

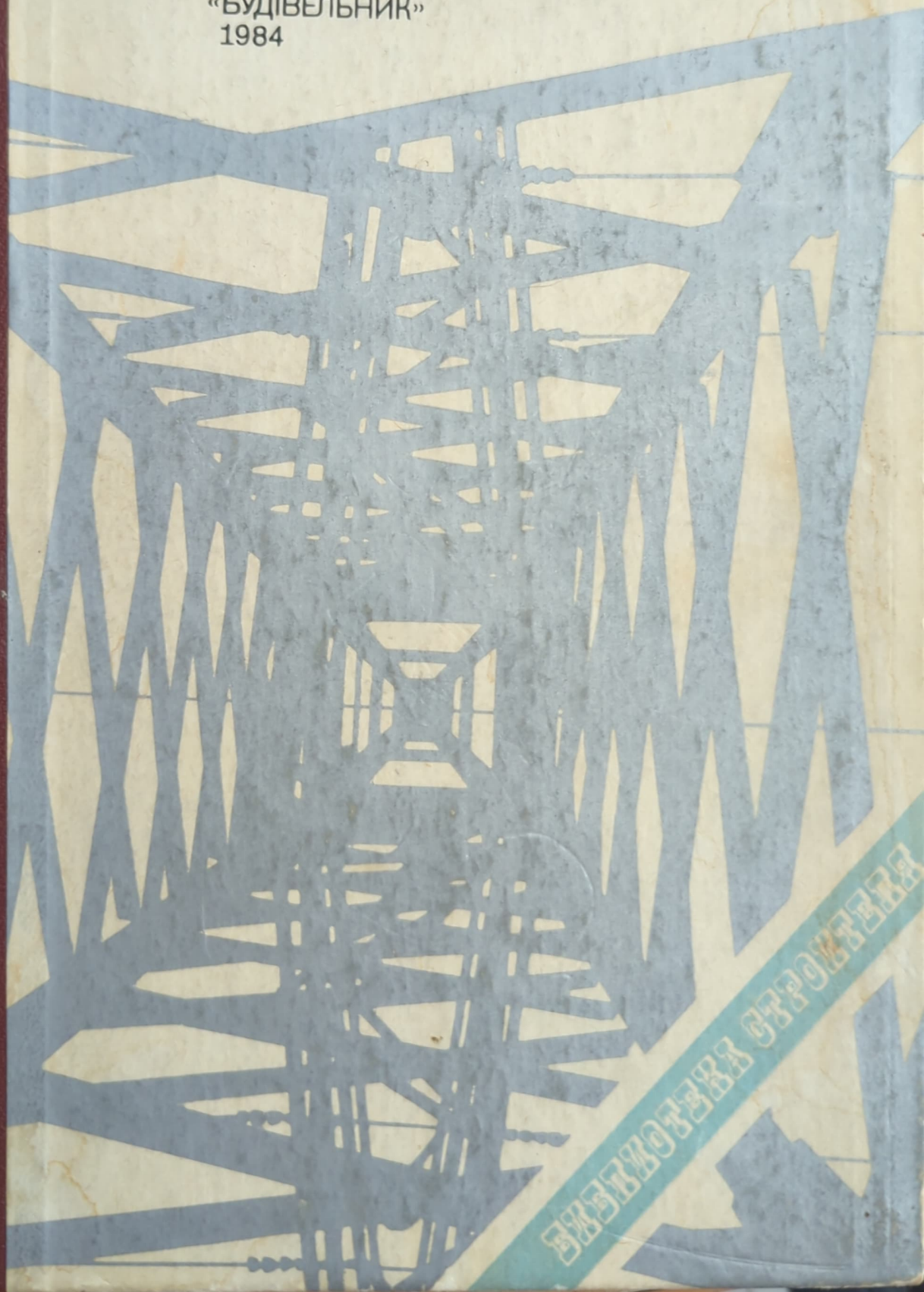
624.04
Ш61

В.Н.ШИМАНОВСКИЙ

ОБ.ЭКЗ

ВИСЯЧИЕ СИСТЕМЫ

КИЕВ
"БУДІВЕЛЬНИК"
1984



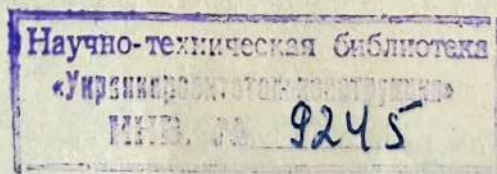
БИБЛИОТЕКА СТРОИТЕЛЯ

В. Н. ШИМАНОВСКИЙ,
чл.-кор. АН УССР, д-р техн. наук, проф.

ВИСЯЧИЕ СИСТЕМЫ

(КОНСТРУКЦИИ И РАСЧЕТ НИТЕЙ
КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ)

92



КИЕВ «БУДІВЕЛЬНИК» 1984

Висячие системы: (Конструкции и расчет нитей конечной жесткости)/ В. Н. Шимановский. — К.: Будівельник, 1984. — 208 с.

В книге изложены конструктивные решения и методы расчета линейно-протяженных (газо- и нефтепроводные переходы) и пространственных висячих систем (покрытия). Освещены пути дальнейшего развития и совершенствования конструкций, даны принципиально новые решения. Значительное внимание уделено вопросам статического и динамического расчета несущих элементов висячих систем в упругой и упруго-пластической стадиях. Даны рекомендации по выбору рациональных параметров конструкций.

Рассчитана на инженерно-технических работников строительных, проектных и научно-исследовательских организаций.

Табл. 12. Ил. 122. Библиогр.: с. 206.

Рецензенты: *засл. деят. науки и техники РСФСР, д-р техн. наук, проф. Н. Н. Стрелецкий; засл. деят. науки СССР, лауреат Гос. премии СССР, д-р техн. наук, проф. М. М. Жербин*

Редакция литературы по специальным и монтажным работам в строительстве
Зав. редакцией инж. Н. А. Логинова

БИБЛИОТЕКА СТРОИТЕЛЯ

Виталий Николаевич Шимановский,
чл.-кор. АН СССР, д-р техн. наук, проф.

ВИСЯЧИЕ СИСТЕМЫ

(конструкции и расчет нитей конечной жесткости)

Редактор Л. Н. Шитова
Обложка художника Д. С. Бродского
Художественный редактор О. Д. Васильева
Технические редакторы З. П. Золотарева, А. М. Короб
Корректоры Г. Я. Грухаль, Т. С. Алексютович

Информ. бланк № 1755

Сдано в набор 30.06.83. Подп. в печ. 22.12.83. БФ 04054. Формат 60×90^{1/16}. Бум. ки-журн.
Гарн. лит. Печ. выс. Усл. печ. л. 13. Усл. кр.-отт. 13,5. Уч.-изд. л. 13,88. Тираж 4500 экз.
Изд. № 351. Заказ № 4—1159. Цена 1 р.

Издательство «Будівельник», 252053. Киев-53, Обсерваторная, 25.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкига» Госкомиздата УССР, 252057, Киев-57, Довженко, 3, на Киевской фабрике печатной рекламы им. XXVI съезда КПСС, 252067, Киев-67, Выборгская, 84.

Ш 3201010000—016 32.84
М203(04)—84

© Издательство «Будівельник», 1984

Предисловие

Успешное выполнение программы капитального строительства страны, определенной Основными направлениями экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года, во многом зависит от совершенствования объемно-планировочных и конструктивных решений зданий и сооружений, внедрения новых легких конструкций, в том числе из сталей повышенной и высокой прочности, повышения индустриальности изготовления и монтажа конструкций, а также от степени достоверности наших знаний о работе реальных конструкций, влиянии на их напряженно-деформированное состояние различных факторов.

В строительстве промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений наметилась тенденция к замене традиционных конструктивных решений новыми, отвечающими современным тенденциям в проектировании. Особенный интерес в последние годы проявляется к висячим конструкциям, получившим применение в различных отраслях народного хозяйства. Это покрытия промышленных и гражданских зданий, мосты, трубопроводные переходы, канатные дороги, кабель-краны, линии связи и электропередачи и пр.

По сравнению с традиционными висячие системы имеют ряд неоспоримых преимуществ. Так, благодаря рациональному использованию материала они позволяют перекрывать практически неограниченные пролеты, создавать легкие, экономичные и выразительные в архитектурном отношении сооружения. Важным преимуществом таких конструкций является также малая чувствительность их к различного рода перегрузкам, осадкам опор, сейсмическим воздействиям и т. п.

В СССР, а также в ряде стран Европы, Азии и Америки осуществлены строительством и разработаны проекты висячих покрытий пролетами до одного километра, а трубопроводных переходов и мостов — еще большими пролетами. Если вначале строительство некоторых объектов с применением висячих конструкций носило явно рекламный характер, то в последние годы в СССР, США, ФРГ, Японии и других странах были построены здания и сооружения, которые по своим технико-экономическим показателям могут быть отнесены к числу выдающихся.

Массовое внедрение висячих конструкций в практику строительства сдерживается отсутствием типовых проектов зданий и сооружений и особенно базы по изготовлению несущих и ограждающих конструкций и инвентарных элементов на специализированных высокотехнологичных заводах. Одной из важных причин, препятствующих

внедрению этих конструкций, является также недостаточная изученность их работы. Решение указанных задач позволит вооружить широкий круг проектировщиков новыми перспективными конструкциями, применение которых даст большой экономический эффект.

Основными несущими элементами висячих систем являются нити, условно делящиеся, с одной стороны, на гибкие и конечной жесткости и, с другой, — на пологие и непологие.

Абсолютно гибких нитей, не считая цепи, не существует, так как всякий материальный стержень обладает той или иной изгибной жесткостью. Тем не менее в ряде случаев нити можно рассчитывать как абсолютно гибкие.

Точной границы между гибкими и жесткими нитями указать нельзя, так как она зависит от характера и величины нагрузки, материала, условий работы нити и других факторов. В качестве меры жесткости нити обычно принимают отношение напряжений от изгиба к напряжениям от растяжения. Если напряжения от изгиба не превышают 5 % напряжений от растяжения, то нить можно рассчитывать как абсолютно гибкую. В противном случае следует учитывать ее жесткость на изгиб. То же можно сказать и в отношении границы между пологими и непологими нитями. Принято называть пологими такие нити, в которых значение косинуса угла между касательной к оси нити и горизонтом мало отличается от единицы, т. е. когда действующую на нить нагрузку можно считать равномерно распределенной по пролету. В различных источниках граница между пологими и непологими нитями указывается в пределах от $f/l = 1/8$ до $f/l = 1/20$, где f — стрела провисания, а l — пролет нити. При этом оговаривается, что если опоры нити расположены на разных уровнях, то угол наклона к горизонту линии, соединяющей опоры, не должен превышать 20° .

Более общим критерием пологости нити с опорами на разных уровнях может служить величина максимального угла между касательной к оси нити и горизонтом. Если этот угол не превышает 40° , то максимальная погрешность в определении ординат кривой провисания нити (случай, когда нить нагружена одной сосредоточенной силой, расположенной вблизи опоры) составляет не более 5,5 %.

По характеру работы различают два типа нитей конечной жесткости: нити работающие с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок *, и нити, работающие без изгиба от начальной нагрузки.

Нити первого типа могут служить расчетной моделью газо- и нефтепроводных переходов со свободно провисающей трубой и других сооружений. При подъеме на опоры сварных в прямую плетть труб в последних уже от собственного веса возникают значительные напряжения от изгиба. Примером сооружений, расчетной моделью которых являются нити второго типа, могут быть сборно-монолитные железобетонные висячие цилиндрические оболочки. После навески и замоноличивания плит покрытия такие оболочки работают без изгиба от

* Под начальной нагрузкой подразумевается нагрузка, под которой нить провисает с заданной стрелой; под дополнительной — любая другая нагрузка, прикладываемая к нити после приложения начальной нагрузки. Одним из примеров начальной нагрузки может быть собственный вес нити.

собственного веса и с изгибом от дополнительной (например, снеговой) нагрузки.

В практике строительства получили распространение висячие системы, в основу которых положены гибкие или жесткие нити. Их можно разделить на две группы: линейно-протяженные (мосты, трубопроводные переходы, канатные дороги, кабель-краны, линии связи и электропередачи и др.) и пространственные (покрытия и перекрытия зданий и сооружений, мачты, сети и т. п.) системы. В зависимости от конструктивных решений и статических особенностей работы каждую систему из этих групп классифицируют по различным признакам. Наиболее важными из них являются схемы пролетной и опорной частей, а также напряженное состояние и материал конструкций. Характеристика некоторых типов висячих систем приведена в соответствующих главах книги.

В настоящее время наиболее подробно и полно разработана теория расчета пологих гибких нитей в упругой стадии. По теории расчета таких нитей было опубликовано большое количество работ, среди них известные монографии Р. Н. Мацелинского, В. К. Качурина, Н. С. Москалева, Л. Г. Дмитриева и А. В. Касилова, Л. Ф. Лилеева и Е. Н. Селезневой, Н. М. Кирсанова и др.

Теория расчета нитей конечной жесткости начала развиваться сравнительно недавно. По методике расчета таких нитей было опубликовано гораздо меньше работ. Большинство из них посвящено решению задач, возникающих при проектировании тех или иных объектов. При этом для достижения цели использовались далеко не разнообразные расчетные предпосылки, приемы и методы решений. В результате были допущены ошибки и даны неверные рекомендации в части расчета нити на горизонтальную нагрузку, определения крутящих моментов при пространственных деформациях нити, уменьшения напряжений от изгиба и др.

Это привело к тому, что в процессе эксплуатации в несущих конструкциях ряда сооружений возникли чрезвычайно большие напряжения. Некоторые сооружения, в том числе такие известные, как переход нефтепровода диаметром 720 мм через реку Юю с пролетами 88,4 и 340 м, переход газопровода диаметром 273 мм через реки Кубань и Б. Зеленчук пролетом 350 м и переход газопровода диаметром 159 мм через реку Арагви с пролетами 181,5 + 363 + 181,5 м, пришлось усилить.

К таким же последствиям приводит и отсутствие рекомендаций в части научно обоснованного отнесения нитей к категории абсолютно гибких или конечной жесткости. Приведем лишь один пример. По данным Украинского отделения Сельэнергопроекта, зимой 1965—1966 гг. только в Украинской ССР из-за гололеда было разрушено 2,7 % общей протяженности линий электропередачи. В результате перерыва в снабжении электроэнергией предприятий был получен убыток, в несколько раз превышающий стоимость восстановления линий электропередачи. Как показали исследования, обрыв проводов происходил, в основном, в результате появления чрезвычайно высоких напряжений от изгиба (в 5—10 раз превышаю-

щих напряжения от растяжения) в местах опирания их на изоляторы. Таким образом, знание величины жесткости нити на изгиб еще не дает ответа на вопрос, по какой теории следует вести расчет. Такие факторы, как характер и интенсивность нагрузки, условия закрепления концов нити на опорах и другие могут оказать куда большее влияние на несущую способность нити, чем ее жесткость на изгиб.

Висячие конструкции, расчетной моделью которых может быть нить конечной жесткости, весьма чувствительны к различного рода динамическим воздействиям. Результаты исследований показывают, что динамические нагрузки могут оказывать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние таких конструкций. Так, при анализе причин, вызвавших аварии трубопроводных переходов в виде провисающей нити, было установлено, что не последнее значение при этом сыграли колебания трубопровода под действием ветровой нагрузки.

Как и по расчету нитей на статические нагрузки, большинство работ по динамическому расчету посвящено решению отдельных задач: определению частот и амплитуд собственных и вынужденных колебаний и пр. Большинство задач еще не получило решения.

Как известно, методы расчета конструкций в упругой стадии не позволяют определить истинные запасы прочности сооружений. Пластические деформации приводят, как правило, к перераспределению усилий в конструкциях, а следовательно, и к повышению несущей способности сооружений. Учет пластических деформаций может дать особенно большой эффект при расчете нелинейно деформируемых систем, в частности висячих. Несмотря на большую актуальность данного вопроса, возросшую в последнее время благодаря внедрению в практику строительства новых материалов, имеющих нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями, заметных успехов в этой области не достигнуто. Вследствие серьезных трудностей математического характера было рассмотрено лишь очень небольшое количество задач при действии равномерно распределенной по пролету нагрузки и то, в основном, для балок с несмещаемыми в продольном направлении опорами.

При написании книги использованы результаты многолетних исследований, выполненных в НИИСК и Укрпроектстальконструкции Госстроя СССР.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам засл. деят. науки и техники РСФСР, д-ру техн. наук, проф. Н. Н. Стрелецкому, засл. деят. науки УССР, лауреату Гос. премии СССР, д-ру техн. наук, проф. М. М. Жербину за ценные замечания, высказанные при рецензировании книги, и коллегам кандидатам техн. наук В. Н. Мацвейко, В. Ф. Мирошнику, Ю. В. Смирнову, А. А. Соколову, Р. Б. Харченко и А. В. Шимановскому, принимавшим участие в проведении отдельных исследований.

ТРУБОПРОВОДНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

§ 1. ТИПЫ И ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ПЕРЕХОДОВ

Основное количество трубопроводов прокладывается под землей, но часто более экономичной, а иногда и единственно возможной является надземная прокладка (например, в северных и горных районах, через реки, овраги, ущелья, болота, дороги и т. п.). При надземной прокладке трубопроводов через естественные и искусственные препятствия в большинстве случаев применяют балочные, реже арочные, а в последнее время все чаще — висячие системы.

В практике строительства получили применение следующие типы висячих переходов: одно- и двухцепные с вертикальными подвесками (рис. 1, а—в), радиально-вантовые (рис. 1, г—е), с решетчатыми вантовыми фермами (рис. 1, ж, з), в виде провисающей нити (рис. 1, и—м), с фермами повышенной жесткости (рис. 1, н, о). Перечисленные типы переходов могут быть как одно-, так и многопролетными. По характеру статической работы их можно разделить на две группы. К первой группе относятся переходы, в которых труба работает как балка на упруго-податливых опорах с пролетами, равными расстоянию между подвесками несущего каната или точками крепления наклонных вант, воспринимающих нагрузку от веса трубы, изоляции, продукта, снега, гололеда и т. п. Ко второй группе относятся переходы, в которых труба является единственным несущим элементом, воспринимающим всю нагрузку (в виде провисающей нити).

При пролетах до 100 м целесообразно [14] применять простейшие радиально-вантовые системы. При пролетах 100—300 м достаточно эффективны одноцепные системы с вертикальными подвесками, при больших пролетах — системы в виде вантовых ферм. Почти для всего диапазона пролетов можно применять системы в виде провисающей нити.

Вантовые фермы, применяемые для трубопроводных переходов, имеют ряд характерных особенностей, определяемых их совместной работой с трубами, которые включаются в состав фермы и работают на местный изгиб между ее узлами. С точки зрения суммирования напряжений в трубах, как в элементах фермы, и от внутреннего давления, целесообразно применять системы с воспринятым распором. Однако по технологическим соображениям и из условий монтажа более эффективны решения, когда канаты крепятся к анкерным опорам. При этом возможен навесной монтаж трубопровода без промежуточных опор.

При расчете труб, работающих под высоким давлением, приходится учитывать собственные кольцевые и меридиональные растягивающие

напряжения и напряжения, создаваемые реактивным воздействием компенсаторов. Кроме того при транспортировании жидкостей необходимо также дополнительно учитывать динамические удары, возникающие в момент включения трубопровода в сеть или выключения его из сети.

Деформативность несущих трубопроводы вантовых ферм ограничивается требованиями нормальной эксплуатации (предупреждение расстройств стыков, вывод конденсата и пр.).

С целью уменьшения деформаций пролетной конструкции в многопролетных системах появляется необходимость в устройстве затяжек — горизонтальных (с малой стрелой провисания) канатов, соеди-

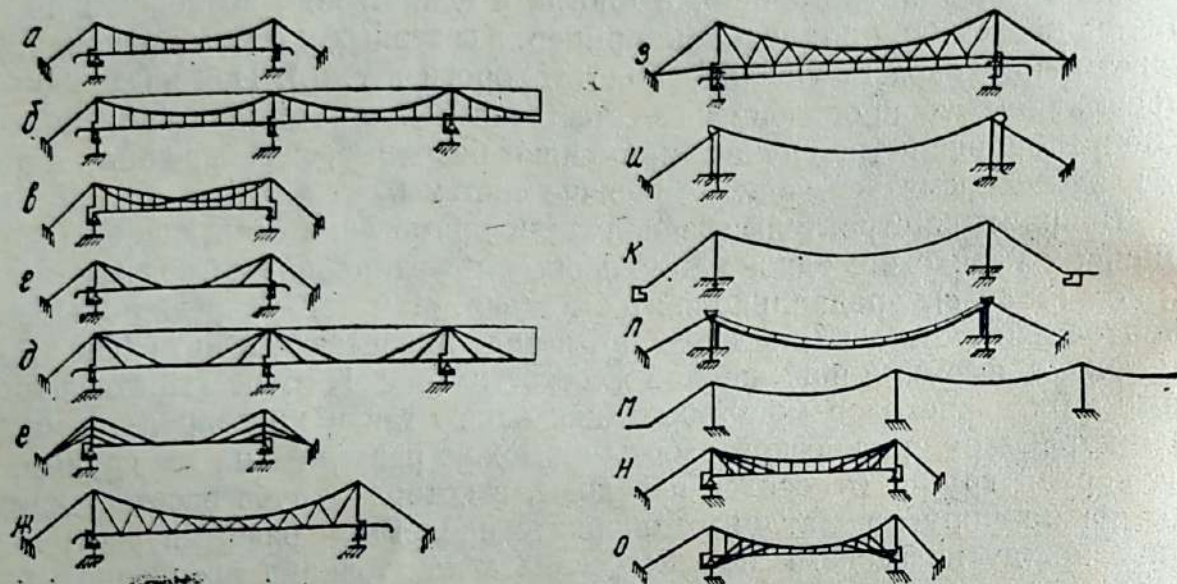


Рис. 1. Схемы висячих трубопроводных переходов:

а, б — с одноцепными фермами; в — с двухцепными фермами; г—е — с радиально-вантовыми фермами; ж, з — с решетчатыми вантовыми фермами; и—м — в виде провисающей нити; н, о — с фермами повышенной жесткости.

няющих верхушки пилонов, предназначенных для ограничения перемещений последних при несимметричном нагружении перехода.

Сравнительно небольшая поперечная жесткость пролетных строений в переходах требует специальных устройств для восприятия ветровых усилий и для ограничения и предупреждения аэродинамических колебаний.

Специфика работы трубопроводных переходов сказывается при выборе типа фермы, конструкций крепления стальных канатов к трубам, устройств для восприятия ветровых усилий, конструкции компенсаторов и, наконец, устройств для обеспечения нормальной эксплуатации трубопроводов.

Из перечисленных систем переходов наиболее экономичными являются переходы в виде провисающей нити [14]. В последние годы опыт проектирования и строительства таких переходов значительно обогатился: был выполнен ряд экспериментально-теоретических исследований, завершено строительство десятков переходов, получены новые технико-экономические данные.

Несмотря на ряд преимуществ, переходы в виде провисающей нити не получили массового применения. До сих пор некоторые специалисты считают, что такие переходы менее надежны и их следует строить только на отводах и линиях местного значения. Такое мнение сложилось, по-видимому, в результате аварий нескольких сооружений. Однако они произошли вследствие ошибок, допущенных при проектировании и строительстве переходов. Объективных же причин для разрушения переходов в виде провисающей нити не больше, чем в любой другой системе.

§ 2. ОДНО- И ДВУХЦЕПНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Одноцепные переходы состоят из цепи (стального каната или пучка канатов), перекинутой через пилоны, к которой с помощью подвесок прикрепляют трубопровод. Последний играет роль балки жесткости, работающей на изгиб от равномерно распределенной по длине пролета постоянной и временной нагрузок. Кроме того, при несимметричном загрузении трубопровод работает в составе фермы, в результате чего заметно снижается деформативность последней. Канаты цепи передают на пилоны вертикальную, а на анкерные опоры — горизонтальную составляющие распора.

Оптимальные величины стрел провисания цепи находятся в пределах $1/8$ — $1/12$ пролета. Расстояние между подвесками определяется возможностями использования трубы при работе ее на местный изгиб, а также конструктивными соображениями: выбором сечения подвесок, выбором типа натяжных устройств и др.

Трубопровод подвешивают как прямолинейно, так и с небольшим подъемом к середине пролета, величина которого определяется возможными изменениями длины цепи от нагрузок, влияния температуры и других воздействий.

Пилоны целесообразно принимать металлическими сварными из труб или прокатных профилей с небольшой жесткостью в направлении вдоль пролета (рис. 2). Такое решение позволяет отказаться от наиболее распространенного шарнирного опирания пилонов на массивные опоры, так как при гибких стойках деформации цепи не вызывают существенных напряжений в пилонах. Жесткое закрепление пилонов

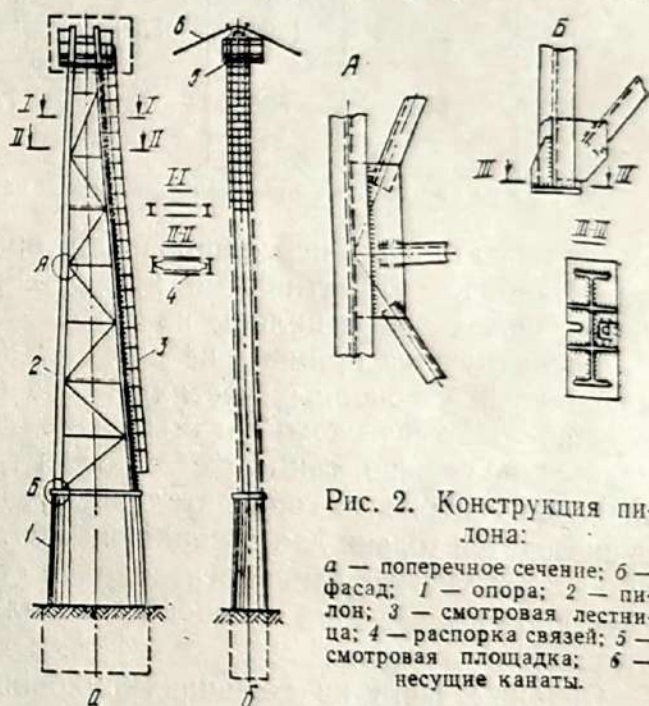


Рис. 2. Конструкция пилона:

а — поперечное сечение; б — фасад; 1 — опора; 2 — пилон; 3 — смотровая лестница; 4 — распорка связей; 5 — смотровая площадка; 6 — несущие канаты.

на опорах упрощает и удешевляет их конструкцию, удобнее для монтажа.

В плоскости, перпендикулярной к оси перехода, пилоны чаще всего выполняют в виде рам или решетчатых ферм. При больших пролетах и значительной высоте пилонов их приходится проектировать решетчатыми и вдоль пролета. При этом, как указывалось выше, необходимо стремиться к тому, чтобы жесткость их была сравнительно небольшой, поскольку, в противном случае, деформации оттяжек, возникающие от приложения временных нагрузок и температурных воздействий,

Таблица 1. Напряжения в проволоках каната при его изгибе

Радиус кривизны, см	$\sigma_u = E_k \frac{\delta}{D}$, МПа	$\sigma_u = k E_n \frac{\delta}{D}$, МПа, при значениях k				Опытные, МПа
		1	$\cos \alpha$	$\cos^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha \cos 2 \alpha$	
25	1800	2400	2262	2132	1657	1176 501
50	900	1200	1131	1066	829	748 402
75	600	800	754	711	552	500 380

Примечание. В числителе даны напряжения при угле перегиба 30°, в знаменателе — 7°.

могут вызвать в них перенапряжения, приводящие к текучести металла. Наиболее эффективными и простыми в изготовлении являются А-образные сварные пилоны из труб.

Рекомендуется применение цельных на весь переход канатов, закрепляемых на опорных частях пилонна накладками на болтах. При этом не требуется сложного стыкования канатов; закрепление их на пилоннах не сложно, так как обычно сил трения достаточно для сопротивления возможным горизонтальным усилиям. Закрепление болтами производится только для восприятия монтажных нагрузок. Если длина канатов меньше длины перехода, то стыки канатов целесообразно размещать на вершинах пилонов в специально запроектированных конструкциях оголовка.

Опорные части на вершинах пилонов рекомендуется выполнять сварными из толстолистовой стали. Они значительно проще в изготовлении и дешевле литых. Размеры опорных частей зависят от радиуса изгиба опорной поверхности и соответствующей ей длины опирания канатов. Выбор величин этих параметров существенно влияет на условия работы стальных канатов. На участках перегибов канаты находятся в менее благоприятных условиях, чем на свободных участках, так как подвергаются воздействию дополнительных силовых факторов — изгибу и поперечному обжатию. При этом напряжения от изгиба проволок каната могут достигать значений, не только соизмеримых с величинами напряжений от осевой нагрузки, но и превосходящих их.

В настоящее время в нормативных документах отсутствуют рекомендации по определению напряжений в проволоках канатов при действии осевой и поперечных нагрузок. Ранее изгибные напряжения в проволоках каната определяли по формуле $\sigma_u = E \frac{\delta}{D}$, где E — модуль упругости материала проволоки; δ — диаметр проволоки; D — диаметр блока (закругления опорной части). Поскольку эта формула давала завышенные значения напряжений, в нее был введен поправочный коэффициент. Разные авторы предложили различные значения этого коэффициента. Так, например, Гауэр для спирального каната предложил значение этого коэффициента, равное $\cos \alpha$, М. М. Федоров — $\cos^2 \alpha$, М. Ф. Глушко — $\cos^2 \alpha \cos 2 \alpha$, где α — угол свивки проволоки. М. А. Букштейн предложил в формулу для определения изгибных напряжений подставлять не модуль упругости проволоки, а модуль упругости канатов.

— Для сравнения в табл. 1 приведены максимальные значения напряжений в наружных проволоках каната диаметром 65 мм по ГОСТ 7676—73, подсчитанные по формулам, предложенным разными авторами, и полученные нами экспериментальным путем.

Как видно из табл. 1, более достоверные значения напряжений можно получить, пользуясь коэффициентом, предложенным М. Ф. Глушко, особенно при больших углах перегиба и значительных радиусах кривизны. Однако несмотря на то, что каждая проволока в соответствии с шагом свивки занимает то нижнее, то верхнее положение, более точную величину напряжения в ней можно определить по приведенным в главе III зависимостям.

Не менее важным является также влияние поперечного обжатия канатов. В связи со строительством крупных висячих мостов были проведены специальные исследования, показавшие, что поперечное обжатие снижает выносливость канатов при пульсирующей нагрузке [27]. Установлено, что при перепаде напряжений около 150 МПа/см² для канатов диаметром 55—75 мм может быть допущено поперечное обжатие 250 МПа при опирании канатов через прокладки из мягкого материала. В случае опирания канатов непосредственно на сталь предельная интенсивность поперечного обжатия должна быть снижена до 150 МПа. Канаты висячих переходов работают в более благоприятных условиях, так как перепад напряжений в них не превышает обычно 100 МПа, а частота изменения напряжений значительно меньшая, чем в мостах. Поэтому указанные величины предельного поперечного обжатия можно увеличить соответственно до 300 и 180 МПа.

Большое значение для улучшения условий работы каната имеет конструктивное решение опирания. Экспериментальные исследования показывают, что грани опорных поверхностей должны иметь плавные закругления для обеспечения постепенного перехода от состояния поперечного обжатия к свободному провисанию. Рекомендуется также назначать верхнюю накладку опорных частей короче нижней опорной поверхности с тем, чтобы избежать концентрации перерезывающих сил на участке перехода от обжатого участка к необжатому и повреждения проволок каната при взаимном трении в процессе переконформиро-

вания его сечения. Обязательными являются также прокладки из мягкого материала или шлифовка желобов в стальных опорных поверхностях.

Примером целесообразной конструкции опорной части может служить решение, принятое в проектах висячих переходов трубопроводов,

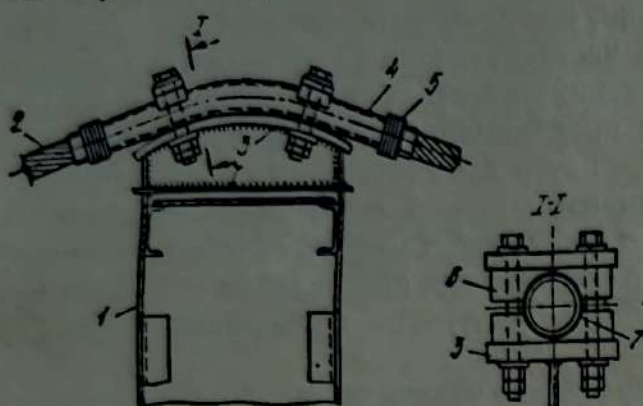


Рис. 3. Узел опирания несущих канатов на пилоны:

1 — пилон; 2 — несущий канат; 3 — опорная поверхность; 4, 7 — прокладка из алюминиевого сплава; 6 — скрутки из алюминиевой проволоки; 6 — накладка с болтами.

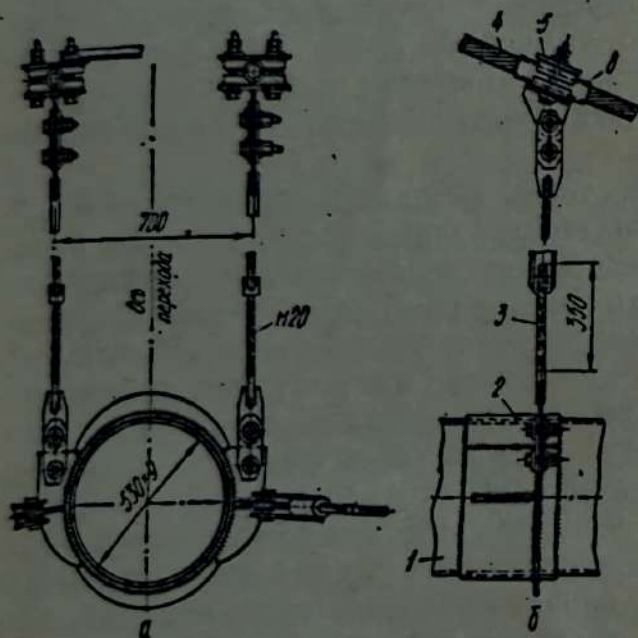


Рис. 4. Подвеска трубопровода к несущим канатам:

а — поперечное сечение; б — фасад; 1 — труба; 2 — муфта со шпангоутами; 3 — подвеска с талрепом; 4 — несущий канат; 5 — зажим; 6 — прокладка из алюминиевого сплава.

шить отходы листа при раскрое и исключить лишние резы. Расстояние в плане между осями несущих канатов принимается равным диаметру трубы со шпангоутами (см. рис. 4, а), а при двух трубах — расстоянию между осями труб (см. рис. 5, б).

Вертикальные подвески принимают из круглой стали с листовыми

разработанных Укрпроект-стальконструкцией (рис. 3). Опорная часть сваривается из стальных листов. Желоба для канатов образуются прострожкой прямых полос. После прострожки листы изгибаются по требуемому радиусу. Благодаря этому исключается обработка опорных частей на карусельных станках. Для создания плотного опирания по всей длине и исключения шлифовки желобов предусмотрена обертка канатов листом из деформируемого алюминиевого сплава АД-1.

Рекомендуемые решения узлов крепления трубопроводов к несущим канатам приведены на рис. 4 и 5. Трубы крепят к вертикальным подвескам с помощью сваренных из листа шпангоутов. Для исключения концентрации напряжений шпангоут крепится к трубе через муфту, привариваемую кольцевыми швами с расстоянием между ними 250 мм. Так как трубы изготавливаются с допусками по наружному диаметру, шпангоуты целесообразно изготовлять из отдельных лепестков. Форма их назначается такой, чтобы умень-

фасонками на концах. Каждую подвеску выполняют с винтовой стяжкой (талрепом), позволяющей регулировать длину при монтаже. Ход талрепов должен быть порядка 200—300 мм. Подвески крепят к канату

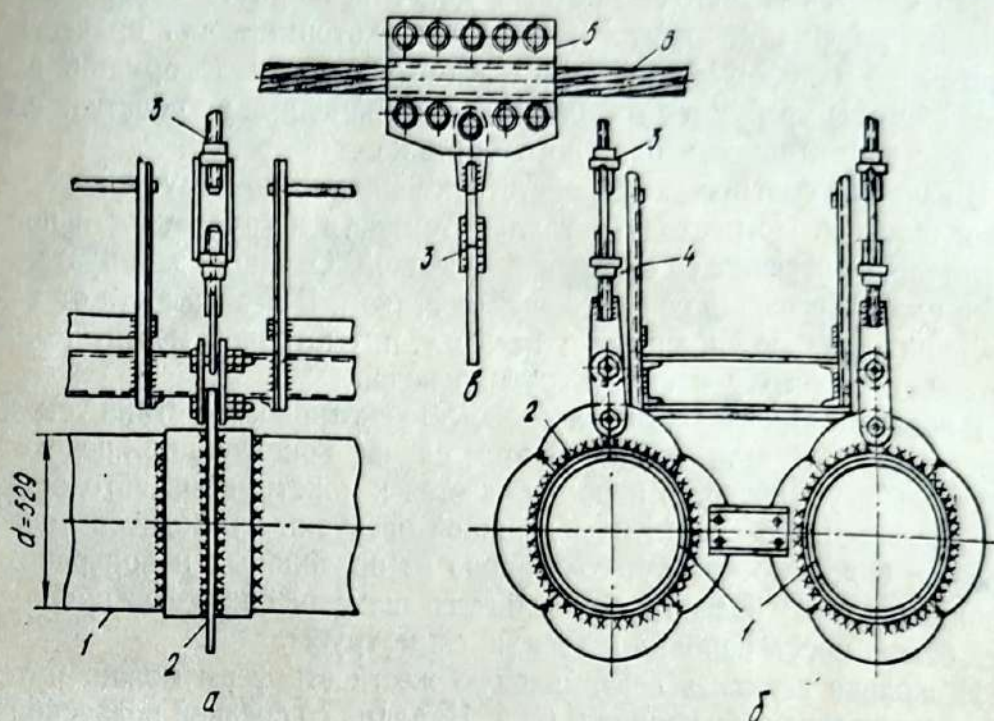


Рис. 5. Подвеска двухниточного трубопровода к несущим канатам: а — фасад; б — поперечное сечение; в — деталь крепления подвески к несущим канатам; 1 — труба; 2 — муфта со шпангоутами; 3 — подвеска с талрепом; 4 — смотровой мостик с перилами; 5 — зажим; 6 — несущий канат.

болтовыми накладками. Возникающие вследствие обжатия каната силы трения препятствуют сползанию подвесок на наклонных участках. В накладках необходимо устраивать желоба и ставить прокладки из алюминиевого листа. Для удобства изготовления и транспортирования подвески большой длины собирают в монтажные элементы на строительной площадке. На опорах пилонов трубы свободно опираются на подвижные опорные части стандартного типа.

В проектах газопроводов, разработанных Укрگیпрогазом, для крепления труб приняты поперечные траверсы с седлами (рис. 6). Вертикальные подвески запроектированы без талрепов. Регулировка вертикального положения труб предполагается подтяжкой гаек крепления подвесок

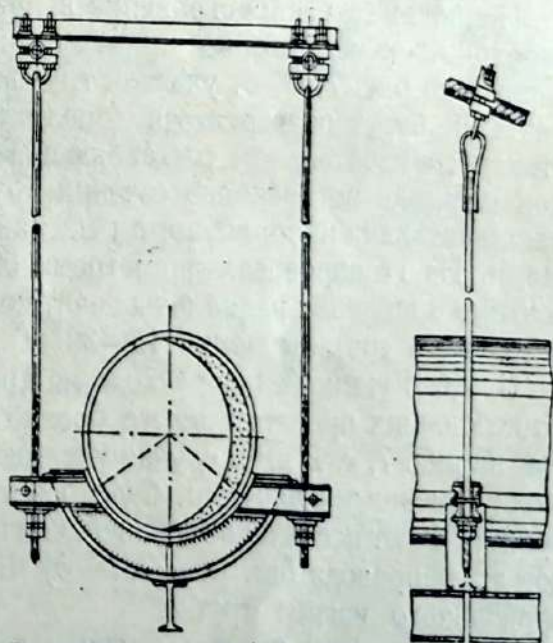


Рис. 6. Конструкция седла для укладки трубопровода.

к траверсам. Эта конструкция более трудоемка в изготовлении и требует большего расхода металла. Указанное решение было принято в предположении монтажа трубопровода методом продольной подвижки. Но при таком методе монтажа могут возникнуть сравнительно большие деформации вантовой системы, которые могут привести к пластическим деформациям труб. Для ограничения деформаций вантовой системы требуются дополнительные временные устройства, снижающие эффективность навесного монтажа.

В качестве смотровых устройств применяются конструкции мостиков и тележек. По расходу металла, стоимости и трудоемкости предпочтительнее решение со смотровой тележкой. Однако в эксплуатации более удобны решения со смотровым мостиком. В зависимости от конструкции перехода, количества труб и т. п. смотровой мостик может устраиваться сверху и снизу трубопровода.

В практике строительства иногда вместо смотрового мостика устраивают проезд для автомашин. В этом случае конструкция перехода значительно утяжеляется и приближается к конструкции автодорожных мостов. Для восприятия подвижной нагрузки приходится проектировать балочную клетку, состоящую из продольных и поперечных балок. При двух и более трубах большого диаметра в качестве продольных балок могут использоваться и сами трубы.

Несколько повысить вертикальную жесткость ферм можно путем применения двухцепных систем С. А. Цаплина со средней подвеской и без нее. В таких фермах вследствие наложения ограничений на горизонтальные смещения узлов поясов ферм в середине пролета вертикальные прогибы ферм будут на 10—20 % меньше, чем в одноцепных.

§ 3. РАДИАЛЬНО-ВАНТОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Наибольшее распространение в практике строительства получили переходы, схемы которых приведены на рис. 7. В переходах, приведенных на рис. 7, а—д, участок трубопровода, расположенный между вантами, будет подвергаться дополнительному растяжению под действием горизонтальной составляющей усилий в вантах. Однако, так как площадь поперечного сечения трубы сравнительно большая, то растягивающие напряжения в ней, как правило, не будут определяющими. На газопроводах диаметрами 529—1020 мм расстояние между точками крепления радиальных вант колеблется от 18 до 40 м, а на нефтепроводах соответственно 12—30 м.

С целью уменьшения расхода материала на опоры при сравнительно небольших пролетах целесообразно применять решения, приведенные на рис. 7, е. В этом случае участок трубопровода, расположенный между смежными вантами, будет сжат. В таких переходах величина пролета будет несколько меньшей, чем в переходах с растянутым участком трубопровода (см. рис. 7, а—д). Ее следует определять с учетом продольного изгиба трубы.

С увеличением высоты пилонов заметно уменьшаются усилия в несущих (наклонных) вантах и их сечение, но возрастает расход метал-

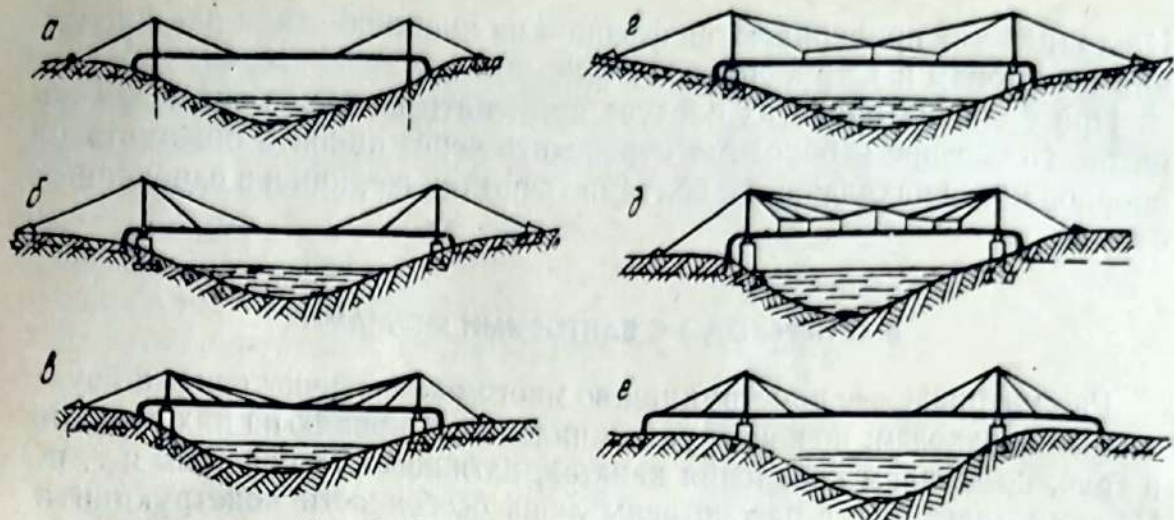


Рис. 7. Схемы радиально-вантовых переходов:
а—д — с передачей распора на анкерные опоры; е — с передачей распора на трубопровод
ла на пилоны. Оптимальную высоту пилонов определяют на основании
техничко-экономических расчетов.

В радиально-вантовых переходах трубопроводов диаметрами 529—1020 мм при пролетах соответственно 60—100 м горизонтальное раскрепление трубопровода не производится. При больших пролетах, особенно в районах со значительными ветровыми нагрузками, устраиваются оттяжки. На отводах оттяжки можно не ставить при несколько больших пролетах (до 1,2—1,3 от указанных выше).

При одной нитке трубопровода такие переходы целесообразно устраивать со смотровой тележкой,

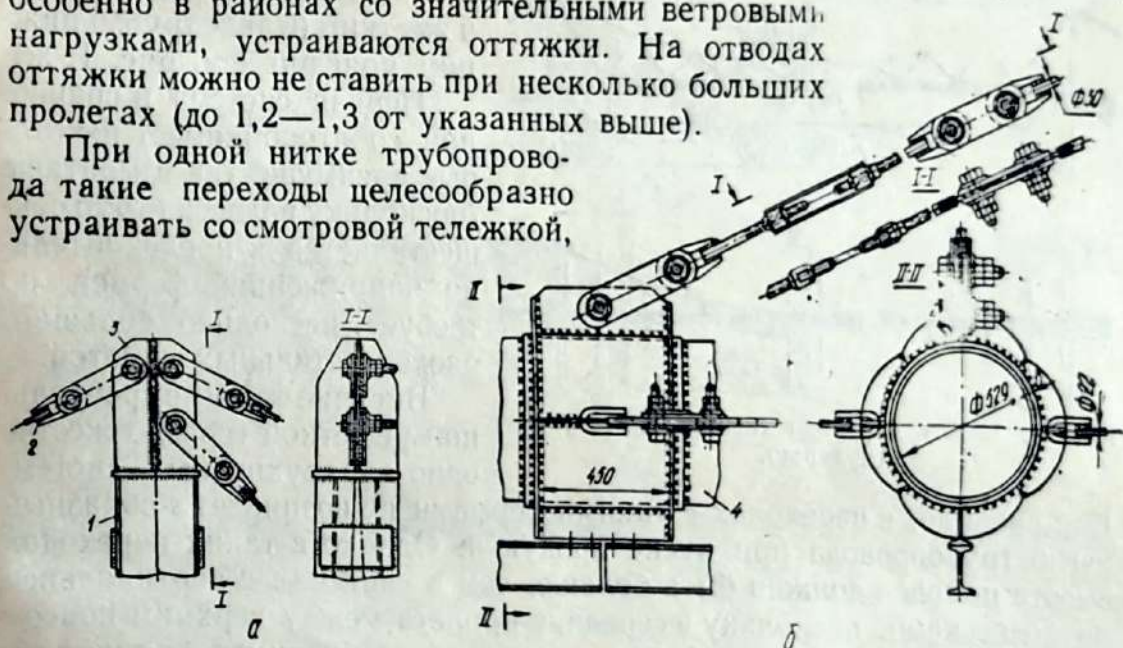


Рис. 8. Крепление вант из круглой стали:
а — к пилону; б — к трубопроводу; 1 — пилон; 2 — ванта; 3 — оголовок из листовой стали;
4 — трубопровод.

передвигающейся по монорельсу. При двух нитках можно устраивать легкий смотровой мостик.

В простейших радиально-вантовых фермах небольших пролетов (до 50—70 м) целесообразно применение вант из круглой стали, сваренных из отдельных стержней в монтажные элементы удобной для транспортирования длины. Заводские соединения осуществляются контактной сваркой, а монтажные — обычно сваркой с накладками.

На концах тяг привариваются фасонки из листовой стали для крепления к пилонам и к трубопроводу (рис. 8).

При больших пролетах следует применять ванты из стальных канатов. Последние необходимо переводить через пилон и обжимать на опорной части накладками с болтами точно так же, как и в одноцепных фермах.

§ 4. ПЕРЕХОДЫ С ВАНТОВЫМИ ФЕРМАМИ

Рассматриваемые конструкции во многом аналогичны одно- и двухцепным переходам: по конструкции пилонов, опиранию на них канатов и труб, по деталям крепления канатов, натяжным устройствам и т. п. Поэтому далее будут рассмотрены лишь особенности конструкции и отдельные узлы, характерные для таких ферм.

Наибольшее распространение получили вантовые системы с треугольной решеткой как с восходящими, так и с нисходящими опорными раскосами.

По характеру взаимодействия ферм с трубопроводом различают системы, в которых трубопровод подвешивается к двухпоясной вантовой ферме с гибкими верхним и нижним поясами (см. рис. 1, з);

системы с гибким верхним и жестким (в виде трубы) нижним поясами (см. рис. 1, ж).

Первая система в сравнении со второй имеет некоторые преимущества в монтаже (поскольку подвеска труб осуществляется к предварительно напряженной ферме), но требует несколько большего расхода стальных канатов.

Висячие фермы с треугольной решеткой гораздо жестче одно- и двухцепных систем.

Рис. 9. Схема перехода газопровода через р. Амударью.

Как правило, в переходах с такими фермами не возникает s-образный изгиб трубопровода при пуске продукта. Однако в таких переходах высота пилонов должна быть больше, чем в системах с вертикальными подвесками, поскольку в середине пролета между верхним поясом и трубопроводом должно быть расстояние, необходимое для устройства раскосов фермы.

В качестве примера такого перехода может служить переход через р. Амударью [14]. Пролетное строение перехода состоит из двух вантовых ферм с треугольной решеткой пролетом 390 м, расположенных на расстоянии 8 м одна от другой (рис. 9). Несущие канаты верхних поясов ферм опираются на пилоны высотой 62 м, выполненные в виде пространственных решетчатых сварных рам (рис. 10). Стрела провисания верхнего пояса 43,4 м, высота фермы по середине пролета 10 м. Верхний пояс фермы выполнен из 8 канатов диаметром 55 мм и одного диаметром 42 мм, нижний пояс — из двух канатов диаметром 55 мм,

Рис. 10. Пилон и поперечное сечение перехода газопровода через р. Амударью

Рис. 10. Пилон и поперечное сечение перехода газопровода через р. Амударью.

The technical drawing consists of three main views:

- Main View (Top):** A perspective view of a mechanical assembly. It features a curved upper section with several vertical rods or pins passing through it. Dimensions include a total width of 2400, a height of 2050, and a radius of 1800. Various components are labeled with numbers like 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
- Side View (Bottom Left):** A cross-sectional view showing the internal arrangement of the rods/pins. It includes dimensions such as 10 x 100 = 1000 and 100.
- Detail View (Bottom Right):** A close-up of a specific component, possibly a valve or piston, showing its profile and dimensions like 150, 100, and 100.

Рис. 11. Узел опирания канатов верхнего пояса на пилон перехода через р. Амударью:

1 — пилон; 2 — ролик троса смотровой тележки; 3 — канаты верхнего пояса; 4 — опорная часть канатов; 5 — накладки с болтами; 6 — тросы перил смотрового мостика.

талрепами. Канаты поясов прикреплены к массивным анкерным опорам. Горизонтальная жесткость пролетного строения обеспечивается ветровыми канатами — по 2 каната диаметром 55 мм с каждой стороны. Ветровые канаты крепятся к опорам, расположенным на расстоянии 50,5 м от оси перехода.

Известно, что прогибы висячих систем зависят от упругих удлинений основного несущего элемента (гибкой нити или нити конечной жесткости) и его кинематических перемещений, являющихся следствием изменения формы равновесия элемента. Решающее значение для

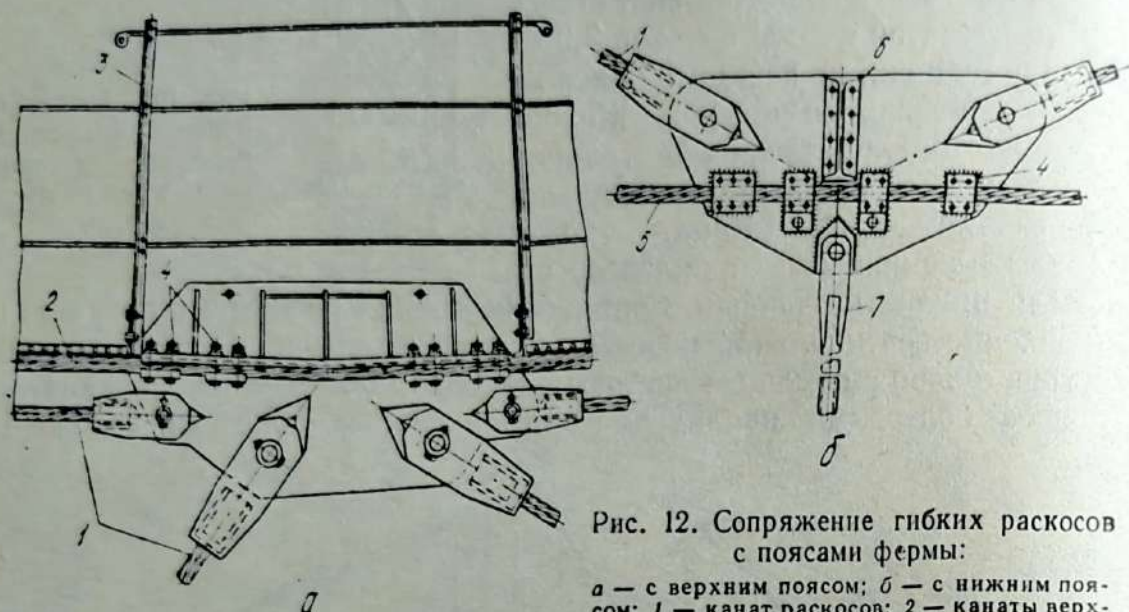


Рис. 12. Сопряжение гибких раскосов с поясами фермы:

а — с верхним поясом; б — с нижним поясом; 1 — канат раскосов; 2 — канаты верхнего пояса; 3 — перила смотрового мостика; 4 — накладки с болтами; 5 — канаты нижнего пояса; 6 — поперечная траверса; 7 — вертикальная подвеска.

уменьшения кинематических перемещений, и, как следствие, прогибов вантовой системы, имеет положение связей, препятствующих перемещению несущего элемента вдоль пролета. Этот принцип положен в основу разработки вантовых форм повышенной жесткости. Некоторые схемы таких ферм приведены на рис. 1, н, о. При проектировании таких ферм следует иметь в виду то, что решающее значение в уменьшении кинематических перемещений имеет одна или две связи. При дальнейшем увеличении количества связей кинематические перемещения уменьшаются незначительно.

§ 5. ПЕРЕХОДЫ В ВИДЕ ПРОВИСАЮЩЕЙ НИТИ

В переходах в виде провисающей нити трубопровод является основным несущим элементом. По способу передачи натяжения указанные переходы бывают двух типов: с анкерными опорами и без них, когда при благоприятном рельефе местности и сравнительно небольших пролетах натяжение передается на прилегающие подземные части трубопровода. Переходы с анкерными опорами обычно устраивают с оттяжками. Лишь при небольших пролетах и малых диаметрах трубопроводов применяют решения без оттяжек — с передачей натяжения на

жесткие опоры. В качестве оттяжек используют канаты, прокатные профили или трубы самого газо- или нефтепровода.

В многопролетных переходах анкерные опоры лучше устраивать в наиболее низкой точке (в середине пролета) через 3—4 пролета, из такого расчета, чтобы длина участка между анкерными опорами не превышала 800—1000 м. Для уменьшения перемещений промежуточных пилонов от несимметричной нагрузки во время пуска продукта их верхушки поверху соединяют затяжкой.

Наиболее ответственными узлами в переходах в виде провисающей нити являются узлы крепления трубопровода к пилонам и анкерным опорам. Их конструкция зависит от диаметра трубопровода, величин пролета, стрелы провисания, интенсивности вертикальной и, особенно,

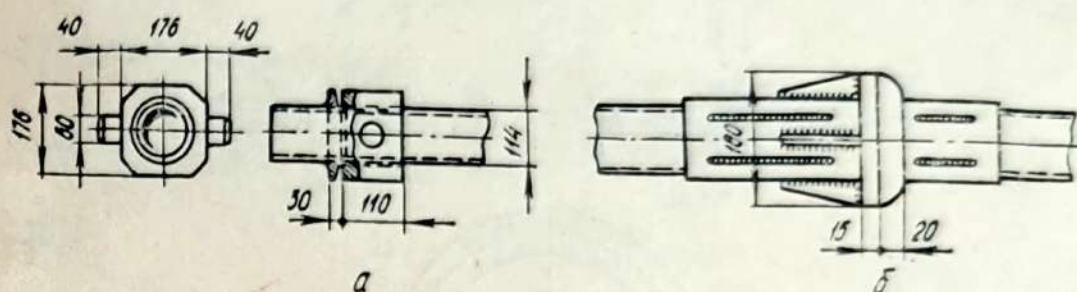


Рис. 13. Крепление труб с приваркой упорного кольца:
а — к трубопроводу; б — к усилительной гильзе.

горизонтальной нагрузок и других факторов. Применяют, как правило, шарнирное (с подвесками или без них) крепление.

На рис. 13, а показана конструкция узла крепления трубопровода к пилону на одном из первых переходов в виде провисающей нити, построенном в СССР через р. Ухту. Он состоит из приваренного к трубопроводу упорного кольца с выпуклой сферической поверхностью и надетой на него муфты с соответствующей выгнутой поверхностью. Муфта с помощью цапф крепится к оголовку пилон. Недостатком этой конструкции является соединение упорного кольца с трубопроводом только одним кольцевым швом. Лучше осуществлять крепление с помощью косынок, расположенных по окружности трубопровода параллельно образующей. При больших усилиях натяжения на концах трубопровода следует устраивать специальные гильзы из труб большего диаметра (рис. 13, б).

На рис. 14 приведены примеры шарнирного крепления труб к оголовку пилон на подвесках в переходах, построенных позже. Из приведенных решений предпочтительны конструкции по рис. 14, а, в. Вариант с подвесками, расположенными выше соединительного патрубка, несколько сложнее. Расстояние между точками подвеса определяется конструкцией оголовка пилон или компенсатора. В многопролетных решениях следует применять подвески, позволяющие регулировать стрелу провисания трубопровода. Конструктивно их можно выполнять в виде талрепа.

Крепление труб к анкерным опорам выполняется аналогично креплению на пилонах. При отсутствии натяжного устройства на пилонах

крепление должно обеспечивать также возможность регулирования геометрии провисающего трубопровода. Одним из примеров такого крепления может служить крепление, состоящее из подвижной и неподвижной муфт, соединенных между собой уголками. Наличие отверстий в одной из полок по длине уголков позволяет менять расстояние между муфтами, а с ним и геометрию трубопровода.

В зависимости от диаметра трубопровода, величины пролета, рельефа местности и других параметров применяют различные конструк-

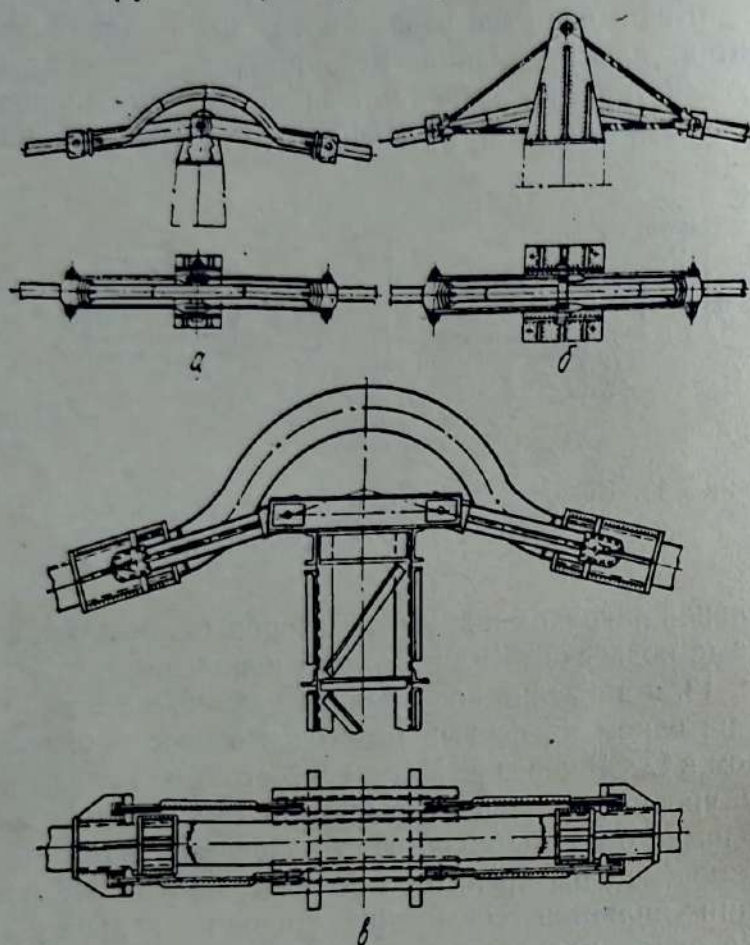


Рис. 14. Схемы подвески труб с помощью тяг:
а, б — двух; в — четырех.

ции пилонов: от плоских А-образных до сложных пространственных решетчатых систем. Ширина пилонов поверху определяется конструкцией подвески трубопроводов, понизу — расчетом на ветровую нагрузку, действующую перпендикулярно к плоскости провисания трубопровода. Пилоны целесообразно выполнять из труб. Несколько худшие показатели дают решения из прокатных профилей. Во избежание появления больших изгибающих моментов вследствие приложения несимметричной нагрузки (при пуске продукта), изменения температуры и т. п. крепление пилонов к фундаментам устраивают шарнирным. Более эффективны решения с гибкими вдоль пролета пилонами.

В СССР построены переходы в виде провисающей нити (рис. 15) с максимальным пролетом 400 м и наибольшим диаметром труб —

720 мм. Одним из первых был построен переход через р. Ухту (рис. 15, а). Пролет перехода 400 м, диаметр трубы 114 мм, стрела провисания 18 м, опоры А-образного типа.

Через реки Кубань и Б. Зеленчук построен двухниточный переход пролетом 350 м (рис. 15, б), диаметр труб 273 мм, стрела провисания 10,5 м. Опоры решетчатой конструкции. Трубы проложены параллельно на расстоянии 1,2 м одна от другой. Через 40 м по длине трубы

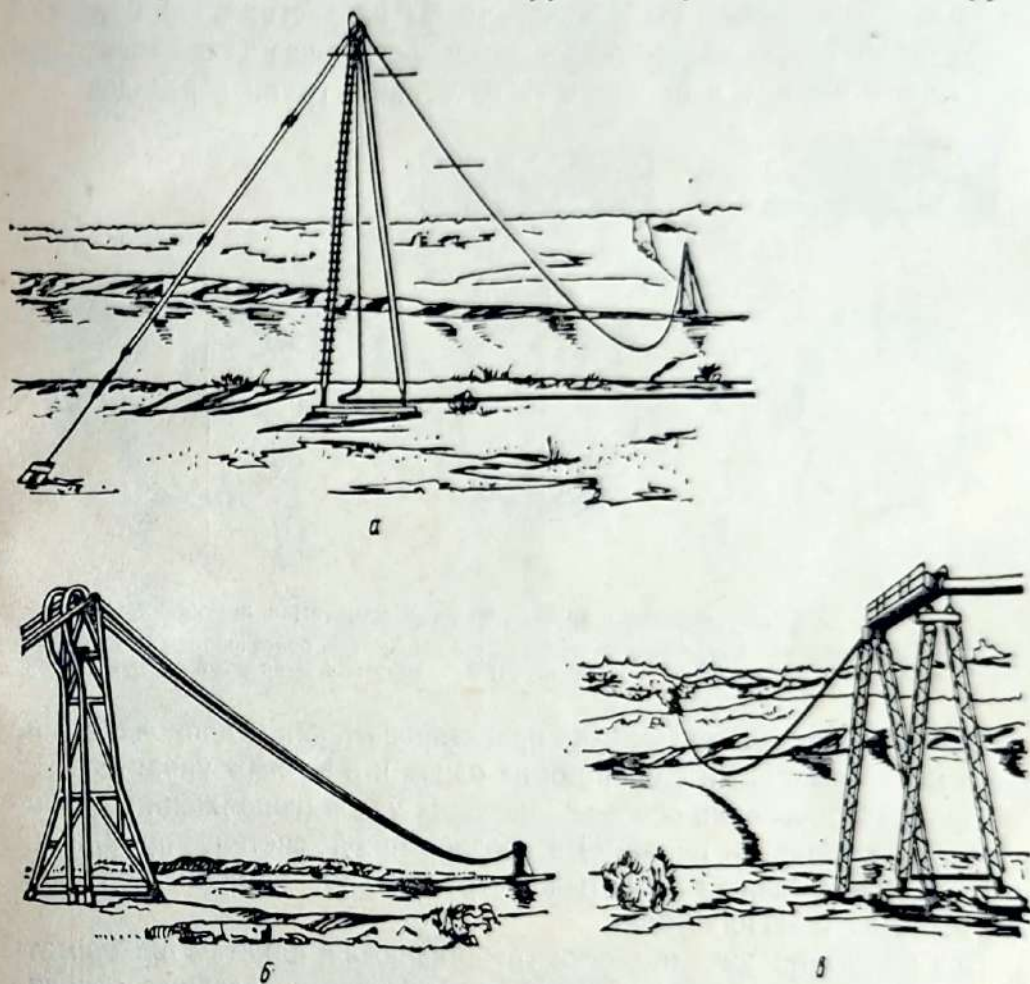


Рис. 15. Висячие переходы через реки:
а — Ухту; б — Кубань и Б. Зеленчук; в — Ию.

соединены между собой поперечными связями. За оголовками пилонов, как и в переходе через р. Ухту, устроены компенсаторы. От них трубы опускаются вертикально вниз.

На рис. 15, в показан переход через р. Ию диаметром 720 мм с пролетами 88,4 и 340 м. Так как один берег был высоким, то потребовалось установить всего один пилон. Конструкция пилоната принята из двух трапециевидных решетчатых рам, расположенных на расстоянии 11,6 м одна от другой вдоль трассы. Поверху рамы соединялись между собой жесткими связями.

В порядке совершенствования конструкций переходов в виде провисающей нити нами была предложена * и разработана новая система,

* А. с. 499370 (СССР). Трубопроводный переход / В. Н. Шимановский, В. И. Киреенко. — Опул. в Б. И., 1976, № 2.

являющаяся модификацией двух групп переходов: одноцепных с вертикальными подвесками и в виде провисающей нити. Пролетная конструкция предложенной системы переходов выполняется из двух, совместно работающих на растяжение, связанных между собой по длине шпангоутами, элементов — трубы и канатов, провисающих по кривым однозначной кривизны.

Предложенная система свободна от недостатков первой (позволяет использовать несущую способность трубы на растяжение) и второй (имеет повышенную надежность и позволяет производить замену звеньев труб в пролете в процессе эксплуатации) групп переходов.

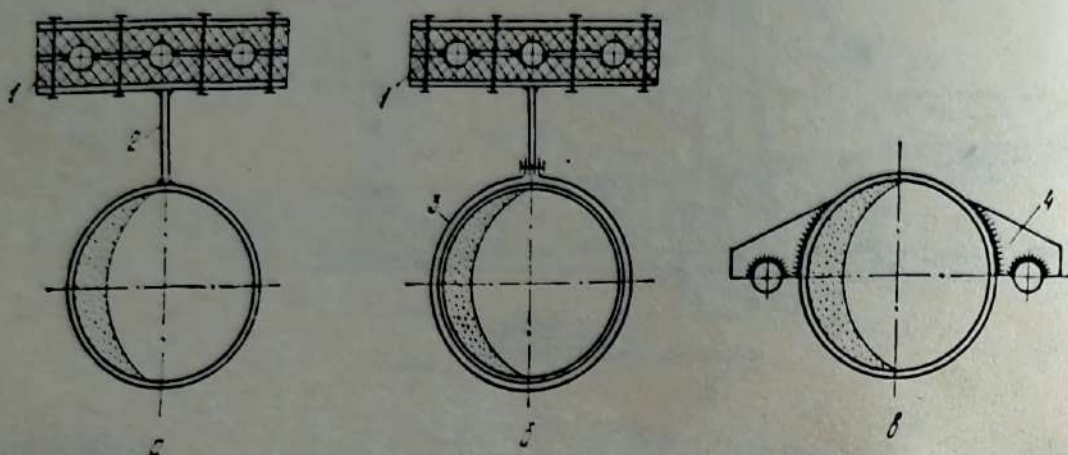


Рис. 16. Схемы подвески трубопровода к канатам с помощью:
 а — шпангоутов; б — хомутов; в — опорных столиков; 1 — болтовой зажим с прокладками из фторопласта; 2 — шпангоут; 3 — хомут; 4 — опорный столик.

Переходы этой системы можно проектировать как однопролетными, так и многопролетными с опорами на одном и в разных уровнях.

При проектировании основных несущих узлов (сопряжения трубопровода с канатами и опорами) в предложенной системе прокладки учитывались особенности работы конструкции как в стадии монтажа, так и в стадии эксплуатации.

При разработке узла подвески трубопровода к канатам предусматривалась возможность продольных перемещений последних относительно трубопровода, возникающих при проявлении неупругих деформаций канатов, при регулировании натяжений в системе «трубопровод — канаты», а также при неравномерном нагреве и ветровых воздействиях. Предусматривалось также, что канаты могут использоваться как пути для надвигки плети трубопровода. При этом необходимо было обеспечить скольжение крепящих устройств вдоль канатов с минимальным трением и исключить повреждение антикоррозийного покрытия последних. Были разработаны различные конструктивные решения такого узла, в том числе в виде роликов качения на подшипниках и других механизмах. Наиболее простым и эффективным оказалось решение в виде болтового зажима с прокладками из фторопласта с низким коэффициентом трения (рис. 16). Для прокладок можно использовать фторопласт марки Ф4К20. По паспортным данным, коэффициент трения скольжения его колеблется от 0,02 до 0,2; он обладает большой химической стойкостью и имеет повышенные механи-

ческие характеристики (предел прочности при растяжении равен 13 МПа).

При трех и большем количестве канатов подвеску к ним трубопровода лучше всего осуществлять снизу на шпангоутах или гибких тягах (см. рис. 16, а, б). При двух канатах можно рекомендовать крепление, приведенное на рис. 16, в. Такое крепление целесообразно и при перетаскивании плети трубопровода по канатам.

Одним из ответственных узлов системы является узел крепления пролетной конструкции перехода к пилону. Наиболее удачное решение

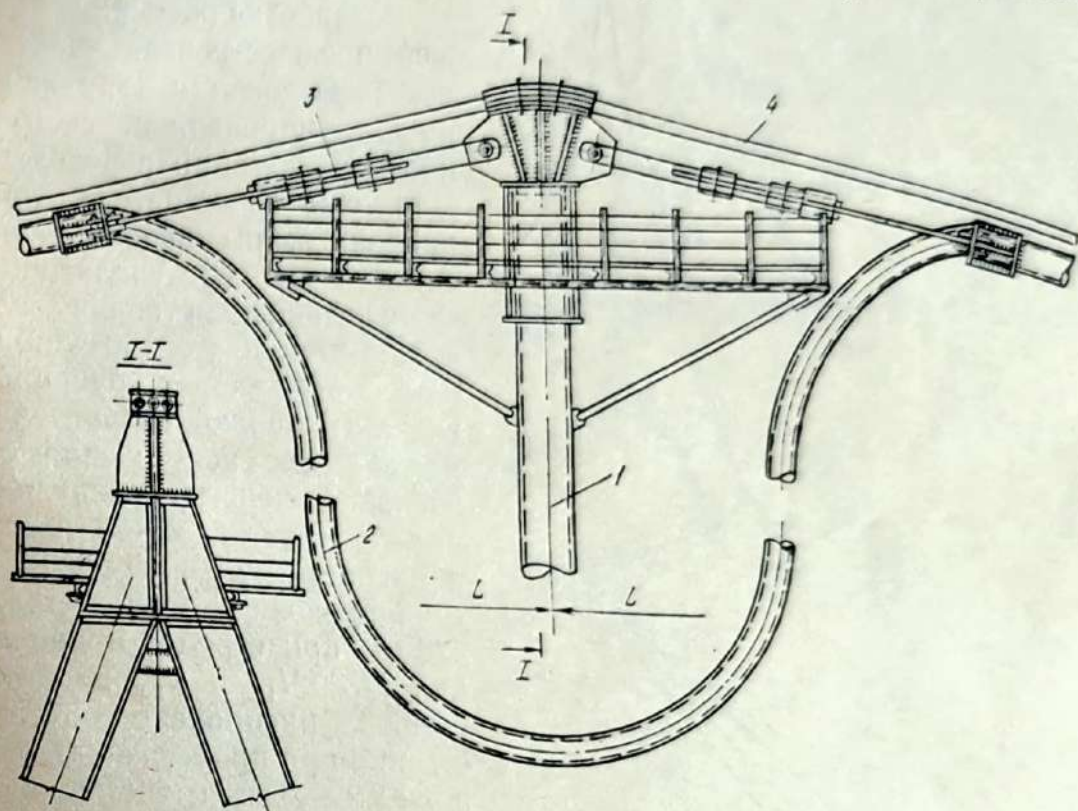


Рис. 17. Конструкция узла крепления трубопровода к пилону:
1 — пилон; 2 — трубопровод; 3 — натяжное устройство; 4 — канаты.

этого узла приведено на рис. 17. Если трубопровод подвешен к канатам снизу, то и гибкую несущую вставку (компенсатор) удобно пропускать между «ног» пилона, в противном случае — над пилоном. Приведенная на рис. 17 конструкция опорного узла обеспечивает свободный поворот концов трубопровода как в плоскости, так и из плоскости провисания. Свободный поворот концов трубопровода в плоскости провисания достигается путем крепления опорных тяг к горизонтальной оси. Для обеспечения поворота опорных сечений из плоскости провисания опорные тяги должны выполняться из гибкой стальной полосы или каната.

Натяжное устройство трубопровода необходимо располагать в пролете непосредственно в месте крепления трубопровода к пилону, а канатов — на оттяжках вблизи анкерных опор. При этом конструкция узла опирания канатов на верхушке пилона должна допускать возможность их проскальзывания.

В 1973—1974 гг. Укрпроектстальконструкцией по плану экспериментального проектирования Госстроя СССР были разработаны рабочие чертежи газопроводных переходов в виде провисающей нити с поддерживающими канатами для трубопроводов трех сравнительно широко распространенных в строительстве диаметров: 426, 530 и 720 мм. Были разработаны одно- и многопролетные решения с пролетами 200,

300, 400, 500, 600, 700 и 800 м и стрелами провисания $1/10$, $1/15$ и $1/20$ пролета.

Разработке рабочих чертежей предшествовали численные исследования напряженно-деформированного состояния конструкций переходов. Для каждого диаметра трубопровода были найдены зависимости $\sigma = f(l)$. Анализ указанных зависимостей показал, что при пролетах 100—200 м в рассматриваемых трубопроводах возникают сравнительно большие напряжения от изгиба. Равенство между напряжениями от изгиба и напряжениями от распора для трубопровода диаметром 426 мм при стрелах провисания $1/10$, $1/15$ и $1/20$ пролета было зафиксировано соответственно при пролетах 600, 400 и 300 м. Для трубопровода диаметром 530 мм оптимальными оказались пролеты соответственно 700, 450 и 350 м, а для трубопровода диаметром 720 мм — 200, 600 и 450 м. При сварке звеньев труб по параболической кривой можно существенно снизить напряжения в трубопроводе и



Рис. 18. Переход газопровода через р. Сырдарью.

уменьшить величины оптимальных пролетов.

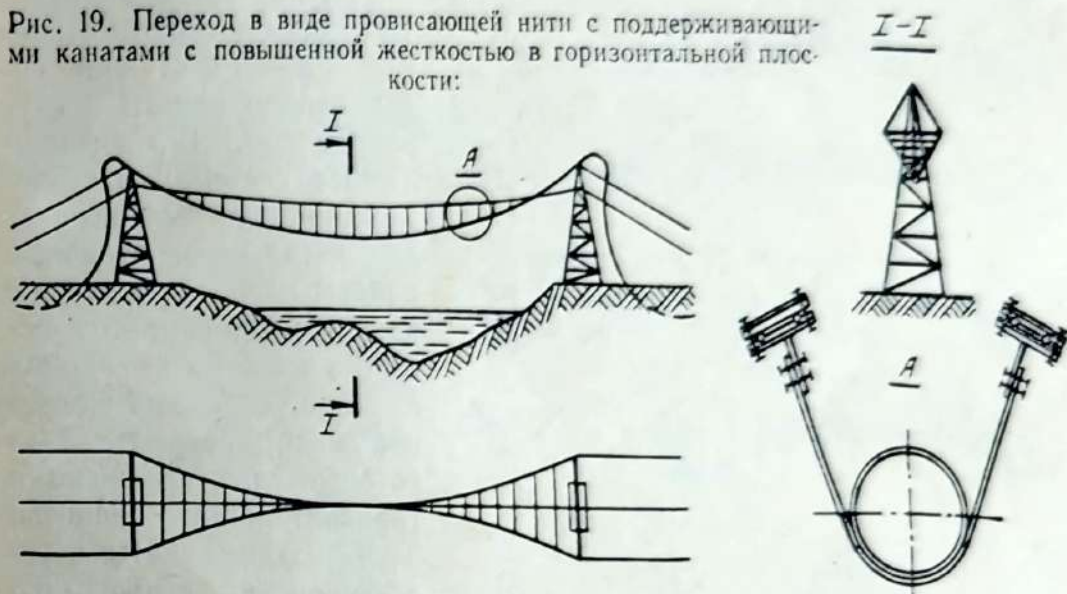
После разработки рабочих чертежей переходов по плану экспериментального проектирования Госстроя СССР Укрпроектстальконструкцией был разработан проект газопроводного перехода новой системы диаметром 426 мм через р. Сырдарью (рис. 18). Пролет перехода 800 м, стрела провисания 57,4 м. Разница в отметках уровней земли у пилонов на правом и левом берегах реки 100 м.

В конструктивном отношении этот переход интересен еще и тем, что он не имеет каких-либо устройств для горизонтального раскреп-

ления трубы. Последняя под действием ветровой нагрузки может свободно отклоняться от вертикальной плоскости. Проектом производства работ предусматривается осуществлять монтаж трубопровода путем надвигки его с более высокого берега по заранее навешенным на пилоны стальным канатам.

Висячие переходы, в том числе и переходы в виде провисающей нити с поддерживающими канатами, имеют сравнительно небольшую горизонтальную (поперечную) жесткость пролетной конструкции. В порядке дальнейшего совершенствования конструкций переходов нами было предложено * решение, обеспечивающее необходимую несущую способность и жесткость пролетной конструкции как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях (рис. 19). В отличие от

Рис. 19. Переход в виде провисающей нити с поддерживающими канатами с повышенной жесткостью в горизонтальной плоскости:



конструкции перехода в виде провисающей нити с поддерживающими канатами в предложенном решении несущие канаты расположены по кривой в профиле и плане. При этом соединительные элементы (подвески, стойки) располагаются наклонно, причем их длина и угол наклона возрастают от середины пролета к опорам.

Оптимальное соотношение проекций вертикальной и горизонтальной стрел провисания канатов зависит от соотношения нагрузок в соответствующих плоскостях и принимается на основании технико-экономических расчетов. Как правило, стрела провисания трубопровода принимается несколько большей проекции вертикальной составляющей стрелы провисания канатов. В переходах такой системы экономически целесообразно применять V-образные пилоны.

Точно такой же эффект может быть достигнут, если в двух- и многониточных переходах трубопроводы будут провисать по пространственной кривой. Это можно достичь путем уменьшения длин соединительных элементов (растяжек) от опор к середине пролета.

С использованием этой идеи Укрпроектстальконструкцией в 1978 г. был разработан технический проект двухниточного нефтепровода

* А. с. 688552 (СССР). Трубопроводный переход / А. В. Шимановский, В. Н. Кислокий, В. Н. Шимановский. — Оpubл. в Б. И., 1979, № 36.

через р. Амударью. Пролет трубопровода 950 м, диаметр труб 630 мм, вертикальная проекция стрелы провисания 75 мм, горизонтальная — 40 м, опоры V-образного типа из труб высотой 85 м.

§ 6. КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ВОСПРИЯТИЯ ВЕТРОВОЙ НАГРУЗКИ

Висячие трубопроводные переходы снабжают специальными устройствами для повышения горизонтальной (поперечной) жесткости пролетной части и восприятия усилий от ветровой нагрузки.

В практике строительства наибольшее распространение получили горизонтальные ветровые фермы (рис. 20, а). Основными несущими

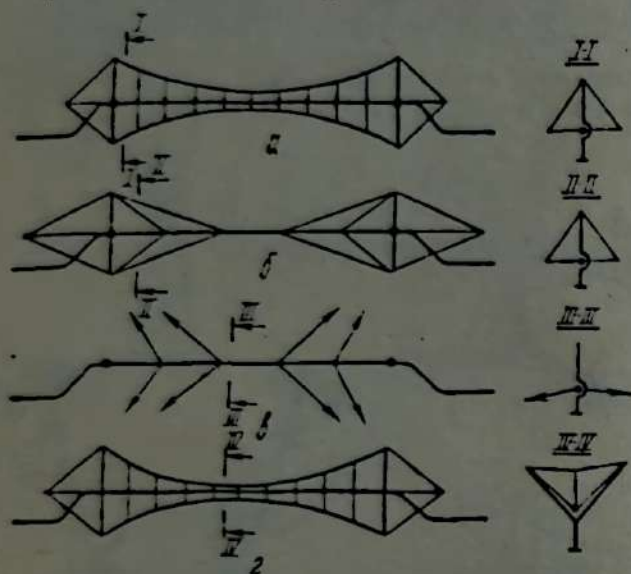


Рис. 20. Схемы ферм и устройств для восприятия ветровой нагрузки:

а — горизонтальные ветровые; б — горизонтальные радиально-вантовые; в — боковые оттяжки; г — наклонные с V-образными пилонами.

элементами в них являются натянутые в горизонтальной плоскости стальные канаты и стяжки, соединяющие канаты с трубопроводом. В многопролетных системах, а также в однопролетных переходах, когда горизонтальные канаты крепятся к тем же анкерным опорам, что и несущие канаты, на опорах пилонов устраиваются специальные траверсы, через которые перекидываются горизонтальные канаты. Траверсы и канаты в узлах крепления стяжек поддерживаются подвесками, закрепленными к верхнему

поясу вертикальной висячей фермы. Наряду с креплением концов горизонтальных канатов к анкерным опорам вертикальных ферм получили распространение решения, которые предусматривают крепление их к специально сооружаемым для этого анкерам. При этом в однопролетных переходах отпадает потребность в устройстве на пилонах траверс.

Недостатком таких горизонтальных ветровых ферм является значительная трудоемкость монтажа и многодельность конструкции, связанные с наличием многочисленных деталей, требующих механической обработки, большим числом растяжек и подвесок, а также недоступностью для осмотра и окраски их при эксплуатации.

Горизонтальные фермы могут быть выполнены в виде радиально-вантовых систем (рис. 20, б).

Укрепление стальной конструкцией разработана и внедрена в строительство на многих крупных объектах новая система горизонтального закрепления висячих переходов в виде оттяжек (рис. 20, в). Количество их определяется несущей способностью трубы, так как в пределах панели между узлами крепления оттяжек труба работает на местный

изгиб. Оттяжки крепятся к легким анкерным опорам, располагаемым примерно на уровне опор пилонов и размещаемым в плане в любом удобном месте. Оттяжки могут быть наклонными с креплением к анкерным опорам на уровне грунта и горизонтальными с подъемом анкерных

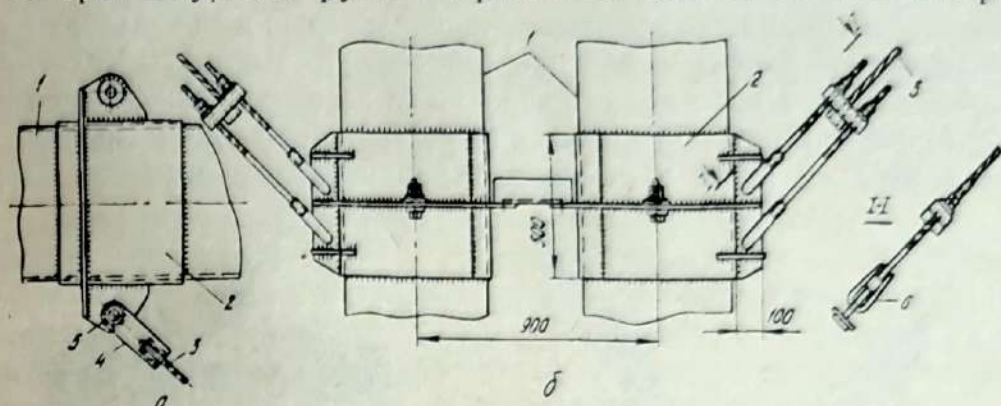


Рис. 21. Узлы крепления боковых оттяжек к трубам:

а — болтами-шарнирами; *б* — скобами; *1* — трубы; *2* — муфта усиления; *3* — канат оттяжки; *4* — фасонка, приваренная к анкерному стакану; *5* — болт-шарнир; *6* — скоба.

узлов путем использования специальных переходных пилонов, если это требуется для удовлетворения заданных габаритов. Закрепляя оттяжки ниже отметки оси трубопровода и натягая их, можно увеличить вертикальную жесткость пролетного строения. Оттяжки крепятся к трубам в узлах примыкания вертикальных подвесок с помощью листовых фасонки, приваренных к муфтам усиления и шпангоутам (рис. 21).

Пилоны для подъема оттяжек выполняются в виде легких металлических стоек с гибкими тягами. Конструкция закрепления канатов к пилону должна обеспечивать регулировку длин оттяжек (рис. 22).

При замене вертикальной несущей фермы двумя наклонными с устройством V-образных пилонов пролетное строение превращается в пространственную конструкцию, не требующую каких-либо дополнительных устройств для восприятия ветровых нагрузок (рис. 20, *а*). Примером такого решения может служить переход газопровода через р. Дунай в Австрии пролетом 320 м [14] (рис. 23, *а*). Ветви V-образных пилонов обычно наклоняются под углом 40—45°. Сечение несущих канатов и подвесок рассчитываются на совместное действие вертикальной

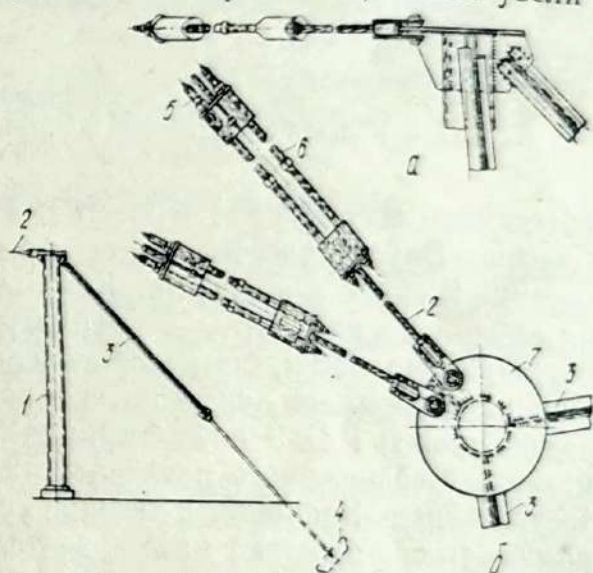


Рис. 22. Пилон ветровых оттяжек:

а — деталь оголовка пилона; *б* — план оголовка пилона; *1* — стойка пилона; *2* — канаты к натяжным устройствам оттяжек; *3* — тяги из жестких профилей; *4* — анкерная опора; *5* — канаты оттяжек; *6* — натяжные устройства; *7* — листовая фасонка оголовка пилона.

и горизонтальной нагрузок. Конструкции переходов с V-образными пилонами более сложны в монтаже и имеют несколько худшие технико-экономические показатели в сравнении с переходами с вертикальными несущими фермами и боковыми оттяжками.

Другой принцип восприятия ветровой нагрузки использован при проектировании перехода газопровода через р. Влтава в Чехословакии (рис. 23, б). Пролетное строение этого перехода также выполнено в виде пространственной системы, но трехгранной с одним пучком канатов в верхнем поясе и двумя нитками канатов в нижнем. Пояса

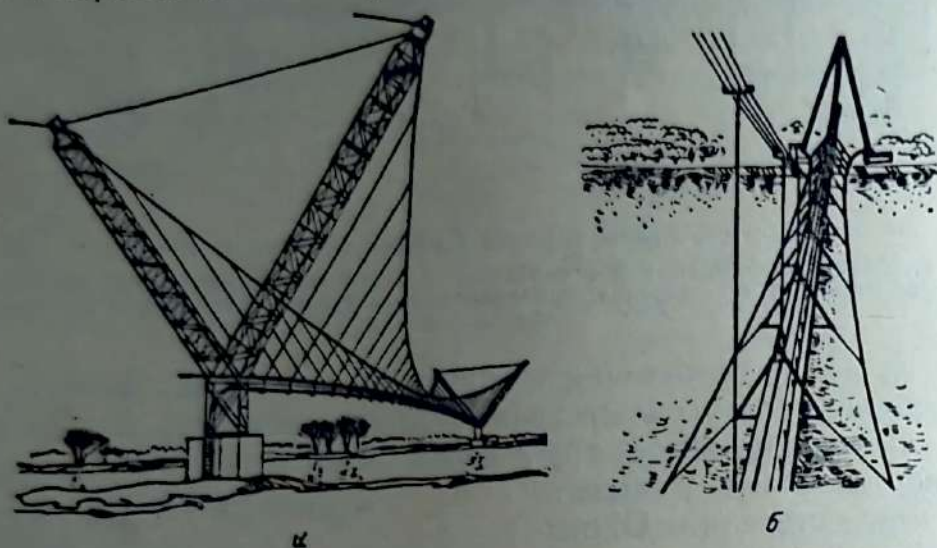


Рис. 23. Схемы висячих переходов:

а — через р. Дунай с наклонными фермами и V-образными пилонами; б — через р. Влтаву с трехгранной висячей фермой.

объединены системой тяг с жесткими треугольниками в узлах пересечения. Внутри треугольников пропускаются трубы и смотровой мостик. Пилоны A-образные. Канаты верхнего пояса опираются на их вершину, а нижнего — закрепляются к основаниям «ног». Пролет висячей фермы 160 м, стрела провисания канатов верхнего пояса 14 м, ширина трехгранной фермы переменная от 15 м на опорах до 4,5 в середине пролета [14]. Эта конструкция также трудоемка в изготовлении и требует повышенного расхода металла на жесткие металлические треугольники. Кроме того, поскольку боковые канаты имеют малый разнос, то они работают на горизонтальную нагрузку менее выгодно, чем обычные горизонтальные фермы.

При двух- и многониточных переходах наиболее эффективным является решение, когда расположенные на определенных расстояниях трубопроводы стягиваются гибкими растяжками один к другому таким образом, чтобы длины растяжек уменьшались от опор к середине пролета. Длины растяжек определяются из уравнения нити конечной жесткости. Горизонтальная стрела провисания трубопроводов назначается в зависимости от интенсивности ветровой нагрузки и принимается в пределах $\frac{1}{15}$ — $\frac{1}{25}$ пролета.

Из перечисленных конструкций для восприятия ветровой нагрузки везде, где позволяют местные условия, следует раскреплять трубопровод боковыми оттяжками, поскольку такая конструкция наименее

трудоемка и достаточно экономична. Использование других систем может оказаться целесообразным в сложных геологических или других условиях, затрудняющих устройство анкерных опор оттяжек.

Остановимся на новой тенденции в проектировании висячих переходов, заключающейся в отказе от каких-либо устройств для горизонтального раскрепления трубопровода. При отсутствии устройств для горизонтального раскрепления труба должна освобождаться также и от закреплений на опорах пилонов, чтобы она могла свободно отклоняться без возникновения дополнительных изгибных напряжений. Угол отклонения может быть легко определен расчетом из условия уравнивания ветрового напора горизонтальной составляющей веса трубы и продукта. Однако некоторое защемление труб у опор неизбежно при любом конструктивном решении, поскольку сильный порывистый ветер, раскачивая трубу, отклоняет ее из вертикальной плоскости вместе с несущей вертикальной фермой и вызывает кручение в опорных сечениях. Как правило, угол отклонения трубы сравнительно невелик, и возникающие при этом напряжения не могут быть решающими.

С использованием этой идеи в США запроектирован и построен переход газопровода диаметром 762 мм через р. Огайо пролетом около 700 м. Опыт эксплуатации этого перехода дал положительные результаты. Поскольку висячие переходы без устройств для ограничения действия ветрового напора весьма перспективны, то для решения вопроса о внедрении их в практику строительства необходимо провести обширные экспериментально-теоретические исследования.

§ 7. КАНАТЫ И АНКЕРЫ. НАТЯЖНЫЕ УСТРОЙСТВА

Основные несущие элементы висячих трубопроводных переходов (пояса и решетка вантовых ферм, подвески, оттяжки и др.) выполняют из стальных канатов. В зависимости от величины пролета, диаметра трубопровода, нагрузок и других факторов усилия в канатах могут изменяться от нескольких десятков до тысяч тонн. От величины усилия зависит число и конструкция канатов.

Канаты изготавливают из высокоуглеродистой стальной канатной проволоки с временным сопротивлением $\sigma = 1000-2400$ МПа. В процессе производства проволоку подвергают термической обработке, которая в сочетании с холодной обработкой (волочением) придает проволоке высокие механические свойства.

Наибольшее применение в строительстве получили круглые стальные канаты одинарной и двойной свивок. Гораздо меньшее распространение получили невитые канаты. Последние представляют собой группы параллельно уложенных многослойных прядей ТК и проволок диаметром от 2 до 8 мм, канатов закрытой или открытой конструкций. Собранные в пучки по обычной схеме $1 + 6 + 12 + 18 \dots$ такие канаты плотно скрепляют и обжимают различными способами или стяжками.

Для висячих систем следует применять канаты без органических сердечников с повышенным шагом свивки:

спиральные из круглых проволок по ГОСТ 3062—80, ГОСТ 3063—80, ГОСТ 3064—80, ГОСТ 13840—68*;

спиральные закрытые по ГОСТ 3090—73, ГОСТ 18900—73*, ГОСТ 18902—73, ГОСТ 7675—73, ГОСТ 7676—73;

двойной свивки многопрядные по ГОСТ 3066—66, ГОСТ 3067—74, ГОСТ 3068—74; ГОСТ 3081—80, ГОСТ 7667—80, ГОСТ 7669—69*, ГОСТ 14954—80;

пучки параллельных проволок, формируемые из канатной проволоки, соответствующей ГОСТ 7372—79 или специальным техническим условиям.

Таблица 2. Рекомендуемые значения модуля упругости канатов [26]

Конструкция канатов	Модуль упругости канатов, $E_k \cdot 10^6$ МПа	
	предварительно вытянутых	подвергнутых технологическим воздействиям
Невитые	2	2
Семипроволочные	1,8	1,8
Спиральные диаметром:		
до 55 мм	1,5—1,7	1,4—1,5
более 55 мм	1,5—1,6	1,4
Спиральные с увеличенными (до 11—12) кратностями свивки диаметром:		
до 55 мм	1,7	1,6
более 55 мм	1,6	1,5
Многопрядные	1,3—1,5	1,2
Многопрядные с увеличенными кратностями свивки (прядей 14—15, каната 10—12)	1,6	1,4

При выборе типов канатов следует учитывать требования «Технических правил по экономному расходованию основных строительных материалов» (ТП 101—81), предусматривать повышение степени индустриализации и снижение трудоемкости работ. При назначении типов канатов и комплектации заказа нужно учитывать показатели, характеризующие затраты трудовых и материальных средств для их изготовления. Завышенные требования к канатам могут повысить их стоимость на 50—70 %.

Условия эксплуатации канатов в висячих системах соответствуют, как правило, требованиям, предъявляемым к проволокам I и II марок. Следует учитывать, что применение проволоки высшей марки повышает стоимость канатов на 25—30 %.

Модуль упругости предварительно вытянутых канатов, а также подвергнутых после вытяжки технологическим воздействиям (свертыванию в бухты или намотке на барабаны, перегибам и т. п.) можно принимать в соответствии с табл. 2. Модуль упругости канатов, не прошедших предварительной вытяжки, следует принимать равным 80 % величин модулей, приведенных в табл. 2, предварительно вытянутых канатов.

Момент инерции сечения каната из круглых проволок определяется как сумма моментов инерции каждой проволоки относительно ее центральной оси, умноженная на коэффициент, учитывающий конструкцию каната,

$$I = k \sum_{j=1}^n I_j^{\text{пров}},$$

где n — количество проволок в канате; $I_j^{\text{пров}}$ — собственный момент инерции сечения j -ой проволоки; k — коэффициент, учитывающий конструкцию каната; для спиральных канатов $k = 1,8$, для канатов двойной свивки $k = 1,2$.

Деформация ползучести канатов проявляется в наибольшей мере в первые годы эксплуатации сооружения. По данным десятилетних наблюдений за сооружениями, величина деформации ползучести при уровне напряжения $(0,36—0,4) R''$ оценивается по отношению к



Рис. 24. Точеные анкерные стаканы:

а — с конической полостью; б, в — с цилиндрической полостью.

упругим деформациям: для канатов двойной свивки — до 0,05 %; для спиральных и закрытых — до 0,035 %.

Канатные элементы, подверженные действию циклических нагрузок, должны быть запроектированы с учетом усталостной прочности. При этом следует иметь в виду то, что усталости больше подвержены не сами растянутые элементы, а их узлы и соединения.

Способ крепления концов канатов выбирают в зависимости от диаметра канатов, конструкции опорных узлов, условий эксплуатации и т. п. Конструкция анкеров должна обеспечивать надежность заделки канатов и не снижать их прочности.

В качестве универсального крепления, пригодного для канатов всех типов, рекомендуется применять стальные анкера, в которых концы проволок заливаются цинковым сплавом (заливные анкера).

При передаче усилий в узлы опорных конструкций через торец заливного анкера последний следует выполнять в виде стакана с конической или цилиндрической внутренней полостью. Стаканы с конической внутренней полостью могут быть точеные или литые. Размеры и рекомендуемые марки сталей анкеров с конической внутренней полостью приведены в табл. 3, схема — на рис. 24, а. Размеры анкеров

с цилиндрической внутренней полостью приведены в табл. 4, схема — на рис. 24, б, в.

При шарнирном креплении каната и опорной конструкции рекомендуется применять заливные анкеры в виде сварных или гнутых

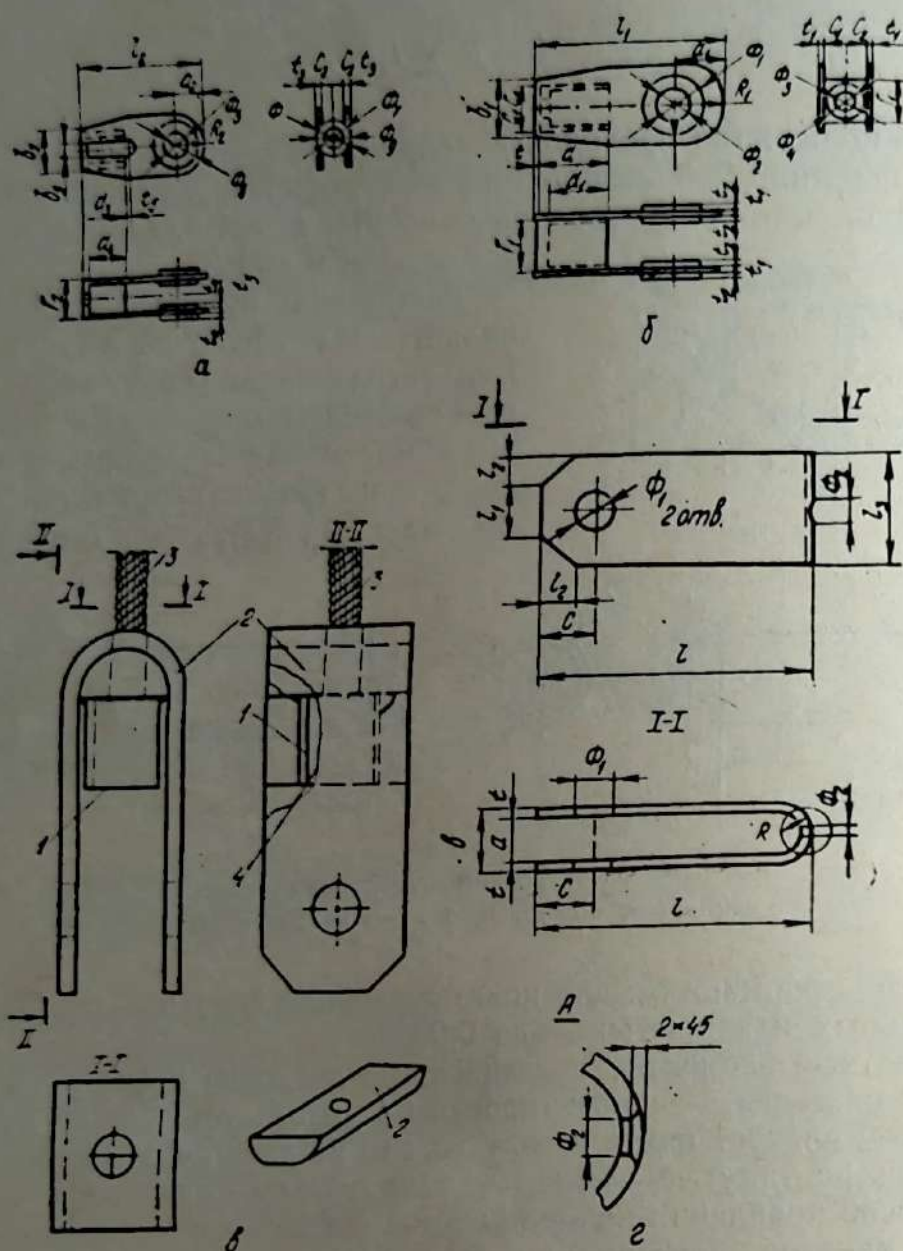


Рис. 25. Анкерные стаканы в виде скоб:

Т а б л и ц а 3. Характеристика анкеров с конической полостью

№ анкера	Диаметр каната d_k , мм	Разрывное усиление каната, кН	Размеры анкера, мм					Резьба метрическая
			наружный диаметр d_a	длина l_a	диаметр отверстий		длина нарезной части l_n	
					большого d_b	малого d_m		
1	16—20	250/350	60	90	42	$d_k + 4$	60	M60×4
2 *	20,5—26	350/500	70	110	52	$d_k + 4$	60	M70×4
3	26,5—29,5	500/700	80	130	60	$d_k + 4$	70	M80×4
4 *	30—33,5	650/900	90	155	70	$d_k + 4$	70	M90×4
5	30,5—36,5	800/1000	100	170	75	$d_k + 5$	80	M100×4
6	34—42,5	1000/1250	110	185	85	$d_k + 5$	80	M110×4
7 *	38,5—47	1200/1600	120	200	95	$d_k + 5$	80	M120×6
8 *	45—55	1500/2000	140	220	110	$d_k + 6$	90	M140×6
9	50—60	2000/2750	160	240	125	$d_k + 6$	90	M160×6
10	54—65	2500/3250	180	280	135	$d_k + 8$	100	M180×6
11	60—72	3000	190	300	145	$d_k + 8$	100	M200×6

П р и м е ч а н и я : 1. Материал анкеров № 1—10 — Ст 3₄₅; № 11 — Ст 3. Сталь ВСт3 сп 5 по ГОСТ 380—71 * может быть заменена на сталь марки 25 по ГОСТ 1050—74 **, а сталь марки 45 по ГОСТ 1050—74 ** на сталь марок 14Г2 или 10Г2С1 по ГОСТ 5058—65 *. Стали марок 25 и 45 должны поставляться с гарантиями по ударной вязкости согласно ГОСТ 1050—74 **. 2. Анкеры со звездочкой (*) прошли экспериментальную проверку.

В ряде случаев (как правило, при статических нагрузках) допускается применение гильзоклиновых анкеров (рис. 26, табл. 7). В этих анкерах сцепление с канатом происходит за счет затекания металла гильзы между проволоками каната или пряди. Гильзоклиновые анкеры эффективны при массовом их применении и централизованном изготовлении.

Для гильзоклиновых анкеров применяются следующие марки сталей: Ст 20 или ВСт3сп (ГОСТ 380—71*) без термообработки с твер-

Т а б л и ц а 4. Характеристика анкеров с цилиндрической полостью

Тип анкера	ГОСТ	Диаметр каната, мм	Параметры, мм						
			$\varnothing_1$	$\varnothing_2$	$\varnothing_3$	t_1	h	l	t_2
Круглый	3063—80	10—13	18	32	42	16	104	120	5
	3063—80	14—17	22	40	50	16	104	120	5
	3068—74	19—22	26	48	60	20	120	140	6
	3068—74	23,5—25,5	32	61	75	20	120	140	7
	3068—74	27,5	38	69	85	20	130	150	8
	3068—74	30—34	43	69	95	24	135	160	8
	3068—74	36—38	48	90	110	25	135	160	10
	3068—74	42,5	52	96	120	25	145	170	12
Квадратный	3068—74	55	60	110	130	26	154	180	10
	3068—74	68	72	130	150	40	180	220	10

достью 130—140, по Брюнеллю — для гильз; Ст45 с последующей термообработкой до твердости 35—45 — для клина.

Для заливки анкеров рекомендуется применять сплав ЦАМ9-1,5, состоящий из следующих компонентов (%): алюминий 9—11; медь 1—2; магний 0,03—0,06; цинк — остальное. Других примесей должно содержаться не более (%): свинца 0,03; железа 0,2; олова 0,01; кадмия 0,02; кремния 0,1; марганца 0,1. Всего примесей не более 0,5 %.

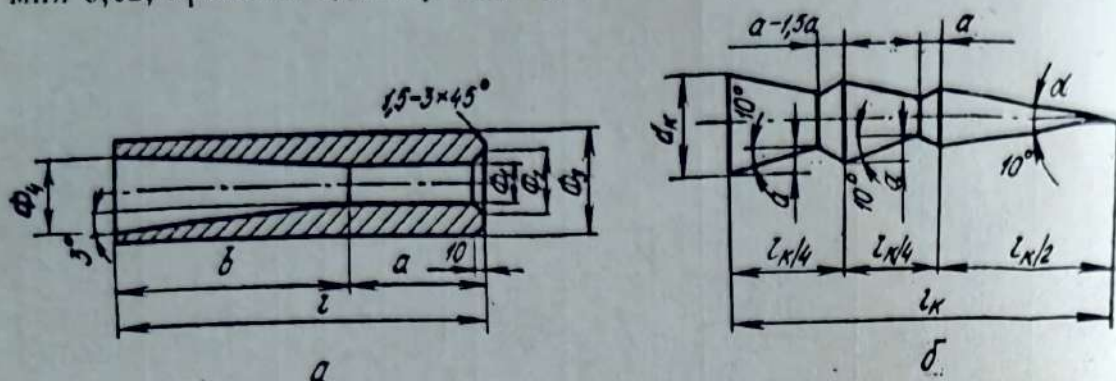


Рис. 26. Гильзоклиновой анкер:

а — гильза; б — клин.

Температура плавления сплава 450 °С. В случае необходимости можно применять другие, близкие по химическому составу сплавы на цинковой основе, имеющие температуру разлива 460—480 °С. Технология заделки концов каната в анкерные стаканы приведена в работе [26].

Как указывалось ранее, элементы висячих систем (несущие и ветровые канаты, решетка ферм, подвески, оттяжки и т. п.) должны вы-

Таблица 5. Характеристика анкеров в виде сварных скоб

Тип скобы	ГОСТ	Диаметр каната, мм	Размеры, мм							
			l_1	a_1	b_1	c_1	r_1	d_1	d_2	t_1
Круглая	3063—80	10—13	260	40	50	25	42	120	104	6
	3063—80	14—17	260	42	60	32	50	120	104	6
	3068—74	19—22	300	50	92	38	60	140	120	8
	3068—74	23,5—25,5	330	70	96	51	75	140	120	10
	3068—74	27,5	370	80	105	55	85	150	130	12
	3068—74	30—34	380	80	100	60	95	160	135	14
	3068—74	36—38	410	90	121	69	110	160	135	16
	3068—74	42,5	430	100	121	71	120	170	145	16
	3068—74	42,5	430	100	121	71	120	170	145	16
Тип скобы	ГОСТ	Диаметр каната, мм	Размеры, мм							
			t_1	C_1	$\varnothing_1$	$\varnothing_2$	R_1	$\varnothing_1$	$\varnothing_2$	$\varnothing_3$
Круглая	3063—80	10—13	10	17,5	35	60	38	18	32	42
	3063—80	14—17	10	19,5	35	60	42	22	40	50
	3068—74	19—22	10	23,5	48	80	46	26	48	60
	3068—74	23,5—25,5	10	27,5	55	100	60	32	61	75
	3068—74	27,5	10	32,5	65	115	65	32	69	85
	3068—74	30—34	10	40,5	65	115	70	43	79	95
	3068—74	36—38	10	43,0	80	140	90	48	90	110
	3068—74	42,5	10	48,5	80	140	100	52	96	120
	3068—74	42,5	10	48,5	80	140	100	52	96	120

Тип скобы	ГОСТ	Диаметр каната, мм	Размеры, мм							
			l_1	a_1	a_2	c_1	r_1	d	d_1	t
Квадратная	3068—74	55	470	100	150	65	130	180	154	10
	3068—74	68	600	150	170	75	150	220	180	10

Тип скобы	ГОСТ	Диаметр каната, мм	Размеры, мм						
			$\varnothing_1$	$\varnothing_2$	R_1	l_1	l_2	$\varnothing_3$	$\varnothing_4$
Квадратная	3068—74	55	90	160	95	12	10	60	110
	3068—74	68	126	220	125	16	12	72	130

полняться с возможностью последующей регулировки их длин. Для регулировки длин канатов применяют натяжные устройства. В зависимости от величины усилия, количества и диаметра канатов, конструкции узлов вантовой системы применяют различные типы натяжных устройств — от простейших талрепов в виде резьбовых соединений с гайками или муфтами, навинчивающимися на резьбу самих подвесок или растяжек, до сложных, выполняемых из прокатных профилей.

Таблица 6. Характеристика анкеров в виде гнутых скоб

ГОСТ	Диаметр каната, мм	Расчетное разрывное усилие, кН	Размеры, мм												Масса скобы, кг
			<i>l</i>	<i>l</i> ₁	<i>l</i> ₂	<i>l</i> ₃	<i>C</i>	Ø ₁	Ø ₂	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>t</i>	<i>h</i>		
3063—80	10—13	95,5—167,5	260	40	30	100	50	35	18	40	52	6	25	2,43	
			350											3,05	
3063—80	14—17	187—5—273	260	40	30	100	50	35	22	50	65	8	25	3,13	
			360											4,49	
3068—74	19—22	211,5—261	320	40	30	100	70	48	26	60	76	8	30	3,79	
			430											5	
3068—74	23,5—25,5	316—367	365	40	40	120	80	55	32	60	76	8	30	4,5	
			410											5,82	
3068—74	27,5	442	405	50	45	140	100	65	32	78	98	10	39	8,15	
			510											10,25	
3068—74	30—34	513—670	415	50	45	140	100	65	38	92	116	12	46	9,95	
			540											12,3	
3068—74	36—38	755—844	485	60	50	160	130	80	43	92	120	14	46	14,2	
			610											17,9	
3068—74	42,5	1040	505	60	60	180	130	80	48	100	128	14	50	16,8	
			640											21,3	
3068—74	55	1770	595	80	70	220	160	115	60	115	155	20	57,5	34,3	
			780											43	
3068—74	68	2585	640	80	80	240	170	125	72	145	195	25	72,5	48,2	
			880											66,2	
3068—74	73	2835	640	90	80	250	170	130	78	145	195	25	72,5	50,1	
			880											60	
3068—74	76	3270	640	90	80	250	170	140	82	156	216	30	78	60	
			880											82,8	

Таблица 7. Характеристика гильзоклинового анкера

Деталь	Геометрические характеристики, мм	Диаметр каната, мм									
		19,5	22,5	25	27,5	31,5	36	38	42	45	52,5
Гильза	a	59	64	79	80	96	97	107	127	138	93
	b	76	86	91	95	119	133	148	153	162	257
	l	135	150	170	175	215	230	255	280	300	350
	$\varnothing_1$	39	44	49	53	61	70	74	82	87	111
	$\varnothing_2$	23	26	28,5	31	36	41	43	48	52	60
	$\varnothing_3$	20	23	25,5	28	32	36,5	38,5	43	46	53
	$\varnothing_4$	28	32	35	38	44,5	50,5	54	59	63	80
Клин	d_k	20	22	25	26	32	34	38	42	45	62
	l_k	105	115	130	135	165	175	195	215	230	320
	a	5	5,5	6	7	8	9	10	11	11	13

В качестве примера одного из таких натяжных устройств на рис. 27 приводится конструкция устройства, разработанного Укрпроект-стальконструкцией для переходов в виде провисающей нити с поддерживающими канатами, устанавливаемого в пролете непосредственно в месте крепления трубопровода к пилону.

В приведенной конструкции натяжного устройства регулировка усилий производится с помощью гидравлических домкратов, устанавливаемых между постоянной и съемной траверсами. Движение постоянной траверсы происходит вдоль штанги с отверстиями для болтов, которыми фиксируется необходимая длина вытяжки.

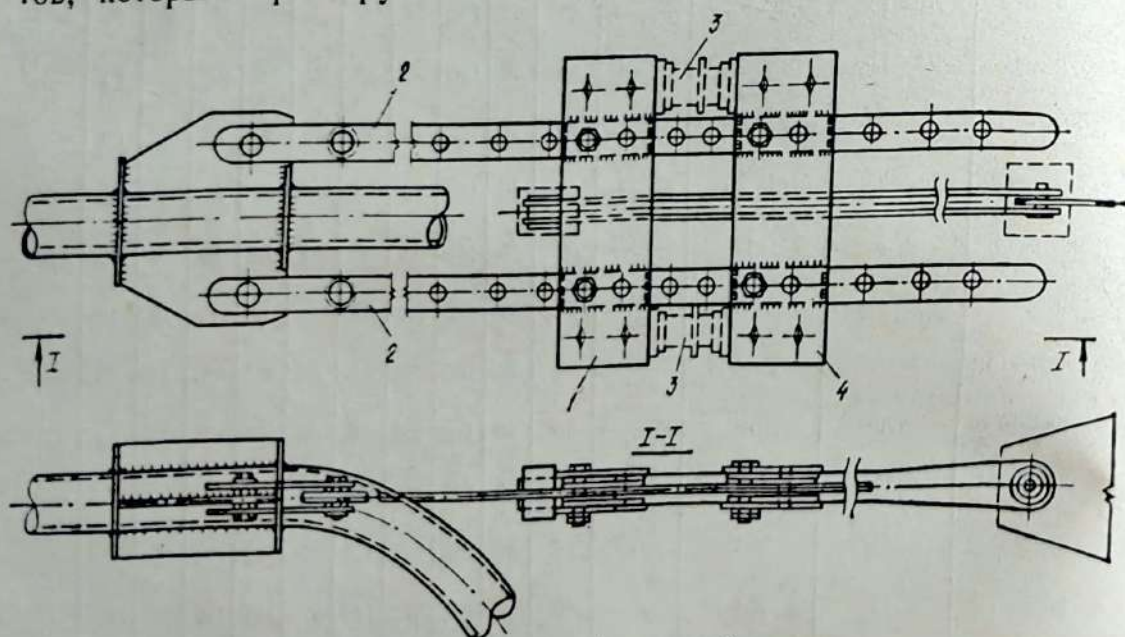


Рис. 27. Натяжное устройство трубопровода:

1 — постоянная траверса; 2 — штанга с отверстиями; 3 — гидравлический домкрат; 4 — съемная траверса.

Опоры пилонов и, особенно анкерные опоры, выполняют самых различных конструкций. Столь большое многообразие конструктивных решений зависит от района и условий строительства, инженерно-геологического строения грунтов основания, схемы и конструкции основных несущих элементов перехода, величины воспринимаемых нагрузок, условий монтажа и транспортирования конструкций и других факторов.

Чаще всего опоры переходов выполняли монолитными из бетона или железобетона, а в последнее время все чаще выполняют сборными из бетонных или железобетонных блоков.

Фундаменты опор проектируют как на естественном, так и на искусственном основании (свайном ростверке, опускном колодце и т. п.). При возможности размыва основание фундамента должно быть опущено на 0,5—1,0 м ниже максимально возможного размыва или защищено ограждением из шпунтов соответствующей глубины.

Тело опор пилонов проектируют массивным или из отдельных колонн, объединенных поверху ригелем. Опоры пилонов целесообразно располагать на удобном для производства работ месте (за пределами зеркала воды, на берегах ущелий или оврагов). Связанное с этим некоторое увеличение пролета и удорожание пролетной конструкции, как правило, окупается снижением стоимости строительных работ. Исключением является случай многопролетных переходов, когда промежуточные опоры могут попасть на залитые водой участки. Опоры пилонов должны быть рассчитаны на воздействие ударов льдин при наличии ледохода.

При отсутствии ледохода, а также в случае надземной прокладки трубопроводов конструкции опор пилонов должны быть по возможности облегченными, поскольку действующие на них усилия в большинстве случаев незначительны. В качестве опор можно с успехом применять рамные конструкции, «ноги» которых заделаны непосредственно в фундаменте, конструкции типа «свая — колонна» и др.

Анкерные опоры переходов работают в менее благоприятных условиях, поскольку они воспринимают значительные усилия от распора в висячей системе. Конструкция анкерных опор и расход материалов на них зависят, главным образом, от точки прикрепления несущих канатов и от способа передачи усилия на грунт. Чем выше будет точка приложения усилия от канатов, тем больше будет опрокидывающий момент, а следовательно, и неравномерность передачи усилия на грунт. Оптимальным является такое положение, при котором направление передачи усилия от каната совпадает с направлением равнодействующей реакции грунта. Этому условию отвечают анкерные опоры в виде закладных щитов из железобетонных плит (рис. 28.) Закладные щиты следует располагать таким образом, чтобы обеспечить принятые в расчете размеры призм сдвига грунта. Для этого оттяжки разводят от пилонна в плане на определенные углы. Прикрепленные к щитам жесткие металлические тяги выводятся на поверхность грунта. Они должны быть надежно защищены от коррозии.

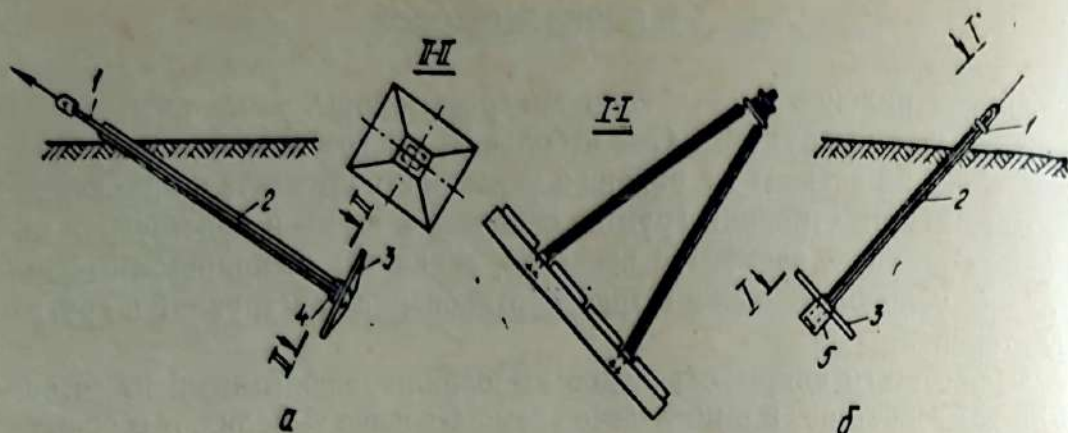


Рис. 28. Анкерные опоры с закладными щитами:

а — с одним; *б* — с несколькими; 1 — трос от анкерного щита к канатам; 2 — изоляция троса; 3 — анкерный щит; 4 — закладная часть щита для закрепления троса; 5 — железобетонная балка.

При возможности глубоких размывов во время паводков анкерные опоры в виде закладных щитов ненадежны. Приходится идти на сооружение массивных опор большого собственного веса, препятствующего их сдвигу (рис. 29). Такие «гравитационные» опоры требуют большого расхода бетона. Для экономии бетона анкерные опоры выполняют коробчатыми или ряжевymi с последующим заполнением их

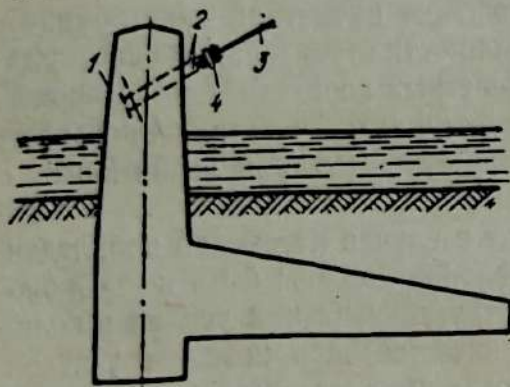


Рис. 29. Массивная анкерная опора:

1 — опора; 2 — анкерные болты; 3 — канат; 4 — траверса анкерных болтов.

грунтом. Как правило, их сооружают с сильно развитой подземной частью в сторону, к которой прикрепляют оттяжки. Такое решение позволяет повысить устойчивость опоры на опрокидывание при прочих равных условиях. Для улучшения работы на сдвиг (скольжение) опоры проектируют с так называемым «зубом» (см. рис. 29).

При пересечении водотоков оттяжки к опорам прикрепляют выше горизонта высоких вод для исключения возможного повреждения ка-

натов плывущими предметами или льдинами. Для уменьшения коррозии и предохранения от загрязнения элементы крепления оттяжек к опорам часто помещаются в специальную камеру, устраиваемую в теле опоры.

Глава II

ПОКРЫТИЯ

§ 1. ТИПЫ И ХАРАКТЕРИСТИКА ПОКРЫТИЙ

Характерная особенность висячих покрытий — работа пролетной конструкции, в основном, на растяжение — позволяет использовать самые высокопрочные стали и перекрывать практически неограниченные пролеты при сравнительно небольшом расходе материала на несущие и ограждающие конструкции.

Висячие покрытия зданий и сооружений представляют собой пространственные системы, образованные пролетными несущими и ограждающими конструкциями, воспринимающими внешние нагрузки, и опорными конструкциями, работающими во взаимодействии с пролетными и воспринимающими их реакции. Опорные конструкции, как правило, являются элементами несущего каркаса здания.

В настоящее время нет общепринятой классификации висячих покрытий. Это связано с трудностями. Ни один другой класс покрытий не имеет такого многообразия решений, как висячие. Практически трудно представить такой план, который нельзя было бы перекрыть, и нет такой формы поверхности, которую нельзя было бы создать, если использовать возможности висячих конструкций. Этим, а также отсутствием единого критерия, который можно было бы положить в основу классификации, и объясняется сказанное. Известные нам классификации, приведенные в работах Ф. Отто [22], Л. Г. Дмитриева и А. В. Касилова [8], Н. С. Москалева [21] и других авторов, не рассматривают всех особенностей работы таких систем, конструктивных отличий и многих других факторов.

В практике строительства получили применение вантовые системы, висячие оболочки и комбинированные системы. Вантовыми называют системы, в которых, в отличие от оболочек, не обеспечивается совместная работа ограждающих конструкций с опорным контуром. В комбинированных системах характер работы ограждающих конструкций может быть различным.

Опыт строительства показывает, что наиболее экономичными являются висячие покрытия, опорные конструкции которых работают если не безызгибно, то малоизгибно, т. е. испытывают, в основном, сжатие. Естественной формой таких покрытий в плане является круг или правильный многоугольник. Такое очертание покрытия обеспечивает также наибольшую несущую способность пролетных конструкций при прочих равных условиях. Только этим можно объяснить то, что удельный вес таких покрытий в общем объеме возведенных зданий и сооружений с висячими покрытиями значительно больше, чем других видов покрытий. Однако даже в зданиях с круглым планом расход материалов на опорные конструкции составляет около 50 % общего расхода материалов на покрытие. Поэтому снижение материалоемкости опорных конструкций в зданиях с висячими покрытиями является одной из важных задач.

Отказ от круглого плана и переход к строительству зданий с традиционным прямоугольным планом связан, как правило, с дополнительным расходом материала. Однако при выборе рациональной конструкции покрытия с прямоугольным планом дополнительный расход материалов можно свести к минимуму.

В последние годы рядом проектных и научно-исследовательских организаций были предложены многие типы вантовых покрытий. К сожалению, в гражданском, и особенно промышленном строительстве, получило применение весьма ограниченное количество типов покрытий.

Одной из важных задач, возникающих при проектировании висячих покрытий, является выбор геометрии поверхности покрытия.

Получили распространение покрытия с положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизной. Наряду с простыми поверхностями, описываемыми элементарными функциями, применяются также различного рода составные поверхности, имеющие переломы по линиям сопряжения простых поверхностей. Характер поверхности покрытия в значительной степени определяет его деформативность, применение того или другого метода напряжения вантовой сети и др.

Не менее важным при проектировании висячих покрытий является выбор схемы и структуры вантовой сети. Применяются регулярные (когда закон образования структуры сети одинаков по всей поверхности) и нерегулярные вантовые сети, образованные одним или несколькими семействами несущих элементов (гибких нитей, нитей конечной жесткости и т. п.). Однослойные сети из одного семейства вант (параллельные в прямоугольных в плане зданиях; радиальные — в круглых зданиях) вследствие большой кинематической податливости применяются, как правило, в виде арматуры висячих оболочек. Двухслойные сети, образованные путем пересечения двух семейств кривых, применяются, в основном, для вантовых систем. Наибольшее распространение получили сети из одного и двух семейств вант. Из трех и более семейств вант сети встречаются реже.

Пролетная конструкция висячих покрытий выполняется, за редким исключением, предварительно напряженной. Усилия предварительного напряжения могут передаваться на опорный контур, а также на конструкции ограждения.

Вантовые сети проектируют из стальных канатов, пучков высокопрочной проволоки, арматурных стержней, а также из листового и профильного металла.

Одним из критериев, оказывающих определяющее влияние на выбор типа конструкции покрытия, является удовлетворение функциональным особенностям зданий. Помимо прочности, жесткости, долговечности, конструкции покрытий должны удовлетворять также требованиям широкой унификации, заводского изготовления, индустриальности монтажа и экономичности. Для зданий промышленного назначения важно также обеспечить возможность их реконструкции, блокировки и т. п. Если для гражданских зданий этим требованиям удовлетворяют многие типы висячих покрытий, то для промышленных зданий средних и больших пролетов, — в основном, покрытия с замкнутым опорным контуром (цилиндрические оболочки, подвесные, комбинированные). Для зданий с пролетами 18—48 м более конкурентно способными оказываются конструкции с замкнутым безызгибным опорным контуром, а также покрытия с внешне безраспорной пролетной частью.

Считают, что в зданиях с вантовыми покрытиями подъемно-транспортное оборудование необходимо устраивать напольным, а к некоторым типам покрытий можно подвешивать лишь кран-балки грузоподъемностью до 30 кН. Не оспаривая целесообразность напольных кранов, отметим, что при необходимости комбинированные системы покрытий можно оборудовать подвесными кранами грузоподъемностью 100—200 кН.

В зависимости от назначения здания с висячими покрытиями могут иметь самое разнообразное очертание в плане: прямоугольное, квадратное, овальное, многоугольное, круглое, комбинированное (состоящее из прямолинейных и криволинейных участков) и др. В большом диапазоне могут изменяться пролеты и высоты отдельных частей зданий, радиусы кривизны поверхности и другие параметры.

Ниже приводятся некоторые данные, которыми руководствуются при выборе отдельных параметров зданий с висячими покрытиями.

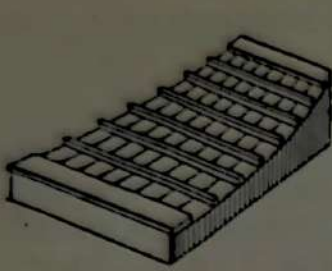
Размер пролета. В отличие от балочных конструкций в несущих элементах висячих систем усилие (распор) растет пропорционально величине пролета. При этом, если не ограничивать высоту опорных конструкций и соответствующим образом подбирать стрелу провисания несущих элементов, то можно добиться того, что распор в них с увеличением пролета расти не будет. Поэтому в зданиях с висячими покрытиями величина пролета не сказывается так существенно на материалоемкости пролетных конструкций, как в балочных системах.

Расположение опор. В прямоугольных однопролетных зданиях опоры, как правило, располагаются по периметру здания, в многопролетных — линейно (строчечно) и в шахматном порядке (в зависимости от типа вантовой сети). В овальных многоугольных и круглых зданиях опоры могут располагаться как по периметру зданий, так и в центре. Покрытия с одной центральной опорой (шатрового типа) позволяют уменьшить вдвое пролет и заметно снизить расход материалов как на ванты, так и на внутренний и наружный опорные контуры. Особенно целесообразно применять такие решения при строительстве зданий в районах с просадочными грунтами, поскольку можно всю нагрузку от покрытия передать на центральную опору и не бояться просадок опор, поддерживающих наружный опорный контур.

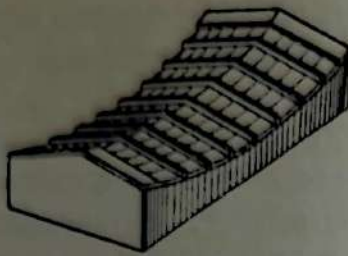
Встречаются покрытия с овальным, многоугольным и круглым планом с опорой не в центре покрытия, а также с двумя и большим количеством опор, расположенных внутри здания. Однако такие решения, как правило, менее эффективны, особенно в части трудоемкости работ.

Форма и количество опорных контуров. Прямоугольные однопролетные здания выполняются, в основном, с замкнутым опорным контуром. Реже встречаются здания с разомкнутым опорным контуром. В последнее время получили также применение решения с внутренними распорками, расположенными по диагоналям здания. В вертикальной плоскости замкнутый опорный контур выполняется прямолинейным, многоугольным или криволинейным. В последних двух случаях очертание опорного контура принимается в соответствии с кривой провисания несущей пролетной конструкции. В однопролетных зданиях с разомкнутым опорным контуром последний выполняется прямолинейным или с небольшим уклоном, обеспечивающим, при одной и той же стреле провисания несущих элементов, сток воды с покрытия.

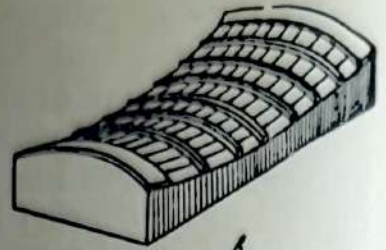
Прямоугольные многопролетные, особенно промышленные здания, чаще всего выполняются с разомкнутым опорным контуром. Реже



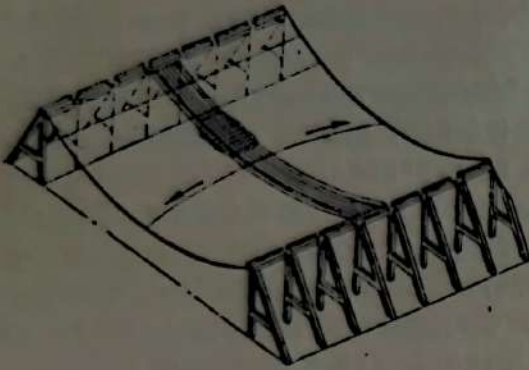
с



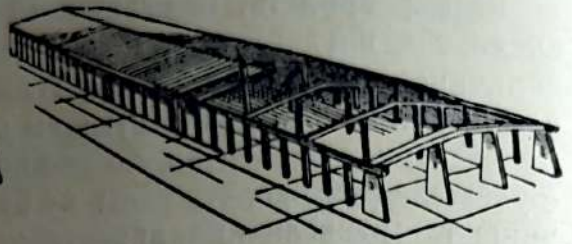
д



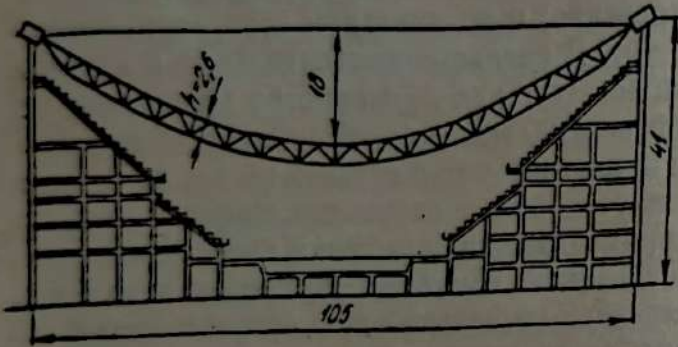
б



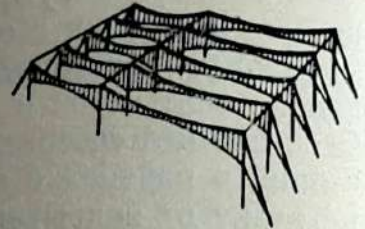
г



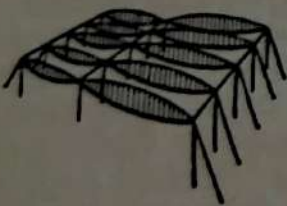
д



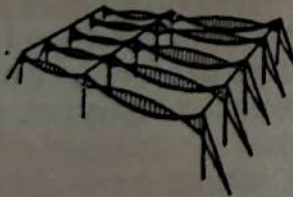
е



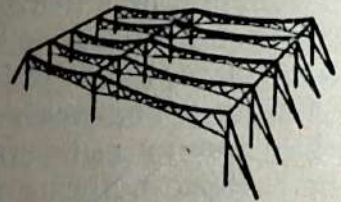
ж



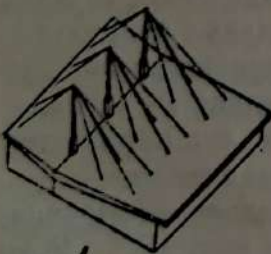
з



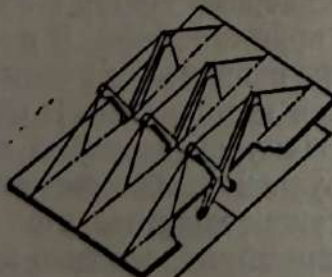
и



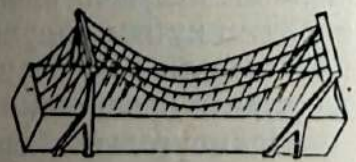
к



л



м



н

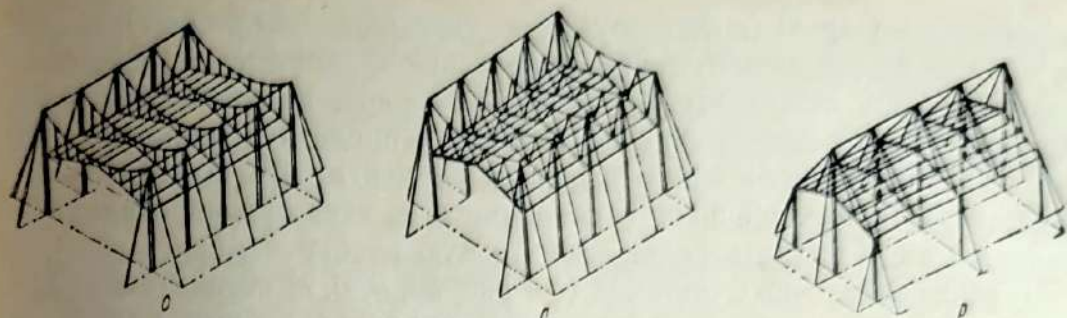
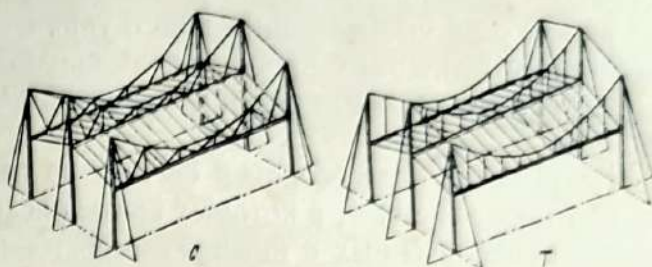


Рис. 30. Схемы висячих покрытий на прямоугольном плане:

а — а — из свободно провисающих вант и балок; *б, в* — из свободно провисающих и предварительно напряженных вант; *г* — с жесткими висячими формами; *ж — к* — с двухпоясными вантовыми фермами; *л — т* — с подвесными кровлями.



применяются решения с замкнутым опорным контуром, расположенным по периметру отдельных ячеек (в зданиях с крупной сеткой колонн — 24×24 ; 24×36 ; 36×36 и более).

В овальных покрытиях опорный контур выполняется из одного или нескольких аркообразных элементов различного очертания в плане и профиле. При увеличении количества аркообразных элементов они в пределе образуют замкнутый кольцевой опорный контур.

Одно- и многопролетные прямоугольные и круглые здания с жесткими висячими оболочками, как правило, устраиваются с одним опорным контуром. В легких предварительно напряженных вантовых системах достаточно эффективными могут оказаться решения с двумя опорными контурами. В ряде случаев могут найти применение многокольцевые системы, в которых каждое последующее за наружным опорным контуром кольцо в виде циклической рамы опирается на нижний ярус вант и воспринимает распор от верхнего яруса вант.

Форма поверхности покрытия. Ранее приводились нашедшие наибольшее распространение типы поверхностей и отмечалось влияние их на несущую способность вантовой сети. Рассмотрим некоторые типы поверхностей вантовых покрытий, образованных из одного или нескольких семейств несущих элементов для зданий преимущественно с прямоугольным планом.

Одной из наиболее распространенных форм поверхностей является поверхность, образованная кривой провисания несущих элементов. Покрытия с такой поверхностью называются цилиндрическими. Такие покрытия образуются системой параллельных вант. В зависимости от конструкции пролетной части они бывают мембранные, вантово-балочные и в виде оболочек (рис. 30, *а—г*).

Чисто мембранные системы очень деформативны. Поэтому с целью уменьшения деформативности поверху мембраны в виде груза укладывают слой керамзитобетона или перлитобетона, играющего также роль утеплителя. Уменьшить деформативность мембраны можно также путем подвески к опорному контуру с определенным шагом жестких

«опрокинутых арок» (в виде двутавров, спаренных швеллеров и т. п.), к которым посредством оттяжек, выполненных, например, в виде болтов с гайками, подтягивается к аркам мембрана, получая при этом предварительное напряжение *. Введение в пролетную конструкцию жестких «опрокинутых арок» позволяет повысить несущую способность и местную устойчивость покрытия и за счет предварительного напряжения обеспечить более эффективную работу мембраны.

В вантово-балочных системах (см. рис. 30, а, б, в) по вантам укладываются прямолинейные, двухскатные и криволинейные балки, а по ним легкие ограждающие конструкции. Поскольку при больших пролетах отвод воды с кровли вдоль пролета затруднителен, то применяются, в основном, решения с двухскатными или криволинейными балками.

Покрытия в виде оболочек состоят из параллельных вант (встречаются также системы, в которых ванты расходятся под некоторым углом) и омоноличенных с ними железобетонных плит (см. рис. 30, г). Для повышения трещиностойкости оболочек их выполняют предварительно напряженными. В таких покрытиях можно несколько уменьшить (до 10—15 %) расход металла на ванты, если изготовить плиты с выпущенной за пределы поперечных ребер (идущих параллельно вантам) арматурой, а затем сварить выпуски из смежных плит между собой, а выпуски из крайних — приварить к опорному контуру **.

С целью уменьшения деформативности пролетную конструкцию в покрытиях цилиндрического типа выполняют в виде висячих ферм. Так, в частности, было решено покрытие над Олимпийским плавательным бассейном на проспекте Мира в Москве (см. рис. 30, е).

В многопролетных зданиях с вантовыми покрытиями, особенно, с легким кровельным ограждением, получили применение различного рода двухпоясные системы с решеткой в виде вертикальных растяжек или стоек, а также фермы с треугольной решеткой (рис. 30, ж, з, и, к). При сравнительно небольших пролетах целесообразно применять решения со сжатыми стойками (в виде рыбок), при средних и больших пролетах — решетку, состоящую со сжатых стоек и растянутых растяжек, и для всего диапазона пролетов — треугольную решетку.

Значительное количество зданий с прямоугольным планом строится с так называемыми подвесными покрытиями. В таких покрытиях несущие элементы находятся над поверхностью кровли. В качестве несущей системы в подвесных покрытиях применяются радиально-вантовые системы, одно- и двухцепные системы с различной решеткой, расположенные вдоль или поперек пролета здания, и др. (рис. 30, л—т). Поверхность кровли в таких покрытиях может быть плоской, одно, двух- или четырехскатной.

Рассмотрим принципы образования вантовых систем в прямоугольных зданиях с замкнутым опорным контуром. Как известно, в основу

* А. с. 546693 (СССР). Висячее покрытие / В. Н. Мацвейко, В. Н. Шимановский, В. В. Осадчук, Ю. Н. Лузин. — Оpubл. в Б. И., 1977, № 6.

** А. с. 771283 (СССР). Висячее покрытие / В. Н. Шимановский, В. Н. Мацвейко, Ю. С. Слюсаренко, В. И. Сайгак. — Оpubл. в Б. И., 1980, № 38.

замкнутого безызгибного опорного контура положена идея передачи усилий от вантовой системы в углы опорного контура. Известны две схемы вантовых систем, основанных на использовании этой идеи: с вантами-подборами у двух (при параллельных вантах) или у четырех (при ортогональной сети вант) сторон опорного контура и с двумя диагональными элементами, к которым с определенным шагом кре-

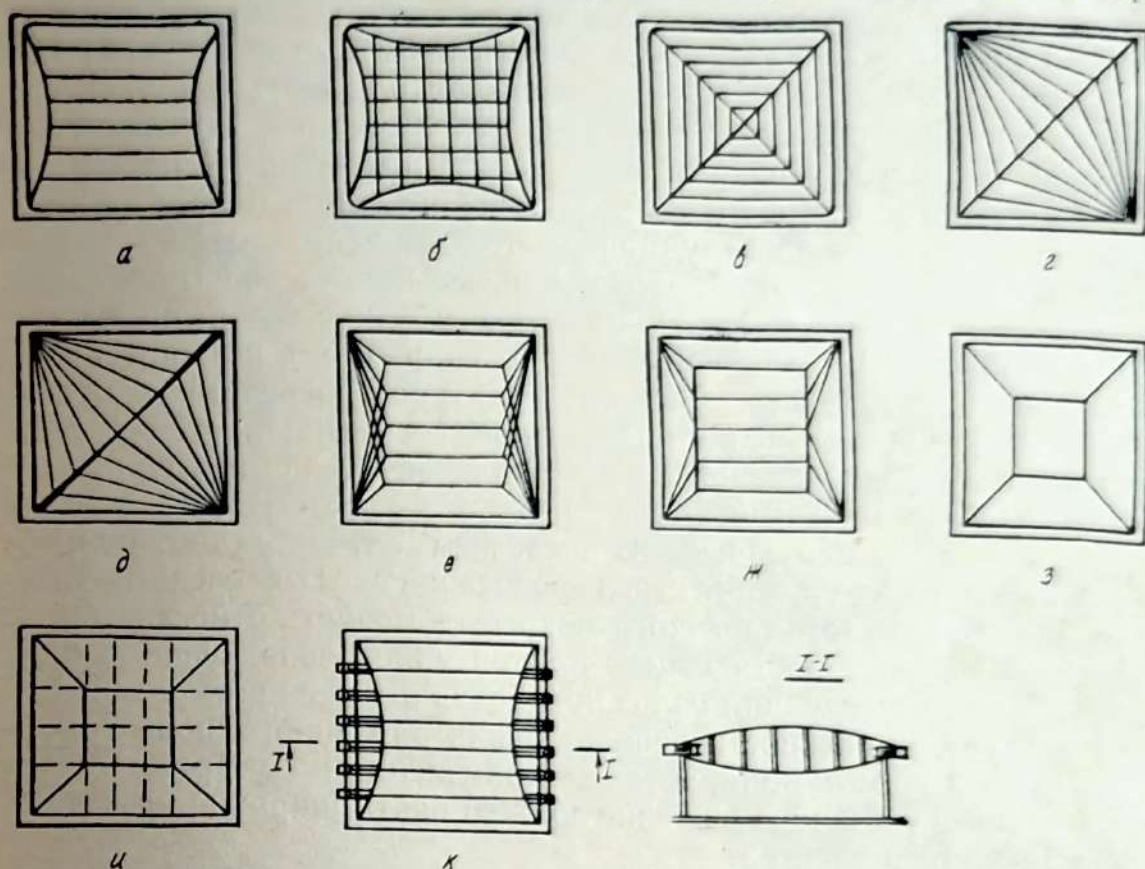


Рис. 31. Схемы вантовых сетей в прямоугольных зданиях с замкнутым опорным контуром:

а, б — с канатами-подборами; в — с двумя диагональными элементами; г — с одним диагональным элементом; д — с одним диагональным элементом переменного сечения по длине; е — с оттяжками; ж — с затяжками; з — с дополнительным внутренним опорным контуром; и — с дополнительными внутренним опорным контуром и фермами; к — с распорками и канатами-подборами

пятся ванты, идущие параллельно сторонам опорного контура (рис. 31, а—в). В дальнейшем вторая схема вантовой сети была усовершенствована. В ней поперечное сечение наиболее нагруженных диагональных элементов изменялось по длине по мере изменения в них усилий (приближении к углам опорного контура) *.

Безызгибная работа опорного контура достигается также, если расходящиеся из двух противоположных углов опорного контура ванты закрепить в пролете на диагональном элементе, стягивающем два других противоположных угла опорного контура (рис. 31, г) **.

* А. с. 151460 (СССР). Висячее железобетонное покрытие / Р. Н. Мацелинский, Н. С. Котин, А. Н. Стульчаков. — Оpubл. в Б. И., 1966, № 23.

** А. с. 251189 (СССР). Висячее покрытие / Н. С. Москалев. — Оpubл. в Б. И., 1969, № 27.

Несколько уменьшить расход металла на покрытие можно, если дополнительный элемент выполнить переменного сечения по длине из отдельных оттяжек, каждая из которых одним из своих концов крепится к расходящимся вантам, а другим — к прилежащему углу опорного контура *. Вблизи углов опорного контура оттяжки образуют развитый в вертикальной плоскости пучок, сечение которого уменьшается по мере приближения к середине пролета. Стрелы провисания вант в таких покрытиях подбираются таким образом, чтобы усилия в них получились одинаковыми. При желании можно задать и другой закон изменения стрел провисания вант и, как следствие, обеспечить как наружный, так и внутренний отвод воды с покрытия. К недостаткам такой схемы можно отнести то, что она не позволяет использовать типовые ограждающие конструкции. Допускает использование типовых вант и более простые конструкции узлов, а также обеспечивает удобную регулировку стрел провисания вант покрытие, в котором каждый вант крепится к углам опорного контура посредством оттяжек (рис. 31, е) **. В таких покрытиях вантовая сеть выполняется из параллельных вант, расположенных в одном или двух взаимно перпендикулярных направлениях. Водоотвод с покрытия может устраиваться как внутренний, так и наружный. В последнем случае уклон покрытия образуется путем увеличения стрел провисания вант от середины здания к торцам. К недостаткам такого покрытия можно отнести наличие некоторой нерегулярности вант в приконтурной зоне. Однако благодаря простоте конструкций узлов крепления оттяжек к вантам и опорному контуру, возможности использования различного рода типовых ограждающих конструкций, а также применения промышленных методов монтажа указанное решение должно найти широкое применение в практике строительства.

Представляется перспективной конструкция покрытия, приведенная на рис. 31, ж ***. В этом покрытии вантовая сеть выполняется из параллельных и радиальных вантов. Параллельные ванты крепятся к затяжкам, которые поддерживаются в проектном положении выходящими из углов опорного контура радиальными вантами. Такая вантовая сеть целесообразна и для многопролетных зданий с разомкнутым опорным контуром. Она позволяет увеличить расстояние между анкерными опорами и при установке на промежуточные колонны ферм пролетом, равным расстоянию между анкерными опорами, разрешает образовывать крупную сетку колонн. В промышленных зданиях за счет этого можно более рационально разместить производственное оборудование и на 6—15 % увеличить мощность предприятий без увеличения стоимости строительства.

* А. с. 329292 (СССР). Висячее покрытие / В. Н. Шимановский, В. Н. Мацевейко, Ю. В. Смирнов. — Оpubл. в Б. И., 1972, № 7.

** А. с. 308168 (СССР). Висячее покрытие / В. Н. Шимановский, В. Н. Мацевейко, В. И. Киреев, Ю. Н. Лузин. — Оpubл. в Б. И., 1971, № 21.

*** А. с. 362119 (СССР). Висячее покрытие зданий и сооружений, прямоугольное в плане / В. Н. Шимановский, В. Н. Мацевейко. — Оpubл. в Б. И., 1972, № 2.

С точки зрения удовлетворения требованиям, предъявляемым к покрытиям промышленных зданий, достаточно эффективно решение, приведенное на рис. 31, з*. Пролетная конструкция такого покрытия выполняется из параллельных сторонам опорного контура ферм, объединяемых на монтаже в замкнутые прямоугольники. Фермы поддерживаются в проектном положении диагональными вантами. На верхний пояс ферм укладываются плиты покрытия, образующие жесткий диск, препятствующий потере устойчивости опорного контура в горизонтальной плоскости. Такие покрытия допускают устройство малоуклонной кровли и подвесного транспорта. Их можно возводить как при строительстве однопролетных, так и многопролетных зданий.

Положив в основу описанную выше конструкцию покрытия, можно, удлинив фермы, образующие внутренний опорный контур, до наружного контура и установив на них дополнительные фермы, получить другое решение пролетной части (рис. 31, и). Если при этом до прикрепления концов ферм к наружному опорному контуру пригрузить последние, то можно существенно облегчить как фермы, так и наружный опорный контур за счет перераспределения усилий. Наружный опорный контур в таких покрытиях будет работать как балка на упруго-податливых опорах. При этом от действия реактивных усилий концов ферм он будет приподниматься вверх.

Во многих зданиях с замкнутым опорным контуром, как и в большепролетных многопролетных зданиях с разомкнутым опорным контуром, целесообразно применять покрытия с легкими ограждающими конструкциями. Для уменьшения деформаций от временных нагрузок такие покрытия необходимо проектировать со стабилизированной формой поверхности. Как указывалось выше, наиболее просто вопросы стабилизации поверхности покрытий решаются при применении двухпоясных вантовых систем. На рис. 31, к** приведена одна из таких систем покрытия. Верхний и нижний пояса ферм покрытия крепятся к распорке в пределах опорного контура. Распорка одним концом присоединяется к канату — подбору, закрепленному в углах опорного контура, а другим опирается на опорный контур через катки или прокладки из антифрикционного материала (например, фторопласта). При этом обеспечивается раздельная передача составляющих опорной реакции вантовой фермы: вертикальной — на колонны, поддерживающие опорный контур, горизонтальной — на канат — подбор. Благодаря этому на контур не передается поперечная нагрузка и он работает, в основном, на сжатие.

Рассмотрим теперь некоторые типы поверхностей вантовых покрытий под зданиями криволинейного очертания в плане. Покрытия таких зданий чаще всего имеют сложную поверхность, образованную двумя и более семействами вант (рис. 32). Обычно поверхности таких покрытий не являются кусочно-гладкими. В основе отдельных элемен-

* А. с. 631618 (СССР). Покрытие зданий и сооружений, прямоугольное в плане / В. Н. Шимановский. — Оpubл. в Б. И., 1978, № 41.

** А. с. 322477 (СССР). Покрытие зданий и сооружений / В. Н. Мацевейко, В. Н. Шимановский, В. И. Киреев, Ю. Н. Лузин. — Оpubл. в Б. И., 1971, № 36.

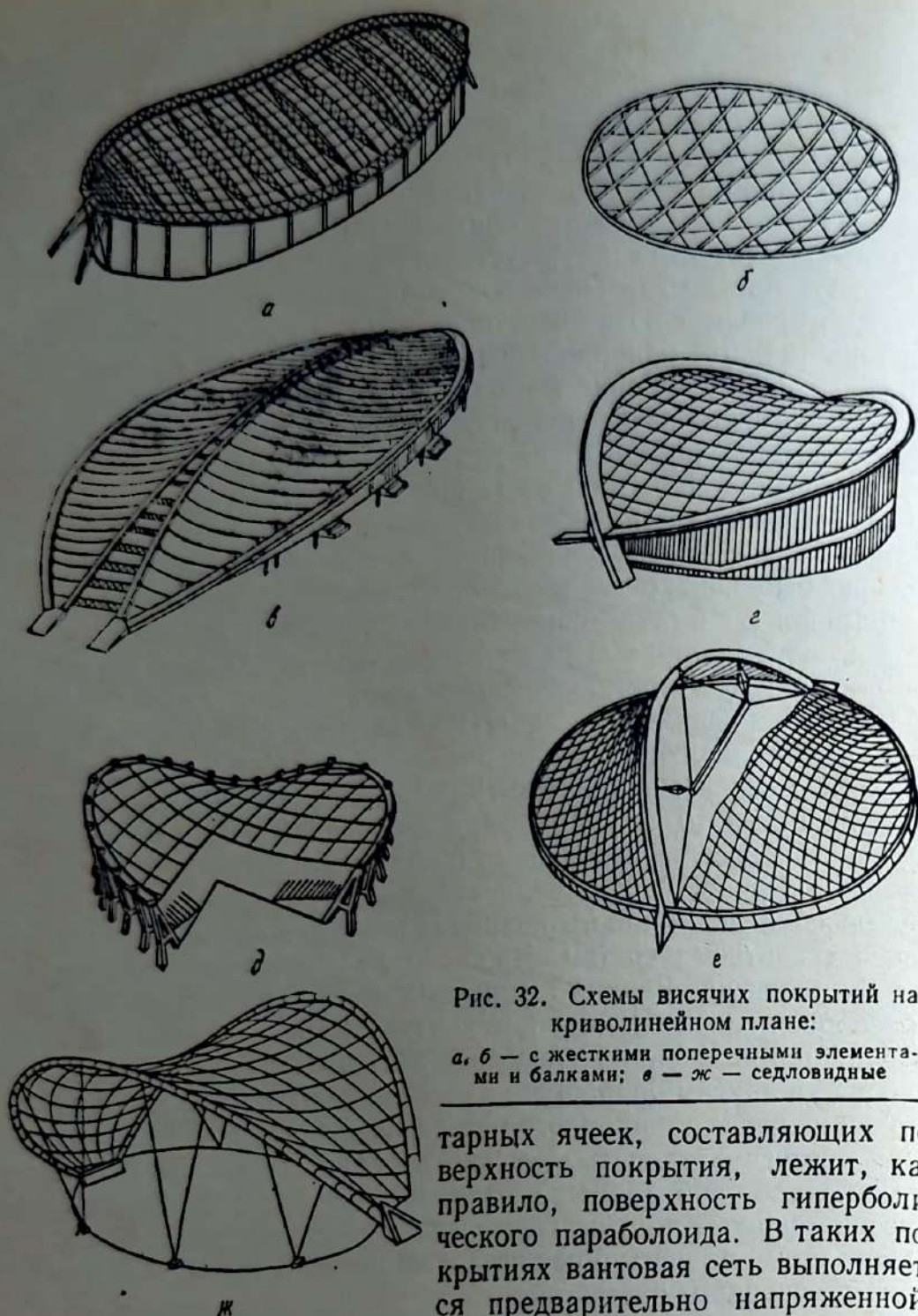


Рис. 32. Схемы висячих покрытий на криволинейном плане:

а, б — с жесткими поперечными элементами и балками; в — ж — седловидные

В качестве ограждающих конструкций применяется профилированный настил, металлические или алюминиевые панели с минераловатным утеплителем.

Из всех видов висячих покрытий наибольшее распространение получили покрытия с круглым планом, особенно шатрового типа.

В осуществленных строительстве покрытиях вантовая сеть принята одно- или двухслойной, как правило, радиальной и радиально-кольцевой систем (рис. 33, а—к). В последние годы получили применение также мембранные покрытия, в том числе из алюминиевых переплетенных лент (см. рис. 33, в). Ортогональная и, особенно, косо-

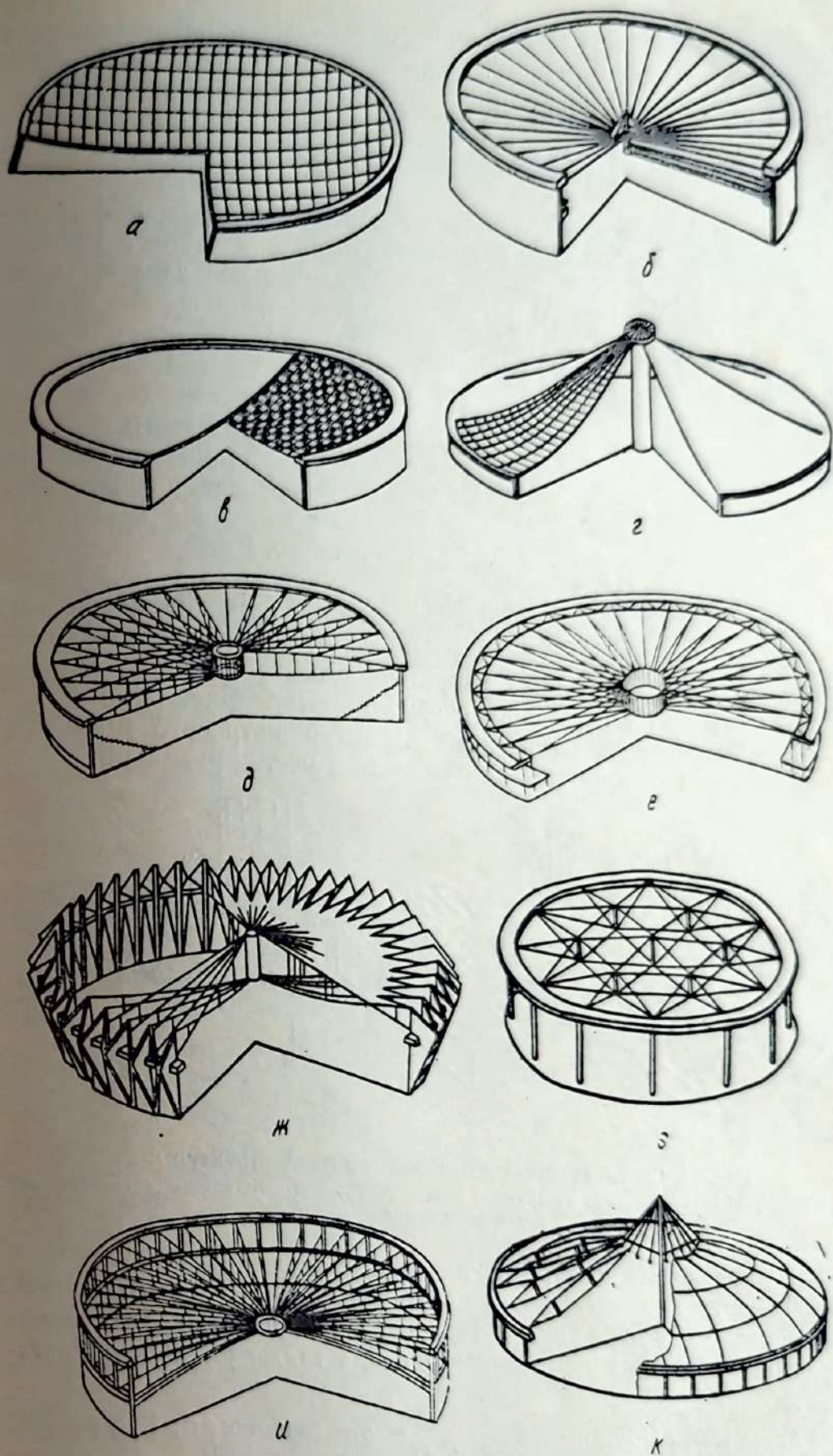


Рис. 33. Схемы висячих покрытий на круглом плане:
 а-г — однослойные; д-к — двухслойные.

угольная вантовая сеть не получили столь большого распространения. Объясняется это тем, что при одних и тех же исходных данных расход материала на ванты на единицу площади горизонтальной проекции покрытия с радиальной сетью в 1,5 раза меньше, чем с ортогональной. Косоугольная сеть по эффективности несколько уступает ортогональной.

С целью уменьшения количества типоразмеров ограждающих конструкций была предложена радиально-вантовая система с дополни-

тельными параллельными вантами, отстоящими друг от друга на одинаковом расстоянии (рис. 34, а) *. В таких покрытиях стрелы провисания дополнительных вант подбираются таким образом, чтобы поверхность покрытия описывалась кривой провисания основных вант.

Уменьшить количество типоразмеров плит можно также, если через каждую пару

радиальных вант установить в середине пролета распорки длиной, равной шагу вант у наружного опорного контура (рис. 34, б) **.

В большинстве осуществленных покрытий шатрового типа угол наклона вант к горизонтальной плоскости в месте примыкания их к

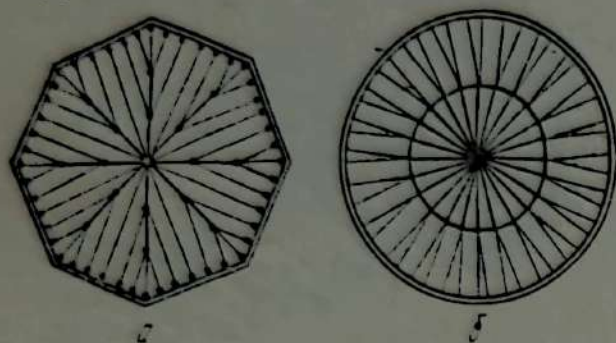


Рис. 34. Схемы вантовых сетей:

а — с дополнительными параллельными вантами;
б — с распорками в середине пролета.

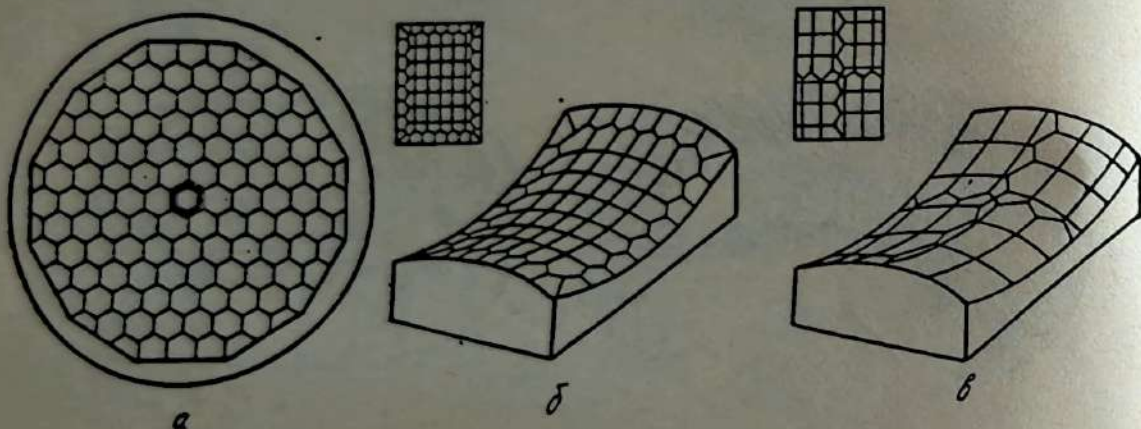


Рис. 35. Схемы вантовых сетей равнопрочной структуры:

а — с шестиугольными ячейками на круглом плане; б, в — с ортогональной сетью на прямоугольном плане.

наружному опорному контуру принят равным нулю. При таком примыкании вант к опорному контуру вертикальная нагрузка от покрытия передается только на внутреннюю опору. Для передачи части вертикальной нагрузки на наружные колонны, а также уменьшения вы-

* А. с. 243805 (СССР). Пространственное висячее покрытие / А. К. Ермаков, В. П. Редько. — Оpubл. в Б. И., 1969, № 17.

** А. с. 631617 (СССР). Висячее покрытие / В. Н. Шимановский. — Оpubл. в Б. И., 1978, № 41.

соты внутренней опоры геометрию покрытия принимают такой, чтобы ванты примыкали к наружному опорному контуру под углом к горизонту, меньшим нуля.

Если рассмотреть работу приведенных выше вантовых сетей как для круглых покрытий, так и для покрытия с другими планами, то можно убедиться, что при нагружении покрытия произвольной вертикальной нагрузкой усилия в вантах будут неодинаковыми. Последнее снижает технико-экономические показатели не только вантовых сетей, но и конструкций, воспринимающих распор вант. В плане совершенствования структуры вантовых покрытий представляют интерес работы по созданию равнопрочных сетей, в основу которых положено

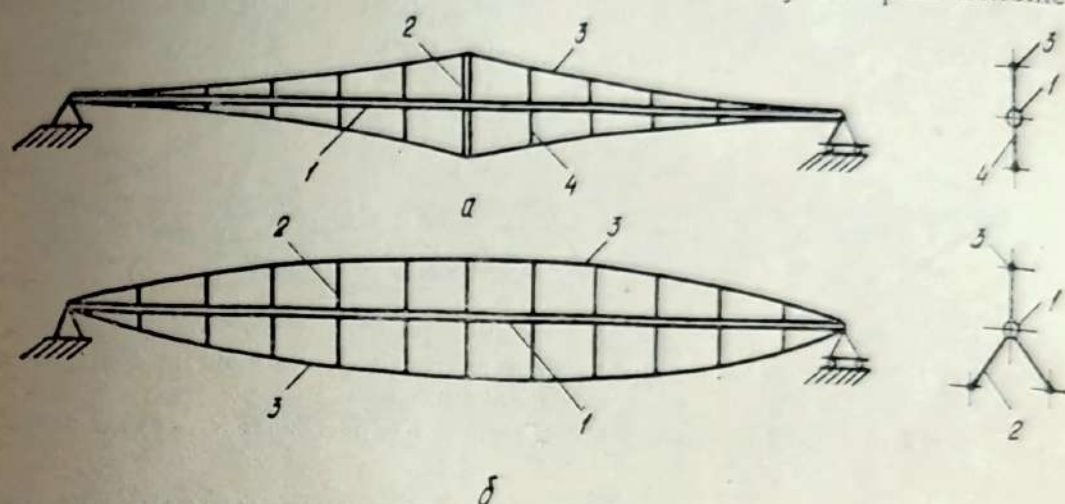


Рис. 36. Безраспорные вантовые фермы:
а — плоская; б — пространственная; 1 — балка-распорка; 2 — жесткая стойка; 3 — вант; 4 — растяжка.

примыкание к узлу трех вант под углом 120° . На этой основе уже разработаны шестиугольные и другие структуры вантовых сетей (рис. 35) *.

Для покрытий зданий средних пролетов с разомкнутым опорным контуром могут быть применены безраспорные вантовые фермы. В СССР и за рубежом разработано несколько типов безраспорных вантовых ферм. В зависимости от количества, расположения и конструктивного решения поясов их можно разделить на плоские и пространственные (рис. 36, а, б).

Для обеспечения устойчивости балки-распорки покрытия из плоских ферм развязываются системой горизонтальных связей по длине балки-распорки. В пространственных фермах устойчивость балки-распорки в горизонтальной плоскости обеспечивается системой пространственно расположенных элементов решетки.

Из плоских ферм получили известность конструкции, разработанные в Грузинском политехническом институте им. В. И. Ленина и ЛИИЖТе. В Грузинском политехническом институте А. Н. Размадзе и другие предложили ферму в виде двухслойной вантовой системы с выпуклыми поясами и предварительно напряженной шпренгельной

* А. с. 181798 (СССР). Висячее покрытие зданий и сооружений / Л. Г. Дмитриев, Г. Б. Гильман, А. В. Касилов. — Опубл. в Б. И., 1966, № 10.

распоркой *. В ЛИИЖТе В. Н. Кирчина предложила ферму с выпуклыми поясами и распоркой рамного типа [16].

Разработка пространственных безраспорных ферм только начата. В настоящее время можно указать лишь на решение, предложенное В. В. Новицким и М. Б. Каминским. Для повышения устойчивости балки-распорки в горизонтальной плоскости они предложили ферму с тремя поясами, соединенными с балкой-распоркой посредством жестких стоек, расположенных под углом 120° (см. рис. 36, б) **.

С целью повышения устойчивости балки-распорки в горизонтальной плоскости, уменьшения количества сжатых элементов, упрощения процесса предварительного напряжения и обеспечения регулирования усилий в элементах фермы в процессе ее эксплуатации был предложен новый тип безраспорных вантовых ферм (рис. 37) ***. Конструкция

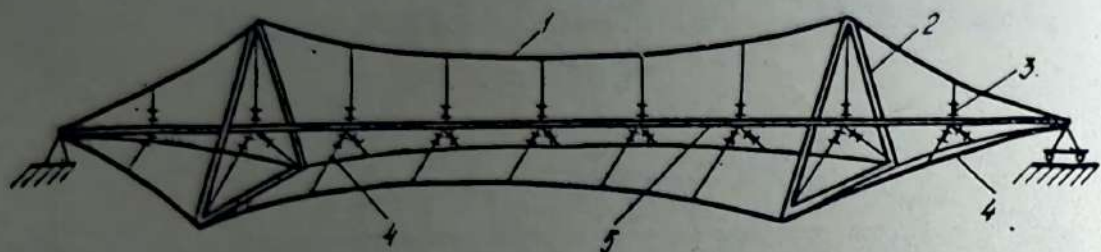


Рис. 37. Пространственная безраспорная вантовая ферма с двумя жесткими треугольниками:

1 — ванта; 2 — жесткий треугольник; 3 — талреп; 4 — растяжка; 4 — балка-распорка.

ферм состоит из трех пространственно расположенных вант, выполняющих роль поясов, балки-распорки, воспринимающей распор от вант, растяжек, соединяющих балку-распорку с вантами, и жестких треугольников, фиксирующих пространственную геометрию поясов. Пояса и растяжки соединяются с балкой-распоркой посредством натяжных устройств, например, талрепов.

С целью уменьшения расхода материала на покрытия и обеспечения блочного монтажа нами разработана безраспорная вантовая блок-ферма, верхний пояс которой выполнен из развитой поперек пролета тонколистовой мембраны, сочетающей несущие и ограждающие функции (рис. 38, а). В отличие от фермы, приведенной на рис. 37, в вантовой блок-ферме вершины жестких треугольников соединены с нижним поясом, а основания — с верхним. Ширина мембраны принимается равной длине основания жестких треугольников. Для улучшения передачи распора от мембраны на балку-распорку последняя развивается у опорных узлов фермы в горизонтальной плоскости. В пролете балка-распорка крепится к жестким треугольникам посредством натяжных устройств.

* А. с. 271774 (СССР). Металлическая ферма / А. Н. Размадзе, О. Е. Пагава, Ю. К. Мелашвили, З. А. Читаишвили. — Оpubл. в Б. И., 1970, № 18.

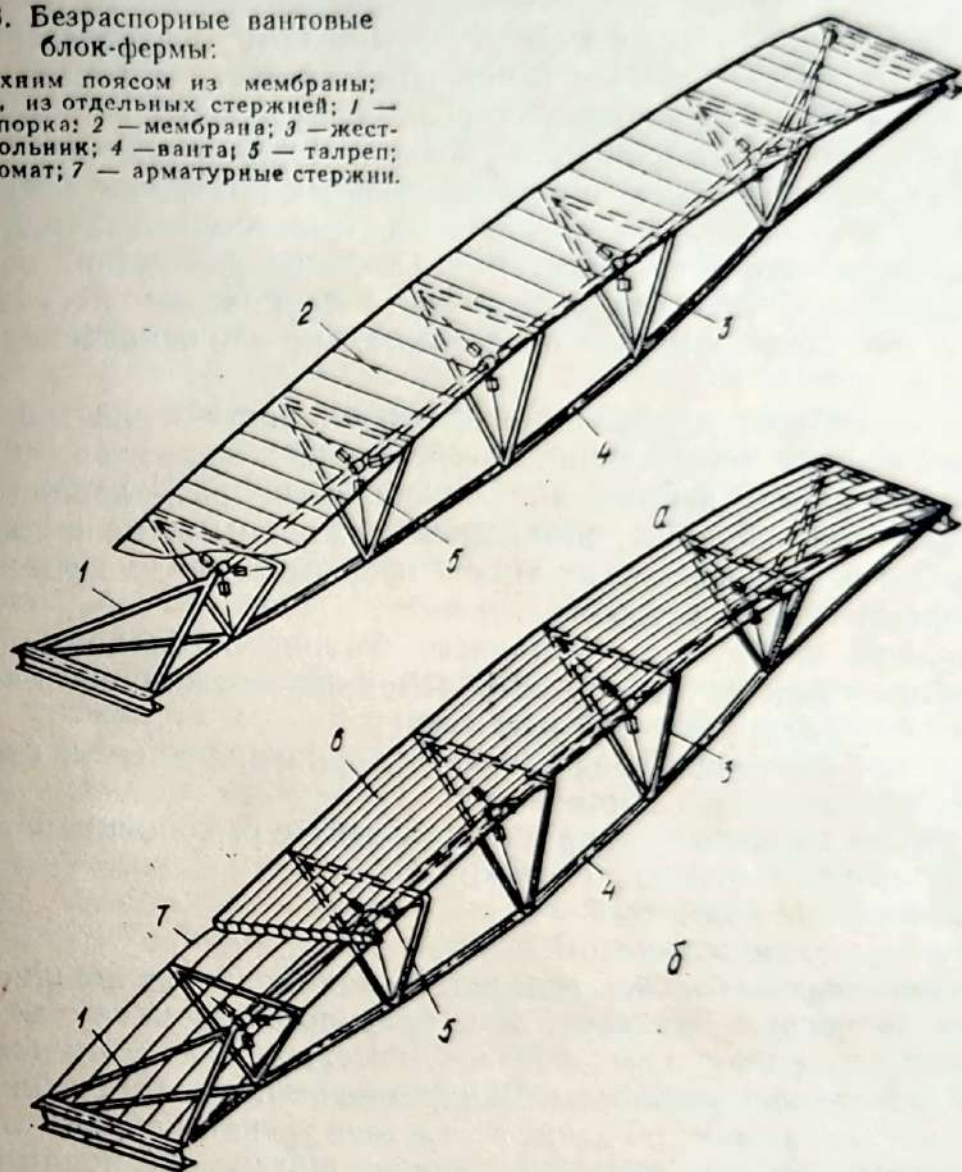
** А. с. 331161 (СССР). Металлическая ферма / В. В. Новицкий, М. Б. Каминский. — Оpubл. в Б. И., 1972, № 9.

*** А. с. 434163 (СССР). Безраспорная вантовая ферма / В. Н. Шимановский, В. Ф. Мирошник, В. Н. Мацвейко, В. В. Осадчук, Ю. Н. Лузин. — Оpubл. в Б. И., 1974, № 24.

Достаточно эффективны решения вантовых блок-ферм, в которых верхний пояс выполнен из отдельных стержней, расположенных на определенном расстоянии (0,4—0,6 м), по которым укладывается легкое кровельное ограждение, например, из пневмоматов (рис. 38, б). За исключением решения верхнего пояса, конструкция указанной

Рис. 38. Безраспорные вантовые блок-фермы:

а — с верхним поясом из мембраны;
б — то же, из отдельных стержней; 1 — балка-распорка; 2 — мембрана; 3 — жесткий треугольник; 4 — ванта; 5 — талреп; 6 — пневмомат; 7 — арматурные стержни.



блок-фермы аналогична приведенной на рис. 38, а. Отметим, что при соответствующем конструктивном выполнении (устройства трехслойных оболочек) пневмоматы могут удовлетворять практически всем требованиям, предъявляемым к ограждающим конструкциям. Использование в качестве ограждающих конструкций пневмомата позволяет не только снизить стоимость и трудоемкость работ по устройству покрытий, но и резко сократить сроки строительства.

Как известно, многие висячие системы обладают большой кинематической податливостью. Стабилизация поверхности таких систем заключается в сведении кинематических перемещений до минимума. Причем для очень легких вантовых покрытий эта, казалось, простая задача перерастает в проблему первостепенной важности. Пока мы не можем привести решений, обеспечивающих возможность применения ограждающих конструкций массой 50—100 Н/м² и удовлетворяющих требованиям, предъявляемым к покрытиям в части деформативности, возможности подвески различного рода оборудования и т. п. Сравнительно тяжелые комбинированные, подвесные и другие типы покрытий, состоящих из балок, ферм и железобетонных плит, как правило, не нуждаются в стабилизации поверхности. Она обеспечивается за счет массы настила и его омоноличивания. Стабилизация легких покрытий обеспечивается за счет предварительного напряжения несущих элементов — вант, ферм и т. п. — последовательно или одновременно всех элементов.

В зависимости от конструкции прелетной части покрытия применяются различные методы напряжения несущих элементов.

Предварительное напряжение одноярусных радиально-вантовых покрытий на круглом плане, цилиндрических покрытий на прямоугольном плане и некоторых других типов покрытий в виде железобетонных оболочек может осуществляться:

монтажной пригрузкой (кирпичом, бетонными блоками, тарой с песком или водой и т. п.), укладываемой непосредственно на плиты покрытия или подвешиваемой к вантам;

с помощью различного рода оттяжек, прикрепленных к вантам и полу или фундаментам здания;

установкой временных натягающих вант с раздвижными распорками (по типу двухярусных систем);

натяжением домкратами;

электротермическим методом.

При натяжении оболочек домкратами замоноличивание швов производится до напряжения вант. Как правило, в этом случае ванты располагаются в специальных каналах, которые после окончания натяжения заполняются раствором. Ввиду многих недостатков (неравномерность натяжения вант по длине вследствие трения канатов о стенки каналов, образование воздушных пробок при инъектировании раствора в каналы и др.) натяжение оболочек домкратами не получило распространения.

При натяжении оболочек первыми тремя способами замоноличивания швов между плитами производится после натяжения вант; пригрузка или натягающие устройства снимаются в этом случае после достижения бетоном установленной проектом прочности. Такая же последовательность операций сохраняется и при электротермическом натяжении вант. Несмотря на сравнительно большую трудоемкость, чаще всего предварительное напряжение осуществляется с помощью монтажной пригрузки. Эффективность этого метода можно повысить,

если в качестве монтажной нагрузки использовать воду, а в качестве емкостей — трубы-шланги диаметром 50—100 см, изготовленные из пленки.

Для предотвращения образования параллельных вантам трещин в швах цилиндрических, шатровых и в некоторых других типах оболочек необходимо в швы, перпендикулярные к вантам, укладывать дополнительную арматуру. В покрытиях шатрового типа и им подобным, с поверхностью отрицательной гауссовой кривизны предотвратить образование трещин в оболочке можно, если под нагрузкой замоноличить швы одного направления, а после снятия нагрузки — другого.

Достаточно просто осуществляется напряжение несущих элементов в однопоясных покрытиях с ортогональной сетью вант на поверхности гиперболического параболоида. Наиболее часто оно производится домкратами, реже — за счет поворота с небольшим опусканием (вращательно-поступательного движения) опорных конструкций (арок, распорок и т. п.). В последнем случае необходимо очень точно определить геометрию всех элементов вантовой сети, поскольку в противном случае одни ванты могут оказаться ненапряженными, а другие — перенапряженными, что скажется также, и в отдельных случаях существенно, и на работе опорных конструкций. Натяжение вант домкратами не требует столь высокой точности определения их геометрии, хотя и не очень индустриально, особенно когда оно выполняется ступенями путем последовательного обхода диаметрально противоположных вант (во избежание появления больших изгибающих моментов в опорном контуре).

Натяжение двухпоясных покрытий из вантовых ферм производится путем стягивания поясов вертикальными или наклонными тросами решетки или раздвижки поясов сжатыми стойками. Процесс натяжения не вызывает каких-либо затруднений, так как для обеспечения необходимых усилий в поясах ферм достаточно создать сравнительно небольшие усилия в элементах решетки. Предварительное напряжение придает поясам ферм форму, соответствующую веревочному многоугольнику от равномерно распределенной нагрузки.

В двухпоясных радиально-вантовых покрытиях предварительное напряжение поясов ферм может осуществляться путем раздвижки колец центрального барабана. При этом, как указывалось выше, к исходной геометрии вантовых ферм должны предъявляться более строгие требования.

Величина предварительного напряжения вантовых сетей зависит от конструкции пролетной части, характера и интенсивности временной нагрузки, требований к деформативности покрытия и других факторов и определяется на основе технико-экономических расчетов.

В зависимости от величины усилия натяжение вант может осуществляться динамометрическими ключами, различного рода натяжными устройствами, винтовыми и гидравлическими домкратами. Для контроля усилий натяжения вант могут применяться приборы, основанные на динамическом (ИН-5, ЭСИН-1Д, ИПН-7), а также статическом (ЭМИН-3, ДН-15, ПИН, ДПС-2, ДН-30, ДН-100 и ДН-240) методах контроля.

§ 4. ОПОРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Как указывалось выше, даже в наиболее эффективных решениях покрытий с замкнутым опорным контуром, работающим, в основном, на сжатие, расход материалов на опорные конструкции составляет около 50 % расхода материалов на покрытие одного пролета. В покрытиях прямоугольных зданий с разомкнутым опорным контуром расход материалов на опорные конструкции может в два и более раза превышать расход материалов на покрытие одного пролета. Поэтому

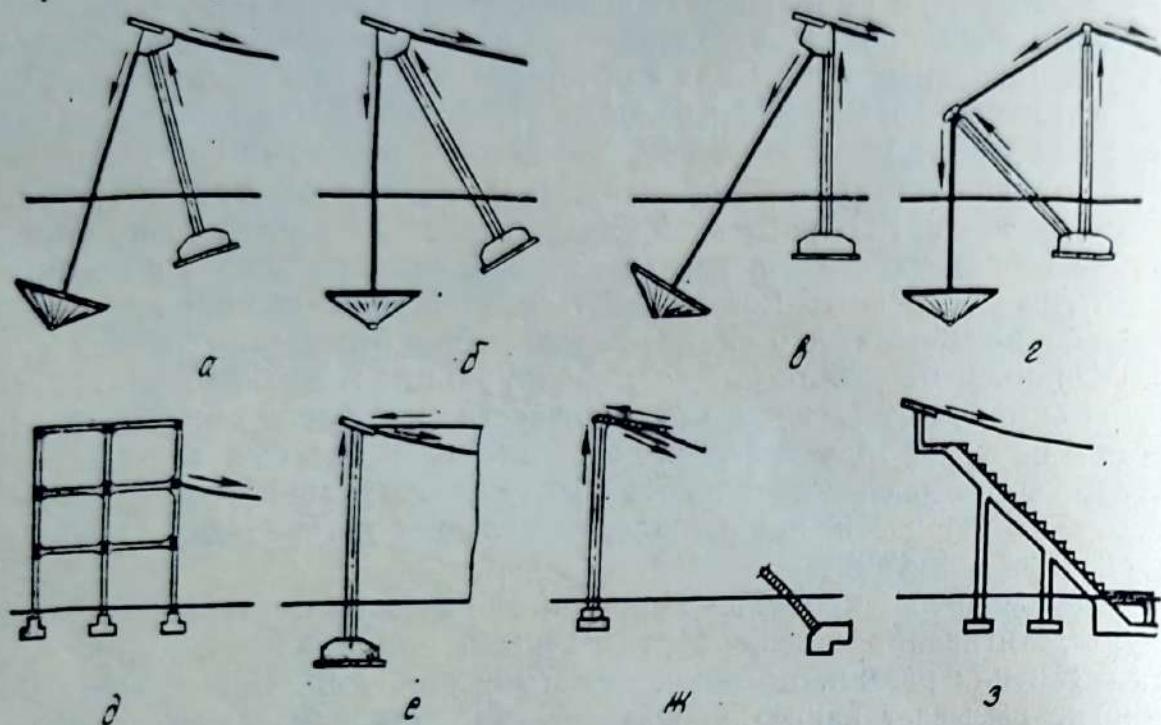


Рис. 39. Анкерные опоры:

а—е — в виде опорных балок наклонных или вертикальных колонн и оттяжек; д — с использованием рамного каркаса здания; е — в виде опорных балок, поперечных стен и вертикальных колонн; ж — в виде наклонных арок и вертикальных колонн; з — с использованием конструкций сооружения (трибун, жестких устоев и т. п.).

проектировать такие здания однопролетными не следует. Как показали расчеты, выполненные при разработке проекта здания с различным числом пролетов с покрытием в виде висячей цилиндрической оболочки пролетом 60 м, в двухпролетном решении по сравнению с однопролетным расход бетона уменьшается на 36 %, а стали — на 23 %. В трехпролетном здании расход бетона и стали снижается соответственно на 48 и 37 %. По-видимому, применять висячие покрытия в зданиях с разомкнутым опорным контуром можно при числе пролетов не меньше двух. С увеличением числа пролетов их эффективность возрастает.

В прямоугольных зданиях с разомкнутым опорным контуром последний представляет собой развитые в горизонтальной плоскости балки-подборы с пролетом, равным расстоянию между анкерными опорами. При шаге вант, равном шагу анкерных опор, можно заменить тяжелые балки-подборы легкими распорками. Анализ технико-экономических показателей покрытий показал, что такое решение целесообразно при шаге вант до 6 м. С увеличением шага вант дополни-

тельный расход материалов на покрытие не компенсируется экономией от замены балок-подборов распорками.

В практике строительства применяются различные типы анкерных опор (рис. 39, а—з). Бóльшее распространение получили опоры, состоящие из вертикальных или наклонных оттяжек и колонн (подкосов), объединенных поверху оголовком, на который укладываются балки-подборы. В качестве анкерных применяются железобетонные конические оболочки, плоские анкерные плиты и другие конструкции. В роли усилия, противодействующего выдергиванию, выступает вес обратной засыпки котлованов, реже пассивный отпор грунта. Более эффективны

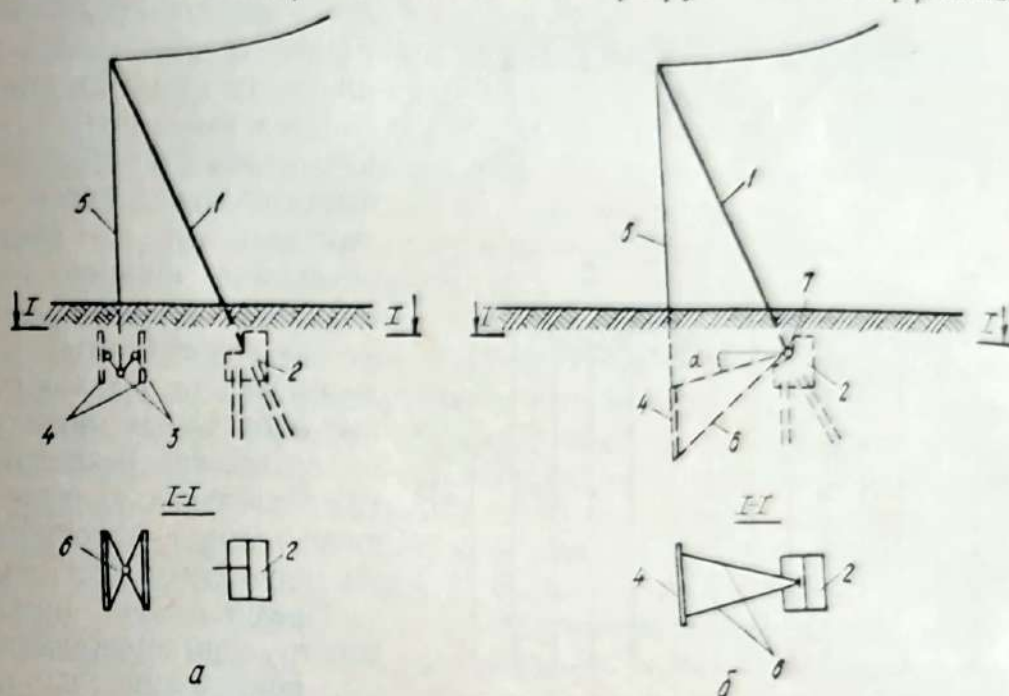


Рис. 40. Анкерные опоры, работающие с использованием пассивного отпора грунта:

а — с двумя плитами; б — с одной плитой; 1 — подкос; 2 — фундамент подкоса; 3 — механизм передачи усилия от оттяжки на плиты; 4 — плита; 5 — оттяжка; 6 — жесткий диск; 7 — шарнир.

опоры, предусматривающие использование в качестве анкерных устройств буронабивных свай с уширенной пятой, камуфлетных и винтовых свай. Угол между растянутым (оттяжкой) и сжатым (стойкой или подкосом) элементами опор обычно колеблется от 30° до 60° . Для уменьшения плеча приложения распора крайние пролеты рекомендуется выполнять равными половине средних.

Меньшее распространение получили анкерные устройства с использованием рамных каркасов бытовых или производственных пристроек (рис. 39, д), наклонных торцовых арок, поддерживаемых вертикальными колоннами (рис. 39, ж), и др. Еще реже удастся использовать в качестве анкерных устройств различного рода устои (рис. 39, з), являющиеся неотъемлемыми элементами здания, вызываемые его функциональными особенностями. В ряде случаев такие решения оказываются достаточно экономичными.

С целью использования пассивного отпора грунта был разработан новый тип анкера. Он выполняется из двух плит, расположенных

у стенок котлована, и механизма передачи нагрузки от оттяжки на плиты (рис. 40, а) *. Последний представляет собой нисходящие к оттяжке элементы в виде дисков треугольной формы, шарнирно связывающих ее с плитами.

Плиты могут располагаться как вертикально, так и с небольшим уклоном наружу котлована. До передачи усилия с оттяжки на анкер плиты домкратами прижимаются к стенкам котлована усилием, превышающим усилие в оттяжке. Поскольку усилие в оттяжке в начале

монтажа покрытия будет небольшим, необходимо предусматривать поддержание горизонтального усилия на плиты если не постоянным, то близким к нему (путем предотвращения сближения одной плиты с другой или, что дает тот же эффект, опускания нижней точки механизма передачи усилия от оттяжки на плиты). В зависимости от шага анкерных опор плиты могут выполняться как разрезными (устанавливаться у каждой опоры), так и неразрезными (идти вдоль всех опор).

Представляет интерес конструкция анкерной опоры, приведенной на рис. 40, б **, где анкер выполняется из двух треугольных дисков, вершины которых соединяются посредством

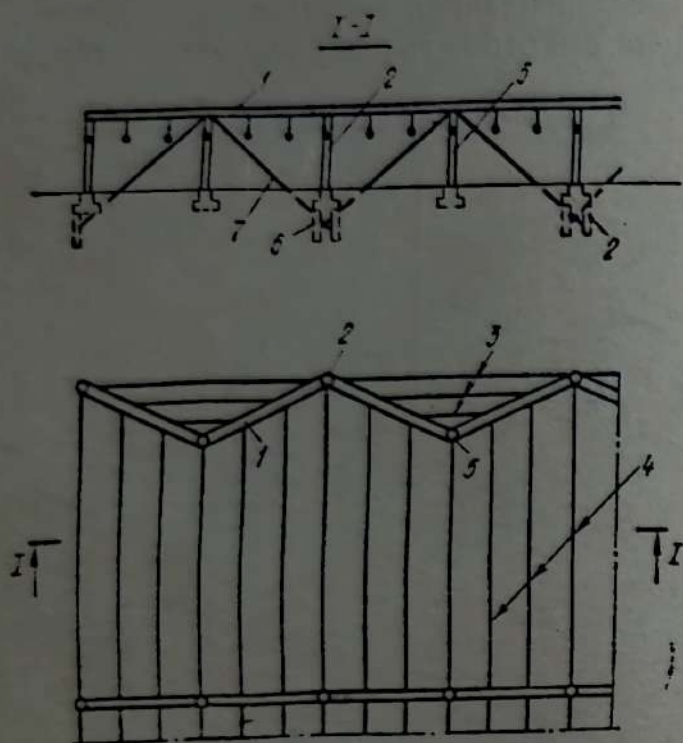


Рис. 41. Опорные конструкции в зданиях с крупной сеткой колонн:

1 — балки-подборы; 2 — наружные колонны; 3 — дополнительные ванты; 4 — основные ванты; 5 — внутренние колонны; 6 — анкерные щиты; 7 — оттяжки.

шарнира с фундаментом подкоса, а основания — с плитой, предотвращающей вращение вокруг шарнира под действием усилия в оттяжке. При этом угол наклона верхних граней дисков к горизонту должен быть меньше нуля. Если к нижним граням дисков дополнительно прикрепить плиту, то можно использовать в роли усилия, противодействующего выдергиванию анкера, и вес вышележащего грунта.

В зданиях с крупной сеткой колонн при значительных расстояниях между анкерными опорами опорный контур целесообразно выполнять зигзагообразным в плане с дополнительными вантами, идущими перпендикулярно к основным вантам (рис. 41) ***. При этом представляется

* А. с. 692962 (СССР). Анкерная опора / В. Н. Шимановский. — Оpubл. в Б. И., 1979, № 39.

** А. с. 667663 (СССР). Анкерная опора / В. Н. Шимановский. — Оpubл. в Б. И., 1979, № 22.

*** А. с. 644922 (СССР). Висячее покрытие зданий и сооружений / В. Н. Шимановский. — Оpubл. в Б. И., 1979, № 4.

возможным расположить анкерные щиты под фундаментами наружных колонн и улучшить архитектурный облик зданий. Пространство, перекрываемое дополнительными вантами, можно использовать для размещения различного рода подсобных помещений.

Промежуточные опоры в многопролетных зданиях представляют собой колонны, на которые опираются развитые в вертикальной плоскости балки-подборы двух смежных пролетов. В зависимости от возможной величины несимметричной нагрузки в одном из пролетов применяются шарнирное, упруго-податливое или жесткое соединение колонн с фундаментами.

В прямоугольных зданиях с замкнутым опорным контуром последний выполняется в виде рамы с жесткими узлами и развитыми в горизонтальной, а при отсутствии промежуточных колонн, поддерживающих опорный контур в пролете, и в вертикальной плоскостях элементами.

В зданиях с криволинейным планом в качестве опорных конструкций используются различного рода арочные конструкции.

Естественной и наиболее рациональной формой опорных конструкций зданий с круглым планом является кольцо или правильный многоугольник, которые вместе с поддерживающими их колоннами образуют пространственные циклические (циклически-симметричные) рамные каркасы. В подавляющем большинстве случаев наружный опорный контур в зданиях с круглым планом и радиально-вантовой сетью выполняется прямоугольного сечения, почти всегда развитого в горизонтальной плоскости. Поддерживающие опорный контур колонны имеют различное поперечное сечение (круглое, прямоугольное, тавровое, двутавровое и др.). С фундаментами колонны соединяются жестко, реже — шарнирно, с опорным контуром, — как правило, жестко. Опорные конструкции выполняются железобетонными: опорный контур — сборным или сборно-монолитным, колонны — сборными.

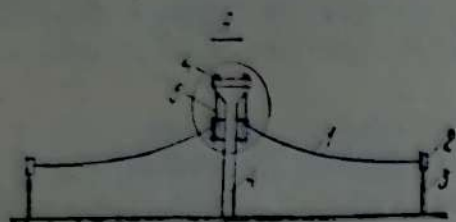
В покрытиях шатрового типа внутренняя (центральная) опора чаще всего выполняется круглой сплошной или полого сечений из железобетона, реже — из нескольких металлических труб, объединенных по верху оголовком. У большинства покрытий внутренняя опора жестко защемлялась в фундаменте. У некоторых из них у основания внутренней опоры или в пределах ее высоты устраивался сферический шарнир. Внутренний опорный контур выполняется из металла в виде жесткого диска. Диаметр его зависит от количества и размеров анкерных стоек.

Проведенные нами исследования показали, что в зависимости от схемы опорных конструкций, шага колонн и вант, интенсивности и характера вертикальной и горизонтальной нагрузок и других факторов поперечное сечение наружного опорного контура целесообразно развивать в одном случае в горизонтальной, в другом — в вертикальной плоскостях. Причем практически при любой схеме опорных конструкций в покрытиях со сравнительно большим шагом колонн и шагом вант, меньшим шага колонн, более рациональным будет опорный контур, развитый в вертикальной плоскости.

В плане наружный опорный контур следует выполнять многоугольным. В этом случае распор от вант будет раскладываться вдоль сторон

многоугольника и не будет вызывать дополнительных изгибающих моментов, как это имеет место при круглом опорном контуре и дискретном расположении вант по периметру.

В радиально-вантовых покрытиях опорные контуры помимо сжатия и изгиба испытывают также кручение. Крутящие моменты возникают вследствие того, что вертикальные составляющие реакций вант, расположенных между колоннами, смещены относительно прямых, соединяющих узлы опирания контура на колонны.



Уменьшить крутящие моменты можно, создав моменты обратного знака путем эксцентричного присоединения вант к опорному контуру.

В покрытиях шатрового типа внутренний опорный контур целесообразно выполнять не в виде жесткого диска из металлических листов (как это принято в настоящее время), а гибким, и крепить его к оголовку внутренней опоры таким образом, чтобы он мог изменять форму равновесия. В качестве примера такого решения может служить покрытие с внутренним подвесным опорным контуром, выполненным из каната (рис. 42) *. При нагружении такого покрытия не-

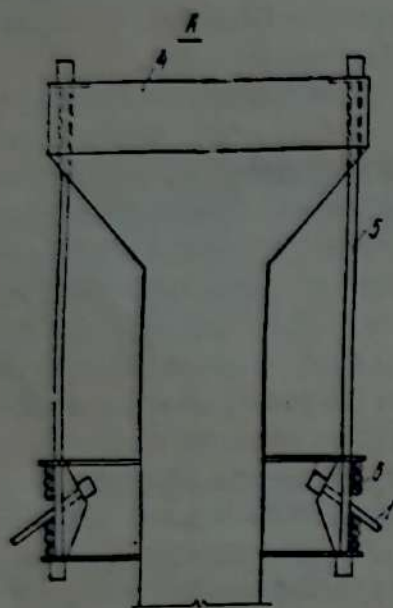


Рис. 42. Покрытие с гибким подвесным внутренним опорным контуром:

1 — ванта; 2 — наружный опорный контур; 3 — наружные колонны; 4 — центральная опора; 5 — подвески; 6 — внутренний опорный контур.

симметричной нагрузкой внутренний опорный контур будет деформироваться и перемещаться в сторону более нагруженной части покрытия практически до полного уравнивания усилий в вантах. При этом наружный опорный контур будет воспринимать, в основном, только усилия сжатия.

Величина перемещения внутреннего опорного контура зависит от горизонтальной составляющей усилий в подвесках, равной сумме проекций распоров в вантах. При длине подвесок около 3 м и перемещении внутреннего опорного контура до 10 см горизонтальная составляющая, действующая на внутреннюю опору, будет не более 3 % вертикальной нагрузки.

При сравнительно небольших несимметричных нагрузках можно заметно (на 8—12 %) уменьшить расход металла, если выполнить шат-

* А. с. 363794 (СССР). Висячее покрытие зданий и сооружений шатрового типа / В. А. Михайлов, В. Н. Шимановский, В. Н. Мацвейко. — Оpubл. в Б. И., 1972, № 4.

ровое покрытие без внутреннего опорного контура (рис. 43, а) *. Для прокладки пересекающихся в центре покрытия вант в оголовке внутренней опоры устраиваются радиальные пазы. В центральной части оголовка пазы очерчиваются по кривым различных радиусов, а по концам имеют прямолинейные участки, расположенные под углом,

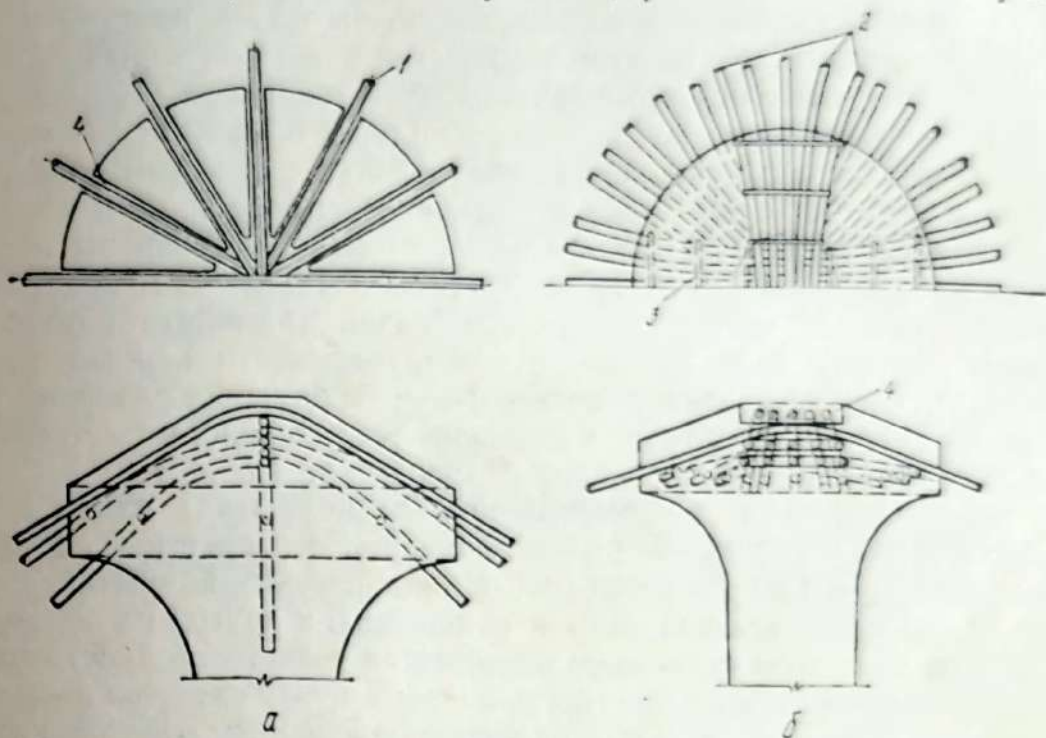


Рис. 43. Покрытия без внутреннего опорного контура:
а — при пересечении отдельных вант; б — то же, пакетов вант; 1 — ванта; 2 — пакет из вант; 3 — хомут; 4 — паз для пропуска вант.

равным углом подхода вант к оголовку. Радиусы кривых, по которым очерчиваются пазы, подбираются таким образом, чтобы рассредоточить по высоте пересечения вант.

С целью уменьшения высоты оголовка внутренней опоры было предложено решение, обеспечивающее пересечение в разных уровнях не отдельных вант, а пакетов из них (рис. 43, б) **.

§ 5. ПРОЛЕТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Многообразие схем, большое количество изделий (канаты, арматурные стержни, полосовая и профильная сталь), из которых могут изготавливаться несущие элементы, а также возможность применения различных ограждающих конструкций из металла, железобетона, органических и синтетических материалов не позволяют осветить не только многие интересные индивидуальные, но также и все распространенные решения пролетных конструкций. Остановимся на некоторых из них.

* А. с. 365415 (СССР). Висячее покрытие шатрового типа для зданий и сооружений / В. А. Михайлов, В. Н. Шимановский, В. Н. Мацвейко. — Оpubл. Б. И., 1973, № 6.

** А. с. 445735 (СССР). Висячее покрытие шатрового типа / В. Н. Мацвейко, В. Н. Шимановский, В. В. Осадчук, Ю. И. Кураш. — Оpubл. в Б. И., 1974, № 37.

Прежде всего отметим, что для пролетных конструкций всяких покрытий применяются те же изделия (канаты, анкеры, натяжные устройства и т. п.), что и для других всяких систем (мостов, трубопроводных переходов, канатных дорог).

Пролетная конструкция однопоясных радиально-вантовых покрытий на круглом плане, цилиндрических покрытий на прямоугольном плане и некоторых других типов покрытий чаще всего выполняется из железобетонных или армоцементных плит, омоноличиваемых с вантами, т. е. представляет собой железобетонные оболочки. За редким исключением все оболочки жестко связываются с опорным контуром.

Форма и размеры плит зависят от кривизны поверхности и структуры вантовой сети. При параллельных и радиальных вантах применяются плиты размерами от $1,5 \times 1,5$ до 3×12 м. С точки зрения снижения расхода материалов целесообразно применять плиты небольших размеров. Если же исходить из трудоемкости и сроков строительства, то следует ориентироваться на плиты больших размеров. На основании анализа проектных материалов установлено, что оптимальными являются решения с плитами размерами от $1,5 \times 3$ до 3×6 м.

В радиально-вантовых и цилиндрических покрытиях плиты укладываются таким образом, что их швы образуют перекрестные системы. В последние годы был построен ряд цилиндрических покрытий, в которых плиты были смещены одна по отношению к другой на половину их ширины. При этом несколько повышается трещиностойкость швов вдоль образующей и общая жесткость покрытия. Что касается радиально-вантовых покрытий, то в них укладывать подобным образом плиты не следует, поскольку при этом увеличится и без того большое количество типоразмеров плит.

В практике строительства получили применение три типа опирания плит на ванта: с гибкими выпусками в виде крюков, с консолями и посредством опорных столиков. Плиты с гибкими выпусками в виде крюков применяются при необходимости надежной изоляции вант. Плиты с консолями позволяют существенно уменьшить объем бетона замоноличивания, а также использовать пространство между ребрами для прокладки ряда технологических коммуникаций. Решения с плитами, опертыми на столики, применяются, в основном, когда ванта располагаются ниже плит. Совместная работа плит обеспечивается выпусками арматуры и устройством пазов на продольных и поперечных ребрах.

Были попытки внедрить решения с двухконсольными плитами, подвешиваемыми к вантам снизу. Однако, несмотря на удобство монтажа, они не получили распространения.

В однопоясных покрытиях с ортогональной сетью вант в пределах одной ячейки располагается одна прямоугольная (квадратная) или две треугольные плиты (так как в общем случае только три точки могут лежать в одной плоскости). Встречаются также решения, когда плиты укладываются под вантовую сеть и их швы не совпадают с направлением вант. Узлы ячеек вантовой сети проектируются таким образом, чтобы предотвратить смещения вант в направлении действия нагрузки. В процессе монтажа и осуществления предварительного натяжения они

должны обеспечивать возможность проскальзывания вант относительно одна другой.

Применяются различные конструкции узлов пересечения вант от простых в виде хомутов (рис. 44, а, б) до сложных с использованием различных штампованных накладок (рис. 44, в—д) и фасонки (рис. 44, е). В вантовых сетях из арматурных стержней фиксация точек пересечения вант может осуществляться путем скрутки их проволокой диаметром 3—5 мм. В местах установки накладок стальные канаты

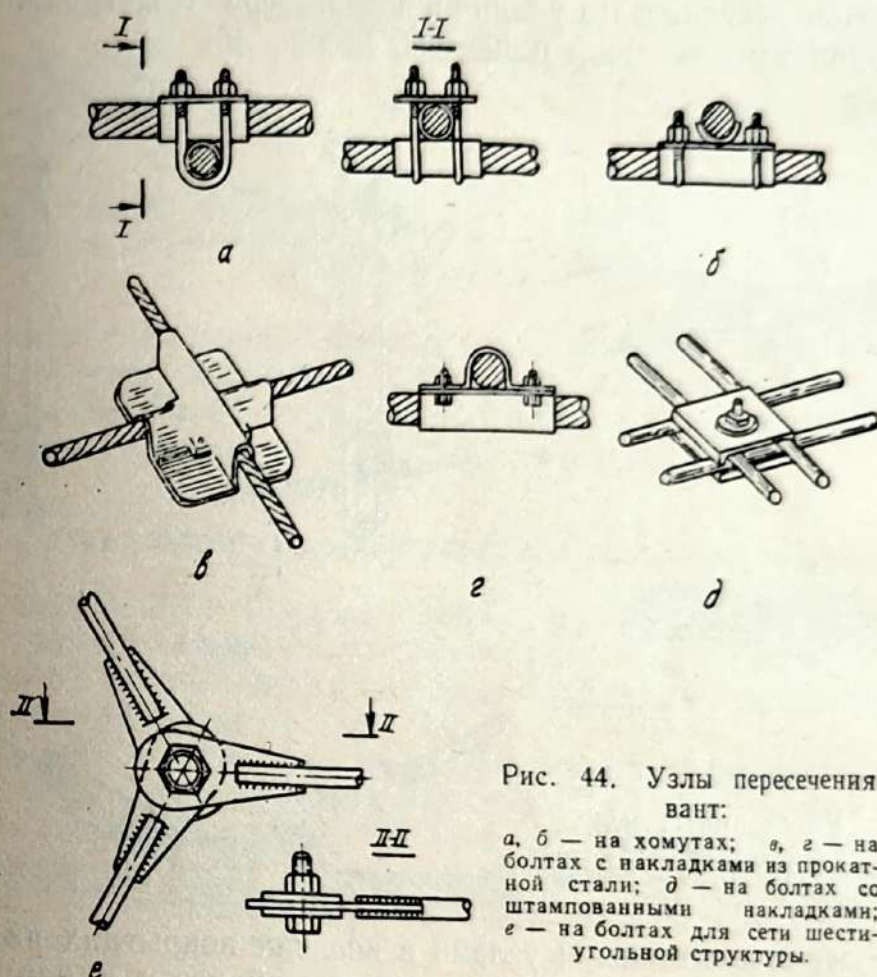


Рис. 44. Узлы пересечения вант:

а, б — на хомутах; в, г — на болтах с накладками из прокатной стали; д — на болтах со штампованными накладками; е — на болтах для сети шестиугольной структуры.

должны предохраняться от повреждений путем намотки мягкой проволоки, использования алюминиевых прокладок.

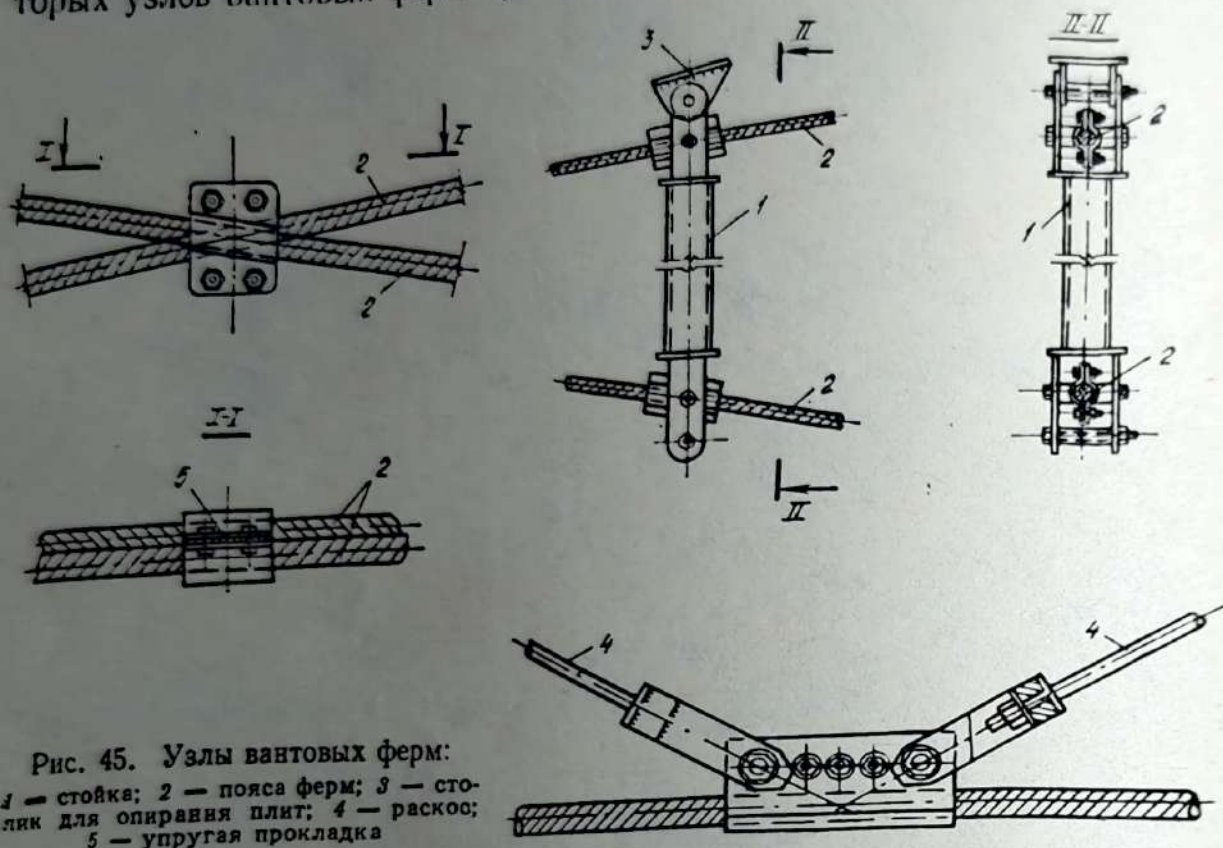
В подвесных покрытиях, а также в покрытиях с применением жестких несущих элементов конструкция и схемы укладки плит ничем не отличаются от традиционных решений покрытий из ферм и балок.

В двухъярусных покрытиях из вантовых ферм в качестве ограждающих конструкций применяются, как правило, металлические или алюминиевые панели, а также мембраны. За исключением нескольких покрытий, пока не получили применение в таких системах панели из стеклопластика и асбестоцемента. Для временных зданий и сооружений в качестве ограждающих конструкций все шире начинают применяться пленки и ткани на органической или синтетической основе.

Крепление металлических панелей к вантовой сети осуществляется посредством различного рода накладок, обжимок и других инвентарных

изделий. Аналогичны, но более просты узлы крепления к вантовой сети мембраны.

Крепление растянутых вертикальных (подвесок) и наклонных (раскосов) элементов решетки к поясам (несущим и натягающим канатам) вантовых ферм ничем не отличается от решений, приведенных в главе I. Сжатые распорки крепятся к поясам шарнирно или жестко. Выполняются они, в основном, из труб. Как и в растянутых элементах решетки, в пределах длины распорок, как правило, устраиваются стяжки, позволяющие регулировать усилия в поясах ферм. Конструкции некоторых узлов вантовых ферм приведены на рис. 45.



Наиболее ответственными узлами в висячих покрытиях являются узлы крепления несущих элементов пролетной части к наружному и внутреннему опорным контурам, канатам-подборам, диагональным распоркам и т. п.

Обычно для пропуска вант в наружном железобетонном опорном контуре закладывают трубки или устраивают каналы. Диаметр последних подбирается таким образом, чтобы не происходил контакт вант с их кромками, т. е. чтобы не возникал в них изгибающий момент. Вместе с тем такой момент всегда возникает при передаче усилия с анкера на неподвижный упор. Как будет показано ниже, он может вызывать значительные дополнительные напряжения в вантах. Поэтому узлы крепления вант к опорному контуру необходимо выполнять либо шарнирными, либо упруго-податливыми. И лишь при небольшой интенсивности временной нагрузки (когда она практически не будет изменять угол подхода вант к опорному контуру) могут применяться решения с жесткими узлами. Поскольку внутренний опорный контур, за редким

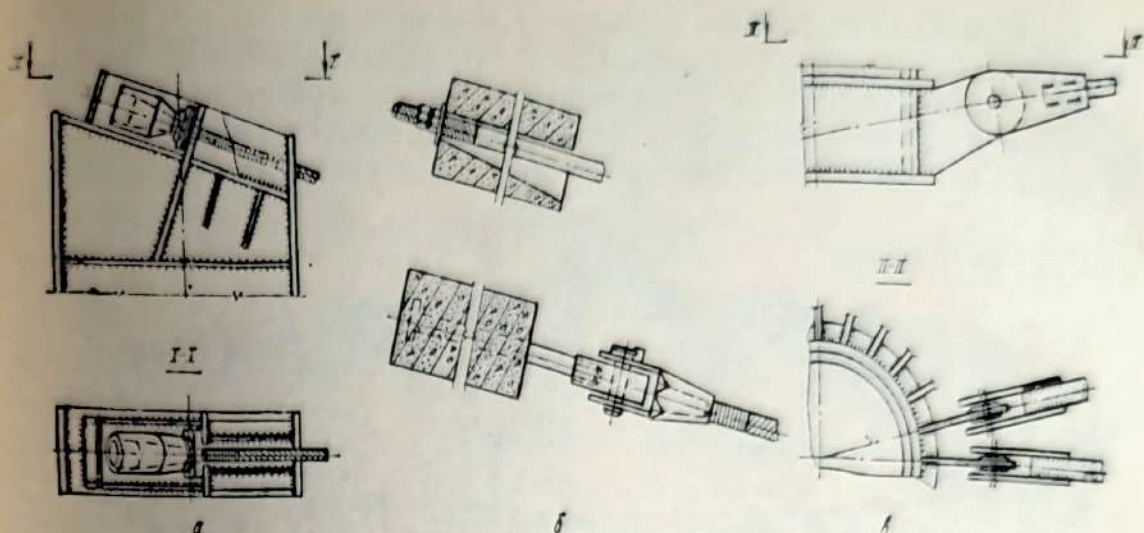


Рис. 46. Узлы примыкания вант к опорным конструкциям:
 а — к наружному металлическому контуру; б — то же к железобетонному; в — к внутреннему металлическому контуру.

исключением, выполняется металлическим, то появляется возможность несколько разнообразить и упростить узлы крепления к нему вант. Примеры некоторых узлов примыкания вант к наружному и внутреннему опорным контурам приведены на рис. 46.

§ 6. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОКРЫТИЙ

В связи со строительством в Киеве закрытой стоянки на 400 автобусов с висячим покрытием шатрового типа диаметром 160 м (рис. 47) в НИИСКе проводились исследования напряженно-деформированного состояния покрытия *.

Основной несущей конструкцией покрытия закрытой стоянки являлась система в виде 84 радиальных вант из стальных канатов закрытого типа диаметром 65 мм по ГОСТ 7676—73. Распор вант воспринимается сжатым наружным и растянутым внутренним опорными контурами. Внутренний опорный контур выполнен из двух металлических колец с поперечным сечением $0,22 \times 0,32$ м, диаметром 8 м, связанных по высоте ребрами жесткости. Нижнее кольцо опирается на внутреннюю опору, выполненную в виде цилиндрической оболочки диаметром 8 м с толщиной стенки 0,3 м, высотой 18 м. Помимо основного назначения — передачи нагрузки от покрытия на фундамент — внутренняя опора выполняет также технологические функции — служит вентиляционной шахтой. Наружный сборно-монолитный железобетонный опорный контур размером $0,8 \times 3,0$ м, диаметром 160 м опирается на 84 железобетонные колонны таврового сечения высотой 8 м. По вантам уложены сборные ребристые железобетонные плиты трапецевидной формы. Максимальный размер плит 3×6 м. Центральная часть покрытия диаметром 16 м выполнена в монолитном железобетоне.

* Проект закрытой стоянки разработан Киевским Промстройпроектом совместно с НИИСК.

Численные исследования. Поскольку при численном исследовании на ЭВМ размеры расчетной модели не имеют существенного значения, а мы располагали данными испытания физической модели и натурной конструкции здания закрытой стоянки, то с целью сопоставления результатов исследования с данными испытания, а также проверки при-

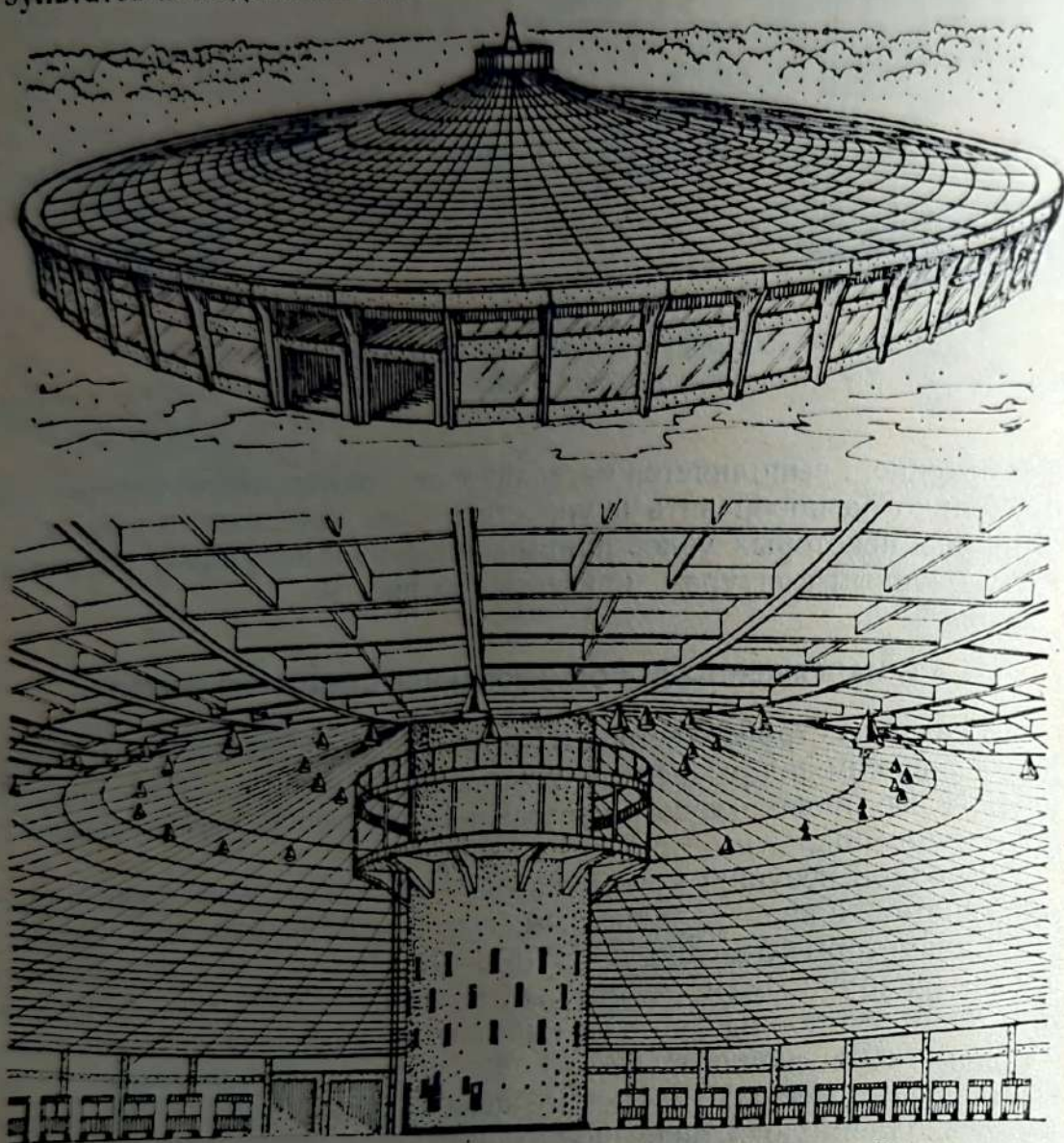


Рис. 47. Закрытая стоянка на 400 автобусов в г. Киеве:
 а — общий вид (перед замоноличиванием плит покрытия); б — интерьер.

нятых рабочих гипотез, указанное покрытие и было принято за основу при составлении расчетной модели.

Основные несущие конструкции модели имели следующие характеристики:

железобетонный наружный опорный контур — $d = 160$ м; $F_{н.к} = 1,96$ м²; $EF_{н.к} = 6174 \cdot 10^4$ кН; $EI_{н.к} = 252 \cdot 10^4$ кН · м² (жесткости $EI_{н.к}$ соответствует опорный контур сечением $2,8 \times 0,7$ м);

металлический внутренний опорный контур — $d = 8$ м; $F_{в.к} = 0,14$ м²; $EF_{в.к} = 2956,8 \cdot 10^4$ кН; $EI_{в.к} = 23850$ кН · м² (жесткости $EI_{в.к}$ соответствует опорный контур сечением $0,1 \times 1,4$ м);

железобетонные наружные колонны — $h = 8$ м; $F_k = 0,24$ м²; $EF_k^x = 1330$ кН; $EF_k^y = 590$ кН; $EI_k^x = 226,8 \cdot 10^3$ кН · м²; $EI_k^y = 100,8 \cdot 10^3$ кН · м² (жесткости EI_k^x соответствует колонна сечением $0,6 \times 0,4$ м);

железобетонная внутренняя опора — $h = 18$ м; $F_0 = 7,07$ м²; $EF_0 = 64,1 \cdot 10^3$ кН; $EI_0 = 22254,75 \cdot 10^4$ кН · м²; (жесткости EI_0 соответствует опора сплошного сечения диаметром 3 м);

ванты (стальной канат диаметром — 65 мм по ГОСТ 7676—55) — длина горизонтальной проекции 78,14 м; $F_v = 2,85 \cdot 10^{-3}$ м²; $EF_v = 370,5 \cdot 10^3$ кН.

Модуль упругости для всех железобетонных конструкций принят равным $3,15 \cdot 10^7$ кН/м², для металлического внутреннего опорного контура — $2,1 \cdot 10^8$ кН/м², для вант — $1,3 \cdot 10^8$ кН/м².

Изучалось напряженно-деформированное состояние наиболее распространенных типов покрытий:

со свободно перемещающимся в горизонтальной плоскости внутренним опорным контуром (с качающейся внутренней опорой; рис. 48, а);

то же, с наружным опорным контуром (рис. 48, б);

с опорными контурами, жестко прикрепленными к упруго-податливому поддерживающим их конструкциям (рис. 48, в).

Схемы нагружения покрытий с данными об интенсивности постоянной q и временной p нагрузок, а также диапазоне изменения площади приложения временной нагрузки приведены на рис. 48, г—з.

При исследовании каждого типа покрытия поочередно изменялись схемы нагружения, а затем жесткости основных несущих конструкций (наружного и внутреннего опорных контуров, колонн и др.). В зависимости от схемы нагружения рассматривалась половина (случай, когда нагрузка имела одну ось симметрии) или $1/4$ (случай, когда нагрузка имела две оси симметрии) покрытия.

Действие равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему покрытию. При нагружении покрытия равномерно распределенной постоянной q и временной p нагрузками (рис. 48, д) в наружном опорном контуре возникла сжимающая сила $T = 23740$ кН, под действием которой диаметр опорного контура уменьшился на 5,8 см. При этом изгибающие моменты и перерезывающие силы в опорном контуре были практически равны нулю.

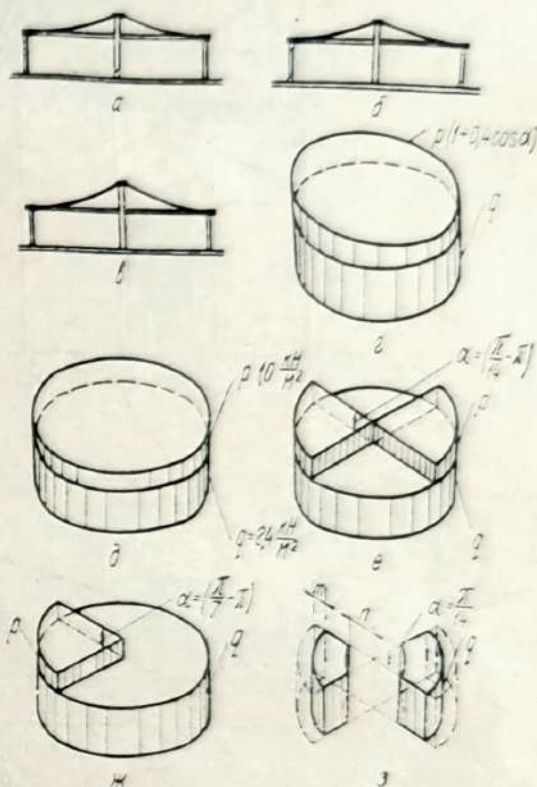


Рис. 48. Схемы покрытий и нагрузок: а — в — расчетные схемы; г — з — схемы нагружения.

Во внутреннем опорном контуре растягивающее усилие было равно 23850 кН. Под действием этого усилия диаметр внутреннего опорного контура увеличился на 0,6 см.

Распор в вантах составил 1690 кН. Максимальное перемещение по вертикали, равное 1,35 м (в том числе от временной нагрузки 0,28 м), получили узлы вантовой системы, расположенные на расстоянии 23 м

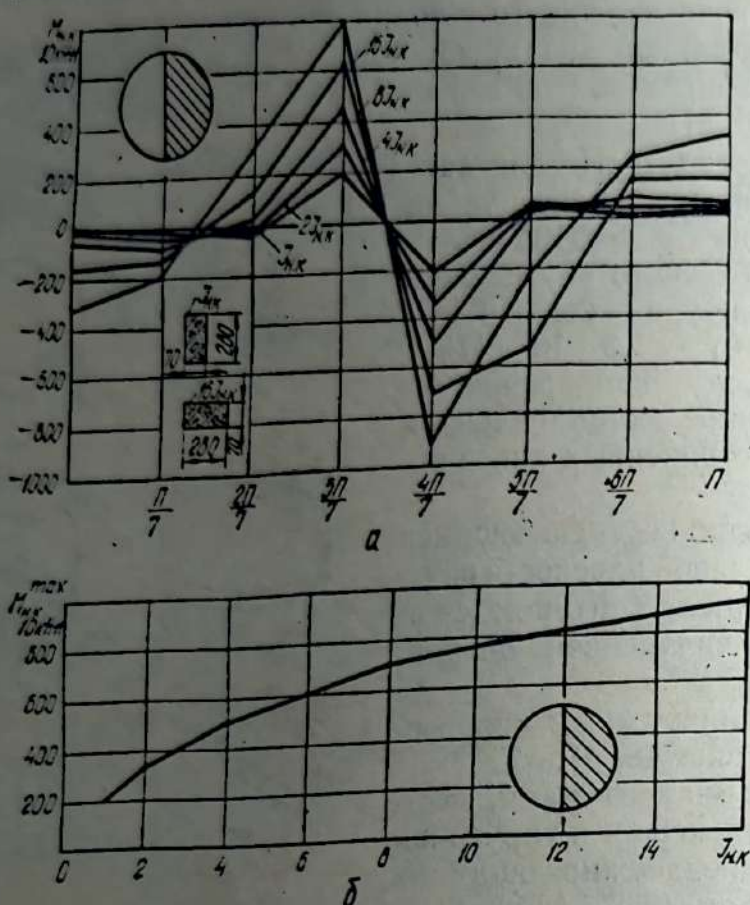


Рис. 49. Графики зависимости $M_{н.к} = f(EI_{н.к})$ (а) и $M_{н.к}^{max} = f(EI_{н.к})$ (б) при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом π .

от наружного опорного контура. Радиальное перемещение этих узлов в направлении наружного опорного контура было равно 10 см. Изменение жесткостных характеристик основных несущих конструкций практически не сказалось на усилиях и деформациях элементов.

Действие временной нагрузки, расположенной на одном секторе. При нагружении покрытия равномерно распределенной постоянной и временной нагрузками по схеме, приведенной на рис. 48, жс, в наружном и внутреннем опорных контурах возникают значительные изгибающие моменты.

Рассмотрим вначале влияние изгибной жесткости наружного опорного контура на напряженно-деформированное состояние покрытия при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом 180° и свободном перемещении контура в горизонтальной плоскости. При постоянной площади сечения контура будем варьи-

ровать его жесткостью на изгиб в пределах от $EI_{н.к}$ до $16EI_{н.к}$ (жесткости $EI_{н.к}$ соответствует контур с сечением $2,8 \times 0,7$ м, а жесткости $16EI_{н.к}$ — $0,7 \times 2,8$ м).

Из рис. 49, а видно, что если наружный опорный контур расположить в плоскость наименьшей жесткости его сечения, то максимальный изгибающий момент в нем будет в 4,4 раза меньше, чем в таком же опорном контуре, но расположенном в плоскости наибольшей жесткости. Зависимость $M_{н.к}^{max} = f(EI_{н.к})$ имеет нелинейный характер. Так, при уменьшении жесткости опорного контура с $2EI_{н.к}$ до $EI_{н.к}$ максимальный изгибающий момент уменьшается в 1,7 раза, а при уменьшении жесткости с $16EI_{н.к}$ до $8EI_{н.к}$ — в 1,3 раза (рис. 49, б). Максимальные изгибающие моменты возникали на границах приложения временной нагрузки (между нагруженными и ненагруженными вантами). То же можно сказать и о влиянии жесткости наружного опорного контура на изгибающие моменты во внутреннем опорном контуре. По величине последние были примерно в 30 раз меньшими, чем в наружном опорном контуре.

Под действием неуравновешенного распора в вантах наружный опорный контур заметно деформировался и переместился в сторону менее нагруженной части покрытия на 0,49 м. При этом за счет увеличения стрелы провисания более нагруженных вант и уменьшения стрелы провисания менее нагруженных вант усилия в них несколько выравнивались (максимальная разница не превышала 50 кН при жесткости опорного контура $EI_{н.к}$ и 200 кН — при жесткости $16EI_{н.к}$). Максимальное опускание узлов вантовой системы при жесткости наружного опорного контура $EI_{н.к}$ составило 0,99 м, а подъем — 0,82 м. С увеличением жесткости наружного опорного контура деформативность вантовой системы практически не изменилась. Не сказались изменение жесткости наружного опорного контура и на величине сжимающей (растягивающей) силы.

Не менее существенно на величине изгибающих моментов и нормальных сил в наружном опорном контуре сказывается жесткость наружных колонн. Так, при увеличении жесткости наружных колонн с EI_k до $32EI_k$ максимальный изгибающий момент и нормальная сила в наружном опорном контуре уменьшились соответственно при жесткости $EI_{н.к}$ в 20 и 1,66 раза, а при жесткости $16EI_{н.к}$ — в 10 и 1,7 раза

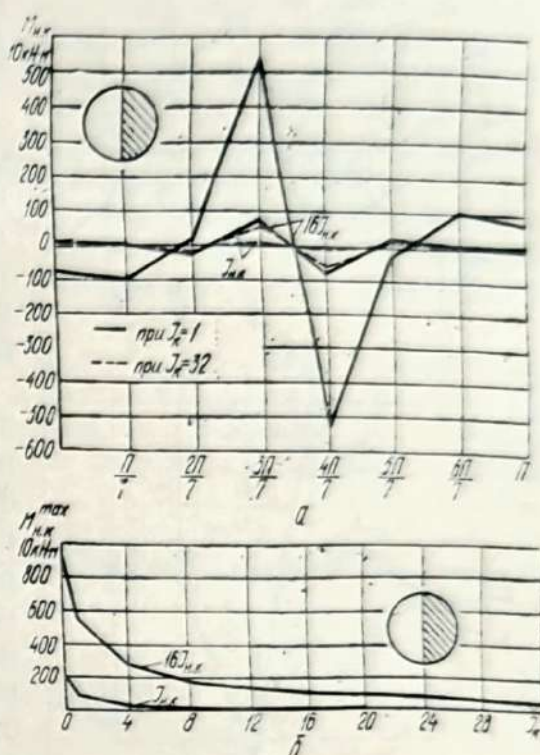


Рис. 50. Графики зависимости $M_{н.к}^{max} = f(EI_k)$ (а) и $M_{н.к}^{max} = f(EI_k)$ (б) при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом α .

(рис. 50, а). Такое же влияние оказывает жесткость наружных колонн и на перемещение опорного контура и прогиб вантовой системы. Так, по сравнению со схемой с шарнирно-подвижным опиранием контура перемещение его при жесткости колонн EI_k уменьшилось с 0,49 м до 0,13 м, а при жесткости $32EI_k$ — до 0,01 м. Соответственно прогибы вант при жесткости колонн EI_k уменьшились с 0,99 м до 0,45 м, а при жесткости $32EI_k$ — до 0,27 м. Особенно резко влияет жесткость наружных колонн на усилия и перемещения наружного опорного контура в диапазоне от $EI_k = 0$ до $4EI_k$ (рис. 50, б).

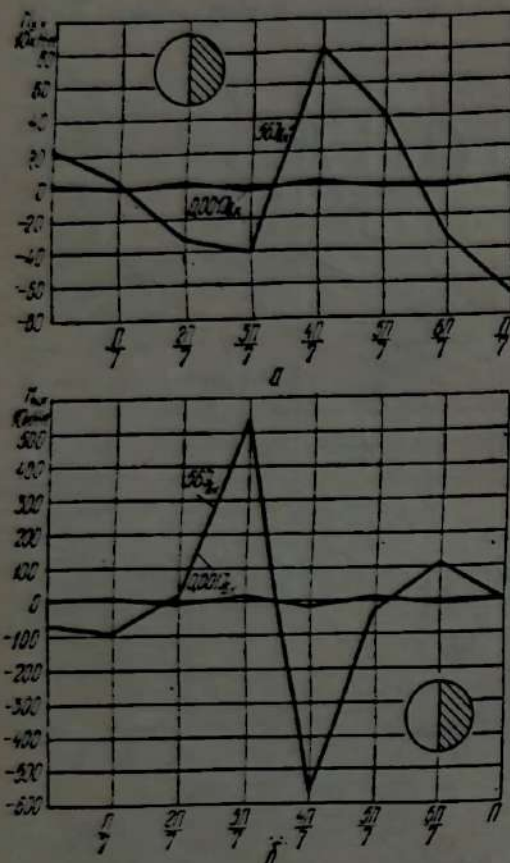


Рис. 51. Графики зависимости $M_{в.к} = f(EI_{в.к})$ (а) и $M_{н.к} = f(EI_{в.к})$ (б) при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом α .

$EI_{в.к}$. С увеличением жесткости внутреннего опорного контура от $EI_{в.к}$ до $56EI_{в.к}$ максимальный изгибающий момент в наружном опорном контуре увеличивается всего на 8 % (рис. 51, б). Дальнейшее увеличение жесткости внутреннего опорного контура не приводит к увеличению изгибающих моментов в наружном опорном контуре.

На рис. 52 приведен характер изменения формы равновесия внутреннего опорного контура в плоскости XOY при жесткости его, равной $0,001EI_{в.к}$ и $56EI_{в.к}$. Из рис. 52 видно, что внутренний опорный контур с пренебрежимо малой жесткостью на изгиб, помимо перемещения, существенно деформируется, в то время как жесткий опорный контур перемещается подобно диску, практически без деформаций.

Анализ результатов исследования показывает, что безмоментная работа наружного опорного контура обеспечивается благодаря вырав-

ниванию усилий в вантах, главным образом, за счет деформаций внутреннего опорного контура.

Несколько неожиданными оказались результаты исследования работы покрытия при различных жесткостях внутренней опоры. Было установлено, что при изменении жесткости внутренней опоры от EI_0 до $12EI_0$ (жесткости EI_0 соответствует опора сплошного сечения диаметром 3 м, а жесткости $12EI_0$ — полая цилиндрическая оболочка диаметром 8 м с толщиной стенки 0,3 м) изгибающие моменты в наружном и внутреннем опорных контурах практически не меняются (в наружном контуре увеличился на 1%, а во внутреннем — уменьшился на 2%). То же можно сказать и в отношении нормальных сил. Несколько больше сказывается жесткость внутренней опоры на деформативность вантовой системы. Более всего она влияет на перемещения внутреннего и наружного опорных контуров.

Характер зависимости изгибающих моментов в наружном опорном контуре от жесткости последнего и величины центрального угла сектора с временной нагрузкой приведен на рис. 53. Из него видно, что максимальный изгибающий момент в наружном опорном контуре возник при нагружении покрытия временной нагрузкой, расположенной на секторе с центральным углом $\pi/7$.

При увеличении центрального угла сектора с временной нагрузкой от $\pi/7$ до $3\pi/7$ максимальный изгибающий момент в наружном опорном контуре уменьшился в 1,8 раза (с 10 750 до 5850 кН·м). При дальнейшем увеличении центрального угла сектора с временной нагрузкой изгибающий момент в наружном опорном контуре изменялся незначительно. Как и ранее, максимальный изгибающий момент возникал на границах сектора с временной нагрузкой (между нагруженными и ненагруженными временной нагрузкой вантами).

Установлено, что при уменьшении центрального угла сектора с временной нагрузкой несколько увеличивается влияние жесткости наружного опорного контура на изгибающие моменты в нем и его деформации. Что касается внутреннего опорного контура, то здесь эта тенденция не проявлялась.

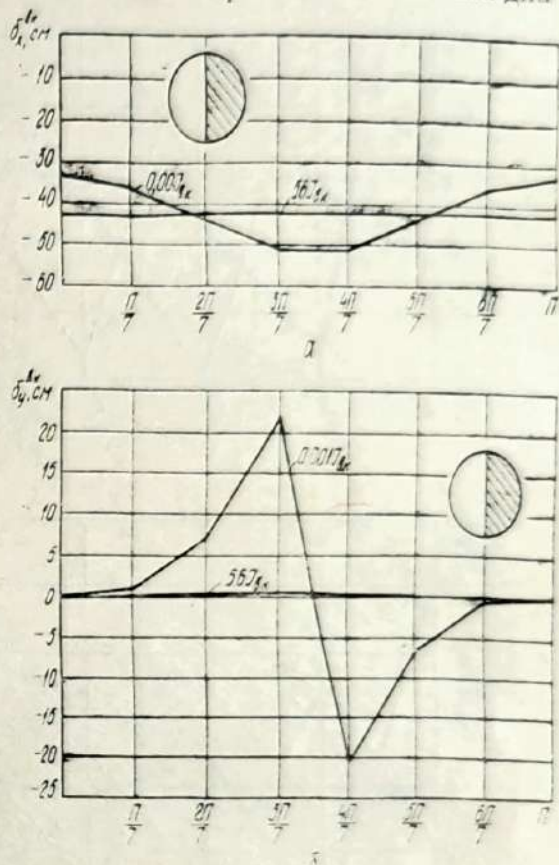


Рис. 52. Перемещения и деформации внутреннего опорного контура при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом π :

а — по оси x ; б — по оси y .

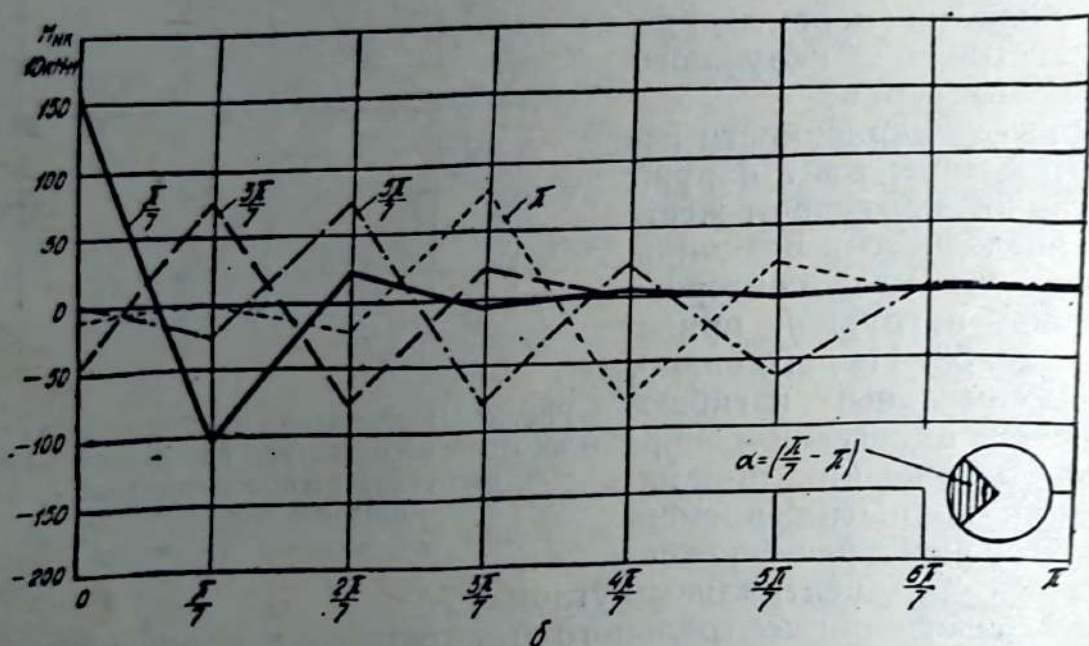
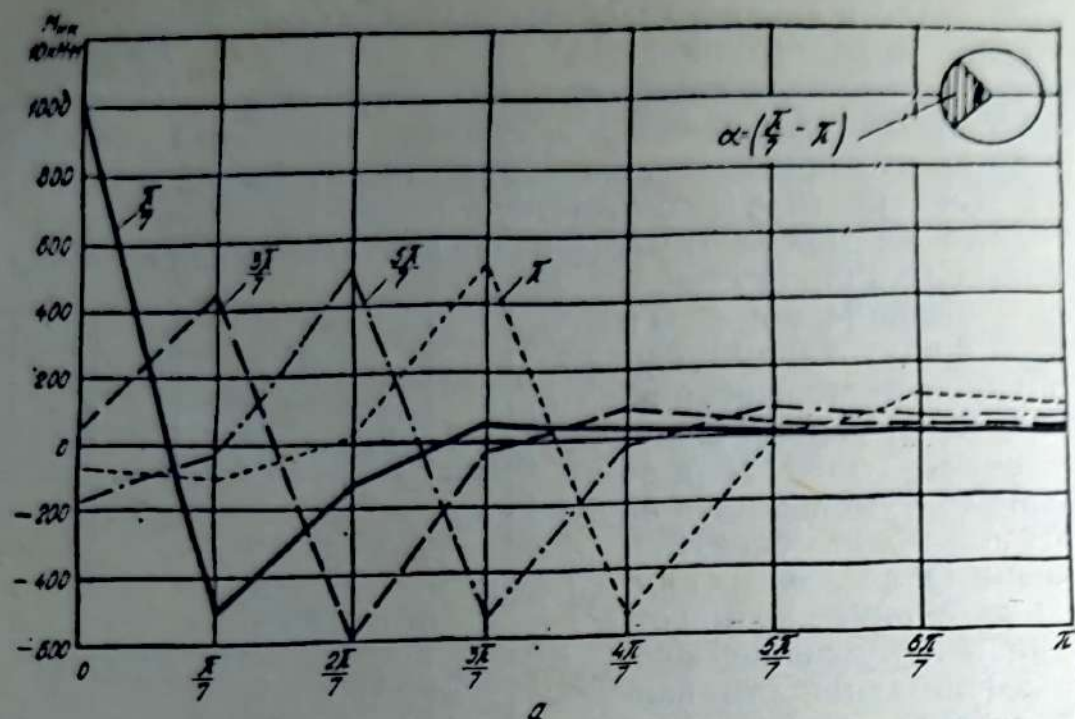


Рис. 53. График зависимости $M_{н.к} = f(\varphi)$ при действии временной нагрузки, расположенной на одном секторе с центральными углами $\frac{\pi}{7} - \pi$:

а — при жесткости на изгиб $16EI_{н.к}$; б — то же $EI_{н.к}$.

Прогибы вантовой системы с уменьшением центрального угла сектора с временной нагрузкой заметно уменьшаются. Так, по сравнению с сектором с центральным углом, равным π , нагруженные ванты при секторе с центральным углом, равным $\pi/7$, опустились вместо 0,99 на 0,62 м, а ненагруженные ванты поднялись вместо 0,82 на 0,05 м.

Действие временной нагрузки, расположенной на двух секторах. При действии временной нагрузки, расположенной на двух симмет-

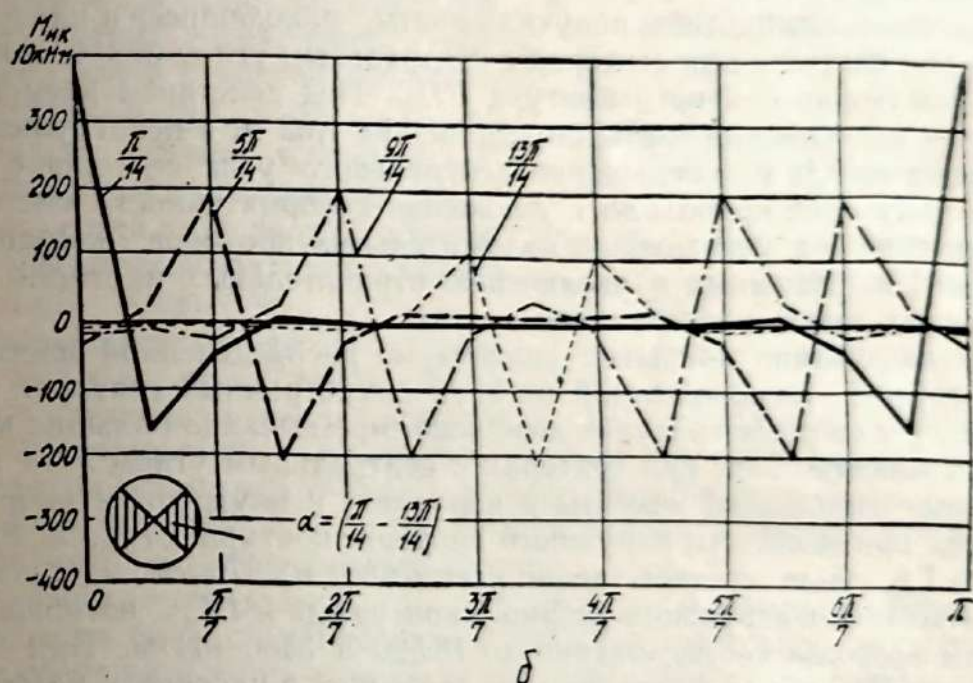
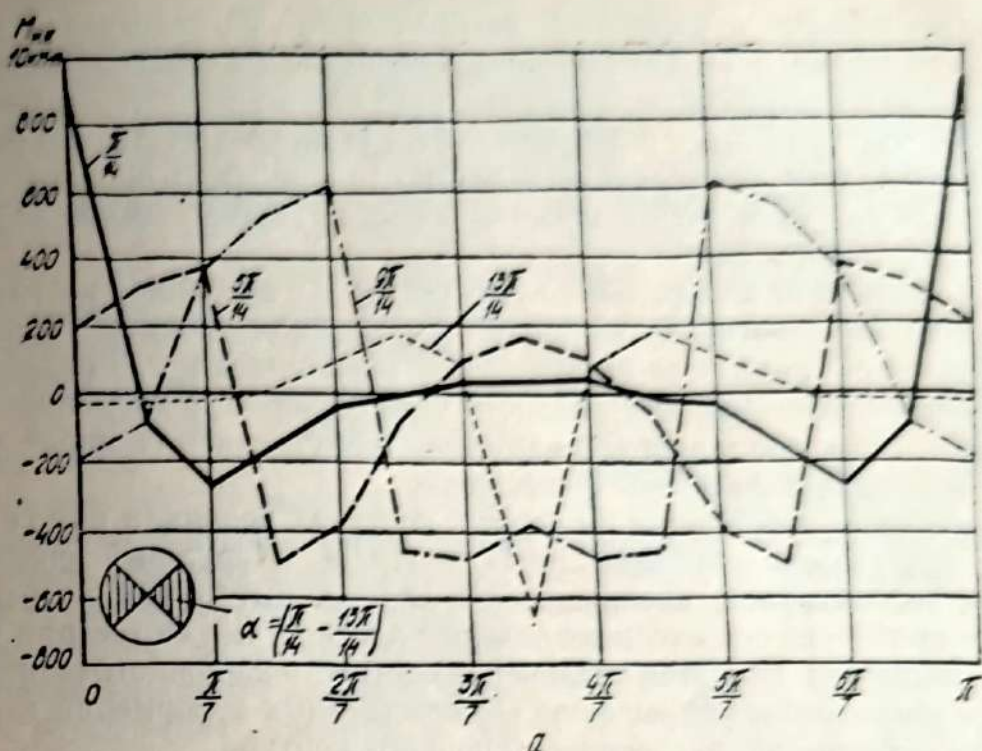


Рис. 54. График зависимости $M_{н.к} = f(\varphi)$ при действии временной нагрузки, расположенной на двух симметричных секторах с центральными углами $\pi/14 - \pi$:

a — при жесткости на изгиб $16EI_{н.к}$; $б$ — то же $EI_{н.к}$.

ричных секторах (см. рис. 48, е), внутренняя опора работала только на сжатие, а наружные колонны, вследствие деформации опорного контура в плоскости покрытия, — на сжатие с изгибом.

Величина центрального угла секторов с временной нагрузкой изменялась от $\pi/14$ до $13\pi/14$. Максимальные изгибающие моменты в наружном и внутреннем опорных контурах возникли при нагружении

покрытия временной нагрузкой, расположенной на секторах с центральными углами $\pi/14$. По абсолютной величине изгибающие моменты в наружном и внутреннем опорных контурах при жесткости наружного опорного контура $EI_{н.к.}$, а внутреннего $EI_{в.к.}$ были соответственно равны 3960 и 1450 кН·м. С увеличением жесткости наружного опорного контура до $16EI_{н.к.}$ изгибающие моменты возросли соответственно до 9130 и 1670 кН·м (рис. 54).

При увеличении центрального угла секторов с временной нагрузкой от $\pi/14$ до $5\pi/14$ изгибающий момент в наружном опорном контуре уменьшился в 2 раза, а во внутреннем — увеличился в 2, 3 раза. При дальнейшем увеличении центрального угла секторов с временной нагрузкой изгибающие моменты в наружном и внутреннем опорных контурах изменялись не столь существенно.

Наибольшие деформации в опорных контурах возникли при секторах с центральными углами $3\pi/14$ — $11\pi/14$. Наружный опорный контур, деформируясь, превращался в эллипс, вытянутый по оси y , а внутренний — по оси x (оси совпадали с плоскостями симметрии временной нагрузки). При этом увеличение жесткости наружного опорного контура приводило к уменьшению его собственных деформаций и увеличению деформаций внутреннего опорного контура.

Максимальные прогибы получили ванты, находящиеся в плоскости симметрии нагрузки при секторах с центральным углом $3\pi/14$, и жесткости наружного опорного контура $EI_{н.к.}$. Под действием временной нагрузки нагруженные ванты опустились на 1,02 м, а ненагруженные поднялись на 0,46 м. Уменьшение центрального угла секторов с временной нагрузкой приводило к снижению деформативности системы, а увеличение — к уменьшению положительных прогибов (направленных вниз) нагруженных и увеличению отрицательных прогибов (направленных вверх) ненагруженных вант.

При нагружении покрытия равномерно распределенной постоянной нагрузкой, расположенной на двух симметричных секторах (см. рис. 48, з), в опорных контурах возникают чрезвычайно большие изгибающие моменты. Так, при секторах с центральным углом $\pi/14$ максимальные изгибающие моменты в наружном и внутреннем опорных контурах при жесткости наружного опорного контура $EI_{н.к.}$, а внутреннего $EI_{в.к.}$ были соответственно равны 6860 и 3270 кН·м. С увеличением жесткости наружного опорного контура до $16EI_{н.к.}$ изгибающие моменты возросли соответственно до 18520 и 3480 кН·м. При этом диаметр наружного опорного контура, лежащий в плоскости нагрузки вант, уменьшился на 0,33 м, а из плоскости — увеличился на 0,09 м. Соответственно деформации внутреннего опорного контура составили в плоскости нагрузки вант 0,19 м, а из плоскости — 0,22 м.

Действие временной нагрузки, расположенной по закону косинуса*. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние покрытия при действии временной нагрузки, изменяющейся вдоль окружности по закону $p = p_0 (1 + 0,4 \cos \varphi)$, где p_0 — расчетная нагрузка, равная

* По рекомендации ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко на указанную нагрузку рассчитывалось всякое покрытие закрытой стоянки в Киеве.

1000 Н/м², а φ — центральный угол, отсчитываемый от произвольного радиуса (см. рис. 48, з).

При нагружении покрытия временной нагрузкой, расположенной по закону косинуса, в наружном и внутреннем опорных контурах возникли нормальные силы на 5 % большие, чем при приложении равномерно распределенной нагрузки. То же можно сказать и об усилиях в вантах. Что касается изгибающих моментов в опорных контурах, то последние, несмотря на несимметричный характер нагрузки, были очень малыми (в 10—60 раз меньше, чем при загрузке покрытия временной нагрузкой, расположенной на секторе с центральным углом 180°).

На рис. 55 приведен характер изменения изгибающих моментов в наружном опорном контуре в зависимости от жесткости контура на изгиб. Из рис. 55 видно, что с увеличением жесткости опорного контура изгибающие моменты в нем возрастают точно так же, как и при других схемах загрузки. Идентичным был и характер зависимости $M_{н.к}^{max} = f(EI_{н.к})$. То же можно сказать и о влиянии других факторов (жесткости внутреннего опорного контура, наружных колонн) на напряженно-деформированное состояние покрытия.

Экспериментальные исследования. Исследование проводилось на модели, выполненной в масштабе 1 : 10 натуральной величины.

Для возможности исследования ряда специфических вопросов (сцепления монолитного бетона швов со сборным бетоном плит, трещиностойкости покрытия и др.) в качестве материала модели был принят железобетон и армированный цемент.

Для размещения нагрузочного устройства и измерительных приборов модель была смонтирована на специальном стенде, состоящем из железобетонных колонн высотой 3 м, объединенных по верху кольцом из сборных железобетонных элементов. Поскольку модель закрытой стоянки была приподнята над уровнем земли на 3 м, то размеры внутренней опоры были подобраны таким образом, чтобы перемещения ее верха моделировали в принятом масштабе перемещения натурной конструкции. Она была выполнена из стальной трубы диаметром 630 мм с толщиной стенки 10 мм.

В связи с недостаточной изученностью вопросов моделирования нелинейных задач было принято: $C_6 = \frac{\sigma_n}{\sigma_m} = 1$; $C_8 = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_m} = 1$, где C_6 и C_8 — константы подобия.

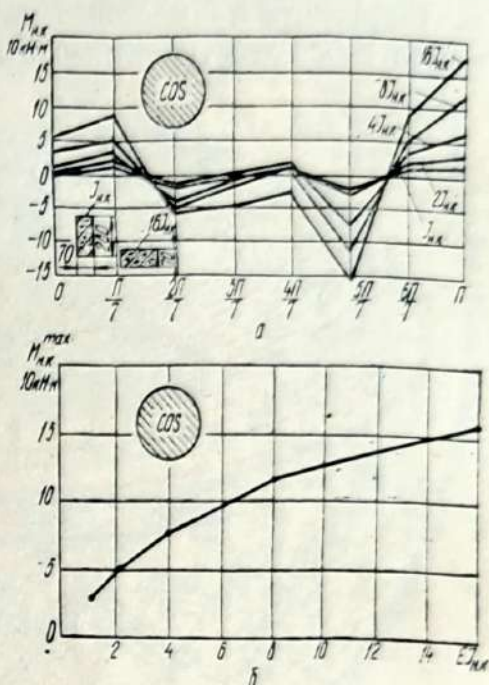


Рис. 55. Графики зависимости $M_{н.к} = f(EI_{н.к})$ (а) и $M_{н.к}^{max} = f(EI_{н.к})$ (б) при действии временной нагрузки, расположенной по закону косинуса.

Из приведенных равенств следует, что интенсивность распределенной нагрузки на поверхности покрытия должна быть одинаковой в натуре и на модели $C_q = \frac{q_n}{q_m} = 1$.

Распределенная нагрузка была заменена системой из восьми сосредоточенных грузов, приложенных в центрах тяжести эпюр соответствующих участков. Тридцать два сосредоточенных груза на четырех смежных вантах были сведены к одной точке нагружения с помощью системы рычагов и подвесок. Последний ярус указанной системы представлял собой десятикратный рычаг, короткий конец которого через

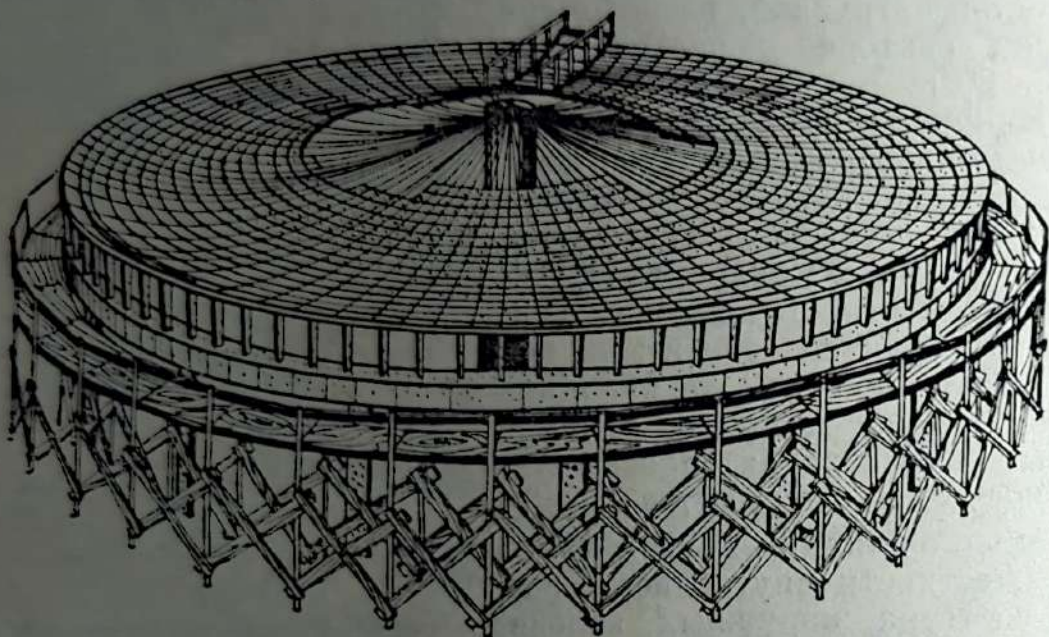


Рис. 56. Модель закрытой стоянки (в процессе монтажа).

тягу с регулировочным вантом соединялся с силовым полом, а длинный конец снабжался грузовой платформой.

Общий вид модели в процессе монтажа приведен на рис. 56.

Испытание модели проводилось в два этапа: на стадии вантовой системы и на стадии оболочки (после замоноличивания плит покрытия).

Программой испытаний вантовой системы предусматривались три вида загрузки:

- равномерно распределенной постоянной и временной нагрузками (см. рис. 48, д);

- равномерно распределенной постоянной нагрузкой и временной, расположенной на одном секторе (см. рис. 48, ж);

- равномерно распределенной постоянной нагрузкой и временной по закону косинуса (см. рис. 48, з).

В процессе испытаний измерялись перемещения и деформации основных несущих конструкций.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние модели при действии равномерно распределенной постоянной и временной нагрузок.

Пространственная картина прогибов покрытия при нагружении его 7 ступенями нагрузки приведена на рис. 57. На рис. 57 начальная

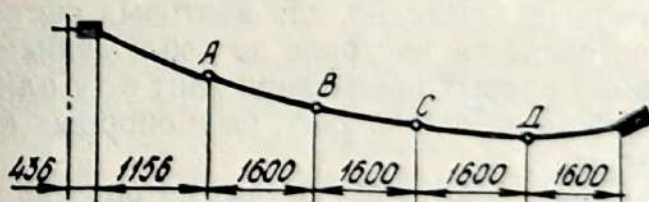
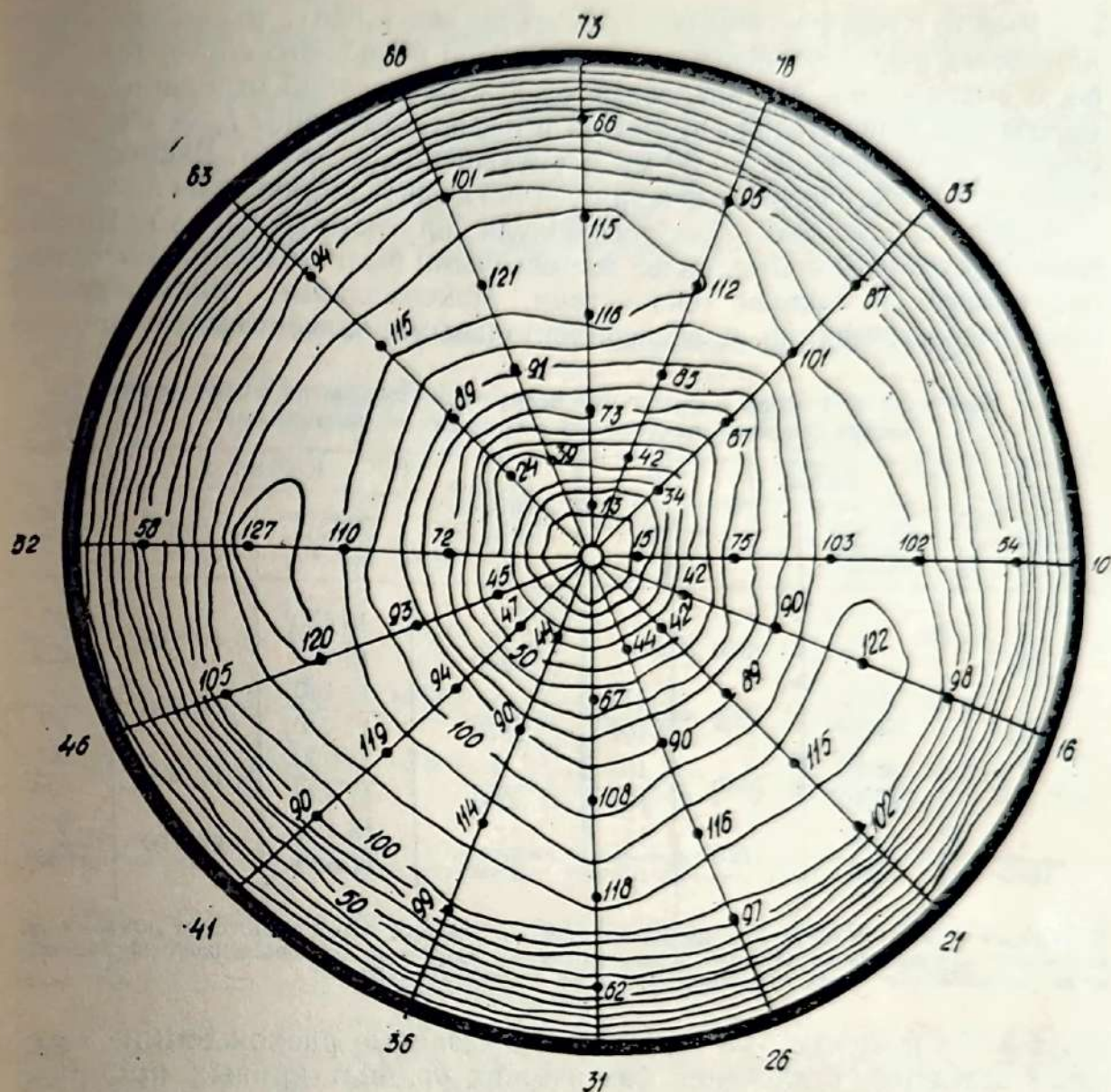


Рис. 57. Характер прогибов покрытия при действии равномерно распределенной постоянной и временной нагрузок.

поверхность покрытия принята за плоскость. Через точки, имеющие одинаковые прогибы, проведены горизонталы. Сечения горизонталей даны через 10 мм. Наиболее деформативной зоной покрытия является кольцевой участок, расположенный на расстоянии 3,2 м от наружного опорного контура. Максимальный прогиб вант от 7 ступеней загрузки (2930 Н/м²) составил $\frac{1}{67}$ пролета, а от временной нагрузки — $\frac{1}{275}$ пролета.

Результаты испытаний показали, что величины прогибов, полученные экспериментально, достаточно хорошо согласуются с теоретически-

ми. Вместе с тем, прогибы одних и тех же точек вант, расположенных на разных радиусах, колебались до 30 % и более. Это обстоятельство было вызвано тем, что начальные стрелы провисания отдельных вант колебались относительно принятой в расчете величины $f_1 = 394$ мм в сторону ее увеличения до 30 мм и уменьшения до 18 мм. Экспериментальные и теоретические значения усилий в вантах приведены в табл. 8.

Вследствие большого разброса модуля упругости троса, из которого были изготовлены ванты, более достоверными были значения распора, полученные по данным тензометрии. Максимальные расхождения между теоретическими и экспериментальными значениями распоров

Таблица 8. Распор в вантах при нагружении покрытия равномерно распределенной постоянной и временной нагрузками

Степень загружения нагрузка, H/m^2	Распор, Н		$\frac{T}{\Theta} \cdot 100$	Степень загружения нагрузка, H/m^2	Распор, Н		$\frac{T}{\Theta} \cdot 100$
	Экспериментальный (Э)	Теоретический (Т)			Экспериментальный (Э)	Теоретический (Т)	
0	—	3330	—	4	10 630		97
580				2250	10 130	10 310	102
1	4680		112	5	12 180		97
990	4930	5250	107	2670	11 930	11 850	99
2	6800		104	6	14 300		93
1410	6530	7040	108	3090	12 830	13 350	104
3	8640		101	7	16 180		92
1830	8280	8720	105	3510	14 530	14 810	102

Примечание. В числителе приведены значения распора, вычисленного по показаниям индикаторов, установленных на ванты, в знаменателе — тензорезисторов, наклеенных на динамометры, установленные между анкерными колодками и опорным контуром.

оказались в пределах $+8\%$, -1% . Указанные расхождения возникли вследствие отклонения фактических ординат кривых провисания вант от расчетных. Очевидно, для вантовых систем одним из важнейших вопросов является контроль за соблюдением геометрии вант. Отклонение ординат кривых провисания вант в ту или другую сторону сказывается на работе не только вант, но и опорных контуров, колонн и других элементов.

По мере загрузки вантовой системы на участке покрытия отрицательной кривизны начали возникать складки. Образование складок происходило вследствие уменьшения длины кольцевых швов при увеличении нагрузки.

Характер радиальных перемещений и относительных деформаций наружного опорного контура свидетельствует о том, что он обжимался равномерно. Правда, на первых ступенях загрузки наблюдалась некоторая разница в деформациях отдельных точек. С увеличением нагрузки разность в деформациях сгладилась. При полной расчетной нагрузке ($3510 H/m^2$) средние напряжения в бетоне были равны 7 МПа. Экспериментальные и теоретические значения нормальной силы в наружном опорном контуре на ступенях нагружения приведены в табл. 9.

Нормальная сила, полученная экспериментально, практически совпала с теоретической. Она была на 33 % меньше критической силы, вычисленной по формуле Леви.

При нагружении покрытия одновременно с изменением геометрии кривой провисания вант изменялся и угол наклона наружного опорного контура к горизонту. Более интенсивно опорный контур поворачивался на первых ступенях загрузки. Так, средний угол поворота опорного контура на 1-й ступени загрузки был равен $1'$, а на 7-й — $28''$.

Т а б л и ц а 9. Нормальная сила в наружном опорном контуре

Ступени загрузки нагрузка, Н/м ²	Нормальная сила, Н		$\frac{T}{\Theta} \cdot 100$	Ступени загрузки нагрузка, Н/м ²	Нормальная сила, Н		$\frac{T}{\Theta} \cdot 100$
	Экспери- менталь- ная (Э)	Теорети- ческая (Т)			Экспери- менталь- ная (Э)	Теорети- ческая (Т)	
0	—	4195	—	4	125 490	—	103
580	—	—	—	2250	127 600	129 870	102
1	64 080	66130	103	5	146 850	—	102
990	62 100	—	106	2670	150 280	149 270	99
2	77 430	88680	114	6	168 210	168 160	100
1410	82 260	—	107	3090	161 620	—	104
3	106 800	109840	103	7	186 900	186 560	100
1830	104 300	—	105	3510	183 030	—	102

Примечание. В числителе приведены значения нормальной силы, вычисленной по показаниям приборов, установленных на наружном опорном контуре, в знаменателе — на вантах.

При заданном очертании кривой провисания вант внутренняя опора воспринимала 65 %, а наружные колонны — 35 % нагрузки покрытия. Работали они, в основном, на сжатие.

Испытания модели на временную нагрузку, расположенную на одном секторе, проводились при равномерно распределенной постоянной нагрузке $q = 2670$ Н/м². Временная нагрузка прикладывалась к сектору с центральным углом $171^\circ 30'$ двумя ступенями по 420 Н/м² на ступени. Разгрузка покрытия производилась с противоположных сторон сектора с временной нагрузкой участками по 17° до $103^\circ 30'$.

При загрузке сектора с центральным углом $171^\circ 30'$ ванты получили прогибы разного знака: в загруженной части покрытия опустились, а в незагруженной — поднялись. Наибольшие прогибы получили ванты, расположенные в плоскости симметрии нагрузки. Максимальное опускание вант составило $4,7$ см, или $\frac{1}{170}$ пролета, а подъем — $1,87$ см, или $\frac{1}{480}$ пролета. Теоретические значения прогибов были соответственно равны $4,85$ и $1,75$ см.

Пространственная картина прогибов покрытия при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом $171^\circ 30'$, приведена на рис. 58.

С уменьшением центрального угла сектора с временной нагрузкой прогибы вант изменились: положительные (направленные вниз) увеличились, а отрицательные (направленные вверх) уменьшились. На

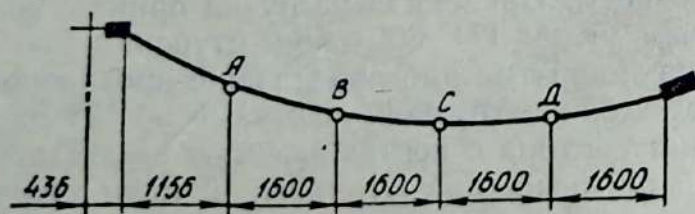
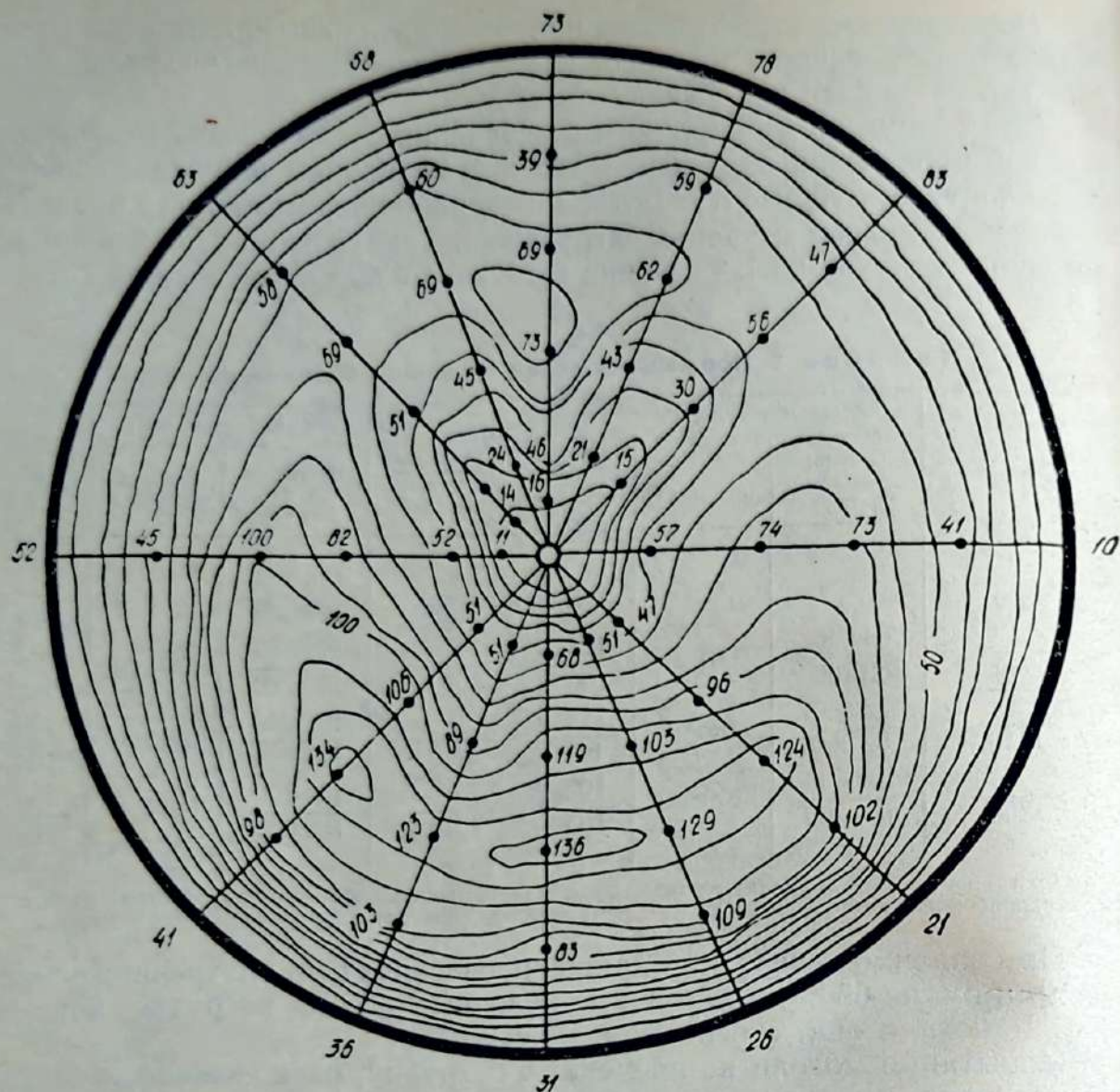


Рис. 58. Характер прогибов покрытия при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом $171^\circ 30'$.

величинах прогибов существенно сказались перемещения и деформации наружного опорного контура.

Экспериментальные и теоретические значения усилий в вантах при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом $171^\circ 30'$, приведены в табл. 10,

При нагружении покрытия временной нагрузкой, расположенной на секторе с центральным углом $171^\circ 30'$, наружный опорный контур стал заметно изменять свою форму — из круга начал превращаться

Таблица 10. Распор в вантах при нагружении покрытия временной нагрузкой, расположенной на секторе с центральным углом $171^{\circ}30'$

Ступени загружения нагрузка, H/m^2	Оси вант	Распор, H		$\frac{T}{\Sigma} \cdot 100$
		Эксперименталь- ный (Э)	Теоретический (Т)	
$\frac{6}{3090}$	10	12 400	12 650	101
		13 100		96
	30	13 400	13 250	99
		15 000		89
	46	12 200	12 650	103
		12 800		99
	73	11 750	11 870	101
		12 000		99
$\frac{7}{3510}$	10	12 800	13 450	105
		13 800		98
	30	14 500	14 550	100
		15 600		93
	46	12 100	13 450	113
		13 900		97
	73	12 700	11 920	94
		11 700		102

Примечание. В числителе приведены значения распора, вычисленного по показаниям индикаторов, установленных на вантах, в знаменателе — тензорезисторов, наклеенных на динамометры, установленные между анкерными колодками и опорным контуром.

в эллипс (рис. 59). С уменьшением сектора загрузки до $139^{\circ}30'$ перемещения контура возросли наружу здания на 46 %, а внутрь — на 137 %. При этом в ряде наружных колонн появились трещины с шириной раскрытия до 0,2 мм.

Характер углов поворота наружного опорного контура соответствовал изменению геометрии вант. В сечениях, расположенных вдоль сектора с временной нагрузкой, максимальный угол поворота контура возрос с $4'09''$ (угол поворота контура на 5-й ступени загрузки)

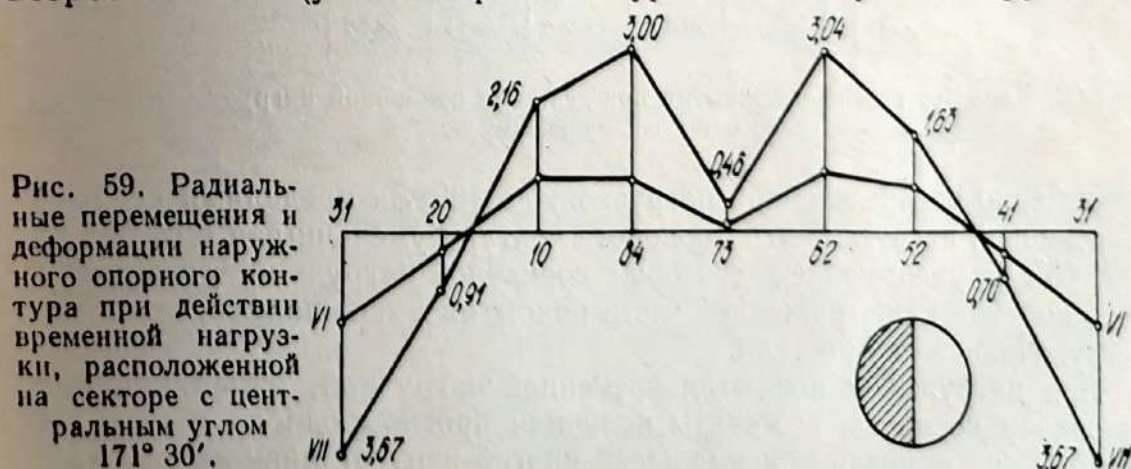


Рис. 59. Радиальные перемещения и деформации наружного опорного контура при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом $171^{\circ}30'$.

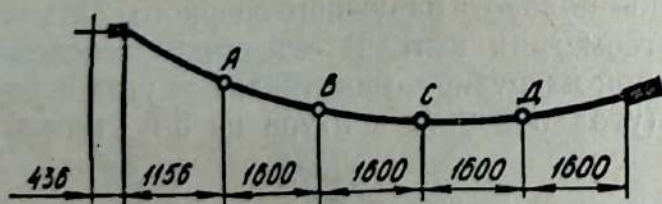
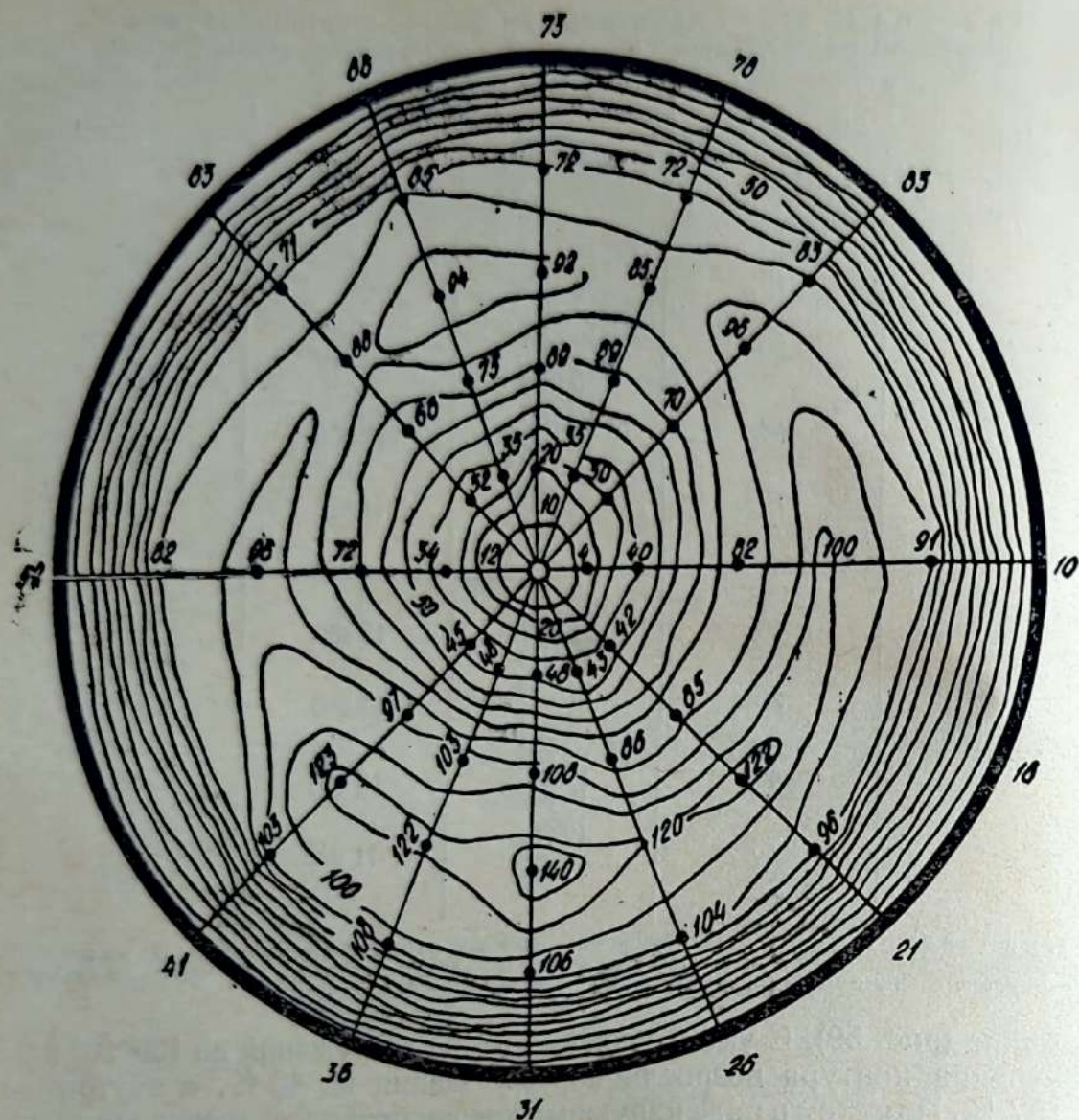


Рис. 60. Характер прогибов покрытия при действии временной нагрузки, изменяющейся по закону косинуса.

равномерно распределенной нагрузкой) до $16'$. За пределами сектора с временной нагрузкой угол поворота контура уменьшился с $4' 09''$ до $-7' 48''$. С уменьшением сектора с временной нагрузкой углы поворота контура на нагруженной части покрытия уменьшались, а на не-нагруженной — возрастали.

При нагружении покрытия временной нагрузкой, изменяющейся по закону косинуса, все ваны получили прогибы одного и того же знака. Если принять максимальный прогиб вант от равномерно рас-

пределенной постоянной и временной нагрузок за 100 %, то прогиб вант от нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом $171^\circ 30'$, был равен 119 %, а прогиб от нагрузки, изменяющейся по закону косинуса, — 124 %. Пространственная картина прогибов покрытия при нагружении его временной нагрузкой, изменяющейся по закону косинуса, приведена на рис. 60. Экспериментальные значения прогибов и усилий в вантах хорошо совпадали с теоретическими.

При разгрузке покрытия большинство вант не возвратилось в исходное положение. Величины остаточных прогибов колебались в довольно значительных пределах, причем более нагруженные ванты имели меньшие остаточные деформации, чем менее нагруженные.

Под действием неуравновешенного распора в вантах наружный опорный контур сместился в горизонтальной плоскости. Максимальные перемещения контура внутрь здания были равны 5,84 мм, а наружу — 1,29 мм. Деформации опорного контура были незначительными и носили, в основном, локальный характер. То же можно сказать и об изгибающих моментах.

Перемещение внутренней опоры было направлено вдоль оси симметрии нагрузки в сторону более нагруженной части покрытия и составило 0,535 см, т. е. в 1,5 раза было меньше, чем при действии временной нагрузки, расположенной на секторе с центральным углом $171^\circ 30'$. После съема временной нагрузки опора возвратилась в исходное состояние.

После превращения вантовой системы в оболочку (замоноличивания швов между плитами) существенно (в 4—6 раз) уменьшились прогибы покрытия. Что касается характера напряженно-деформированного состояния, то он остался таким же.

Как указывалось выше, в процессе строительства закрытой стоянки на 400 автобусов осуществлялся контроль за перемещениями и деформациями основных несущих конструкций. Сопоставление данных испытания модели с данными испытания натурной конструкции покрытия и теоретическими данными дало удовлетворительные результаты.

Глава III.

СТАТИКА ПОЛОГИХ УПРУГИХ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НИТЕЙ

Предпосылки расчета. В предлагаемой методике расчета пологих упругих нитей конечной жесткости использованы следующие предпосылки:

материал нити считается изотропным и линейно-упругим;
вследствие пологости нитей принимается техническая теория изгиба

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (1)$$

а точное выражение для определения длины дуги

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

заменяется приближенным

$$L = l + \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx, \quad (3)$$

полученным разложением в ряду Маклорена подинтегральной функции с удержанием двух первых членов этого ряда;

кривые провисания нитей, работающих без изгиба от начальной нагрузки, описываются уравнением параболы;

прогибы нитей считаются малыми, но конечными, а плечи поперечных нагрузок принимаются постоянными.

Расчет ведется по деформированной схеме. Статическая неопределенность раскрывается связью длин нити до и после приложения дополнительной нагрузки с упругим удлинением ее, вызванным этой нагрузкой.

Для большинства расчетных случаев замена точного выражения

$$M = -EI \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (4)$$

приближенным (1) вполне допустима: при $f/l = 1/20$ погрешность в решении составляет 4 %, при $f/l = 1/10$ — увеличивается до 16 %.

Замена точного выражения для определения длины нити (2) приближенным (3) вносит в расчет погрешность, не превышающую не-

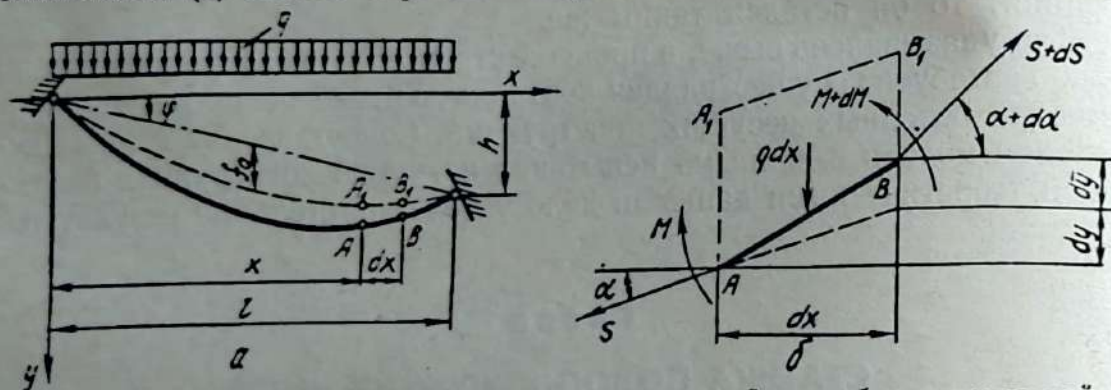


Рис. 61. К выводу уравнения изгиба нити, работающей с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок:

а — расчетная схема; б — элемент нити.

скольких процентов. Такого же порядка вносится погрешность при определении упругого удлинения нити ΔL , когда принимается, что величина распора H постоянна по ее длине. В целом использование принятых при выводе расчетных зависимостей предпосылок расчета вносит в расчет погрешность, величина которой не выходит за пределы точности наших сведений о реальных нагрузках.

Дифференциальные уравнения изгиба. Рассмотрим нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной и дополнительной нагрузки (рис. 61).

Записав уравнения равновесия ($\Sigma M = 0$, $\Sigma y = 0$) бесконечно малого отрезка нити и произведя ряд преобразований [32], получим следующее уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{EI}{H} \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{q}{H} = 0. \quad (5)$$

Обозначая

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = z; \quad \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}} = u,$$

получаем

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{4u^2}{l^2} z - \frac{4u^2}{l^2} \frac{q}{H} = 0. \quad (6)$$

Общий интеграл этого уравнения

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} = A \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + B \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{q}{H}.$$

Интегрируя дважды это уравнение, находим

$$y = \frac{l^2}{4u^2} A \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + \frac{l^2}{4u^2} B \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{qx^2}{2H} + C_3 x + C_4.$$

Заменяя

$$A \frac{l^2}{4u^2} = C_1; \quad B \frac{l^2}{4u^2} = C_2; \quad \frac{4u^2 EI}{l^2} = H,$$

получаем:

$$y = C_1 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_2 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_3 x + C_4 - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 EI}; \quad (7)$$

$$y' = C_1 \frac{2u}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_2 \frac{2u}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_3 - \frac{ql^2 x}{4u^2 EI} = \operatorname{tg} \alpha; \quad (8)$$

$$y'' = C_1 \left(\frac{2u}{l} \right)^2 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{2u}{l} \right)^2 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{ql^2}{4u^2 EI} = -\frac{M}{EI}; \quad (9)$$

$$y''' = C_1 \left(\frac{2u}{l} \right)^3 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{2u}{l} \right)^3 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} = -\frac{Q}{EI}. \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение изгиба нити может быть получено и другим путем. Так, поскольку введено допущение о применимости к нитям конечной жесткости технической теории изгиба $M = -\frac{d^2 y}{dx^2}$, то в статическом отношении нить отождествляется с растянуто-изогнутым стержнем.

В принятой системе координат (см. рис. 61) изгибающий момент в произвольном сечении нити $M = M^0 - Hy$,

а дифференциальное уравнение изгиба имеет вид $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M^0 + Hy$, где M^0 — момент от поперечной нагрузки (балочный момент).

Дифференцируя это уравнение дважды, после преобразований получаем (5).

Рассмотрим теперь нить конечной жесткости, работающую без изгиба от начальной нагрузки (рис. 62).

Выполнив операции, подобные изложенным выше, получим следующее уравнение

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} - \frac{EI}{H} \frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{q}{H} = 0. \quad (11)$$

Заменяя

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = z; \quad \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}} = u$$

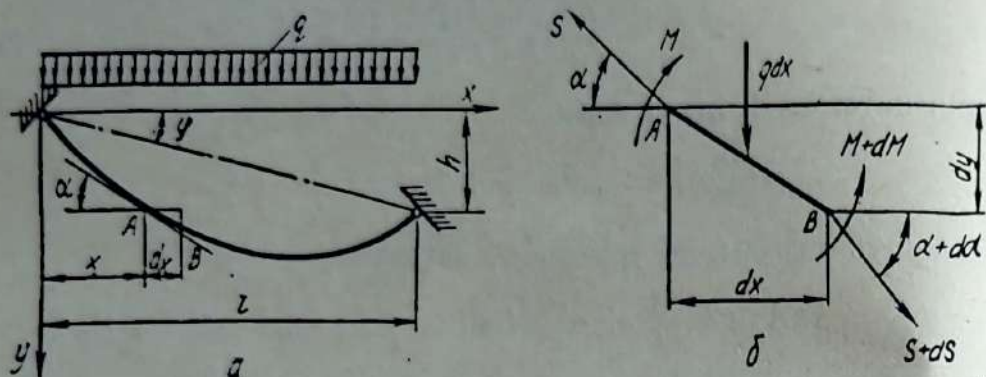


Рис. 62. К выводу уравнения изгиба нити, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузок:
а — расчетная схема; б — элемент нити.

и учитывая, что начальные ординаты оси нити при действии равномерно распределенной по всему пролету нагрузки q $y = \frac{4f_0 x (l-x)}{l^2} + x \frac{h}{l}$,

получаем
$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{4u^2}{l^2} z - \frac{4u^2}{l^2} \frac{q}{H} + \frac{4u}{l^2} \frac{8f_0}{l^2} = 0. \quad (12)$$

Общий интеграл этого уравнения

$$z = \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = A \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + B \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{q}{H} + \frac{8f_0}{l^2}.$$

Интегрируя дважды это уравнение и заменяя $A \frac{l^2}{4u^2} = C_1$; $B \frac{l^2}{4u^2} = C_2$; $\frac{4u^2 EI}{l^2} = H$, находим

$$\bar{y} = C_1 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_2 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_3 x + C_4 - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 EI} - \left[\frac{4f_0 x (l-x)}{l^2} + \frac{x}{l} h \right]; \quad (13)$$

$$\bar{y}' = C_1 \frac{2u}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_2 \frac{2u}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_3 - \frac{ql^2 x}{4u^2 EI} - \left[\frac{4f_0}{l} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) + \frac{h}{l} \right] = \operatorname{tg} \alpha; \quad (14)$$

$$\bar{y}'' = C_1 \left(\frac{2u}{l} \right)^2 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{2u}{l} \right)^2 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{ql^2}{4u^2 EI} + \frac{8j_0}{l^3} = -\frac{M}{EI}; \quad (15)$$

$$\bar{y}''' = C_1 \left(\frac{2u}{l} \right)^3 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{2u}{l} \right)^3 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} = -\frac{Q}{EI}. \quad (16)$$

§ 2. ДЕЙСТВИЕ НАЧАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим вначале нити, работающие с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Найдем расчетные зависимости для определения ординат упругой линии, углов наклона касательных к оси нити, изгибающих моментов и поперечных сил.

При шарнирном закреплении концов нити (рис. 63) условия для определения постоянных интегрирования следующие:

при $x = 0$ $y = 0$, $M = 0$; при $x = l$ $y = h$, $M = 0$.

Подставив в эти условия значения y и M из (7) и (9), получим следующие выражения постоянных интегрирования:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \frac{1}{u_0^4}; \quad (17)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0^4}; \quad (18)$$

$$C_3 = \frac{ql^3}{8EI} \frac{1}{u_0^2} + \frac{h}{l}; \quad (19)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (20)$$

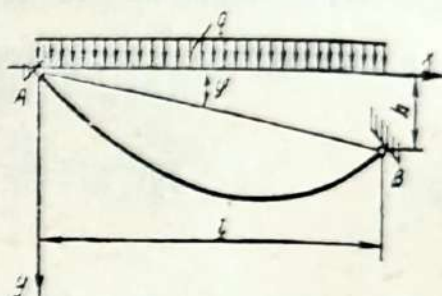


Рис. 63. К расчету нити на начальную нагрузку при шарнирном закреплении концов.

Подставив (17) — (20) в общие уравнения (7) — (10), получим следующие расчетные формулы:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u_0^4} \left[u_0^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{sh} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u_0} \right]; \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u_0^3} \left[u_0 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\operatorname{th} u_0}{2} - \frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{ch} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u_0} \right]; \quad (22)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u_0^2} \frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{sh} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u_0}; \quad (23)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u_0} \left[\frac{\operatorname{th} u_0}{2} - \frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{ch} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u_0} \right]. \quad (24)$$

Здесь и далее $\xi = \frac{x}{l}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{l}$. Параметры с индексом „0” характеризуют напряженно-деформированное состояние нити при действии начальной нагрузки.

В формулы (21) — (24) входит неизвестный параметр u_0 . Для определения его воспользуемся выражениями для вычисления изгибающего момента в середине пролета нити, найденными из условия равновесия и из (23).

Разложим опорные реакции на вертикальные составляющие и составляющие, направленные вдоль линии, соединяющей опоры (см. рис. 63). Первые из них будут равны реакциям простой балки с опорами на одном уровне $R_A^0 = R_B^0 = \frac{ql}{2}$.

Изгибающий момент в середине пролета нити

$$M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{8} - H_0 f_0, \text{ или } M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{8} - \frac{4u_0^2 EI}{l^2} f_0. \quad (25)$$

Из формулы (23) этот же момент будет

$$M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{4u_0^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u_0} \right). \quad (26)$$

Приравнивая правые части выражений (25) и (26) и умножая все члены на $\frac{96}{5ql^2 u_0^2}$, получаем

$$\frac{384EI f_0}{5ql^4} = \frac{24}{5} \left[\frac{1}{2u_0^2} - \frac{1}{u_0^4} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u_0} \right) \right],$$

$$\text{или } \Phi = \frac{384EI f_0}{5ql^4} = \frac{-\frac{u_0^2}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_0}}{\frac{5}{24} u_0^4}. \quad (27)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой отношение стрелы провисания нити к прогибу балки такого же пролета, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q . Если этот прогиб будет равен стреле провисания, то распор H_0 будет равен нулю, а правая часть выражения (27) — единице.

Действительно, учитывая, что

$$u_0 = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H_0}{EI}}, \text{ получаем } \lim_{u_0 \rightarrow 0} \frac{-\frac{u_0^2}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_0}}{\frac{5}{24} u_0^4} = 1.$$

Таким образом, расчет нити конечной жесткости при действии начальной нагрузки сводится к вычислению левой части уравнения (27), куда входят все известные величины, и отысканию параметра u_0 , соответствующего этому значению.

Анализ формулы (27) позволяет сделать следующие выводы: если $\Phi < 1$, то рассматриваемая конструкция представляет собой нить; если $\Phi = 1$, — балку, прогиб которой от заданной равномерно распределенной нагрузки равен f_0 ; если $\Phi > 1$, — перевернутую арку.

В этом случае для получения стрелы провисания f_0 к стержню необходимо приложить продольное сжимающее усилие.

Напряженно-деформированное состояние нити в произвольном сечении может быть получено подстановкой параметра u_0 в уравнения (7) — (10).

Опорные реакции вычисляются по формулам:

$$R_A = \frac{ql}{2} + H_0 \operatorname{tg} \varphi; \quad R_B = \frac{ql}{2} - H_0 \operatorname{tg} \varphi.$$

Максимальное осевое усилие в нити на опоре A будет $S_0 = \sqrt{H_0^2 + R_A^2}$.

В рассматриваемой задаче возможны два частных случая: когда опоры расположены на одном уровне и когда угол между касательной к оси нити и горизонтом на опоре B равен нулю.

Первый случай отличается от общего лишь тем, что в расчетных формулах следует положить h и $\operatorname{tg} \varphi$ равными нулю.

Для второго случая характерно то, что при заданном превышении одной опоры над другой стрела провисания нити остается неизвестной. В этом случае определить параметр u_0 из уравнения (27) не представляется возможным.

Для определения параметра u_0 обратимся к выражению (8). Учитывая, что при $\xi = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = 0$, получим уравнение

$$\Phi_1 = \frac{24EIh}{ql^4} = \frac{3}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right). \quad (28)$$

Из уравнения (28) определяется параметр u_0 . Дальнейший ход расчета нити не отличается от изложенного ранее.

При $u_0 \rightarrow 0$

$$\lim_{u_0 \rightarrow 0} \frac{3}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) = 1.$$

В случае жесткого закрепления концов нити (рис. 64) условия для определения постоянных интегрирования будут следующими:

при $x = 0$ $y = 0$, $y' = 0$; при $x = l$ $y = h$, $y' = 0$.

Подставляя в эти условия значения y и y' из (7) и (8), получаем следующие выражения постоянных интегрирования:

$$C_1 = \frac{h}{2} \frac{\operatorname{sh} u_0}{u_0 \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0} + \frac{ql^4}{16EI} \frac{1}{u_0^3 \operatorname{th} u_0}; \quad (29)$$

$$C_2 = -\frac{h}{2} \frac{\operatorname{ch} u_0}{u_0 \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0} - \frac{ql^4}{16EI} \frac{1}{u_0^3}; \quad (30)$$

$$C_3 = \frac{h}{2} \frac{u_0 \operatorname{ch} u_0}{u_0 \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0} + \frac{ql^3}{8EI} \frac{1}{u_0^2}; \quad (31)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (32)$$

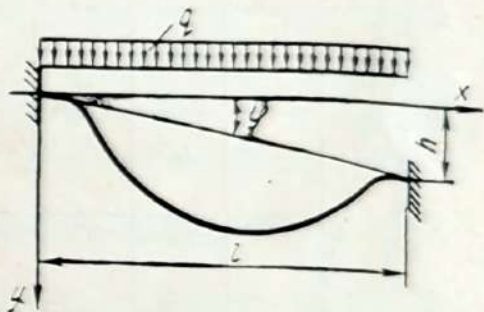


Рис. 64. К расчету нити на начальную нагрузку при жестком закреплении концов.

Расчетные формулы будут иметь вид:

$$y = \frac{ql^4}{384EI} \frac{48}{u_0^4} \left[u_0^2 \xi (1 - \xi) - u_0 \frac{\text{sh } u_0 \xi \text{ sh } u_0 (1 - \xi)}{\text{sh } u_0} + \right. \\ \left. + \frac{8hEI}{ql^4} u_0^4 \frac{u_0 \xi \text{ ch } u_0 - \text{sh } u_0 \xi \text{ ch } u_0 (1 - \xi)}{u_0 \text{ ch } u_0 - \text{sh } u_0} \right]; \quad (33)$$

$$\text{tg } \alpha = - \frac{ql^3}{128EI} \frac{32}{u_0^3} \left[u_0 \xi - u_0 \frac{\text{sh } u_0 \xi \text{ ch } u_0 (1 - \xi)}{\text{ch } u_0} - \right. \\ \left. - \frac{8hEI}{ql^4} u_0^4 \frac{\text{sh } u_0 \xi \text{ sh } u_0 (1 - \xi)}{u_0 \text{ ch } u_0 - \text{sh } u_0} \right]; \quad (34)$$

$$M = \frac{ql^2}{12} \frac{6}{u_0^2} \left\{ \frac{1}{2} - u_0 \left[\frac{1}{2 \text{ th } u_0} - \frac{\text{sh } u_0 \xi \text{ sh } u_0 (1 - \xi)}{\text{sh } u_0} \right] - \right. \\ \left. - \frac{4hEI}{ql^4} u_0^4 \frac{\text{sh } u_0 - 2 \text{ sh } u_0 \xi \text{ ch } u_0 (1 - \xi)}{u_0 \text{ ch } u_0 - \text{sh } u_0} \right\}; \quad (35)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u_0 \xi \text{ ch } u_0 (1 - \xi)}{\text{sh } u_0} + \right. \\ \left. + \frac{4hEI}{ql^4} u_0^3 \frac{\text{ch } u_0 - 2 \text{ sh } u_0 \xi \text{ ch } u_0 (1 - \xi)}{u_0 \text{ ch } u_0 - \text{sh } u_0} \right]. \quad (36)$$

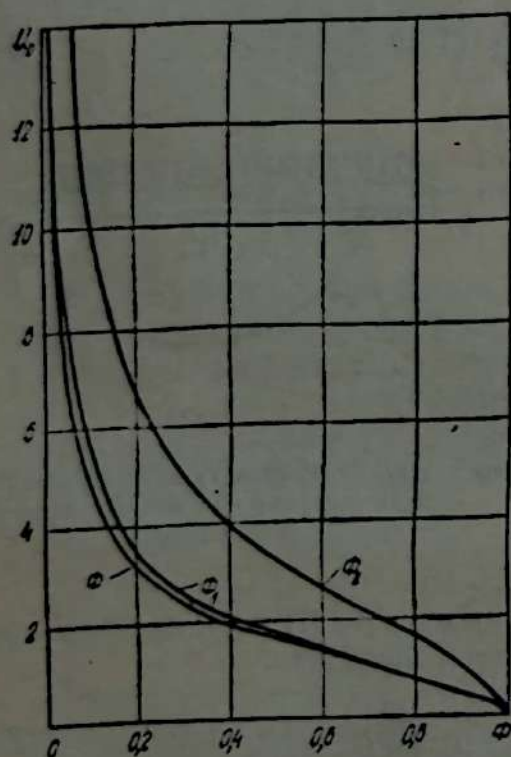


Рис. 65. График зависимости $u_0 = f(\Phi)$.

Входящий в эти формулы параметр u_0 может быть определен из условия, что в середине пролета $y = \frac{h}{2} + f_0$.

Подставляя в это условие значение y из (33), после преобразований находим

$$\Phi_2 = \frac{384EI f_0}{ql^4} = \\ = 24 \left(\frac{1}{2u_0^2} - \frac{\text{ch } u_0 - 1}{u_0^3 \text{ sh } u_0} \right). \quad (37)$$

В предельном состоянии $\lim_{u_0 \rightarrow 0} 24 \left(\frac{1}{2u_0^2} - \frac{\text{ch } u_0 - 1}{u_0^3 \text{ sh } u_0} \right) = 1$.

На рис. 65 приведены кривые зависимостей параметра u_0 от левой части уравнений (27), (28) и (37).

Отметим, что уравнения (27) и (37) тождественны найденным ранее значениям функций для расчета растянуто-изогнутых стержней и пластинок [5, 6, 27]. Поэтому для определения параметра u_0 можно воспользоваться таблицами и графиками, приведенными в указанных работах.

Результаты исследования показывают, что при жестком закреплении концов в поперечных сечениях нити возникают, как правило, боль-

шие напряжения от изгиба. Поэтому такие закрепления практически не применяются. Если же по тем или иным причинам избежать их нельзя, то для уменьшения напряжений от изгиба следует уменьшать стрелу провисания.

Считают, что если нить сплошного сечения заменить отдельными проволоками, имеющими суммарное сечение, равное сечению нити, то можно достичь существенного снижения изгибных напряжений. Проведенные нами исследования показали, что при замене нити сплошного сечения четырьмя проволоками, имеющими то же сечение, что и нить, напряжения от изгиба уменьшаются в них на 9 %, а при замене нити 100 проволоками — на 14 %. Это объясняется тем, что при замене нити сплошного сечения проволоками меньшего диаметра кривизна и момент сопротивления проволок меняются таким образом, что напряжения от изгиба уменьшаются незначительно.

При решении этой задачи были допущены и ошибки. Так, в результате неверной предпосылки о том что $H_n = H/n$, В. К. Качурин [13] пришел к выводу, что напряжения от изгиба при этом не меняются. Здесь H и H_n — распор соответственно в нити и в проволоке; n — число проволок.

Для доказательства этого утверждения подставим в уравнение (37) значения $q = \frac{\pi d^4}{4} \gamma$ и $I = \frac{\pi d^4}{64}$, где γ — объемный вес материала нити.

$$\text{В результате будем иметь } \frac{E f_0 d^2}{\gamma l^4} = \left(\frac{1}{2u_0^2} - \frac{\operatorname{ch} u_0 - 1}{u_0^3 \operatorname{sh} u_0} \right).$$

Левая часть этого уравнения связана с диаметром стержня квадратичной зависимостью, в то время как правая связана с распором (параметром u) более сложной зависимостью. Следовательно, $H_n \neq H/n$.

§ 3. ДЕЙСТВИЕ НАЧАЛЬНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ НАГРУЗОК

Если к нити, несущей начальную нагрузку, приложить дополнительную, то одновременно с изменением величины нагрузки изменится и величина стрелы провисания. При этом для определения параметра u потребуется дополнительное условие.

Воспользуемся условием неразрывности деформаций

$$L = L_0 + \Delta L, \quad (38)$$

где L — длина нити после приложения дополнительной нагрузки; L_0 — длина нити при начальной нагрузке; ΔL — упругое приращение длины нити, вызванное дополнительной нагрузкой.

С достаточной точностью упругое приращение длины нити может быть вычислено по формуле

$$\Delta L = \int_l \frac{H - H_0}{EF \cos^2 \varphi} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx,$$

где H и H_0 — распор в нити соответственно при суммарной и начальной нагрузках; EF — жесткость нити на растяжение; φ — угол наклона линии, соединяющей опоры, к горизонту.

Пренебрегая величиной $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ввиду ее малости по сравнению с единицей, получаем

$$\Delta L = \frac{(H - H_0) l}{EF \cos^2 \varphi}. \quad (39)$$

Выражая H и H_0 через параметры u и u_0 , получаем

$$\Delta L = \frac{4l}{lF \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2),$$

или

$$\Delta L = \frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2), \quad (40)$$

где r — радиус инерции сечения нити.

Длина нити определяется по формуле (3). Интеграл, входящий в эту формулу, берется по участкам. Количество участков определяется характером дополнительной нагрузки. Так, при одной сосредоточенной силе будет два участка — слева и справа от точки приложения силы; для равномерной нагрузки, распределенной на части пролета, — три участка: один в пределах дополнительной нагрузки и два — слева и справа от нее.

На каждом участке вычисляются четыре постоянных интегрирования, условия для получения которых принимаются в зависимости от типа закрепления концов нити на опорах и характера дополнительной нагрузки.

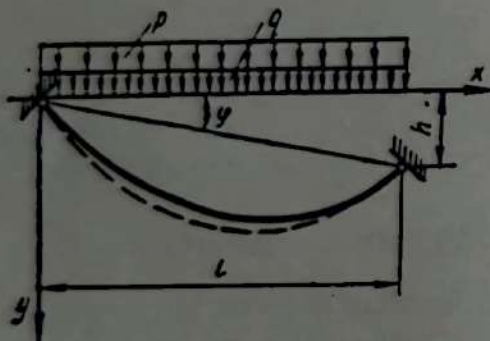


Рис. 66. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенные нагрузки при шарнирном закреплении концов.

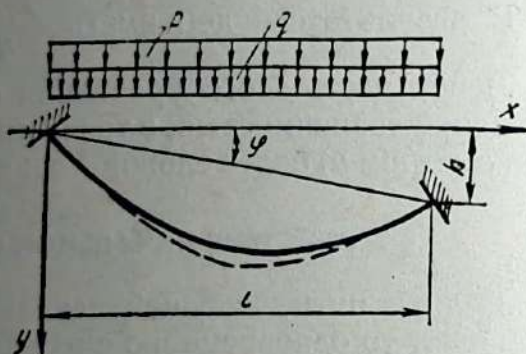


Рис. 67. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенные нагрузки, расположенные по всему пролету, при жестком закреплении концов перед приложением дополнительной нагрузки.

нагрузки. Определение ординат упругой линии, углов наклона касательных к оси нити, изгибающих моментов и поперечных сил в произвольных сечениях нити производится по формулам (7) — (10), в которые подставляются соответствующие значения постоянных интегрирования.

Подставляя значения длин нити в выражение (38), после преобразований получаем уравнения для определения параметра u .

Ниже для наиболее часто встречающихся на практике схем загрузки приведены формулы для расчета нитей при шарнирном и жестком закреплении концов на опорах.

Нагрузка, равномерно распределенная по всему пролету.

А. Шарнирное закрепление концов нити (рис. 66).

Расчетные формулы:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{(q+p)l^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right]; \quad (41)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p)l^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\text{th } u}{2} + \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right]; \quad (42)$$

$$M = \frac{(q+p)l^2}{8} \frac{4}{u^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u}; \quad (43)$$

$$Q = \frac{(q+p)l}{2} \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right]. \quad (44)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{u_0^4} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\text{th } u_0}{u_0} \right)^2 - \frac{5}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right], \quad (45)$$

где $\lambda = \frac{r}{f_0}$.

Б. Жесткое закрепление концов нити перед приложением дополнительной нагрузки (рис. 67).

Расчетные формулы:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{(q+p)l^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2 \xi (1 - \xi) - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right] \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{sh } u} \right\}; \quad (46)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p)l^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \frac{u^2}{u_0^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{sh } u} \right] \right\}; \quad (47)$$

$$M = \frac{(q+p)l^2}{8} \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2 \text{th } u} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{sh } u} \right\}; \quad (48)$$

$$Q = \frac{(q+p)l}{2} \frac{2}{u} \left\{ u \left[1 - \frac{q}{q+p} \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{sh } u} \right] \right\}. \quad (49)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\left(\frac{q+p}{q} \right) \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \frac{q+p}{q} \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right] \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\text{th }^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \times \right. \\
 & \times \left. \left(1 + 2 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{1}{\text{th }^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \\
 & - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{u_0^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u_0}{u_0} \right)^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{5}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right]. \quad (50)
 \end{aligned}$$

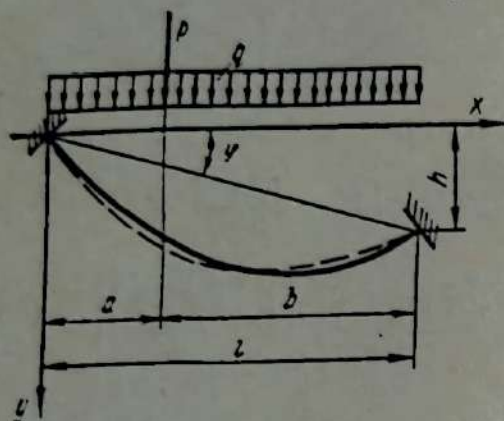


Рис. 68. К расчету нити на начальную равномерно распределенную нагрузку и дополнительную сосредоточенную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при шарнирном закреплении концов.

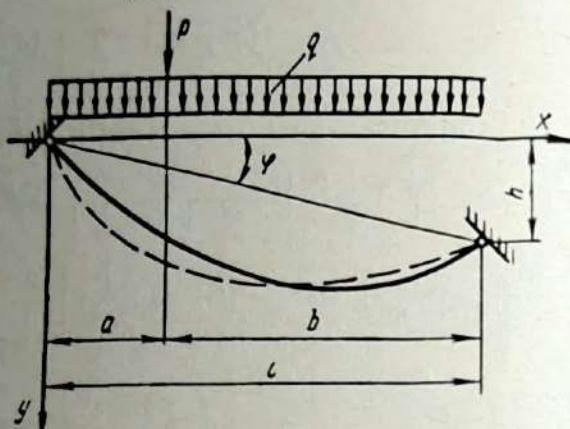


Рис. 69. К расчету нити на начальную равномерно распределенную нагрузку и дополнительную сосредоточенную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при жестком закреплении концов перед приложением дополнительной нагрузки.

Сосредоточенная нагрузка.

А. Шарнирное закрепление концов нити (рис. 68).

Расчетные формулы:

на участке 0 — a:

$$\begin{aligned}
 y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + \\
 + \frac{pl^3}{48EI} \frac{6}{u^3} \left(2u \frac{b}{l} \xi - \frac{\text{sh } u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u\xi \right); \quad (51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + \\
 + \frac{pl^3}{16EI} \frac{4}{u^3} \left(\frac{b}{l} - \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u\xi \right); \quad (52)
 \end{aligned}$$

$$M = \frac{ql^3}{8} \frac{4}{u^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} + \frac{Pl}{4} \frac{2}{u} \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u\xi; \quad (53)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + P \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u\xi; \quad (54)$$

на участке $a - l$:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] +$$

$$+ \frac{Pl^3}{48EI} \frac{6}{u^3} \left[2u \frac{a}{l} (1 - \xi) - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u (1 - \xi) \right]; \quad (55)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u \xi \text{ ch } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] -$$

$$- \frac{Pl^2}{16EI} \frac{4}{u^2} \left[\frac{a}{l} - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u (1 - \xi) \right]; \quad (56)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u^2} \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} + \frac{Pl}{4} \frac{2}{u} \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u (1 - \xi); \quad (57)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u \xi \text{ ch } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] - P \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u (1 - \xi). \quad (58)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \frac{b}{l} + \right.$$

$$+ \frac{\text{th } u}{u} \frac{\frac{a}{l} \text{sh } 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} - \frac{2}{u^2} \left(1 - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} + \text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \right) \left. \right] +$$

$$+ \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \frac{2}{u^4} \left[2 \left(2 \frac{a}{l} \frac{b}{l} + \frac{\frac{a}{l} \text{sh}^2 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh}^2 2u \frac{a}{l}}{\text{sh}^2 2u} \right) - \right.$$

$$- \frac{3}{u} \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} \text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \left. \right] - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) =$$

$$= \frac{1}{u_0^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u_0}{u_0} \right)^2 - \frac{5}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right]. \quad (59)$$

Б. Жесткое закрепление концов нити перед приложением дополнительной нагрузки (рис. 69).

Расчетные формулы:

на участке $0 - a$:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2 \xi (1 - \xi) - u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_0}{u_0} \right) \right] \times \right.$$

$$\times \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1 - \xi)}{\text{sh } u} \left. \right\} + \frac{Pl^3}{192EI} \frac{48}{u^3} \left\{ u \xi \frac{\frac{b}{l} \text{ch } u - \text{sh } u \frac{b}{l} \text{ch } u \frac{a}{l}}{u \text{ch } u - \text{sh } u} - \right.$$

$$- \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{ch} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \\ \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \Bigg\}; \quad (60)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \right\} \times \\ \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) + \frac{Pl^3}{16EI} \frac{8}{u^2} \left[\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (61)$$

$$M = \frac{ql^3}{8} \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \frac{Pl}{8} \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (62)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u} u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + 2P \left\{ - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{2 \operatorname{sh} u} - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (63)$$

на участке $a - l$:

$$y = h_0^2 + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2 \xi (1 - \xi) - u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \right\} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} + \frac{Pl^3}{192EI} \frac{48}{u^3} \left[u \frac{a}{l} - \right.$$

$$- u \xi \frac{u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \Bigg]; \quad (64)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \Bigg\} + \frac{Pl^2}{16EI} \frac{8}{u^2} \left[\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (65)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \Bigg\} + \frac{Pl^2}{8} \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right.$$

$$\times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \Bigg\}; \quad (66)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u} u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] -$$

$$- 2P \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}. \quad (67)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - 2 \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \times$$

$$\times \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right]^2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \left\{ \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \frac{b}{l} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \frac{3}{u} \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right] - \right. \\
& \quad \left. - 2 \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \frac{2}{u^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{sh} u} \right] \right\} + \\
& \quad + \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \frac{4}{u^2} \left\{ - \left(\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right)^2 \times \right. \\
& \quad \times \left(1 + \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{1}{u} \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times \\
& \quad \times \left[\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{\operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} - 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} + 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2 u} + 2 \left(\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right)^2 \right] - \\
& \quad \left. - \frac{3}{u^3} \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right\} - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \\
& \quad = \frac{1}{u_0^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right)^2 - \frac{5}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right]. \quad (68)
\end{aligned}$$

Для других схем нагружения и иных граничных условий (когда углы наклона касательных к оси нити на обеих опорах равны нулю) расчетные формулы приведены в работах [6, 32, 33].

Результаты исследований показывают, что при жестком закреплении концов нити перед приложением начальной нагрузки внешние воздействия вызывают в опорных сечениях очень большие напряжения от изгиба. Поэтому применять такие закрепления не рекомендуется.

§ 4. РАСЧЕТ НИТИ С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

Предположим, что при действии на нить дополнительной нагрузки p (рис. 70) концы ее поворачиваются на угол, пропорциональный значению изгибающего момента на этих концах. В этом случае действующие на нить силы будут такого же типа, что и при жестком закреплении. Однако условия на концах нити, из которых определяются постоянные интегрирования, будут уже иными, а именно:

при $x = 0$ $y = 0$, $y' = y_0 - \alpha_A M_A$; при $x = l$ $y = h$, $y' = y'_0 + \alpha_B M_B$.

Подставив в эти условия значения y и y' из (7) и (8), получим следующие значения постоянных интегрирования:

$$C_1 = \frac{(q+p)l^4}{16EI} \frac{1}{u \operatorname{th} u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{q}{q+p} \frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] +$$

$$+ \frac{l}{2u} \left[\alpha_A M_A \frac{1}{\operatorname{th} u} + \frac{\alpha_A M_A - \alpha_B M_B}{2} \left(\frac{\operatorname{th}^2 u}{u - \operatorname{th} u} - \frac{1}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \right) \right]; \quad (69)$$

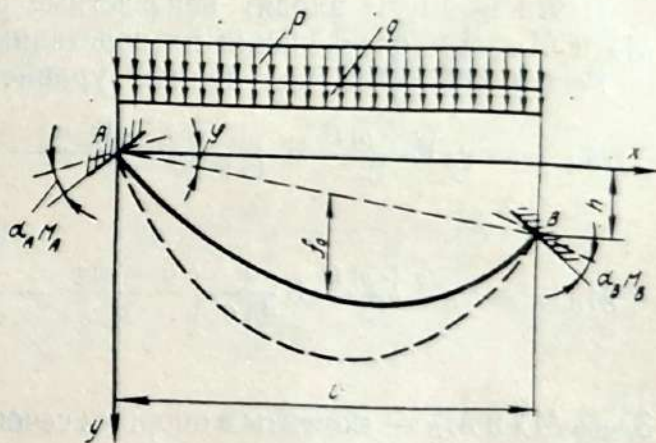
$$C_2 = -\frac{(q+p)l^4}{16EI} \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{q}{q+p} \frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] -$$

$$- \frac{l}{2u} \left[\alpha_A M_A + \frac{\alpha_A M_A - \alpha_B M_B}{2} \frac{\operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \right]; \quad (70)$$

$$C_3 = \frac{(q+p)l^3}{8EI} \frac{1}{u^2} + \frac{h}{l} + \frac{\alpha_A M_A - \alpha_B M_B}{2} \frac{\operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u}; \quad (71)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (72)$$

Рис. 70. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенные нагрузки, расположенные по всему пролету, с упруго закрепленными концами.



Здесь M_A и M_B — изгибающие моменты на концах деформированной нити; α_A и α_B — коэффициенты, зависящие от жесткости закрепления концов нити соответственно на опоре A и B.

Расчетные формулы для определения y , $\operatorname{tg} \alpha$, M и Q имеют вид:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{(q+p)l^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2 \xi (1 - \xi) - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \frac{u^2}{u_0^2} \times \right. \right.$$

$$\times \left. \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right\} - \frac{l}{2u} \left\{ 2\alpha_A M_A \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$- \alpha_A M_A - \alpha_B M_B \left[\frac{\operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \left(u \xi - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u} \right) - \frac{\operatorname{sh}^2 u \xi}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \right] \right\}; \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{(q+p) l^3}{24 E I} \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \frac{u^2}{u_0^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right\} - \\ - 2 \alpha_A M_A \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - (\alpha_A M_A - \alpha_B M_B) \times \\ \times \left[\frac{\operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \right]; \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} M = \frac{(q+p) l^2}{8} \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right\} - \frac{2 u E I}{l} \left\{ 2 \alpha_A M_A \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \right. \\ \left. + (\alpha_A M_A - \alpha_B M_B) \left[\frac{\operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \left(\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\operatorname{sh}^2 u \xi}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} + \frac{1}{2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} Q = \frac{(q+p) l}{2} \frac{2}{u} \left\{ u \left[1 - \frac{q}{q+p} \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \frac{4 u^2 E I}{l^2} \left\{ 2 \alpha_A M_A \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \right. \\ \left. + (\alpha_A M_A - \alpha_B M_B) \left[\frac{\operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u} \right) + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

В эти формулы входят неизвестные значения опорных моментов M_A и M_B . Для определения их подставим в (75) $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Решая совместно полученные уравнения, найдем:

$$M_A = -\gamma_A \frac{(q+p) l^2}{12} 3 \frac{u}{\operatorname{th} u} \left(\frac{u - \operatorname{th} u}{u^3} - \frac{q}{q+p} \frac{u_0 - \operatorname{th} u_0}{u_0^3} \right) = \gamma_A M_A^{\text{жк}}; \quad (77)$$

$$M_B = -\gamma_B \frac{(q+p) l^2}{12} 3 \frac{u}{\operatorname{th} u} \left(\frac{u - \operatorname{th} u}{u} - \frac{q}{q+p} \frac{u_0 - \operatorname{th} u_0}{u_0^3} \right) = \gamma_B M_B^{\text{жк}}. \quad (78)$$

Здесь $M_A^{\text{жк}}$ и $M_B^{\text{жк}}$ — моменты в опорных сечениях при абсолютно жестком закреплении концов нити; γ_A и γ_B — численные коэффициенты, меньшие единицы, определяемые из формул:

$$\begin{aligned} \gamma_A = \frac{2 \left(1 + \alpha_B \frac{2 E I}{l} \frac{u^2 \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \right)}{\left(1 + \alpha_A \frac{2 E I}{l} \frac{u}{\operatorname{th} u} \right) \left(1 + \alpha_B \frac{2 E I}{l} \frac{u^2 \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \right) +} \\ + \left(1 + \alpha_B \frac{2 E I}{l} \frac{u}{\operatorname{th} u} \right) \left(1 + \alpha_A \frac{2 E I}{l} \frac{u^2 \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \right); \end{aligned} \quad (79)$$

$$\gamma_B = \frac{2 \left(1 + \alpha_A \frac{2EI}{l} \frac{u^2 \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \right)}{\left(1 + \alpha_A \frac{2EI}{l} \frac{u}{\operatorname{th} u} \right) \left(1 + \alpha_B \frac{2EI}{l} \frac{u^2 \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \right) + \left(1 + \alpha_B \frac{2EI}{l} \frac{u}{\operatorname{th} u} \right) \left(1 + \alpha_A \frac{2EI}{l} \frac{u^2 \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} \right)} \quad (80)$$

Из формул (77) — (80) видно, что моменты M_A и M_B на концах нити зависят от величины коэффициентов α_A и α_B , характеризующих степень жесткости закрепления. Если эти коэффициенты будут весьма малы, то коэффициенты γ_A и γ_B будут приближаться к единице, а опорные моменты M_A и M_B — к значениям моментов, вычисленным для абсолютно жесткого закрепления нити на опорах. Если значения α_A и α_B будут велики, то коэффициенты γ_A и γ_B и моменты M_A и M_B будут малы и условия на концах нити будут приближаться к условиям шарнирного закрепления.

Уравнение для определения параметра u будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - 2 \frac{q+p}{q} \times \\ & \times \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \frac{q+p}{l} \frac{5}{24} \Phi n \frac{\alpha_A M_A + \alpha_B M_B}{2} \left[\frac{1}{u^3} \left(\operatorname{th} u - 3 \frac{u - \operatorname{th} u}{u \operatorname{th} u} \right) + \right. \\ & + \left. \left(\frac{u - \operatorname{th} u}{u^3} - \frac{q}{q+p} \frac{u_0 - \operatorname{th} u_0}{u_0^3} \right) \left(1 - \frac{u - \operatorname{th} u}{u \operatorname{th}^2 u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{5}{48} \Phi n \right)^2 \left\{ \alpha_A M_A \alpha_B M_B \left(1 - \frac{u - \operatorname{th} u}{u \operatorname{th}^2 u} \right) - \left(\frac{\alpha_A M_A - \alpha_B M_B}{2} \right)^2 \times \right. \\ & \times \left[\left(\frac{u \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} - \frac{1}{\operatorname{th} u} \right)^2 - \frac{1}{u} \left(\frac{u \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} + \frac{1}{\operatorname{th} u} \right) \right] \right\} - \\ & - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{u_0^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right)^2 - \frac{5}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (81)$$

где $n = \frac{l}{f_0}$.

Последовательность расчета нити с упруго закрепленными концами следующая. При заданных исходных данных вычисляется правая часть уравнения (81). Затем из уравнений (45) и (50) определяются значения параметра u при шарнирном и жестком закреплении концов нити. Нить с упруго закрепленными концами должна иметь промежуточное значение параметра u . Приняв для u некоторое такое промежуточное значение, определяем коэффициенты γ_A и γ_B и моменты M_A и M_B . Подставляя их значения в уравнение (81), вычисляем его левую

часть. В общем случае она будет несколько отличаться от ранее вычисленного значения правой части уравнения (81), и поэтому следует произвести повторный пробный подсчет с новым значением параметра u . Обычно двух-трех пробных подсчетов и применения интерполяции бывает достаточно для вычисления параметра u , удовлетворяющего уравнению (81).

§ 5. РАСЧЕТ НИТИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ШАРНИРАМИ

Если в нити от начальной нагрузки возникают значительные напряжения от изгиба, то их можно уменьшить, если поставить в отдельных сечениях нити временные (на период монтажа) шарниры.

Рассмотрим решение задачи, когда нить имеет один временный шарнир, расположенный в середине пролета (рис. 71). Распор в нити конечной жесткости благодаря наличию шарнира можно определить по формулам, выведенным для абсолютно гибкой нити

$$H_0 = \frac{ql^2}{8f_0}.$$

Параметр u_0 будет равен $u_0 = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{ql^2}{8f_0 EI}}$.

В точке C нить разбивается шарниром на два участка AC и CB . Запишем для каждого из них расчетные формулы. Для этого вычислим значения постоянных интегрирования. Условия для их определения следующие:

на участке AC :

при $x = 0$ $y = 0$, $M = 0$;

при $x = \frac{l}{2}$ $y = f_0 + \frac{h}{2}$,
 $M = 0$;

на участке CB :

при $x = \frac{l}{2}$ $y = f_0 + \frac{h}{2}$,

$M = 0$; при $x = l$ $y = h$, $M = 0$.

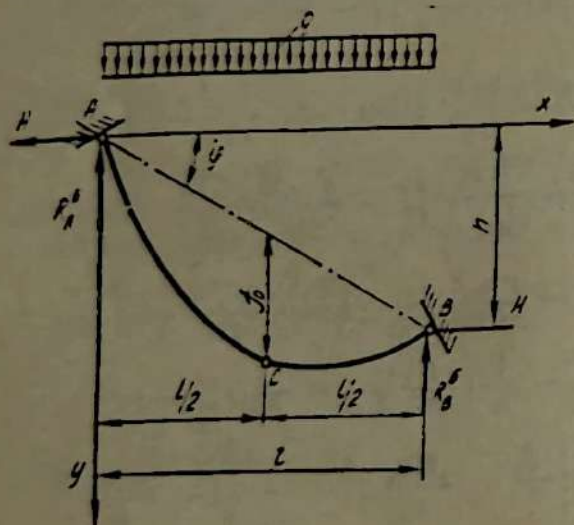


Рис. 71. К расчету нити на начальную нагрузку с промежуточным шарниром в середине пролета.

Постоянные интегрирования будут иметь вид:
на участке AC :

$$C_1 = 2f_0 \frac{1}{u_0^2}; \quad (82)$$

$$C_2 = -2f_0 \frac{\operatorname{ch} u_0 - 1}{u_0^2 \operatorname{sh} u_0}; \quad (83)$$

$$C_3 = \frac{4f_0}{l} + \frac{h}{l}; \quad (84)$$

$$C_4 = -C_1 \quad (85)$$

на участке CB :

$$C_1 = 2f_0 \frac{2 \operatorname{ch} u_0 - 1}{u_0^2}; \quad (86)$$

$$C_2 = -2f_0 \frac{\operatorname{sh}^2 u_0 + \operatorname{ch}^2 u_0 - \operatorname{ch} u_0}{u_0^2 \operatorname{sh} u_0}; \quad (87)$$

$$C_3 = \frac{4f_0}{l} + \frac{h}{l}; \quad (88)$$

$$C_4 = -2f_0 \frac{1}{u_0^2}. \quad (89)$$

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в уравнения (7) — (10), получаем следующие расчетные формулы на участке AC :

$$y = h\xi + 4f_0 \frac{1}{u_0^2} \left\{ u_0^2 \xi (1 - \xi) - \left[\frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{ch} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} - \frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{ch} u_0 \xi}{\operatorname{sh} u_0} \right] \right\}; \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{8f_0}{l} \frac{1}{u_0} \left\{ u_0 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left[\frac{\operatorname{ch} u_0 - 1}{2 \operatorname{sh} u_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{sh} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} - \frac{\operatorname{sh}^2 u_0 \xi}{\operatorname{sh} u_0} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (91)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u_0^2} \left[\frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{ch} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} - \frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{ch} u_0 \xi}{\operatorname{sh} u_0} \right]; \quad (92)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u_0} \left[\frac{\operatorname{ch} u_0 - 1}{2 \operatorname{sh} u_0} - \frac{\operatorname{sh} u_0 \xi \operatorname{sh} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} - \frac{\operatorname{sh}^2 u_0 \xi}{\operatorname{sh} u_0} \right]; \quad (93)$$

на участке CB :

$$\begin{aligned} y = h\xi + 4f_0 \frac{1}{u_0^2} \left\{ u_0^2 \xi (1 - \xi) - \left[\frac{\operatorname{ch} u_0 \xi \operatorname{sh} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u_0 (1 - \xi) \operatorname{ch} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{8f_0}{l} \frac{1}{u_0} \left\{ u_0 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left[\frac{\operatorname{ch} u_0 - 1}{2 \operatorname{sh} u_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{ch} u_0 \xi \operatorname{ch} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} + \frac{\operatorname{ch}^2 u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (95)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u_0^2} \left[\frac{\operatorname{ch} u_0 \xi \operatorname{sh} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} - \frac{\operatorname{sh} u_0 (1 - \xi) \operatorname{ch} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} \right]; \quad (96)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u_0} \left[\frac{\operatorname{ch} u_0 - 1}{2 \operatorname{sh} u_0} - \frac{\operatorname{ch} u_0 \xi \operatorname{ch} u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} + \frac{\operatorname{ch}^2 u_0 (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u_0} \right]. \quad (97)$$

Определим, какое влияние на напряженное состояние нити оказывает постановка шарнира в середине пролета.

Допустим, что при одних и тех же исходных данных (l , EI , EF , q) две нити — с шарниром и без него — имеют одинаковый распор H (это можно достичь путем подбора соответствующих стрел провисания).

Тогда разница в напряженном состоянии нитей будет определяться только значениями изгибающих моментов.

Отношение максимального момента в нити с шарниром в середине пролета $M_{ш}$ при $\xi = 0,25$ или $\xi = 0,75$ в формулах (92) или (96) к максимальному моменту в нити без шарнира M при $\xi = 0,5$ в формуле (23) будет равно

$$\frac{M_{ш}}{M} = \frac{\frac{\operatorname{sh} \frac{1}{4} u_0 \left(\operatorname{ch} \frac{3}{4} u_0 - \operatorname{ch} \frac{1}{4} u_0 \right)}{\operatorname{sh} u_0}}{\frac{\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} u_0}{\operatorname{ch} u_0}} = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{4} u_0}{\operatorname{th} u_0}. \quad (98)$$

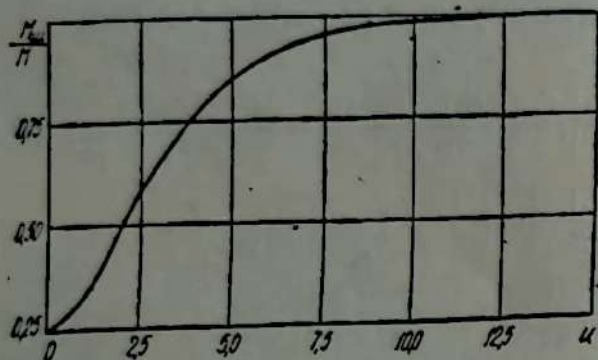


Рис. 72. График зависимости $\frac{M_{ш}}{M} = f(u)$.

На рис. 72 приведен график зависимости $\frac{M_{ш}}{M}$ от параметра u , позволяющий в каждом конкретном случае оценить эффективность постановки временного шарнира.

Если $u \geq 6$, то уменьшение изгибающего момента не превышает 10 % и постановка временного шарнира нецелесообразна. При

значениях параметра $u < 6$ временный шарнир значительно (до 75 % при $u \rightarrow 0$) уменьшает изгибающие моменты в нити и может быть рекомендован как один из способов снижения напряжений от изгиба, которые при малых значениях параметра u , как правило, очень высоки.

Если постановка одного шарнира не дает желаемого результата, то можно поставить еще несколько шарниров. Как показал Ю. В. Смирнов, при постановке шарниров, расчленяющих нить на $n + 1$ участков отношение (98) будет иметь вид

$$\frac{M_{ш}}{M} = \frac{\operatorname{th} \frac{u_0}{n+1} \operatorname{th} \frac{u_0}{2(n+1)}}{\operatorname{th} u_0 \operatorname{th} \frac{1}{2} u_0}. \quad (99)$$

В пределе, когда $u \rightarrow 0$

$$\lim_{u_0 \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} \frac{u_0}{n+1} \operatorname{th} \frac{u_0}{2(n+1)}}{\operatorname{th} u_0 \operatorname{th} \frac{1}{2} u_0} = \left(\frac{1}{n+1} \right)^2.$$

§ 6. РАСЧЕТ НИТИ, РАБОТАЮЩЕЙ БЕЗ ИЗГИБА ОТ НАЧАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Действие начальной нагрузки. Если начальная нагрузка не вызывает в сечениях нити изгибающих моментов, то это свидетельствует о том, что нить работает как абсолютно гибкая. При этом уравнение кривой провисания нити с опорами, расположенными на разных уровнях (см. рис. 63), будет иметь вид

$$y = \frac{4f_0 x(l-x)}{l^2} + \frac{x}{l} h, \text{ или } y = 4f_0 \xi(1-\xi) + h\xi.$$

В соответствии с теорией гибких нитей величина распора $H_0 = \frac{ql^2}{8f_0}$.

Длина нити определяется по формуле $L_0 = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{8}{3} \frac{f_0^2}{l} \cos^3 \varphi$.

Если после приложения начальной нагрузки заглушить установленные по длине нити шарниры или обетонировать ее, а затем приложить к ней дополнительную нагрузку, то в ее сечениях возникнут изгибающие моменты. Кроме того, под действием дополнительной нагрузки в нити изменятся также ординаты кривой провисания и величина распора. Методика их определения приведена ниже.

Действие дополнительной нагрузки. Методика получения расчетных зависимостей при действии начальной и дополнительной нагрузок различного характера принципиально не отличается от изложенной выше. Поэтому уточним лишь некоторые положения.

Во-первых, при выводе уравнения для определения параметра u величину распора и длину нити при действии начальной нагрузки необходимо вычислять в соответствии с теорией гибких нитей.

Во-вторых, при определении длины нити после приложения дополнительной нагрузки значение угла наклона касательной к упругой линии (14) необходимо записывать без члена в квадратных скобках. Это связано с тем, что выражение (13) представляет собой уравнение прогибов, а не ординат упругой линии, как это имеет место для нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки.

Ниже для наиболее часто встречающихся на практике схем нагружения приведены формулы для расчета нитей при шарнирном и жестком закреплении концов на опорах.

Нагрузка, равномерно распределенная по всему пролету.

А. Шарнирное закрепление концов нити (см. рис. 66).

Расчетные формулы:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{(q+p)l^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi(1-\xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] + \frac{4f_0}{u^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u}; \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p)l^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\text{th } u}{2} + \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] + \\ + \frac{8f_0}{l} \frac{1}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right]; \end{aligned} \quad (101)$$

$$M = \frac{(q+p) l^2}{8} \frac{4}{u^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{ch } u} - \frac{16f_0 EI}{l^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{ch } u}; \quad (102)$$

$$Q = \frac{(q+p) l}{2} \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u (1-\xi)}{\text{ch } u} \right] - \frac{32f_0 EI}{l^3} u \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u (1-\xi)}{\text{ch } u} \right]. \quad (103)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \frac{5}{6} \left(\frac{q+p}{q} \right) \Phi \times \\ \times \frac{1}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) - \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 \right] + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[\left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2. \quad (104)$$

Б. Жесткое закрепление концов нити (см. рис. 68).

Расчетные формулы:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{(q+p) l^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - u \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{sh } u} \right] + \\ + \frac{4f_0}{u} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{sh } u}; \quad (105)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p) l^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u (1-\xi)}{\text{sh } u} \right] \right\} + \\ + \frac{8f_0}{l} \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u (1-\xi)}{\text{sh } u} \right]; \quad (106)$$

$$M = \frac{(q+p) l^2}{8} \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[\frac{1}{2 \text{ th } u} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{sh } u} \right] \right\} + \\ + \frac{16f_0 EI}{l^2} u \left[\frac{1}{2 \text{ th } u} - \frac{1}{2u} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{sh } u} \right]; \quad (107)$$

$$Q = \frac{(q+p) l}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u (1-\xi)}{\text{sh } u} \right] - \\ - \frac{32f_0 EI}{l^3} u^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u (1-\xi)}{\text{sh } u} \right]. \quad (108)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \\ - \frac{5}{6} \left(\frac{q+p}{q} \right) \Phi \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \\ + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \\ = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2. \quad (109)$$

Сосредоточенная нагрузка.

А. Шарнирное закрепление концов нити (см. рис. 68).

Расчетные формулы:

на участке 0 — a:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] +$$

$$+ \frac{4f_0}{u^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} + \frac{Pl^3}{48EI} \frac{6}{u^3} \left(2u \frac{b}{l} \xi - \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u\xi \right); \quad (110)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left\{ u \frac{1}{2} - \xi \right\} - \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] +$$

$$+ \frac{8f_0}{l} \frac{1}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] +$$

$$+ \frac{Pl^2}{16EI} \frac{4}{u^2} \left(\frac{b}{l} - \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u\xi \right); \quad (111)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} - \frac{16f_0 EI}{l^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} +$$

$$+ \frac{Pl}{4} \frac{2}{u} \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u\xi; \quad (112)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] - \frac{32f_0 EI}{l^3} \times$$

$$\times u \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + P \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u\xi; \quad (113)$$

на участке a — l:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] +$$

$$+ \frac{4f_0}{u^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} + \frac{Pl^3}{48EI} \frac{6}{u^3} \times$$

$$\times \left[2u \frac{a}{l} (1 - \xi) - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u(1 - \xi) \right]; \quad (114)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{8f_0}{l} \frac{1}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] - \frac{Pl^2}{16EI} \times$$

$$\times \frac{4}{u^2} \left[\frac{a}{l} - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u(1 - \xi) \right]; \quad (115)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} - \frac{16f_0 EI}{l^2} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} +$$

$$+ \frac{Pl}{4} \frac{2}{u} \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u(1-\xi); \quad (116)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] - \frac{32f_0 EI}{l^3} \times$$

$$\times u \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] - P \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u(1-\xi). \quad (117)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \frac{b}{l} + \frac{\text{th } u}{u} \times \right.$$

$$\times \frac{\frac{a}{l} \text{sh } 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} - \frac{2}{u^2} \left(1 - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} + \text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \right) \Bigg] +$$

$$+ \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \frac{2}{u^4} \left[2 \left(2 \frac{a}{l} \frac{b}{l} + \frac{\frac{a}{l} \text{sh}^2 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh}^2 2u \frac{a}{l}}{\text{sh}^2 2u} \right) - \right.$$

$$- \frac{3}{u} \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} \text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \Bigg] + \frac{5}{6} \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) - \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{5}{3} \frac{P}{ql} \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} + \text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \right) - \frac{\text{th } u}{u} \times \right.$$

$$\times \frac{\frac{a}{l} \text{sh } 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \Bigg] + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[\left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] -$$

$$- \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2. \quad (118)$$

Б. Жесткое закрепление концов нити (см. рис. 69).

Расчетные формулы:

на участке $0 - a$:

$$y = h\xi \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - u \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right] +$$

$$+ 4f_0 \frac{1}{u} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} + \frac{Pl^3}{192EI} \frac{48}{u^3} \times$$

$$\times \left[u\xi \frac{u \frac{b}{l} \text{ch } u - \text{sh } u \frac{b}{l} \text{ch } u \frac{a}{l}}{u \text{ch } u - \text{sh } u} - \text{sh } u \frac{b}{l} \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\text{sh } u} + \right.$$

$$+ \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} u \frac{\frac{a}{l} \text{sh } u \frac{b}{l} \text{ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{sh } u \frac{a}{l} \text{ch } u \frac{b}{l}}{u \text{ch } u - \text{sh } u} \Bigg]; \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \\ + \frac{8f_0}{l} \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \frac{Pl^2}{16EI} \frac{8}{u^2} \times \\ \times \left[\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \\ + \frac{16f_0 EI}{l^2} u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{1}{2u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + \frac{Pl}{8} \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} Q = \frac{ql}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \frac{32f_0 EI}{l^3} u^2 \left[\frac{1}{2} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + 2P \left\{ - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{2 \operatorname{sh} u} - \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \end{aligned} \quad (122)$$

на участке $a - l$:

$$\begin{aligned} y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - u \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + 4f_0 \frac{1}{u} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} + \frac{Pl^3}{192EI} \frac{48}{u^3} \left[u \frac{a}{l} - \right. \\ \left. - u \xi \frac{u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \Bigg]; \quad (123)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{1}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \\ + \frac{8f_0}{l} \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \frac{Pl^2}{16EI} \frac{8}{u^2} \times \\ \times \left[\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (124) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = \frac{ql^2}{8} \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \\ + \frac{16f_0 EI}{l^2} u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{1}{2u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + \frac{Pl}{8} \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (125) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = \frac{ql}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \frac{32f_0 EI}{l^3} u^2 \left[\frac{1}{2} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - 2P \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}. \quad (126) \end{aligned}$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \frac{b}{l} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \frac{3}{u} \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \Bigg] + \\
& + \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \frac{1}{u^2} \left\{ - \left(\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right)^2 \times \right. \\
& \times \left(1 + \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{1}{u} \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times \\
& \times \left[\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{\operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} - 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} \right] + \\
& + \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} + 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} + \right. \\
& + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2 u} + 2 \left(\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right)^2 \Bigg] - \\
& - \frac{3}{u^3} \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \Bigg\} - \frac{5}{6} \Phi \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\
& - \frac{5}{3} \frac{P}{ql} \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \right. \\
& - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{sh} u} \Bigg] + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\
& - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2. \quad (127)
\end{aligned}$$

§ 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКОСТИ ПРОВИСАНИЯ НИТИ

При приложении к нити несимметричной дополнительной нагрузки точки ее оси получают заметные горизонтальные перемещения. Последние необходимо учитывать при проектировании ряда конструкций (висячих покрытий с подвесным крановым оборудованием и др.).

Рассмотрим методику их определения. Предположим, что мы имеем нить с опорами, расположенными на разных уровнях, к которой приложена начальная равномерно распределенная нагрузка q . Требуется определить горизонтальное перемещение точки D_0 от дополнительной сосредоточенной нагрузки P (рис. 73, а).

Разложим горизонтальное перемещение v точки D_0 на две составляющие (рис. 73, б).

$$v = v_1 + v_2, \quad (128)$$

где v_1 — горизонтальное перемещение точки D_0 из положения D_1 в положение D_2 при условии, что длина участка $\widetilde{AD}_2 = \widetilde{AD}_0$; v_2 — горизонтальное перемещение точки D_0 из положения D_2 в положение D за счет удлинения участка нити $\widetilde{AD}_0$.

При действии начальной нагрузки длина участка нити $\widetilde{AD}_0$ может быть найдена из уравнения

$$L_{\widetilde{AD}_0} = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \int_a^x (1 + y_0'^2) dx. \quad (129)$$

После приложения дополнительной нагрузки длина участка $\widetilde{AD}_1$ будет

$$L_{\widetilde{AD}_1} = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \int_a^x (1 + y'^2) dx. \quad (130)$$

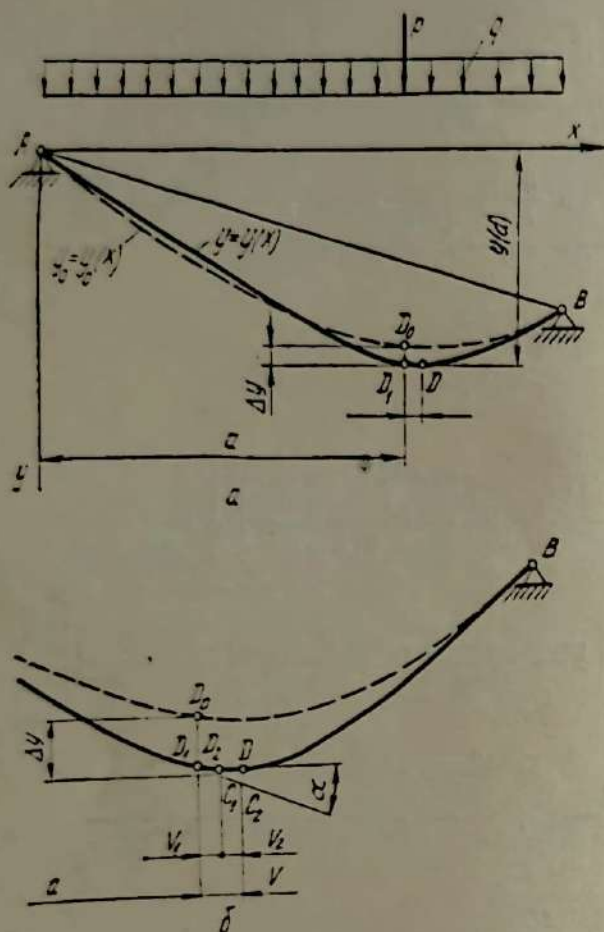


Рис. 73. К определению горизонтальных перемещений в плоскости провисания нити:

a — расчетная схема; b — элемент нити.

Учитывая, что горизонтальная проекция дуги $\widetilde{D_1D_2}$ отличается от горизонтальной проекции отрезка $\overline{D_1C_1}$, являющегося касательной к точке D_1 на величину малого порядка, получим

$$v_1 = \frac{\int_a^x (1 + y_0'^2) dx - \int_a^x (1 + y'^2) dx}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \quad (131)$$

Приращение длины участка $\widetilde{AD}_0$, вызванное дополнительной нагрузкой,

$$D_2D = \int_a^x \epsilon_0^{q+p} dx - \int_a^x \epsilon_0^q dx, \quad (132)$$

где ϵ_0 — относительная деформация оси нити.

Не учитывая, как и прежде, разницы между горизонтальной проекцией дуги $\widetilde{D_2D}$ и горизонтальной проекцией отрезка $\overline{C_1C_2}$, полу-

$$v_2 = \frac{\int_a e_0^{q+p} dx - \int_a e_0^q dx}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \quad (133)$$

Подставляя (131) и (133) в (128), получаем

$$v = \frac{\int [(1 + y_0'^2) - (1 + y'^2) + e_0^{q+p} - e_0^q] dx}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \quad (134)$$

В зависимости от стрелы провисания, жесткости на изгиб и других параметров максимальные горизонтальные перемещения нити при действии сосредоточенной нагрузки могут составить до 20 % вертикальных.

§ 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРЕЛЫ ПРОВИСАНИЯ

Как известно, нормальные напряжения в поперечных сечениях нити конечной жесткости являются функцией распора и изгибающего момента. В свою очередь, распор и изгибающий момент зависят от стрелы провисания. Поскольку изменение стрелы провисания сказывается на них различно (увеличение стрелы провисания приводит к уменьшению распора и увеличению изгибающего момента, и наоборот), то можно найти такую стрелу провисания, при которой напряжения в нити от распора и изгибающего момента будут минимальными (равны между собой).

Рассмотрим решение такой задачи. Допустим, что заданы пролет, нагрузка и сечение нити. Требуется определить, можно ли перекрыть такой нитью данный пролет и какую при этом принять стрелу провисания. Методику определения оптимальной стрелы провисания покажем на примере нити с шарнирным закреплением концов.

Суммарные напряжения от растяжения и изгиба нити определяются по формуле

$$\sigma_\Sigma = \frac{H}{F \cos \varphi} \pm \frac{M}{W}, \quad (135)$$

где W — момент сопротивления сечения нити.

Наибольшее значение изгибающего момента при шарнирном закреплении концов нити будет в середине пролета $M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{8} \times \times \frac{2}{u^2} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u}$.

Подставляя значения H и M в (135), получаем

$$\sigma_\Sigma = \frac{4u^2 El}{Fl^2 \cos \varphi} + \frac{ql^2}{8W} \frac{2}{u^2} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u}. \quad (136)$$

Отсюда после дифференцирования по u будем иметь

$$\frac{d\sigma_\Sigma}{du} = \frac{8uEl}{Fl^2 \cos \varphi} - \frac{ql^2}{2W} \frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{2 + u \operatorname{th} u}{2 \operatorname{ch} u} \right).$$

Приравнивая правую часть этого выражения к нулю, после преобразований находим

$$\frac{384EI}{5ql^4} - \frac{W}{F \cos \varphi} = \frac{1 - \frac{2 + u \operatorname{th} u}{2 \operatorname{ch} u}}{\frac{5}{24} u^4}. \quad (137)$$

Из этого выражения определяется параметр u , соответствующий минимальным суммарным напряжениям в наиболее опасном сечении нити. Если эти напряжения будут меньше допустимых для материала данной нити, то можно переходить к следующему этапу расчета — определению оптимальной стрелы провисания. Для этого воспользуемся уравнением (27). Заменяя в нем параметр u_0 на u , найденный из (137) получим

$$f_{\text{опт}} = \frac{5ql^4}{384EI} \frac{\frac{u^2}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u}}{\frac{5}{24} u^4}. \quad (138)$$

В частном случае, когда угол наклона касательной к оси нити на одной из опор равен нулю, подлежит определению не стрела провисания, а превышение одной опоры над другой. В этом случае выражения (137) не достаточно для определения параметра u , так как угол φ , входящий в него, является величиной неизвестной.

Запишем (28) в виде

$$\frac{24EI}{ql^3} \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right). \quad (139)$$

Решая это уравнение совместно с (137), находим значения u и φ , соответствующие минимальным суммарным напряжениям.

Оптимальные значения стрел провисания при действии других нагрузок и жестком закреплении концов нити определяются аналогично тому, как это было сделано выше.

Найденные оптимальные значения стрел провисания не всегда удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к сооружению. Поэтому окончательные значения стрел провисания следует принимать после всестороннего технико-экономического анализа различных вариантов.

§ 9. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ, СМЕЩЕНИЯ И ОСАДКИ ОПОР

Действие температуры. При изменении температуры на Δt° длина нити изменится на величину $\Delta L_t = \frac{l}{\cos \varphi} \alpha_t \Delta t^\circ$, где α_t — коэффициент линейного расширения материала, из которого выполнена нить; Δt° — разность между расчетной температурой и температурой, соответствующей положению нити при начальной нагрузке, т. е. $\Delta t^\circ = t^\circ - t_0^\circ$.

Изменение длины нити вызовет изменение стрелы провисания и, следовательно, внутренних усилий, в частности, — распора.

В свою очередь, приращение распора вызовет изменение длины нити на величину $\Delta l_H = \frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2)$.

Таким образом, суммарное приращение длины нити, вызванное изменением температуры, будет

$$\Delta L = \frac{l}{\cos \varphi} \alpha_t (t^\circ - t_0^\circ) + \frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2). \quad (140)$$

Подставляя это выражение в (38), получим уравнения для определения параметра u , правые части которых будут отличаться от найденных выше лишь одним членом

$$\left(\frac{5}{24} \Phi n \right)^2 \frac{\alpha_t (t^\circ - t_0^\circ)}{\cos \varphi}, \quad (141)$$

учитывающим влияние температуры. Здесь $n = \frac{l}{f_0}$.

Заметим, что температура не меняет условий для определения постоянных интегрирования. Поэтому она не входит в явном виде ни в одну из формул для определения y , $\operatorname{tg} \alpha$, M и Q , а учитывается ими косвенно — через параметр u .

Смещение опор. Предположим, что под действием распора H опоры нити смещаются по направлению одна к другой на величину Δ . При этом уравнение для вычисления параметра u примет вид

$$\frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{2} \int_1 y'^2 dx - \frac{1}{2} \int_1 y_0'^2 dx - \Delta. \quad (142)$$

Таким образом, влияние смещения опор учитывается точно так же, как и при изменении температуры, — через параметр u , для нахождения которого необходимо в левые части соответствующих уравнений ввести дополнительный член

$$- \left(\frac{5}{24} \Phi n \right)^2 \frac{\Delta}{l}. \quad (143)$$

Если жесткость опор равна k , то $\Delta = \frac{(H_1 - H_0)}{k}$ или $\Delta = \frac{4El}{kl^2} (u^2 - u_0^2)$.

Влияние смещения опор сказывается на напряженно-деформированном состоянии нити тем больше, чем меньше ее стрела провисания.

Осадка опор. Если в результате осадки одна опора переместится больше другой, то это приведет к изменению напряженно-деформированного состояния нити. Как и в случае смещения, осадка опор учитывается параметром u , для определения которого необходимо в левые части соответствующих уравнений ввести дополнительный член

$$\left(\frac{5}{12} \Phi n \right)^2 \frac{\Delta_b}{l} \left(\frac{h}{l} + \frac{\Delta_b}{2l} \right). \quad (144)$$

При жестком закреплении концов нити необходимо еще учесть моменты от неравномерной осадки опор.

Конструкции и сечения основных несущих элементов, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости, должны назначаться с учетом принятого метода монтажа. В практике строительства применяются различные методы монтажа:

подъем нити на предварительно установленные и раскрепленные в проектном положении опоры (пилоны, колонны и т. п.), поочередно на одну, затем на другую или одновременно на обе опоры;

одновременный подъем опор, смонтированных на земле или шпальных клетках, с шарнирно прикрепленной к ним нитью и др.

Монтаж пролетной конструкции сооружений может производиться без приложения и с приложением продольного растягивающего усилия.

При монтаже нити без приложения продольного усилия максимальная высота подъема концов нити с горизонтальной поверхности определяется по формуле

$$h_{\max} = \frac{8}{3} \frac{W}{qEI} (kR^H)^2, \quad (145)$$

где k — коэффициент однородности материала нити; R^H — нормативное сопротивление, равное σ_T .

Длина приподнятого участка нити

$$l_{\text{под}} = \sqrt{\frac{8WkR^H}{q}}. \quad (146)$$

В случае, когда $h < h_{\max}$, длина приподнятого участка

$$l_{\text{под}} = \sqrt[4]{\frac{24hEI}{q}}. \quad (147)$$

При монтаже нити с приложением продольного растягивающего усилия величина натяжения, необходимая для подъема конца нити на высоту h при заданном значении максимальных напряжений kR^H , определяется по формуле $H = \frac{4u^2EI}{l^2}$, а параметр u — из выражения

$$\frac{4uEI}{F \sqrt{\frac{8hEI}{q} \frac{u}{u - \text{th } u}}} + \frac{\sqrt{\frac{8hEI}{q} \frac{u}{u - \text{th } u}}}{4W} \frac{\text{th } u \text{ th } \frac{u}{2}}{u} \leq kR^H. \quad (148)$$

При этом длина приподнятого участка

$$l_{\text{под}} = \sqrt[4]{\frac{8hEI}{q} \frac{u^3}{u - \text{th } u}}. \quad (149)$$

При подъеме нити за оба конца максимальная допустимая стрела провисания при отрыве ее от земли определяется по формуле

$$f_{\max} = \frac{ql^4}{16EI} \frac{1}{u^4} \left(\frac{u^2}{2} - \text{th } u \text{ th } \frac{u}{2} \right), \quad (150)$$

а параметр u — из выражения

$$\frac{4u^2EI}{Fl^2} + \frac{ql^2}{4W} \frac{\text{th } u \text{ th } \frac{u}{2}}{u^3} \leq kR^H. \quad (151)$$

§ 11. РАСЧЕТ НИТИ НА НАГРУЗКУ, ДЕЙСТВУЮЩУЮ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К ПЛОСКОСТИ НАЧАЛЬНОГО ПРОВИСАНИЯ

Пространственный изгиб нити. На сооружения, расчетной схемой которых является нить конечной жесткости (трубопроводные переходы в виде провисающей нити и др.), могут действовать вертикальная и горизонтальная (ветровая) нагрузки. Ниже приводится методика расчета нитей на такие нагрузки.

В зависимости от типа креплений концов нити к опорам рассмотрим работу нити при трех характерных граничных условиях:

при свободном повороте концов нити от начальной и дополнительной вертикальной и горизонтальной нагрузок (шаровые шарниры);

при свободном повороте концов нити от начальной и дополнительной вертикальной нагрузок и жестком закреплении от дополнительной горизонтальной нагрузки (цилиндрические шарниры);

при свободном повороте от начальной нагрузки и жестком закреплении концов нити от дополнительной вертикальной и горизонтальной нагрузок.

Если нить будет закреплена на опорах A и B (рис. 74, а) при помощи шаровых шарниров (первый случай граничных условий), то определение значений y , $\tan \alpha$, M и Q в ней достаточно просто. Так, при одновременном действии начальной и дополнительных вертикальной p и горизонтальной p_r нагрузок она повернется относительно вертикальной

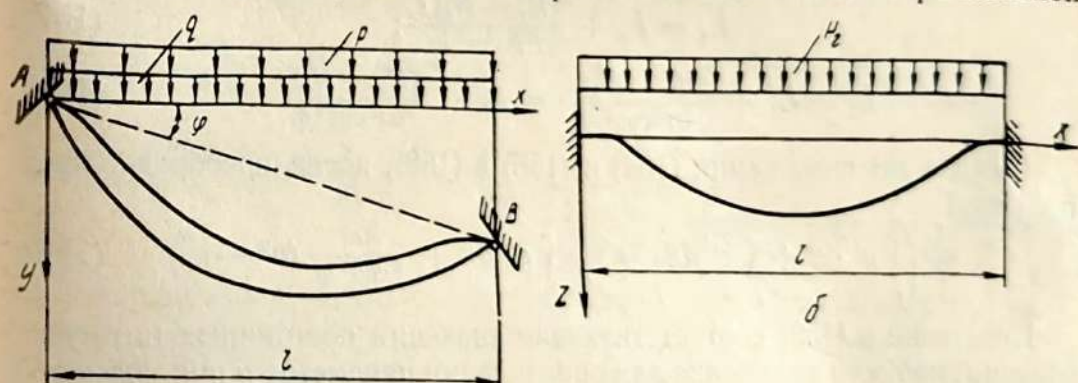


Рис. 74. К расчету нити на горизонтальную нагрузку:

а — вертикальная проекция; б — горизонтальная проекция; в — схема нагрузок на нить с шаровыми шарнирами на концах.

плоскости (плоскость начального провисания) на угол γ (рис. 74, в), который может быть вычислен по формуле

$$\tan \gamma = \frac{p_r}{q + p}. \quad (152)$$

При этом равнодействующая нагрузок

$$R = \sqrt{(q + p)^2 + p_r^2}. \quad (153)$$

Хотя нагрузка R будет приложена не в вертикальной плоскости, она по-прежнему будет действовать в плоскости провисания нити. Поэтому определение усилий в нити с шаровыми шарнирами на концах производится аналогично случаю, когда начальная (в данном случае

$q + p$) и дополнительная $[R - (q + p)]$ нагрузки будут действовать в одной и той же плоскости. Если же нить будет закреплена на опорах при помощи цилиндрических шарниров, допускающих свободный поворот ее концов от начальной q и дополнительной вертикальной p нагрузок и исключающих поворот от горизонтальной p_r нагрузки (второй случай граничных условий), то кривая провисания нити уже не будет плоской, а задача значительно усложнится.

С целью упрощения зависимостей примем, что нить имеет одинаковые моменты инерции сечений относительно всех центральных осей.

Решение задачи будем осуществлять в такой последовательности.

Определим длину нити при действии начальной нагрузки q .

$$L_0 = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \int_1 y_0'^2 dx. \quad (154)$$

После приложения дополнительной вертикальной нагрузки p длина нити будет

$$L_1 = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \int_1 y'^2 dx. \quad (155)$$

При действии вертикальной $q + p$ и горизонтальной p_r нагрузок

$$L_2 = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \left(\int_1 y'^2 dx + \int_1 z'^2 dx \right). \quad (156)$$

С другой стороны,

$$L_1 = L_0 + \frac{(H_1 - H_0) l}{EF \cos^2 \varphi}; \quad (157)$$

$$L_2 = L_1 + \frac{(H_2 - H_1) l}{EF \cos^2 \varphi} = L_0 + \frac{(H_2 - H_0) l}{EF \cos^2 \varphi}. \quad (158)$$

Подставляя выражения (154) и (156) в (158), после преобразований получаем

$$\frac{1}{2} \left(\int_1 y'^2 dx + \int_1 z'^2 dx \right) = \frac{1}{2} \int_1 y_0'^2 dx + \frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2). \quad (159)$$

Подставив в (159) соответствующие значения постоянных интегрирования, получим уравнение для определения параметра u при совместном действии вертикальных (см. рис. 74, а) и горизонтальных (рис. 74, б) нагрузок

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{p_r}{q} \right)^2 \frac{4}{u^4} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4 \operatorname{th}^2 u} - \frac{3}{4u \operatorname{th} u} \right) - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 \times \\ & \times (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{u_0^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right)^2 - \frac{5}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right]. \quad (160) \end{aligned}$$

Ординаты и усилия в произвольных сечениях нити в вертикальной плоскости определяются по формулам (41) — (44), а в горизонтальной — (161) — (164):

$$z = \frac{p_r l^4}{384 EI} \frac{48}{u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - u \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right]; \quad (161)$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{p_r l^3}{128EI} \frac{32}{u^3} \left[u \xi^2 - u \frac{\operatorname{sh} u \xi^2 \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right]; \quad (162)$$

$$M_r = \frac{p_r l^2}{12} \frac{6}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi^2 \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\}; \quad (163)$$

$$Q_r = \frac{p_r l}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi^2 \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right]. \quad (164)$$

Уравнения (161) — (164) могут быть получены и из выражений (33) — (36), если подставить в них значение $h = 0$.

Если концы нити будут закреплены таким образом, что они не смогут свободно поворачиваться от дополнительных вертикальной p и горизонтальной p_r нагрузок (третий случай граничных условий), то уравнение для определения параметра u примет вид

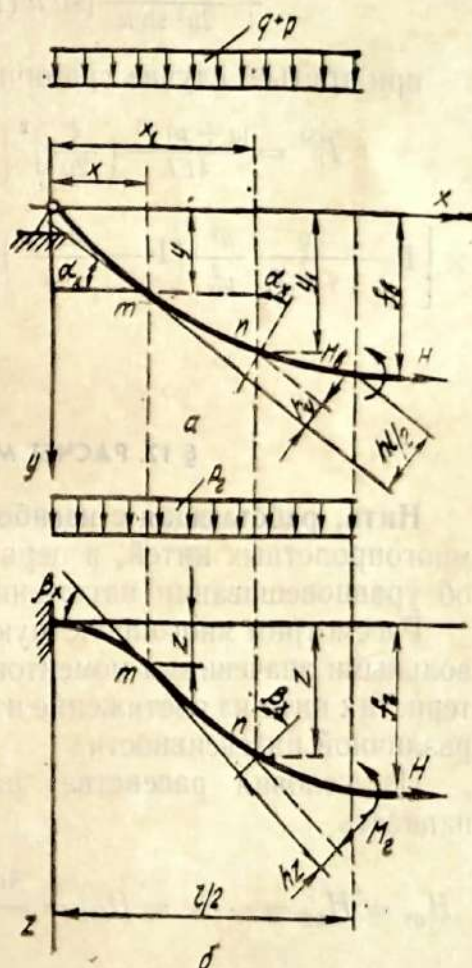
$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\ & - 2 \frac{q+p}{q} \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \left[\frac{1}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{p_r}{q} \right)^2 \left[\frac{4}{u^4} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{u^2} - \frac{3}{4u \operatorname{th} u} - \frac{1}{4 \operatorname{th}^2 u} \right) \right] - \\ & - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{u_0^4} \left[\frac{2}{3} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right)^2 - \frac{5}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (165)$$

Ординаты и усилия в произвольных сечениях нити в вертикальной плоскости определяются из выражений (46) — (49), а в горизонтальной плоскости — по тем же формулам, что и в случае крепления концов нити к опорам с помощью цилиндрических шарниров, по (161) — (164).

Кручение при пространственной деформации нити. При принятых предположениях расчета крутящие моменты вследствие пологости нитей равны нулю.

Рис. 75. К определению крутящих моментов:

a — вертикальная проекция; b — горизонтальная проекция.



Найденные нами [32] из условия равновесия полупролета нити (рис. 75) выражения для определения крутящих моментов

$$M_k = \frac{l^2}{2} \left(\frac{1}{4} - \xi + \xi^2 \right) [p_r \sin \alpha_x \cos \beta_x - (q + p) \sin \beta_x \cos \alpha_x] + \\ + \cos \alpha_x \cos \beta_x [(q + p) I_z - p_r I_y + l (0,5 - \xi) [p_r y - (q + p) z]] + \\ + M_b \sin \beta_x \cos \alpha_x - M_r \sin \alpha_x \cos \beta_x + \\ + \left(\frac{2u}{l} \right)^2 EI [(f_b - y) \sin \beta_x \cos \alpha_x - (f_r - z) \sin \alpha_x \cos \beta_x] \quad (166)$$

показали, что для пологих нитей это утверждение соответствует действительности. В выражении (166) значения I_y и I_z равны:

при втором случае граничных условий

$$I_y^{(2)} = \frac{(q + p) l^3}{4EI} \left(\frac{l}{2u} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{6} - \xi^2 + \frac{2}{3} \xi^3 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2u^2 \operatorname{ch} u} [\operatorname{sh} u (1 - 2\xi) - u \operatorname{ch} u (1 - 2\xi)] \right\}; \quad (167)$$

$$I_z^{(2)} = \frac{p_r l^3}{4EI} \left(\frac{l}{2u} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{6} - \xi^2 + \frac{2}{3} \xi^3 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2u^2 \operatorname{sh} u} [\operatorname{sh} u (1 - 2\xi) - u \operatorname{ch} u (1 - 2\xi)] \right\}; \quad (168)$$

при третьем случае граничных условий

$$I_y^{(3)} = \frac{(q + p) l^3}{4EI} \left(\frac{l}{2u} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{6} - \xi^2 + \frac{2}{3} \xi^3 \right) + \frac{1}{2u^2 \operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{q}{q + p} \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] [\operatorname{sh} u (1 - 2\xi) - u \operatorname{ch} u (1 - 2\xi)] \right\}; \quad (169)$$

$$I_z^{(3)} = I_z^{(2)}. \quad (170)$$

§ 12. РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ НИТЕЙ

Нить, работающая с изгибом от начальной нагрузки. При расчете многопролетных нитей, в первую очередь, приходится решать задачу об уравнивании натяжений.

Рассмотрим многопролетную нить с неравными пролетами и произвольными значениями моментов инерции сечений и жесткостных характеристик нити на растяжение и изгиб при действии начальной нагрузки различной интенсивности.

Из условия равенства распоров в смежных пролетах можно написать

$$H_{01} = H_{02} = \dots = H_{0n} = \frac{4u_{01}^2 E_1 I_1}{l_1^2} = \frac{4u_{02}^2 E_2 I_2}{l_2^2} = \dots = \frac{4u_{0n}^2 E_n I_n}{l_n^2}.$$

Откуда при известном параметре u_0 , например, в первом пролете, получим:

$$\left. \begin{aligned} u_{02}^2 &= \frac{u_{01}^2 E_1 I_1 l_2^2}{E_2 I_2 l_1^2}; \\ &\dots \dots \dots \\ u_{0n}^2 &= \frac{u_{01}^2 E_1 I_1 l_n^2}{E_n I_n l_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

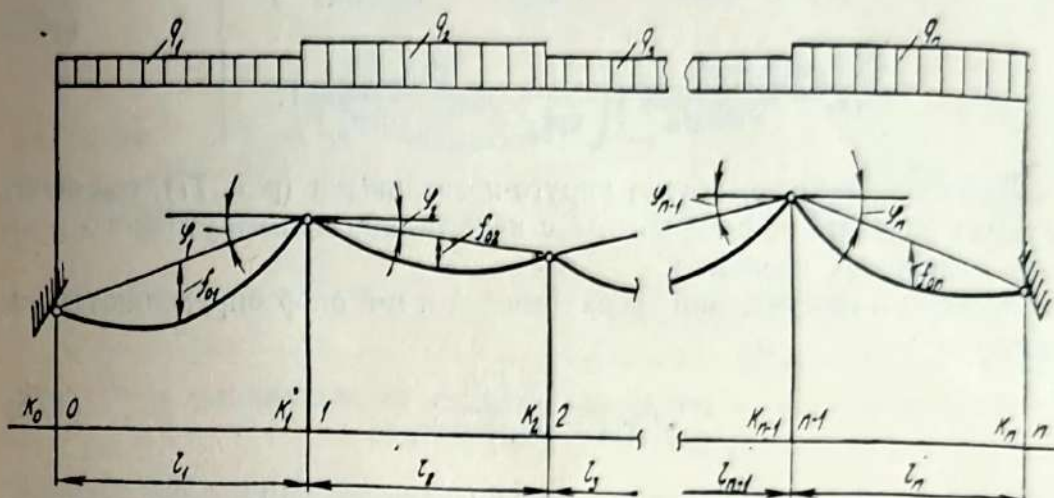


Рис. 76. К уравновешиванию натяжений при шарнирном закреплении концов нити к крайним неподвижным и промежуточным упруго-податливым опорам.

При шарнирном закреплении концов нити на крайних неподвижных и промежуточных упруго-податливых опорах (рис. 76) параметр u_{01} можно определить из уравнения

$$\frac{384 E_1 I_1 f_{01}}{5 q_1 l_1^4} = \frac{\frac{u_{01}^2}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_{01}}}{\frac{5}{24} u_{01}^4}, \quad (172)$$

для чего требуется предварительно задаться стрелой провисания нити f_0 в первом пролете.

Вычислив затем по формулам (171) значения параметров $u_{02} - u_{0n}$, определим стрелы провисания в остальных пролетах:

$$\left. \begin{aligned} f_{02} &= \frac{5 q_2 l_2^4}{384 E_2 I_2} \left(\frac{\frac{u_{02}^2}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_{02}}}{\frac{5}{24} u_{02}^4} \right); \\ &\dots \dots \dots \\ f_{0n} &= \frac{5 q_n l_n^4}{384 E_n I_n} \left(\frac{\frac{u_{0n}^2}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_{0n}}}{\frac{5}{24} u_{0n}^4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

При жестком закреплении концов нити на опорах параметр u_{01} определяется из уравнения

$$\frac{384 E_1 I_1 f_{01}}{q_1 l_1^4} = 24 \left(\frac{1}{2u_{01}^2} - \frac{\operatorname{ch} u_{01} - 1}{u_{01}^3 \operatorname{sh} u_{01}} \right), \quad (174)$$

а стрелы провисания $f_{02} = f_{0n}$ — из формул:

$$\left. \begin{aligned} f_{02} &= \frac{q_2 l_2^4}{384 E_2 I_2} \cdot 24 \left(\frac{1}{2u_{02}^2} - \frac{\operatorname{ch} u_{02} - 1}{u_{02}^3 \operatorname{sh} u_{02}} \right); \\ &\dots \dots \dots \\ f_{0n} &= \frac{q_n l_n^4}{384 E_n I_n} 24 \left(\frac{1}{2u_{0n}^2} - \frac{\operatorname{ch} u_{0n} - 1}{u_{0n}^3 \operatorname{sh} u_{0n}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Если крайние опоры будут упруго-податливыми (рис. 77), то расчет следует начинать не с первого, а с какого-либо промежуточного пролета, например, пролета i .

Величины перемещений верхушек 0-й и n -й опор определяются по формулам:

$$\Delta_{00} = \frac{4u_{0i}^2 E_i I_i}{k_0 l_i^2}; \quad (176)$$

$$\Delta_{0n} = \frac{4u_{0i}^2 E_i I_i}{k_n l_i^2}, \quad (177)$$

где k_0, k_n — коэффициенты жесткости опор.

При действии начальной и дополнительной нагрузок (рис. 78) все опоры нити получают некоторые перемещения. Последние хотя и будут небольшими, но могут оказать существенное влияние на перераспределение усилий в смежных пролетах.

Перемещения верхушек опор от дополнительной нагрузки будут равны:

$$\Delta_0 = \frac{4E_1 I_1 (u_1^2 - u_{01}^2)}{k_0 l_1}; \quad (178)$$

$$\pm \Delta_i = \frac{4}{k_i} \left(\frac{u_{i-1}^2 E_{i-1} l_{i-1}}{l_{i-1}^2} - \frac{u_i^2 E_i l_i}{l_i^2} \right); \quad (179)$$

$$\Delta_n = \frac{4E_n I_n (u_n^2 - u_{0n}^2)}{k_n l_n^2}. \quad (180)$$

В деформированном состоянии многопролетную нить можно рассматривать как систему, состоящую из однопролетных нитей с пролетами,

$$l'_i = l_i \pm \Delta_{i-1} \pm \Delta_i. \quad (181)$$

Для пролета i можно написать следующее равенство:

$$\frac{4r^2 (u_i^2 - u_{0i}^2)}{l_i \cos^2 \varphi_i} = \frac{1}{2} \left[\int_i y_i'^2 dx - \int_i y_{0i}'^2 dx \right] \pm \Delta_{i-1} \pm \Delta_i. \quad (182)$$

Записав выражения (182) для каждого пролета и выполнив интегрирование, получим систему нелинейных трансцендентных уравнений, решив которую найдем неизвестные параметры $u_1, \dots, u_n$ и распоры $H_1, \dots, H_n$ при действии начальной и дополнительной нагрузок. Под-

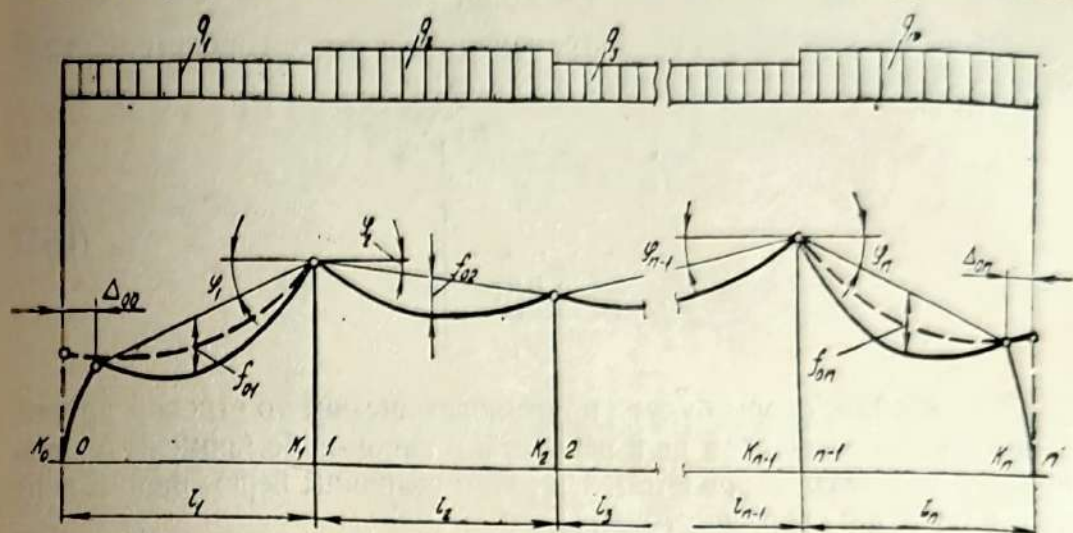


Рис. 77. К уравниванию натяжений при шарнирном закреплении концов нити к упруго-податливым опорам.

ставив найденные значения параметров $u_1, \dots, u_n$ в формулы (178) — (180), получим величины перемещений верхушек опор $\Delta_0, \dots, \Delta_n$.

По аналогии с уравнением трех моментов выражение (182) можно назвать уравнением трех распоров.

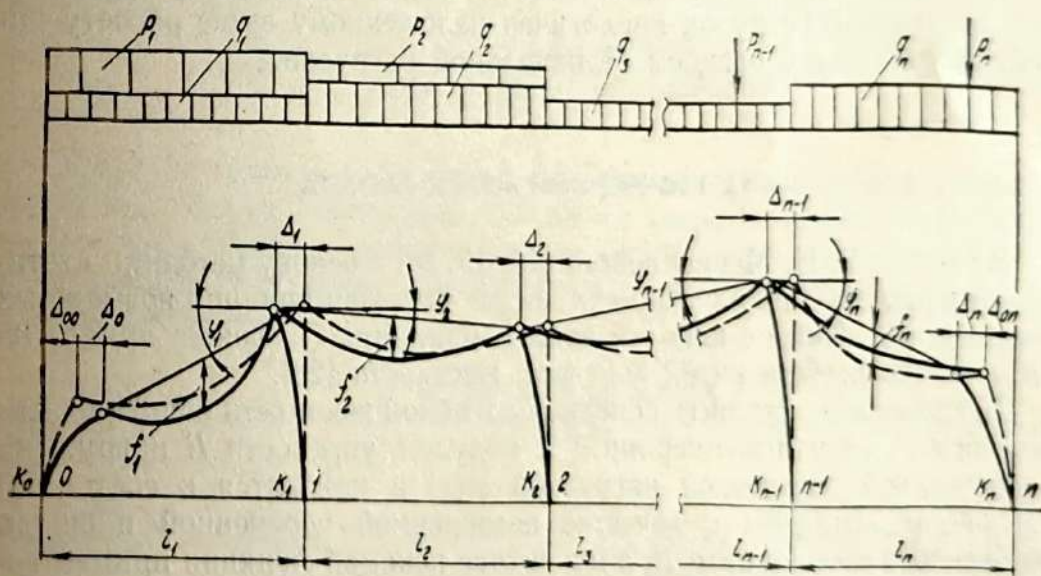


Рис. 78. К расчету многопролетной нити с упруго-податливыми опорами на дополнительную нагрузку.

Нить, работающая без изгиба от начальной нагрузки. В данном случае при действии начальной нагрузки очертание нити во всех пролетах будет описываться уравнениями парабол.

Из условия равенства распоров в смежных пролетах в соответствии с теорией гибких нитей можно написать $H_{01} = H_{02} = \dots =$

$$= H_{0n} = \frac{M_1^0}{y_{01}} = \frac{M_2^0}{y_{02}} = \dots = \frac{M_n^0}{y_{0n}}, \text{ или при принятых на рис. 76}$$

обозначениях $\frac{q_1 l_1^2}{8f_{01}} = \frac{q_2 l_2^2}{8f_{02}} = \dots = \frac{q_n l_n^2}{8f_{0n}}.$

Задавшись стрелой провисания, например, в первом пролете, найдем стрелы провисания в остальных пролетах:

$$\left. \begin{aligned} f_{02} &= \frac{q_2 l_2^2 f_{01}}{q_1 l_1^2}; \\ &\dots \\ f_{0n} &= \frac{q_n l_n^2 f_{01}}{q_1 l_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Если крайние опоры будут упруго-податливыми, то стрелой провисания следует задаваться не в первом, а в каком-либо промежуточном пролете, например, в пролете i . При этом величины перемещений верхушек 0-й и n -й опор будут равны:

$$\Delta_{00} = \frac{H_{0i}}{k_0}; \quad (184)$$

$$\Delta_{0n} = \frac{H_{0i}}{k_n}. \quad (185)$$

Расчет данной группы нитей на совместное действие начальной и дополнительной нагрузок аналогичен изложенному выше расчету нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки.

§ 13. УТОЧНЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

В работах Р. Н. Маделинского [18, 19, 20] в основу методики статического расчета гибких упругих нитей положен принцип возможных перемещений. Ниже с использованием принципа Лагранжа приводится методика расчета нитей конечной жесткости [29].

Предположим, что нить конечной изгибной жесткости с поперечным сечением F , моментом инерции I и модулем упругости E нагружена произвольной поперечной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия. Выберем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Пусть площадь поперечного сечения нити F получила очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δF . Тогда распор H получит некоторое приращение δH , изгибающий момент, действующий в нити M — приращение δM , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями α — приращение $\delta \alpha$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy . Выразим эти величины через балочный изгибающий момент M^0 , балочный прогиб y^0 и иско-

мый распор H . Для этого воспользуемся зависимостями *:

$$H = \frac{M^6 - M}{y}; \quad M = M^6 \frac{y}{y^6}.$$

Откуда

$$y = \frac{M^6 y^6}{Hy^6 + M^6}; \quad M = \frac{(M^6)^2}{Hy^6 + M^6}.$$

Тогда получим:

$$\delta y = - \frac{M^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M^6) (Hy^6 + M^6)}; \quad (186)$$

$$\delta M = - \frac{(M^6)^2 y^6 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M^6) (Hy^6 + M^6)}; \quad (187)$$

$$\delta dx = \frac{EF \delta H - HE \delta F}{EF (EF + E \delta F)} dx; \quad (188)$$

$$\delta d\alpha = \frac{(M^6)^2 y^6 \delta H EI + (M^6)^2 y^6 HE \delta I + (M^6)^2 y^6 \delta H E \delta I + (M^6)^3 E \delta I}{EI (EI + E \delta I) (Hy^6 + \delta Hy^6 + M^6) (Hy^6 + M^6)} dx. \quad (189)$$

Найдем работу внешних сил, т. е. нагрузки $q(x)$ на перемещениях δy .

$$U_1 = - \int_0^l \frac{q(x) M^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M^6) (Hy^6 + M^6)} dx. \quad (190)$$

Определим работу внутренних сил. Элементарная работа внутренних сил состоит из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx и работы изгибающего момента $M + \delta M$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\alpha$

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{(EF \delta H - HE \delta F) (H + \delta H)}{EF (EF + E \delta F)} dx; \quad (191)$$

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M^6)^4 y^6 \delta H EI + (M^6)^4 y^6 HE \delta I + (M^6)^4 y^6 \delta H E \delta I + (M^6)^5 E \delta I}{EI (EI + E \delta I) (Hy^6 + M^6) (Hy^6 + \delta Hy^6 + M^6)^2} dx. \quad (192)$$

Согласно принципу Лагранжа

$$U_1 + U_2 = 0. \quad (193)$$

* Первая формула получена из условия равновесия нити; вторая формула приближенная, она дает погрешность такого же порядка, как и предпосылка о равенстве натяжения распору по длине нити.

Подставляя (190), (191) и (192) в (193) получаем

$$- \int_0^l \frac{q(x) M^6(y^6) \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M^6)(Hy^6 + M^6)} dx - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\ + \int_0^l \frac{(M^6)^4 y^6 \delta HEI + (M^6)^4 y^6 HE\delta I + (M^6)^4 y^6 \delta HE\delta I + (M^6)^6 E\delta I}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M^6)^2} dx = 0. \quad (194)$$

Преобразуем y^6 к виду

$$y^6 = \frac{1}{EI} (y^6 EI) = \frac{\psi}{EI}. \quad (195)$$

Тогда, переходя в (194) к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$ и учитывая (195), получим

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{IH^3} \int_0^l \frac{q(x) M^6 \psi^2}{(H\psi + EIM^6)^3} dx + \frac{E^2 F^2 I}{IH^2} \int_0^l \frac{(M^6)^4 \psi}{(H\psi + EIM^6)^3} dx = 0. \quad (196)$$

Интегралы, входящие в уравнение (196), зависят от вида нагрузки, приложенной к нити, и условий закрепления ее концов. Они вычисляются по квадратурным формулам Ньютона — Котеса. Их значения для наиболее часто встречающихся схем загрузки и типов крепления концов нитей к опорам приведены в работе [29].

Для случая равномерно распределенной нагрузки и шарнирного закрепления концов нити уравнение (196) примет вид

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{25q^2 l^6 EF^2}{12H^2 (5l^2 H + 48EI)^3} + \frac{120q^2 l^6 E^2 F^2 I}{H^2 (5l^2 H + 48EI)^2} = 0. \quad (197)$$

Если в этом уравнении положить $I = 0$, то придем к решению, полученному Р. Н. Мацелинским [20] для гибкой упругой нити,

$$\frac{d\omega}{dH} - \frac{\omega}{H} - \frac{q^2 l^2 \omega^2}{12H^4} = 0,$$

где $\omega = EF$ — жесткости нити на растяжение.

Решение дифференциального уравнения (196) можно получить, воспользовавшись разложением искомой функции в ряд Тейлора

$$H = H_0 + H'_0(F - F_0) + H''_0(F - F_0)^2 + \dots, \quad (198)$$

где H_0 и F_0 — начальные условия.

Коэффициенты ряда Тейлора можно получить последовательным дифференцированием уравнения (196):

$$H'_0 = \frac{dH}{dF}; \quad H''_0 = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{dH}{dF} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{dH}{dF} \right) \frac{dH}{dF}.$$

За H_0 можно принять значение распора, возникающего в недеформированной нити под действием начальной и дополнительной нагрузок; за F_0 — площадь поперечного сечения нити, в которой при распоре H_0 напряжения от изгиба минимальные.

Рассмотрим задачу о представлении кривой изгиба нити конечной жесткости в виде тригонометрического ряда. Решение будем искать в виде [30]

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (199)$$

Поскольку в статическом отношении нить конечной жесткости отождествляется с растянуто-изогнутым стержнем, то неизвестные коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \dots$ ряда можно вычислить путем рассмотрения потенциальной энергии деформации балки, имеющей такие же граничные условия и несущей такую же нагрузку, как и нить. Потенциальная энергия деформации нити определяется выражением

$$U = \frac{El}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (200)$$

Подставив в (200) вместо y его выражение (199), получим

$$U = \frac{El\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2. \quad (201)$$

Теперь сообщим нити бесконечно малое перемещение, которое представляется бесконечно малыми вариациями коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots$ ряда (199). Допустим, что коэффициент a_n изменился на da_n . Тогда вместо члена $a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ будем иметь в ряде (199) $(a_n + da_n) \sin \frac{n\pi x}{l}$. Это приращение представляет собой дополнительный бесконечно малый прогиб, изображаемый синусоидой $da_n \sin \frac{n\pi x}{l}$. На этом дополнительном прогибе внешние силы совершают работу. Так, работа распределенной нагрузки

$$\int_0^l q dx da_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{ql}{n\pi} da_n (1 - \cos n\pi). \quad (202)$$

Распор H непосредственно не совершает работу, так как отсутствуют перемещения опор, но работу совершает вызванный им изгибающий момент. На бесконечно малом перемещении величина изгибающего момента $H da_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

Для того чтобы найти работу изгибающего момента на этом перемещении, следует определить изменение угла поворота поперечных сечений нити

$$d\alpha = - \frac{d^2 y}{dx^2} dx = da_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

откуда $\alpha = da_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 (1 - \cos n\pi)$, и выражение для работы момента примет вид

$$H (da_n)^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} (1 - \cos n\pi), \quad (203)$$

т. е. является величиной высшего порядка малости по сравнению с работой распределенной нагрузки, а, следовательно, ею можно пренебречь.

Приращение потенциальной энергии деформации нити вследствие приращения da_n коэффициента a_n

$$dU = \frac{\partial U}{\partial a_n} da_n = \frac{El\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n. \quad (204)$$

Приравнявая (204) работе распределенной нагрузки q (202), получаем

$$\frac{El\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n = \frac{ql}{n\pi} da_n (1 - \cos n\pi),$$

откуда

$$a_n = \frac{4ql^4}{El\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5}. \quad (205)$$

Подставив выражение (207) в ряд (199), получим уравнение кривой изгиба нити конечной жесткости

$$y = \frac{4ql^4}{El\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (206)$$

Обозначим

$$f^n = \frac{ql^4}{El}, \quad (207)$$

где f^n — максимальный прогиб нити конечной жесткости, совпадающий с точностью до числового коэффициента с прогибом балки.

Тогда зависимость (206) примет вид

$$y = \frac{4}{\pi^5} f^n \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (208)$$

или

$$y = \frac{4}{\pi^5} k f^6 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (209)$$

где

$$f^n = k f^6; \quad f^6 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{El}.$$

Определим коэффициент k . Для этого рассмотрим дифференциальное уравнение изогнутой оси нити

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M^6 + Hy. \quad (210)$$

Выражение для балочного момента при представлении кривой изгиба балки тригонометрическим рядом (199)

$$M^6 = \frac{4 \cdot 384 EI}{5\pi^3 l^3} f^6 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (211)$$

Подставляя зависимости (209) и (211) в выражение (210), получаем

$$\begin{aligned} \frac{4EI}{\pi^3 l^2} k f_0^6 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{4H}{\pi^5} k f_0^6 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ = \frac{4 \cdot 384EI}{5\pi^3 l^2} f_0^6 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

или

$$k f_0^6 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2 k f_0^6 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} = f_0^6,$$

откуда

$$k = \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2}}. \quad (212)$$

Воспользуемся полученными результатами для вывода расчетных формул для определения ординат упругой линии y , углов поворота $\operatorname{tg} \alpha$, изгибающих моментов M и поперечных сил Q при действии начальной равномерно распределенной нагрузки.

А. Шарнирное закрепление концов нити к опорам, расположенным в одном уровне,

$$y = \frac{q}{24EI} \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi} \right)^2}; \quad (213)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{24EI} \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi} \right)^2}; \quad (214)$$

$$M = \frac{q}{2} \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi} \right)^2}; \quad (215)$$

$$Q = \frac{q}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi} \right)^2}. \quad (216)$$

В формулы (213) — (216) входит неизвестный параметр u_0 . Его значение можно определить из уравнения

$$f_0 = \frac{f_0^6}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi} \right)^2}, \quad (217)$$

где f_0 — начальная (заданная) стрела провисания нити конечной жесткости; f_0^6 — прогиб балки под действием начальной нагрузки.

В указанных формулах вместо ряда $\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2}$ учтен только его первый член. Такое допущение вполне приемлемо, так как по данным численных исследований установлено, что точность результатов при исполь-

вовании двух членов ряда повышается на 0,5 %, а при 10 — на 0,7 % по сравнению с использованием одного члена.

Б. Жесткое закрепление концов нити к опорам, расположенным в одном уровне,

$$y = \frac{q}{24EI} \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (218)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{24EI} \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (219)$$

$$M = \frac{q}{24} \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (220)$$

$$Q = \frac{q}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (221)$$

Значение параметра u_0 определяется из уравнения

$$f_0 = \frac{f_0^0}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (222)$$

При действии начальной q и дополнительной p нагрузок расчетные формулы будут иметь вид:

А. Шарнирное закрепление концов нити к опорам, расположенным в одном уровне,

$$y = \frac{q+p}{24EI} \frac{l^2 x - 2lx^2 + x^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (223)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q+p}{24EI} \frac{l^2 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (224)$$

$$M = \frac{q+p}{2} \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (225)$$

$$Q = \frac{q+p}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}. \quad (226)$$

В формулы (223) — (226) входит неизвестный параметр u . Его значение можно определить из уравнения

$$\frac{\frac{1632\pi^4}{2625} \left(\frac{f_0^0}{r}\right)^2}{(\pi^2 - 4u^2)} - u^2 = \frac{\frac{1632\pi^4}{2625} \left(\frac{f_0^0}{r}\right)^2}{(\pi^2 + 4u_0^2)} - u_0^2. \quad (227)$$

Б. Жесткое закрепление концов нити к опорам, расположенным в одном уровне,

$$y = \frac{q+p}{24EI} \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (228)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q+p}{24EI} \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (229)$$

$$M = \frac{q+p}{24} \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (230)$$

$$Q = \frac{q+p}{2} \frac{1-2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}. \quad (231)$$

Значение параметра u определяется из уравнения

$$\frac{\frac{64\pi^4}{105} \left(\frac{f_0^6}{r}\right)^2}{(\pi^2 + u^2)^2} - u^2 \frac{\frac{64\pi^4}{105} \left(\frac{f_0^6}{r}\right)^2}{(\pi^2 + u_0^2)^2} - u_0^2. \quad (232)$$

Для других схем загрузки расчетные формулы приведены в работе [30].

§ 15. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Приведенные выше расчетные зависимости могут быть существенно упрощены при использовании таблиц с заранее вычисленными значениями функций, зависящих от параметра u , абсциссы ξ и коэффициентов, характеризующих положение дополнительной нагрузки $\frac{a}{l}, \frac{b}{l}$ (см. рис. 68) и др.

Покажем это на примере нити, работающей с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, распределенных по всему пролету при шарнирном закреплении концов.

С этой целью расчетные формулы (41) — (44) перепишем следующим образом:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \frac{(q+p) l^4}{EI} \Psi_u; \quad (233)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{(q+p) l^3}{24EI} \Psi_{\operatorname{tg} \alpha}; \quad (234)$$

$$M = \frac{(q+p) l^2}{8} \Psi_M; \quad (235)$$

$$Q = \frac{(q+p) l}{2} \Psi_Q, \quad (236)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_v &= \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u} \right]; \\ \psi_{\operatorname{tg} \alpha} &= \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\operatorname{th} u}{2} + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u} \right]; \\ \psi_M &= \frac{4}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u}; \quad \psi_Q = \frac{2}{u} \left[\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u} \right].\end{aligned}$$

Уравнение для определения параметра u можно представить следующим образом:

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \psi - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2) = \psi_0, \quad (237)$$

где

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right]; \\ \psi_0 &= \frac{1}{u_0^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right)^2 - \frac{5}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right].\end{aligned}$$

Таким образом, значения ординат упругой линии, углов наклона касательных, изгибающих моментов и поперечных сил в нити получаются умножением соответствующих выражений, полученных для балки, находящейся под действием поперечной нагрузки $(q+p)$ на функции ψ_v , $\psi_{\operatorname{tg} \alpha}$, ψ_M и ψ_Q , зависящие от параметра u и абсциссы ξ .

Функции ψ_v , ..., ψ_Q равны единице при $u=0$, т. е. когда распор $H=0$. С ростом распора каждая из этих функций уменьшается. Следовательно, функции ψ_v , ..., ψ_Q показывают, насколько уменьшаются в нити прогибы, углы наклона касательных и расчетные усилия в сравнении с балкой без осевой силы при прочих равных условиях.

Числовые значения функций ψ , ψ_v , $\psi_{\operatorname{tg} \alpha}$, ψ_M и ψ_Q для различных схем нагружения нити при шарнирном и жестком закреплении ее концов и различных значениях ξ приведены в работах [6, 32].

Как показал Ю. В. Смирнов, при выводе расчетных зависимостей для определения ординат упругой линии, углов наклона касательных к оси нити, изгибающих моментов и поперечных сил при принятых предпосылках расчета и известной величине распора от суммарной нагрузки может быть использован принцип аддитивности нагрузок и воздействий. Использование принципа аддитивности, особенно в сочетании с методом начальных параметров, позволяет упростить вывод расчетных зависимостей при сложных схемах нагружения, поскольку значения y , $\operatorname{tg} \alpha$, M и Q можно представить в виде линейно-независимой комбинации их от простых нагрузок.

При выводе уравнений для определения параметра u использовано условие неразрывности деформаций в виде

$$L = L_0 + \Delta L.$$

Если пренебречь упругими деформациями и принять условие неразрывности в виде $L = L_0$, то в уравнениях для определения параметра u член $\left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 (u^2 - u_0^2)$ будет равен нулю. При этом погрешность в вычислении распора не будет превышать 1 % для нитей

со стрелой провисания $1/_{10}$ пролета и 3 % для нитей со стрелой провисания $1/_{20}$ пролета *. При значениях стрел провисания, меньших $1/_{20}$ пролета, влияние упругих деформаций будет более существенным.

Результаты исследования показывают, что при значениях параметра $u \geq 10$ распор в нити конечной жесткости, без большой погрешности (0,5 — 2 %), можно вычислять по формулам для абсолютно гибких нитей. При этом изгибающие моменты в нити, несмотря на небольшую абсолютную величину, могут оказать значительное, а иногда и решающее влияние на ее напряженное состояние, поскольку момент сопротивления нити будет очень малым. Для вычисления изгибающих моментов в нити при значениях параметра $u \geq 3$ найденные выше формулы можно существенно упростить. Так, по данным Ю. В. Смирнова, выражения для определения изгибающих моментов в нити при действии начальной нагрузки примут следующий вид:

при шарнирном закреплении концов

$$M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{8} \frac{2}{u_0^2} (1 - 2\Gamma^{-u_0}); \quad (238)$$

при жестком закреплении концов

$$M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{8} \frac{2}{u_0^2} (1 - 2u_0\Gamma^{-u_0}); \quad (239)$$

$$M_{\xi=0;l} = -\frac{ql^2}{12} \frac{3}{u_0^2} (u_0 - 1). \quad (240)$$

Проверять необходимо опорные сечения нити (при жестком закреплении концов), а также сечения, расположенные под сосредоточенной силой (в местах резкого изменения кривизны).

Техника расчета дана в приложении.

Глава IV.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ПОЛОГИХ УПРУГИХ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 1. НИТИ, СВОБОДНЫЕ ОТ СВЯЗЕЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим деформированное состояние нити конечной жесткости, шарнирно-закрепленной на опорах и загруженной начальной q и дополнительной p равномерно распределенными нагрузками [31]. Примем оси X, Y, Z неподвижными, а оси x_1, y_1, z_1 подвижными координатными осями.

Допустим, что под действием возрастающей дополнительной нагрузки p нить теряет устойчивость; при этом поперечные сечения нити получают поступательные смещения v в горизонтальной плоскости

* При дополнительной равномерно распределенной нагрузке $p = 10q$.

XOY и поворачиваются на угол θ в плоскости сечения (рис. 79). При таком выпучивании на слегка повернутые поперечные сечения нити будут действовать начальные напряжения, т. е. напряжения, возникающие в нити в момент потери устойчивости:

цепные $\sigma_N = \frac{N}{F}$, постоянные по длине нити;

нормальные $\sigma_M = \frac{M_{y_1}}{I_{y_1}} z_1$, переменные по длине нити;

касательные $\tau = \frac{Q_{z_1} S_{y_1}}{I_{y_1} \delta}$, переменные по длине нити.

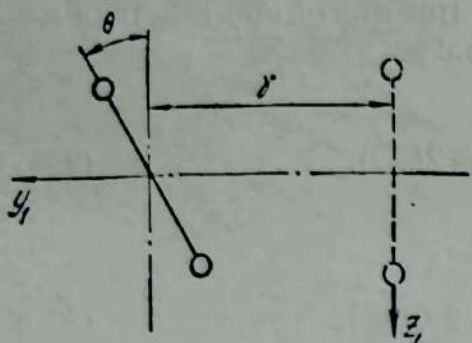


Рис. 79. Схема деформации нити при потере устойчивости.

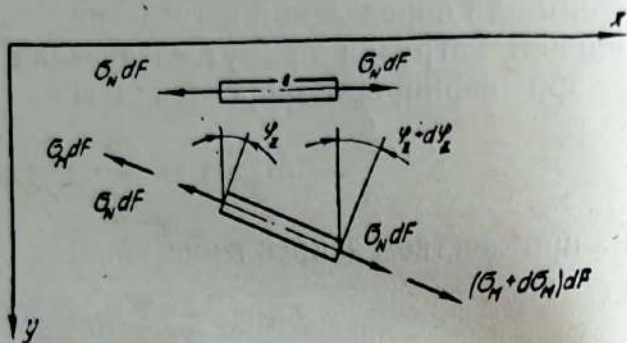


Рис. 80. К определению поперечной нагрузки.

При потере нитью плоской формы изгиба эти напряжения дадут горизонтальные составляющие в плоскости XOY и крутящие моменты относительно оси X . Для определения дополнительной распределенной поперечной нагрузки и дополнительного распределенного крутящего момента воспользуемся методикой, предложенной А. Р. Ржаницыным [25], при рассмотрении им изгибно-крутильных деформаций двутавровых балок.

Рассмотрим смещение нити в плоскости XOY . Проектируя цепное усилие N на неподвижную ось OY , получим величину поперечной составляющей dN_y^1 (рис. 80):

$$dN_y^1 = -\sigma_N \sin \varphi_z dF + \sigma_N \sin (\varphi_z + d\varphi_z) dF \approx \sigma_N d\varphi_z dF.$$

Здесь принято, что $\sin (\varphi_z + d\varphi_z) - \sin \varphi_z = d\varphi_z$. Величина распределенной поперечной нагрузки от dN_y^1 будет равна:

$$dq_y^1 = \frac{dN_y^1}{dx} = \sigma_N dF \frac{d\varphi_z}{dx} = \sigma_N dF v'''. \quad (241)$$

Нормальные напряжения σ_M при проектировании их на ось OY дадут поперечную составляющую (см. рис. 80).

$$\begin{aligned} dN_y^2 &= -\sigma_M \sin \varphi_z dF + (\sigma_M + d\sigma_M) \sin (\varphi_z + d\varphi_z) dF = \\ &= \sigma_M d\varphi_z dF + d\sigma_M \varphi_z dF + d\sigma_M d\varphi_z dF, \end{aligned}$$

или, пренебрегая $d\sigma_M d\varphi_Z dF$, как величиной высшего порядка малости, получим

$$dN_y^2 = \sigma_M d\varphi_Z dF + d\sigma_M \varphi_Z dF = \frac{M_{y_1} z_1}{I_{y_1}} d\varphi_Z dF + \frac{dM_{y_1} z_1}{I_{y_1}} \varphi_Z dF,$$

где $\sigma_M = \frac{M_{y_1} z_1}{I_{y_1}}$; $d\sigma_M = \frac{dM_{y_1} z_1}{I_{y_1}}$.

Распределенная поперечная нагрузка от dN_y^2 равна:

$$\begin{aligned} dq_y^2 &= \frac{dN_y^2}{dx} = \frac{M_{y_1} z_1}{I_{y_1}} \frac{d\varphi_Z}{dx} dF + \frac{dM_{y_1}}{dx} \frac{z_1}{I_{y_1}} \varphi_Z dF = \\ &= \frac{M_{y_1} z_1}{I_{y_1}} v'' dF + \frac{M'_{y_1} z_1}{I_{y_1}} v' dF. \end{aligned} \quad (242)$$

Складывая поперечные нагрузки (241) и (242) и интегрируя найденное выражение по площади сечения нити F , получаем суммарную распределенную поперечную нагрузку от смещения v :

$$q_y^v = \int_F \left(\sigma_N v'' + \frac{M_{y_1} z_1}{I_{y_1}} v'' + \frac{M'_{y_1} z_1}{I_{y_1}} v' \right) dF = N v''. \quad (243)$$

В уравнении (243) учтено, что $\int_F z_1 dF = 0$, поскольку y_1 и z_1 — центральные оси поперечного сечения нити.

Поперечные нагрузки dq_y^1 и dq_y^2 создают в нити крутящий момент (рис. 81).

$$dm_{x_1} = -(dq_y^1 + dq_y^2) z_1. \quad (244)$$

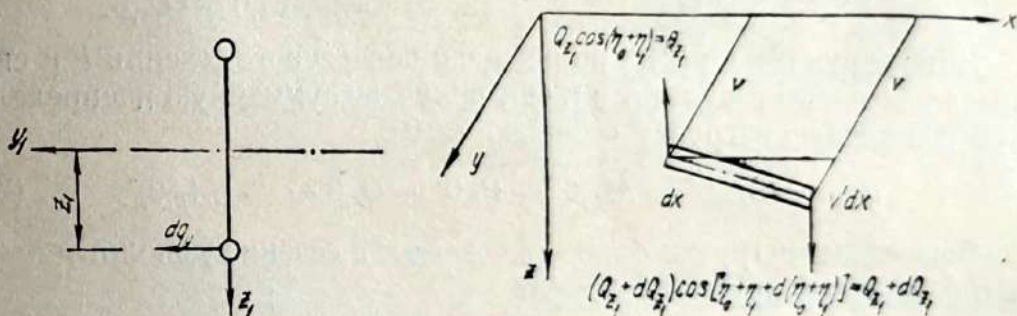


Рис. 81. К определению крутящего момента.

Подставляя (241) и (242) в (244) и интегрируя по площади поперечного сечения нити F , получаем

$$m_{x_1}^v = - \int_F \left(\sigma_N v'' + \frac{M_{y_1} z_1}{I_{y_1}} v'' + \frac{M'_{y_1} z_1}{I_{y_1}} v' \right) z_1 dF = - M_{y_1} v'' - M'_{y_1} v'. \quad (245)$$

В уравнении (245) учтено, что $\int_F z_1^2 dF = I_{y_1}$.

Касательные напряжения, действующие в сечениях нити, дают вертикальную равнодействующую Q_{z_1} (см. рис. 81), которая создает

дополнительный крутящий момент

$$m_{x_1}^v dx = (Q_{z_1} + dQ_{z_1}) v' dx \approx Q_{z_1} v' dx.$$

Величина распределенного крутящего момента будет равна

$$m_{x_1}^v = \frac{Q_{z_1} v' dx}{dx} = M_{v_1}^1 v'. \quad (246)$$

Рассмотрим влияние поворота сечения нити на угол θ (см. рис. 79). При повороте сечения на угол θ волокна нити смещаются в горизонтальной плоскости на величину $-z_1 \sin \theta \approx -z_1 \theta$. В результате этого смещения напряжения σ_N и σ_M дадут дополнительные поперечные рас-

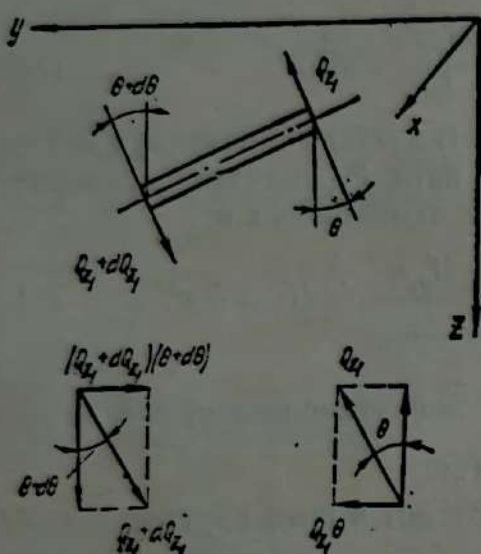


Рис. 82. К определению дополнительной поперечной нагрузки.

пределенные нагрузки dq_θ^1 и dq_θ^2 . Их величину можно найти по формулам (241) и (242), заменив в них v на $-z_1 \theta$. Тогда получим

$$dq_\theta^1 = \sigma_N z_1 \theta'' dF; \quad (247)$$

$$dq_\theta^2 = -\frac{M_{y_1} z_1^2}{I_{y_1}} \theta'' dF - \frac{M'_{y_1} z_1^2}{I_{y_1}} \theta dF. \quad (248)$$

Касательные напряжения дают при повороте поперечного сечения нити на угол θ дополнительную поперечную нагрузку (рис. 82)

$$q_\theta^3 = \frac{-(Q_{z_1} + dQ_{z_1})(\theta + d\theta) + Q_{z_1} \theta}{dx} = -Q_{z_1} \theta' - Q_{z_1} \theta. \quad (249)$$

Интегрируя (247) и (248) по площади поперечного сечения F и складывая найденный результат с (249), получаем суммарную распределенную поперечную нагрузку от поворота θ

$$q_\theta = -M_{y_1} \theta'' - M'_{y_1} \theta' - Q_{z_1} \theta' - Q_{z_1} \theta = -(M_{y_1} \theta)''. \quad (250)$$

Поперечные нагрузки dq_θ^1 и dq_θ^2 создают в сечении дополнительный распределенный крутящий момент

$$m_{x_1}^\theta = -\int_F (dq_\theta^1 + dq_\theta^2) z_1 = -\frac{N I_{y_1}}{F} \theta''. \quad (251)$$

В уравнении (251) учтено, что $\int_F z_1^3 dF = 0$.

При повороте поперечного сечения на угол θ касательные напряжения не вызовут крутящего момента, поскольку внешняя нагрузка действует в плоскости симметрии поперечных сечений нити. Крутящий момент от приращения касательных напряжений будет возникать в том случае, если нагрузка будет приложена не по оси нити. Допустим, что начальная нагрузка q приложена на расстоянии e_1 от центра изгиба сечения, а дополнительная нагрузка p — на расстоянии e_2 (рис. 83).

При повороте поперечного сечения нити на угол θ возникает дополнительный крутящий момент

$$m_{x_1}^{\theta} = -qe_1\theta - pe_2\theta. \quad (252)$$

Суммарный распределенный крутящий момент от поворота сечения на угол θ с учетом (251) и (252) будет

$$m_x^{\theta} = \frac{NI_{y_1}}{F} \theta'' - qe_1\theta - pe_2\theta. \quad (253)$$

Суммируя (243) и (250), получаем полную величину распределенной дополнительной поперечной нагрузки от смещения v и поворота θ

$$q_y = Nv'' - (M_{y_1}\theta)'', \quad (254)$$

а суммируя (245), (246) и (253), получаем величину дополнительного распределенного крутящего момента

$$m_{x_1} = -M_{y_1}v'' + \frac{NI_{y_1}}{F} \theta'' - qe_1\theta - pe_2\theta. \quad (255)$$

В силу принятого предположения о пологости нити конечной жесткости распор H в ней мало отличается от продольного усилия.

Поэтому в дальнейшем будем считать, что усилие в нити постоянно по длине и равно H . Тогда формулы (254) и (253) можно представить в виде:

$$q_y = Hv'' - (M_{y_1}\theta)''; \quad (256)$$

$$m_{x_1} = -M_{y_1}v'' + Hr^2\theta'' - qe_1\theta - pe_2\theta, \quad (257)$$

где $r^2 = \frac{I_{y_1}}{F}$.

Энергию деформации нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба определим по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{\omega} (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_{z_1} (v'')^2] dx, \quad (258)$$

где EI_{ω} — секториальная жесткость поперечного сечения нити; GI_d — крутильная жесткость нити; EI_{z_1} — изгибная жесткость нити в плоскости XOY .

Работу внешних сил при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба определим по формуле

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l (q_y v + m_{x_1} \theta) dx. \quad (259)$$

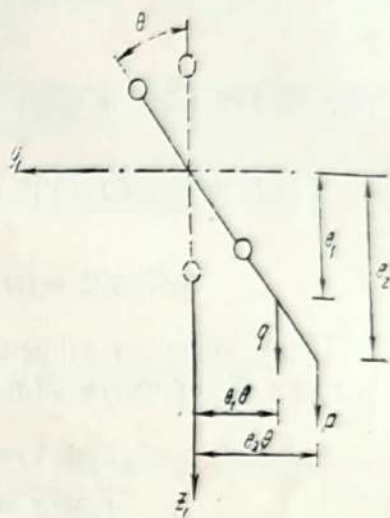


Рис. 83. К определению крутящего момента от начальной и дополнительной нагрузок, приложенных не в центре изгиба поперечного сечения нити.

Подставляя (256) и (257) в (259), получаем

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l [Hv''v - (M_{y,0})''v - M_{y,1}v''\theta + Hr^2\theta\theta'' - qe_1\theta^2 - pe_2\theta^2] dx. \quad (260)$$

Согласно энергетическому методу нить будет находиться в критическом состоянии, если будет выполняться условие

$$U - T = 0. \quad (261)$$

Подставляя (258) и (260) в (261), получаем уравнение устойчивости

$$\int_0^l [EI_{\omega}(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(v'')^2 - Hv''v + (M_{y,0})''v + M_{y,1}v''\theta - Hr^2\theta\theta'' + qe_1\theta^2 + pe_2\theta^2] dx = 0. \quad (262)$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах граничные условия будут иметь вид:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } x = 0 & v = v'' = \theta = \theta'' = 0; \\ \text{при } x = l & v = v'' = \theta = \theta'' = 0. \end{array} \right\} \quad (263)$$

В качестве функций v и θ , удовлетворяющих граничным условиям (263), принимаем:

$$\left. \begin{array}{l} v = A \sin \lambda x; \\ \theta = B \sin \lambda x, \end{array} \right\} \quad (264)$$

где $\lambda = \frac{\pi}{l}$.

Подставляя значение v и θ из (264) в уравнение устойчивости (262) и интегрируя полученное выражение, придем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} (P_{z_1} + H) A^2 - \frac{4}{l} AB \int_0^l M_{y,1} \sin^2 \lambda x dx + \\ + \left[P_{\omega} + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (qe_1 + pe_2) \right] r^2 B^2 = 0, \end{aligned} \quad (265)$$

где $P_{z_1} = EI_z \lambda^2$ — эйлерова сила, при продольном изгибе в плоскости $ХОУ$; $P_{\omega} = \frac{EI_{\omega} \lambda^2 + GI_d}{r^2}$ — критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

Коэффициенты A и B в уравнении (265) подбираются такими, чтобы дополнительная нагрузка, приложенная к нити, имела наименьшее значение.

Обозначая выражение, стоящее в левой части уравнения (265), через Π и составляя от него производные по каждому из коэффициентов,

получим систему однородных уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial A} &= 2 (P_{z_1} + H) A - \frac{4}{l} B \int_0^l M_{y_1} \sin^2 \lambda x dx = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial B} &= -\frac{4}{l} A \int_0^l M_{y_1} \sin^2 \lambda x dx + \\ &+ 2r^2 \left[P_{\omega} + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q e_1 + p e_2) \right] B = 0. \end{aligned} \right\} \quad (266)$$

Потеря устойчивости становится возможной, если эта система уравнений может дать решения для коэффициентов A и B , отличные от нуля. Этому случаю соответствует равенство нулю определителя полученной системы уравнений. Приравнявая его нулю, получаем:

$$\begin{vmatrix} P_{z_1} + H & -\frac{2}{l} \int_0^l M_{y_1} \sin^2 \lambda x dx \\ -\frac{2}{l} \int_0^l M_{y_1} \sin^2 \lambda x dx & r^2 \left[P_{\omega} + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q e_1 + p e_2) \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (267)$$

Раскрывая этот определитель, получаем уравнение устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости

$$r^2 (P_{z_1} + H) \left[P_{\omega} + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q e_1 + p e_2) \right] - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_{y_1} \sin^2 \lambda x dx \right]^2 = 0. \quad (268)$$

Интеграл, входящий в уравнение (268), зависит от вида нагрузки, приложенной к нити, и условий закрепления ее концов. Для вычисления изгибающего момента, действующего в нити, можно воспользоваться формулами одного из изложенных в главе 3 методов расчета. Воспользуемся формулами приближенного метода. Применение указанного метода для вычисления изгибающих моментов, действующих в нити, позволяет существенно упростить расчетные зависимости и практически не сказывается на точности расчетов. Так, максимальная разница между значениями изгибающих моментов, вычисленных по точному и приближенному методам при действии распределенной нагрузки, составляет не более 1,5 %.

Рассмотрим нить, работающую с изгибом от начальной нагрузки. Тогда изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , можно представить в виде

$$M_{y_1} = \frac{M_{y_1}^0}{1 + kH}, \quad (269)$$

где $M_{y_1}^0$ — изгибающий момент в плоскости XOZ для балки с геометрическими характеристиками нити конечной жесткости; $k = \frac{1}{EI_{y_1} \lambda^2}$ — коэффициент.

Подставляя (269) в (268) и производя интегрирование, приходим к уравнению

$$r^2 (P_{z_1} + H) \left[P_{\infty} + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q e_1 + p e_2) \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12 \lambda^2} \right)^2 \left(\frac{q + p}{1 + kH} \right)^2 = 0. \quad (270)$$

Полученное уравнение содержит две неизвестные величины — критическую нагрузку p и критический распор H . Для связи между критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение неразрывности деформаций

$$L = L_0 + \Delta L, \quad (271)$$

где L — длина нити после приложения критической нагрузки; L_0 — длина нити при начальной нагрузке; ΔL — упругое приращение длины нити, вызванное критической нагрузкой.

Мы вправе использовать это уравнение, поскольку нить под действием любой дополнительной, в том числе и критической нагрузки, деформируется в вертикальной плоскости XOZ .

После подстановки в уравнение (271) значений длины нити получим уравнение (227). Перепишем его в несколько измененном виде

$$\frac{17 (q + p)^2 l^6 EF}{40 \cdot 320 EI_{y_1}^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17 q^2 l^6 EF}{40 \cdot 320 EI_{y_1}^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (272)$$

Определяя из уравнения (272) величину p и подставляя ее значение в выражение (270), придем к следующему уравнению относительно критического распора H :

$$r^2 (P_{z_1} + H) \left\{ P_{\infty} + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} \left[q (e_1 - e_2) + e_2 (1 + kH) \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} \right] \right\} - \left(\frac{3 + \pi^2}{12 \lambda^2} \right)^2 (a_1^2 H + a_2^2) = 0, \quad (273)$$

где

$$a_1^2 = \frac{40 \cdot 320 EI_{y_1}^2}{17 l^6 EF}; \quad a_2^2 = \frac{q^2}{(1 + kH_0)^2} - \frac{40 \cdot 320 EI_{y_1}^2}{17 l^6 EF} H_0.$$

Решая уравнение (273), определяем значение критического распора H , а подставляя его значение в уравнение (272) — величину критической дополнительной нагрузки p .

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (269) будем иметь

$$M_{y_1} = \frac{M_{y_1}^0}{1 + kH} - \frac{4 f_0 x (l - x) H}{l^2 (1 + kH)}, \quad (274)$$

где f_0 — стрела провисания нити при действии начальной нагрузки.

Вместо уравнения (272) будем иметь

$$\frac{EF}{(1 + kH)^2} \left[\frac{17 (q + p)^2 l^6}{40 \cdot 320 EI_{y_1}^2} + \frac{(q + p) f l^2}{15 EI_{y_1}} + \frac{8 f^2}{3 l^2} \right] = \frac{8 f_0^2 EF}{3 l^2} + H - H_0, \quad (275)$$

а вместо уравнения (270) —

$$r^2 (P_{z_1} + H) \left[P_{\omega} + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q e_1 + p e_2) \right] - \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right) \frac{f_0^2}{(1 + kH)^2} \times \\ \times \left(\frac{pl^2}{8f_0} + H_0 - H \right)^2 = 0. \quad (276)$$

Уравнение для определения критического распора примет вид

$$r^2 (P_{z_1} + H) (1 + kH)^2 \left[P_{\omega} + H + \frac{e_1 - e_2}{r^2 \lambda^2} q - \frac{e_2 b_2}{2r^2 b_3 \lambda^2} + \right. \\ \left. + \frac{e_2}{r^2 \lambda^2} \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_3} \right)^2 + \frac{1}{b_3} (b_4 + H) (1 + kH)^2 - \frac{b_1}{b_3}} \right] - f_0^2 \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right)^2 \times \\ \times \left[-\frac{l^2 b_2}{16f_0 b_3} + \frac{l^2}{8f_0} \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_3} \right)^2 + \frac{1}{b_3} (b_4 + H) (1 + kH)^2 - \frac{b_1}{b_3}} - \right. \\ \left. - H \right]^2 = 0, \quad (277)$$

где

$$b_1 = \frac{8f_0^2 EF}{3l^2}; \quad b_2 = \frac{f_0 l^2 EF}{15EI}; \quad b_3 = \frac{17l^6 EF}{40 \cdot 320EI^2}; \quad b_4 = \frac{8f_0^2 EF}{3l_2} - H_0.$$

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах граничные условия будут иметь вид [31]

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad v = v' = \theta = \theta' = 0; \\ \text{при } x = l \quad v = v' = \theta = \theta' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (278)$$

При таких граничных условиях в качестве функций v и θ можно принять:

$$v = A (1 - \cos 2\lambda x); \quad \theta = B (1 - \cos 2\lambda x). \quad (279)$$

Подставив значения v и θ из (279) в уравнение устойчивости (262), получим следующее выражение:

$$(P_{z_1}^* + H) A^2 + \frac{4}{l} AB \int_0^l M_{y_1} \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \\ + \left[P_{\omega}^* + H + \frac{3}{4\lambda^2 r^2} (q e_1 + p e_2) \right] r^2 B^2 = 0, \quad (280)$$

где $P_{z_1}^* = EI_{z_1} 4\lambda^2$ — эйлерова сила при продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_{\omega}^* = \frac{EI_{\omega} 4\lambda^2 + GI_d}{r^2}$ — критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

Поступая далее, как и в случае шарнирного закрепления концов нити, придем к уравнению устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости

$$r^2 (P_{z_1}^* + H) \left[P_{\omega}^* + H + \frac{3}{4\lambda^2 r^2} (q e_1 + p e_2) \right] - \\ - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_{y_1} \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]^2 = 0. \quad (281)$$

Если нить работает с изгибом от начальной нагрузки, то изгибающий момент, действующий в нити, можно представить в виде

$$M_{y_1} = \frac{M_{y_1}^0}{1 + 0,25kH}. \quad (282)$$

Подставляя выражение для изгибающего момента M_{y_1} из (282) в (281), получаем уравнение устойчивости

$$r^2 (P_{z_1}^* + H) \left[P_{\omega}^* + H + \frac{3}{4\lambda^2 r^2} (qe_1 + pe_2) \right] - \frac{49}{256\lambda^4} \left(\frac{q+p}{1 + 0,25kH} \right)^2 = 0. \quad (283)$$

Для связи между критическим распором и критической нагрузкой используем уравнение неразрывности деформации (232). Перепишем его в несколько измененном виде

$$\frac{(q+p)^3 l^6 EF}{60480EI_{y_1}^2 (1 + 0,25kH)^3} - H = \frac{q^2 l^6 EF}{60480EI_{y_1}^2 (1 + 0,25kH_0)^2} - H_0. \quad (284)$$

Выражая из уравнения (284) величину дополнительной нагрузки p и подставляя ее значение в формулу (283), приходим к уравнению относительно критического распора

$$r^2 (P_{z_1}^* + H) \left\{ P_{\omega}^* + H + \frac{3}{4\lambda^2 r^2} [q(e_1 - e_2) + e_2 (1 + 0,25kH)] \times \right. \\ \left. \times \sqrt{c_1^2 H + c_2^2} \right\} - \frac{49}{256\lambda^4} (c_1^2 H + c_2^2) = 0, \quad (285)$$

где
$$c_1^2 = \frac{60480EI_{y_1}^2}{l^6 EF}; \quad c_2^2 = \frac{q^2}{1 + 0,25kH_0)^2} - \frac{60480EI_{y_1}^2}{l^6 EF} H_0.$$

Из уравнения (285) определяется значение критического распора H , а из выражения (284) — критическая дополнительная нагрузка p .

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , можно представить в виде

$$M_{y_1} = \frac{M_{y_1}^0}{1 + 0,25kH} - \frac{4f_0 x (l - x) H}{l^2 (1 + 0,25kH)}. \quad (286)$$

Подставляя (286) в (281), получаем уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости

$$r^2 (P_{z_1}^* + H) \left[P_{\omega}^* + H + \frac{3}{4\lambda^2 r^2} (qe_1 + pe_2) \right] - \\ - \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right)^2 \frac{f_0^2}{(1 + 0,25kH)^2} \left[\frac{21}{32(3 + \pi^2)} \frac{(q+p) l^2}{f_0} + H \right]^2 = 0. \quad (287)$$

Для связи между критическим распором H и дополнительной критической нагрузкой p используем уравнение неразрывности деформаций нити

$$\frac{EF}{(1 + 0,25kH)^2} \left[\frac{(q+p)^2 l^6}{60480EI_{y_1}^2} + \frac{(q+p) f_0 l^2}{90EI_{y_1}} + \frac{8f_0^2}{3l^2} \right] = \frac{8f_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0. \quad (288)$$

Решая уравнения (288) относительно критической нагрузки p и подставляя полученное значение в выражение (287), получаем уравнение, содержащее одно неизвестное — критический распор H

$$r^2 (P_2^* + H) (1 + 0,25kH)^2 \left\{ P_0^* + H + \frac{3}{4\lambda^2 r^2} \left[q(e_1 - e_2) - \frac{e_2 d_2}{2d_3} + \right. \right. \\ \left. \left. + e_2 \sqrt{\left(\frac{d_2}{2d_3} \right)^2 + \frac{1}{d_3} (d_4 + H) (1 + 0,25kH)^2 - \frac{d_1}{d_3}} \right] \right\} - \\ - f_0 \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right)^2 \left[- \frac{21d_2 l^2}{64f_0 (3 + \pi^2) d_3} + \frac{21l^2}{32 (3 + \pi^2) f_0} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\left(\frac{d_2}{2d_3} \right)^2 + \frac{1}{d_3} (d_4 + H) (1 + 0,25kH)^2 - \frac{d_1}{d_3}} - H \right]^2 = 0, \quad (289)$$

где

$$d_1 = \frac{8f_0^2 EF}{3l^2}; \quad d_2 = \frac{f_0 l^2 EF}{90EI_{y_1}}; \quad d_3 = \frac{l^6 EF}{60480EI_{y_1}^2}; \quad d_4 = \frac{8f_0^2 EF}{3l^2} - H_0.$$

Определяя из уравнения (289) критический распор H и подставляя его в выражение (288), находим значение дополнительной критической нагрузки p .

§ 2. НИТИ, РАСКРЕПЛЕННЫЕ СВЯЗЯМИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Нити конечной жесткости часто раскрепляют в горизонтальной плоскости какими-либо связями. Причем эти связи, препятствуя смещению нити в горизонтальной плоскости, не препятствуют повороту ее сечения вокруг некоторой оси, в общем случае не совпадающей с центральной осью нити (рис. 84). Допустим, что линия раскрепления нити находится на расстоянии e_c от центральной оси y_1 , а начальная q и дополнительная p нагрузки приложены соответственно на расстояниях e_1 и e_2 от той же оси. Примем, что e_0 , e_1 и e_2 — постоянны по длине нити [31].

При потере нитью устойчивости плоской формы изгиба горизонтальное перемещение оси нити будет

$$v = e_0 \theta. \quad (290)$$

При этом возникающая в связях горизонтальная реакция q_0 создает дополнительную крутящую нагрузку $m_0 = q_0 e_0$ относительно оси нити x_1 . Дополнительный крутящий момент возникает и от внецентренного приложения нагрузок q и p при повороте поперечного сечения нити на угол θ . Его величина будет равна

$$m_q = q(e_1 - e_c)\theta - p(e_2 - e_c)\theta.$$

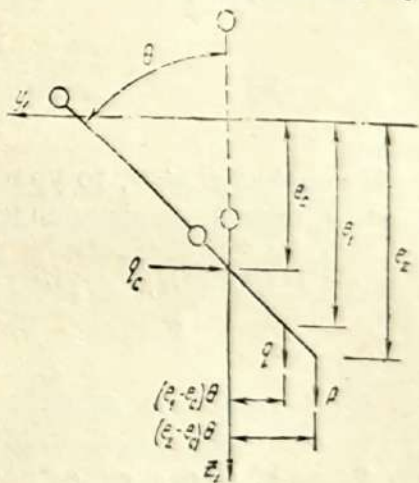


Рис. 84. К расчету нити на устойчивость, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости.

Тогда, добавляя эти члены в выражение для дополнительной распределенной поперечной нагрузки (256) и дополнительного распределенного крутящего момента (257), получаем:

$$q_v = Hv'' - (M_{v,0})'' - q_0; \quad (291)$$

$$m_{x_1} = M_{v,1}v'' + Hr^2\theta'' - q(e_1 - e_0)\theta - p(e_2 - e_0)\theta + q_0e_0. \quad (292)$$

Подставив в уравнения (291) и (292) вместо v его значение из (290), будем иметь:

$$\dot{q}_v = He_0\theta'' - (M_{v,1}\theta)'' - q_c; \quad (293)$$

$$m_{x_1} = -M_{v,1}e_c\theta'' + Hr^2\theta'' - q(e_1 - e_0)\theta - p(e_2 - e_0)\theta + q_0e_0. \quad (294)$$

Тогда уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости примет вид

$$\int_0^l [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z e_c^2 (\theta'')^2 - He_c^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_{v,1}\theta)'' e_c \theta + \\ + M_{v,1} e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q e_0 \theta + q(e_1 - e_0) \theta^2 + p(e_2 - e_0) \theta^2 - \\ - q_c e_c \theta] dx = 0. \quad (295)$$

В случае шарнирного закрепления концов нити в качестве функции, аппроксимирующей поворот θ , принимаем функцию (264).

Подставляя значение θ из (264) в уравнение устойчивости нити, раскрепленной связями по всей длине (295), и интегрируя полученное выражение, приходим к следующему уравнению:

$$B^2 \left(EI_\omega \lambda^2 + GI_d + Hr^2 + EI_z e_c^2 \lambda^2 + He_c^2 + \frac{e_1 - e_0}{\lambda^2} q + \frac{e_2 - e_0}{\lambda^2} p - \right. \\ \left. - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_{v,1} \sin^2 \lambda x dx \right) = 0. \quad (296)$$

Поскольку $B \neq 0$, то уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити, шарнирно-раскрепленной связями по всей длине, примет вид

$$r^2 (P_\omega + H) + e_c^2 (P_{z_1} + H) + \frac{e_1 - e_0}{\lambda^2} q + \frac{e_2 - e_0}{\lambda^2} p - \\ - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_{v,1} \sin^2 \lambda x dx = 0, \quad (297)$$

где P_{z_1} — эйлерова сила, при продольном изгибе в плоскости XOY ; P_ω — критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

В случае нити, работающей с изгибом от начальной нагрузки, уравнение (297) будет иметь вид

$$r^2 (P_\omega + H) + e_c^2 (P_{z_1} + H) + \frac{e_1 - e_0}{\lambda^2} q + \frac{e_2 - e_0}{\lambda^2} p - \\ - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \frac{(q + p) e_c}{1 + kH} = 0. \quad (298)$$

Уравнение (298) содержит две неизвестные величины — критический распор H и дополнительную критическую нагрузку p . Для связи между критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение (272). Определяя из уравнения (272) величину p и подставляя ее значение в выражение (298), придем к уравнению, в котором неизвестным будет критический распор H

$$r^2 (P_\omega + H) + e_c^2 (P_{z_1} + H) + \frac{e_1 - e_2}{\lambda^2} q + \left[(e_2 - e_c) (1 + kH) - \frac{3 + \pi^2}{6} e_c \right] \frac{\sqrt{a_1^2 H + a_2^2}}{\lambda^2} = 0. \quad (299)$$

Решая уравнение (299), определяем значение критического распора H , а подставляя его значение в уравнение (272) — величину критической дополнительной нагрузки.

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (298) будем иметь

$$r_2 (P_\omega + H) - e_c^2 (P_{z_1} + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} p - \frac{3 + \pi^2}{3\pi^2} \frac{4f_0 e_c}{1 + kH} \left(\frac{pl^2}{8f_0} + H_0 - H \right) = 0. \quad (300)$$

Связь между дополнительной нагрузкой p и распором H задается уравнением (275). Определяя из него значение p и подставляя его в уравнение (300), получаем уравнение с одним неизвестным — критическим распором H

$$r^2 (P_\omega + H) + e_c^2 (P_{z_1} + H) + \frac{e_1 - e_2}{\lambda^2} q - \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} \frac{b_2}{2b_3} + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_3} \right)^2 + \frac{1}{b_3} (b_4 + H) (1 + kH)^2 - \frac{b_1}{b_3}} - \frac{3 + \pi^2}{3\pi^2} \frac{4f_0 e_c}{1 + kH} \left(\frac{l^2 b_2}{16f_0 b_3} - H + \frac{l^2}{8f_0} \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_3} \right)^2 + \frac{1}{b_2} (b_4 + H) (1 + kH)^2 - \frac{b_1}{b_3}} \right) = 0, \quad (301)$$

где значения коэффициентов b_1 , b_2 , b_3 и b_4 приведены выше.

§ 3. НИТИ, СВОБОДНЫЕ ОТ СВЯЗЕЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим нить шарнирно-закрепленную на опорах и загруженную начальной нагрузкой q , равномерно распределенной по всему пролету, и дополнительной нагрузкой p , равномерно распределенной на левой половине пролета. Будем считать, что при начальной нагрузке q устойчивость плоской формы изгиба нити обеспечена. При возрастании дополнительной нагрузки p в какой-то момент плоская форма изгиба нити перестает быть устойчивой и при определенной величине нагрузки p нить теряет устойчивость и изгибается по пространственной кривой [31].

В этом случае выражения для дополнительной распределенной поперечной нагрузки q_y и дополнительного распределенного крутящего момента m_{x_1} , возникающих от заданного напряженного состояния нити при изменении ее деформированного состояния, можно представить в виде:

$$q_y = Hv'' - (M_{y_1}\theta)''; \quad (0 \leq x \leq l) \quad (302)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{x_1} &= -M_{y_1}v'' + Hr^2\theta'' - qc_1\theta - pe_2\theta; \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right) \\ m_{x_1} &= -M_{y_1}v'' + Hr^2\theta'' - qc_1\theta. \quad \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l\right). \end{aligned} \right\} \quad (303)$$

Поступая в дальнейшем аналогично изложенному в § 1, получаем уравнение устойчивости нити конечной жесткости при несимметричной нагрузке

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_{z_1} (v'')^2 - Hv''v + (M_{y_1}\theta)''v + M_{y_1}\theta v'' - \\ & - Hr^2\theta\theta'' + qc_1\theta^2 + pe_2\theta^2] dx + \int_{l/2}^l [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_{z_1} (v'')^2 - \\ & - Hv''v + (M_{y_1}\theta)''v + M_{y_1}\theta v'' - Hr^2\theta\theta'' + qc_1\theta^2] dx = 0. \end{aligned} \quad (304)$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах граничные условия приведены в (263). В качестве функций v и θ , удовлетворяющих граничным условиям, примем

$$\left. \begin{aligned} v &= A \sin 2\lambda x; \\ \theta &= B \sin 2\lambda x. \end{aligned} \right\} \quad (305)$$

Подставляя значения v и θ из (305) в уравнение устойчивости и выполняя интегрирование полученного выражения, придем к уравнению

$$\begin{aligned} & r^2 (P_{z_1}^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{1}{4\lambda^2 r^2} (qe_1 + \frac{p}{2} e_2) \right] - \\ & - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_{y_1} \sin^2 2\lambda x dx \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (306)$$

Рассмотрим нить, работающую с изгибом от начальной нагрузки. Выражая изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ по формуле (269), и подставляя его значение, вычисленное для случая несимметричной нагрузки, в уравнение (306), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & r^2 (P_{z_1}^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{1}{4\lambda^2 r^2} (qe_1 + 0,5pe_2) \right] - \\ & - \left(\frac{\frac{3}{4} + \pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \left(\frac{q + 0,5p}{1 + kH} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (307)$$

Для связи между критической дополнительной нагрузкой и критическим распором используем уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{17(q + 0,5p)^2 l^6 EF}{40320 EI_y^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17q^2 l^6 EF}{40320 EI_y^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (308)$$

Определяя из уравнения (308) значение дополнительной нагрузки p и подставляя его в выражение (307), получаем уравнение для определения критического распора

$$r^2 (P_{z_1}^* + H) \left\{ P_{\omega}^* + H + \frac{1}{4\lambda^2 r^2} \left[q(e_1 - e_2) + e_2(1 + kH) \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} \right] \right\} - \left(\frac{\frac{3}{4} + \pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 (a_1^2 H + a_2^2) = 0. \quad (309)$$

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (307) будем иметь

$$r^2 (P_{z_1}^* + H) \left[P_{\omega}^* + H + \frac{1}{4\lambda^2 r^2} (qe_1 + 0,5pe_2) \right] - \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right)^2 \frac{f_0^2}{(1 + kH)^2} \left[\frac{\frac{3}{4} + \pi^2}{3 + \pi^2} \frac{(q + 0,5p) l^2}{8f_0} - H \right]^2 = 0, \quad (310)$$

а вместо уравнения (308) —

$$\frac{EF}{(1 + kH)^2} \left[\frac{17l^6 (q + 0,5p)^2}{40320 EI_y^2} + \frac{f_0 l^2 (q + 0,5p)}{15 EI_y} + \frac{8f_0^2}{3l^2} \right] = \frac{8f_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0. \quad (311)$$

Уравнение для определения значения критического распора примет вид

$$r^2 (P_{z_1}^* + H) (1 + kH)^2 \left[P_{\omega}^* + H + \frac{e_1 - e_2}{4\lambda^2 r^2} - \frac{e_2 b_2}{8r^2 \lambda^2 b_3} + \frac{e_2}{4\lambda^2 r^2} \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_3} \right)^2 + \frac{1}{b_3} (b_4 + H) (1 + kH)^2 - \frac{b_1}{b_3}} \right] - f_0^2 \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right)^2 \left[\frac{\frac{3}{4} + \pi^2}{3 + \pi^2} \frac{l^2}{8f_0} \left(-\frac{b_2}{2b_3} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_3} \right)^2 + \frac{1}{b_3} (b_4 + H) (1 + kH)^2 - \frac{b_1}{b_3}} - H \right)^2 \right] = 0. \quad (312)$$

§ 4. НИТИ, РАСКРЕПЛЕННЫЕ СВЯЗЯМИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ НАГРУЗОК

Выведем уравнение пространственной устойчивости нити конечной жесткости, раскрепленной в горизонтальной плоскости связями [31]. Примем, что линия раскрепления нити проходит на расстоянии e_c от центральной оси поперечного сечения нити. Расположение началь-

ной q и дополнительной p нагрузок по высоте сечения показано на рис. 84. Как и в случае с равномерно распределенной нагрузкой, горизонтальный прогиб оси нити при повороте поперечного сечения вокруг точки закрепления равен (290); распределенная горизонтальная реакция, возникающая в связях, равна $-q_c$, а распределенный крутящий момент, возникающий от этой реакции $-m_c = q_c e_c$. Тогда величина дополнительной распределенной поперечной нагрузки будет равна (291), а величина дополнительного распределения крутящего момента

$$\left. \begin{aligned} m_{y1} &= -M_{y1} v'' + Hr^2 \theta'' - q(e_1 - e_c) \theta - p(e_2 - e_c) \theta + q_c e_c; \\ \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right) \\ m_{y1} &= -M_{y1} v'' + Hr^2 \theta - q(e_1 - e_c) \theta + q_c e_c \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l\right) \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

Заменяя в формулах (291) и (313) горизонтальный прогиб оси нити v в соответствии с (290) и подставляя полученные выражения в (258) и (260), получаем уравнение устойчивости нитей конечной жесткости в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{l/2} [EI_{\omega} (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_{z1} e_c^2 (\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_{y1} \theta)'' e_c \theta + M_{y1} e_c \theta \theta'' - \\ - Hr^2 \theta \theta + q(e_1 - e_c) \theta^2 + p(e_2 - e_c) \theta^2] dx + \int_{l/2}^l [EI_{\omega} (\theta'')^2 + \\ + GI_d (\theta')^2 + EI_{z1} e_c^2 (\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_{y1} \theta)'' e_c \theta + M_{y1} e_c \theta \theta'' + \\ + q(e_1 - e_c) \theta^2 - Hr^2 \theta \theta''] dx = 0. \end{aligned} \quad (314)$$

Считая, что концы нити шарнирно закреплены, примем в качестве аппроксимирующей функции θ функцию (305).

Подставляя значение θ в выражение (314), получаем уравнение устойчивости нити, шарнирно-закрепленной связями по всей длине,

$$\begin{aligned} r^2 (P_{\omega}^* + H) + e_c^2 (P_{z1}^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} p - \\ - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_{y1} \sin^2 2\lambda x dx = 0. \end{aligned} \quad (315)$$

Если нить работает с изгибом от начальной нагрузки, то уравнение (315) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} r^2 (P_{\omega}^* + H) + e_c^2 (P_{z1}^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} p - \\ - \frac{\frac{3}{4} + \pi^2}{6\lambda^2} \frac{(q + 0,5p) e_c}{1 + kH} = 0. \end{aligned} \quad (316)$$

Уравнение неразрывности деформаций будет иметь вид (308), а уравнение для определения критического распора H —

$$r^2 (P_{\omega}^* + H) + e_c^2 (P_{z_1}^* + H) + \frac{e_1 - e_2}{4\lambda^2} q + \frac{1}{4\lambda^2} \left[(e_2 - e_c) (1 + kH) - \frac{3 + 4\pi^2}{6} e_c \right] \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} = 0. \quad (317)$$

После определения из уравнения (317) значения критического распора H находится величина дополнительной критической нагрузки ρ из соотношения (308).

Если нить работает без изгиба от начальной нагрузки, то вместо уравнения (316) будем иметь

$$r^2 (P_{\omega}^* + H) + e_c^2 (P_{z_1}^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} \rho - \frac{3 + \pi^2}{3\pi^2} \frac{4f_0 e_c}{1 + kH} \left[\frac{\frac{3}{4} + \pi^2}{3 + \pi^2} \frac{(q + 0,5\rho) l^2}{8f_0} - H \right] = 0. \quad (318)$$

В качестве уравнения, связывающего критический распор с критической нагрузкой, будем использовать уравнение (311).

Уравнение для определения критического распора будет

$$r^2 (P_{\omega}^* + H) + e_c^2 (P_{z_1}^* + H) + \frac{e_1 - e_2}{4\lambda^2} q - \frac{e_2 - e_c}{4\lambda^2} \frac{b_2}{2b_3} + \frac{e_2 - e_c}{5\lambda^2} \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_3} \right)^2 \frac{1}{b_3} (b_4 + H) (1 + kH)^2 - \frac{b_1}{b_3}} - \frac{3 + \pi^2}{3\pi^2} \frac{4f_0 e_c}{1 + kH} \left(- \frac{\frac{3}{4} + \pi^2}{3 + \pi^2} \frac{l^2}{8f_0} \frac{b_2}{2b_3} - H + \frac{\frac{3}{4} + \pi^2}{3 + \pi^2} \frac{l^2}{8f_0} \right) \times \sqrt{\left(\frac{b_2}{2b_3} \right)^2 + \frac{1}{b_3} (b_4 + H) (1 + kH)^2 - \frac{b_1}{b_3}} = 0. \quad (319)$$

После определения из уравнения (319) значения критического распора H находится величина критической нагрузки ρ из выражения (311).

Глава V.

ДИНАМИКА ПОЛОГИХ УПРУГИХ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НИТИ

Для практических расчетов различных висячих конструкций пользуются одним из приближенных методов — вариационным. При этом исходят из общего закона движения механических систем — принципа Гамильтона, согласно которому система движется в промежутке

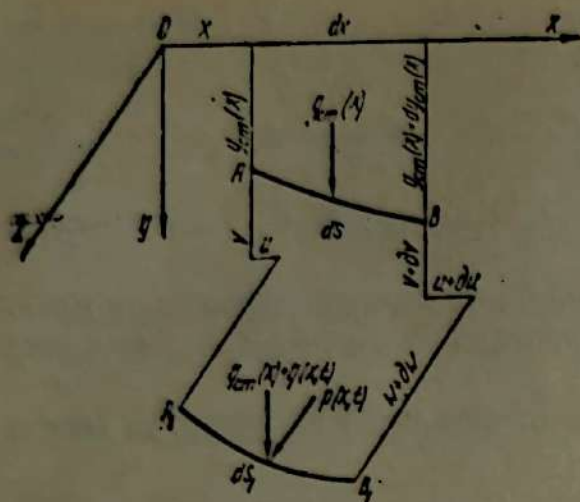


Рис. 85. Пространственная деформация элемента нити.

времени от t_1 до t_2 таким образом, что интеграл

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (U - T + W) dt \quad (320)$$

принимает стационарное значение.

Здесь U — потенциальная энергия; T — кинетическая энергия; W — потенциал внешней нагрузки.

Решая вариационную задачу

$$\delta I = 0 \quad (321)$$

с помощью уравнений Эйлера, получают систему уравнений в частных производных относительно функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $w(x, t)$ (рис. 85).

После подстановки соответствующих значений U , T и W [32] интеграл Гамильтона будет иметь вид

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ 2EF\epsilon_{ст} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{ст}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + EF \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{ст}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ \left. + EI \left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] - m \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 2 [q_{ст}(x) + q(x, t)] v - 2p(x, t) w \right\} dx dt, \quad (322)$$

где $v_1 = y_{ст} + v$.

Перепишем выражение (322) следующим образом

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l f \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt. \quad (323)$$

Тогда уравнения Эйлера для вариационной задачи (321) могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} = 0; \quad (324)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)} = 0; \quad (325)$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)} = 0. \quad (326)$$

Продифференцировав выражения (324) — (326), получим систему из трех уравнений в частных производных:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_{\text{сг}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right] = 0; \quad (327)$$

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left[\varepsilon_{\text{сг}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + EI \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} = q_{\text{сг}}(x) + q(x, t); \quad (328)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\varepsilon_{\text{сг}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, t). \quad (329)$$

Приведенную выше систему уравнений можно существенно упростить, если воспользоваться интерпретацией гипотезы Кирхгофа для пространственной задачи, заключающейся в следующем: составляющая вектора скорости в направлении оси X , т. е. производная $\frac{\partial u}{\partial t}$, настолько мала, что абсолютное значение этого вектора с достаточной точностью определяется абсолютным значением его составляющих в направлении осей Y и Z , т. е. производными $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial w}{\partial t}$. После упрощения уравнение (327) будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_{\text{сг}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (330)$$

Проинтегрируем это уравнение по x при постоянном t

$$\varepsilon_{\text{сг}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_x(t). \quad (331)$$

Интегрируя теперь (331) по длине нити и деля результат на l , получаем

$$\varepsilon_x(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \left[\varepsilon_{\text{сг}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ = \frac{1}{l} \left[\varepsilon_{\text{сг}} l + u(l, t) - u(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right]. \quad (332)$$

С учетом (331) и (332) уравнения (328) и (329) будут иметь вид:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} - \frac{EF}{l} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \left[\varepsilon_{\text{сг}} l + u(l, t) - u(0, t) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \Big] =$$

$$= q_{\text{ст}}(x) + q(x, t); \quad (333)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EF}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\epsilon_{\text{ст}} l + u(l, t) - u(0, t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] = p(x, t). \quad (334)$$

Приведенные выше выражения представляют собой общие уравнения динамики нитей конечной жесткости.

Если ввести обозначения статического и динамического распоров:

$$H_{\text{ст}} = \epsilon_{\text{ст}} EF; \quad (335)$$

$$H_{\partial} = \frac{EF}{2l} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right], \quad (336)$$

то для нити с несмещаемыми в продольном направлении опорами уравнения (333) и (334) будут иметь следующий вид:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - (H_{\text{ст}} + H_{\partial}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_{\partial} \frac{d^2 y_{\text{ст}}}{dx^2} = q(x, t); \quad (337)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (H_{\text{ст}} + H_{\partial}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, t). \quad (338)$$

Уравнения (337) — (338) наиболее удобны для исследования нелинейных колебаний нитей конечной жесткости при действии произвольной динамической нагрузки. В этих уравнениях три неизвестных параметра v , w и H_{∂} ; последний из них определяется из выражения (336).

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнений (337) — (338). Положив $w = 0$, получим уравнение, описывающее плоские (вертикальные) колебания нити. При $q(x, t) = p(x, t) = 0$ эти колебания будут свободными.

Положив $y = \frac{dy_{\text{ст}}}{dx} = \frac{d^2 y_{\text{ст}}}{dx^2} = 0$, получим хорошо известное нелинейное уравнение колебаний прямолинейного стержня на неподвижных опорах

$$m = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left[H_{\text{ст}} + \frac{EF}{4l} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] = 0. \quad (339)$$

Наконец, положив $EI = 0$, из уравнения (339) получим нелинейное уравнение струны, выведенное еще Кирхгофом.

Таким образом, уравнения (337) — (338) согласуются с известными уравнениями колебаний конструкций, близких по своим динамическим свойствам к нитям конечной жесткости.

Поскольку точные методы интегрирования уравнений (337) — (338) неизвестны, то при практических расчетах пользуются приближенными методами, выражая перемещения в виде:

$$v(x, t) = \sum_{i=1,2,\dots}^{\infty} a_i(t) X_i(x); \quad (340)$$

$$w(x, t) = \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} b_k(t) Z_k(x), \quad (341)$$

где $X_i(x)$, $Z_k(x)$ — известные функции, удовлетворяющие граничным условиям рассматриваемой задачи; $a_i(t)$, $b_k(t)$ — искомые функции, зависящие от времени (обобщенные координаты).

§ 2. СВОБОДНЫЕ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НИТИ

Рассмотрим случай с шарнирным закреплением концов нити на опорах. При этом граничные условия будут следующими:

$$\text{при } x = 0 \quad v = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \text{при } x = l \quad v = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

Записывая значения v и $y_{\text{ст}}$ в виде рядов

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad (342)$$

$$y_{\text{ст}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin \frac{i\pi}{l} x \quad (343)$$

и полагая, что $q(x, t) = 0$, $H_{\text{ст}} = \frac{4u_{\text{ст}}^2 EI}{l^2}$, получаем после подстановки указанных параметров в (337) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 a_i}{dt^2} \sin \frac{i\pi}{l} x + EI \frac{\pi^4}{l^4} \sum_{i=1}^{\infty} i^4 a_i \sin \frac{i\pi}{l} x + \\ + \frac{4u_{\text{ст}}^2 EI}{l^2} \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 a_i \sin \frac{i\pi}{l} x + H_0 \frac{\pi^2}{l^2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} i^2 (a_i + f_i) \sin \frac{i\pi}{l} x \right] = \\ = 0, \end{aligned} \quad (344)$$

откуда

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 a_i}{dt^2} + EI \frac{i^4 \pi^4}{l^4} a_i + \frac{4u_{\text{ст}}^2 EI}{l^2} \cdot \frac{i^2 \pi^2}{l^2} a_i + H_0 \frac{i^2 \pi^2}{l^2} (a_i + f_i) = 0 \\ (i = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (345)$$

Динамический распор при этом будет

$$H_0 = EF \frac{\pi^2}{4l^2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} i^2 (a_i + f_i)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} i^2 f_i^2 \right]. \quad (346)$$

С учетом (346) уравнение (345) перепишем следующим образом:

$$m \frac{d^2 a_i}{dt^2} + EI \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{i^2 \pi^2}{l^2} + \frac{4u_{\text{ст}}^2}{l^2} \right) a_i + EF \frac{i^4 \pi^4}{4l^4} (a_i + f_i) \times \\ \times \left[\sum_{j=1}^{\infty} f^2 (a_i + f_i)^2 - \sum_{j=1}^{\infty} f^2 f_j^2 \right] = 0 \quad (347)$$

($i, j = 1, 2, 3, \dots$).

Уравнение (347) представляет собой систему дифференциальных уравнений, описывающих свободные вертикальные колебания нитей конечной жесткости.

Выражение (347) имеет бесконечное множество решений. Поскольку каждое решение определяет спектр частот свободных колебаний нити, то очевидно, что каждой форме начального отклонения соответствует свой спектр частот. Определить весь спектр частот затруднительно, и в этом нет особой необходимости. Как правило, для суммарного движения наиболее существенную роль играют формы, обладающие наименьшими частотами. Для получения соотношений, позволяющих определять эти частоты, рассмотрим нить конечной жесткости как систему с одной степенью свободы. С этой целью удержим в рядах (342) и (343) по одному члену и подставим значения $v(x, t)$ и $u_{\text{ст}}(x)$ в уравнение (347). После преобразований получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение, решения которого будут частными решениями (347).

$$m \frac{d^2 a_i}{dt^2} + EI \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{i^2 \pi^2}{l^2} + \frac{4u_{\text{ст}}^2}{l^2} \right) a_i + EF \frac{i^4 \pi^4}{4l^4} (a_i + f_i) \times \\ \times [(a_i + f_i)^2 - f_i^2] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (348)$$

При этом предполагается, что i -я форма колебаний нити приблизительно совпадает с кривой ее провисания при действии статической нагрузки. Обычно реальные нагрузки вызывают более сложное движение, однако предлагаемое идеализированное рассмотрение является вполне оправданным, поскольку это дает нам возможность определить частоту свободных колебаний нити для любой элементарной формы.

Для удобства дальнейших выкладок уравнение (348) перепишем следующим образом:

$$\ddot{a}_i + \alpha_1 a_i + \beta_1 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (349)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{i^2 \pi^2}{ml^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + 4u_{\text{ст}}^2) + \frac{EF i^2 \pi^2 f_i^2}{2} \right]; \quad \beta_1 = \frac{3}{4} \frac{EF i^4 \pi^4 f_i}{ml^4}; \\ \gamma_1 = \frac{EF i^4 \pi^4}{4ml^4}.$$

Уравнения типа (349) встречаются при исследовании нелинейных колебаний стержней, пластинок и др. [9].

Для решения уравнения (349) можно воспользоваться известными методами, широко применяемыми для исследования колебаний систем

с малой нелинейностью, например, методом гармонической линеаризации или методом Бубнова — Галеркина. Воспользуемся первым из них и представим решение уравнения (349) в первом приближении в виде

$$a_i = A_{i_0} + A_{i_1} \sin \omega_i t, \quad (350)$$

где A_{i_0} — постоянная величина, характеризующая начальное отклонение точки оси нити (при несимметричной упругой характеристике); A_{i_1} — амплитуда функции a_i ; ω_i — круговая частота свободных нелинейных колебаний.

После соответствующих преобразований получим следующие уравнения для определения амплитуды и квадрата круговой частоты в зависимости от величины A_{i_0} :

$$A_{i_1} = \pm \sqrt{\frac{-2(\alpha_1 A_{i_0} + \beta_1 A_{i_0}^2 + \gamma_1 A_{i_0}^3)}{\beta_1 + 3\gamma_1 A_{i_0}}}; \quad (351)$$

$$\omega_i^2 = \alpha_1 + 2\beta_1 A_{i_0} + 3\gamma_1 A_{i_0}^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 A_{i_0}^3. \quad (352)$$

Выражение (352) используется для построения так называемых «скелетных» линий, устанавливающих зависимость между частотой и амплитудой свободных колебаний. Из (352) видно, что все члены правой части уравнения, за исключением первого, представляют собой нелинейные добавки к основной (линейной) частоте, зависящие от начальных условий и амплитуды. Таким образом, в данном случае учет нелинейности приводит к увеличению частоты с ростом амплитуды. Как будет показано ниже, этот учет имеет смысл при достаточно больших амплитудах колебаний (более 0,05 стрелы провисания). Для большинства практических расчетов, когда $A_i < 0,05 f_0$, достаточно учитывать только первый член в правой части формулы (352). Тогда при колебаниях нити по форме с одной полуволной ($i = 1$)

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^2}{ml^4} \left[EI(\pi^2 + 4u_{\text{ст}}^2) + \frac{EF\pi^2 f_1^2}{2} \right]. \quad (353)$$

Из выражения (353) следует, что частота собственных колебаний нити зависит от ряда факторов, а именно: жесткости нити на изгиб, величины распора, стрелы провисания и др.

Рассмотрим другие формы колебаний нити. С целью упрощения расчетных зависимостей будем считать, что функция $u_{\text{ст}}(x)$ представлена не рядом (343), а уравнением квадратной параболы. Что же касается функции $v(x, t)$, то она пусть по-прежнему будет представлена рядом (342). Подставляя значения указанных функций в уравнение (337) и пользуясь методом Бубнова — Галеркина, получаем при $q(x, t) = 0$ следующие нелинейные дифференциальные уравнения:

$$\ddot{a}_i + \alpha_2 a_i + \beta_2 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3 = 0 \quad (i = 1, 3, 5, \dots); \quad (354)$$

$$\ddot{a}_i + \alpha_3 a_i + \gamma_1 a_i^3 = 0 \quad (i = 2, 4, 6, \dots), \quad (355)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{i^2 \pi^2}{ml^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + 4u_{ct}^2) + \frac{512EFf_0^2}{l^4 \pi^4} \right];$$

$$\alpha_3 = EI \frac{i^2 \pi^2}{ml^4} (i^2 \pi^2 + 4u_{ct}^2); \beta_2 = \frac{24EFi\pi f_0}{ml^4}.$$

Уравнение (354) описывает симметричные колебания нити (с нечетным числом полуволн гармоник ряда (342)), а уравнение (354) — антисимметричные колебания.

Остановимся вначале на исследовании качественного характера решения указанных уравнений. Для этого представим выражение (354) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\dot{a}_i = v_i; \dot{v}_i = -f(a_i), \quad (356)$$

где

$$f(a_i) = \alpha_2 a_i + \beta_2 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3.$$

Приведенная выше система уравнений должна удовлетворять следующим начальным условиям:

$$\text{при } t = 0 \quad a_i = a_0, \quad v_i = v_0.$$

Исключив из системы (357) время, получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dv_i}{da_i} = - \frac{\alpha_2 a_i + \beta_2 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3}{v}.$$

Выполнив интегрирования, найдем

$$v_i^2 = -\alpha_2 a_i^2 - \frac{2}{3} \beta_2 a_i^3 - \frac{1}{2} \gamma_1 a_i^4 + C. \quad (357)$$

При указанных выше начальных условиях постоянная интегрирования

$$C = \alpha_2 a_0^2 + \frac{2}{3} \beta_2 a_0^3 + \frac{1}{2} \gamma_1 a_0^4 + v_0^2. \quad (358)$$

С учетом (358) уравнение (357) будет иметь вид

$$v_i^2 = \alpha_2 (a_0^2 - a_i^2) + \frac{2}{3} \beta_2 (a_0^3 - a_i^3) + \frac{\gamma_1}{2} (a_0^4 - a_i^4) + v_0^2. \quad (359)$$

Откуда

$$v_i = \pm \sqrt{\alpha_2 (a_0^2 - a_i^2) + \frac{2}{3} \beta_2 (a_0^3 - a_i^3) + \frac{\gamma_1}{2} (a_0^4 - a_i^4) + v_0^2}. \quad (360)$$

Смещение $a_{\max}$ можно определить из (359), положив $v = 0$.
Выполнив аналогичные операции, получим для (355)

$$v_i = \pm \sqrt{\alpha_3 (a_0^2 - a_i^2) + \frac{\gamma_1}{2} (a_0^4 - a_i^4) + v_0^2}. \quad (361)$$

Величина наибольшего смещения

$$a_{\max}^2 = \frac{\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 + 2\gamma_1 C}}{\gamma_1}. \quad (362)$$

В плоскости (v, a) выражения для определения v дают кривые постоянной энергии, параметрически зависящие от времени (интегральные кривые). На рис. 86 приведены фазовые траектории движения нити для форм колебаний с двумя и тремя полуволнами.

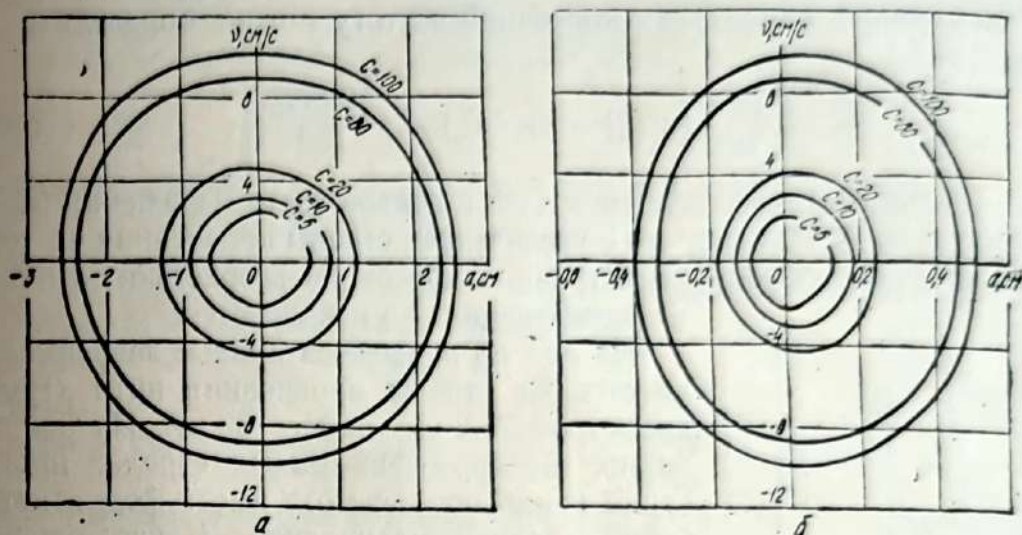


Рис. 86. Фазовые траектории движения нити с двумя (а) и тремя (б) полуволнами.

Интегральные кривые построены для одного опытного образца нити (труба диаметром 76,2 мм; пролет 30 м; $f_0/L = 1/20$; значения коэффициентов: $\alpha_2 = 466,1 \text{ л/с}^2$; $\beta_2 = 109,7 \text{ л/с}^2 \cdot \text{см}^2$; $\gamma_1 = 0,64 \text{ л/с}^2 \cdot \text{см}^2$; $\alpha_3 = 45,9 \text{ л/с}^2$). Из рис. 86 видно, что чем больше энергии сообщается системе в начальный момент времени, тем больше интегральная кривая. Кривые, соответствующие большей начальной энергии, охватывают кривые, соответствующие меньшей начальной энергии. Замкнутость интегральных кривых свидетельствует о характерной особенности движения рассматриваемой системы — квазигармонических колебаниях вокруг устойчивого положения статического равновесия, которому соответствует изолированная особая точка типа «центр». Интегральные кривые, соответствующие формам колебаний с двумя и тремя полуволнами, подобны и отличаются только положением особой точки.

Для решения уравнения (354) воспользуемся методом Бубнова — Галеркина. Полагая, вследствие незначительного влияния на частоту, $A_i = 0$, получаем

$$\omega_i^2 = \alpha_2 + \frac{3}{4} \gamma_1 A_i^2 \quad (i = 1, 3, 5, \dots). \quad (363)$$

На рис. 87 приведены кривые зависимости частоты свободных колебаний нити от амплитуды («скелетные» кривые) для формы колебаний

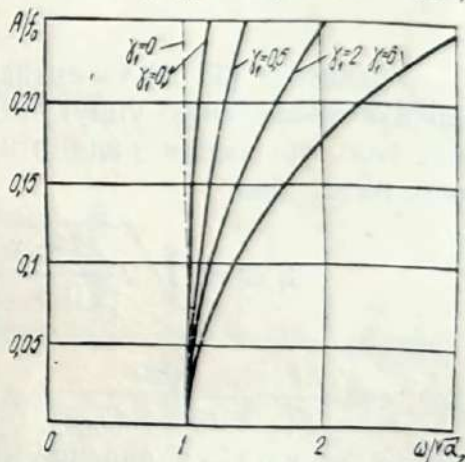


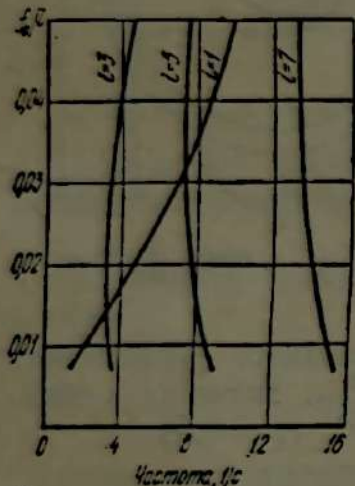
Рис. 87. График зависимости частоты вертикальных колебаний нити от амплитуды.

с тремя полуволнами. Из рис. 87 видно, что с увеличением амплитуды (начального отклонения A_i) частота растет. Таким образом, рассматриваемая колебательная система обладает жесткой нелинейной характеристикой.

При малых амплитудах колебаний частоту можно определять по формуле

$$\omega_i^2 = \frac{i^2 \pi^4}{m l^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2) + \frac{512 E F f_0^2}{i^4 \pi^4} \right], \quad (364)$$

т. е. учитывать только основной член в правой части выражения (363). Из формулы (364) видно, что с увеличением стрелы провисания частоты первой и третьей форм симметричных колебаний возрастают, а пятой и последующих — уменьшаются.



На рис. 88 приведены кривые зависимости частоты от стрелы провисания нити (труба диаметром 76,2 мм; пролет 30 м). Из рис. 88 видно, что при очень малых стрелах провисания наименьшую частоту имеет форма колебаний с одной полуволной. С увеличением стрелы провисания наименьшую частоту получает форма симметричных колебаний с тремя полуволнами.

Рис. 88. График зависимости частоты вертикальных колебаний нити от стрелы провисания.

Уравнение (353) для антисимметричных колебаний имеет симметричную нелинейную упругую характеристику. Известно точное решение этого уравнения в эллиптических интегралах [12]. В нашем случае оно имеет вид

$$a_i = A_i \sqrt{\frac{2 + \nu A_i^2}{2(1 - \nu A_i^2)}} \frac{\operatorname{sn}(\chi^2, \sqrt{(1 + \nu A_i^2) \alpha_3 t})}{\operatorname{dn}(\chi^2, \sqrt{(1 + \nu A_i^2) \alpha_3 t})}, \quad (365)$$

где $\nu = \frac{EF}{EI} \frac{i^2 \pi^4}{4(i^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2)}$; $\chi = \frac{1}{2} \frac{\nu A_i^2}{1 + \nu A_i^2}$; A_i — амплитуда колебаний; sn и dn — эллиптические функции Якоби.

При этом частота свободных колебаний определяется по формуле

$$\omega_i = \frac{2\pi \sqrt{\alpha_3 \left(1 + \frac{1}{2} \nu A_i^2\right)}}{4K(\theta)}, \quad (366)$$

где $\operatorname{tg} \theta = A_i \sqrt{\frac{\nu}{2 + \nu A_i^2}}$.

Функция $K(\theta)$ означает полный эллиптический интеграл первого рода.

Методом Бубнова — Галеркина можно получить более простое решение. Так, если принять аппроксимирующую функцию в виде

$$a_i = A_i \sin \omega t, \quad (367)$$

Таблица 11. Линейные частоты свободных колебаний нити, вычисленные по точной и приближенной формулам

Формула	Частота, с ⁻¹ , при амплитуде колебаний A, см					
	Независимо от амплитуды	2	4	6	8	10
Точная (366)	1,31	1,32	1,36	1,44	1,53	1,66
Приближенная (368)	1,31	1,35	1,45	1,66	1,82	2,03

то зависимость между квадратом частоты и произвольной амплитудой для антисимметричных форм колебаний будет

$$\omega_i^2 = \alpha_3 + \frac{3}{4} \gamma_1 A_i^2 \quad (i = 2, 4, 6, \dots). \quad (368)$$

В табл. 11 приведены линейные частоты ($\lambda = \frac{\omega_i}{2\pi}$) свободных колебаний нити (труба диаметром 76,2 мм; пролет 30 м; $f_0/l = 1/20$), вычисленные по точной (366) и приближенной (368) формулам при $i = 2$.

Таким образом, при сравнительно небольших амплитудах частоты, вычисленные по точной и приближенной формулам, отличаются друг от друга незначительно. С ростом амплитуды разница между частотами увеличивается (приближенная формула начинает завышать частоты).

При малых амплитудах квадрат угловой частоты антисимметричных колебаний можно определять по формуле (368) без учета нелинейной добавки к основной линейной частоте. Тогда

$$\omega_i^2 = EI \frac{i^2 \pi^2}{m l^4} (i^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2). \quad (369)$$

На рис. 89 приведены спектры частот малых вертикальных колебаний, вычисленных по формулам (364) и (369) для нити (труба диаметром 76,2 мм; пролет 30 м) с различными стрелами провисания. Как видно из рис. 89, плотность спектра частот невелика. Исключение составляют только участки, где частота первой или третьей формы близка к одной из частот, как правило, антисимметричных колебаний. При рассмотрении толь-

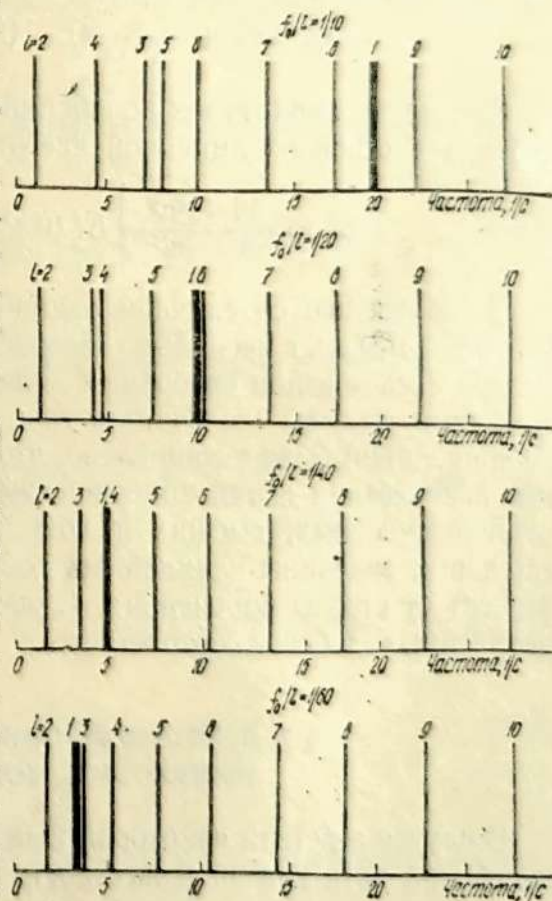


Рис. 89. Спектры частот вертикальных колебаний нити при различных стрелах провисания.

ко симметричных колебаний эта особенность спектра частот отпадает и фильтрующую способность нити как колебательной системы можно считать достаточной.

Рассмотрим колебания нити при жестком закреплении ее концов перед приложением динамической нагрузки. При этом функцию $y_{ст}(x)$, как и ранее, примем в виде квадратной параболы, а функцию $v(x, t)$ — в виде следующего ряда

$$v(x, t) = a_i(t) \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{l} x \right). \quad (370)$$

Подставляя значения $y_{ст}(x)$ и $v(x)$ в основное дифференциальное уравнение и пользуясь методом Бубнова — Галеркина, получаем

$$\ddot{a}_i + \alpha_4 a_i + \beta_3 a_i^2 + \gamma_2 a_i^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

где

$$\alpha_4 = \frac{16}{3} \frac{i^2 \pi^2}{ml^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + u_{ст}^2) + \frac{8EFf_0^2}{i^2 \pi^2} \right]; \quad (371)$$

$$\beta_3 = \frac{16EFi^2 \pi^2 f_0}{ml^4}; \quad \gamma_2 = \frac{4}{3} \frac{EFi^4 \pi^4}{ml^4}.$$

Выражение для определения квадрата угловой частоты свободных колебаний будет

$$\omega_i^2 = \alpha_4 + \frac{3}{4} \gamma_2 A_i^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (372)$$

При малых амплитудах колебаний можно не учитывать нелинейной добавки к основной линейной частоте. Тогда

$$\omega_i^2 = \frac{16}{3} \frac{i^2 \pi^2}{ml^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + u_{ст}^2) + \frac{8EFf_0^2}{i^2 \pi^2} \right]. \quad (373)$$

По сравнению со случаем шарнирного закрепления концов нити формула (373) дает несколько завышенные значения частот.

При исследовании свободных колебаний нити как системы с двумя степенями свободы (вследствие громоздкости расчетные зависимости не приводятся) было установлено, что в зависимости от начальных условий колебания нитей конечной жесткости представляют собой сочетание основных, высших и комбинационных составляющих обеих гармоник; величины нелинейных добавок к основной частоте заметно зависят от стрелы провисания. С ростом стрелы провисания влияние нелинейных добавок возрастает.

§ 3. ДЕЙСТВИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НЕПЕРИОДИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

В случае действия некоторой непериодической нагрузки уравнение колебаний нити конечной жесткости будет иметь вид

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{4u_{ст}^2 EI}{l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_0 \frac{\partial^2 (y_{ст} + v)}{\partial x^2} = q(x, t). \quad (374)$$

Рассмотрим случай с шарнирным закреплением концов нити на опорах.

Пусть, как и ранее, функция $y_{ст}(x)$ будет представлена уравнением квадратной параболы, а функция $v(x, t)$ — рядом (342). Динамическую нагрузку разложим в ряд, подобный $v(x, t)$

$$q(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} q_l(t) \sin \frac{l\pi}{l} x. \quad (375)$$

Исследуем влияние членов ряда (342) на напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости при действии внезапно приложенной динамической нагрузки. Учтем при симметричных колебаниях три первых члена ряда

$$v(x, t) = a_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + a_2(t) \sin \frac{3\pi}{l} x + a_3(t) \sin \frac{5\pi}{l} x. \quad (376)$$

Коэффициенты разложения внешней нагрузки в ряд (375) будут

$$q_l = \frac{4q_0}{i\pi}, \quad (377)$$

где q_0 — интенсивность внешней нагрузки.

Поставленную задачу решим методом Бубнова — Галеркина. С этой целью подставим значения функций $v(x, t)$ и $y_{ст}(x)$ в уравнение (374) и потребуем, чтобы результат подстановки был ортогонален каждой фундаментальной функции

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \Phi[a_1(t), a_2(t), a_3(t), t] \sin \frac{\pi}{l} x dx &= 0; \\ \int_0^l \Phi[a_1(t), a_2(t), a_3(t), t] \sin \frac{3\pi}{l} x dx &= 0; \\ \int_0^l \Phi[a_1(t), a_2(t), a_3(t), t] \sin \frac{5\pi}{l} x dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (378)$$

Здесь $\Phi[a_1(t), a_2(t), a_3(t), t]$ — выражение, получаемое в результате подстановки в уравнение (374) вместо $v(x, t)$ его разложения (376). Выполнив интегрирование, получим связанную систему из трех нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{a}_1 + \alpha_5 a_1 + \left(a_1 + \frac{32f_0}{\pi^3}\right) R_1 &= \frac{4q_0}{\pi m}; \\ \ddot{a}_2 + \alpha_6 a_2 + \left(9a_2 + \frac{32f_0}{3\pi^3}\right) R_1 &= \frac{4q_0}{3\pi m}; \\ \ddot{a}_3 + \alpha_7 a_3 + \left(25a_3 + \frac{32f_0}{5\pi^3}\right) R_1 &= \frac{4q_0}{5\pi m}, \end{aligned} \right\} \quad (379)$$

где

$$\alpha_5 = EI \frac{\pi^2}{ml^4} (\pi^2 + 4u_{ст}^2); \quad \alpha_6 = 9EI \frac{\pi^2}{ml^4} (9\pi^2 + 4u_{ст}^2);$$

$$\alpha_7 = 25EI \frac{\pi^3}{ml^4} (25\pi^2 + 4u_{cr}^2);$$

$$R_1 = \frac{EF}{4} \frac{\pi^2}{ml^4} \left[a_1^2 + 9a_2^2 + 25a_3^2 + \frac{64f_0}{\pi^3} \left(a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} \right) \right].$$

Выразим через функции a_i динамический распор и динамический изгибающий момент в сечении, расположенном по середине пролета нити,

$$H_0 = \frac{EF}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \left[a_1^2 + 9a_2^2 + 25a_3^2 + \frac{64f_0}{\pi^3} \left(a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} \right) \right]; \quad (380)$$

$$M_0 = EI \frac{\pi^2}{l^3} (a_1 + 9a_2 + 25a_3). \quad (381)$$

Напряжение в том же сечении нити от динамической нагрузки будет

$$\sigma_0 = EI \frac{\pi^2}{l^2} \left\{ \frac{1}{4l} \left[a_1^2 + 9a_2^2 + 25a_3^2 + \frac{64f_0}{\pi^3} \left(a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{W} (a_1 + 9a_2 + 25a_3) \right\}, \quad (382)$$

где W — момент сопротивления сечения нити.

Рассмотрим влияние различных элементарных форм колебаний на напряженно-деформированное состояние нити (труба диаметром 76,2 мм, пролет 30 м) со стрелами провисания $1/10$ — $1/40$ пролета.

На рис. 90 приведены графики функций $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $a_3(t)$, построенные по данным численных исследований, выполненных на машине БЭСМ-3М, для наиболее характерных случаев в двух приближениях — первом (пунктирная линия) и третьем (сплошная линия). Из графиков достаточно наглядно видны величины ординат всех трех функций. Во всех случаях доминирует первая гармоника. Влияние высших гармоник зависит от величины стрелы провисания. При $f_0/l < 1/40$ влияние высших гармоник не столь существенно и перемещения нити

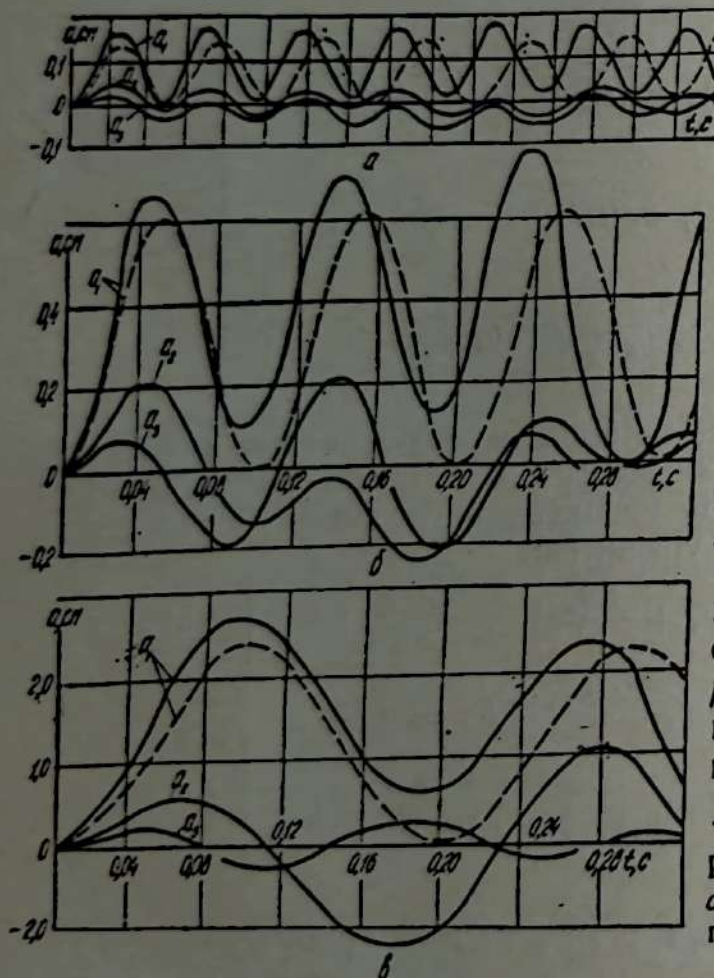


Рис. 90. Графики функций $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $a_3(t)$ для нити со стрелой провисания $1/10$ (а), $1/20$ (б) и $1/40$ (в) пролета.

определяются, в основном, первой гармоникой, имеющей низкочастотный характер. При $f_0/l > 1/40$ начинает сказываться вторая гармоника, составляющая около 15—40 % суммарного перемещения. С увеличением стрелы провисания до $1/20$ пролета и более начинает оказывать ощутимое влияние третья и другие, более высокие гармоники. Из приведенной выше оценки видно, в каких случаях следует принимать для расчета один, два и более членов ряда (342).

Из рис. 90 видна также связь между функциями a_1 , a_2 и a_3 . Функции a_2 и a_3 , как правило, несколько (на 10—15 %) увеличивают ординаты функции a_1 и заметно понижают ее период. Влияние функции a_1

Т а б л и ц а 12. Динамические коэффициенты

l_0/l	Статическая нагрузка		Динамическая нагрузка		Динамический коэффициент	
	перемещение $u_{ст}$, см	напряжение $\sigma_{ст}$, МПа	перемещение u , см	напряжение σ_d , МПа	k_d^n	k_d^u
1/10	—1,37	14,42	0,138	8,03	—	—
1/20	—0,59	13,80	0,54	13,75	—	1,25
1/25	0,31	14,19	0,79	21,90	2,5	1,55
1/30	0,76	14,57	1,98	27,30	2,62	1,88
1/40	1,04	16,01	2,15	25,90	2,06	1,62
1/60	2,77	29,83	6,73	35,90	2,42	1,46
1/120	7,22	30,77	14,5	48,00	2,0	1,56

на функции a_2 и a_3 более существенно. Главная гармоника как бы навязывает второстепенным свой период. Об истинном периоде этих гармоник можно судить лишь по записи их на сравнительно большом отрезке времени.

Для оценки влияния динамического действия нагрузки в табл. 12 приведены значения динамических коэффициентов для нити (труба диаметром 76,2 мм, пролет 30 м) от равномерно распределенной нагрузки $q_0 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ при различных стрелах провисания. Если для линейно деформируемых конструкций этот коэффициент равен 2 как для перемещений (k_d^n), так и для напряжений (k_d^u), то в нашем случае динамический коэффициент для перемещений больше двух, а для напряжений меньше двух.

Влияние высших гармоник заметно сказывалось только на напряжениях, вызванных изгибом нити (они составляли около 40 % суммарных напряжений). Это влияние возрастало с увеличением стрелы провисания и жесткости нити на изгиб.

§ 4. СВОБОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НИТИ

В общем случае произвольная нагрузка (например, действие ветра на трубопроводные переходы в виде провисающей нити) вызывает маятниковые колебания (раскачивание плоскости провисания нити относительно линии, соединяющей ее опоры), а также поперечные колебания в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Маятниковые колебания нити описываются уравнением (17)

$$\ddot{\gamma} + \frac{q}{l_m} \sin \gamma = 0, \quad (383)$$

где $l_m = \frac{\int_0^l y_{от}^2(x) dx}{\int_0^l y_{ст}(x) dx}$ — длина эквивалентного маятника.

Для пологих нитей $l_m \approx 0,8$.

При малых углах отклонения уравнение (383) приводится к виду

$$\ddot{\gamma} + \omega^2 \gamma = 0, \quad (384)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{q}{l_m}}$.

При начальных условиях $t=0$, $\gamma = \gamma_0$ и $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$ решение уравнения (384) будет следующим:

$$\gamma = \gamma_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\gamma}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (385)$$

Совместные поперечные вертикальные и горизонтальные колебания нити описываются уравнениями:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{4u_{ст}^2 EI}{l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + H_{\partial} \frac{\partial^2 (v + y_{ст})}{\partial x^2} = 0; \quad (386)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{4u_{ст}^2 EI}{l^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{\partial} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (387)$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах функции $v(x, t)$ и $w(x, t)$ можно представить следующими рядами:

$$v(x, t) = a_i(t) \sin \frac{i\pi}{l} x; \quad (388)$$

$$w(x, t) = b_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (389)$$

Функции $y_{ст}$, как и ранее, примем в виде квадратной параболы.

Выражение для определения динамического распора при заданных значениях функций будет иметь вид

$$H_{\partial} = \frac{EF}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \left(i^2 a_i^2 + \frac{64f_0}{i\pi^3} + k^2 b_k^2 \right) \quad (i = 1, 3, 5, \dots; \\ k = 1, 2, 3, \dots). \quad (390)$$

Подставив значения $y_{ст}$, $v(x, t)$, $w(x, t)$ и H_{∂} в систему уравнений (386), (387) и пользуясь методом Бубнова — Галеркина, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{a}_i + \alpha_2 a_i + \beta_2 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3 + \gamma_3 a_i b_k^2 + \beta_4 b_k^2 = 0; \quad (391)$$

$$\ddot{b}_k + \alpha_8 b_k + \gamma_3 b_k^3 + 2\beta_4 a_i b_k + \gamma_3 a_i^2 \beta_k = 0, \quad (i = 1, 3, 5 \dots; k = 1, 2, 3, \dots), \quad (392)$$

где

$$\gamma_3 = \frac{EFi^2 k^2 \pi^4}{4ml^4}; \quad \beta_4 = \frac{8EFi^2 \pi l_0}{ml^4}; \quad \alpha_8 = EI \frac{k^2 \pi^2}{ml^4} (k^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2).$$

Приближенное интегрирование системы уравнений (391) — (392) дает следующие выражения для определения частот поперечных вертикальных и горизонтальных колебаний:

$$\omega_v^2 = \alpha_2 + \frac{3}{4} \gamma_1 A_i^2 + \frac{1}{2} \gamma_3 B_k^2; \quad (393)$$

$$\omega_r^2 = \alpha_8 + \frac{3}{4} \gamma_3 B_k^2 + \frac{1}{2} \gamma_3 A_i^2, \quad (394)$$

где A_i, B_k — постоянные величины (амплитуды вертикальных и горизонтальных колебаний).

Из уравнений (393) и (394) следует, что частоты вертикальных и горизонтальных колебаний нити зависят не только от своих амплитуд, но и от амплитуд колебаний поперечного направления. При малых амплитудах колебаний нити нелинейные члены в выражениях (393) и (394) можно не учитывать. Тогда ω_v^2 будет определяться по формуле (364), а

$$\omega_r^2 = EI \frac{k^2 \pi^2}{ml^4} (k^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2). \quad (395)$$

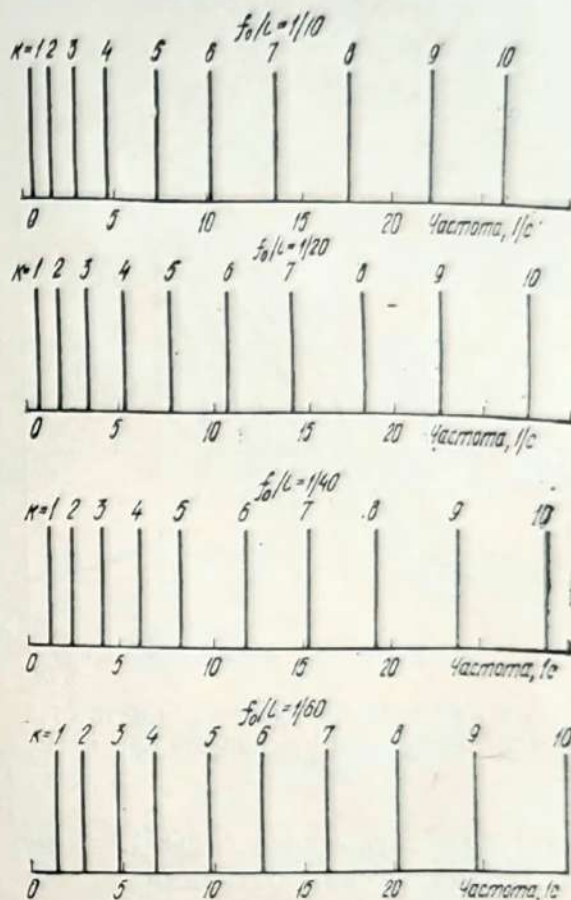


Рис. 91. Спектры частот горизонтальных колебаний нити при различных стрелах провисания.

На рис. 91 приведены спектры частот горизонтальных колебаний нити (труба диаметром 76,2 мм; пролет 30 м) с различными стрелами провисания. При достаточно больших амплитудах и определенных соотношениях параметров нити колебания одного направления могут оказать существенное влияние на колебания другого направления, возбуждая последние параметрически, при отсутствии внешних возбуждающих сил.

Исследуем влияние горизонтальных колебаний нити на вертикальные. Пусть в начальный момент времени нить получила горизонтальное перемещение B_{0k} . Представим горизонтальные колебания в виде

$$b = B_{0k} \cos \omega_r t. \quad (396)$$

После подстановки (396) в (391) найдем

$$a_i + \left[\alpha_2 + \frac{1}{2} \gamma_3 B_{0k}^2 (1 + \cos 2\omega_r t) \right] a_i + \beta_2 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3 + \frac{1}{2} \beta_4 B_{0k} (1 + \cos 2\omega_r t) = 0. \quad (397)$$

Таким образом, при частоте вертикальных колебаний, равной удвоенной частоте горизонтальных колебаний, в рассматриваемой системе могут возникнуть нарастающие вертикальные колебания (обычный резонанс); при равенстве же этих частот в системе может возникнуть главный параметрический резонанс. Оба этих процесса хорошо изучены [3, 4, 10]. Поэтому рассмотрим здесь лишь некоторые задачи, связанные со спецификой нашей колебательной системы.

Рассмотрим движение нити с учетом затухания, пропорционального первой степени скорости движения. При этом уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид

$$\ddot{a}_i + 2h_3 \dot{a}_i + \alpha_2 a_i + \beta_2 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3 = \frac{p_0}{m} \cos \Omega t, \quad (398)$$

где h_3 — коэффициент, характеризующий затухание; p_0 — амплитуда возмущающей силы; $\Omega = 2\omega_r$ — частота возмущающей силы.

Без нарушения общности задачи постоянная составляющая возмущающей силы может быть отброшена.

Выражение (398) представляет собой нелинейное уравнение типа Дуффинга с диссипативным членом. Приближенное решение его можно получить с помощью асимптотического метода [3], полагая в первом приближении

$$a_i = A_i \cos(\Omega t + \nu), \quad (399)$$

где ν — угол сдвига фаз.

В работе [32] найдена зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой возмущающей силы. Она имеет вид

$$\Omega = \sqrt{(\omega_s^2 - 2h_3^2) \pm \sqrt{4h_3^2(h_3^2 - \omega_s^2) + \left(\frac{p_0}{mA_i}\right)^2}}, \quad (400)$$

где

$$\omega_s^2 = \alpha_2 + \frac{3}{4} \gamma_1 A_i^2.$$

На рис. 92 приведены «резонансные» кривые для нити (труба диаметром 76,2 мм; пролет 30 м) со стрелой провисания $1/20$ пролета при

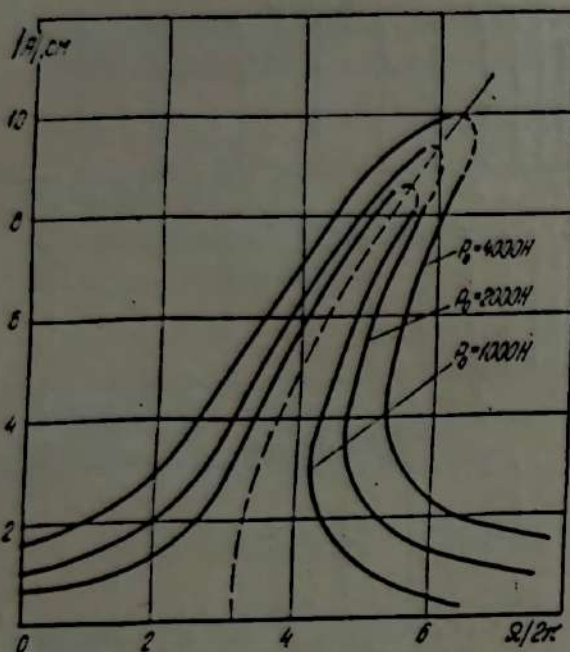


Рис. 92. Резонансные кривые для нити со стрелой провисания $1/20$ пролета при $i = 3$.

$i = 3$. «Скелетная» (пунктирная) линия является границей между колебаниями, синфазными с возмущением, и колебаниями антифазными. Наклон «резонансной» кривой вправо свидетельствует о наличии в рассматриваемой системе жесткой восстанавливающей силы. Не останавливаясь здесь на устойчивости периодических решений уравнения, отметим лишь, что на «резонансных» кривых (см. рис. 92), лежащих левее «скелетной» линии, устойчивыми будут те участки, на которых амплитуда возрастает вместе с частотой возмущающей силы, а на кривых, лежащих правее «скелетной» линии, наоборот, — те участки, на которых амплитуда убывает с возрастанием частоты возмущающей силы. Переход с одного колебательного режима на другой происходит скачкообразно (со сбросом амплитуд).

Если в (400) положим $\omega_b^2 = \Omega^2$, то получим значение максимальной стационарной амплитуды колебаний

$$A_{\max} = \frac{p_0}{2h_3 m \omega_b}. \quad (401)$$

Рассмотрим режим параметрических колебаний. Запишем (397) в стандартной форме уравнения Матье с нелинейными членами

$$\ddot{a}_i + 2h_3 \dot{a}_i + \omega_{0b}^2 a_i (1 + 2\mu_0 \cos 2\omega_r t) + \beta_2 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3 = 0, \quad (402)$$

где

$$\omega_{0b}^2 = \alpha_2 + \frac{\gamma_3 B_{0k}^2}{2}; \quad 2\mu_0 = \frac{\gamma_3 B_{0k}^2}{\left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \gamma_3 B_{0k}^2\right)}.$$

Решение уравнения (402) дано в работе [32]. Результаты исследования показывают, что в рассматриваемой колебательной системе неограниченного нарастания колебаний не происходит; наблюдаются стационарные колебания, возрастающие с увеличением частоты возбуждения.

Граница основной резонансной зоны будет

$$\omega_b^2 - \omega_b \sqrt{\mu_0^2 \omega_b^2 - 4h_3^2} < \omega_r^2 < \omega_b^2 + \omega_b \sqrt{\mu_0^2 \omega_b^2 - 4h_3^2}. \quad (403)$$

Ширина резонансной зоны

$$\Delta_p = \sqrt{\mu_0^2 \omega_b^2 - 4h_3^2}. \quad (404)$$

Учет затухания приводит к сужению зоны, внутри которой происходят параметрические колебания. В рассматриваемой системе величина сужения незначительна. Исследование характера распределения областей неустойчивости параметрических колебаний нитей приведено в работе [32].

Рассмотрим теперь влияние вертикальных колебаний нити на горизонтальные. Представим последние в виде

$$a_i = A_{0i} \cos \omega_b t. \quad (405)$$

После подстановки (405) в (392) и учета затухания получим

$$\ddot{b}_k + 2h_3 \dot{b}_k + \left(\alpha_8 + 2\beta_4 A_{0i} \cos \omega_b t + \frac{1}{2} \gamma_3 A_{0i}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma_3 A_{0i}^2 \cos 2\omega_b t \right) b_k + \gamma_3 b_k^3 = 0. \quad (406)$$

Приведем (406) к стандартной форме уравнения Матье с нелинейными членами

$$\ddot{b} + 2h_3 \dot{b} + \omega_{0r}^2 b_k (1 + 2\mu_1 \cos 2\omega_b t) + \gamma_3 b^3 = 0, \quad (407)$$

где

$$\omega_{0r}^2 = \alpha_8 + \frac{1}{2} \gamma_3 A_{0i}^2; \quad 2\mu_1 = \frac{2\beta_4 A_{0i}}{\alpha_8 + \frac{1}{2} \gamma_3 A_{0i}^2}.$$

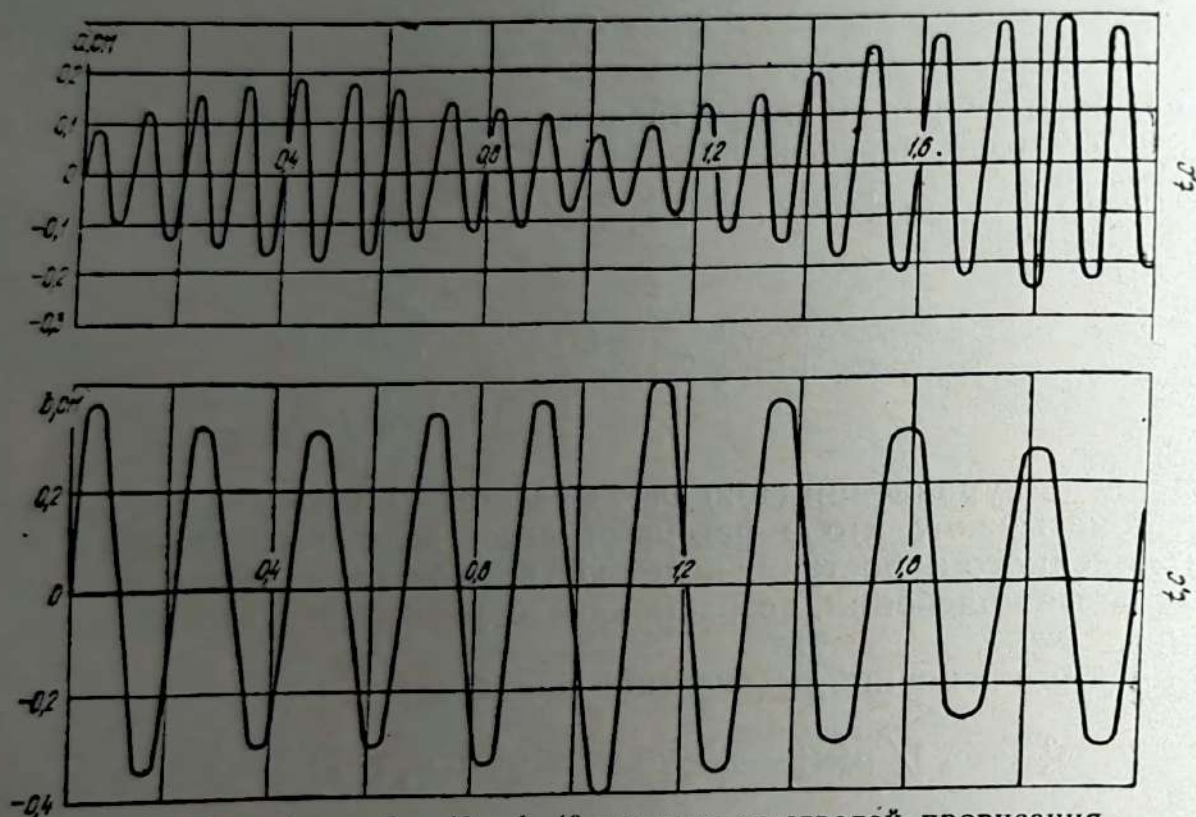


Рис. 93. Графики функций $a_i(t)$ и $b_k(t)$ для нити со стрелой провисания $1/40$ пролета при $i = 1$ и $k = 4$.

По аналогии с предыдущим, зона основного резонанса и соотношение между амплитудой стационарных параметрических колебаний и частотой возбуждения будут иметь вид

$$\omega_r^2 - \omega_r \sqrt{\mu_1^2 \omega_r^2 - 4h_3} < \left(\frac{\omega_b}{2} \right)^2 < \omega_r^2 + \omega_r \sqrt{\mu_1^2 \omega_r^2 - 4h^2}; \quad (408)$$

$$C_0^2 = \frac{4}{3\gamma_3} \left[\left(\frac{\omega_b}{2} \right)^2 - \omega_r^2 \right] + \sqrt{\mu_1^2 \omega_r^4 - \omega_b^2 h_3^2}. \quad (409)$$

Анализ полученных зависимостей показывает, что при частоте вертикальных колебаний, равной удвоенной частоте горизонтальных

колебаний, может происходить взаимное возбуждение колебаний как горизонтальными, так и вертикальными, так и наоборот, сопровождающееся известным в теории колебаний явлением «перекачки энергии».

Результаты численного решения системы уравнений (391) и (392) дают основание утверждать, что амплитуды горизонтальных и вертикальных колебаний нити связаны между собой обратно пропорциональной зависимостью; между обобщенными координатами происходит взаимный энергообмен. В начальный момент времени амплитуды горизонтальных колебаний нити уменьшаются, а амплитуды вертикальных — возрастают. Для более поздних моментов времени «перекачка энергии» происходит в обратном направлении. Указанные выводы согласуются с данными работы [10].

Для иллюстрации сказанного на рис. 93 приведены графики функций $a_i(t)$ и $b_k(t)$ для нити (труба диаметром 76,2 мм; пролет 30 м) со стрелой провисания $1/40$ пролета при $i = 1$ и $k = 4$.

§ 5. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НИТИ

Выше рассматривались колебания нитей независимо от действующих на них внешних сил. Для многих несущих конструкций, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости, основным источником таких сил может быть ветровой поток. Рассмотрим приближенно вертикальные колебания нити конечной жесткости в таком потоке.

Объяснение механизма колебаний конструкций цилиндрической формы в ветровом потоке дано в теории автоколебаний. Задача об автоколебаниях рассматривалась М. Ф. Барштейном [1], Г. А. Савицким и др. Изложенная в этих работах методика решения задачи, основанная на применении метода гармонического баланса, применима и для исследования аэродинамических колебаний нитей конечной жесткости.

Уравнение движения после разложения силы лобового сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, и подъемной силы в степенной ряд и удержания двух первых членов ряда примет следующий вид:

$$\ddot{a}_i (\Delta_1 + \Delta_2 v) \dot{a}_i + \alpha_2 a_i + \beta_2 a_i^2 + \gamma_1 a_i^3 + \Delta_3 \frac{a_i^3}{v} \pm \Delta_4 v^2 \pm \Delta_5 \dot{a}_i^2 = 0, \quad (410)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{C_x}{m} \mu d, \quad \Delta_2 = \frac{C_x}{2m} \rho d; \quad \Delta_3 = \frac{C_x}{4m} \rho d; \quad \Delta_4 = \frac{C_y}{2m} \rho d; \quad \Delta_5 = \frac{C_y}{4m} \rho d.$$

Здесь v — скорость движения; C_x — коэффициент лобового сопротивления; C_y — коэффициент подъемной силы ($C_y = 0,4C_x$); μ — коэффициент вязкости; ρ — массовая плотность воздуха.

Знак подъемной силы совпадает со знаком скорости движения. Если разложить подъемную силу в ряд Фурье и оставить члены с основной частотой, то уравнение колебаний примет вид

$$\ddot{a}_i (\Delta_1 + \Delta_2 v) \dot{a}_i + \alpha_2 a_i + \beta_2 a_i^2 + \Delta_3 \frac{a_i^3}{v} + \frac{4}{\pi} (\Delta_4 v^2 + \Delta_5 \dot{a}_i^2) \sin \omega t = 0, \quad (411)$$

где ω — частота автоколебаний.

Для получения стационарных решений в первом приближении примем

$$a_i = -A_i \cos \omega t. \quad (412)$$

Тогда

$$\dot{a}_i = A_i \omega \sin \omega t. \quad (413)$$

Следовательно, последний член левой части уравнения (411) можно трактовать как квазиупругую силу, запаздывающую относительно смещения a_i на $\frac{\pi}{2}$.

Для определения A_i и ω перепишем (411) следующим образом:

$$\ddot{a}_i + \omega^2 a_i = (\omega^2 - \alpha_2) a_i - (\Delta_1 + \Delta_2 v) \dot{a}_i - \Delta_3 \frac{a_i^3}{v} - \\ - \frac{4}{\pi} (\Delta_4 v^2 + \Delta_5 \dot{a}_i^2) \sin \omega t - \beta_2 a_i^2 - \gamma_1 a_i^3. \quad (414)$$

Подставляя (412) и (413) в (414), после преобразований получаем

$$\ddot{a}_i + \omega^2 a_i = - \left(\omega^2 - \alpha_2 - \frac{3}{4} \gamma_1 A_i^2 \right) A_i \cos \omega t - \left[(\Delta_1 + \Delta_2 v) A_i \omega + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \Delta_3 \frac{1}{v} A_i^3 \omega^3 + \frac{4}{\pi} \Delta_4 v^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\pi} \Delta_5 A_i^2 \omega^2 \right] \sin \omega t + \dots \quad (415)$$

Отсюда находим закон установления автоколебаний

$$\frac{dA_i}{dt} = - \frac{1}{2\omega} \left[(\Delta_1 + \Delta_2 v) A_i \omega \frac{3}{4} \Delta_3 \frac{1}{v} A_i^3 \omega^3 + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi} \Delta_4 v^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\pi} \Delta_5 A_i^2 \omega^2 \right], \quad (416)$$

а для стационарного режима — систему уравнений, определяющих амплитуду и частоту:

$$\left(\omega^2 - \alpha_2 - \frac{3}{4} A_i^2 \right) A_i = 0; \quad (417)$$

$$\left(\frac{3}{4} \Delta_3 \frac{1}{v} \omega^3 \right) A_i^3 + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\pi} \Delta_5 \omega^2 \right) A_i^2 + (\Delta_1 \omega + \Delta_2 v \omega) A_i^2 + \frac{4}{\pi} \Delta_4 v^2 = \\ = 0. \quad (418)$$

Из (417) получим

$$\omega^2 = \alpha_2 + \frac{3}{4} \gamma_1 A_i^2. \quad (419)$$

Следовательно, в первом приближении частота автоколебаний совпадает с частотой свободных колебаний системы и увеличивается с ростом амплитуд.

Положив в (418) равными нулю коэффициенты, зависящие от величин второго порядка малости, т. е. $\Delta_3 = \Delta_5 = 0$, получим приближенное значение стационарной амплитуды автоколебаний

$$A_i = - \frac{4 \Delta_4 v^2}{\pi (\Delta_1 + \Delta_2 v) \omega}, \quad (420)$$

или

$$A_t = - \frac{2C_y \rho d v^2}{\pi \left(C_{x11} d + \frac{1}{2} C_{x\rho} d v \right) \omega} \quad (421)$$

Поскольку $\frac{df(A_t)}{dA_t} < 0$ при $\Delta_1 + \Delta_2 v > 0$, то полученное значение стационарной амплитуды устойчиво. Здесь через $f(A_t)$ обозначена правая часть уравнений (416).

Глава VI.

РАСЧЕТ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НИТЕЙ

Предпосылки расчета. В предлагаемой методике расчета нитей конечной жесткости за пределом упругости использованы следующие предпосылки:

продольные относительные деформации ϵ распределяются по высоте сечения нити (рис. 94) по линейному закону

$$\epsilon = \epsilon_0 + kz, \quad (422)$$

где ϵ_0 — относительная деформация оси нити; z — координата, характеризующая положение волокон по высоте нити относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения;

нормальные напряжения σ являются функцией относительного удлинения ϵ

$$\sigma = \sigma(\epsilon); \quad (423)$$

влияние касательных напряжений τ на условие текучести не учитывается;

нагружение нити полагается простым или близким к простому;

принимается точное выражение для определения изгибающего момента

$$M = -EI \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (424)$$

Известно, что гипотеза плоских сечений подтверждается только тогда, когда все сечения стержня работают в одинаковых условиях, например,

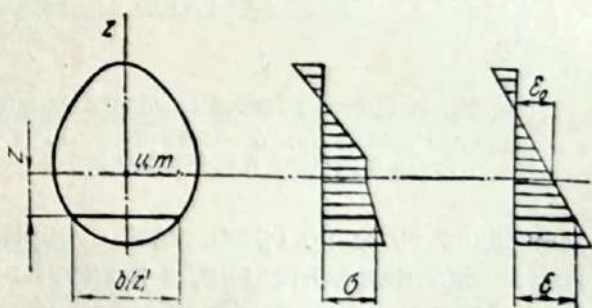
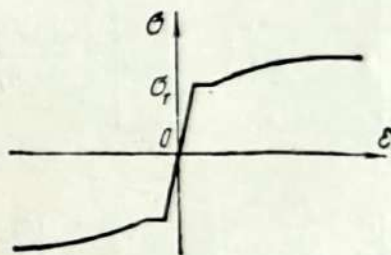


Рис. 94. Работа поперечного сечения нити.

в случае чистого изгиба, центрального растяжения или сжатия. Если в поперечных сечениях возникает также и перерезывающая сила, то, как показали эксперименты, указанной гипотезой можно пользоваться лишь при исследовании балок или стержней, у которых отношение высоты к пролету менее $1/8$. Для нитей конечной жесткости соотношение указанных размеров гораздо меньше. Следовательно, гипотеза плоских сечений для них вполне применима.

Допущение о том, что продольные волокна нити не давят одно на другое, т. е. находятся в одноосном напряженном состоянии, позволяет утверждать, что нормальные напряжения в поперечных сечениях являются функцией только относительных удлинений волокон. Теоретические и экспериментальные исследования [7, 11], проведенные с целью подтверждения этого допущения для упруго-пластических стержней, дают полное основание использовать его и для нитей конечной жесткости.

Как известно, основное влияние на работу нити конечной жесткости оказывают нормальные силы. Более того, с ростом нагрузки перере-

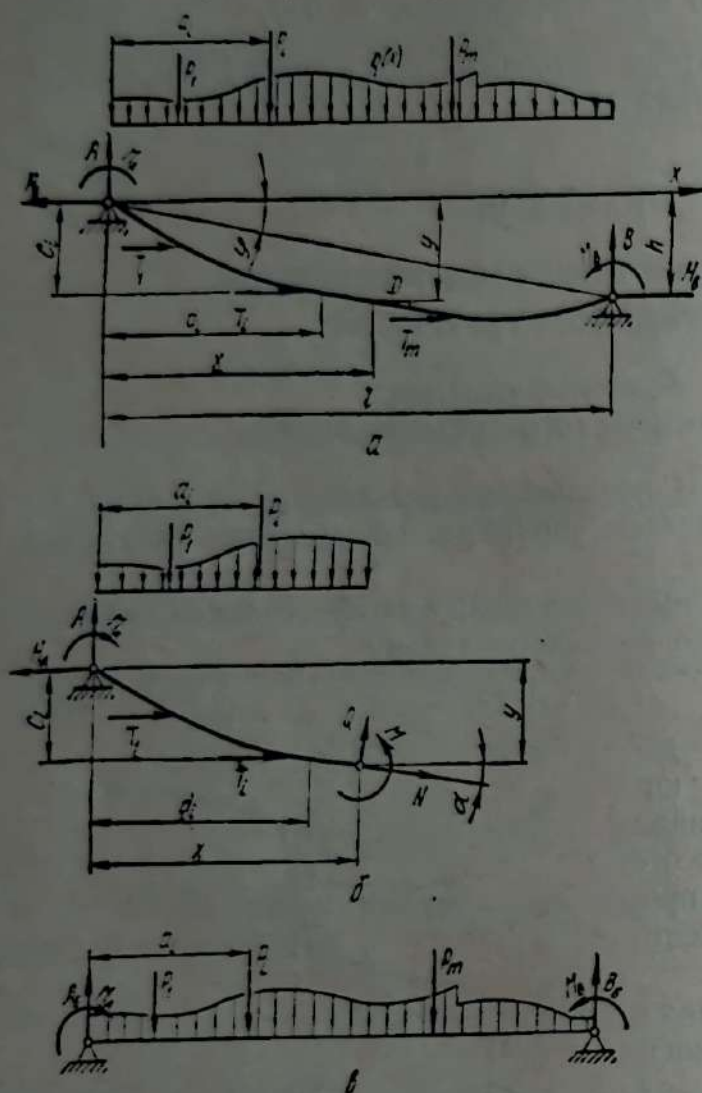


Рис. 95. К выводу расчетных зависимостей:
а — расчетная схема нити; б — элемент нити; в — нагрузки и реакции в простой балке.

зрывающие силы по сравнению с нормальными, в отличие от балки, возрастают незначительно, а в упруго-пластической стадии они могут быть даже меньше, чем в упругой (форма равновесия нити конечной жесткости в упруго-пластической стадии приближается к гибкой нити).

Поэтому погрешность от пренебрежения влиянием касательных напряжений τ на условие текучести для нитей конечной жесткости еще менее существенна, чем для балок.

Условия равновесия. Рассмотрим нить конечной жесткости при действии произвольной нагрузки (рис. 95, а). Для определения усилий в нити найдем горизонтальные и вертикальные составляющие опорных

реакций:

$$H_A = H_B + \sum_{s=1}^m T_s; \quad (425)$$

$$A = A^0 + H_A \operatorname{tg} \varphi - \sum_{s=1}^m T_s \frac{h - C_s}{l}; \quad (426)$$

$$B = B^0 - H_B \operatorname{tg} \varphi - \sum_{s=1}^m T_s \frac{C_s}{l}, \quad (427)$$

где A^0 и B^0 — опорные реакции в простой балке (рис. 95, а).

Изгибающий момент M и равнодействующая N внутренних сил, возникающих в поперечном сечении нити, симметричном относительно вертикальной оси (см. рис. 94), будут иметь вид

$$N = \int_F \sigma dF; \quad (428)$$

$$M = \int_F \sigma z dF, \quad (429)$$

где F — площадь поперечного сечения нити.

Определим M и N , выразив их через внешние силы (рис. 95, б):

$$N = \frac{H_A - \sum_{s=1}^l T_s + \left(Q^0 + H_A \operatorname{tg} \varphi - \sum_{s=1}^m T_s \frac{h - C_s}{l} \right) y'}{(1 + y'^2)^{1/2}}; \quad (430)$$

$$M = M^0 + x \left(H_A \operatorname{tg} \varphi - \sum_{s=1}^m T_s \frac{h - C_s}{l} \right) + \sum_{s=1}^l T_s (y - C_s) - H_A y, \quad (431)$$

где M^0 и Q^0 — соответственно изгибающий момент и поперечная сила в простой балке.

Таким образом,

$$\frac{H_A - \sum_{s=1}^l T_s + \left(Q^0 + H_A \operatorname{tg} \varphi - \sum_{s=1}^m T_s \frac{h - C_s}{l} \right) y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} - \int_F \sigma dF = 0; \quad (432)$$

$$M^0 + x \left(H_A \operatorname{tg} \varphi - \sum_{s=1}^m T_s \frac{h - C_s}{l} \right) + \sum_{s=1}^l T_s (y - C_s) - H_A y - \int_F \sigma z dF = 0. \quad (433)$$

При действии только одной вертикальной нагрузки система уравнений равновесия принимает вид

$$\frac{H + (Q^0 + H \operatorname{tg} \varphi) y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} - \int_F \sigma dF = 0; \quad (434)$$

$$M^0 + xH \operatorname{tg} \varphi - Hy - \int_F \sigma z dF = 0, \quad (435)$$

где $H_A = H_B = H$.

Если опоры нити расположены на одном уровне, то вместо уравнений (434) и (435) получим:

$$\frac{H + Q^0 y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} - \int_F \sigma dF = 0; \quad (436)$$

$$M^0 - Hy - \int_F \sigma z dF = 0. \quad (437)$$

Перерезывающая сила Q в поперечном сечении нити (рис. 95, б) определяется из выражения

$$Q = \frac{Q^0 + H_A \operatorname{tg} \varphi - \sum_{s=1}^m T_s \frac{h - C_s}{l} - \left(H_A - \sum_{s=1}^l T_s \right) y'}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \quad (438)$$

Уравнения для определения перерезывающей силы при отсутствии горизонтальной нагрузки имеют следующий вид:
для нити с опорами на разных уровнях

$$Q = \frac{Q^0 + H \operatorname{tg} \varphi - Hy'}{(1 + y'^2)^{1/2}}; \quad (439)$$

для нити с опорами на одном уровне

$$Q = \frac{Q^0 - Hy'}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \quad (440)$$

Полученные зависимости справедливы для нитей, работающих как с изгибом, так и без изгиба от начальной нагрузки.

Уравнение неразрывности деформаций. Как и ранее, для раскрытия статической неопределенности относительно распора установим связь между длинами нити до и после приложения дополнительной нагрузки.

Длина нити при действии начальной нагрузки

$$L_0 = \int_l (1 + y_0'^2)^{1/2} dx. \quad (441)$$

После приближения дополнительной нагрузки

$$L = \int_l (1 + y'^2)^{1/2} dx. \quad (442)$$

Приращение длины нити

$$\Delta L = L - L_0, \quad (443)$$

или

$$\Delta L = \int_l (1 + y'^2)^{1/2} dx - \int_l (1 + y_0'^2)^{1/2} dx. \quad (444)$$

Удлинение нити происходит за счет растяжения ее оси и может быть вычислено следующим образом:

$$\Delta L = \int_l \varepsilon_0^{(q+p)} dx - \int_l \varepsilon_0^{(q)} dx, \quad (445)$$

где $\int_l \varepsilon_0^{(q)} dx$ и $\int_l \varepsilon_0^{(q+p)} dx$ — удлинения оси нити от начальной и дополнительной нагрузок.

Следовательно,

$$\int_l (1 + y'^2)^{1/2} dx - \int_l (1 + y_0'^2)^{1/2} dx = \int_l \varepsilon_0^{(q+p)} dx - \int_l \varepsilon_0^{(q)} dx. \quad (446)$$

Последнее равенство и представляет искомое уравнение для определения неизвестной величины распора при загрузении нити дополнительной нагрузкой. Поскольку уравнение (446) получено из чисто геометрических соображений, то оно справедливо при любой диаграмме $\sigma - \varepsilon$.

Система уравнений (422) — (424), (432), (433), (438) и (446) описывает напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости в упругой и упруго-пластической стадиях.

Разгрузка. Остаточные деформации. Если нормальные напряжения σ и продольные деформации ε вычисляются в зависимости от истории нагружения, то выведенные условия равновесия и уравнения неразрывности деформаций будут описывать напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости не только при активных, но и при пассивных деформациях.

Как уже указывалось, при уменьшении интенсивности напряжений для упруго-пластического материала зависимость $\sigma - \varepsilon$ описывается таким же линейным законом, как и при упругих деформациях.

Найдем зависимость, связывающую изгибающий момент и кривизну нити при разгрузке. Допустим, что все параметры нити при нагрузке $q + p$ (рис. 96) известны. Тогда изменение изгибающего момента в поперечном сечении нити, расположенном на расстоянии x от левой опоры, при снятии нагрузки Δp будет

$$\Delta M_r = M - M_r, \quad (447)$$

а изменение кривизны нити

$$k_r = k - k_r, \quad (448)$$

где M_r и k_r — соответственно изгибающий момент и кривизна нити при разгрузке.

Зависимость между ΔM_r и Δk_r аналогична зависимости между изгибающим моментом и кривизной при упругом изгибе нити

$$EI (\Delta k_r) = \Delta M_r. \quad (449)$$

Откуда

$$EI(k - k_r) = M - M_r. \quad (450)$$

Изменение изгибающего момента в поперечном сечении нити может быть найдено из условия равновесия (435) и условия равновесия, составленного с учетом разгрузки,

$$M - M_r = M^0 + xH \operatorname{tg} \varphi - Hy - M_r^0 - xH_r \operatorname{tg} \varphi + H_r y_r, \quad (451)$$

где y_r , M_r^0 , H_r — соответственно ординаты кривой провисания, балочные изгибающие моменты и распор в нити при разгрузке.

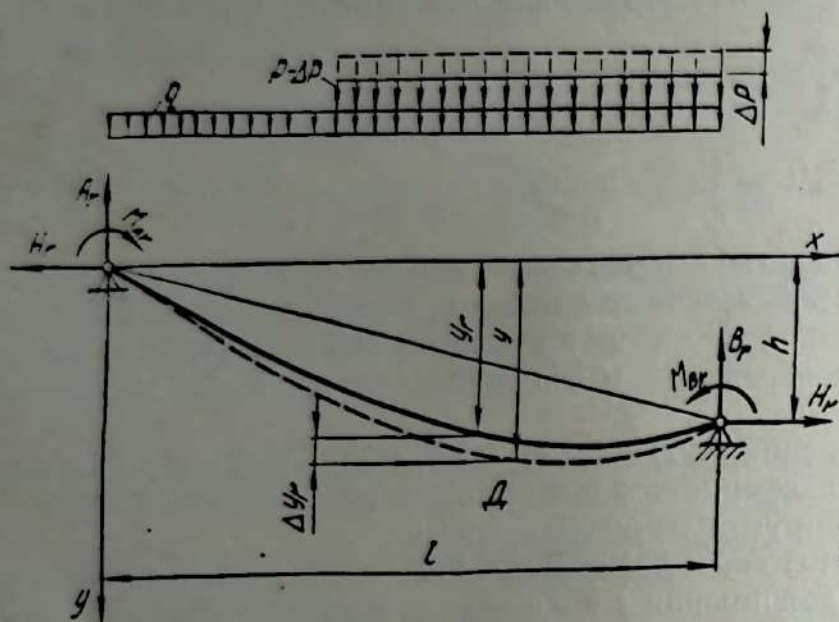


Рис. 96. К расчету нити при разгрузке.

Приравняв зависимости (450) и (451), получим следующее равенство:

$$M^0 + xH \operatorname{tg} \varphi - Hy - EIk = M_r^0 + xH_r \operatorname{tg} \varphi - H_r y_r - EIk_r. \quad (452)$$

Левая часть этого равенства совершенно не зависит от изменения нагрузки Δp и представляет собой функцию напряженно-деформированного состояния нити при нагрузке $q + p$. Обозначив эту часть уравнения через $C(x)$, получим

$$C(x) = M_r^0 + xH_r \operatorname{tg} \varphi - H_r y_r - EIk_r. \quad (453)$$

Зависимость (453) и представляет собой уравнение изгиба при упругой разгрузке нити.

Для раскрытия статической неопределенности относительно распора H , используется следующее уравнение неразрывности деформаций:

$$\int_0^l (1 + y'^2)^{1/2} dx - \int_0^l (1 + y_r'^2)^{1/2} dx = \int_0^l \frac{N - N_r}{EF} dx, \quad (454)$$

где N_r — нормальное усилие в поперечном сечении нити при разгрузке.

Относительные деформации в поперечном сечении нити при разгрузке вычисляются по формуле

$$\varepsilon_r = \varepsilon - \frac{N - N_r}{EF} - \frac{(M - M_r)z}{EI}, \quad (455)$$

а эпюра остаточных напряжений находится из выражения

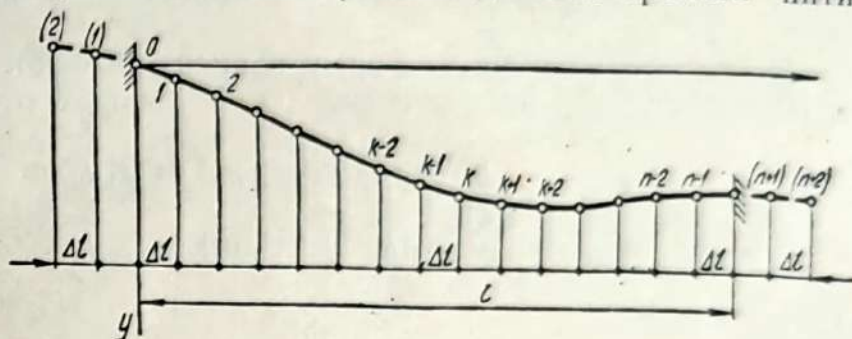
$$\sigma_r = \sigma - \frac{N - N_r}{F} - \frac{(M - M_r) z}{I}. \quad (456)$$

Система уравнений (453) и (454) позволяет определять напряженно-деформированное состояние нити при упругой разгрузке.

§ 2. МЕТОДИКА И ПРОГРАММА РАСЧЕТА НИТЕЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Конечно-разностная аппроксимация производных. В работе в качестве интерполирующей функции принят полином Y_n степени n , значения которого в узловых точках (точках деления пролета нити

Рис. 97. К определению производных.



на равные части) совпадают с достаточной точностью со значениями функции $y = y(x)$.

Производные функции $y = y(x)$ (рис. 97) удобно аппроксимировать однотипными разностными выражениями симметричной структуры [2]:

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta l}; \quad (457)$$

$$y''_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta l^2} \quad (458)$$

или

$$y'_k = \frac{y_{k-2} - 8y_{k-1} + 8y_{k+1} - y_{k+2}}{12\Delta l}; \quad (459)$$

$$y''_k = \frac{-y_{k-2} + 16y_{k-1} - 30y_k + 16y_{k+1} - y_{k+2}}{12\Delta l^2}, \quad (460)$$

где Δl — интервал деления пролета нити на равные части.

Для определения производных в крайних точках и вблизи них вводят одну или две законтурные точки.

При трехточечной аппроксимации производных ординаты законтурных точек определяются по формулам:

при шарнирном закреплении концов нити

$$y_{(n+1)} = 2y_n - y_{n-1}; \quad (461)$$

при жестком закреплении концов нити

$$y_{(n+1)} = -\frac{3}{2}y_n + 3y_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-2} + 3\Delta l y'_n. \quad (462)$$

При пятиточечной аппроксимации производных ординаты закон-
турных точек будут равны:

при шарнирном закреплении концов нити

$$y_{(n+1)} = \frac{1}{11} (y_{n-3} - 4y_{n-2} - 6y_{n-1} + 20y_n); \quad (463)$$

$$y_{(n+2)} = \frac{1}{11} (16y_{n-3} - 75y_{n-2} + 80y_{n-1} - 10y_n) \quad (464)$$

при жестком закреплении концов нити

$$y_{(n+1)} = \frac{1}{3} y_{n-3} - 2y_{n-2} + 6y_{n-1} - \frac{10}{3} y_n + 4\Delta l y'_n; \quad (465)$$

$$y_{(n+2)} = \frac{8}{3} y_{n-3} - 15y_{n-2} + 40y_{n-1} - \frac{80}{3} y_n + 20\Delta l y'_n. \quad (466)$$

Используя матричную форму записи, на основе выражений (459)
и (460) определим производные для n узловых точек нити:

$$\vec{y}' = \{y'_0 \ y'_1 \dots y'_n\} = \Omega_1 \vec{y}_n; \quad (467)$$

$$\vec{y}'' = \{y''_0 \ y''_1 \dots y''_n\} = \Omega_2 \vec{y}_n, \quad (468)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{12\Delta l} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 8 & -1 \\ & 8 & -8 & 8 & -1 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & -8 & 8 & -1 \end{bmatrix}; \quad (469)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{12\Delta l^2} \begin{bmatrix} -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \end{bmatrix}; \quad (470)$$

$$y_n = \{y_{(2)} \ y_{(1)} \ y_0 \dots y_{(n+1)} \ y_{(n+2)}\}. \quad (471)$$

Вектор кривизн нити находится из уравнения

$$\vec{k} = \{k_0 \ k_1 \dots k_n\} = \Lambda_1^3 \Omega_2 \vec{y}_n, \quad (472)$$

где

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} (1 + y_0'^2)^{-1/2} & & & \\ & (1 + y_1'^2)^{-1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1 + y_n'^2)^{-1/2} \end{bmatrix}. \quad (473)$$

Определение усилий. Допустим, что на нить конечной жесткости
действуют распределенная и сосредоточенная нагрузки (рис. 98).

Усилия, возникающие в нити, будем определять для узловых точек. Полагая, что внешняя нагрузка может быть перераспределена на соответствующие узлы, запишем следующее векторное равенство:

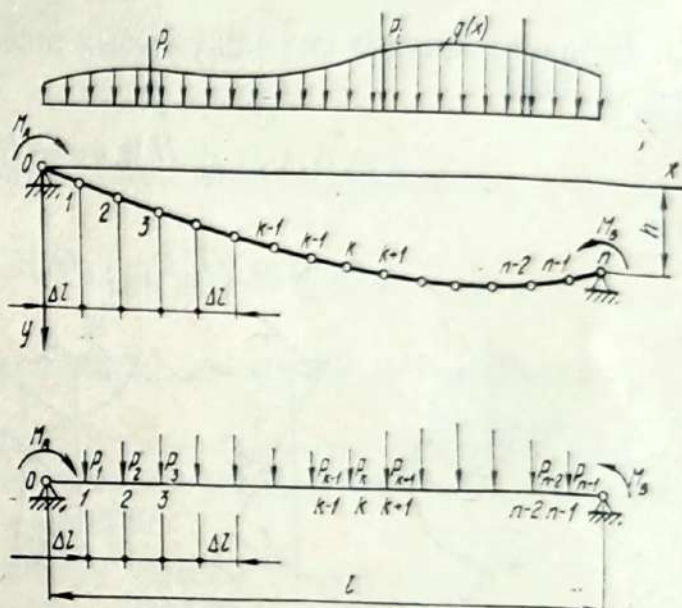
$$\vec{M}^6 = \begin{bmatrix} M^6_0 \\ M^6_1 \\ \dots \\ M^6_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,1} & m_{0,2} & \dots & m_{0,n} \\ m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} + \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n+1 & 0 \\ n & 1 \\ n-1 & 2 \\ \dots & \dots \\ 1 & n \\ 0 & n+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}. \quad (474)$$

Краткая запись этого уравнения может быть представлена в виде

$$\vec{M}^6 = \Lambda_m \vec{P} + \Lambda_{AB} \vec{M}_{AB}, \quad (475)$$

где Λ_m — матрица влияния моментов для балки; $\vec{P}$ — вектор внешних сил; Λ_{AB} — матрица влияния опорных моментов для балки; $\vec{M}_{AB}$ — вектор опорных моментов.

Рис. 98. Математическая модель нити.



Вектор поперечных сил $\vec{Q}^6$ найдем из выражения

$$\vec{Q}^6 = \Omega_3 (\Lambda_m \vec{P} + \Lambda_{AB} \vec{M}_{AB}), \quad (476)$$

где

$$\vec{Q}^6 = \{Q^6_0, Q^6_1, \dots, Q^6_n\}; \quad (477)$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2\Delta l} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (478)$$

Для определения нормальных усилий в узловых точках нити уравнение (430) представим в векторной форме

$$\vec{N} = \Lambda_1 [H\vec{e} + (\Lambda_Q + HE_1 \operatorname{tg} \varphi) \Omega_1 \vec{y}_n], \quad (479)$$

где

$$\Lambda_Q = \begin{bmatrix} Q^{\sigma_0} & & & \\ & Q^{\sigma_1} & & \\ & & \dots & \\ & & & Q^{\sigma_n} \end{bmatrix}; \quad (480)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}; \quad (481)$$

$$\vec{e} = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}. \quad (482)$$

Вектор поперечных сил для узловых точек нити находится из уравнения (439)

$$\vec{Q} = \Lambda_1 (\vec{Q}^{\sigma} + H \operatorname{tg} \varphi \vec{e} - H \Omega_1 \vec{y}_n), \quad (483)$$

где

$$Q = \{Q_0 \ Q_1 \ \dots \ Q_n\}. \quad (484)$$

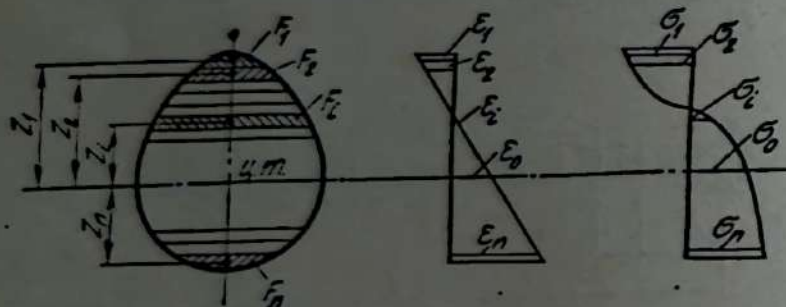


Рис. 99. К определению усилий.

Внутренние силовые факторы M_k и N_k , возникающие в k -м поперечном сечении нити, определяются следующим образом.

сечение нити разбивается по высоте (рис. 99) на 30—40 площадок (площадь каждой из них — F_i);

находятся положения центров тяжести этих площадок (т. е. устанавливаются координаты z_i) относительно центра тяжести сечения; определяются относительные деформации ϵ_i для волокон, имеющих координаты z_i ; вычисляются

$$\epsilon_i = \epsilon_{0_k} + k_k z_i; \quad (485)$$

$$N_k = \sum_{i=1}^n F_i \sigma_i; \quad (486)$$

$$M_k = \sum_{i=1}^n F_i \sigma_i z_i. \quad (487)$$

Алгоритмы расчета. Рассмотрим нить, работающую с изгибом от начальной нагрузки.

Найдем ординату кривой провисания для k -й точки нити при действии произвольной дополнительной нагрузки. Для этого воспользуемся уравнениями (435) и (487)

$$y_k = \frac{1}{H} (M_k^0 + x_k H \operatorname{tg} \varphi - M_k). \quad (488)$$

Откуда вектор $\vec{y}$ для узловых точек нити выразится в виде

$$\vec{y} = \frac{1}{H} (\vec{M}^0 + H \operatorname{tg} \varphi \vec{x} - \vec{M}) \quad (489)$$

или, учитывая (475),

$$\vec{y} = \frac{1}{H} (\Lambda_m \vec{P} + \Lambda_{AB} \vec{M}_{AB} + H \operatorname{tg} \varphi \vec{x} - \vec{M}), \quad (490)$$

где

$$\vec{x} = \{x_0 x_1 \dots x_n\}; \quad (491)$$

$$\vec{M} = \{M_0 M_1 \dots M_n\}. \quad (492)$$

Если вектор $\vec{M}$ вычислить, исходя из i -го приближения, то из уравнения (490) получим

$$\vec{f}(\vec{y}^{(i)}) = \frac{1}{H} [\Lambda_m \vec{P} + \Lambda_{AB} \vec{M}_{AB} + H \operatorname{tg} \varphi \vec{x} - \vec{M}(\vec{y}^{(i)})], \quad (493)$$

где $\vec{f}(\vec{y}^{(i)})$ и $\vec{M}(\vec{y}^{(i)})$ — векторы, определяемые по параметрам i -го приближения.

Для определения ординат кривой провисания при фиксированном значении распора на каждом i -м шаге последовательных приближений выполняются следующие операции:

по приближенному вектору кривой провисания $\vec{y}^{(i)} = \vec{y}^{(i)}(x_k)$, найденному на предыдущем $(i-1)$ -м шаге, из уравнений (472) и (479) определяются векторы $\vec{k}^{(i)}$ и $\vec{N}^{(i)}$;

находится эпюра относительных удлинений ε_0 , для чего ε_{0k} даются соответствующие приращения до тех пор, пока не станет соблюдаться условие

$$|N_k^{(i)} - U_k^{(i)}| \leq \psi_1, \quad (494)$$

где

$$U_k^{(i)} = \sum_{i=1}^n F_i \sigma_i^{(i)}; \quad (495)$$

ψ_1 — заданная точность вычислений; из выражения (493) определяется вектор $\vec{f}(\vec{y}^{(i)})$; отыскивается последующее $(i+1)$ -е приближение в виде

$$\vec{y}^{(i+1)} = \vec{y}^{(i)} - \beta [\vec{y}^{(i)} - \vec{f}(\vec{y}^{(i)})], \quad (496)$$

где $0 < \beta \leq 0,5$.

Процесс итерации прекращается, когда

$$\left| \frac{y_k^{(i)} - f_k^{(i)}}{y_k^{(i)}} \right| \leq \psi_2, \quad (497)$$

где ψ_2 — заданная точность вычислений.

Одновременно на каждом шаге приближений реализуются и граничные условия. Осуществляется это таким образом:

при опорных моментах, полученных на $(i - 1)$ -м шаге, т. е. при векторе $\vec{M}_{AB}^{(i-1)}$, определяются ординаты кривой провисания для i -го приближения;

по найденным ординатам и зависимостям (463) и (464) или (465) и (466) отыскиваются ординаты законтурных точек;

полученные данные используются для вычисления вектора $\vec{M}_{AB}$ i -го приближения;

производится переход к $(i + 1)$ -му приближению.

Раскрытие статической неопределенности относительно распора H производится следующим образом. Допустим, что при действии начальной нагрузки известно некоторое приближенное значение распора $H_0^{(1)}$.

Для этого фиксированного значения распора, используя метод последовательных приближений, найдем соответствующую кривую провисания. Если окажется, что

$$\left| \frac{l_0 - l}{l_0} \right| > \psi_3, \quad (498)$$

(ψ_3 — заданная точность вычислений), то вносится поправка к значению $H_0^{(1)}$, т. е. определяется $H_0^{(2)}$. Уточнение распора производится до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность вычислений. Отметим на графике зависимости распора от нагрузки (рис. 100) точку a (q, H_0).

Прикладывая дополнительную нагрузку небольшими ступенями Δp , отыщем для каждой из этих ступеней соответствующие значения H_j ($j = 1, 2, 3 \dots n$).

Точку b ($q + \Delta p, H_1$) определим, давая ряд последовательных приращений распору H_0 и учитывая равенство (446), которое представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l}{3} \sum_{k=0}^n e_k (1 + y_k^*)^{1/2} - \frac{\Delta l}{3} \sum_{k=0}^n e_k (1 + y_0^*)^{1/2} = \\ = \frac{\Delta l}{3} \sum_{k=0}^n e_k \varepsilon_{0k}^{q+\Delta p} - \frac{\Delta l}{3} \sum_{k=0}^n e_k \varepsilon_{0k}^q, \end{aligned} \quad (499)$$

где $e_k = 1, 4, 2, 4, 2, \dots, 2, 4, 1$.

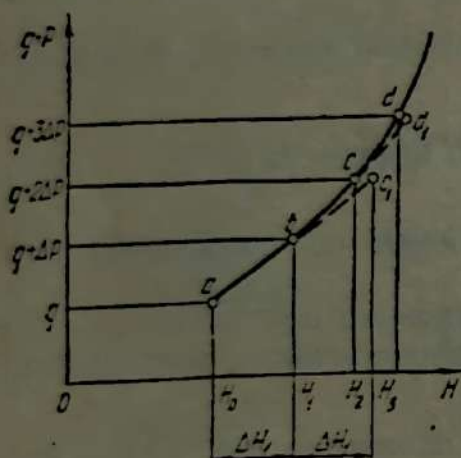


Рис. 100. К раскрытию статической неопределенности относительно распора.

Для нахождения точки $c(q + 2\Delta p, H_2)$ в первом приближении распор $H_2^{(1)}$ полагаем равным $H_2^{(1)} = H_1 + \Delta H_1$, что соответствует точке c_1 . Здесь $\Delta H_1 = H_1 - H_0$ — приращение распора от дополнительной нагрузки Δp . Внося определенные коррективы, исходя из условия (499), получим следующее приближение и т. д.

В работе все начальные приближения для распора H_j на j -м этапе расчета вычислялись по формуле

$$H_j^{(1)} = H_{j-3} - 3H_{j-2} + 3H_{j-1}, \quad (500)$$

полученной из интерполяционной формулы Грегори — Ньютона с удержанием трех членов ряда [28]:

$$f(x_0 + u\Delta x) = f(x_0) + \frac{u}{1!} \Delta f(x_0) + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \dots + \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-n+1)}{n!} \Delta^n f(x_0), \quad (501)$$

где $\Delta x = x_1 - x_0$; $u = \frac{x - x_0}{\Delta x}$; $f(x_0)$ — начальное значение функции в точке x_0 ; $\Delta^n f(x_0)$ — разности n -го порядка, выраженные через значения функции.

Для нитей, работающих без изгиба от начальной нагрузки, вектор

$$\vec{y}_0 = \frac{1}{H_0} \Lambda_m \vec{P}, \quad (502)$$

а распор

$$H_0 = \frac{M^6_c}{f_0}, \quad (503)$$

где M^6_c — момент в середине пролета простой балки.

При действии дополнительной нагрузки относительные деформации ϵ_i для соответствующих волокон k -го сечения нити определяются по формуле

$$\epsilon_i = \epsilon_{0k} + \Delta k_k z_i; \quad (504)$$

где

$$\Delta k_k = k_k - k_{0k}.$$

Здесь k_{0k} — начальная кривизна в k -м сечении нити.

За исключением указанных особенностей, алгоритм расчета нитей, работающих без изгиба от начальной нагрузки, строится так же, как и для нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки.

Сравнительно несложно и построение алгоритма расчета нитей при разгрузке. Покажем, что это так.

Вектор ординат кривой провисания нити при разгрузке будет

$$\vec{y}_r = \frac{1}{H} (\vec{M}^6_r) + H_r \operatorname{tg} \varphi \vec{x} - EI \vec{k}_r - \vec{C}. \quad (505)$$

Или, учитывая (472) и (475), получаем

$$\vec{y}_r = \frac{1}{H_r} (\Lambda_m \vec{P}_r + \Lambda_{AB} \vec{M}_{AB,r} + H_r \operatorname{tg} \varphi \vec{x} - EI \Lambda_1^3 \Omega_2 \vec{y}_n - \vec{C}), \quad (506)$$

где $\vec{P}_r$, $\vec{M}_{AB,r}$, $\vec{y}_n$ — соответственно вектор внешних сил, вектор опорных моментов и вектор ординат кривой провисания, включающий ординаты

законтурных точек, при разгрузке; $\vec{C}$ — вектор констант C_k , определяемых из следующего выражения при $x_k = x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$C_k = M^0_k + x_k \operatorname{tg} \varphi H - H y_k - E I k_k; \quad (507)$$

Здесь следует иметь в виду, что матрица Λ_1 формируется из элементов вектора $\vec{y}_r$.

Допустим, что в уравнение (506) подставлено значение вектора $\vec{y}_r^{(i)}$. Тогда получим

$$\vec{f}_r(\vec{y}_r^{(i)}) = \frac{1}{H} (\Lambda_m \vec{P}_r + \Lambda_{AB} \vec{M}_{AB} + H_r \operatorname{tg} \varphi \vec{x} - E I \Lambda_1^3 \Omega_2 \vec{y}_r^{(i)} - \vec{C}). \quad (508)$$

Для решения рассматриваемой задачи целесообразно использовать изложенный выше итерационный метод.

Организация процесса вычислений на i -м шаге последовательных приближений при фиксированном значении распора H , сводится к следующей последовательности операций:

по i -му вектору ординат кривой провисания, найденному из предыдущего ($i - 1$)-го шага, из уравнений (472) и (479) определяются векторы $\vec{k}_r^{(i)}$ и $\vec{N}_r^{(i)}$;

из выражения (508) находится вектор $\vec{f}_r(\vec{y}_r^{(i)})$;

отыскивается последующее ($i + 1$)-ое приближение в виде

$$\vec{y}_r^{(i+1)} = \vec{y}_r^{(i)} - \beta [\vec{y}_r^{(i)} + \vec{f}_r(\vec{y}_r^{(i)})]. \quad (509)$$

где $0 < \beta \leq 0,5$.

Процесс итерации продолжается до тех пор, пока не будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{y_{rk}^{(i)} - f_{rk}^{(i)}}{y_{rk}^{(i)}} \right| \leq \psi_2. \quad (510)$$

Раскрытие статической неопределенности относительно распора $H_r^{(i)}$ осуществляется способом прогноза и коррекции. При этом используется условие (454), которое при численном интегрировании записывается в виде

$$\frac{\Delta l}{3} \sum_{k=0}^n e_k (1 + y_k'^2)^{1/2} - \frac{\Delta l}{3} \sum_{k=0}^n e_k (1 + y_{rk}'^2)^{1/2} = \frac{\Delta l}{3} \sum_{k=0}^n e_k (N_k - N_{rk}). \quad (511)$$

Здесь индекс k означает, что соответствующие параметры вычисляются для k -го сечения нити.

Приведенный алгоритм расчета в одинаковой мере относится как к нитям, работающим с изгибом, так и без изгиба от начальной нагрузки.

Программа расчета. Вычислительный комплекс, реализующий расчет нитей конечной жесткости в упруго-пластической стадии, состоит из пяти блоков.

В блоке I производится вычисление силовых факторов и относительных деформаций оси нити в узловых точках.

В блоке II при фиксированном значении распора $H_j^{(i)}$ вычисляются ординаты кривой провисания нити.

Для реализации граничных условий в блоке III определяются ординаты законтурных точек.

В блоке IV производится вычисление распора $H_j^{(i)}$. При невыполнении условия неразрывности деформаций в блоке V осуществляется корректировка величины распора.

Структура программы расчета нитей конечной жесткости, работающих без изгиба от начальной нагрузки, аналогична нитям, у которых в начальном состоянии возникают изгибные напряжения.

Разделение деформаций на активные и пассивные приводит к ускорению программ и значительному увеличению массива чисел, так как при этом приходится использовать дополнительную информацию.

Для разработанного метода расчета погрешность, допущенная на каком-либо j -м этапе расчета, практически не влияет на результаты $(j + 1)$ -го этапа. Объясняется это тем, что каждый из этапов вычислений является самостоятельным звеном расчета.

Основная погрешность решения задачи зависит от погрешности численного дифференцирования и интегрирования, поскольку погрешность, допускаемая в расчете за счет окончания процесса итерации на i -м шаге приближений, может быть всегда сведена к величине малого порядка.

Наиболее характерные программы расчета нитей в упруго-пластической стадии приведены в работе [33].

§ 3. ДЕЙСТВИЕ СИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние нитей из идеального упруго-пластического материала ($\sigma_T = 240$ МПа; $E = 2,1 \cdot 10^6$ МПа) при действии равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету.

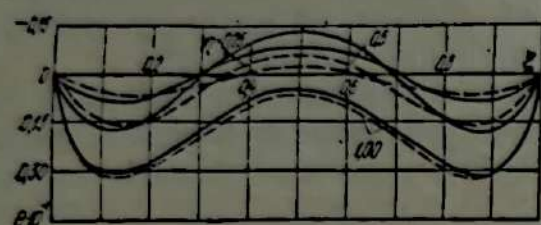
Для анализа влияния геометрических и физических параметров на перемещения, деформации и несущую способность нитей будем пользоваться разработанными выше алгоритмами и программами расчета.

В качестве опытных образцов были приняты нити пролетом 48 м с опорами, расположенными на одном уровне. Площадь поперечного сечения опытных образцов нитей 72 см²; стрелы провисания $1/10$, $1/25$ и $1/50$ пролета. При исследовании площадь поперечного сечения нитей оставалась постоянной, а жесткость на изгиб изменялась от EI до $0,25EI$ (жесткости EI соответствует нить с высотой поперечного сечения 12 см и шириной 6 см).

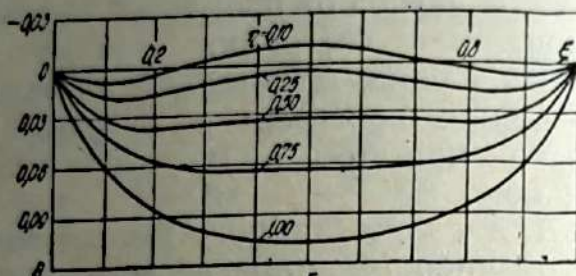
Критерием для определения предельной несущей способности нити являлась величина пластических деформаций $\varepsilon_{\max} = 10\sigma_T/E$, возникающих в крайних волокнах какого-либо поперечного сечения нити [33].

Рассмотрим вначале характер деформаций нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки. В зависимости от величины стрелы провисания прогибы нитей конечной жесткости (рис. 101) могут быть как положительными, так и отрицательными. Так, нить со стрелой провисания $1/10$ пролета (рис. 101, а) имела максимальные прогибы вблизи четверти пролета. В середине же пролета лишь в предельном состоянии ($\eta = 1$), когда пластические деформации охватывали большую часть объема нити, прогибы ее становились положительными.

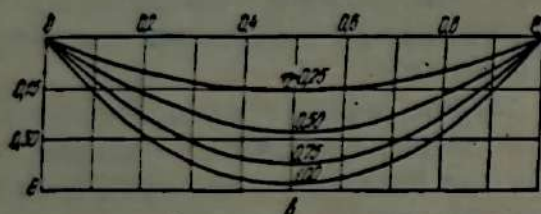
Качественно по-иному деформировались образцы нитей со стрелами провисания $1/25$ (рис. 101, б) и $1/50$ (рис. 101, в) пролета. Прогибы их



а



б



в

Рис. 101. Прогибы нитей с жесткостью EI :

а — при стреле провисания $1/10$ пролета; б — то же, $1/25$ пролета; в — то же, $1/50$ пролета; θ — отношение прогибов нити к начальной стреле провисания; ξ — относительная абсцисса; η — отношение интенсивности

дополнительной нагрузки p к ее предельному значению $p_{н.макс}$, при котором исчерпывается несущая способность нити; сплошной линией обозначены прогибы нити с шарнирным закреплением концов; пунктирной — то же, с жестким закреплением концов.

достигали максимальной величины уже в середине пролета. Правда, в нити со стрелой провисания $1/25$ пролета это происходило при сравнительно большой нагрузке ($\eta > 0,5$). Существенная разница в работе нитей со стрелами провисания $1/25$ и $1/50$ пролета была в том, что в первой с ростом нагрузки интенсивность прогибов увеличивалась, а во второй уменьшалась. Таким образом, изменение стрелы провисания в два и более раза приводит не только к количественному, но и качественному изменению эпюры прогибов.

По сравнению со стрелой провисания жесткость на изгиб оказывает гораздо меньшее влияние на прогибы нитей. Так, при изменении жесткости на изгиб в тех же пределах, что и стрелы провисания, характер прогибов нити остается тем же, изменяется лишь незначительно их величина.

Жесткое закрепление концов нити (см. рис. 101, а) оказывает влияние на ее прогибы лишь при незначительной интенсивности дополнительной нагрузки. С увеличением жесткости на изгиб и, особенно стрелы провисания, влияние жесткого закрепления концов нити увеличивается. С ростом дополнительной нагрузки кривая провисания нити при жестком закреплении концов приближается к кривой провисания нити с шарнирным закреплением концов. Так, при $f_0/l = 1/25$ и $1/50$ прогибы опытных образцов нитей с шарнирным закреплением кон-

пов уже при $\eta = 0,1$ практически совпали с прогибами нитей с жестким закреплением концов.

Для более наглядного представления о влиянии геометрических параметров и пластических деформаций нитей на их перемещение на рис. 102 приведены прогибы нитей в середине пролета в зависимости от стрелы провисания и жесткости на изгиб. Из рис. 102 видна одна интересная особенность, связанная, в основном, с характером пластических деформаций, а именно, что нить с жесткостью на изгиб EI может быть более деформативной, чем нить с жесткостью на изгиб $0,25EI$.

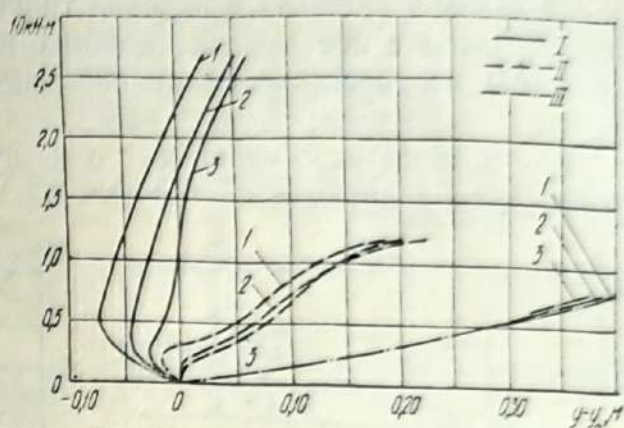


Рис. 102. Прогибы нитей в середине пролета с шарнирным закреплением концов:

I — при стреле провисания $1/10$ пролета; II — то же, $1/25$ пролета; III — то же, $1/30$ пролета; 1, 2, 3 — прогибы нитей при жесткости соответственно EI , $0,5EI$ и $0,25EI$.

Рассмотрим характер изменения распора и изгибающего момента в нитях при возрастании дополнительной нагрузки. Зависимость распора от интенсивности дополнительной нагрузки представлена на рис. 103. Приведенная зависимость имеет слабо выраженный нелинейный характер. Нелинейность проявляется больше в нитях с малыми стрелами провисания.

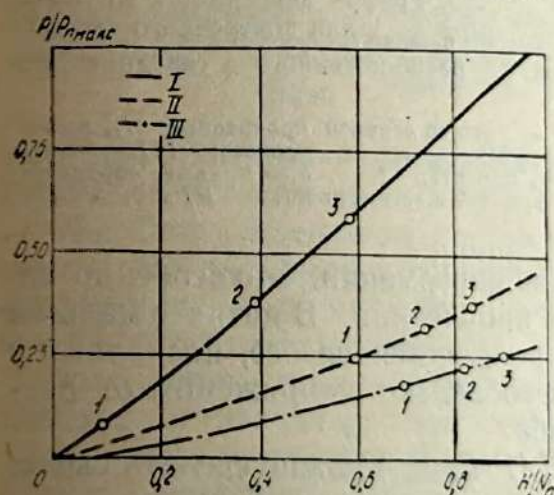


Рис. 103. График зависимости $H/N_n = f(p/p_{п.макс})$:

$p_{п.макс}$ — максимальная предельная дополнительная нагрузка; N_n — предельное значение нормального усилия; I — нить со стрелой провисания $1/10$ пролета; II — то же, $1/25$ пролета; III — то же, $1/30$ пролета; 1, 2, 3 — моменты появления пластических деформаций соответственно для нитей с жесткостью EI , $0,5EI$ и $0,25EI$.

по-иному, чем в балке. Если в балке величина изгибающего момента зависит от интенсивности нагрузки, то в нити конечной жесткости она определяется не столько величиной нагрузки, как величиной стрелы

провисания.

Влияние жесткости на изгиб на величину распора в нити зависит от интенсивности нагрузки. Так, если при действии начальной нагрузки максимальная разница в распорах между нитями с одной и той же стрелой провисания, но с жесткостью EI и $0,25EI$ доходит до 17 %, то при действии дополнительной нагрузки $\eta = 0,2$ эта разница уменьшается до 2 %. При величине дополнительной нагрузки $\eta = 0,4$ и более влияние жесткости на изгиб на величину распора в нити практически не сказывается.

Изгибающие моменты в упруго-пластической нити конечной жесткости при действии дополнительной нагрузки изменяются совершенно

провисания и жесткости на изгиб. С ростом нагрузки (рис. 104) и появлением пластических деформаций изгибающие моменты в нити уменьшаются. При развитых пластических деформациях форма равновесия нити конечной жесткости, особенно при нагрузках, близких к предельным, становится подобна гибкой нити, поскольку изгибающие моменты в поперечных сечениях нити уменьшаются настолько (рис. 105), что практически не оказывают влияния на форму равновесия.

Как и следовало ожидать, пластические деформации раньше появляются в нитях с жесткостью на изгиб EI (момент их появле-

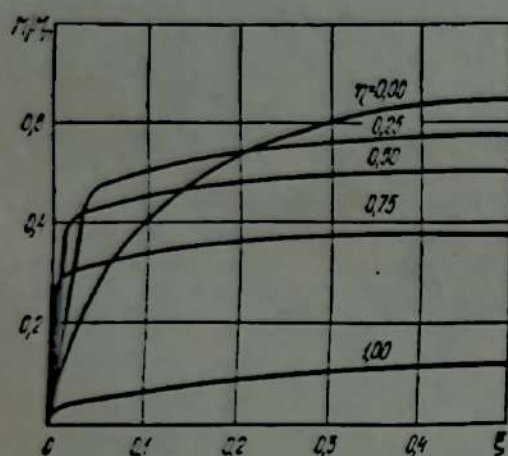


Рис. 104. Эпюры изгибающих моментов в нити при стреле провисания $1/10$ пролета и жесткости EI (M_p — предельный изгибающий момент).

ния на рис. 105 обозначен точкой). С уменьшением жесткости на изгиб повышается нагрузка, при которой в нити наступают первые пластические деформации. Это особенно заметно в нитях с большими стрелами провисания. В нитях с малыми стрелами провисания это свойство проявляется слабее, поскольку в поперечных сечениях таких нитей преобладают напряжения от растяжения над напряжениями от изгиба.

Из анализа зависимости $M/M_p = f(P/P_{п.макс})$ можно сделать вывод о том, что нити с большими стрелами провисания и большой жесткостью на изгиб обладают значительным резервом прочности. Так, для нити со стрелой провисания $1/10$ и жесткостью на изгиб EI предельная нагрузка в 9,4 раза превышает нагрузку, соответствующую моменту появления текучести. Следовательно, ограничивать несущую способность нитей конечной жесткости моментом появления пластических деформаций нецелесообразно. После наступления текучести нить может сопротивляться увеличению внешней нагрузки до тех пор, пока пластические деформации не охватят значительную часть ее объема.

В нити, работающей в упруго-пластической стадии, характер зависимости относительных деформаций от интенсивности дополнитель-

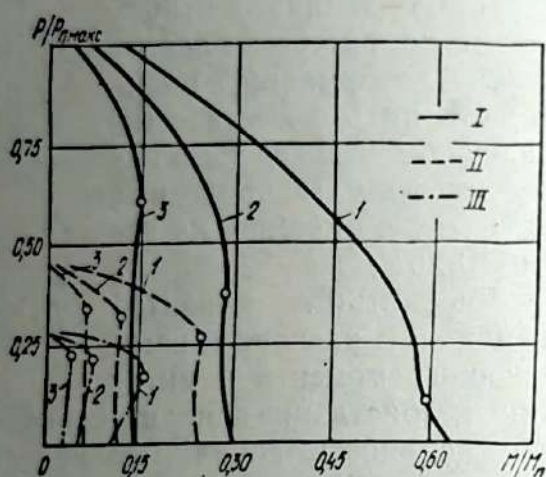


Рис. 105. График зависимости $M/M_p = f(P/P_{п.макс})$ для поперечного сечения нити, расположенного в середине пролета:

I — нить со стрелой провисания $1/10$ пролета; II — то же, $1/20$ пролета; III — то же, $1/30$ пролета; 1, 2, 3 — кривые, соответствующие жесткости EI ; 0,5 EI и 0,25 EI .

ной нагрузки (рис. 106) резко отличается от аналогичной зависимости в упругой стадии. Если в упругой нити с шарнирным закреплением концов относительные деформации уменьшаются от опор к середине пролета, то в упруго-пластической — деформации на опорах могут быть намного меньше деформаций в пролете.

Для нитей конечной жесткости характерно наличие односторонней текучести. Вначале пластические деформации наиболее интенсивно распространяются по длине нити. Это происходит до тех пор, пока они не охватят почти всю пролетную часть нити. В дальнейшем с ростом

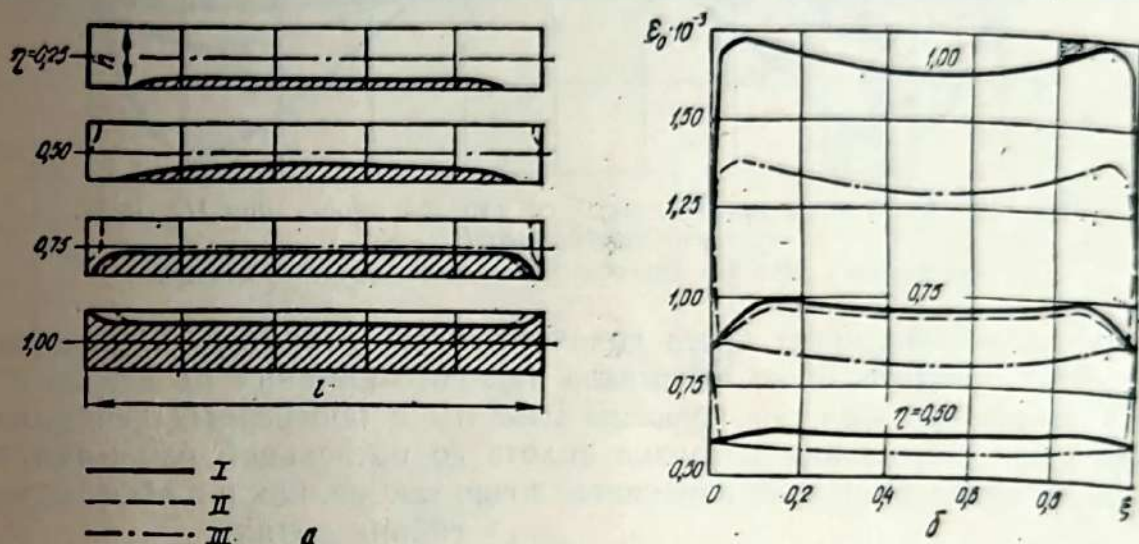


Рис. 106. Пластические деформации нити со стрелой провисания $1/10$ пролета: а — зоны текучести; б — относительные удлинения оси; I — относительные деформации нити с шарнирным закреплением концов при жесткости EI ; II — то же, с жестким закреплением концов при жесткости EI ; III — то же, с шарнирным закреплением концов при жесткости $0,25EI$.

интенсивности нагрузки текучесть распространяется, в основном, по высоте сечения нити.

Жесткое закрепление концов нити практически не оказывало влияния на общий характер пластических зон. Оно сказывалось лишь непосредственно на опорных участках, где пластические деформации могут достигать значительных величин.

Изменение стрелы провисания также не приводит к существенному изменению характера пластических деформаций. Величина стрелы провисания нитей сказывалась, в основном, на несущей способности, моменте появления и интенсивности развития пластических зон.

При одной и той же площади поперечного сечения и одинаковой стреле провисания упруго-пластические нити с большей жесткостью на изгиб имели большие относительные деформации ϵ_0 . Разница в относительных деформациях между нитями с разной жесткостью на изгиб с уменьшением стрелы провисания уменьшалась.

Во всех рассмотренных случаях предельное состояние нитей конечной жесткости наступало на опорах, где при нормальной силе $N = \sigma_t F$ возникала местная текучесть.

Прогибы нитей конечной жесткости, работающих без изгиба от начальной погрузки, были только положительными, а их величина

вблизи опорных участков была намного меньше, чем у нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки. В связи с этим жесткое закрепление концов нитей оказывало гораздо меньшее влияние на их прогибы, изгибающие моменты и относительные деформации.

Изменение стрелы провисания нитей, работающих без изгиба от начальной нагрузки, хотя и приводит к изменению эпюры прогибов,

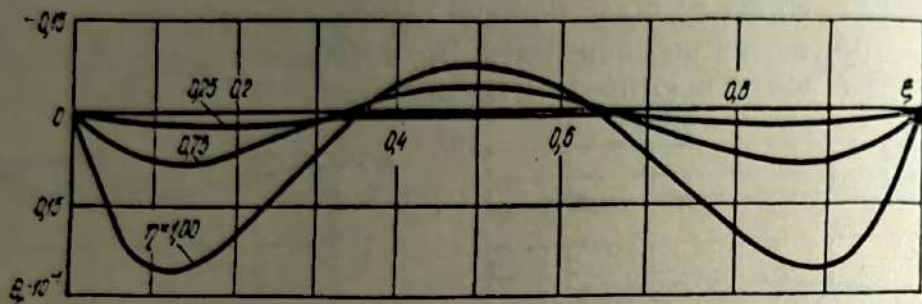


Рис. 107. Остаточные прогибы нити со стрелой провисания $1/10$ пролета и жесткостью EI :

θ_r — отношение остаточных прогибов к начальной стреле провисания.

но это изменение носит чисто количественный характер. Жесткость на изгиб практически не оказывала никакого влияния на величину и характер прогибов. Изгибающие моменты в поперечных сечениях нитей при возрастании нагрузки вплоть до предельной изменяются незначительно. Распор же изменяется точно так же, как и в абсолютно гибких нитях.

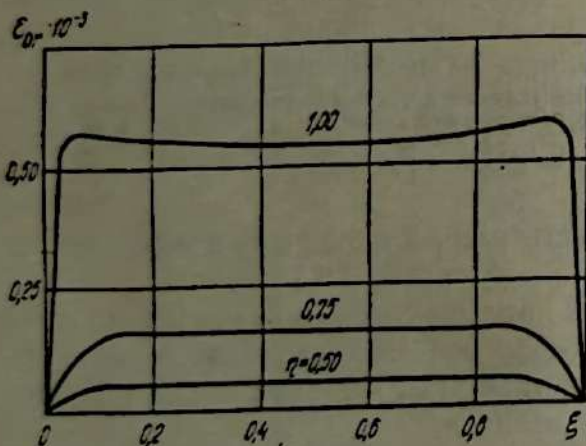


Рис. 108. Остаточные относительные удлинения оси нити со стрелой провисания $1/10$ пролета и жесткостью EI .

В нитях, работающих без изгиба от начальной нагрузки, пластические деформации могут и не возникнуть в пролете, особенно при больших стрелах провисания. При малых стрелах провисания пластические деформации могут появиться в пролете нити, но при этом интенсивность распространения их по длине пролета и по высоте поперечных сечений будет гораздо меньшей, чем

в нитях, работающих с изгибом от начальной нагрузки.

Как и в случае нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки, предельное состояние нитей, работающих без изгиба от начальной нагрузки, наступило тогда, когда при нормальной силе на опорах $N = \sigma_r F$ возникала местная текучесть.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости, работающих с изгибом от начальной нагрузки, при разгрузке.

Образование пластических деформаций при действии на нить дополнительной нагрузки приводит к тому, что после снятия ее нить не воз-

вращается в исходное положение (рис. 107), появляются остаточные прогибы.

Характер остаточных прогибов нити зависит как от ее параметров, так и от величины снимаемой нагрузки и в какой-то мере подобен характеру прогибов нити при активном нагружении. То же можно сказать и об относительных остаточных деформациях ε_0 оси нити (рис. 108).

Как видно из рис. 107, нить конечной жесткости при стреле провисания $1/10$ пролета и жесткости на изгиб EI имеет наибольшие оста-

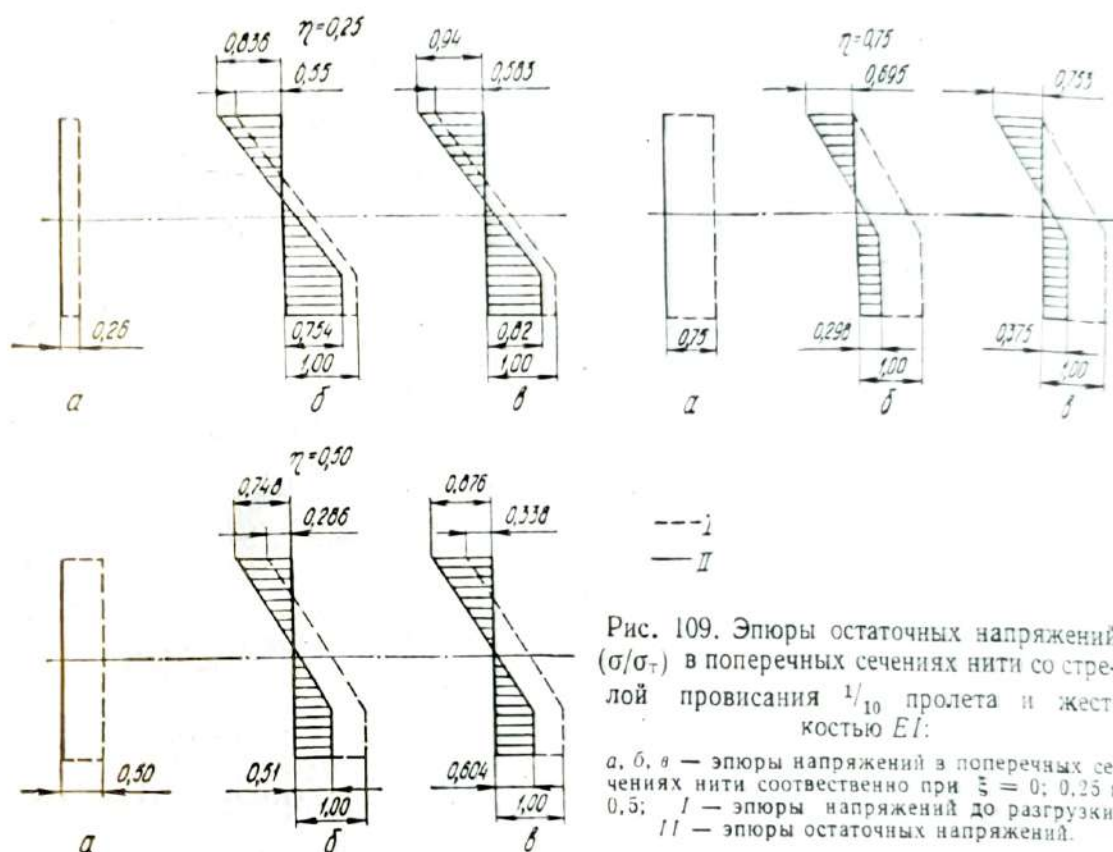


Рис. 109. Эпюры остаточных напряжений (σ/σ_+) в поперечных сечениях нити со стрелой провисания $1/10$ пролета и жесткостью EI :

а, б, в — эпюры напряжений в поперечных сечениях нити соответственно при $\xi = 0; 0.25$ и 0.5 ; I — эпюры напряжений до разгрузки; II — эпюры остаточных напряжений.

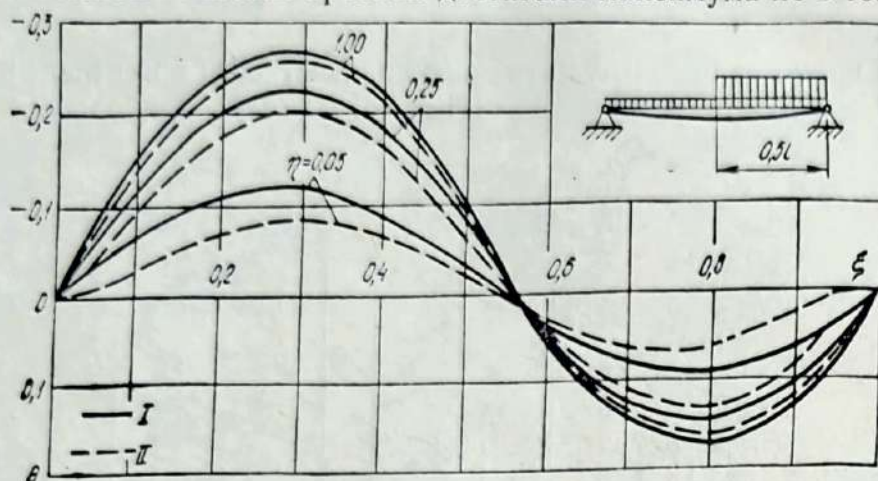
точные прогибы вблизи четвертой пролета. В середине же пролета кривая провисания нити после снятия дополнительной нагрузки оказывается расположенной выше кривой равновесия нити при действии начальной нагрузки.

Эпюры остаточных напряжений (рис. 109) в зависимости от интенсивности дополнительной нагрузки претерпевают весьма заметные изменения. С увеличением интенсивности дополнительной нагрузки остаточные напряжения в верхних и нижних волокнах нити уменьшаются, особенно в нижней зоне.

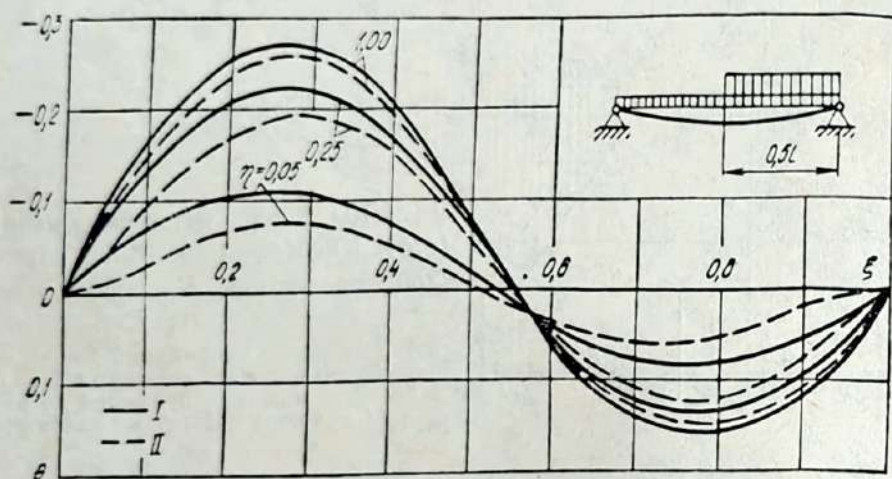
§ 4. ДЕЙСТВИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости при действии распределенной и сосредоточенной несимметричных нагрузок.

Если распределенная нагрузка занимает половину пролета, то прогибы нитей, работающих с изгибом (рис. 110, а) и без изгиба (рис. 110, б) от начальной нагрузки, незначительно отличаются между собой. Наибольшая разница в прогибах между указанными группами нитей возникает при небольшой интенсивности нагрузки ($\eta = 0,05$). По абсолютной величине прогибы достигали максимума не в той части



а



б

Рис. 110. Прогибы нити со стрелой провисания $1/10$ пролета и жесткостью EI при действии дополнительной распределенной нагрузки, расположенной по половине пролета:

а, б — нить, работающая соответственно с изгибом и без изгиба от начальной нагрузки; I — прогибы нити с шарнирным закреплением концов; II — то же, с жестким закреплением концов.

пролета, где находилась нагрузка, а в противоположной. С ростом нагрузки от $\eta = 0,75$ до $\eta = 1,0$ прогибы возрастали менее интенсивно, чем в начальный период загрузки.

Жесткое закрепление концов нитей оказывало заметное влияние на прогибы лишь при малой интенсивности дополнительной нагрузки и то только у нитей со значительной жесткостью на изгиб и большой стрелой провисания. При интенсивности дополнительной нагрузки, близкой к предельной ($\eta = 1,0$), разница между прогибами нитей с жестким и шарнирным закреплением концов становится несущественной.

Характер перемещений нитей очень сильно влияет на их пластические деформации. Так, в начальный период нагружения вследствие резкого изменения геометрии в нитях, работающих с изгибом от начальной нагрузки, может появиться двусторонняя текучесть не только на опорных участках, но и в пролете (рис. 111). При дальнейшем увеличении интенсивности нагрузки напряжения от изгиба будут умень-

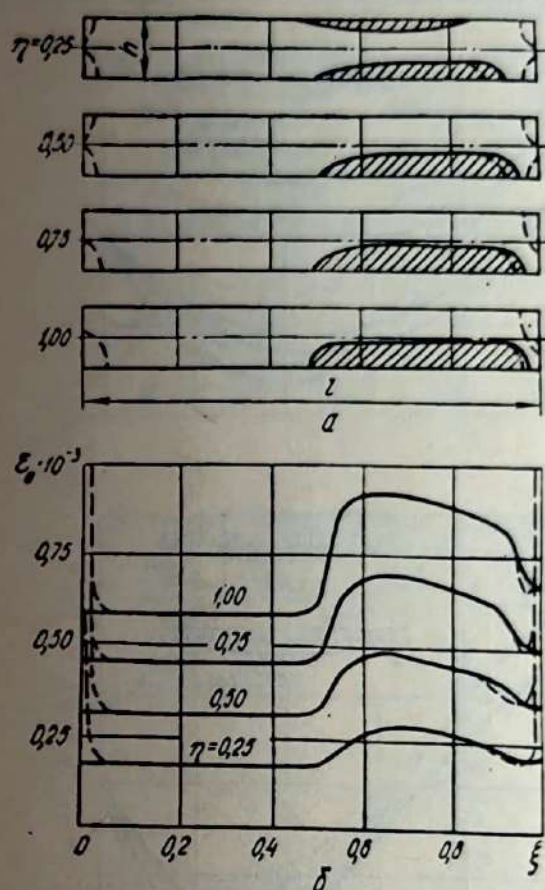


Рис. 111. Пластические деформации нити, работающей с изгибом от собственного веса, при действии дополнительной распределенной нагрузки, расположенной на половине пролета при стреле провисания $\frac{1}{10}$ пролета и жесткости EI :

а — зоны текучести; б — относительные удлинения оси.

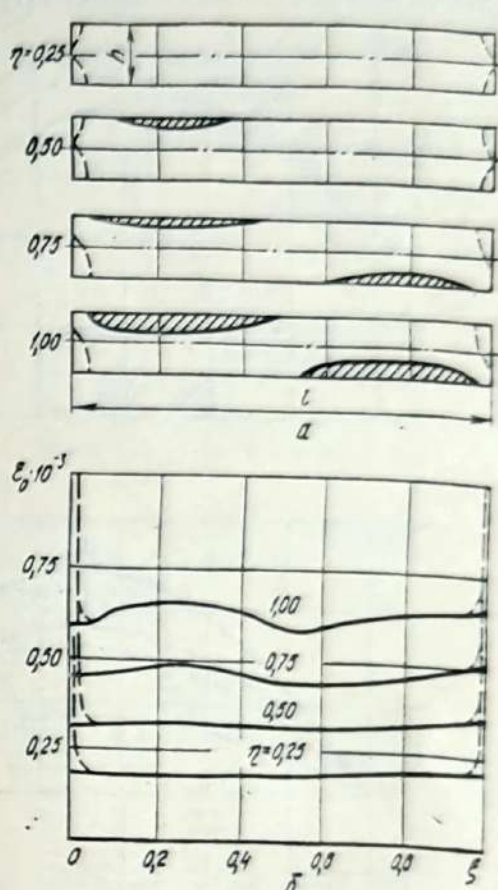


Рис. 112. Пластические деформации нити, работающей без изгиба от собственного веса при действии дополнительной распределенной нагрузки, расположенной на половине пролета при стреле провисания $\frac{1}{10}$ пролета и жесткости EI :

а — зоны текучести; б — относительные удлинения оси.

шаться и в нитях образуются участки только с односторонней текучестью. Для нитей, работающих без изгиба от начальной нагрузки, характер развития пластических деформаций вблизи опор и на опорах при жестком закреплении концов мало отличается от деформаций нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки. В пролете же наблюдаются совершенно иные распределение пластических зон и развитие пластических деформаций. Если в первой группе нитей пластические деформации в пролете возникают только в той части, где прикладывается дополнительная нагрузка, то во второй группе нитей они возникают в обеих частях пролета (рис. 112).

Разница в работе двух групп нитей наблюдается не только в характере распределения пластических зон, но и в моменте появления пластических деформаций и интенсивности распространения их по высоте поперечных сечений. В нитях, работающих с изгибом от начальной нагрузки, пластические деформации охватывают в пролете участок значительной протяженности уже при небольшой интенсивности дополнительной нагрузки. Во второй группе нитей пластические деформации

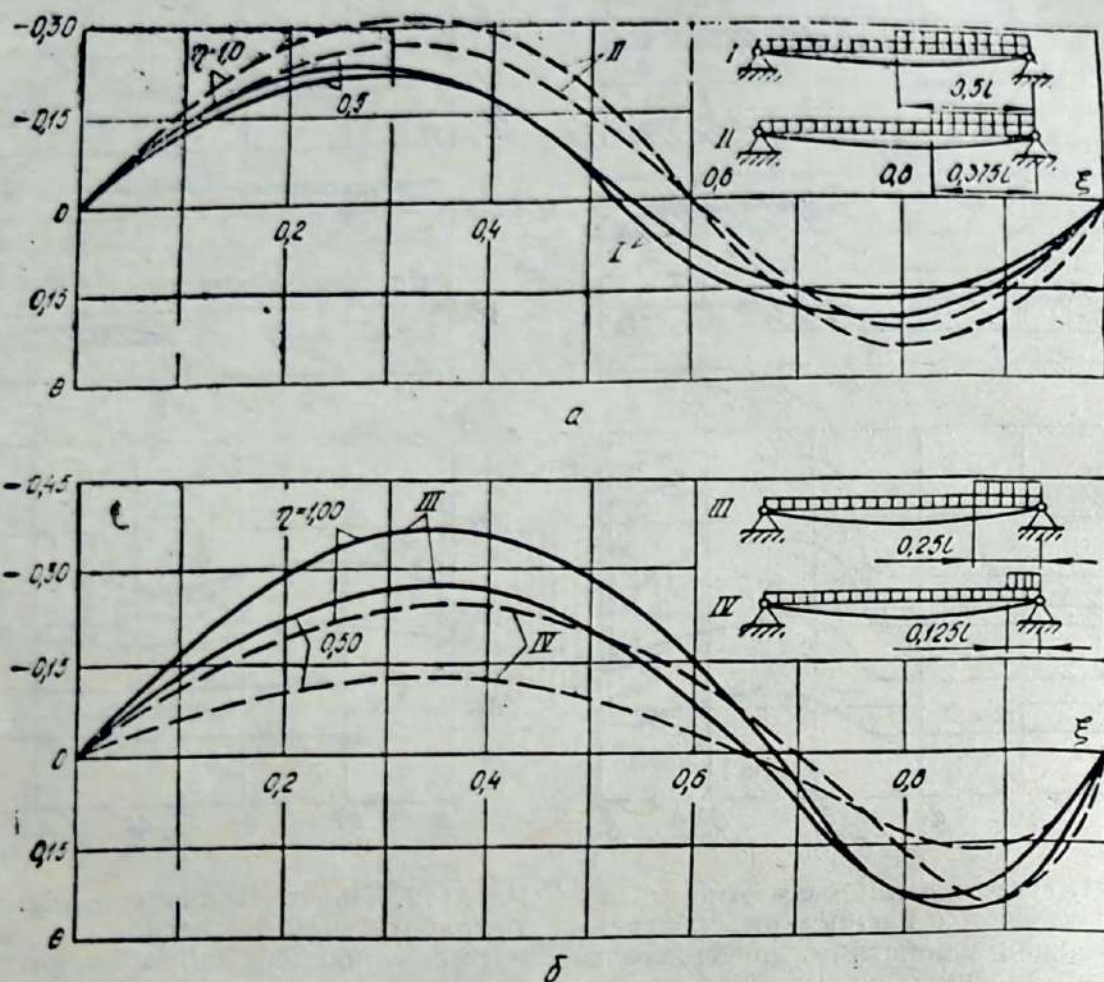


Рис. 113. Прогны нити, работающей с изгибом от собственного веса при стреле провисания $1/25$ пролета и жесткости EI :
 а — от дополнительной распределенной нагрузки, расположенной на участке $0,5$ и $0,375$ пролета; б — то же, расположенной на участке $0,25$ и $0,125$ пролета.

на участке приложения дополнительной нагрузки появляются лишь при $\eta = 0,75$ и распространяются при дальнейшем нагружении по высоте поперечных сечений неглубоко. В ненагруженной части пролета пластические деформации появляются несколько ранее (при $\eta = 0,50$) и распространяются по высоте поперечных сечений более глубоко.

Отметим, что и при несимметричной нагрузке жесткое закрепление концов нитей оказывает незначительное влияние на общий характер пластических деформаций. По-прежнему оно сказывается лишь на опорных участках, где пластические деформации гораздо больше, чем при симметричной равномерно распределенной нагрузке.

В нитях, работающих с изгибом от начальной нагрузки, величина относительных деформаций оси на части пролета, загруженной дополнительной нагрузкой, гораздо больше, чем на упругих участках (см. рис. 111, б). Во второй группе нитей разница между относительными

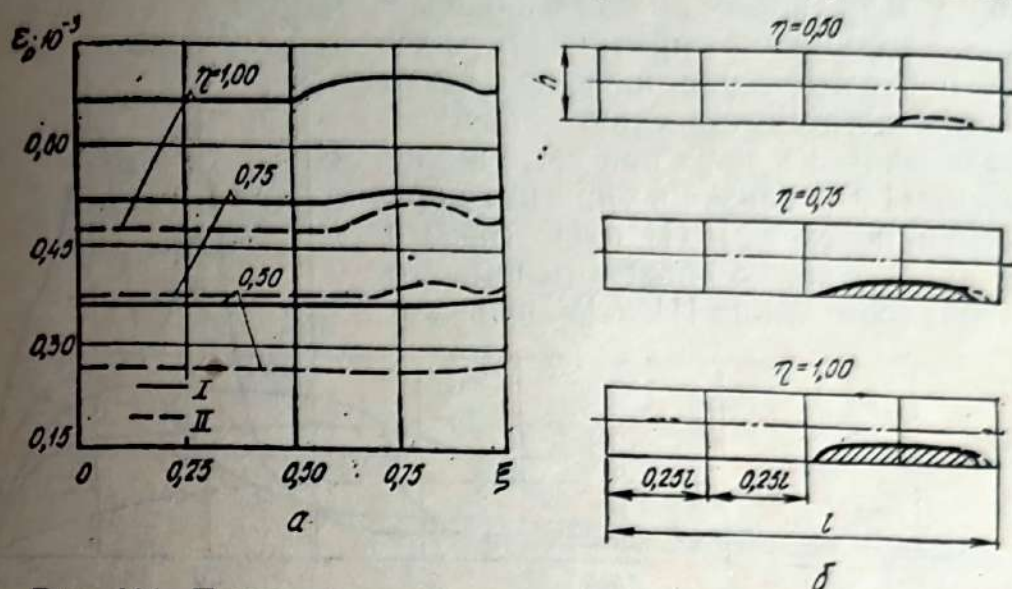


Рис. 114. Пластические деформации нити, работающей с изгибом от собственного веса при I и II схемах нагружения:
а — относительные удлинения оси; б — зоны текучести; I — схема нагружения I; II — схема нагружения II.

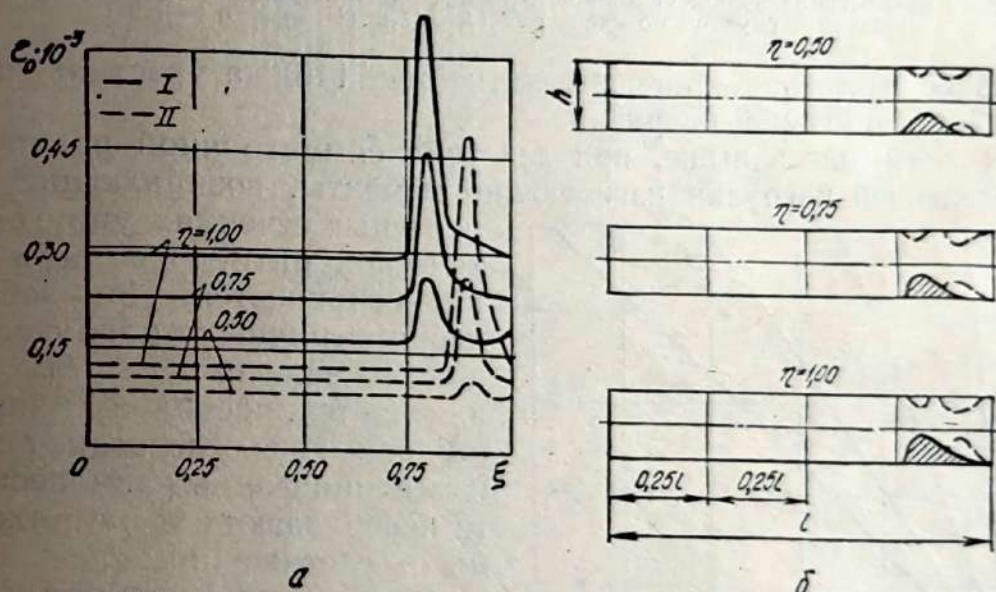


Рис. 115. Пластические деформации нити, работающей с изгибом от собственного веса при III и IV схемах нагружения:
а — относительные удлинения оси; б — зоны текучести; I — схема нагружения III; II — схема нагружения IV.

деформациями упругих и упруго-пластических участков незначительна (см. рис. 112, б).

С уменьшением участка приложения дополнительной нагрузки (рис. 113) прогибы нитей на участке приложения нагрузки возрастают. Это происходит до тех пор, пока дополнительная нагрузка не займет $\frac{1}{8}$ пролета нити (схема IV). На участке, где отсутствует дополнитель-

ная нагрузка, максимальные прогибы возникают, когда дополнительная нагрузка занимает участок длиной $0,375 l$ (схема II).

При схемах нагружения I и II (рис. 114) пластические зоны охватывают большую часть пролета нити, чем при схемах III и IV (рис. 115). Однако по высоте поперечных сечений пластические деформации проникают более глубоко при нагружении нити по схемам III и IV. Относительные упруго-пластические удлинения оси нити при нагружении ее по схемам I и II близки к упругим, а при нагружении по схемам III и IV гораздо больше их. Это можно объяснить тем, что при схемах нагружения III и IV происхо-

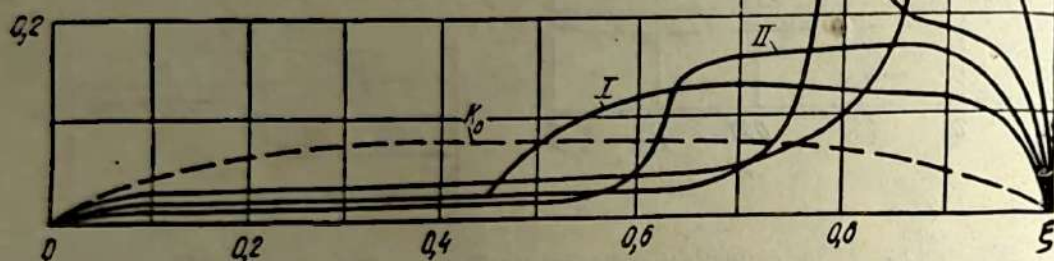


Рис. 116. Характер изменения кривизны нити по длине пролета при несимметричном нагружении:

пунктирной линией обозначена кривизна кривой провисания нити при действии начальной нагрузки; сплошной — то же, при нагружении нити дополнительной нагрузкой по схемам I, II, III и IV при $\eta = 1,0$

дит резкое изменение кривизны нити (рис. 116) на участках приложения дополнительной нагрузки.

Как указывалось выше, при действии симметричной равномерно распределенной нагрузки изгибающие моменты, возникающие в по-

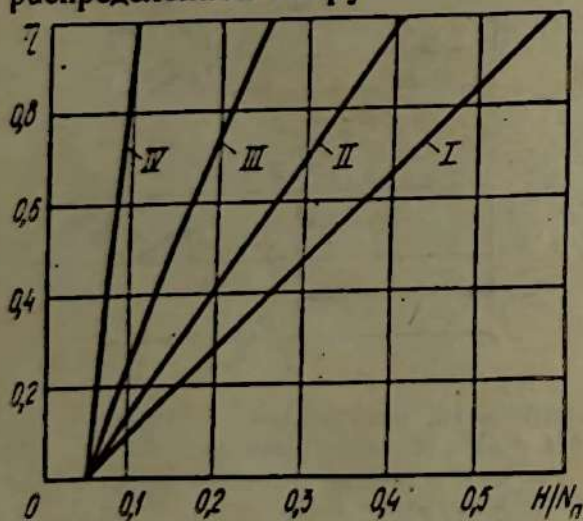


Рис. 117. График зависимости $N/N_0 = f(\eta)$ при I, II, III и IV схемах нагружения.

перечных сечениях упруго-пластической нити, с ростом нагрузки уменьшаются. При действии несимметричных нагрузок характер зависимости $M = f(\eta)$ изменяется, поскольку напряжения от изгиба вследствие резкого изменения формы равновесия нити преобладают над напряжениями от растяжения.

Зависимость распора от дополнительной нагрузки, когда последняя занимает небольшую часть пролета ($0,25 l$ и менее), имеет слабо выраженный нелинейный характер. С увеличением участка приложения дополнительной нагрузки указанная зависимость приближается к линейной (рис. 117).

В нитях, работающих без изгиба от начальной нагрузки, прогибы, возникающие при схемах нагружения I и II, незначительно отличаются

от прогибов нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки. Заметная разница в прогибах двух групп нитей проявляется при нагружении их по схемам III и IV. При этом прогибы нитей второй группы в ненагруженной части пролета будут меньше, а в нагруженной — больше прогибов нитей первой группы.

Пластические деформации в нитях, работающих без изгиба от начальной нагрузки, при схеме нагружения I не возникают в пролетной части, а при схеме нагружения II появляются лишь при $\eta = 1,0$, и охватывают очень малый участок нити. При схемах нагружения III и IV в поперечных сечениях нитей появляется как односторонняя, так и двусторонняя текучесть. Что касается характера зон пластичности,

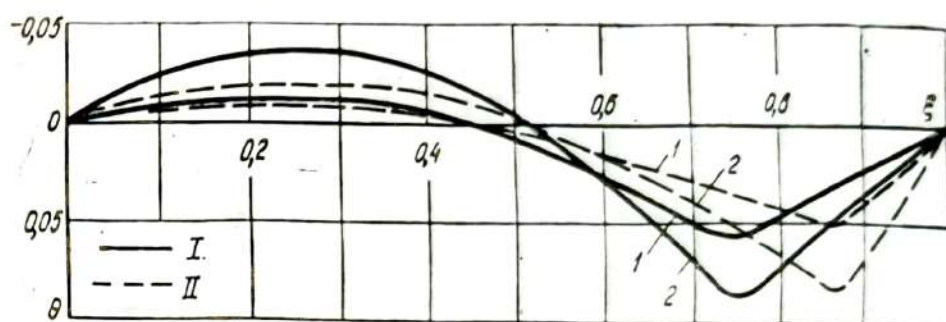


Рис. 118. Прогибы нити, работающей с изгибом от собственного веса, при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки при стреле провисания $\frac{1}{25}$ пролета и жесткости EI :

I — от нагрузки, расположенной на расстоянии 0,25 пролета; II — то же, на расстоянии 0,125 пролета; 1, 2 — прогибы нитей соответственно при $\eta_1 = 0,5$ и 1; η — отношение интенсивности сосредоточенной нагрузки к ее предельному значению $P_{л. макс.}$.

то он остается примерно таким же, как и у нитей, работающих с изгибом от собственного веса.

Двусторонняя текучесть в нитях конечной жесткости, работающих как с изгибом, так и без изгиба при действии начальной нагрузки, может и не возникнуть, если величина начальной нагрузки превышает собственный вес нити. Так, например, для всех рассмотренных случаев при $q = 0,25 P_{\max}$ несимметричная равномерно распределенная дополнительная нагрузка не вызывала текучности в верхних волокнах нити.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости при действии сосредоточенной нагрузки, прикладываемой на расстоянии 0,25 и 0,125 l от опоры. Максимальную величину сосредоточенной нагрузки ограничим значением $P_{\max} = 0,05 P_{\max l}$.

В нитях, работающих с изгибом от начальной нагрузки, при действии сосредоточенной силы возникает двусторонняя текучесть. Аналогичная картина наблюдается и в нитях, работающих без изгиба от начальной нагрузки. С увеличением интенсивности начальной нагрузки до $q = 0,25 P_{\max}$ (рис. 118) в нитях от сосредоточенной нагрузки возникала текучесть только в нижних волокнах.

Из рис. 118 видно, что в месте приложения сосредоточенной нагрузки происходит резкое изменение геометрии нити. Однако несмотря на это в поперечных сечениях нити (рис. 119) возникает только односторонняя текучесть, которая охватывает совсем небольшой участок.

При расположении сосредоточенной нагрузки ближе к опоре (на расстоянии 0,125 l) характер и величина пластических деформаций в поперечном сечении нити, находящемся под нагрузкой, изменяются незначительно. Это можно объяснить влиянием цепных напряжений.

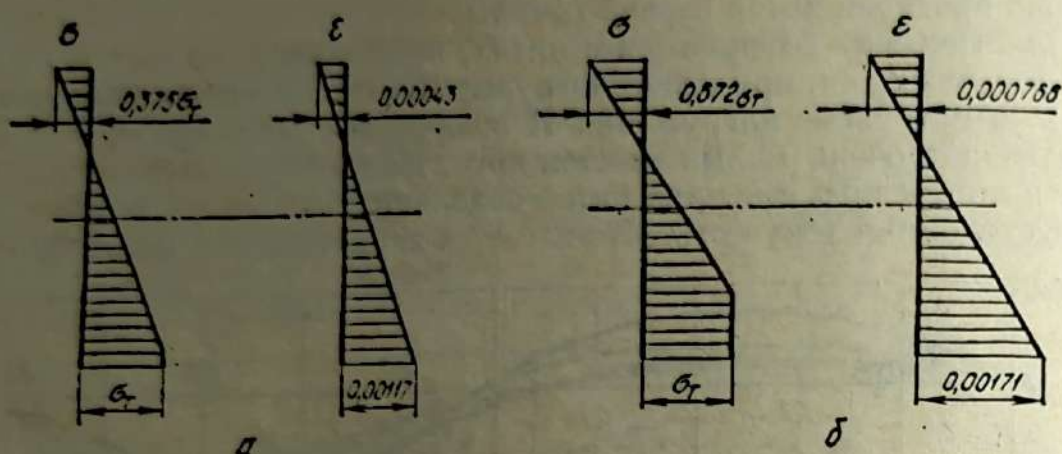


Рис. 119. Эпюры напряжений и деформаций в поперечном сечении нити, расположенном под сосредоточенной нагрузкой:

a — при $\eta_1 = 0.5$ и $\xi = 0.25$; b — при $\eta = 1$ и $\xi = 0.25$.

Вследствие большого изменения кривизны нитей на участке приложения сосредоточенной нагрузки разница в характере и величине пластических деформаций между двумя группами нитей оказывается еще меньшей, чем при действии несимметричных распределенных нагрузок.

§ 5. ВЛИЯНИЕ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Приведенные выше результаты исследований получены исходя из гипотезы об идеальной пластичности материала.

Рассмотрим теперь несколько случаев работы нитей конечной жесткости из материала с площадкой текучести и упрочнением ($\sigma_T = 240$ МПа, $\sigma_b = 450$ МПа; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\epsilon_{\max} = 10 \sigma_T/E$). Кривую упрочнения материала выберем в виде полинома второй степени, а прямолинейный участок площадки текучести ограничим длиной, равной $2 \sigma_T/E$.

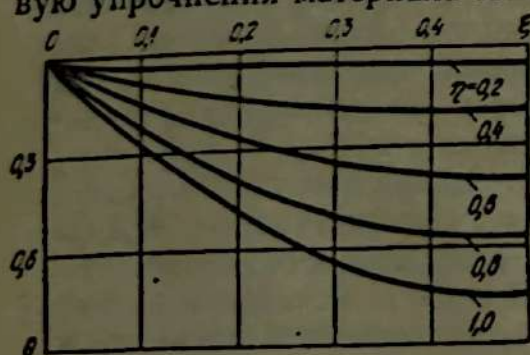


Рис. 120. Прогобы нити из упрочняющегося материала при действии дополнительной распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету, при стреле провисания $1/25$ пролета и жесткости EI .

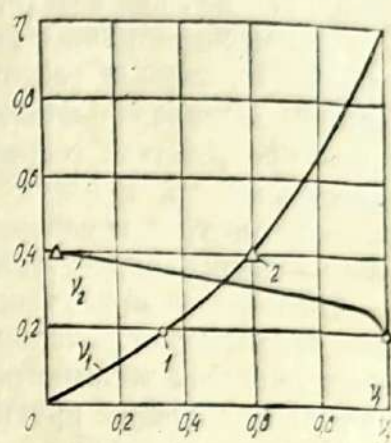
При действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету, прогибы (рис. 120), силовые факторы (рис. 121) и пластические деформации (рис. 122) в нитях из упрочняющегося материала, работающих с изгибом от начальной нагрузки, изменяются почти так же, как и в нитях из идеального упруго-пластического материала.

Из рис. 120 видно, что интенсивность изменения прогибов нити достигает максимума, когда нить входит в пластическую стадию (при $\eta = 0,6$). В дальнейшем с ростом интенсивности нагрузки величина приращения прогибов уменьшается.

При нагрузке, превышающей предельную для нитей из идеального упруго-пластического материала, изгибающий момент в нити из упрочняющегося материала (см. рис. 121) имеет весьма малую величину и опреде-

Рис. 121. График зависимости между силовыми факторами для нити из упрочняющегося материала при действии дополнительной распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету, при стреле провисания $1/25$ пролета и жесткости EI :

1 — момент появления в нити пластических деформаций; 2 — предельное состояние нити из идеального упруго-пластического материала; v_1 — отношение приращения распора к его наибольшему значению; v_2 — отношение приращения изгибающего момента, возникающего в середине пролета нити, к его наибольшему значению; η — отношение величины дополнительной нагрузки к ее предельному значению, которое соответствует нитям из упрочняющегося материала.



ленной закономерности в его изменении не наблюдается. Поэтому часть графика, соответствующая указанному состоянию, не показана. Что касается зависимости распора от интенсивности дополнительной нагрузки, то она имеет четко выраженный нелинейный ха-

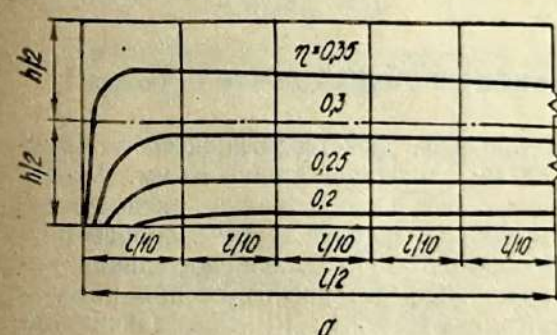
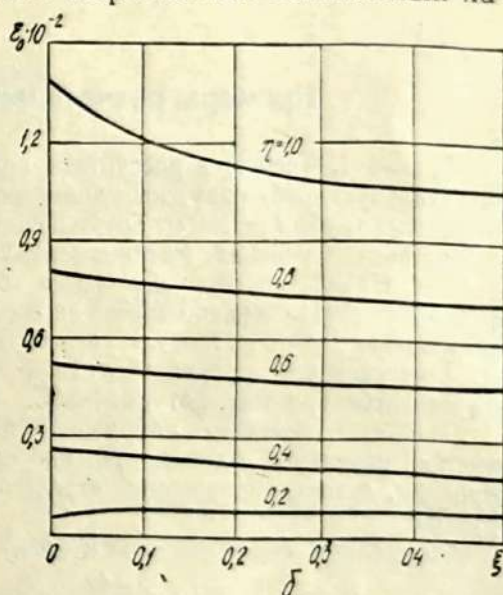


Рис. 122. Пластические деформации нити из упрочняющегося материала при действии дополнительной распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету, при стреле провисания $1/25$ пролета и жесткости EI :

а — зоны текучести; б — относительные удлинения оси.



актер. Из рис. 121 видно, что предельная величина нагрузки для нити из упрочняющегося материала даже при $f_0/l = 1/25$ почти в пять раз превышает нагрузку, соответствующую моменту появления текучести в нити. С увеличением стрелы провисания и жесткости на изгиб разница между предельной нагрузкой и нагрузкой, вызывающей появление текучести в нити, резко возрастает.

В пластическом состоянии ($\eta \geq 0,4$) деформации оси нити из упрочняющегося материала (см. рис. 122) при шарнирном и жестком закреплении концов в отличие от нити из идеального упруго-пластического

материала имеют всегда большее значение на опорных участках. С ростом нагрузки разница между относительными деформациями в пролете и на опорных участках нити возрастает. При интенсивности нагрузки $\eta \geq 0,5$ влияние кривизны нити на величину ее относительных деформаций оси практически не сказывается, т. е. без большой погрешности в этом случае относительные деформации оси нити можно определять точно так же, как в нити, работающей только на растяжение.

При несимметричном нагружении наиболее заметная разница в работе между нитями из идеального упруго-пластического материала и нитями из материала с площадкой текучести и упрочнением проявлялась лишь при действии сосредоточенной нагрузки (для нитей со стрелой провисания $1/25$ пролета разница в величине изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении, расположенном под сосредоточенной нагрузкой, составляла около 6 %, а в прогибах — около 1 %).

Нити конечной жесткости из упрочняющегося материала, работающие без изгиба от начальной нагрузки, при действии дополнительной симметричной и несимметричной нагрузок имели в пластическом состоянии почти такие же прогибы и деформации, как и гибкие нити.

Несущая способность двух групп нитей конечной жесткости, материал которых обладает упрочнением, в предельном состоянии ($\eta = 1$) была практически одинакова.

Приложение

Примеры расчета нитей конечной жесткости

Пример 1. Требуется рассчитать продуктопровод, представляющий собой круглую стальную трубу наружным диаметром 720 мм с толщиной стенки 10 мм. Расчетный пролет трубы $l = 150$ м. Труба шарнирно подвешена к двум опорам, расположенным на разных уровнях. Разница между отметками крепления трубы к опорам $h = 15$ м. Начальная нагрузка (масса трубы) $q = 1,75$ кН · м, дополнительная нагрузка $p = 2$ кН · м расположена на всем пролете. Стрела провисания при начальной нагрузке $f_0 = 6$ м. Модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^8$ кПа. Максимальная расчетная температура воздуха $+30^\circ\text{C}$, минимальная -20°C . Монтаж трубы производится при температуре $+5^\circ\text{C}$.

Требуется определить напряжения в трубе в середине и в четверти пролета при действии начальной и дополнительной нагрузок с учетом и без учета влияния температуры, а также приращение стрелы провисания, вызванное дополнительной нагрузкой.

Определяем геометрические и физические характеристики трубы: площадь сечения

$$F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,142}{4} (0,72^2 - 0,70^2) = 0,02231 \text{ м}^2; \text{ момент сопротивления}$$

$$W = \frac{\pi}{32} \frac{(D^4 - d^4)}{D} = \frac{3,142}{32} \frac{(0,72^4 - 0,70^4)}{0,72} = 0,003905 \text{ м}^3;$$

$$\text{момент инерции } I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{3,142}{64} (0,72^4 - 0,70^4) = 0,001406 \text{ м}^4;$$

$$\text{радиус инерции } r = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{0,001406}{0,02231}} = 0,2510 \text{ м};$$

$$\text{жесткость на изгиб } EI = 2,1 \cdot 10^8 \cdot 0,001406 = 295\,300 \text{ кН/м}^2;$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{h}{l} = \frac{15}{150} = 0,10; \quad \varphi = 5^\circ 43'; \quad \cos \varphi = 0,9950.$$

Расчет нити на начальную нагрузку
 Параметр u_0 определяем из уравнения (27).

Вычисляем левую часть этого уравнения $\frac{384 \cdot 295\,300 \cdot 6}{5 \cdot 1,75 \cdot 150^4} = 0,1536$.

Удовлетворяет это уравнение параметр $u_0 = 3,663$.

Распор в трубе $H = \frac{4 \cdot 3,663^2 \cdot 295\,300}{150^2} = 704 \text{ кН}$.

Изгибающие моменты определяем по формуле (23):

$$\text{в четверти пролета } M_{\xi=0,25} = \frac{1,75 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{3,663^2} \times \\ \times \frac{\text{sh}(3,663 \cdot 0,25) \cdot \text{sh} 3,663(1 - 0,25)}{\text{ch} 3,663} = 613 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{в середине пролета } M_{\xi=0,5} = \frac{1,75 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{3,663^2} \cdot \frac{\text{sh}^2(3,663 \cdot 0,5)}{\text{ch} 3,663} = \\ = 696 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Напряжения в трубе *:

$$\text{в четверти пролета } \sigma_{\xi=0,25} = \frac{704}{0,02231 \cdot 0,9950} \pm \frac{613}{0,003905} = 31\,700 \pm \\ \pm 157\,000 = \begin{cases} +188\,700 \text{ кПа}; \\ -125\,300 \text{ кПа}; \end{cases}$$

$$\text{в середине пролета } \sigma_{\xi=0,5} = \frac{704}{0,02231 \cdot 0,9951} \pm \frac{696}{0,003905} = 31\,700 \pm \\ \pm 178\,200 = \begin{cases} +209\,900 \text{ кПа}; \\ -146\,500 \text{ кПа}. \end{cases}$$

Расчет трубы на дополнительную нагрузку

Параметры u определяем из уравнения (45)

$$\left(\frac{1,75 + 2}{1,75} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \\ - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{0,1536 \cdot \frac{0,2510}{6}}{0,9950} \right)^2 \cdot (u^2 - 3,663^2) = \frac{1}{3,663^4} \times \\ \times \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } 3,663}{3,663} \right)^2 - \frac{5}{3,663^2} \left(1 - \frac{\text{th } 3,663}{3,663} \right) \right].$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 5,551$.

Стрелу провисания трубы при действии начальной и дополнительной нагрузок определяем по формуле (41), приняв в ней $h = 0$ и $\xi = 0,5$.

$$f = \frac{5}{384} \frac{(1,75 + 2) \cdot 150^4}{295\,300} \cdot \frac{48}{5 \cdot 5,551^4} [5,551^2 \cdot 0,5(1 - 0,5) - \\ - \frac{\text{sh}(5,551 \cdot 0,5) \cdot \text{sh} 5,551(1 - 0,5)}{\text{ch} 5,551}] = 6,1 \text{ м}.$$

Приращение стрелы провисания $\Delta f = f - f_0 = 6,1 - 6,0 = 0,1 \text{ м}$.

Распор в трубе $H = \frac{4 \cdot 5,551^2 \cdot 295\,300}{150^2} = 1618 \text{ кН}$.

* Ввиду пологости наклоном трубы относительно линии, соединяющей опоры, пренебрегаем.

Изгибающие моменты в трубе определяем по формуле (43):

$$\text{в четверти пролета } M_{\xi=0,25} = \frac{(1,75 + 2) \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,551^2} \times \\ \times \frac{\text{sh}(5,551 \cdot 0,25) \cdot \text{sh } 5,551 (1 - 0,25)}{\text{ch } 5,551} = 642 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{в середине пролета } M_{\xi=0,5} = \frac{(1,75 + 2) \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,551^2} \times \\ \times \frac{\text{sh}(5,551 \cdot 0,5) \cdot \text{sh } 5,551 (1 - 0,5)}{\text{ch } 5,551} = 679 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Напряжения в трубе:

$$\text{в четверти пролета } \sigma_{\xi=0,25} = \frac{1618}{0,02231 \cdot 0,9950} \pm \frac{642}{0,003905} = 72900 \pm \\ \pm 164\,400 = \begin{cases} +237\,300 \text{ кПа;} \\ -91\,500 \text{ кПа;} \end{cases}$$

$$\text{в середине пролета } \sigma_{\xi=0,5} = \frac{1618}{0,02231 \cdot 0,9950} \pm \frac{679}{0,003905} = 72\,900 \pm \\ \pm 173\,900 = \begin{cases} +246\,800 \text{ кПа;} \\ -101\,000 \text{ кПа.} \end{cases}$$

Расчет трубы на температурные воздействия

При температурных воздействиях в уравнение для определения параметра u следует ввести дополнительный член (141).

$$\text{При положительной расчетной температуре } t = 30^\circ \text{C этот член равен } \left(\frac{5}{24} \times \right. \\ \times \left. 0,1536 \cdot \frac{150}{6} \right)^2 \frac{1,2 \cdot 10^{-5} (30^\circ - 5^\circ)}{0,995} = 0,000193.$$

С учетом этого члена уравнение (45) удовлетворяет параметр $u = 5,454$.

$$\text{Стрела провисания трубы при температуре } t = 30^\circ \text{C будет } f_t = \frac{5}{384} \times \\ \times \frac{(1,75 + 2) \cdot 150^4}{295\,300} \cdot \frac{48}{5 \cdot 5,454^4} \cdot [5,454^2 \cdot 0,5 (1 - 0,5) - \\ - \frac{\text{sh}(5,454 \cdot 0,5) \cdot \text{sh } 5,454 (1 - 0,5)}{\text{ch } 5,454}] = 6,304 \text{ м}.$$

Приращение стрелы провисания от температуры

$$\Delta f_t = f_t - f = 6,304 - 6,10 = 0,204 \text{ м}.$$

$$\text{Распор в трубе } H = \frac{4 \cdot 5,454^2 \cdot 295\,300}{150^2} = 1562 \text{ кН}.$$

Изгибающие моменты в трубе:

$$\text{в четверти пролета } M_{\xi=0,25} = \frac{(1,75 + 2) \cdot 150^2}{8} \times \\ \times \frac{\text{sh}(5,454 \cdot 0,25) \cdot \text{sh } 5,454 (1 - 0,25)}{\text{ch } 5,454} = 662 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{в середине пролета } M_{\xi=0,5} = \frac{(1,75 + 2) \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,454^2} \times \\ \times \frac{\text{sh}(5,454 \cdot 0,5) \cdot \text{sh } 5,454 (1 - 0,5)}{\text{ch } 5,454} = 703 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Напряжение в трубе:

$$\text{в четверти пролета } \sigma_{\xi=0,25} = \frac{1562}{0,02231 \cdot 0,995} \pm \frac{662}{0,003905} = 70\,400 \pm \\ \pm 169\,500 = \begin{cases} +239\,900 \text{ кПа;} \\ -99\,100 \text{ кПа;} \end{cases}$$

$$\text{в середине пролета } \sigma_{\xi=0,5} = \frac{1562}{0,02231 \cdot 0,995} \pm \frac{703}{0,003905} = 70\,400 \pm 180\,000 = \begin{cases} +250\,400 \text{ кПа;} \\ -109\,600 \text{ кПа.} \end{cases}$$

При отрицательной температуре $t = -20^\circ\text{C}$ получим стрелу провисания $f_t = 5,888$ м, приращение стрелы провисания $\Delta f_t = -0,212$ м, распор в трубе $H = 1680$ кН, изгибающие моменты в трубе $M_{\xi=0,25} = 620$ кН·м, $M_{\xi=0,5} = 654$ кН·м и напряжения в трубе

$$\sigma_{\xi=0,25} = \begin{cases} +234\,500 \text{ кПа;} \\ -83\,100 \text{ кПа;} \end{cases} \quad \sigma_{\xi=0,5} = \begin{cases} +243\,200 \text{ кПа;} \\ -91\,800 \text{ кПа.} \end{cases}$$

Из результатов расчета видно, что напряжения в трубе непропорциональны нагрузке (при увеличении ее с 1,75 до 3,75 кН·м напряжения растяжения увеличились в середине пролета на 18 %, а напряжения сжатия уменьшились на 31 %), а также что изменение температуры на $\pm 25^\circ\text{C}$ привело к изменению напряжений в трубе всего на несколько процентов. В то же время прогиб трубы от температуры в сравнении с ее прогибом от дополнительной нагрузки изменяется в обе стороны более чем в два раза.

Пример 2. По данным примера 1 требуется определить напряжения в трубе в середине пролета при действии начальной нагрузки и оптимальной стреле провисания.

Прежде всего из уравнения (137) определяем параметр u , соответствующий оптимальной стреле провисания.

$$\text{Вычисляем левую часть этого уравнения: } \frac{384 \cdot 295\,300 \cdot 0,003905}{5 \cdot 1,75 \cdot 150^4 \cdot 0,02231 \cdot 0,9950} = 0,004503.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 5,676$.

Теперь по формуле (138) определяем оптимальную стрелу провисания трубы

$$f = \frac{5 \cdot 1,75 \cdot 150^4}{384 \cdot 295\,300} \cdot \frac{\frac{5,676^2}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch } 5,676}}{\frac{5}{24} \cdot 5,676^4} = 2,732 \text{ м.}$$

При данной стреле провисания напряжения в трубе в середине пролета определяем по формуле (136)

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{4 \cdot 5,676^2 \cdot 295\,300}{0,02231 \cdot 150^2 \cdot 0,9950} \pm \frac{1,75 \cdot 150^2}{8 \cdot 0,003905} \cdot \frac{2}{5,676^2} \times \\ \times \frac{\text{ch } 5,676 - 1}{\text{ch } 5,676} = 76\,200 \pm 777\,000 = \begin{cases} +153\,900 \text{ кПа;} \\ -1500 \text{ кПа.} \end{cases}$$

Теоретически при оптимальной стреле провисания напряжения от распора должны быть равны напряжениям от изгибающего момента. В нашем случае напряжения от распора получились на 2 % меньше напряжений от изгибающего момента. Погрешность возникла в результате неточности вычислений.

Пример 3. По данным примера 1 требуется определить напряжение в трубе в середине пролета и на опорах в случае жесткого закрепления ее концов перед приложением начальной нагрузки.

При заданных граничных условиях параметр u определяем из уравнения (37).

$$\text{Вычисляем левую часть этого уравнения: } \frac{384 \cdot 295\,300 \cdot 6}{1,75 \cdot 150^4} = 0,7680.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u_0 = 1,741$.

$$\text{Распор в трубе } H = \frac{4 \cdot 1,741^2 \cdot 295\,300}{150^2} = 159 \text{ кН.}$$

Изгибающие моменты определяем по формуле (35). После преобразования указанную формулу представим в виде:

$$\text{в середине пролета } M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{12} \cdot 3 \frac{\operatorname{sh} u_0 - u_0}{u_0^2 \operatorname{sh} u_0} = \frac{1,75 \cdot 150^2}{12} \cdot 3 \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} 1,741 - 1,741}{1,741^2 \operatorname{sh} 1,741} = 1202 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{на левой опоре } M_{\xi=0} = -\frac{ql^2}{12} \left[3 \frac{u_0 - \operatorname{th} u_0}{u_0^2 \operatorname{th} u_0} + \frac{24hEI}{ql^4} \cdot \frac{u_0^2 \operatorname{th} u_0}{u_0 - \operatorname{th} u_0} \right] = \\ = -\frac{1,75 \cdot 150^2}{12} \left[3 \frac{1,741 - \operatorname{th} 1,741}{1,741^2 \operatorname{th} 1,741} + \frac{24 \cdot 15 \cdot 295300}{1,75 \cdot 150^4} \cdot \frac{1,741^2 \operatorname{th} 1,741}{1,741 - \operatorname{th} 1,741} \right] = \\ = -4155 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{на правой опоре } M_{\xi=1} = -\frac{ql^2}{12} \left[3 \frac{u_0 - \operatorname{th} u_0}{u_0^2 \operatorname{th} u_0} - \frac{24hEI}{ql^4} \cdot \frac{u_0^2 \operatorname{th} u_0}{u_0 - \operatorname{th} u_0} \right] = \\ = \frac{1,75 \cdot 150^2}{12} \left[3 \frac{1,741 - \operatorname{th} 1,741}{1,741^2 \operatorname{th} 1,741} - \frac{24 \cdot 15 \cdot 295300}{1,75 \cdot 150^4} \cdot \frac{1,741^2 \operatorname{th} 1,741}{1,741 - \operatorname{th} 1,741} \right] = \\ = -1376 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Напряжения в трубе:

$$\text{в середине пролета } \sigma_{\xi=0,5} = \frac{159}{0,02231 \cdot 0,9950} \pm \frac{1202}{0,003905} = 7200 \pm \\ \pm 307800 = \begin{cases} +315000 \text{ кПа}; \\ -300600 \text{ кПа}; \end{cases}$$

$$\text{на левой опоре } \sigma_{\xi=0} = \frac{159}{0,02231 \cdot 0,9950} \pm \frac{-4155}{0,003905} = 7200 \mp 1064000 = \\ = \begin{cases} -1056800 \text{ кПа}; \\ +1071200 \text{ кПа}; \end{cases}$$

$$\text{на правой опоре } \sigma_{\xi=1} = \frac{159}{0,02231 \cdot 0,9950} \pm \frac{-137,6}{0,003905} = 7200 \mp 352400 = \\ = \begin{cases} -345200 \text{ кПа}; \\ +3596 \text{ кПа}. \end{cases}$$

Полученные напряжения очень большие, особенно в местах крепления трубы к опорам. Поэтому жесткого закрепления концов трубы до приложения начальной нагрузки следует избегать. Если же по тем или иным причинам избежать его нельзя, то для уменьшения напряжений от изгиба следует уменьшать стрелу провисания.

Пример 4. По данным примера 1 требуется определить стрелу провисания и напряжения в трубе в середине пролета при условии, что начальная нагрузка не вызывает в трубе изгибающих напряжений.

$$\text{Определяем распор в трубе при действии начальной нагрузки } H = \frac{ql^2}{8f_0} = \\ = \frac{1,75 \cdot 150^2}{8 \cdot 6} = 820 \text{ кН}.$$

$$\text{Параметр } u_0 \text{ будет } u_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}} = \frac{150}{2} \sqrt{\frac{820}{295300}} = 3,953.$$

При действии дополнительной нагрузки параметр u определяем из уравнения (104)

$$\left(\frac{1,75 + 2}{1,75} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ + \frac{5}{6} \left(\frac{1,75 + 2}{1,75} \right) \cdot 0,1536 \cdot \frac{1}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} - \left(\frac{\operatorname{th} u}{u^2} \right)^2 \right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{5}{12} \cdot 0,1536 \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] -$$

$$- \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{0,1536 \cdot \frac{0,2510}{6}}{0,9950} \right)^2 \cdot (u^2 - 3,953^2) = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \cdot 0,1536 \right)^2.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 5,725$.

Стрелу провисания трубы при действии начальной и дополнительной нагрузок определяем по формуле (100), положив в ней $h = 0$ и $\xi = \frac{1}{2}$.

$$f = \frac{5}{384} \frac{(1,75 + 2) 150^4}{295\,300} \cdot \frac{48}{5 \cdot 5,725^4} \left[5,725^3 \cdot 0,5 (1 - 0,5) - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh}(5,725 \cdot 0,5) \cdot \operatorname{sh} 5,725 (1 - 0,5)}{\operatorname{ch} 5,725} + \frac{4 \cdot 6}{5,725^3} \times \right.$$

$$\times \frac{\operatorname{sh}(5,725 \cdot 0,5) \operatorname{sh} 5,725 (1 - 0,5)}{\operatorname{ch} 5,725} = 6,12 \text{ м.}$$

Приращение стрелы провисания $\Delta f = f - f_0 = 6,12 - 6,0 = 0,12 \text{ м.}$

Распор в трубе $H = \frac{4 \cdot 5,725^2 \cdot 295\,300}{150^2} = 1721 \text{ кН.}$

Изгибающий момент в трубе определяем по формуле (102)

$$M_{\xi=0,5} = \frac{(1,75 + 2) \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,725^2} \frac{\operatorname{sh}(5,725 \cdot 0,5) \operatorname{sh} 5,725 (1 - 0,5)}{\operatorname{ch} 5,725} -$$

$$- \frac{16 \cdot 6 \cdot 295\,300}{150^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}(5,725 \cdot 0,5) \operatorname{sh} 5,725 (1 - 0,5)}{\operatorname{ch} 5,725} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Напряжение в трубе $\sigma_{\xi=0,5} = \frac{1721}{0,02231 \cdot 0,9950} \pm \frac{8}{0,003905} = 77\,500 \pm$

$$\pm 2000 = \begin{cases} +79\,500 \text{ кПа;} \\ -75\,500 \text{ кПа.} \end{cases}$$

В отдельных примерах получены очень большие напряжения в пролетной конструкции. При соответствующем выборе исходных данных (пролет, стрела провисания, жесткость конструкции на растяжение и изгиб и др.) их можно существенно уменьшить. Однако это не сделано для того, чтобы более рельефно показать некоторые особенности работы рассматриваемых конструкций.

Список литературы

1. Барштейн М. Ф. Динамический рост высотных сооружений цилиндрической формы.— В кн.: Исследования по динамике сооружений. М.: Госстройиздат, 1957, с. 18—29.
2. Березин Н. С., Жидков Н. П. Методы вычислений.— М.: Физматгиз, 1959.— Т. 1. 464 с.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 410 с.
4. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.— М.: Гостехиздат, 1956.— 600 с.
5. Бубнов Н. Г. Труды по теории пластин.— М.: Гостехтеориздат, 1953.— 424 с.
6. Временные указания по проектированию и расчету трубопроводов в виде провисающей нити: РСН 240—72.— К.: НИИСП Госстроя УССР, 1972.— 86 с.
7. Гастев В. А. Основы технической теории пластического изгиба стержней при больших пластических деформациях.— Науч. тр. ЛИСИ, 1951, вып. 11, с. 7—13.
8. Дмитриев Л. Г., Касилов А. В. Вантовые покрытия.— К.: Будівельник, 1968.— 272 с.
9. Ивович В. А. Нелинейные колебания гибкой пологой нити.— Строит. механика и расчет сооружений, 1966, № 5, с. 39—44.
10. Ивович В. А. О параметрической взаимосвязи маятниковых и поперечных колебаний пологой нити.— В кн.: Динамика сооружений / Под. ред. Б. Г. Коренева. М.: Стройиздат, 1968, с. 70—77.
11. Ильюшин А. А. Пластичность.— М.: Гостехтеориздат, 1948.— 376 с.
12. Каудерер Г. Нелинейная механика.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 777 с.
13. Качурин В. К. Теория висячих систем.— М.: Госстройиздат, 1962.— 224 с.
14. Висячие трубопроводные переходы / В. И. Киреев, В. Н. Шимановский, Д. А. Коршунов, Ю. В. Смирнов.— К.: Будівельник, 1968.— 160 с.
15. Кирсанов Н. М. Висячие системы повышенной жесткости.— М.: Стройиздат, 1973.— 116 с.
16. Кирчина В. Н. Экспериментально-теоретическое исследование предварительно напряженной металлической конструкции.— Изв. вузов. Стр.-во и архитектура, 1974, № 2, с. 7—11.
17. Лилеев Л. Ф., Селезнева Е. Н. Методы расчета пространственных вантовых систем.— М.: Стройиздат, 1964.— 171 с.
18. Мацелинский Р. Н. Статический расчет гибких висячих конструкций.— М.: Стройиздат, 1950.— 192 с.
19. Мацелинский Р. Н. Статический учет упругих нитей.— Строит. механика и расчет сооружений, 1959, № 4, с. 3—9.
20. Мацелинский Р. Н. Уточнение методики расчета вант.— Строит. механика и расчет сооружений, 1969, № 2, с. 8—11.
21. Москалев Н. С. Конструкции висячих покрытий.— М.: Стройиздат, 1980.— 331 с.
22. Отто Ф. Висячие покрытия, их формы и конструкции.— М.: Госстройиздат, 1960.— 179 с.
23. Петров Н. П., Спиридонов В. В. Надземная прокладка трубопроводов.— М.: Недра, 1965.— 470 с.
24. Покровский Л. Н., Штеренлихт Д. В. Динамический распор и изгибающий момент при колебаниях провисающего трубопровода.— Стр.-во трубопроводов, 1967, № 6, с. 16—18.
25. Ржаницин А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем.— М.: Гостехтеориздат, 1955.— 475 с.
26. Руководство по применению стальных канатов и анкерных устройств в конструкциях зданий и сооружений / НИИСК Госстроя СССР.— М.: Стройиздат, 1978.— 94 с.
27. Тимошенко С. П., Войновский-Криггер С. Пластины и оболочки.— М.: Физматгиз, 1963.— 635 с.
28. Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики.— К.: Наук. думка, 1970.— 792 с.
29. Шимановский А. В. Некоторые задачи статики нитей конечной жесткости.— Строит. механика и расчет сооружений, 1981, № 6, с. 29—32.
30. Шимановский А. В. Об одном подходе к расчету нити конечной жесткости.— Строит. конструкции, 1980, вып. 33, с. 10—19.
31. Шимановский А. В. К расчету нитей конечной изгибной жесткости на устойчивость.— Сопротивление материалов и теория сооружений, 1981, вып. 39, с. 91—94.
32. Шимановский В. Н., Смирнов Ю. В., Харченко Р. Б. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости).— К.: Будівельник, 1973.— 198 с.
33. Шимановский В. Н., Соколов А. А. Расчет висячих конструкций за пределом упругости.— К.: Будівельник, 1975.— 105 с.
34. Шимановский В. Н. К расчету комбинированных вантовых систем.— Строит. конструкции, 1977, вып. 29, с. 3—6.
35. Шнейдерович Р. М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружении.— М.: Машиностроение, 1968.— 343 с.

Оглавление

Предисловие		3
-------------	--	---

Глава I. Трубопроводные переходы

§ 1.	Типы и особенности конструкций переходов	7
§ 2.	Одно- и двухцепные переходы	9
§ 3.	Радиально-вантовые переходы	14
§ 4.	Переходы с вантовыми фермами	16
§ 5.	Переходы в виде провисающей нити	18
§ 6.	Конструкции для восприятия ветровой нагрузки	26
§ 7.	Канаты и анкеры. Натяжные устройства	29
§ 8.	Опоры переходов	37

Глава II. Покрытия

§ 1.	Типы и характеристика покрытий	38
§ 2.	Конструктивные схемы и основные формообразования висячих покрытий	41
§ 3.	Стабилизация поверхности покрытий	54
§ 4.	Опорные конструкции	56
§ 5.	Пролетные конструкции	61
§ 6.	Напряженно-деформированное состояние покрытий	65

Глава III. Статика пологих упругих нитей конечной жесткости

§ 1.	Основные уравнения напряженно-деформированного состояния нитей	83
§ 2.	Действие начальной нагрузки	87
§ 3.	Действие начальной и дополнительной нагрузок	91
§ 4.	Расчет нити с упруго закрепленными концами	99
§ 5.	Расчет нити с промежуточными шарнирами	102
§ 6.	Расчет нити, работающей без изгиба от начальной нагрузки	105
§ 7.	Определение горизонтальных перемещений в плоскости провисания нити	111
§ 8.	Определение оптимальной стрелы провисания	113
§ 9.	Влияние изменения температуры, смещения и осадки опор	114
§ 10.	Расчет нити на монтажные нагрузки	116
§ 11.	Расчет нити на нагрузку, действующую перпендикулярно к плоскости начального провисания	117
§ 12.	Расчет многопролетных нитей	120
§ 13.	Уточненный метод расчета	124
§ 14.	Приближенный метод расчета	127
§ 15.	Инженерные методы расчета	131

Глава IV. Устойчивость плоской формы изгиба пологих упругих нитей конечной жесткости

§ 1.	Нити, свободные от связей в горизонтальной плоскости при воздействии равномерно распределенной нагрузки	133
§ 2.	Нити, закрепленные связями в горизонтальной плоскости при воздействии равномерно распределенной нагрузки	143
§ 3.	Нити, свободные от связей в горизонтальной плоскости при воздействии несимметричной нагрузки	145
§ 4.	Нити, закрепленные связями в горизонтальной плоскости при воздействии несимметричных нагрузок	147

Глава V. Динамика пологих упругих нитей конечной жесткости

§ 1. Уравнения движения нити	149
§ 2. Свободные вертикальные колебания нити	153
§ 3. Действие динамической нагрузки неперiodического характера	160
§ 4. Свободные пространственные колебания нити	163
§ 5. Аэродинамические колебания нити	169

Глава VI. Расчет нитей конечной жесткости за пределом упругости

§ 1. Основные уравнения упруго-пластического состояния нитей	171
§ 2. Методика и программа расчета нитей в упруго-пластической стадии	177
§ 3. Действие симметричной нагрузки	185
§ 4. Действие несимметричной нагрузки	191
§ 5. Влияние упрочнения материала	198
Приложение	200
Список литературы	206

Шимановский В. Н.

Ш61 **Висячие системы: (Конструкции и расчет нитей конечной жесткости).— К. : Будівельник, 1984.— 208 с., ил.— (Б-ка строителя).— Библиогр. : с. 206.**

В книге изложены конструктивные решения и методы расчета линейно-протяженных (газо- и нефтепроводные переходы) и пространственных висячих систем (покрытия). Освещены пути дальнейшего развития и совершенствования конструкций, даны принципиально новые решения. Значительное внимание уделено вопросам статического и динамического расчета несущих элементов висячих систем в упругой и упруго-пластической стадиях. Даны рекомендации по выбору рациональных параметров конструкций. Рассчитана на инженерно-технических работников строительных, проектных и научно-исследовательских организаций.

Ш **3201010000—016**
 М203(04)—84 32.84

39.112