групи граничні значення встановлюються з міркувань експлуатаційної придатності, які в деяких випадках можна визначити достатньою мірою об'єктивно, але найчастіше такі границі є в певному сенсі умовними. Наприклад, важко довести, що прогин в 1/250 прогону ще є допустимим, а вже при значенні 1/245 – неприпустимим.

Для зворотних граничних станів часто встановлюється частка часу, протягом якої такий стан може бути порушено. Наприклад, для гостроспрямованого радіозв'язку, коли помітні кути повороту антенних пристроїв знижують якість приймання, може бути умовно прийнято, що таке погіршення якості зв'язку допустиме протягом 5% часу. Такий підхід регламентовано українськими нормами [Ошибка! Источник ссылки не найден.].

Питання:

Перевірка міцності та стійкості конструкцій виконується з використанням розрахункових поєднань внутрішніх зусиль. Але в нормах проектування правила вибору цих сполучень не сформульовані. Більш того, на практиці використовують різні методики і результати при цьому не збігаються. Прокоментуйте.



Відповідь:



Практично відсутні конструкції, які проектують для сприйняття тільки одного варіанта навантаження, і реальне проектування несівних конструкцій – це проектування систем, що піддаються багатьом незалежним варіантам навантаження, кожне з яких створює свою картину внутрішніх зусиль в елементах системи.

Проблема вибору розрахункових сполучень зусиль (РСЗ) є однією з центральних у процесі проектування несівних конструкцій.

У більшості робіт із цієї проблеми основою вибору слугує принцип суперпозиції, що передбачає виконання розрахунків як для системи, що працює лінійно. Лінійність передбачає також, що деяке завантаження або увійде в РСЗ цілком, або буде відкинуте (якщо воно створює розвантажувальний ефект), і, отже, можна собі уявити лише $2n$ сполучень (де n – кількість завантажень), з яких слід зробити вибір. Очевидно, що за реальних значень параметра n кількість можливих комбінацій стає настільки великою, що розв'язання задачі прямим перебором варіантів виявляється нереальним.

І тут одразу ж слід сказати, що розрахунок з урахуванням геометричної або фізичної нелінійності, по суті, потребуватиме деякого вгадування розрахункової комбінації, оскільки для такої ситуації алгоритм вибору РСЗ досі не знайдено.

Що стосується лінійних систем, то одним із використовуваних і до сьогоднішнього дня правилом вибору РСЗ є такий алгоритм:

- визначити поєднання, за якого реалізується максимум моменту, і знайти відповідні йому поздовжню і поперечну сили;
- визначити поєднання, за якого реалізується мінімум моменту, і знайти відповідні йому поздовжню і поперечну сили;
- визначити поєднання, за якого реалізується максимум поздовжньої сили, і знайти відповідні йому момент і поперечну силу тощо.

Таке правило є традиційним і представлене в багатьох підручниках (див., наприклад, [Ошибка! Источник ссылки не найден.]). Однак, тут є певний ризик пропустити небезпечні ситуації. Ідея контрприкладу зрозуміла з рис. 6.5, де точками в координатах $M-N$ показано значення для деяких навантажень та їхніх комбінацій. Екстремальні значення визначає показаний пунктиром прямокутник, що проходить через точки 1, 3, 6, 8, і саме ці комбінації лягають в основу добору перерізів, коли використовується традиційне правило добору невідгінних поєднань. Несівна здатність підбраного перерізу, пов'я-

зана з екстремальними напруженнями $-R_t \leq N/A \pm M/W \leq R_c$, така, що нею визначається затемнений прямокутник, який, безумовно, накрив розрахункові точки 1, 3, 6, 8.

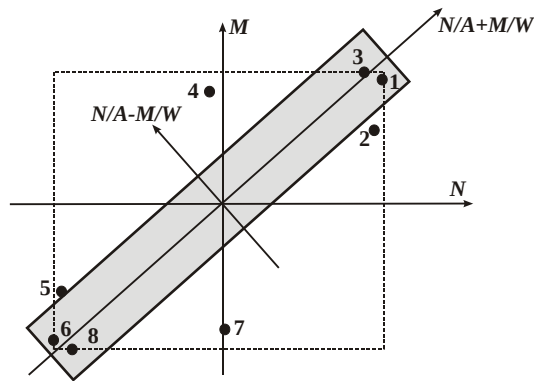


Рис. 6.5.

Однак інші точки, наприклад 4 і 7, залишилися поза областю несівної здатності, а оскільки вони не визначали розрахункові поєднання зусиль, то перевірка за цими варіантами навантаження не буде виконуватися. Безумовно, правило «екстремальне зусилля і відповідні йому інші зусилля» не гарантують надійності ухвалення рішень.

Тому було запропоновано інші алгоритми, що враховують, зокрема, і логічні зв'язки між навантаженнями, які відображають їхній фізичний сенс, і вимоги, регламентовані різними нормативними документами. Але, на жаль, традиційне правило, ненадійність якого була доведена майже півстоліття тому, залишається в обіймі інструментів інженера. Воістину, немає нічого складнішого, ніж спростування міфів.

Бесіда 6.2. Умовний і реальний коефіцієнт запасу



У попередньому розділі вже зазначалося, що в основі методу граничних станів лежить ідея відмови від детального аналізу всіх звичайних (нормальних, експлуатаційних) станів конструкції. Концентрація уваги тільки на відмовних станах із практичним акцентом на перший граничний стан як такий, що визначає конструктивну форму, є не тільки перевагою методу, що розглядається.

Оскільки основний час життя конструкції відповідає станам нормальної експлуатації та саме для таких станів відбуваються деструктивні зміни в матеріалі конструкції (наприклад, корозійні процеси або накопичення втомних ушкоджень), то з позицій забезпечення експлуатаційної надійності та довговічності визначальним стає аналіз конструкції, яка нормально працює та є далекою від вичерпання міцності та стійкості. Для багатьох параметрів споруди визначальну роль можуть відігравати розрахунки в експлуатаційній стадії. З цього приводу Л.І. Іосилевський [Ошибка! Источник ссылки не найден.] зауважує: «Інакше, як провалом у методології розрахункового прогнозу поведінки несівної конструкції під навантаженнями, не можна назвати втра-ту інженером розрахункового контролю за спорудою в період переходу її від «здорового» (нормального, експлуатаційного) до граничного стану... Утворений логічний вакуум між експлуатаційним і граничним (аварійним) станом неприпустимий».

Здавалося б, що наявність перевірок за другим граничним станом ліквідує цей методологічний провал, але річ у тім, що і ця група станів є граничною, тобто відповідає крайнім станам параметрів споруди та довкілля, які трапляються досить рідко. Наприклад, для конструкцій, що працюють під впливом снігового або вітрового навантаження, їхні нормативні значення реалізуються один раз на п'ять-сім років, і відстоять від нормального експлуатаційного стану досить далеко.

У більшості випадків основна нерівність методу розрахункових граничних станів подається у формі

$$\Psi \cdot \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot F_n \leq \gamma_c \cdot \gamma_m \cdot R_n \quad (6.1)$$

де Ψ , γ_c , γ_f , γ_m , γ_n – відповідно коефіцієнт сполучень навантажень, коефіцієнт умов роботи і коефіцієнти надійності щодо навантаження, за матеріалом і за відповідальністю споруди; F_n та R_n – нормативні¹⁶ значення узагальнених впливу та опору, за якими оцінюються граничні стани.

¹⁶Останнім часом його часто називають характеристичним значенням.

Іноді величину

$$K = (\psi \cdot \gamma_n \cdot \gamma_f) / (\gamma_c \cdot \gamma_m) \quad (6.2)$$

ототожнюють із нормованими коефіцієнтами запасу системи.

Неважко помітити, що коефіцієнт K не дуже сильно відрізняється від одиниці, що передбачає збіг розрахункового граничного стану з істинною границею працездатності конструкції, хоча насправді це далеко не так. Справжні коефіцієнти запасу помітно перевищують одиницю, оскільки фактична границя працездатності відрізняється від тієї умовності, яка відіграє роль розрахункового граничного стану. Оцінка (6.2) не відповідає істинному запасу несівної здатності системи, головним чином, тому що реальне вичерпання несівної здатності зазвичай пов'язане з низкою нелінійних ефектів, які помітно перерозподіляють зусилля в системі під час наближення до її руйнування. Внаслідок такого перерозподілу оцінка, отримана з використанням (6.2) і обчислена з використанням зовсім іншої розрахункової моделі (як правило, лінійної), може виявитися як завищеною, так і заниженою.

Таким чином, ми бачимо, що використання методу розрахункових граничних станів не тільки не визначає відмінність між поведінкою системи в експлуатаційній стадії, про що йшлося вище, а й доволі наближено оцінює той запас, який відокремлює перехід від розрахункового (найчастіше умовного) граничного стану до істинної границі несівної здатності системи.

Для більш впевнених суджень потрібне виконання експериментів та/або спеціальних розрахунків, які виконуються методами, відмінними від наведених у нормативних документах.

У разі, коли йдеться про споруду, що перебуває під дією єдиного навантаження, визначення коефіцієнта запасу на основі фізичного експерименту або чисельного моделювання є очевидним.

Необхідно шляхом збільшення розрахункового навантаження F_d до максимально можливого значення F^* довести систему або її математичну модель до «руйнування» і визначити реальний коефіцієнт запасу k як відношення:

$$k = F^* / F_d. \quad (6.3)$$

Використання цього методу у випадку, коли споруда піддається дії декількох навантажень, пов'язане з припущенням, що всі навантаження змінюються пропорційно одному параметру, а співвідношення між ними при цьому залишається незмінним. Така схема поведінки навантаження характерна далеко не для всіх випадків, і часто необхідно зважати на те, що співвідношення між навантаженнями змінюються зі зростанням інтенсивності навантаження.

Навіть у найпростіших ситуаціях отриманий зазначеним вище способом коефіцієнт запасу k може не мати чіткого фізичного сенсу. Дійсно, уявімо собі конструкцію, навантажену постійним навантаженням G_0 від власної ваги і тимчасовим навантаженням P_0 (рис. 6.6). Коефіцієнт запасу $k'=1,25$ для сумарного навантаження дорівнює відношенню довжин відрізків ОС і

ОА і відповідає явно нереальному зростанню власної ваги на 25%. Якщо ж виділити можливе зростання навантажень як для власної ваги, наприклад, на 10% (тобто покласти $k_q=1,1$), що відповідає переходу в точку В, то для досягнення критичного стану (точка D) тимчасове навантаження має зрости набагато більше. Природно, що за такого міркування, графічна ілюстрація якого представлена на рис. 6.6, досить скромний коефіцієнт запасу 1,25 постає зовсім в іншому світлі, оскільки k_p набагато перевищує величину 1,25.

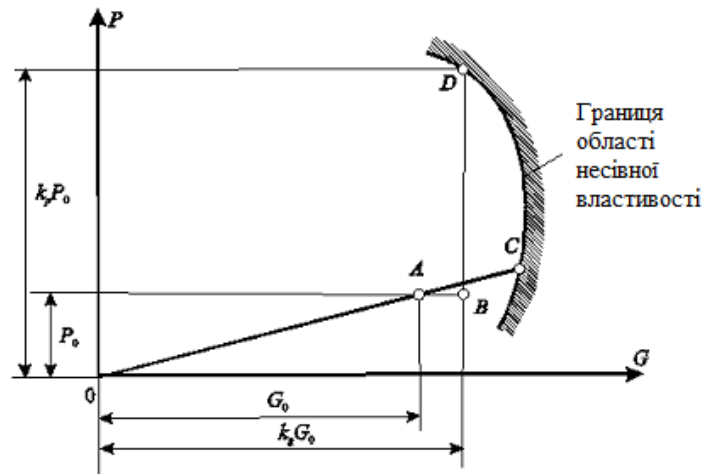


Рис. 6.6.

Результат, зрозуміло, буде сильно залежати від вигляду границі області несівної здатності, і за іншої її конфігурації всі коефіцієнти запасу можуть виявитися такими, що значення $k P_{p0}$ буде істотно меншим. Але важливо відзначити сам факт недостатньої точності аналізу системи зі звичним трактуванням коефіцієнта запасу.

Якщо до сказаного вище додати, що перехід до фактичного стану руйнування пов'язаний зі зміною характеру роботи конструкції та узагальнені параметри опору конструкції, визначені здебільшого простим лінійним розрахунком, не просто множаться на деякий коефіцієнт на кшталт коефіцієнта безпеки за матеріалом або за навантаженням, то стане очевидною умовність самого поняття граничних значень його міцності, бо часто в разі змінюється оцінка (6.2).

Таким чином, слід констатувати, що і від дійсного стану руйнування розрахунковий граничний стан відокремлений деяким бар'єром, величина якого найчастіше невідома.

Питання:

Зрозуміло, що в кожному конкретному випадку значення дійсного коефіцієнта запасу нам не відоме. Але все ж таки є експериментальні дані і цікаво знати хоча б порядок цієї величини.



Відповідь:

Для більшості типів сучасних конструкцій значення істинного коефіцієнта запасу коливається в діапазоні від 1,3 до 1,8. Але ці величини змінюються не тільки залежно від конструктивного рішення, а й помітно змінилися за останні півтори сотні років.

Інженери одразу ж розуміли, що властивості міцності матеріалів можуть мати помітну мінливість, і для гарантування безпеки вони приймали значення допустимого напруження набагато меншим – у три-чотири рази, ніж знайдена у випробуваннях міцність матеріалу. Але ця міцність зазвичай змінюється лише в межах одиниць (рідше десятків) відсотків, і надзвичайно рідко можливі коливання в три-чотири рази. На практиці настільки великі розбіжності між розрахованою і дійсною міцністю завжди бувають викликані іншими причинами.

Наразі сталеві конструкції, запроектовані за Єврокодом-3, мають запас міцності близько $1,3 \div 1,45$, а залізобетонні конструкції, запроектовані за Єврокодом-2, мають коефіцієнт запасу близько $1,5 \div 1,57$.

Питання:

Вище йшлося, що Ренкін визначив коефіцієнт запасу як відношення границі міцності матеріалу до максимально можливого напруження. Але у формулі (6.3) цей коефіцієнт визначено по-іншому. Чи еквівалентні обидва визначення?



Відповідь:

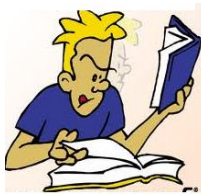
Вони еквівалентні для системи, що лінійно деформується, коли співвідношення навантажень і співвідношення напружень, викликаних цими навантаженнями, збігаються. Насправді руйнівне навантаження реалізується в стані, коли конструкція працює вже непружно і її поведінка є нелінійною.

Ця обставина є одним із чинників, які лежать в основі відмінності між умовним і реальним коефіцієнтами запасу.

Слід зазначити, що в практиці проектування використовуються й інші визначення коефіцієнта запасу. Так, наприклад, у механіці ґрунтів значне поширення має теорія міцності Мора-Кулона, згідно з якою руйнування на деякому майданчику не відбувається, якщо виконується нерівність

$$\tau < \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + c, \quad (6.4)$$

де τ – дотичне; σ – нормальне напруження, що діють на розглянутому майданчику; φ – кут внутрішнього тертя; c – питоме зчеплення. Коефіцієнт запасу іноді визначається як величина, на яку слід поділити параметри опору ґрунту $\operatorname{tg} \varphi$ і c , щоб (6.4) перетворилося на рівність. Такий підхід обґрунтовується тим, що на відміну від більшості конструкцій, де мінливість навантаження набагато вища за мінливість опору, у ґрунтових основах найбільш мінливим фактором є розрахункові характеристики ґрунту. Тому під час оцінювання коефіцієнта запасу логічніше варіювати не навантаження, а опір.



Питання:

З літератури відомі численні випадки значного перевищення розрахункового значення навантаження, які, проте, не призводили до аварійного руйнування. Що можна сказати з цього приводу?

Відповідь:

Вимоги до міцності формуються у вигляді зіставлення навантажувального ефекту F і несівної здатності R (природно, виражених в одних і тих самих одиницях). Під час аналізу безвідмовності, коли відшуковують імовірність виконання нерівності $F \leq R$, імовірнісні характеристики навантажувального ефекту найчастіше ототожнюють із імовірнісними характеристиками навантаження. Це положення є принципово помилковим, хоча на цю помилку чомусь не прийнято звертати увагу.



Але ж розрахункова комбінація навантажень або ж розрахункова комбінація внутрішніх реакцій системи (зусиль, напружень, переміщень) – різні речі, їхні ймовірності можуть відрізнятися на кілька порядків. Наприклад, для кранового навантаження:

- гнність дорівнює ймовірності реалізації одночасного виникнення максимальних тисків на колесо в різних кранів у поєднанні з імовірністю встановлення коліс крана в невідгідну позицію на лінії впливу;
- розрахункове вертикальне навантаження на колону – те саме, але слід розглядати випадок одночасного збігу максимального тиску на колесо вже від чотирьох кранів;
- розрахункове горизонтальне навантаження на колону – реалізація відноситься до ймовірності певного встановлення двох кранів на лінію впливу, плюс ймовірність одночасного гальмування в один бік візків із максимально можливим вантажем або одночасної появи бокових сил зі збіжними для всієї четвірки кранів напрямками дії.

Інший приклад – дія вітрового навантаження на баштову споруду. Тут поява розрахункового значення зусилля в якому-небудь елементі конструкції

пов'язана з випадковим напрямком вітру. Крім того, наведена в нормах картина розподілу вітрового напору за висотою є певним огинанням реальних реалізацій швидкості вітру і має ймовірність реалізації, що далеко не дорівнює одиниці. Не випадково, що вся світова історія висотного будівництва не знає випадків обвалення веж від дії вітрового навантаження (виняток становлять торнадо та поєднання вітру з ожеледицею, та й то це здебільшого стосується щогл на відтяжках).

Згадані особливості реального навантаження конструкцій вельми малою мірою враховуються і значеннями коефіцієнтів сполучень навантажень, які також підраховані для «навантажень взагалі». Звісно, згадані приклади ігнорування цілою низкою реальних невизначеностей є додатковим чинником надійності запроєктованих конструкцій.

З наведених прикладів видно, що перевищення розрахункового значення навантаження не завжди свідчить про порушення умов міцності.

Іншою причиною «запроєктної» міцності може бути та обставина, що в конструкції реалізувалися не прийняті в нормах мінімальні значення міцності матеріалу, а помітно вищі значення.

Але факт порушення граничної нерівності свідчить про те, що конструкція почала працювати в умовах, які не передбачалися проєктувальником, а отже, ним не обраховувалися і не аналізувалися. За таких умов відсутні гарантії безпечної експлуатації.

Це небажано, навіть якщо аварія і не сталася. Особливо, якщо врахувати, що величина зазначених вище запасів є оціночною, а аж ніяк не гарантованим фактом.



Питання:

Чи є коефіцієнт запасу деякою стабільною характеристикою конструкції?

Відповідь:

Слід мати на увазі, що коефіцієнт запасу може змінюватися з плином часу (наприклад, за рахунок зносу конструкції), і сьогодні зазвичай ставиться завдання забезпечення певного заданого значення коефіцієнта запасу протягом планованого терміну експлуатації T_{ef} , яке ніяк не пов'язує із картиною зміни цього коефіцієнта в часі.



При цьому, по суті рівноправними будуть конструкції, у яких фактичне значення коефіцієнта запасу $k(t) = P(t)/[P]$ визначено графіком 1 або графіком 2 (рис. 6.7), що реалізують потрібне значення $k(t) \geq [k]$ на всьому

часовому інтервалі, який нас цікавить, хоча у випадку 1 конструкція «загалом» надійніша. У сучасних нормах цей факт поки що ніяк не враховується.

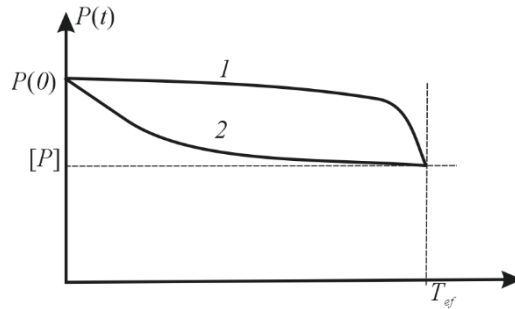


Рис. 6.7.

Питання:

Вимоги щодо застосування нелінійного аналізу поведінки конструкцій дедалі частіше включаються до норм проектування будівельних конструкцій. З іншого боку допускається обмеження і лінійним аналізом, але результати можуть сильно різнитися. Який із них слід вважати правильним, невідомо. Прокоментуйте це протиріччя.



Відповідь:

Впровадження нелінійних розрахунків у практику проектування стало можливим, з одного боку, завдяки інтенсивному розвитку комп'ютерної техніки, а з іншого – в результаті розроблення програмних продуктів, що реалізують нелінійні розрахункові процедури.

Тут проєктувальник стикається з низкою протиріч, і першим (не завжди помітним) у цій низці стоїть правило використання коефіцієнтів надійності, значення яких обґрунтовані сьогодні лінійним імовірнісним аналізом. При цьому критерії перевірок граничного стану, сформульовані в термінах граничних зусиль, можуть виявитися незастосовними, коли відсутня пропорційність між впливами (навантаженнями) на систему та ефектами впливів.

Такі проблеми виникають, наприклад, під час розрахунку геометрично нелінійної системи, у якій внутрішні зусилля можуть зростати повільніше, ніж зростає навантаження або ж швидше, ніж воно зростає. У першому випадку (до нього відноситься більшість висячих конструкцій) говорять про геометрично зміцнювані системи, у другому випадку можна говорити про системи, що деградують геометрично.

Розглянемо спершу випадок системи, що геометрично зміцнюється (рис. 6.8,а). Нехай зовнішнє навантаження є випадковою величиною з уні-

модальним розподілом і нас цікавить інтервал зміни навантаження $[F_1, F_2]$. Цьому інтервалу відповідає зміна внутрішнього зусилля на ділянці $[S_1, S_2]$,

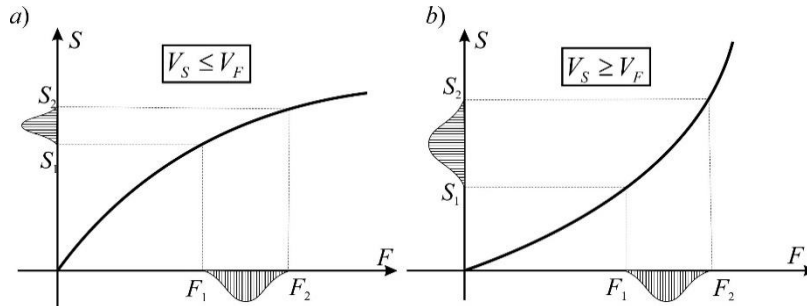


Рис. 6.8.

Розмах значень $[F_1, F_2]$ більший, ніж $[S_1, S_2]$ і, отже, між стандартами випадкових величин $\tilde{F}$ і $\tilde{S}$ є залежність $\sigma_S \leq \sigma_F$. Але площі кривих густини розподілу $\tilde{F}$ і $\tilde{S}$ мають бути рівними, оскільки вони відповідають однаковим за ймовірністю граничним значенням. Отже, математичні очікування $\bar{S} \geq \bar{F}$. Звідси випливає ланцюжок нерівностей

$$V_S = \frac{\hat{S}}{\bar{S}} \leq \frac{\hat{F}}{\bar{S}} \leq \frac{\hat{F}}{\bar{F}} = V_F$$

Для геометрично деградуючих систем аналогічні міркування призводять до нерівності $V_S \geq V_F$.

Отже, для систем, що геометрично зміцнюються, коефіцієнт надійності за навантаженням слід було б знижувати, а для систем, що геометрично деградують, – збільшувати. Як альтернативну рекомендацію слід було б використовувати різні значення спеціального коефіцієнта умов роботи. На жаль, у нормах проектування такі дані відсутні.

Чи сказане вище закликає до відмови від нелінійного аналізу? Звичайно, ні. Практика іноді демонструє застосування нелінійного аналізу вже сьогодні, не кажучи про те, що є ціла низка об'єктів, де без геометрично нелінійного розрахунку просто не можна обійтися (вантові покриття, щоглові споруди тощо).

Але в ширшому контексті нелінійний аналіз виступає в ролі допоміжного інструменту, що доповнює й уточнює результати лінійного розрахунку. Досить типовим є приклад, представлений у роботі [Ошибка! Источник ссылки не найден.], де описуються прийоми нелінійного аналізу роботи фундаментної плити й елементів міжповерхових перекриттів висотного комплексу «Федерація» ММДЦ «Москва-Сіті» (рис. 6.9).



Рис. 6.9.

Автори вказують, що попередньо було виконано всі розрахунки, засновані на лінійному підході, під час яких було виявлено особливості роботи конструкції і налагоджено скінченно-елементну модель об'єкта. І лише потім проводилися уточнення роботи розглянутих фрагментів з урахуванням нелінійної поведінки залізобетону, ці уточнення стосувалися перевірки прогинів і ширини розкриття тріщин.

Бесіда 6.3. Про живучість конструкцій



Жодні заходи захисту і коефіцієнти запасу не можуть гарантувати *абсолютну* безвідмовність усіх елементів системи. Доводиться рахуватися з можливістю, що в конструкції виникнуть деякі локальні дефекти і пошкодження, природа виникнення яких може бути нам невідомою. Типовими причинами можуть бути людські помилки, грубий брак у роботі, невраховані проєктом вельми рідкісні впливи тощо, одним словом, усілякі

сюрпризи, які ведуть до суттєвих наслідків. Ці впливи є досить рідкісними явищами. Американський економіст Nicolas Nassim Taleb [23] назвав подібні події «чорними лебедями»¹⁷. А з погляду цих сюрпризних подій важливою характеристикою об'єкта проєктування є його уразливість.

Уразливість – це властивість, що характеризує можливість нанесення розглянутій системі ушкоджень будь-якої природи тими чи іншими зовнішніми засобами або факторами. Уразливість нерозривно пов'язана з відомою характеристикою «живучість» і з додатково запропонованою в [25] характеристикою – «мобілізованість».

Вимогу щодо забезпечення живучості було вперше запропоновано ввести під час розроблення проєкту норм України [11] ще 1998 року, але зробити це вдалося після тривалих дискусій і бюрократичної тяганини лише 2009 року [5].

Якщо, як зазвичай вважають, живучість є в певному сенсі просторовою характеристикою, що показує, як локальне збурення поширюється простором системи і чи може це локальне руйнування набути непропорційно великого розвитку «вшир», то як мобілізованість виступає часова характеристика, яка показує, наскільки система за час експлуатації готова та здатна зреагувати на локальне в часі (імпульсне) несподіване збурення.

Помітна відсутність мобілізованості конструкції, як і недостатня живучість, мають стати приводом для підвищеної уваги та використання деяких описаних нижче захисних заходів.

Стосовно будівельних об'єктів поняття живучості почало розвиватися істотно пізніше, ніж в інших галузях техніки, насамперед стосовно сейсмостійкого будівництва, хоча сам термін «живучість» міг і не застосовуватися.

¹⁷ Ювенал говорив: «*rara avis in terris nigroque nigroque simillima cygno*» (лат.) – «хороша людина так само рідкісна, як чорний лебідь», оскільки існувала гіпотеза про те, що всі лебеді білі. Це було вірно, поки в 1700 р. не був виявлений чорний австралійський лебідь.

Зокрема, з'явилася ідея виділення так званих *головних несівних конструкцій*, безвідмовність яких забезпечує будівлю або споруду від повного руйнування під час аварійних впливів, навіть якщо її подальше використання за призначенням виявиться при цьому неможливим без капітального ремонту.

У загальному випадку можливі різні варіанти вимог до стану конструкції після того, як вона зазнала аварійного впливу:

- споруда повністю або частково функціонує після пошкоджувального впливу;
- до споруди під час реакції на пошкодження висуваються нові вимоги (споруда має вистояти певний час, наприклад необхідний для евакуації людей та/або цінного обладнання тощо);
- після пошкодження можливий і доцільний ремонт споруди.

Залежно від обраного варіанта вимог формулюється умова живучості системи. Якщо, наприклад, виходити з останнього варіанта, то можна вважати, що живучість конструкції забезпечено, якщо первинна відмова призводить до руйнування лише в обмеженій ділянці, допустимий розмір якої регламентовано нормами або заздалегідь узгоджено із замовником.

Зазначені вимоги реалізуються залежно від розглянутої аварійної ситуації, коли використовуються дві помітно відмінні одна від одної стратегії, що визначаються ступенем інформованості про причини виникнення такої ситуації. У загальному випадку необхідно розглянути обидва варіанти – випадок встановленого (прогнозованого) аварійного впливу, наприклад, вибух або наїзд транспортного засобу, або локальне руйнування за невстановлених причин, наприклад, таких як помилки персоналу або грубий брак у роботі (рис. 6.10).

Розглядаються заходи щодо зниження ризику від аварійних впливів, що включають, якщо це доречно, одну або кілька стратегій:

- a) запобігання появі впливу, зниження ймовірності появи та/або величини впливу;
- b) захист конструкції шляхом зменшення ефекту від епізодичного впливу;
- c) забезпечення достатньої живучості.

А також заходи щодо зменшення масштабів руйнування внаслідок локальної відмови за невстановлених причин:

- a) проектування ключових елементів таким чином, щоб вони могли сприймати аварійне навантаження;
- b) проектування конструкцій таким чином, щоб у разі локальної відмови загальна стійкість конструкції або більшої її частини була забезпечена;
- c) застосування розрахункових/конструктивних правил, що забезпечують прийнятну живучість конструкції.

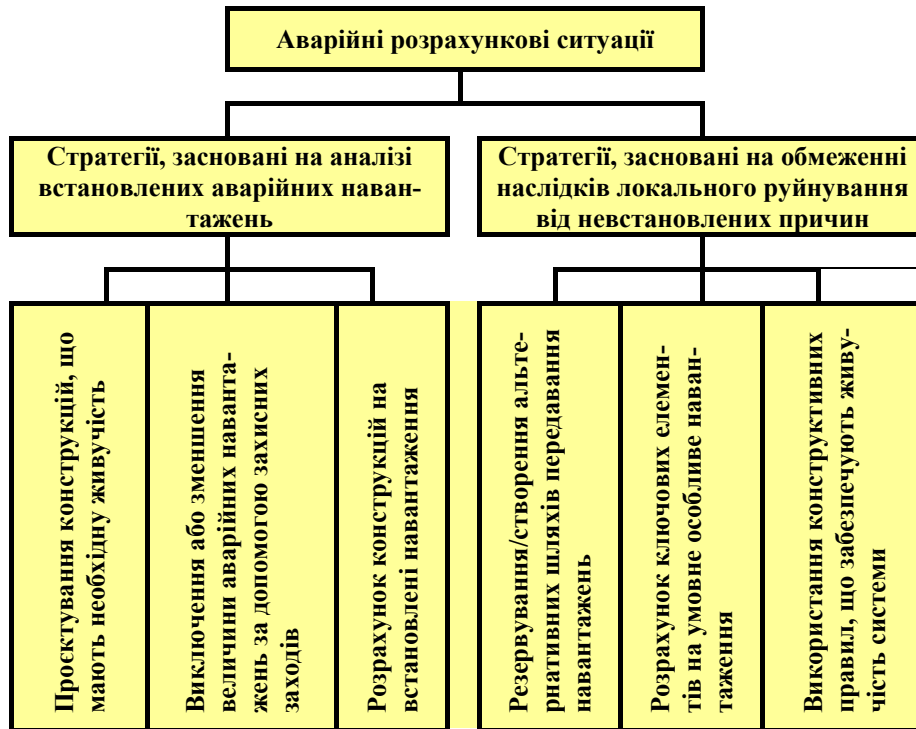


Рис. 6.10.

В обох випадках виникає необхідність розрахунку з визначення реакції конструкції на вибуття деякого елемента зі складу робочого каркаса системи. І тут можливі різні варіанти вибуття елемента, що відмовив, з розрахункової схеми:

- дефект монтажу, коли елемент просто не встановлений або прикріплений настільки недбало, що його робота в складі системи не реалізується від самого початку;
- відмова елемента схеми, що перебуває під напруженням, з відносно невеликою швидкістю;
- відмова елемента, що перебуває під напруженням, з великою швидкістю, що супроводжується відповідним динамічним ефектом, викликаним сплеском зусиль під час звільнення накопиченої пружної потенційної енергії.

Розрахунковий аналіз у кожному із зазначених варіантів буде різним. У першому випадку ми просто розраховуємо систему, у розрахунковій схемі якої немає елемента, що «відмовив» (фактично і не працював).

У другому варіанті необхідно враховувати, що оскільки в перетвореній системі на частину, що залишилася, з боку вилученої частини не повинно

бути жодних впливів, то операція видалення елемента (зв'язку), яку ми розглядаємо, складається, по суті, з двох кроків:

- обнулення зусиль взаємодії між частинами системи, що залишається і видаляється;
- зміна розрахункової схеми.

Нарешті, за третього варіанта зазвичай вважають, що зняття зв'язку відбувається миттєво, тоді система реагує на це як на раптово прикладене навантаження, що дорівнює реакції зв'язку в момент його зняття і є протилежно спрямованою. При цьому, відповідно до 2-го закону Ньютона, відбувається стрибок у прискореннях, швидкості та переміщення залишаються безперервними і система починає здійснювати вільні коливання.

Різниця в реакції системи на повільне або миттєве видалення елемента (зв'язку) може бути досить значною і врахування динамічних ефектів є обов'язковим. У низці досліджень було показано, що небезпечним стає не тільки миттєве вимкнення з роботи якогось елемента (вузла, перерізу), а й вплив динамічного ефекту такого вимкнення, який при цьому виникає, на інші елементи, що залишилися незруйнованими.

У принципі тут необхідний динамічний аналіз, але часто використовують заснований на енергетичних міркуваннях наближений квазістатичний розрахунок, суть якого полягає в такому міркуванні.

Нехай у вихідній n разів статично невизначеній системі в елементі, що руйнується, статичні напруження і деформації дорівнювали відповідно $\sigma_n^c, \varepsilon_n^c$, а в змінній $n-1$ раз статично невизначеній системі – $\sigma_{n-1}^c, \varepsilon_{n-1}^c$. Ці величини можна знайти за допомогою звичайного статичного розрахунку, але нас цікавлять динамічні значення $\sigma_{n-1}^A, \varepsilon_{n-1}^A$. Рівень потенційної енергії деформацій у точці статичної рівноваги визначається виразом

$$U(\varepsilon_n^c) = \int_0^{\varepsilon_n^c} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon,$$

а питома робота зовнішніх сил визначається добутком σ_{n-1}^c на відповідне збільшення деформацій.

Умова сталості повної питомої енергії системи надає вираз

$$U(\varepsilon_{n-1}^A) - U(\varepsilon_n^c) = \sigma_{n-1}^c \cdot (\varepsilon_{n-1}^A - \varepsilon_n^c),$$

що означає рівність площ криволінійної трапеції $AacC$ і прямокутника $AkdC$ (рис. 6.11). Отже, деформація ε_{n-1}^A може бути знайдена з умови рівності площ затемнених трикутників akb і bdc . Для лінійно-пружної системи ми отримаємо

$$\varepsilon_{n-1}^A - \varepsilon_n^c = \varepsilon_{n-1}^c - \varepsilon_n^c; \quad \sigma_{n-1}^A = 2\sigma_{n-1}^c - \sigma_n^c.$$

Таким чином виявилось, що реакція зв'язку, що вибуває, прикладається до перетвореної системи з динамічним коефіцієнтом 2,0. Цей коефіцієнт дещо зменшується для нелінійно-пружної системи.

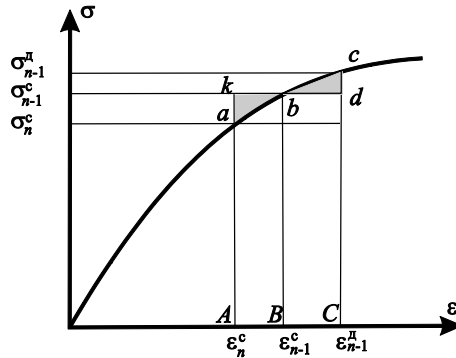


Рис. 6.11.

У наведеному міркуванні, по суті, передбачалося, що деформація системи під час її максимального переміщення збігається зі статичною формою рівноваги після вимкнення зв'язку. Це припущення справедливе лише для системи з одним ступенем свободи, а в загальному випадку невірне. Коректне рішення можна отримати лише за допомогою динамічного розрахунку системи з віддаленим зв'язком.

Вибуття зв'язку збуджує в ньому вільні коливання, які визначаються початковими умовами, як такі, що виступають пружними зсувами незруйнованої системи і нульовими швидкостями.

Питання:

Останнім часом широко обговорюється питання про прогресуюче руйнування конструкцій. Який зв'язок цієї проблеми з живучістю?



Відповідь:

Термін «прогресуюче обвалення» з'явився в результаті дослівного перекладу невдалого терміна з англійської мови. Дійсно, будь-яке руйнування від крихкого до втомного і корозійного є процесом, що розвивається в часі, тобто прогресуючим, а отже, не існує «не прогресуючого» обвалення.

Зазвичай прогресуюче (лавиноподібне) обвалення визначають як послідовне (ланцюгове) руйнування несівних будівельних конструкцій і основ, що призводить до обвалення всієї споруди або її частин унаслідок її початкового локального пошкодження.

По суті йдеться про аналіз поведінки об'єкта після локального пошкодження, а це є проблема живучості споруди. Таким чином, по суті справи,

проблема так званого прогресуючого руйнування є не що інше, як частковий критерій часткової постановки проблеми живучості.

Слід однак пам'ятати, що живучість – це властивість системи, а прогресуюче обвалення – це характеристика процесу. Але не можна зрівнювати характеристику процесу, небезпечну під час руйнування (наприклад, ефект «доміно») з небажаними наслідками аварії (наприклад, значним економічним збитком від скінченної величини обвалення).

І помилка, що часто зустрічається в постановці задачі, полягає в тому, що розглядають зв'язок не між ушкодженням і здатністю пошкодженої конструкції виконувати функціональне призначення, а зв'язок між ушкодженням і характеристиками реакції конструкції на ушкодження. Типовим прикладом може слугувати випадок локального ушкодження стінки резервуара, внаслідок якого сталася повна відмова резервуара (він не здатний зберігати рідину), хоча жодного лавиноподібного обвалення не відбулося.

Отже, прогресуюче обвалення є тільки одним видом небажаної реакції системи на локальне руйнування.

Питання:

Згадувалося, що в загальному випадку ефект від вибуття зв'язку не слід аналізувати квазістатичним методом з використанням динамічного коефіцієнта. Чи велика різниця між квазістатичним підходом та результатами динамічного аналізу?



Відповідь:



Ця різниця може бути вельми істотною і вона пов'язана з використанням схеми міркування, притаманної системі з одним ступенем свободи, під час обґрунтування квазістатичного методу.

Передбачалося, що динамічні переміщення пропорційні статичним протягом усього часу руху конструкції. Але навіть якщо це вірно в початковий момент часу, то в наступні може виявитися несправедливим.

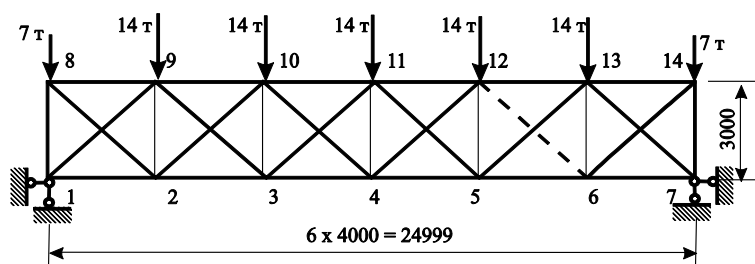


Рис.6.12.

Таблиця 6.1

Елемент між вуз- лами	Зусилля (т), отримані розрахунком:		Різниця, %
	квазістатичним	динамічним	
1-2	-20,13	-36,21	78
2-3	13,50	11,18	-17
3-4	31,74	34,86	10
4-5	39,30	35,03	-11
5-6	-50,65	-20,29	-60
6-7	-13,56	-30,66	126
4-10	-2,14	-7,88	269
3-10	2,88	7,39	156
7-13	-50,51	-58,02	15
12-13	-118,00	-94,54	-20

Особливо це стосується тих елементів, деформація яких різко відрізняється від статичної форми рівноваги після вимкнення зв'язку, помилка може досягати десятків відсотків. Наприклад, для ферми, схема якої вказана на рис. 6.12, зіставлення зусиль, що виникають після раптового видалення елемента 6-12, наведено в таблиці 6.1.

Бесіда 6.4. Перевірка несівної здатності за нормами проєктування

Уже згадувалося, що норми проєктування, крім чітких правил будівельної механіки, містять деякі додаткові рекомендації та вимоги, які часто явно не сформульовані і в деяких випадках суперечать одна одній. Це призводить до низки несподіваних результатів, зокрема, до появи невіпуклої області несівної здатності.

Зауважимо, що саме опуклість області несівної здатності дає нам право обмежитися перевірками тільки екстремальних сполучень навантажень, оскільки позитивний результат таких перевірок автоматично означає, що і всі інші мислимі комбінації навантажень виявляться допустимими.

А неопуклість розглядуваної області може призвести до багатьох неприємних наслідків; найочевиднішим є таке: за традицією, оцінюючи невідгідні поєднання зусиль, інженери або взагалі не розглядають деякі впливи, або враховують їх повністю. Для неопуклої царини, однак, можливе й таке, що невідгідним є деяке проміжне значення.

Не важко побачити, що можлива ситуація (рис. 6.13), коли в разі дії двох незалежних навантажень P і Q при перевірці на дію кожного з них і на дію їхньої повної суми $(P+Q)$ нормативні вимоги виявляються виконаними, але за дії «неповної» комбінації $(P+\lambda Q)$ за умови $\lambda < 1$ вимоги норм порушуються.

Існує стійка думка, що область несівної здатності опукла. Ця думка базується на двох положеннях:

- згідно з постулатом Друкера для ідеальної пружно-пластичної системи гранична поверхня плинності є опуклою в просторі внутрішніх зусиль;
- згідно з теоремою Папковича область стійкості є опуклою в просторі навантажень на систему.

Ці положення, безумовно є правильними, але на жаль, не відповідають властивостям тієї області несівної здатності, яка визначається нормами проєктування. Річ у тім, що в нормах проєктування не використовують ні класичну теорію пластичності, для якої справедливий постулат Друкера, ні біфуркаційну (ейлерову) теорію стійкості рівноваги, для якої доведено теорему Папковича.

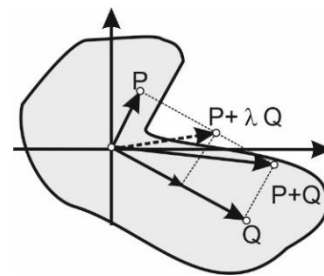


Рис. 6.13

Крім того, під час побудови області несівної здатності слід розглядати й інші нормативні вимоги (міцність, стійкість, граничну гнучкість, тріщино-

стійкість), а це виводить нас далеко за рамки справедливості згаданих теоретичних положень. Тому область у просторі внутрішніх зусиль, точки якої відповідають такій комбінації цих зусиль, що задовольняє усі вимоги норм проектування, є дещо вужчою за область, яку визначають тільки умови міцності та стійкості. Ми її все одно будемо умовно називати областю несівної здатності.

Побудова таких областей передбачена програмами АРБАТ (залізобетонні конструкції), КРИСТАЛ (металеві конструкції) і ДЕКОР (дерев'яні конструкції) комплексу програм SCAD Office. Продемонструємо прикладами, що за нормативного підходу можуть існувати неопуклі області несівної здатності.

Залізобетонні конструкції (ДБН В.26-98:2009)

Область несівної здатності показано на рис. 6.14. При цьому розглянуто два варіанти нормативних вимог щодо забезпечення тріщиностійкості. У цьому разі неопуклість пов'язана з двома обставинами.

Стрибок АВ, який присутній у всіх випадках, визначається постулатом теорії залізобетону, який передбачає миттєве виключення з роботи розтягнутої зони бетону в разі появи розтягувальних напружень.

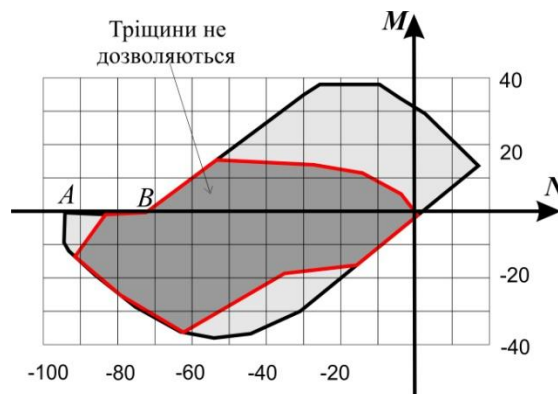


Рис. 6.14.

Металеві конструкції (ДБН В.26-198:2014)

Розглянемо поперечний переріз у вигляді симетричного звареного двотавра зі стінкою 400×10 мм і полицями 200×10 мм зі сталі з розрахунковим опором $R_y = 2050$ кг/см². Розрахункова довжина стрижня в обох головних площинах становить 600 см, коефіцієнт умов роботи та коефіцієнт надійності за призначенням прийнято такими, що дорівнюють $\gamma_c = 1,0$ і $\gamma_n = 1,0$.

Межа області несівної здатності на ділянці DEFGH визначається умовою міцності під час спільної дії розтягування і вигину, на ділянках CD і IH – стійкістю плоскої форми вигину, на ділянці ІКАВС – стійкістю з площини дії моменту (рис. 6.15).

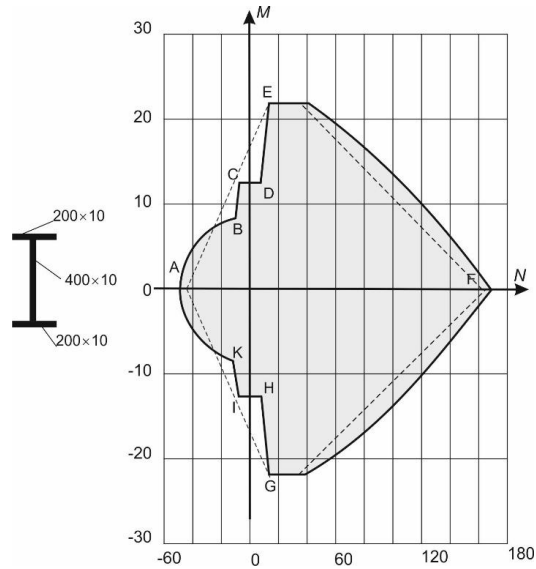


Рис. 6.15

Неопуклість границі на ділянці ІКАВС пов'язана зі зміною типу залежності коефіцієнта c від величини відносного ексцентриситету m . Цей коефіцієнт входить в умову перевірки стійкості стиснуто-згинального стрижня з площини вигину і обчислюється за формулами (112) – (114) зводу правил СП 16.13330.2011.

Залежність $c=c(m)$ для трьох значень довжини стрижня, що розглядається, наведено на рис. 6.16. Її характерний злам при значенні $m=10$, де функція змінюється з лінійної на гіперболічну, відповідає точкам К і В (рис. 6.15).

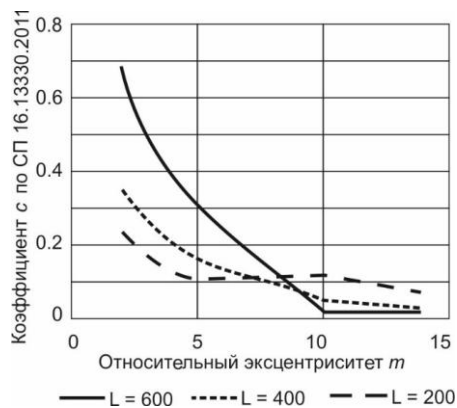


Рис 6.16

Неопуклість цієї ділянки не проявляється за малих гнучкостей елемента з площини вигину, незважаючи на те, що злам кривої $c=c(m)$ не зникає, але для таких випадків стійкість з площини вигину не є визначальною.

Конфігурація ділянок CDE і IJK визначається вказівкою норм на те, що стійкість плоскої форми вигину слід перевіряти тільки за значень відносного ексцентриситету $m > 20$. Важко зрозуміти, у чому полягає фатальність такого значення m , якому відповідають промені DC і JK на рис. 6.15.

На цьому ж рисунку пунктиром показана границя області несівної здатності, обчислена за вказівками ЄВРОКОДУ-3. Тут не місце для обговорення методів, прийнятих у ЄВРОКОДІ, але факт опуклості допустимої області говорить сам за себе.

Дерев'яні конструкції (ДБН В.26-161:2017)

Розглядається стрижень завдовжки 3 м з прямокутним поперечним перерізом 500×80. Матеріал конструкції – сосна. Область несівної здатності показано на рис. 6.17.

Стрибок під час переходу з області $N > 0$ в область $N \leq 0$ визначається формулюваннями пунктів 6.14 і 6.20 норм, які регламентують вимоги про перевірку стійкості тільки елементів, які згинаються і стиснуто-згинаються. Про необхідність виконати таку перевірку в разі розтягнуто-згинального елемента норми замовчують.

Водночас очевидно, що за дуже малих значень розтягувального зусилля ця перевірка має бути обов'язковою. При цьому границя області пройшла б уздовж пунктирної кривої на рис. 6.16.

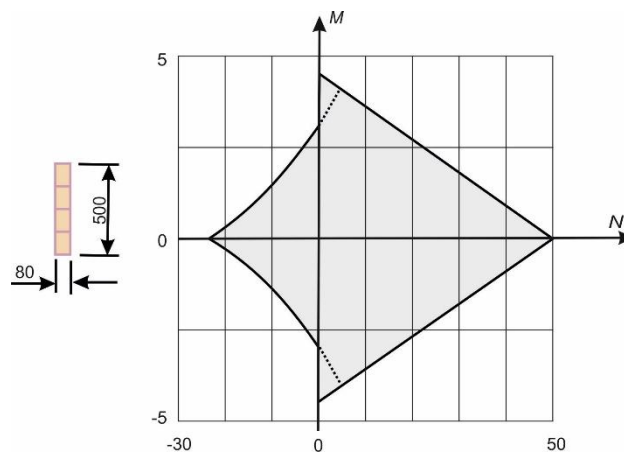


Рис. 6.17.

Багато зі сказаного вище пов'язане з недостатньою узгодженістю нормативних вимог, які часто розроблялися за принципом прецеденту, коли виявлений окремий ефект без належної перевірки ставав загальною нормативною вимогою.

Традиційний підхід до нормування, орієнтований на ручну лічбу, породжував всілякі «спрощення», за яких деякі перевірки допускали не виконувати за якісною ознакою (як для стисло-вигнутих дерев'яних елементів) або за деякого граничного значення параметра (як за умови $m < 20$ для стисло-вигнутих сталевих елементів). Це призводило до нестиківок різних перевірок. Сучасні можливості, які надає комп'ютерна перевірка, дають змогу легко виявити такі неточності.

При цьому слід мати на увазі такі відмінності від ручного розрахунку:

- інженеру не доступні багато проміжних результатів, що дають змогу помітити наявні нестиківки;
- комп'ютерна програма не може реагувати на міркування на кшталт «цей випадок не є характерним», вона працює в усьому фізично допустимому діапазоні параметрів розрахунку.

Звідси підвищені вимоги до рекомендацій норм задля уникнення необґрунтованих «спрощень».

Питання:

Норми вказують тільки на перевірку перерізів стрижневих елементів конструкції. Але ми вміємо визначати напружено-деформований стан також для двовимірних або тривимірних конструкцій, а перевірка допустимості знайденої картини роботи конструкції ніяк не регламентується. Прокоментуйте, будь ласка.



Відповідь:

Проблема полягає в тому, що оцінка має стосуватися не картини напружено-деформованого стану в тій чи іншій точці конструкції, а відповідати на питання про несівну здатність конструкції загалом. Для стрижневих систем є вироблені критерії працездатності поперечного перерізу, і порушення умов міцності трактується як вихід з ладу того чи іншого стрижня.

Для статично визначуваної системи це свідчить про втрату несівної здатності, а для статично невизначуваних систем, навіть тих, що не руйнуються під час вибуття одного елемента, такий стан умовно трактують як граничний: в усякому разі він свідчить про серйозне порушення тих передумов, які було покладено в умови розрахунку.

А що відбувається, наприклад, під час розрахунку пластин? Тут, знаючи згинальні та крутильні моменти в пластинці, легко визначити нормальні й дотичні напруження в крайньому шарі та зіставити їх з умовами міцності матеріалу. Але далі можна лише сказати, що руйнуватися пластинка почне не раніше того моменту, коли хоча б в одній її точці будуть порушені умови міцності. Це може слугувати оцінкою, але якість такої суперобережної оцінки може виявитися дуже низькою. Адже початок руйнування не завжди

означає вичерпання несівної здатності пластинки, адже остання зазвичай не руйнується в разі виходу з ладу деякої її частини.

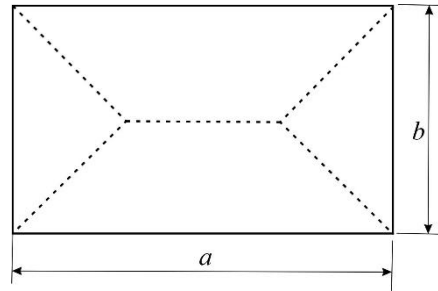


Рис. 6.18.

Водночас треба мати на увазі особливості руйнування крихких матеріалів, яка полягає в тому, що після появи перших тріщин у найбільш напружених точках ці тріщини швидко поширюються за випадковими напрямками в недовантажені зони і призводять зразок або пластинку до повного руйнування. Тому доцільно розраховувати крихкі пружні пластинки за порушенням умови міцності хоча б в одній точці.

Для матеріалів, що володіють властивостями пластичності, слід було б розглядати стан граничної рівноваги, коли утворені зони пластичності перетворюють систему на механізм. Так, в основу розрахунку прямокутних плит, що мають опори по всіх чотирьох сторонах, за співвідношення більшого прогону до меншого $a/b < 3$ покладено граничний стан, що характеризується утворенням лінійних пластичних шарнірів, зазначених у схемі плити, зображеної на рис. 6.18 [1]. Для плити зі співвідношенням $a/b = 1,6$ і товщиною h граничне значення рівномірно розподіленого навантаження, що викликає такий стан, дорівнює

$$q_{\text{lim}} = 4,056 \sigma_T h^2 / b^2,$$

де σ_T – межа плинності матеріалу плити. У пружній плиті такого ж розміру напруження досягають плинності в поверхневих шарах під час навантаження

$$q_{\text{lim}} = 1,938 \sigma_T h^2 / b^2.$$

Майже дворазовий запас міцності є достатньою мірою характерним, хоча є приклади, коли цей запас суттєво менший.

Зауважимо, що спроба, яку роблять деякі проектувальники, погасити виявлене локальне перенапруження шляхом збільшення несівної здатності відповідних частин конструкції, досить часто ґрунтується на деякому психологічному непорозумінні. А саме, забуваючи, що розрахунок методом скінченних елементів належить до континуальної системи, скінченномірну розрахункову модель методу починають ототожнювати з деякою конструкцією, що складається з конструктивних деталей, які відповідають скінченним елементам. І тоді, за аналогією зі стрижневою системою, починають посилювати деталі цієї неіснуючої конструктивної схеми.

Бесіда 6.5. Проєктні розрахунки та оптимальне проєктування



Справжньою метою проєктування є вибір із множини можливих рішень такого рішення, яке є найефективнішим (найоптимальнішим) з погляду певного прийнятого критерію, за допомогою якого оцінюються якісні показники об'єкта. Це означає, що в загальному випадку розв'язанню підлягає завдання мінімізації цільової функції $f(\mathbf{X})$ на множині допустимих значень невідомого вектора змінних $\mathbf{X}$, компонентами якого є шукані параметри системи.

Саме допустиме значення визначається деяким набором рівнянь і нерівностей, яким має задовольняти компонент вектора $\mathbf{X}$. Інакше кажучи, йдеться про розв'язання задачі на умовний екстремум (задачі математичного програмування):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &\rightarrow \min \\ g_i(\mathbf{X}) &= 0 \quad (i = 1, \dots, n); \\ g_i(\mathbf{X}) &\leq 0 \quad (i = n + 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Взагалі, стосовно будівельного проєктування походження задач на умовний або безумовний екстремум пов'язане з трьома джерелами:

- законами природи, які часто формулюються у вигляді екстремальних (варіаційних) принципів;
- обережністю, яка змушує розглядати найгірші (екстремальні) з можливих умов існування об'єкта, що проєктується;
- прагненням людини до отримання найкращого можливого результату на тій безлічі варіантів розв'язання, яку нам залишають розв'язання задач двох попередніх рівнів.

Реалізація останнього прагнення і становить сутність завдань оптимального проєктування.

Питання оптимального проєктування будівельних конструкцій давно привертають увагу дослідників. Активно їх почали вирішувати з другої половини 20 століття завдяки досягненням теорії ухвалення рішень і теорії дослідження операцій, а також у зв'язку з широким поширенням обчислювальної техніки. Це дало змогу розробити відповідні методи, в доступні для огляду терміни прораховувати численні варіанти та розв'язувати складні математичні задачі. Нині теорія оптимального проєктування є одним з актуальних розділів у механіці деформівного твердого тіла, що розвивається, і публікації

в цій галузі, кількість яких вимірюється багатьма сотнями, продовжують постійно збільшуватися. Як сказано в [22] «Етика нашої професії сьогодні не дозволяє проєктувати конструкції без оптимізації»¹⁸.

Здавалося б, усе чудово, але виникає природне запитання: чому методика оптимального проєктування за більш ніж п'ятдесятирічний термін не стала звичайним робочим інструментом проєктувальника, як, наприклад, метод скінченних елементів, який з'явився навіть децю пізніше? Що тут є гальмівним фактором?

Слід зазначити, що питання такого роду звучать не вперше. Деякий огляд розглянутої проблеми наведено в книзі [17], де є розділ з характерною назвою «Чому інженери-практики неохоче використовують оптимізацію конструкцій?». Відповідаючи на це запитання, автори наводять чотири групи доводів:

- чому потрібно шукати найкращий проєкт, якщо прийнятний і досить гарний можна знайти на підставі досвіду?;
- нечисленність запитів від практики і недостатня реалістичність оптимальних рішень;
- побоювання, що процес оптимізації призводить майже неминуче до проєктів, які в сенсі забезпечення стійкості рівноваги є вельми чутливими до початкових недосконалостей;
- оптимальні конструкції, отримані за допомогою детермінованої оптимізації, не обов'язково мають високу надійність, оскільки оптимальне рішення часто реалізується при одночасному виконанні багатьох граничних умов і може призвести до відмови одразу за кількома критеріями.

Всі ці міркування висловлені стосовно авіаційної техніки, якщо ж розглядати будівельні конструкції, акценти можуть зміститися, але самі ці доводи не зникнуть.

Ми відразу ж відкинемо доводи про складність розв'язання задач оптимізації, які іноді звучать. Сучасні комп'ютерні технології дають змогу якщо не повністю, то значною мірою зняти ці труднощі, і в переважній кількості випадків одержати розв'язки розумно сформульованих задач оптимального проєктування.

У зв'язку з аналізом ситуації, що склалася із впровадженням методів оптимізації, цілком доречним є питання, а наскільки ефективна оптимізація. Зіставлення оптимальних проєктів із рішеннями, побудованими на основі досвіду, рідко вказує на економію, що перевищує одиниці відсотків. Якщо автор деякої публікації вказує на більш суттєвий результат, то, найімовірніше, для зіставлення обрано не найкраще зі «звичайних» рішень.

Але є й винятки. Так, майже очевидно, що є три основні сфери ефективного застосування оптимального проєктування будівельних конструкцій:

¹⁸ В оригіналі: «Етика нашої професії сьогодні не допускає жодного проєктування конструкції без оптимізації».

А. Розроблення конструкцій принципово нового типу або проектування споруд для використання в незвичних умовах, коли не можна спиратися на попередній досвід, і одержання оптимального рішення, навіть такого, що не повністю враховує низку умов, які важко формалізуються, може слугувати хорошим стартом для реального розроблення. Прикладом тут може слугувати розроблення конструкції морської кригостійкої платформи для видобутку нафти або місячного модуля (рис. 6.19).



Рис. 6.19.

Б. Удосконалення високосерійних конструкцій, коли навіть незначна економія дає великий ефект через багаторазове використання.

В. Проектування об'єктів дуже високої одиничної вартості, де невелике зниження ваги помітно перекидає всі витрати на відшукування оптимального рішення навіть тоді, коли ефект оптимізації відносно невеликий.

Неважко побачити, що названі напрямки застосування оптимізаційних підходів не стосуються масового будівельного проектування, і тут важко розраховувати на перетворення суворих методів оптимізації на робочий апарат рядового проектувальника. А в масовій практиці проектування таких «приземлених» об'єктів, як будівельні конструкції, поки що панує підхід, заснований на ітераційному перерахунку конструкції, в рамках якого ставлять ціль забезпечення неруйнівності, технологічності та експлуатаційної ефективності, що супроводжуються іноді ідеєю пошуку рівномірності (гранично напруженої) конструкції або створення конструкції, раціональної в деякому іншому сенсі.

Корисно зазначити, що всякого роду уточнення цільових показників не завжди істотно позначаються на результаті, тому тут доречно вдатися до вельми цікавого зауваження, зробленого у книзі Е.Хога і Я.Арори [1] щодо реакції інженера і математика на результат оптимізації. Як ілюстрацію розглянемо відому задачу про оптимальну висоту сталевий двотаврової балки, для якої показано, що зміна оптимальної висоти h_{opt} на 20% у той чи інший бік призводить до збільшення маси її погонного метра всього на 3...4%. Тобто, з точки зору математика, нев'язка відраховується за віссю h , і тому точки

$0,8h_{opt}$ і $1,2h_{opt}$ розглядаються як дуже грубе наближення через їхню значну віддаленість від глобального мінімуму функції цілі (рис. 6.20).

А з погляду інженера відхилення від глобального мінімуму функції цілі можна вважати добрим наближенням до оптимального проекту і, з огляду на прийнятність для практики отриманого результату, «проектувальник не повинен упускати цієї сприятливої можливості під час вибору розв'язання поставленої задачі проектування» [1].

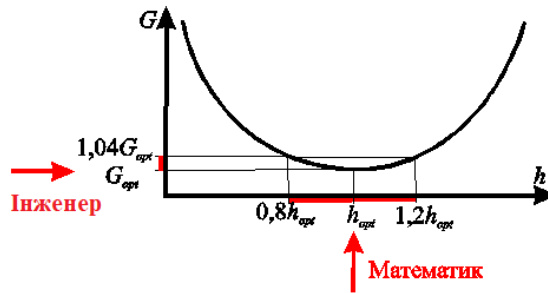


Рис. 6.20.

Цю ідею, мабуть, уперше висловив і широко розглядав В.М. Гордєєв, який запропонував замість відшукування точки екстремуму розшукувати, а потім детальніше аналізувати всю множину розв'язків, що примикають до цієї точки [Ошибка! Источник ссылки не найден., 15]. Оскільки більшість реальних оптимізаційних задач мають «пологий екстремум», тобто навіть помітний відступ від ідеального розв'язку не набагато змінює значення цільової функції, то це дає змогу, не виходячи в просторі параметрів проектування з безлічі розв'язків, близьких до оптимального, урахувати додаткові умови (наприклад, дискретність деяких параметрів), які важко формалізуються.

Поняття рівномірності в 1638 році увів Г. Галілей, який визначив форму рівномірної балки. Ним розглядався випадок вигину консольної балки (прямокутного поперечного перерізу постійної ширини і змінної висоти) під дією зосередженої сили, прикладеної до вільного кінця, і було показано, що умова рівномірності виконується, якщо висота балки h змінюється за параболічним законом. Як виявилось згодом, задача про форму балки мінімальної ваги за умови, що нормальні напруження не перевищують заданої величини σ_0 , зводиться до задачі, розв'язаної Г.Галілеєм. Таким чином, рівномірна консольна балка водночас є балкою мінімальної ваги. Були знайдені й інші приклади, коли умова рівномірності забезпечує мінімальну вагу конструкції.

Ця обставина багато в чому визначила інтерес до відшукування рівномірних конструкцій, тобто до задачі, що має сенс у випадку одного навантаження. Якщо ж ідеться про конструкцію, що має сприймати кілька різних варіантів

навантаження, то задачу рівномірності було узагальнено та сформульовано як задачу про повністю напружену (fully stressed) конструкцію, в якій у кожному з елементів досягається стан граничної напруженості хоча б за однієї з можливих комбінацій навантаження.

Однак під час подальших досліджень і ускладнення постановок задач з'ясувалося, що поняття рівномірності (як і граничної напруженості) та оптимальності за вагою збігаються далеко не завжди.

Зрозуміло, що в статично детермінованій системі жодних перешкод для пошуку рівномірного розв'язку не виникає, оскільки зміна перерізів не починається на розподілі зусиль в елементах конструкції. А чи можна в статично невизначеній системі підібрати перерізи так, щоб напруження у всіх її елементах дорівнювали наперед заданій величині? Виявляється, що задача в загальному випадку нерозв'язна.

Наприклад, для ферм, як було встановлено Морісом Леві ще 1873 року, оптимальна ферма вироджується в статично визначену, а встановлена ним теорема свідчить:

За одного навантаження серед усіх можливих ферм, конфігурацію яких визначає деякий набір стрижнів, що з'єднують задані вузли та мають задані опори, знайдеться така статично визначена ферма, вага якої буде мінімальною.

Дійсно, якщо розглянути статично визначувану основну систему, отриману із заданої шляхом видалення зайвих зв'язків і підібрати перерізи основної системи за нашим бажанням, то тим самим повністю визначаються кінцеві переміщення для відкинутих «зайвих» стрижнів, а отже, і їхні деформації. Тому, ніяким підбором перерізів у цих стрижнях не можна домогтися, щоб напруження (отже, і деформації) мали бажані нам якісь наперед задані величини. Це встановлює межу пошуку в цьому напрямку.

Максимально чого можна досягти в царині пошуку системи із заздалегідь заданими напруженнями, це підібрати бажані нам перерізи в статично визначуваній основній системі та забезпечити для зайвих стрижнів, щоб напруження в них були нижчими за задану величину.

Статично невизначена ферма мінімальної ваги може бути реалізована тільки у виняткових випадках, на відміну від конструкцій, елементи яких відчувають неоднорідний напружений стан. Такі конструкції завжди можна зробити рівномірними, якщо змінювати форму поперечного перерізу елементів. Щоправда, при цьому можуть бути отримані конструкції вельми екзотичного вигляду.

Приклад проектування порталної рами, для якої розшукують розміри поперечного перерізу й орієнтацію його головних осей, показано на рис. 6.21

(a – схема рами; b – тип поперечного перерізу; v – розв'язання задачі).

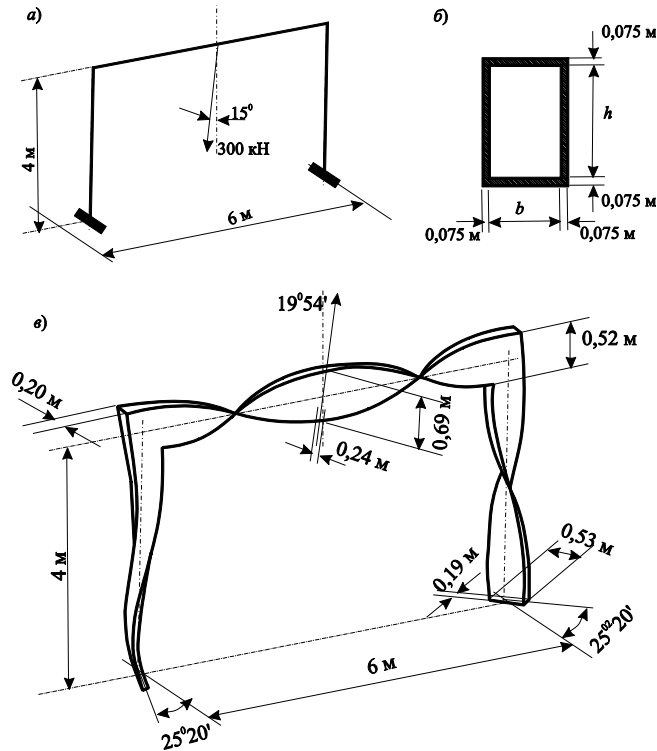


Рис. 6.21.

Якщо ж відмовитися від пошуку кута повороту перерізу, вважаючи напрямком головних осей фіксованим, то також можна знайти рівномірне розв'язання, яке виявляється на 23,4% важчим. Взагалі фіксація будь-яких параметрів конструкції призводить до обважнення системи і тут є велике поле для компромісів між прагненням до мінімізації витрат матеріалів і спрощенням конструктивного рішення.

Перехід до оцінок рішення на основі економічних показників іноді веде до вирішення згаданого компромісу, але тут може виникнути проблема порівняння різночасових витрат. Наприклад, під час оцінки ефективності інвестиційного проекту порівняння різночасових показників первісної вартості та поточних експлуатаційних витрат здійснюється шляхом дисконтування (приведення) їх до одного моменту часу. Для приведення різночасових витрат, результатів і ефекту використовується норма дисконту (E), що дорівнює прийнятній нормі доходу на капітал. Для дисконтування різночасні витрати, результати й ефект множать на коефіцієнт дисконтування $\alpha_t = 1/(1+E)^t$. Але якщо інвестор передав об'єкт іншій господарюючій особі, яка нестиме експлуатаційні витрати, то прийнятне значення E може мати для них різні значення.

Наприклад, що може примирити власника купленої квартири з тим, що йому доводиться платити забагато за опалення, оскільки інвестор не заклав ефективний теплозахист і в такий спосіб заощадив на вартості будівництва. Сам інвестор зекономлені кошти може використати як капітал і отримувати від них доходи, але фактичний користувач і власник до цих доходів не має відношення. Очевидно, що слід сформулювати умови деякого компромісу, але постановка такої задачі, наскільки нам відомо, поки що не має точного формулювання.

Зауважимо також, що в умовах ринкової економіки, яка стабільно функціонує, норми дисконтування за окремими періодами практично залишаються однаковими або змінюються незначно. Інакше йде справа, коли економіка функціонує в умовах інфляції, стагнації, фінансової кризи тощо. Тоді банки змінюють ставку банківського відсотка на вкладений капітал, і норми дисконтування слідує за цими ставками, тобто схильні до змін.

Однак не тільки прагматичними установками обмежуються дослідження в царині оптимального проектування. Оптимальний проєкт може виявитися корисним, оскільки при реальному проектуванні він може:

- розглядатися як ідеалізований об'єкт для оцінки реального конструкторського рішення за критерієм його близькості до ідеалу;
- використовуватися як орієнтир, коли реальне проектування розглядають як поетапний процес відходу від ідеального об'єкта з ціллю виконання вимог, не врахованих в оптимальному проєкті.

Слід зазначити, що в роботах з оптимізації будівельних конструкцій основні параметри, що визначають призначення і спосіб використання об'єкта, вважаються заданими «згори» і, як правило, не підлягають ревізії.

Водночас іноді корисно порушити цю традицію і розглянути ширшу постановку задачі оптимального проектування, коли одночасно розглядають задачу оптимізації параметрів технологічного процесу і проектних рішень будівлі або споруди, де такий процес реалізується.

Як один із небагатьох прикладів такого підходу можна вказати на роботу [24], де розглядали задачу оптимального проектування вітроенергетичної установки (рис. 6.22), коли до числа варійованих параметрів проектування належали не тільки характеристики конструктивного рішення вежі (геометрія D , d і товщина оболонки t), а й основні робочі характеристики вітроагрегату (його проєктована потужність W , висота установки H і радіус вітроколеса R).

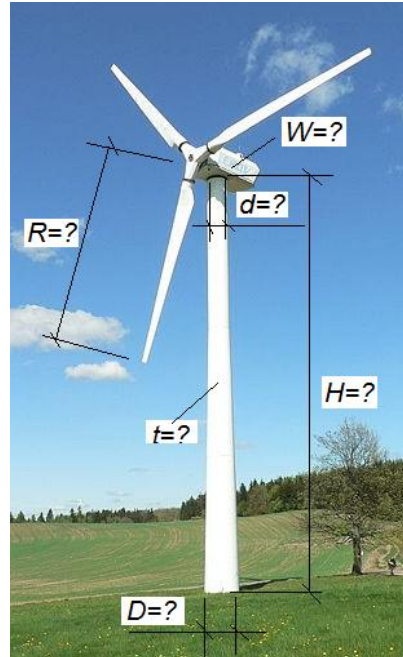


Рис. 6.22

Неважко собі уявити і розширення класичної задачі В.Г. Шухова про оптимальний резервуар для нафтопродуктів, де не вважають заданим, а варіюють об'єм резервуару, водночас ураховують втрати нафтопродуктів від малих і великих подихів, можливий збиток від аварії та інші техніко-економічні показники, що залежать від об'єму резервуара.

Видається, що вельми актуальними можуть бути дослідження, спрямовані на аналіз певних правил і прийомів ухвалення проектних рішень, що, як вважають, призводять до оптимальних (можливо, краще сказати – раціональних) рішень. Так, наприклад, у роботі **[Ошибка! Источник ссылки не найден.]** було виконано дослідження відомої концепції, яка вказує на економічну доцільність безперервного зростання одиничної потужності промислових об'єктів (для споруд – принцип концентрації матеріалу в основних конструкціях). Виявилося, що якщо враховувати обмеження, які визначаються умовами безпеки, то згадана концепція має межу застосовності, що є принципово важливим.

Річ у тім, що зростання одиничної потужності машин, агрегатів, споруд і установок найчастіше не супроводжується таким самим зростанням їхньої надійності, і це може призвести до масштабних втрат, як, наприклад, під час Чорнобильської катастрофи.

Слід також вказати на певний зв'язок принципу концентрації матеріалу в конструкції з проблемою живучості. Дійсно, з принципу концентрації випливає, що в конструктивній схемі з'являються потужні несівні елементи,

відмова яких, найімовірніше, пов'язана із загальним колапсом будівлі або споруди. Однак жодним збільшенням коефіцієнта запасу таких ключових елементів неможливо позбутися ймовірності їхньої відмови, яка виникає, наприклад, через грубі помилки або інший вплив людського фактора, а це найчастіше і є причиною аварій і катастроф. Але це означає, що в таких конструкціях принципово можливе загострення проблеми забезпечення живучості.



Питання:

Проектування статично невизначених конструкцій найчастіше виконують у формі ітераційного процесу, в якому спершу задають перерізи елементів, потім виконують розрахунок конструкції та перевіряють напруження, і якщо останні виявляються сильно завищеними або сильно заниженими, то підбирають нові перерізи і починають розрахунковий цикл заново. А що можна сказати про збіжність ітерацій?

Відповідь:

Доведення збіжності зазначеного ітераційного процесу невідоме, але в практиці проектування приклади ітерацій, що розходяться, або їхнього зациклення не спостерігалися, хоча зафіксовано випадки, коли кількість ітерацій не була малою. Більш цікавим є питання про те, до якого рішення ведуть зазначені ітерації.



Насамперед зазначимо, що на кожному етапі ітераційного процесу ми оперуємо з деяким розподілом внутрішніх зусиль, знайдених унаслідок розрахунку системи, яку ми розглядаємо, і, отже, таких, що задовольняють умови рівноваги. Іншими словами, рішення відшукується серед безлічі рівноважних (статично допустимих) систем. А ось умови спільності деформацій, за якими під час ітерацій ми не стежимо, виявляються порушеними, оскільки в системі з підібраними за умовою міцності перерізами деформації її елементів є вже іншими.

Що стосується результату ітераційного процесу, то в роботі **[Ошибка! Источник ссылки не найден.]** наведено три характерні приклади, що вказують на можливий результат ітерацій, за яких на кожному етапі підбирають повністю напружені перерізи (рис. 6.23).

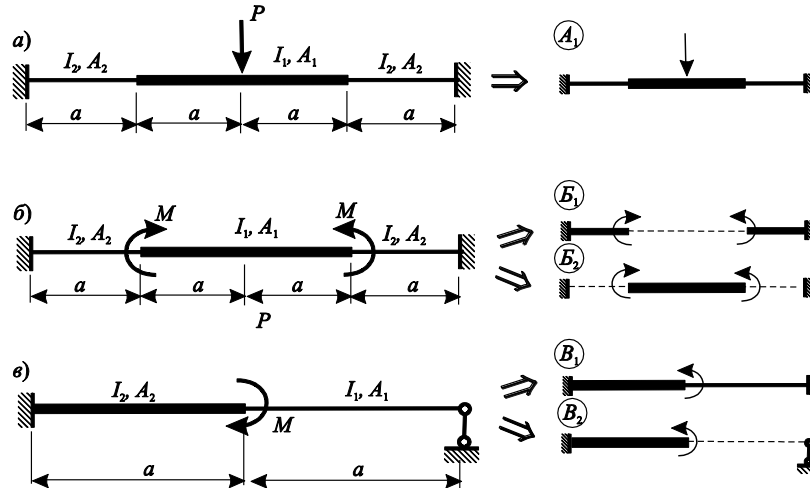


Рис. 6.23

У задачі за рис. 6.23,а ітераційний процес сходиться до рівномірного розв'язку A_1 , який на додачу до всього є ще й розв'язком із мінімальною вагою.

Результат ітераційного процесу для задачі за рис. 6.23.б залежить від стану, з якого стартують ітерації. Якщо на початку маємо $I_2 > I_1$, то доходимо до розв'язку B_1 у вигляді двох консолей із виродженою середньою ділянкою, інакше ітерації сходяться до виродженого розв'язку B_2 , в якому на середню балочку діє врівноважене моментне навантаження. Одне з цих рішень відповідає системі найменшої ваги.

Нарешті, у задачі 6.23,в, залежно від стартового розподілу жорсткостей, ітерації також сходяться до різних рівномірних розв'язків, але тільки розв'язок B_2 є ще й системою мінімальної ваги.

Зауважимо, що ітераційний процес можна завершити, коли зміна поперечних перерізів перестає помітно впливати на зміну внутрішніх зусиль у системі. Тут може надати допомогу отримана в **[Ошибка! Источник ссылки не найден.]** оцінка для приросту ΔS_k внутрішніх зусиль S_k ($k = 1, \dots, m$), яка для фермових конструкцій має вигляд нерівності

$$\max_r |\Delta S_r| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m S_k^2 \left(\frac{\Delta A_k}{A_k} - \alpha \right)}, \text{ де } \alpha = \frac{\sum_{i=1}^m \left(S_i^2 \frac{\Delta A_i}{A_i} \right)}{\sum_{j=1}^m S_j^2},$$

тут A_k і ΔA_k ($k = 1, \dots, m$) – площі та зміни площ поперечних перерізів стрижнів ферми.

Слід зробити ще одне застереження – якщо підбір перерізів впливає на навантаження, то можлива розбіжність ітерацій. Аналогічне зауваження стосується задач, де навантаження формується потоком рідини або газу, що

набігає, коли вибір форми конструкції може впливати на розподіл зовнішніх впливів і їхню інтенсивність. Таким чином, коли зовнішні сили, що визначають параметри конструктивного рішення, своєю чергою залежать від цього конструктивного рішення, має місце зворотний зв'язок, а в задачах зі зворотним зв'язком можуть спостерігатися ефекти, аналогічні втраті стійкості рівноваги.

Так, наприклад, між задачею про вплив власної ваги на теоретичний об'єм стрижня із заданими напруженнями і задачею стійкості пружної системи існує формальна аналогія, яку неважко продемонструвати на найпростішому прикладі балки постійного перерізу.

Якщо A – площа поперечного перерізу, а $W = \rho A$ – його момент інерції (коефіцієнт ρ визначається формою поперечного перерізу), то за заданої величини допустимого напруження σ можна записати умову

$$A = \frac{W}{\rho} = \frac{(q + \gamma A)L^2}{8\sigma\rho}; \quad A = \frac{q}{8\sigma\rho - \gamma L^2}.$$

тут q – навантаження, що діє на балку; γ – об'ємна вага матеріалу балки; L – її прогін. Очевидно, що за $L = \sqrt{8\sigma\rho/\gamma}$ площа поперечного перерізу стає нескінченно великою і відбувається «втрата стійкості ваги».

Можна розглянути і більш загальну задачу, в якій ми будемо виходити із системи рівнянь методу переміщень (див. бесіду 1.6)

$$\mathbf{QFQ}^T \mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

де $\mathbf{Q}$ – прямокутна матриця рівнянь рівноваги; $\mathbf{F}$ – матриця внутрішньої жорсткості; $\mathbf{u}$ – вектор вузлових переміщень; $\mathbf{p}$ – вектор зовнішніх вузлових навантажень; $\mathbf{q}$ – вектор вузлових навантажень від власної ваги.

Виразимо вектор $\mathbf{q}$ через параметри системи

$$\mathbf{q} = \frac{\rho\gamma}{2} \mathbf{CLa}$$

тут $\mathbf{C}$ – матриця косинусів, що пов'язує положення стрижня з напрямком дії навантаження від власної ваги; $\mathbf{L}$ – діагональна матриця довжин стрижнів; $\mathbf{a}$ – вектор площ поперечних перерізів; γ – питома вага матеріалу конструкції; ρ – масштабний множник, за допомогою якого можна пропорційно змінювати всі довжини стрижнів (регулювати габарит конструкції).

Якщо вважати конструкцію гранично напруженою, коли у всіх стрижнях реалізується одне й те саме напруження σ , то площі поперечних перерізів мають дорівнювати

$$\mathbf{a} = \sigma^{-1} \mathbf{N},$$

де $\mathbf{N}$ – вектор поздовжніх зусиль у стрижнях. Ці зусилля можуть бути виражені через подовження $\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}$ і якщо E це модуль пружності, то вони визначатимуться формулою

$$\mathbf{N} = E \cdot \mathbf{CL}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{u}.$$

Тоді вектор навантажень від власної ваги може бути представлений як

$$\mathbf{q} = \rho \frac{E\gamma}{2\sigma} \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{u}.$$

Матрицю жорсткості системи представимо у вигляді

$$\mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T = \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{Q}^T$$

і після підстановки виразів для матриці жорсткості та вектора $\mathbf{q}$ у рівняння методу переміщень прийдемо до

$$\mathbf{Q} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{Q}^T \mathbf{u} = \rho \frac{\gamma}{2\sigma} \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{a} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{p}.$$

Якщо система навантажена тільки власною вагою, тобто $\{\mathbf{P}\} = \mathbf{0}$, то ми маємо задачу на власні значення щодо масштабного множника ρ

$$\left(\mathbf{Q} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{Q}^T - \rho \frac{\gamma}{2\sigma} \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{a} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Q}^T \right) \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Для конструкцій із розмірами, які перевищують критичне значення ρ , можлива втрата стійкості ваги.

Питання:

У літературі зустрічається поняття «зворотна задача будівельної механіки». Чи є це формулювання іншою назвою задачі оптимізації?



Відповідь:

У загальному випадку це не так, оскільки під час розв'язування зворотних задач будівельної механіки можна взагалі не ставити собі за ціль досягти певного найкращого розв'язку або одержати для розглядуваної системи певну екстремальну властивість.

Ну, а тепер дещо детальніше.

Напружено-деформований стан деякої системи (для простоти обмежимося стрижневими конструкціями), пошук якого є прямим завданням будівельної механіки, можна знайти якщо відомі:

- топологічна схема і геометричні розміри конструкції;
- опорні закріплення та інші умови зв'язку;
- типи перерізів та їхні розміри;
- фізична модель роботи матеріалу;
- зовнішні впливи.

Усі ці дані визначаються деяким набором параметрів, і якщо не всі вони задані, то можна задатись деякими елементами напружено-деформованого стану, а решту його елементів та невідомі параметри конструкції підібрати так, щоб задача виявилася повністю вирішеною. Така задача будівельної механіки називається зворотною.

Таким чином, у зворотній задачі не обов'язково виходять з умови оптимальності, тут для пошуку шуканих параметрів часто використовують умови рівномірності, сталості розподілу в системі пружної питомої інформації, вимоги про приналежність частот власних коливань до певного бажаного нам діапазону тощо. Але необов'язковість не є умовою відсутності, тому відомі зворотні задачі, в яких невідомі параметри відшукуються для системи з екстремальними властивостями, і це не обов'язково властивості мінімуму ваги (вартості).

Типовим прикладом може слугувати задача про пошук системи із заданою витратою матеріалу, яка витримує максимальне навантаження (так звана задача складування). Або можна ще навести приклад задачі про відшукування місць установки додаткових опор (з числа заздалегідь дозволених позицій), що максимально збільшують критичне навантаження втрати стійкості. Іншою зворотною задачею будівельної механіки, яка не пов'язана з умовами екстремальності, є задача про підбір параметрів динамічного гасителя коливань, налаштованого на заздалегідь задану частоту.

Бесіда 6.6. Зіставлення розрахункових та експериментальних даних



Про необхідність експериментального обґрунтування правильності використовуваних розрахункових моделей писалося і говорилося незліченну кількість разів. Але, незважаючи на це, такі роботи виконуються не дуже часто, а їхнє методологічне забезпечення залишає бажати кращого.

Відомий старий жарт, який говорить, що *теоретичним результатам завжди ніхто не вірить, окрім автора, а експериментальним результатам вірять усі... окрім автора*. І сказане буде справедливим доти, доки інтерпретація результатів експерименту зводиться до вибіркового зіставлення деяких вимірів з результатами розрахунку і висновків на кшталт «... спостерігається хороша відповідність», «... дані якісно збігаються» або ж, у найкращому разі, «... розбіжність не перевищує стількох-то відсотків».

Досить типовою ілюстрацією може слугувати запозичений з однієї наукової публікації рис. 6.24,а, де в графічній формі проводиться таке зіставлення.

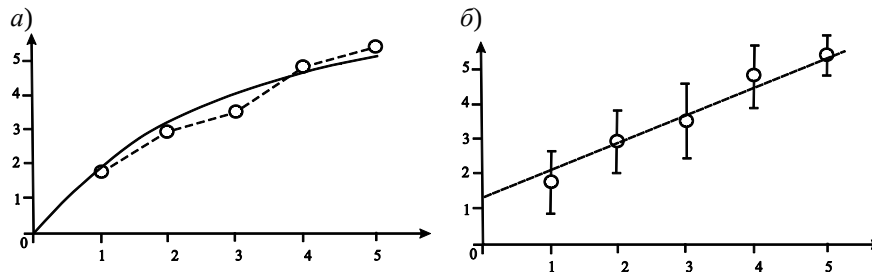


Рис. 6.24

Якщо ж звернутися до представленої на рис. 6.24,б схеми експериментальних результатів, де, окрім середніх значень, наведені й характеристики розкиду (на жаль, найчастіше таких схем немає), то неважко бачити, що експериментальним даним не суперечать й інші теоретичні закономірності, наприклад, зазначена пунктиром лінійна залежність.

Водночас у прикладній науці відомі достатньою мірою обґрунтовані й апробовані прийоми опрацювання результатів спостережень. Зокрема, є численні пропозиції щодо використання методу найменших квадратів, ідеологія якого стала панівною і створила традицію застосовувати як міру близькості суму квадратів різниць між компонентами вектора експериментальних даних y_i^e та їхніх розрахункових значень y_i

$$S_0 = \sum_{k=1}^n (y_k^e - y_k)^2.$$

Якщо в експерименті вимірюють різні величини (наприклад, переміщення, кути повороту, відносні деформації тощо), то використовують вагові коефіцієнти ω_k , які визначають не тільки ступінь довіри до різних вимірів, як це зазвичай роблять під час використання зважених сум, а й нормують їх до однорідного масиву даних.

З іншого боку, абсолютні різниці типу $(y_k^e - y_k)$ рідко використовуються практиками при оцінюванні точності вимірювань. Частіше застосовується відносна похибка

$$\delta_k = (y_k^e - y_k) / y_k^e,$$

звана «конструктивною поправкою»¹⁹. З її допомогою можна побудувати вираз для суми квадратів відносних похибок

$$S_\delta = \sum_{k=1}^n (y_k^e - y_k)^2 / (y_k^e)^2,$$

в якому роль вагових коефіцієнтів відіграють величини $1/(y_k^e)^2$, а однорідність забезпечується через безрозмірність величин δ_k . Різницю між експериментальними та розрахунковими значеннями більшою мірою відтіняють максимальні відносні відхилення

$$\Delta_k = \frac{y_k^e - y_k}{\min(|y_k^e|, |y_k|)}.$$

Якщо проведено по d вимірювань кожної з досліджуваних величин і знайдено експериментальні середні

$$\bar{y}_k^e = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d y_{kj}^e,$$

то мірою розбіжності цих середніх із розрахунковими даними буде величина

$$S_{ad}^2 = \frac{d}{n-1} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\bar{y}_k^e - y_k}{\min(|\bar{y}_k^e|, |y_k|)} \right]^2,$$

звана *дисперсією адекватності*.

Для вироблення обґрунтованих суджень про величину дисперсії адекватності слід мати деякий масштаб зіставлення, характерний для досліджуваної конструкції. За такий масштаб часто приймають міру розкиду результатів повторних вимірювань.

¹⁹ Експериментатори зазвичай припускають, що різниця між одиницею і середнім значенням конструктивних поправок визначає систематичну похибку, а розкид їхніх значень – випадкову. Але це виявляється справедливим тільки для «добре запроектованих конструкцій» і в натурі підтверджується далеко не завжди, особливо в тих випадках, коли перевірки виконуються для варіантів навантажень, що різко відрізняються один від одного.

Дійсно, якщо цей розкид великий, то фізична модель сама по собі є доволі нестійкою щодо тих випадкових умов, які реалізуються під час кожного повторення експерименту. У цих умовах вимога хорошого збігу розрахункових і експериментальних даних перестає бути коректною. Іншими словами, що більш стохастична поведінка конструкції, то важче її точно передбачити.

Вимірником розкиду експериментальних даних є так звана *дисперсія відтворюваності*

$$S_{cp}^2 = \frac{1}{n(d-1)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \left[\frac{y_{kj}^e - \bar{y}_k^e}{\bar{y}_k^e} \right]^2.$$

За припущень про розподіл помилок, які зазвичай використовують у математичній статистиці, перевірка адекватності може бути виконана за критерієм

$$F_e = \frac{S_{ad}^2}{S_{cp}^2} \leq F(v_1, v_2, \alpha),$$

де $F(v_1, v_2, \alpha)$ – табличне значення критерію Фішера, яке визначається залежно від кількості ступенів свободи в чисельнику $v_1=n-1$ і кількості ступенів свободи в знаменнику $v_2=n(d-1)$ за рівня значущості α .

Як приклад розглянемо наведені в табл. 6.2 результати випробувань рамної конструкції (рис. 6.25) з розвинених двотаврів, що їх було виконано в Київському національному університеті будівництва і архітектури.

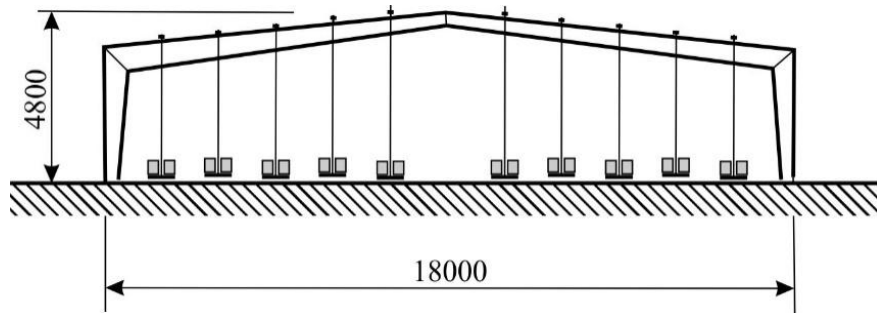


Рис. 6.25

Таблиця 6.2

Значення напружень у різних точках системи, кг/см^2				
Розрахункові	Експериментальні			
	Досвід 1	Досвід 2	Досвід 3	Досвід 4
-170	-241	-273	-315	-389
-170	-147	-241	-115	-186
-170	-357	-144	42	-170
-170	-116	-205	-220	-99
-822	-777	-756	-633	-435
379	405	158	505	321
-469	-807	-722	-920	-247
2208	2121	2247	1459	1365
-166	168	189	-431	-483
-166	-142	-142	-326	-410
-157	-462	-283	-168	-142
-157	-120	-241	-126	-168
1474	1045	1303	1292	1382
-871	-344	-323	-071	-040
1477	1580	920	1208	929
-871	-323	-981	-428	-386
1477	1525	1378	1219	1819
-939	-984	-784	-462	-941
-833	-462	-662	-568	-357
-155	-225	-101	-251	-272
-155	-168	-126	-378	-347

Обчислення дають значення дисперсії адекватності $S_{ad}^2=0,60667$ і дисперсії відтворюваності $S_{cp}^2=0,48021$. Відношення $F_e=1,253$, тоді як критерій Фішера для $\nu_1=20$ і $\nu_2=21 \times 3=63$ за рівня значущості $\alpha=0,95$ дорівнює 1,65. Оскільки $F_e < 1,65$, збіг розрахунку з експериментом можна вважати задовільним з рівнем довіри 95%.



Питання:

Якщо результати експериментальної перевірки сильно розходяться з розрахунковим прогнозом, то де насамперед слід шукати помилку розрахункової моделі?

Відповідь:

Насамперед переконайтеся, що експериментальна установка й умови її навантаження дійсно відповідають використаним у розрахунку параметрам.

На жаль, помилки під час задання вихідних даних для розрахунку, як показує досвід, з'являються дуже часто, особливо для складних і багатоелементних розрахункових схем.



У повчальній книзі А.А.Космодем'янського [Ошибка! Источник ссылки не найден.] сказано, що «...під час проектування і будівництва нових споруд (мостів, гребель, літаків, ракет, будівель) на підставі колосального попереднього досвіду фахівці настільки впевнені у справедливості законів механіки, що всі висновки, які випливають із розрахунків, вважаються **абсолютно вірними**. Якщо в ряді випадків і виходять розбіжності теорії з практикою, то за подальшого суворого і ретельного аналізу вони пояснюються або неточністю вихідних даних, або арифметичними помилками розрахунку».

Ці слова, в основному, відносяться до «домашинної» епохи; зараз, при повсюдному поширенні розрахунків з використанням ЕОМ, основним джерелом розбіжностей можна було б назвати неправильне складання розрахункових схем або некоректне використання програмного забезпечення та (набагато рідше) помилки в програмному забезпеченні.

Цю ситуацію добре усвідомлюють досвідчені розраховувачі, і вони не шкодують зусиль на будь-які доступні їм методи перевірки правильності складання розрахункової схеми і відповідності результатів розрахунків роботі конструкції.

До засобів контролю належать перевірки:

- розмірностей використаних величин;
- характеру залежності результату від зміни деяких вихідних даних, включно з перевіркою таких властивостей, як очікувана симетрія (антисиметрія) або нечутливість до деяких параметрів;
- невелика чутливість розрахункової моделі щодо малих змін її структури або значень параметрів;
- врахування висновків, що випливають із теорем взаємності (переміщень, зусиль, робіт).

Сказане насамперед стосується результатів статичного і динамічного розрахунку. Якщо ж розрахункові значення отримано з рекомендацій нормативних документів, то тут слід проявляти особливу обережність. Не рідко в основі рекомендованих нормами спрощених підходів лежать деякі додаткові гіпотези, які в нормативному документі, на жаль, явно не вказуються і для яких не завжди встановлено теоретично або експериментально підтверджену сферу їхнього можливого застосування.

У деяких випадках слід виконувати додаткові розрахункові перевірки, за допомогою яких можна проаналізувати справедливість згаданих спрощень. Такі перевірки найчастіше стосуються аналізу локальних особливостей напружено-деформованого стану і потребують досить вдумливого підходу.

Типовим прикладом може слугувати рекомендація норм проєктування, яка говорить, що під час дії згинального моменту на болтове з'єднання (рис. 6.26) зусилля в болтах N_i розподіляються пропорційно відстані болта r_i від центра тяжіння болтового поля, тобто

$$M = \sum_{i=1}^n N_i r_i,$$

а максимальне з зусиль у болтах дорівнює

$$N_{\max} = M \cdot \max_i r_i / \sum_{j=1}^n r_j^2,$$

де n – кількість болтів по один бік стику.

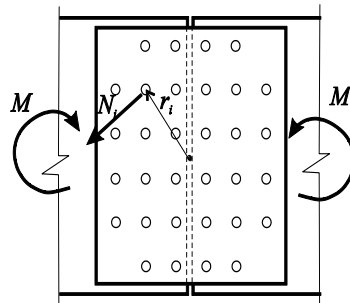


Рис. 6.26.

Але ця рекомендація виконується точно лише в разі нескінченної жорсткості накладки, а в інших випадках до неї слід ставитися як до наближеного висловлювання і в сумнівних випадках виконувати розрахункову перевірку. Наприклад, для випадку прикріплення сталевієї пластини завтовщини 0,02 м з розмірами 0,9×2,4 м (рис. 6.27) такий розрахунок виконано методом скінченних елементів.

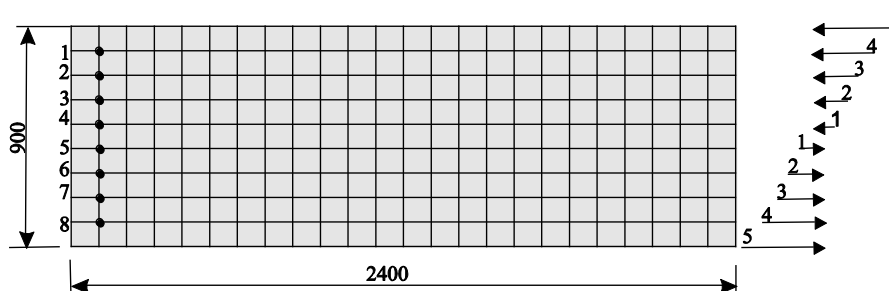


Рис. 6.27

Результати розрахунку в зіставленні з оцінкою за рекомендаціями норм наведено в таблиці 6.3. Але потрібно враховувати, що розрахунок виконували в припущенні пружної роботи системи, а рекомендації норм ґрунтуються

на ідеї вирівнювання напружень у разі непружної роботи з'єднання. Звідси випливає ще один висновок.

Слід переконатися, що в експерименті і в розрахунку виконуються однакові припущення про роботу конструкції (наприклад, пружний стан, малість переміщень тощо).

Якщо це не так, і якщо експеримент реалістично відображає умови роботи конструкції, то необхідно уточнювати розрахункову модель.

Таблиця 6.3

№ болта	Розрахунок за МСЕ			Розрахунок за нормами		Δ , %
	N_x	N_z	N_Σ	N_x	N_z	
1	-9,093	-0,628	9,115	-7,917	0	13,139
2	-4,614	0,082	4,615	-5,655	0	-22,542
3	-2,490	0,262	2,504	-3,393	0	-35,517
4	-0,810	0,283	0,858	-1,131	0	-31,816
5	0,810	0,283	0,858	1,131	0	-31,816
6	2,490	0,262	2,504	3,393	0	-35,517
7	4,614	0,082	4,615	5,655	0	-22,542
8	9,093	-0,628	9,115	7,917	0	13,139

Література

1. **Варвак П.М., Рябов А.Ф. та ін.** Довідник з теорії пружності – Київ: Будівельник, 1971. (російською)
2. **Виноградов А.І.** Проблема оптимального проектування у будівельній механіці. – Харків: Вища школа, 1973. 168 с. (російською)
3. **Генієв Г.А., Колчунов В.І., Ключєва Н.І., Нікулін А.І., П'ятикрестовський К.П.** Міцність та деформативність залізобетонних конструкцій при запроектних впливах – М.: Вид-во АСВ, 2004. – 216 с. (російською)
4. **Гордєєв В.М.** Дослідження множини однотипних конструкцій з параметрами, близькими до оптимальних // Реф. зб. Серія VII, "Проектування металевих конструкцій", вип. 8 (55). - М.: ЦНІПАСС, 1974. – С. 12-15. (російською)
5. **ДБН В.1.2-14-2009.** Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ. □ Київ: Укрархбудінфоорм, 2009. – 37 с.
6. **Йосілевський Л.І.** Практичні методи управління надійністю залізобетонних мостів – М.: НДЦ «Інженер», 1999. – 295 с. (російською)

7. **Карпенко Н.І., Карпенко С.М., Травуш В.І.** Про методи розрахунку висотних будівель та споруд із монолітного залізобетону на основі пошарової деталізації // Сучасне промислове та цивільне будівництво, 2011, №3 – С. 147-163. (російською)
8. **Космодем'янський А.А.** Теоретична механіка та сучасна техніка. – М.: Просвящение, 1969. – 255 с. (російською)
9. **Пермяков В.О., Нілолє О.О., Шимановський О.В. та ін.** Металеві конструкції – К.: Видавництво «Сталь», 2008 □ 812 с.
10. . Про вплив зміни жорсткостей на перерозподіл зусиль у статично невизначеній системі // Будівельна механіка та розрахунок споруд, 1974 № 5. – С. 64-67.
11. **Перельмутер А.В.** Вибрані проблеми надійності та безпеки будівельних конструкцій. 3-тє вид, виправлене та доповнене. – М.: Вид-во АСВ, 2007. –256 с. (російською)
12. **Перельмутер А.В.** Про одну концепцію в теорії споруд. // Металеві конструкції. 2010. №4. – С. 233-238.
13. **Стрілецький Н.С.** Основи статистичного обліку коефіцієнта запасу міцності споруд. – М.: Стройиздат. 1947. – 92 с. (російською)
14. **Haug E.J., Arora J.S.** Applied Optimal Design — New York: John Wiley & Sons, 1979,
15. **Шимановський В.Н., Гордєєв В.Н., Гринберг М.І.** Оптимальное проектирование пространственных решетчатых покрытий. – Киев: Будивельник, 1987.— 224 с.
16. **CP110 Part 1:1972** The Structural Use of Concrete: Part 1 Design, Materials & Workmanship. — London: British Standards Institution, 1972.
17. **Elishakoff I., Ohsaki M.** Optimization and Anti-Optimization of Structures under uncertainty. — London: Imperial College Press. 2010. — 402 p.
18. **EN 1990:2001.** Eurocode. Basis of structural design. Brussels: CEN. 2002. — 89 p.
19. **Freudenthal A.M.** The Safety of Structures // Proc. ASCE, 1947. vol.112, №1. — P. 125-180.
20. **ISO ST 2394.** General Principles on Reliability for Structures. — 1994, 50 p.
21. **Maier M.** Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen. — Berlin: Springer Verlag, 1926. — 73 p.
22. **Mungan I.** Structural engineering and structures from antiquity to the present // Proc. IASS Symposium 2001, Nagoya, Japan. — P. 1-3.
23. **Nassim Nicolas Taleb.** The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable. — New York: Random House, 2007. —.394 p.
24. **Perelmuter A., Yurchenko V.** Parametric Optimization of Steel Shell Towers of High-Power Wind Turbines // Procedia Engineering, 2013. Vol.57. — P. 895 – 905.
25. **Perelmuter1 A., Pichugin S.** On One Safety Characteristic of Buildings // Journal of Civil Engineering and Architecture Research, Vol. 4, No. 5, 2017 — P. 2035-2044.

Зміст

Передмова	3
Цикл 1. Основи статyki і кінематики	7
Бесіда 1.1. Трохи про розрахункову модель: аналіз гіпотез	8
Бесіда 1.2. Основні поняття. Принцип можливих переміщень	16
Бесіда 1.3. Статичні та кінематичні рівняння	22
Бесіда 1.4. Властивості розв'язків	26
Бесіда 1.5. Співставлення властивостей статично визначених і не- значених систем	35
Бесіда 1.6. Повторення – про метод сил і метод переміщень	42
Бесіда 1.7. Попереднє напружені системи	52
Бесіда 1.8. Варіаційні принципи	60
Цикл 2. Метод скінченних елементів	66
Бесіда 2.1. Ідея методу скінченних елементів	67
Бесіда 2.2. Граничні умови та умови зв'язку	77
Бесіда 2.3. Параметри сіткового розбиття. Сходимість МСЕ	81
Бесіда 2.4. Скінченні елементи бувають різними	88
Бесіда 2.5. Розбиття на скінченні елементи	92
Бесіда 2.6. Дещо про розрахункові моделі МСЕ	95
Бесіда 2.7. Прийоми аналізу результатів розрахунку	101
Цикл 3. Нелінійні задачі статyki	106
Бесіда 3.1. Початкові відомості про нелінійні задачі	107
Бесіда 3.2. Проблеми фізичної нелінійності	112
Бесіда 3.3. Робота пружно-пластичної системи під час зростання навантаження	118
Бесіда 3.4. Екстремальні властивості граничного стану плинності	121
Бесіда 3.5. Геометрична нелінійність	127
Бесіда 3.6. Конструктивна нелінійність	137
Бесіда 3.7. Генетична нелінійність	145
Цикл 4. Стійкість рівноваги	154
Бесіда 4.1. Основні поняття теорії стійкості	155
Бесіда 4.2. Стійкість системи з одним ступенем свободи	160
Бесіда 4.3. Про роль початкових недосконалостей	168
Бесіда 4.4. Стійкість у великому. Верхнє та нижнє критичне наван- таження	175
Бесіда 4.5. Стійкість систем із кількома ступенями свободи	180
Бесіда 4.6. Багатопараметричне навантаження. Теорема Папковича ..	192
Бесіда 4.7. Розрахункові довжини	198

Цикл 5. Основи динамічного аналізу	203
Бесіда 5.1. Статичний і динамічний розрахунок конструкцій.....	204
Бесіда 5.2. Коливання системи з одним ступенем свободи	206
Бесіда 5.3. Дещо про резонанс.....	216
Бесіда 5.4. Рівняння руху системи з кількома ступенями свободи.....	221
Бесіда 5.5. Властивості форм власних коливань.....	229
Бесіда 5.6. Вимушені коливання систем зі скінченним числом ступе- нів свободи.....	234
Бесіда 5.7. Квазістатичний розрахунок і коефіцієнт динамічності	252
Цикл 6. Після будівельної механіки	256
Бесіда 6.1. Про метод розрахункових граничних станів	257
Бесіда 6.2. Умовний і реальний коефіцієнт запасу.....	271
Бесіда 6.3. Про живучість конструкцій.....	280
Бесіда 6.4. Перевірка несівної здатності за нормами проєктування....	287
Бесіда 6.5. Проектні розрахунки і оптимальне проєктування.....	293
Бесіда 6.6. Зіставлення розрахункових та експериментальних даних.	306