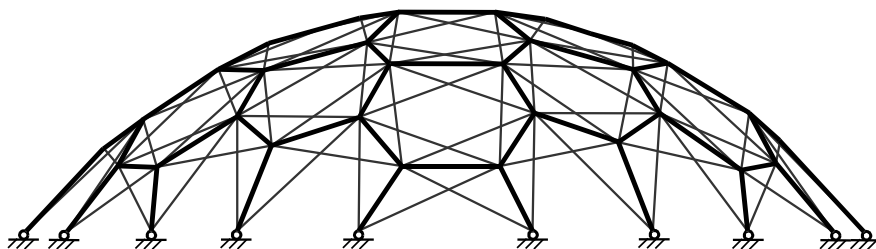


А.В. Шимановский
А.И. Оглобля

ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ
НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ



«Сталь»
Киев – 2002

УДК 539.3:624.071:624.074

Ш 61

Шимановский А. В., Оглобля А. И.

Ш 61 Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. – К.: ООО Издательство «Сталь», 2002. – 372 с., рис. 174, табл. 25.

В книге изложены нелинейная теория, построение основных разрешающих соотношений, методы и алгоритмы численного исследования, а также анализ прочности, жесткости и устойчивости несущих элементов большепролетных пространственных конструкций, в том числе висячих систем и трехслойных оболочек произвольной геометрии и различного назначения. Приведены уточненные результаты исследований реальных нелинейных пространственных конструкций с учетом конструктивной анизотропии, пластических свойств материалов, больших перемещений, потери устойчивости плоской формы деформирования и эволюции расслоений.

Предназначена для научных работников, инженеров, преподавателей, аспирантов и магистров технических вузов.

Шимановський О. В., Оглобля О. І.

Ш 61 Теорія і розрахунок несівних елементів великопрольотних просторових конструкцій. – К.: ТОВ Видавництво «Сталь», 2002. – 372 с., рис. 174, табл. 25.

У книзі викладено нелінійну теорію, побудову основних розв'язуючих співвідношень, методи й алгоритми чисельного дослідження, а також аналіз міцності, жорсткості та стійкості несівних елементів великопрольотних просторових конструкцій, у тому числі висячих систем і тришарових оболонок довільної геометрії та різного призначення. Наведено уточнені результати досліджень реальних нелінійних просторових конструкцій з урахуванням конструктивної анізотропії, пластичних властивостей матеріалів, великих переміщень, втрати стійкості плоскої форми деформування та еволюції розшарувань.

Призначена для науковців, інженерів, викладачів, аспірантів та магістрів технічних вузів.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В.А. Пермяков
д-р техн. наук, проф. В.Г. Пискунов

Рекомендована к изданию научно-техническим советом ОАО Украинский научно-исследовательский и проектный институт стальных конструкций имени В.Н. Шимановского.

ISBN 966-7589-09-9

© А. В. Шимановский, А. И. Оглобля, 2002

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние отечественной и зарубежной практики строительства свидетельствует о том, что применение большепролетных пространственных конструкций различного назначения и типа, сочетающих в себе легкость с высокой прочностью и устойчивостью, наиболее эффективно и экономически оправдано. Такими свойствами в полной мере обладают висячие и оболочечные системы, которые в настоящее время все шире применяются при строительстве гражданских зданий и инженерных сооружений, реконструкции промышленных объектов. Перекрытие больших площадей без промежуточных опор, создание легких и выразительных архитектурных форм, рациональное использование прочностных свойств материала, малая чувствительность к различного рода перегрузкам, сейсмическим воздействиям, осадкам и неравномерному смещению опор делают эти конструкции часто незаменимыми при строительстве не только названных, но и многих других уникальных сооружений.

Однако наряду с преимуществами большепролетные пространственные конструкции имеют и некоторые недостатки. Что касается висячих систем, то, в первую очередь, следует отметить их повышенную деформативность при воздействии сосредоточенных и особенно несимметричных нагрузок. В связи с этим много внимания уделяется вопросам стабилизации их формы. Методы, используемые для уменьшения деформативности висячих систем, во многом зависят от их функционального назначения. Например, если стабилизация покрытий зданий и сооружений достигается в основном предварительным напряжением, то повышение жесткости пролетного строения путепроводных переходов – за счет конструктивных мероприятий. В последнее время для этих целей все более широко начинают применять висячие системы повышенной жесткости, расчетной моделью несущих элементов которых являются нити конечной жесткости.

Среди оболочечных конструкций особое место занимают слоистые, имеющие относительно малую массу и обладающие хорошими тепло-, электро- и звукоизоляционными свойствами, стойкостью по отношению к агрессивным средам. Значительное распространение получили трехслойные конструкции, близкие к оптимальным с точки зрения обеспечения минимизации весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. В большинстве случаев данные конструкции представляют собой “слоеный пирог”, в котором жесткие внешние слои воспринимают основную часть механической нагрузки, а внутренний слой (заполнитель) наряду с выполнением связующих функций обеспечивает также защиту внутреннего объема от нежелательных внешних воздействий среды. Характерными особенностями их работы является высокая поперечная деформативность, податливость поперечному сдвигу, а также возможность образования в процессе изготовления, транспортировки или в период эксплуатации межслойных дефектов типа расслоений. Эти дефекты могут значительно снизить несущую способность конструкций или вызвать потерю устойчивости их отдельных элементов, что, в свою очередь, может привести к выходу из строя всего сооружения в целом.

Научно-техническая проблема, решаемая в данной работе, связана с разработкой теории расчета несущих элементов большепролетных пространственных конструкций и комплексным исследованием процессов их деформирования с учетом геометрической, физической и конструктивной нелинейностей. При этом геометрическая нелинейность характеризуется большими перемещениями, физическая – неупругими деформациями, а конструктивная – изменением параметров расчетной модели в процессе работы конструкции. Кроме того значительное внимание в работе уделяется вопросам разработки и совершенствования новых конструктивных решений пространственных конструкций при компоновке их схем, рационализации соотношений геометрических размеров, уменьшения параметров напряженного состояния несущих элементов и т. д., а также обоснования технологии их возведения и эксплуатации.

В качестве объектов исследования рассматриваются несущие элементы пространственных конструкций: большепролетные висячие и оболочечные трехслойные системы. Предлагается уточненная теория расчета прочности и устойчивости элементов висячих систем повышенной жесткости на произвольные нагрузки и воздействия в пределах и за пределами упругости, а также достаточно простые и удобные в применении приближенные методы расчета. С использованием метода конечных элементов разработана методика, позволяющая производить расчеты как нитей конечной жесткости, так и си-

стем на их основе. Для исследования нелинейного деформирования и устойчивости элементов трехслойных конструкций с учетом расслоений предложен подход, базирующийся на использовании классических и неклассических моделей оболочек, эффективного варианта метода конечных разностей (метода криволинейных сеток), а также шагово-итерационного алгоритма, который объединяет концепцию метода продолжения решения по параметру, метода Ньютона-Канторовича и итерационного метода.

Настоящее издание состоит из трех частей.

В первой части излагается теория расчета несущих элементов висячих систем. Описана уточненная теория расчета нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе в пределах упругой работы материала на произвольные вертикальные и горизонтальные нагрузки, базирующаяся на использовании принципа возможных перемещений. Разработан общий метод расчета устойчивости плоской формы изгиба нитей с использованием энергетического критерия устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле. Разработанная уточненная теория и метод расчета распространены на случай работы нити за пределами упругости. При этом рассмотрено два варианта идеализации работы реального материала: упруго-пластический материал и упруго-пластический материал с линейным упрочнением. Получены соотношения для определения критического распора и критической дополнительной нагрузки на всех стадиях работы упруго-пластической нити конечной жесткости при произвольных граничных условиях, симметричных и несимметричных схемах загрузки. Описана методика расчета висячих систем по методу конечных элементов.

Вторая часть посвящена описанию теории расчета несущих элементов трехслойных конструкций. Предложена методика исследования трехслойных пластин и оболочек с учетом расслоений, дающая возможность с высокой степенью точности описывать как их общее напряженно-деформированное состояние, так и локальные эффекты в местах соединения слоев. Новая расчетная модель для слоя-заполнителя, учитывающая высокую поперечную деформативность и податливость поперечному сдвигу, позволяет рассматривать трехслойные конструктивные элементы с заполнителями разнообразной структуры. На основе метода продолжения решения по параметру, метода Ньютона-Канторовича и итерационного метода разработан эффективный алгоритм численного исследования нелинейного деформирования и устойчивости элементов трехслойных конструкций с учетом эволюции расслоений и одностороннего контакта между смежными слоями в пределах дефектного участка. В результате решения тестовых задач определены пределы применения предложенной расчетной модели трехслойной оболочки.

В третьей части приводятся результаты численного исследования несущих элементов большепролетных пространственных конструкций, нитей конечной жесткости в пределах и за пределами упругости. Рассмотрено влияние различных факторов на их напряженно-деформированное состояние, дана оценка достоверности предложенной теории расчета путем сравнения теоретических расчетов с данными экспериментальных исследований, изложены результаты расчетов ряда гражданских и промышленных зданий и инженерных сооружений. Описаны новые конструктивные решения, приведены результаты исследования влияния эволюции расслоений и односторонности контакта между смежными слоями на критические параметры и формы потери устойчивости пластинчатых и оболочечных элементов трехслойных конструкций.

Авторы выражают благодарность сотрудникам КНУСА В.Н.Кислоокому, В.К.Цыхановскому, Т.А.Касиловой за помощь в работе над различными разделами рукописи, сотрудникам ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко проф. Н.Н.Складневу, проф. В.И.Трофимову и проф. Р.Р.Матевосяну за помощь и поддержку при написании этой книги, а также сотрудникам НИИЖБ проф. И.Г.Людковскому и проф. Р.Н.Мацелинскому, ЦНИИПСК им. Н.П.Мельникова проф. В.В.Ларионову и проф. А.С.Гмавичаве, МГСУ проф. А.Б.Пуховскому и МГТУ им. Н.Э.Баумана проф. Н.А.Алфутову за внимание и содействие в работе.

Улучшению содержания рукописи в значительной мере способствовали замечания и советы рецензентов – проф. В.А.Пермякова и проф. В.Г.Пискунова, большая часть из них была учтена при подготовке окончательного варианта рукописи. Им авторы приносят свою искреннюю признательность.

Неоценимую помощь при подготовке книги оказал проф. В.Н.Шимановский – его опыт и советы помогли устранить многие недостатки в изложении материала. Этого известного ученого не стало, когда подготовка рукописи близилась к завершению. Авторы навсегда сохраняют благодарную память о проф. В.Н.Шимановском.

Часть I

ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

Глава 1. СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

§ 1.1. Некоторые тенденции совершенствования висячих систем

В практику строительства внедряются новые типы промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений, традиционные конструктивные решения заменяются новыми, отвечающими современным направлениям и требованиям в проектировании. Наметившаяся в последние десятилетия как у нас в стране, так и за рубежом тенденция к увеличению пролетов зданий и сооружений в настоящее время становится закономерностью. В связи с этим особый интерес проявляется к висячим системам, получившим распространение в различных отраслях народного хозяйства. Это покрытия промышленных зданий – заводов по сборке самолетов и ангаров по их содержанию, универсальных цехов по выпуску крупногабаритной продукции, судостроительных эллингов, складов, гаражей и др., гражданских зданий – стадионов, плавательных бассейнов, цирков и киноконцертных залов, вокзалов и рынков, различного рода павильонов и др., а также инженерные сооружения – мосты, трубопроводные переходы, канатные дороги, кабель-краны, линии связи и электропередачи и др.

По сравнению с традиционными конструкциями висячие системы имеют ряд преимуществ, заключающихся в рациональном использовании прочностных свойств материала, относительной простоте изготовления, индустриальности монтажа, небольшой трудоемкости и стоимости строительства, возможности создания легких и выразительных с эстетической точки зрения архитектурных форм. Кроме того такие системы мало чувствительны к разного рода специфическим воздействиям, в том числе сейсмическим нагрузкам, осадкам, неравномерному смещению опор и т.д.

Основным несущим элементом большинства висячих систем является трос, расчетной моделью которого служит гибкая нить. Нити являются идеальными несущими конструкциями, обладающими всеми ранее перечисленными преимуществами висячих систем, что позволяет значительно снизить материалоемкость сооружений, особенно при средних и больших пролетах. Однако при всех очевидных и неоспоримых преимуществах нити имеют и весьма существенный недостаток – повышенную деформативность при действии несимметричных, особенно сосредоточенных нагрузок. Это обстоятельство потребовало разработки специальных конструктивных решений, снижающих величину прогибов и обеспечивающих стабильность формы нитей под нагрузкой. Поиск этих решений применительно к висячим системам велся в основном в двух направлениях: повышение жесткости и совершен-

ствование конструкции пролетной части. Первое направление привело к созданию предварительно напряженных висячих систем и применению нитей конечной жесткости, т. е. нитей, у которых под действием произвольной поперечной нагрузки возникают напряжения растяжения и изгиба [111, 150, 165], второе – к появлению двухпоясных систем [114, 116], систем Жискляра [188], С.А.Цаплина [262, 263], в виде жесткой решетчатой цепи или арки [112, 116], радиально-вантовых [113] и др.

Впервые висячие системы были применены при строительстве мостов. Первые висячие мосты строились по схеме «цепь–балка», а увеличение их жесткости шло в основном за счет усиления балки и обеспечения ее неразрезности в многопролетных мостах [188]. В дальнейшем для увеличения жесткости и надежности пролетного строения начали использовать нисходящие ванты. Примером может служить построенный в 1867 году через р. Огайо в г. Цинциннати трехпролетный железнодорожный висячий мост пролетом 322 м и общей длиной 687 м (рис. 1.1, *а*) [116, 262]. Аналогичной конструкции были построены мосты во Франции через реки Сону в г. Лионе пролетом 110 м и Сену около г. Гавра пролетом 160 м [116]. В этих мостах крайние панели пролета у пилонов были без вертикальных подвесок, в связи с чем нагрузка от них передавалась с помощью наклонных вант непосредственно на пилоны (рис. 1.1, *б*).

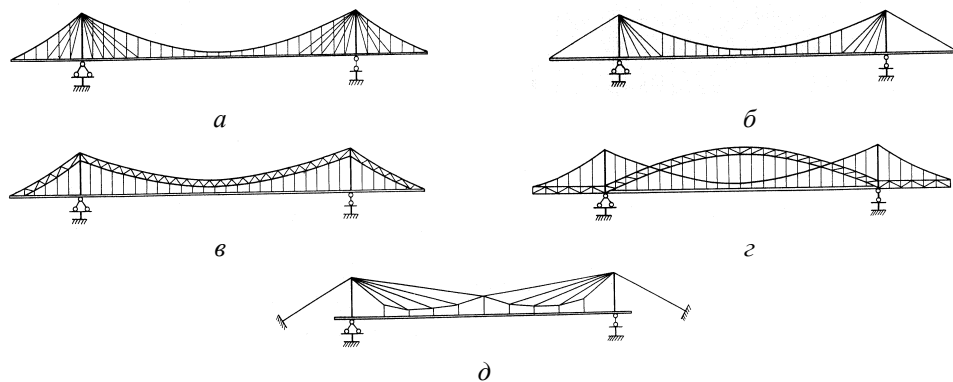


Рис. 1.1. Висячие мосты через реки:

а – Огайо; *б* – Сону и Сену; *в* – Аллегейни; *з* – Рейн; *д* – Нарын

Иной подход к увеличению жесткости висячих мостов заключается в применении в качестве растянутых несущих элементов моста жестких ферм. Такое решение было использовано при строительстве в 1884 году моста через р. Аллегейни в г. Питтсбурге: были соединены раскосной решеткой параллельные цепи, расположенные в одной вертикальной плоскости (рис. 1.1, *в*). Увеличению жесткости висячих мостов способствует применение арок в качестве элемента жесткости, использованное, в частности, в проекте моста пролетом 203 м через р. Рейн (рис. 1.1, *з*) [188, 262]. Несмотря на преимуще-

ства таких решений по сравнению с цепной и кабельной схемами, они не получили широкого применения в связи с большим весом, сложностью изготовления конструкций и монтажа.

Интересным решением в практике строительства висячих мостов является конструкция, состоящая из прямолинейных вант и не имеющая параболически очерченной цепи, так называемая система Жискляра [188, 262]. Примером подобной конструкции может служить висячий мост, построенный через р. Нарын в 1935 году (рис. 1.1, д) [112].

Увеличить жесткость пролетного строения висячего моста можно также с помощью обратного троса, создающего предварительное напряжение конструкции. Эта идея была использована во Франции при строительстве моста пролетом 198 м. Обратные тросы имели стрелу провисания $1/25$ пролета и были наклонены внутрь проезжей части (рис. 1.2, а). При этом, как отмечается в [116], прогибы в середине моста уменьшились в 5 раз, а прогибы в четвертях пролета – незначительно. Данная конструкция по характеру своей работы полностью соответствует применяемым в настоящее время в строительстве двухпоясным системам.

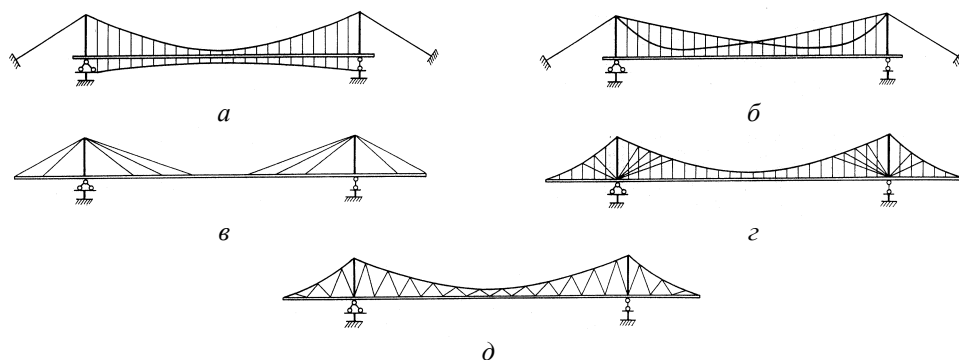


Рис. 1.2. Висячие мосты:

а – через р. Луару; б – через водохранилище около г. Кривого Рога;
в – через р. Днепр; г – через Мессинский пролив; д – через р. Северн

Широкое применение как у нас в стране, так и за рубежом получили висячие системы С.А.Цаплина и радиально-вантовые системы [113, 262, 263]. Это такие, как построенные в 1960 году висячий мост пролетом 130 м через водохранилище около г. Кривого Рога (рис. 1.2, б) и трехпролетный мост общей длиной 276 м с центральным пролетом 144 м через р. Днепр в г. Киеве (рис. 1.2, в).

Увеличить жесткость висячей системы наряду с приведенными выше способами можно путем включения в нее восходящих вант. Показательным объектом, где было использовано такое решение, является висячий мост через Мессинский пролив (рис. 1.2, г) с главным пролетом 1524 м [111, 230].

Следует также отметить применение висячих систем с перекрестной

вантовой решеткой и наклонными вантами. Примером такого решения может служить построенный в 1967 году трехпролетный мост общей длиной 1598 м с центральным пролетом 988 м (рис. 1.2, *д*) через р. Северн вблизи г. Глостера [230].

Таким образом, знакомясь с общей тенденцией развития строительства висячих мостов, можно сделать вывод о том, что уже во второй половине XX века удалось довести их пролеты до размеров, намного превышающих километр, и одновременно наделить конструкцию совершенством и изяществом [112, 114, 230].

В последнее время все чаще стали строить висячие трубопроводные переходы больших пролетов. По характеру статической работы их можно разделить на три группы.

К первой группе относятся переходы, в которых трубопровод работает как балка на упруго-податливых опорах с пролетами, равными расстоянию между подвесками несущего каната или точками крепления радиальных вант (рис. 1.3, *а–в*). В переходах этой группы так же, как и в висячих мостах, всю нагрузку воспринимают провисающие канаты или радиальные ванты. Примерами таких переходов могут служить:

переход газопровода пролетом 130 м. Газопровод поддерживается двумя канатами диаметром 59 мм. Боковая жесткость пролетного строения обеспечивается горизонтальными оттяжками из канатов диаметром 30 мм. Труба крепится к несущим канатам с помощью подвесок, расположенных с шагом 6,5 м [190, 242];

переход газопровода через р. Дунай пролетом 320 м. Отличительной особенностью его являются V-образные пилоны, превращающие пролетное строение в пространственную конструкцию, не требующую каких-либо дополнительных устройств для восприятия ветровых нагрузок [113].

Ко второй группе относятся переходы, в которых трубопровод является единственным несущим элементом, воспринимающим всю нагрузку (рис. 1.3, *г*). Одним из первых был построен двухниточный переход газопровода через р. Ухту. Пролет перехода 400 м, диаметр труб 114 мм, стрела провисания 18 м [190]. В 1963 году через р. Ию был построен однопиточный переход нефтепровода диаметром 720 мм с пролетами 340 и 88,4 м. Так как один берег был высоким, то потребовалась установка всего одного пилон [113]. Несколько позже был построен двухниточный переход газопровода пролетом 350 м и диаметром труб 273 мм через р. Кубань. Трубы расположены на расстоянии 1,2 м одна от другой и соединены через 40 м распорками. Стрела провисания трубопровода 10,5 м [190, 242].

К третьей группе относятся переходы, являющиеся модификацией двух первых типов переходов: одноцепных из первой группы и в виде провисающей нити – из второй (рис. 1.3, *д*). Примером такого перехода может служить запроектированный двухниточный переход газопровода через р. Сырдарью пролетом 800 м и диаметром труб 426 мм. Стрела провисания трубопровода 57,4 м [299].

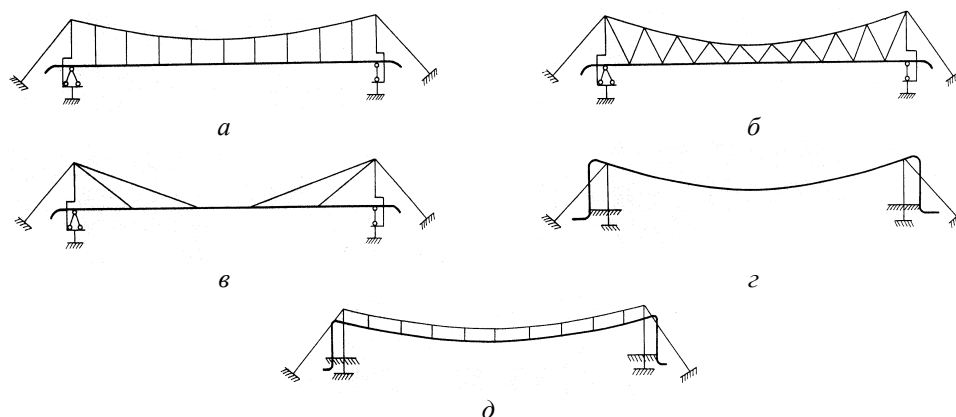


Рис. 1.3. Висячие трубопроводные переходы:

- а – с одноцепными фермами; б – с решетчатыми фермами;
в – с радиально-вантовыми фермами; г – в виде провисающей нити;
д – в виде провисающей нити с поддерживающими канатами

Из рассмотренных висячих переходов наиболее экономичными являются переходы в виде провисающей нити [65, 113]. Однако они не получили массового применения, поскольку в таких переходах при определенных соотношениях геометрических и физических параметров труб могут возникнуть высокие напряжения от растяжения и изгиба [113, 295].

Более экономичны переходы третьей группы – в виде провисающей нити с поддерживающими канатами. Конструкция таких переходов свободна от недостатков как первой группы переходов (позволяет использовать несущую способность трубопровода на растяжение и изгиб), так и второй (имеет повышенную надежность и позволяет производить замену участков труб в пролете).

Несмотря на значительный опыт, накопленный при проектировании и строительстве висячих мостов и трубопроводных переходов, нить как элемент покрытия применяется сравнительно недавно [115, 149, 165, 303]. Первые вантовые покрытия были сооружены в 1896 году на Всероссийской выставке в г. Нижнем Новгороде выдающимся русским инженером В.Г.Шуховым [84, 150, 165]. Широкое применение висячих покрытий начинается с 1953 года, когда в г. Рэлей в США было построено покрытие спортивного зала (рис. 1.4). Конструкция покрытия размерами в плане 92×97 м образована седловидной ортогональной вантовой сетью отрицательной гауссовой кривизны. Сеть подвешена к опорному контуру, выполненному из двух пересекающихся параболических железобетонных арок, наклоненных под углом 22° к горизонту и опирающихся по периметру на стальные колонны. Вантовая сеть выполнена из несущих и стабилизирующих канатов, имеющих диаметр соответственно 19–32 и 12–19 мм. Предварительное натяжение стабилизирующих канатов увеличивает жесткость всего покрытия и одновре-

менно снижает его деформативность под действием различного рода временных нагрузок [84, 137, 165, 180].

Примером использования висячих конструкций для промышленного строительства может служить покрытие пролетом 163 м бумажной фабрики в г. Мантуе, выполненное в виде висячего моста с вертикальными подвесками и балками жесткости высотой 1,5 м, на которые уложены поперечные балки (рис. 1.5) [115, 137]. Представляет также интерес построенный в 1971 году в г. Лос-Анджелесе ангар для самолетов [114, 249]. Покрытие выполнено в виде конструкции консольного типа с несущими элементами-вантами, омоноличенными металлическим настилом (рис. 1.6). Вылет консолей ангара 69 м, длина здания 135 м, ширина 168 м.

Весьма интересными и перспективными являются здания с шатровым покрытием. В последние годы построены два крупных сооружения с таким покрытием – закрытая стоянка диаметром 160 м на 400 автобусов в г. Киеве и резервуар диаметром 167 м для хранения воды в г. Дурбан, ЮАР. Схема покрытий этих сооружений изображена на рис. 1.7.

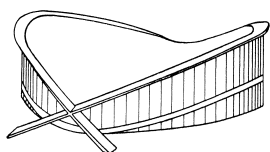


Рис. 1.4. Рэлей Арена

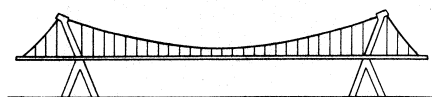


Рис. 1.5. Висячее покрытие бумажной фабрики в г. Мантуе

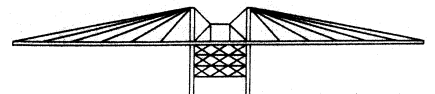


Рис. 1.6. Висячее покрытие ангара для самолетов в г. Лос-Анджелесе

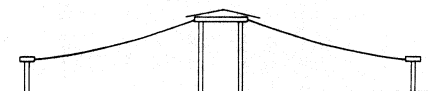


Рис. 1.7. Висячее покрытие гаража в г. Киеве и резервуара для хранения воды в г. Дурбан

Основная несущая конструкция покрытия закрытой стоянки состоит из 84 радиальных вант из стальных канатов диаметром 65 мм. Распор вант воспринимается сжатым наружным и растянутым внутренним опорными контурами. Внутренний опорный контур диаметром 8 м выполнен из двух металлических колец прямоугольного поперечного сечения, связанных по высоте ребрами жесткости. Верхнее кольцо опирается на внутреннюю опору, выполненную в виде цилиндрической оболочки диаметром 8 м и высотой 18 м. Помимо основного назначения – передачи нагрузки от покрытия на фундамент, опора также является вентиляционной шахтой. Наружный сборно-монолитный железобетонный опорный контур прямоугольного поперечного сечения опирается на 84 железобетонные колонны таврового сечения высотой 8 м. На ванты уложены сборные ребристые железобетонные плиты, швы между которыми

замоноличены расширяющимся бетоном, обжимающим плиты [114, 165, 294].

Основная несущая конструкция резервуара состоит из 120 радиальных вант, изготовленных из 41 проволоки диаметром 7 мм каждая. Верхний железобетонный опорный контур прямоугольного поперечного сечения предварительно напряжен 16 канатами. Нижний железобетонный опорный контур двутаврового сечения опирается на контрфорсы, расположенные через каждые 33° . Внутренняя опора выполнена в виде полый цилиндрической оболочки диаметром 12 м и высотой 50 м. По вантам уложены сборные железобетонные ребристые плиты трапецевидной формы. При этом с целью предварительного напряжения покрытия, как и в предыдущем случае, швы между плитами были замоноличены расширяющимся бетоном.

Наряду с описанными выше примером увеличения жесткости висячего покрытия может служить применение двухпоясных висячих систем, у которых предварительное напряжение поясов осуществляется путем раздвижки распорок по длине вантовой фермы или барабана в центре покрытия, а также стягиванием подвесок (рис. 1.8, *a–д*). Предварительное натяжение увеличивает жесткость висячего покрытия и дает возможность гибким элементам воспринимать сжатие [84, 114, 115, 150, 181].

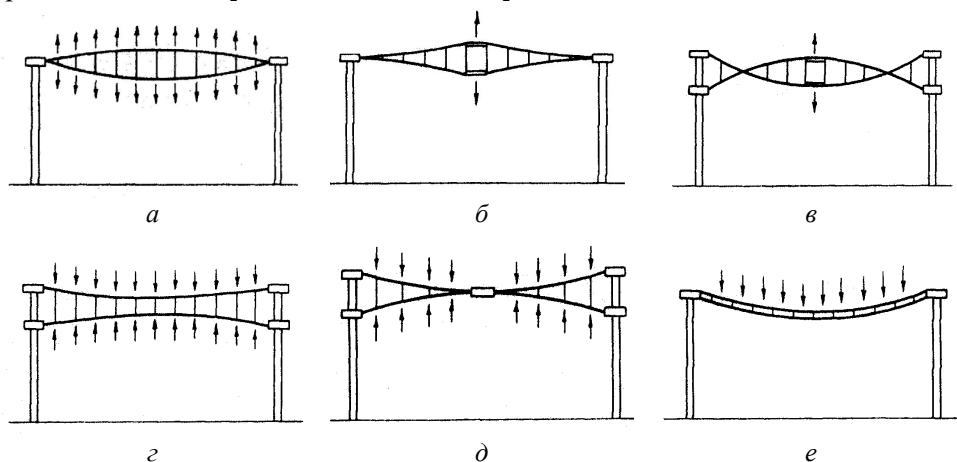


Рис. 1.8. Способы предварительного напряжения висячих покрытий:
a – раздвижкой распорок; *б, в* – раздвижкой центрального барабана;
г, д – стягиванием подвесок; *е* – увеличением собственного веса

Увеличить жесткость висячих покрытий можно также путем увеличения собственного веса покрытия (рис. 1.8, *е*). При этом вес покрытия должен быть таким, чтобы любая временная несимметричная нагрузка не вызывала значительных перемещений, и быть больше нагрузки, вызываемой отрицательным давлением ветра [137, 180, 233].

В последнее время наряду с известными решениями для уменьшения деформативности покрытий зданий и сооружений стали применять висячие

покрытия, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости [111, 116, 149, 165, 250, 294]. Примером такого конструктивного решения может служить покрытие Дворца спорта пролетом 70 м в г. Вильнюсе. Висячие фермы высотой 2,2 м имели трубчатое сечение и располагались с шагом 3 м. Нижний пояс был усилен тросом диаметром 63 мм, который благодаря предварительному натяжению сжимал ферму. По фермам были уложены утепленные армоцементные плиты. Второй пример – покрытие Олимпийского плавательного бассейна в г. Москве (рис. 1.9). Здесь висячие фермы конечной жесткости имеют пролет 104 м и высоту 2,5 м. Сечение верхнего пояса состоит из швеллера № 40, уложенного плашмя, а нижнего – из швеллера № 20, работающего в вертикальной плоскости. Решетка фермы состоит из уголков. Шаг ферм 4,5 м. По ним непосредственно уложен оцинкованный профилированный настил [114, 165]. Несмотря на большой пролет здания, распор в висячей ферме при полной снеговой нагрузке не превышает 1200 кН благодаря большой стреле провисания фермы, достигающей 18 м. Данное решение позволило облегчить не только сами висячие фермы, но и опорный контур, состоящий из железобетонных арок [165, 250].

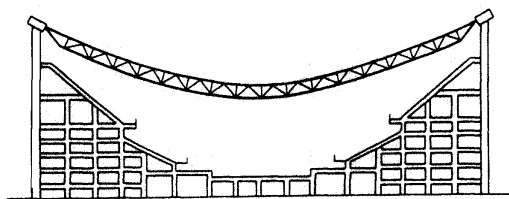


Рис. 1.9. Висячее покрытие
Олимпийского плавательного бассейна в г. Москве

В последние годы в качестве покрытий зданий и сооружений применяются также тонколистовые пологие мембранные оболочки. В частности, можно указать на покрытие Большой арены в г. Санкт-Петербурге, представляющее собой цельную стальную мембрану диаметром 160 м и толщиной 6 мм, подкрепленную радиально направленными ребрами из балок. Интенсивно исследуются, проектируются и строятся мембранные покрытия не только на круглом, но и на прямоугольном плане. Примерами разработок такого типа мембранных оболочек являются покрытия над реконструируемыми главными корпусами московских заводов «Компрессор», АЗЛК и «Фрезер» [149, 151].

Следует также отметить интересное направление в исследовании новых конструктивных решений для сооружений различного назначения с использованием составных элементов висячих систем – вант и стержней, представляющее собой разработку трансформирующихся металлических покрытий, в том числе вантово-стержневых оболочек. Применение указанных конструкций позволяет существенно сократить трудозатраты при монтаже и перенести

в заводские условия не только изготовление, но и сборку каркаса здания [60, 235].

Все эти направления по совершенствованию конструктивных решений и увеличению жесткости висячих систем способствуют повышению их эксплуатационных свойств и ставят висячие системы в один ряд с другими современными типами конструкций. Принимая во внимание преимущества висячих систем, учитывая постоянное увеличение прочностных характеристик выпускаемой стали [25, 165, 294], а также то, что прочность стали растет быстрее ее стоимости [20, 161], можно утверждать, что висячие системы в недалеком будущем получат массовое применение в практике строительства [115, 149, 161, 251, 294], тем самым значительно расширив возможности ведения экономичных, эффективных и изящных большепролетных промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений.

§ 1.2. Обзор теоретических и экспериментальных исследований

Впервые о расчете гибкой нити мы узнаем из работ французского инженера Навье, который еще в 30-х годах прошлого века решил уравнение кривой нерастяжимой нити, находящейся под действием вертикальной нагрузки. Впоследствии ученые многих стран посвящали свои работы различным вопросам, связанным с расчетом гибких нитей. Вначале теория гибкой нити развивалась как составная часть теории расчета висячих мостов. Значительный научный вклад внесли в эту теорию Г.П.Передерий, Н.С.Стрелецкий, С.А.Цаплин, С.А.Ильясевич и др.

В работах Г.П. Передерия [188] и Н.С. Стрелецкого [239] были разработаны основы современного мостостроения. Кроме того Г.П. Передерий собрал и систематизировал весь материал по расчету висячих систем, разбросанный по отдельным изданиям и характеризующийся решением тех или иных частных задач при отдельных видах нагружения.

Первый шаг в направлении обобщения решения гибкой нерастяжимой нити был сделан С.А. Цаплиным [262, 263], который предложил использовать для ее расчета принцип Лагранжа. Применив этот принцип к конечным перемещениям, он получил только приближенные решения для пологих нитей при непрерывной функции нагрузки. Отметим, что поскольку нить является нелинейной системой, то указанное использование принципа возможных перемещений нельзя признать вполне строгим.

С.А.Ильясевич [102] впервые предложил учитывать переменность распора при расчете колебаний мостов. Вклад зарубежных исследователей в решение этой проблемы подробно обсужден в работе Г.П. Передерия [188] и монографии В.А. Смирнова [230].

Несколько позже появились работы Р.Н.Мацелинского [156–158] и В.К.Качурина [110–112], оказавшие большое влияние на инженеров-строителей. Р.Н.Мацелинский дал более точное аналитическое решение для

гибкой нерастяжимой нити при действии произвольной вертикальной нагрузки, чем С.А.Цаплин. Это было достигнуто благодаря применению к расчету нити принципа Лагранжа в строгой интерпретации, т. е. к перемещениям бесконечно малым, а не конечным. Был показан путь учета упругих деформаций, разработан уточненный метод расчета гибких упругих нитей и дана оценка принятых допущений на точность расчета. Конечное уравнение, описывающее напряженно-деформированное состояние нити, было представлено в виде

$$H^3 + \frac{8EF}{3n^2m^3}H^2 = \frac{DEF}{2lm^3}, \quad (1.1)$$

где H – распор; EF – жесткость нити на растяжение; $n = l/f$; $m = L/l$; L – длина нити; l – пролет; f – начальная стрела провисания; D – характеристика нагрузки, вычисляемая по формуле

$$D = \int_0^l qMdx = \int_0^l Q^2 dx, \quad (1.2)$$

причем M и Q – соответственно изгибающий момент и поперечная сила от заданной нагрузки q в условной прямолинейной балке, которая по всем остальным параметрам аналогична гибкой нити.

Другой метод расчета гибкой упругой нити изложен в монографиях В.К.Качурина [110–112]. Исходя из уравнений длин нити, находящейся под действием начальной и дополнительной нагрузок*, и используя для связи между ними условие неразрывности деформаций, было получено выражение для определения распора в нити

$$H_1^3 + \left(\frac{EF}{2lH_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx - H_0 \right) H_1^2 - \frac{EF}{2l} \int_0^l Q_1^2 dx = 0, \quad (1.3)$$

где H_0 и Q_0 – распор и перерезывающая сила в нити, находящейся под действием начальной нагрузки; H_1 и Q_1 – то же, при действии дополнительной нагрузки.

В работах [110–112] рассмотрено влияние на напряженно-деформированное состояние нити смещения опор и изменения температуры, а также разработан метод расчета нити на нагрузку, действующую перпендикулярно к плоскости первоначального провисания. В статье [210] приведены более точные по сравнению с полученными В.К.Качуриным формулы статического расчета гибкой нити.

Отдельным вопросам расчета гибкой упругой нити посвящены работы Л.Г.Дмитриева [83], А.Я.Дривинга [85], А.Ф.Лилеева и Е.Н.Селезневой [147], Г.В.Рекача [208], Е.М.Сидоровича [225], В.А.Смирнова [230], А.Г.Соколова [234], В.С.Щедрова [303], Х.К.Банделя [308], Ф.Бауэра [309], И.И.Енсена

* Под начальной подразумевается нагрузка, при которой нить провисает с заданной стрелой; под дополнительной – любая другая нагрузка, прикладываемая к нити после приложения начальной нагрузки (например, собственный вес нити).

[318], З.Соботки [233], Ф.Отто и Ф.К.Шлейера [180, 181] и др. Анализ перечисленных работ показывает, что теория расчета гибкой нити в настоящее время разработана достаточно полно. Гибкая нить является основным элементом большого класса плоских и пространственных висячих систем.

Вопросы расчета висячих систем на статические нагрузки нашли отражение в трудах А.И.Битюцкого [26], Л.Г.Дмитриева и А.В.Касилова [83, 84], В.К.Качурина [110–112], Э.И.Кузнецова [138], В.Р.Кульбаха [139], А.Ф.Лилеева и Е.Н.Селезневой [147], А.В.Перельмутера [189], И.М.Рабиновича [202], В.В.Трофимовича [252], В.Н.Шимановского [294], Ф.К.Шлейера [329] и др.

Исследованию напряженно-деформированного состояния висячих систем при сейсмических и ветровых воздействиях посвящены работы [27, 28, 62, 64, 65, 84, 98, 119, 132, 135, 160, 176, 194, 200, 201, 204, 210, 211, 225, 230, 231, 242] и др.

Основы теории нитей конечной изгибной жесткости были заложены в трудах К.С.Завриева [91], разработавшего методику расчета стержней, подверженных совместно действию поперечной нагрузки и осевой силы. Значителен также вклад И.Г.Бубнова [45], рассмотревшего задачу продольно-поперечного изгиба стержней, у которых продольное усилие зависит от прогиба стержня. С.П.Тимошенко [243, 245] развил расчет растянуто-изогнутых стержней энергетическим методом, а также дал предложения по приближенному определению распора. Эти вопросы рассматривались также в работах А.С.Вольмира [56], Н.В.Корноухова [134], Н.К.Снитко [232] и других авторов.

Дальнейшее развитие теория нитей с изгибной жесткостью получила в трудах В.К.Качурина, Н.М.Кирсанова, Н.С.Москалева, В.Н.Шимановского, Ю.В.Смирнова, Р.Б.Харченко, Г.А.Тартаковского и К.Н.Илленко.

В монографии В.К.Качурина [111] приведено решение для нити конечной жесткости, находящейся под действием произвольной вертикальной нагрузки. В зависимости от способа монтажа висячей системы он получил два вида дифференциальных уравнений изгиба нити:

для нити, работающей с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{q}{EI} = 0; \quad (1.4)$$

для нити, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузок

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{8Hf}{EI l^2} + \frac{q}{EI} = 0, \quad (1.5)$$

где EI – жесткость нити на изгиб.

Поскольку при решении уравнений (1.4) и (1.5) не удается получить распор в явном виде, для его определения предлагается использовать метод последовательных приближений, задаваясь вначале каким-либо значением распора. Это решение весьма трудоемко, потому что приходится делать по 3–5 и более попыток.

В работах Н.М. Кирсанова [116, 117] описана возможность применения для расчета нитей конечной жесткости разработанной методики расчета висячих мостов. Методика основана на использовании ступенчатой линеаризации исходных нелинейных уравнений, при выводе которых применяются специально построенные с учетом прогибов функции влияния. Выражения последних получены Н.М.Кирсановым для различных случаев расчета висячих систем повышенной жесткости, а для решения нелинейных уравнений предлагается использовать метод последовательных приближений.

Н.С.Москалев [165] разработал и систематизировал расчет нитей конечной жесткости по методу предельных состояний, причем расчет на прочность был отделен от расчета на деформативность. Принятое исходным для расчета на прочность состояние полного расчетного нагружения позволяет при таком подходе для заданной нагрузки получить непосредственно из условий равновесия предельную геометрию и расчетные усилия в нитях, а также определить действительный запас несущей способности висячей конструкции с учетом геометрической и физической нелинейности. Деформационный расчет в свою очередь также разделен на расчет упругих и кинематических перемещений, что позволяет отдельно определить эти два вида деформации. Для нахождения распора при действии произвольной вертикальной нагрузки автор использует метод последовательных приближений, принимая в первом приближении распор как для гибкой нити. Уточнение распора производится с одновременной корректировкой прогиба нити. Выведен ряд универсальных расчетных зависимостей и произведен анализ влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние нити. Полученные формулы можно эффективно использовать при назначении первоначальных параметров нити – жесткости на растяжение и изгиб, высоты сечения и др.

В.Н.Шимановский, Ю.В.Смирнов и Р.Б.Харченко [113, 294, 295, 298] разработали общую методику расчета нитей конечной жесткости при действии любой поперечной нагрузки произвольного направления и вывели универсальные формулы для определения прогибов и изгибающих моментов в сечениях нити. Предложенная ими методика основана на использовании принятого для гибких упругих нитей [110–112] способа раскрытия статической неопределимости системы путем применения условия неразрывности деформаций. Незвестным в полученных уравнениях выступает безразмерный параметр $u = 0,5l(H/EI)^{1/2}$, учитывающий геометрические, статические и физико-механические характеристики нити. Нахождение параметра u производится из трансцендентного уравнения вида

$$\alpha_1\varphi_1(u) + \alpha_2\varphi_2(u) + \alpha_3\varphi_3(u) + \dots + \alpha_i\varphi_i(u) + \dots + \alpha_n\varphi_n(u) = 0, \quad (1.6)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ – коэффициенты, зависящие от физических и геометрических характеристик нити; $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u), \dots, \varphi_i(u), \dots, \varphi_n(u)$ – трансцендентные функции, аргументом которых является параметр u . При расчете нити учитывается влияние на ее напряженно-деформированное со-

стояние различных воздействий: изменение температуры, смещение и неравномерная осадка опор.

Разработанная Г.А.Тартаковским [242] применительно к трубопроводным переходам методика расчета нитей конечной жесткости основана на известных дифференциальных зависимостях для растянуто-изогнутых стержней. При определении распора жесткость нити на изгиб не учитывается. Изгибающие моменты, действующие в поперечных сечениях нити, вычисляются независимо от распора как вторые производные от уравнения упругой линии нити. Такой подход не является строгим и дает удовлетворительные результаты для ограниченного круга задач.

Иной метод расчета предложил К.Н.Илленко [100]. Он условно делит нить конечной жесткости на два компонента: абсолютно гибкую нить и изгибаемый элемент. При этом нагрузка распределяется между нитью и изгибаемым элементом из условия равенства прогибов между ними по всей длине пролета. Напряжения в нити конечной жесткости определяются путем суммирования напряжений в гибкой нити и изгибаемом элементе. Полученные таким путем формулы представляют собой сложные трансцендентные уравнения. Следует отметить, что указанная методика, как и методика Г.А.Тартаковского, дает удовлетворительные результаты лишь для ограниченного круга задач.

Некоторым вопросам развития теории расчета нитей конечной жесткости посвящены также работы [96, 169, 227] и др.

Известно, что методы расчета в упругой стадии работы материала не позволяют выявить истинных запасов прочности конструкции. В большинстве случаев пластические деформации приводят к перераспределению и выравниванию напряжений, а следовательно, и к повышению несущей способности конструкции. Указанное обстоятельство может дать особенно значительный эффект при расчете таких нелинейно деформируемых систем, как висячие.

Основы теории пластичности были заложены Сен-Венаном и М.Леви, которым принадлежит создание одного из вариантов теории и вывод основных уравнений плоской деформации, а также А.Хааром, Т.Карманом, Г.Генки, Л.Прандтлем и Р.Мизесом, которые получили важные результаты по основным уравнениям теории пластичности и методам решения плоской задачи.

Значительный вклад в развитие теории пластичности внесли Н.И.Безухов [22], Дж.Н.Гудьер [78], А.А.Ильюшин [101], Л.М.Качанов [107], В.В.Новожилов [178], В.Т.Койтер [131], В.Прагер [198], Л.И.Седов [221], В.В.Соколовский [236], Ф.Г.Ходж [78] и др. Им принадлежит разработка новых теорий, их анализ и экспериментальная проверка, развитие приближенных методов расчета и решение отдельных задач.

Одной из первых работ, посвященных упруго-пластическому расчету пластин, является монография И.Г.Бубнова [45], в которой изучалось деформирование пластин при шарнирном и жестком закреплении концов. Было по-

казано, что появление пластических деформаций в пластине не исчерпывает ее несущей способности. Кроме того было экспериментально установлено, что жесткое закрепление концов на опорах заметно сказывается на характере деформирования пластины только в упругой стадии, а за пределом упругости благодаря появлению вблизи опорных сечений пластического шарнира приближается к работе пластины с шарнирным закреплением.

Первые работы по исследованию упруго-пластического изгиба балок также базировались на гипотезе пластического шарнира. Эту гипотезу широко использовали Л.М.Беленький [24], И.Л.Дикович [81], Н.Ф.Ершов [87–89], А.Р.Ржаницын [209], Я.Ф.Шаров [267], Б.Г.Нил [175], Ф.Г.Ходж [260], А.Г.Янг [339] и др., применяя два подхода к решению задачи. При первом подходе предполагается, что балка работает упруго вплоть до момента образования пластических шарниров. Текучесть же возникает лишь в местах их появления и не распространяется по длине балки. Предельная нагрузка определяется из условия образования пластических шарниров в середине пролета и жестких опорных закреплениях. Второй подход заключается в рассмотрении изгиба жестко-пластических балок без учета образования упруго-пластических зон и упругих деформаций материала. Эти подходы дают возможность определить только предельные нагрузки и прогибы балки при больших пластических деформациях и не позволяют оценить перемещения, а также характер и размер пластических деформаций балки.

В работах Н.И.Безухова и О.В.Лужина [23], А.С.Борейко [42], Л.А.Галина [58], А.В.Геммерлинга [61], И.Л.Диковича [81], Н.Ф.Ершова [87–89], В.А.Постнова [195], В.Н.Серова [222], Н.Н.Складнева [228], В.В.Сорокина [237], В.Е.Спиро [238], А.И.Стрельбицкой [240], Г.В.Тютюнина [255] и других для исследования напряженно-деформированного состояния балок за пределом упругости используются дифференциальные уравнения упруго-пластического равновесия при изгибе. При такой постановке задачи считается, что по длине балки одновременно имеются участки, находящиеся в различных фазах деформирования – упругой, упруго-пластической с односторонней текучестью и упруго-пластической с двусторонней текучестью. Для каждого из этих участков записываются отдельные дифференциальные уравнения. Поскольку границы упруго-пластических зон как по длине балки, так и в пределах поперечных сечений изменяются в процессе нагружения, то их положение определяется из условий равенства внутренних и внешних усилий в сечениях с текучестью.

И.Л.Дикович [81] указанную задачу решил в замкнутом виде. Он получил соотношения между кривизной оси балки и изгибающим моментом для наиболее распространенных типов профилей, а также рассмотрел большое количество частных примеров. Расчетные зависимости получены для балок из идеального упруго-пластического материала и для материала с линейным упрочнением.

В работе [88] для упрощения интегрирования системы уравнений пред-

лагается задавать функцию прогиба. Кроме того исследование упруго-пластических балок проводилось также энергетическим методом, основанным на использовании обобщенной теоремы Кастильяно [87, 89].

В.Н.Серов [222] решает задачу вариационным методом Лагранжа-Ритца. Функция прогиба балки задается им в виде ряда Фурье. Такой подход приводит к очень громоздкой и сложной системе трансцендентных уравнений. Указывая на данный факт, автор предлагает ограничить количество членов ряда функции прогибов двумя.

Другой путь приближенного решения задачи избрал В.В.Сорокин [237]. Он использует для определения параметров напряженно-деформированного состояния упруго-пластической балки метод последовательных приближений, задавая в качестве исходного приближения упругое решение. Такой способ достаточно трудоемок и, как отмечает сам автор, при нем не всегда может быть обеспечена быстрая сходимость вычислительного процесса, например, для балок с небольшой жесткостью на изгиб.

Применение различных численных методов для исследования работы балок за пределом упругости использовалось в работах [42, 247, 301] и др. При этом в большинстве перечисленных работ на зависимость «напряжение–деформация» не накладываются какие-либо ограничения и интегралы, входящие в уравнения, могут быть также определены численно.

Исследованию нитей конечной жесткости за пределом упругости посвящено сравнительно небольшое количество публикаций. К ним можно отнести работы И.Г.Людковского и А.Д.Федорова [152], Б.К.Немчинова [169], В.Н.Шимановского и А.А.Соколова [298] и некоторые другие.

Б.К.Немчинов при расчете нитей конечной жесткости за пределом упругости использует диаграмму напряжение–деформация жестко-пластического материала. Как указывалось выше, такой подход дает хорошие результаты только в том случае, если возможно пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими.

И.Г.Людковский и А.Д.Федоров путем экспериментальных исследований установили, что разрушение висячих конструкций чаще всего происходит вследствие образования больших пластических деформаций вблизи опорных закреплений при жестком их опирании. Разрушение висячих конструкций может также происходить в местах приложения сосредоточенных нагрузок, как это было показано в работе [138].

В.Н.Шимановский и А.А.Соколов разработали численный метод расчета упруго-пластических нитей конечной жесткости, основанный на решении нелинейной системы уравнений методом итераций. Благодаря использованию дискретной математической модели нити удалось отказаться от необходимости определения границ зон текучести и приведенных жесткостных характеристик. Авторы исследовали нити и показали влияние различных параметров на их напряженно-деформированное состояние.

Для определения истинного характера деформирования конструкции за

пределом упругости необходимо знать не только действующую нагрузку, но и закон ее изменения, т. е. учитывать историю нагружения. Обычно вследствие разных законов нагружения и разгрузки конструкция после снятия внешних сил не возвращается в исходное состояние и в ней появляются остаточные деформации. Этому вопросу применительно к работе балок и нитей конечной жесткости посвящено небольшое количество работ [81, 88, 89, 205, 298].

И.Л.Дикович [81] решение задачи получил путем составления и решения дифференциального уравнения изгиба, откорректированного для случая разгрузки. Установлены также зависимости между изгибающим моментом и кривизной при разгрузке упруго-пластических балок. Причем при выводе расчетных зависимостей полагалось, что в балке не возникают вторичные пластические деформации. Полученные соотношения были применены автором для определения остаточных прогибов упруго-пластической балки идеального профиля при действии равномерно распределенной нагрузки.

Указанная задача решена Н.Ф.Ершовым [88, 89] в той же постановке, только для балки прямоугольного поперечного сечения. В работе [205] задача определения остаточных прогибов при разгрузке сводится к численному решению системы линейных уравнений, а у В.Н.Шимановского и А.А.Соколова [298] – к решению системы нелинейных уравнений. При таком подходе основные трудности заключаются в способах линеаризации задачи и обеспечении сходимости итерационных решений.

Как уже отмечалось ранее, повышение прочностных характеристик материалов обусловило широкое применение в строительстве экономичных и изящных тонкостенных традиционных и висячих конструкций. Для таких конструкций роль расчетов на устойчивость существенно возрастает, так как их разрушение чаще всего связано с потерей общей устойчивости или устойчивости составляющих конструкцию отдельных элементов.

Первые исследования устойчивости балок принадлежат Л.Прандтлю и А.Митчеллу, которые рассматривали упругую балку-полоску при действии сосредоточенных сил. Одной из первых публикаций, посвященных вопросам устойчивости, является работа С.П.Тимошенко, в которой он с помощью энергетического метода исследует устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки силами, действующими в плоскости ее наибольшей жесткости.

Позднее появляются работы Г.Вагнера [337], К.Вебера [338], П.М.Знаменского [95], Р.Каппуса [319], посвященные отдельным задачам устойчивости тонкостенных стержней. При этом, как указывалось В.З.Власовым [55], для достижения цели использовались далеко не равноценные расчетные предпосылки, приемы и методы решения. В результате были допущены ошибки при выводе уравнений, описывающих процесс потери устойчивости стержней, подверженных действию поперечных нагрузок.

В 30-х годах XX века начинается интенсивная разработка теории устойчивости тонкостенных стержней отечественными учеными. Наиболее общая, глубоко обоснованная теория тонкостенных стержней открытого профиля

была разработана В.З.Власовым [55]. Введя гипотезы об отсутствии сдвигов в срединной поверхности и о недеформируемости контура поперечного сечения стержня в своей плоскости, В.З.Власов значительно упростил уравнения теории цилиндрических оболочек. Он установил общий закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня при совместном изгибе и кручении, разработал общий метод определения координат центра изгиба и выявил новые геометрические характеристики сечения. Наряду с вопросами прочности В.З.Власов рассмотрел устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля произвольного поперечного сечения.

Исследования В.З.Власова были положены в основу многих работ, посвященных вопросам прочности и устойчивости тонкостенных стержней. При этом большое внимание уделялось исследованию влияния на устойчивость места расположения нагрузок по высоте сечения балки, характера опорных закреплений и других факторов [43, 49, 56, 82, 106, 232, 307].

Точное решение задач устойчивости путем интегрирования дифференциальных уравнений представляет собой довольно сложную проблему. В некоторых простых случаях точное решение удастся получить с помощью функций Бесселя, значительная часть которых табулирована. В отдельных случаях решение соответствующих уравнений устойчивости удастся получить в бесконечных рядах. Поэтому при рассмотрении описанных выше задач большое внимание уделяется методам их решения. Эти вопросы нашли отражение в трудах Н.А.Алфутова [8], В.В.Болотина [28], Б.М.Броуде [43], Д.В.Бычкова [49], В.З.Власова [55], А.С.Вольмира [56], А.Н.Динника [82], Н.И.Карякина [106], Н.В.Корноухова [134], Р.Р.Матевосяна [154], Я.Г.Пановко и И.И.Губановой [183], И.М.Рабиновича [203], А.Р.Ржаницына [212], А.Ф.Смирнова [229], Н.К.Снитко [232], С.П.Тимошенко [245], Ю.И.Ягна [307] и др.

Задачи об определении критического параметра нагрузки для балок, раскрепленных связями из плоскости изгиба, имеют важное практическое значение. Достаточно отметить, что в современных конструкциях отдельно стоящие балки почти не встречаются. Обычно они соединены между собой связями в виде прогонов или плит.

Первая попытка решения указанной задачи принадлежит С.П.Тимошенко [245], который считал, что связи влияют на упругое сопротивление закручиванию поперечных сечений. Позже эту же задачу рассматривали В.В.Болотин [28], Г.П.Бурчак [48] и А.Р.Ржаницын [212], включившие в расчет угол поворота поперечного сечения как жесткого целого без учета деформаций контура. Как правило, в указанных публикациях оговаривалась постановка задачи, рассматривались несколько простейших частных случаев работы раскрепленных балок и только указывались пути получения общего решения.

В связи с применением в покрытиях зданий и сооружений висячих ферм с развитым в вертикальной плоскости поперечным сечением, расчетной мо-

делью которых является нить конечной жесткости, возникла необходимость их расчета на устойчивость плоской формы изгиба. Этой проблеме посвящено незначительное количество работ [96, 259 и др.].

Ю.Г.Фридман [259], используя полученные В.З.Власовым общие дифференциальные уравнения устойчивости тонкостенных стержней, рассмотрел несколько частных случаев загрузки нитей конечной жесткости при различных граничных условиях. Используя весьма приближенные исходные предпосылки, он получил расчетные зависимости, связывающие внешнюю нагрузку с жесткостными и геометрическими параметрами поперечного сечения нити, а также с действующим в ней в критическом состоянии распором.

И.М.Зотова [96], рассматривая равновесие отклоненного состояния бесконечно малого элемента нити, получила систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих устойчивость плоской формы изгиба нитей конечной жесткости. Поскольку точное решение этой системы уравнений получить не представлялось возможным, она нашла приближенное, используя для этого вариационный метод Бубнова-Галеркина. В результате удалось получить весьма сложное нелинейное алгебраическое уравнение пятой степени относительно критического прогиба нити, т. е. прогиба, при котором плоская форма деформации перестает быть устойчивой. Зная критический прогиб, без труда можно определить внешнюю нагрузку, вызвавшую его.

Как было отмечено выше, в современных конструкциях часто допускаются пластические деформации, а расчет нередко ведется по предельным нагрузкам. Так как в раскрепленных связях в горизонтальной плоскости балках и нитях можно ожидать достижения внешней нагрузкой критического значения ранее предельного, то вопрос об устойчивости плоской формы изгиба в упруго-пластической области приобретает важное значение. Задачи пластического выпучивания не только нитей конечной жесткости, но и балок в наиболее общем виде до настоящего времени точно не решены. В литературе есть отдельные работы, в которых рассматриваются решения задач устойчивости плоской формы изгиба балок в пластической области. Например, работы Л.М.Качанова [107, 108] и Б.Г.Нила [175], в которых задача устойчивости упруго-пластической балки сводится к задаче устойчивости упругой балки с соответствующими приведенными жесткостными характеристиками поперечного сечения. При этом материал балки считается идеальным упруго-пластическим, а поперечное сечение – прямоугольным. Некоторые частные вопросы устойчивости плоской формы изгиба балок за пределом упругости нашли отражение в статьях [29, 316, 321].

В последнее время наряду с классическими аналитическими методами стали широко применять численные методы, ориентированные на максимальное использование вычислительной техники [11, 41, 52]. Внедрению вычислительных машин в практику исследования, расчета и проектирования строительных конструкций посвящено большое количество работ. Во многих публикациях даны обзоры исследований, намечены перспективы дальнейшего

развития применения вычислительной техники. Это труды А.В.Александрова, Б.Я.Лашеникова, Н.Н.Шапошникова и В.А.Смирнова [4], Дж.Аргириса [11], А.Ф.Смирнова [229], А.П.Филина [258] и др.

Численные методы нашли широкое применение в исследованиях таких сильно нелинейных систем, как висячие. В работах [26, 83, 110, 111, 147, 165] усилия и перемещения предлагается определять методом последовательных приближений. Л.Г.Дмитриев [84] разработал метод многоступенчатого нагружения, идея которого принадлежит В.З.Власову [55]. Суть метода сводится к решению системы нелинейных уравнений путем решения рекуррентных систем линейных уравнений при условии, что на каждом шаге расчета нагрузка прикладывается к конструкции достаточно малыми порциями и каждое предыдущее состояние принимается при этом за исходное. При таком подходе к решению задачи одновременно обеспечивается справедливость применяемых общих принципов линейной строительной механики и теории упругости.

К числу методов, нашедших за последние годы применение в инженерной практике, следует отнести метод сеток (метод конечных разностей), вариационно-разностный метод и метод конечных элементов (МКЭ). Все они сводят решение континуальной задачи к решению систем уравнений высокого порядка. Из перечисленных методов особенно широко применяется отличающийся своей универсальностью, физической наглядностью и высокой алгоритмичностью МКЭ. Как указывалось выше, метод основан на идее кусочной аппроксимации непрерывных полей, в результате чего среда представляется дискретной моделью с конечным числом степеней свободы [59, 179]. Идея дискретизации конструкции возникла сначала на основе общих дискретных методов строительной механики, а позднее на основе метода Ритца с использованием принципа минимума потенциальной энергии. Широкие возможности использования методов дискретизации открылись с появлением быстродействующих ЭВМ. В 60-е и начале 70-х годов многие ученые посвятили свои труды внедрению МКЭ, его развитию и теоретическому обоснованию расчетов конструкций сложных конфигураций. Это прежде всего А.В.Александров [4, 229], З.И.Бурман [47], П.М.Варвак [162], В.Н.Гордеев [66], А.С.Городецкий [50], В.Н.Кислокий [119, 122, 124, 219], В.Г.Корнеев [133], Б.Я.Лашеников [4], Ю.И.Немчинов [171], А.В.Перельмутер [66, 189], В.А.Постнов [196, 197], Л.А.Розин [213, 214], А.С.Сахаров [50, 122, 217, 219], А.Г.Угодчиков [163], И.Я.Хархурим [197], Н.Н.Шапошников [4, 229], Дж.Аргирис [11], Р.Галлагер [59], Ж.Деклу [79], О.Зенкевич [93], Дж.Оден [179] и др. В эти и последующие годы появилось много работ по расчету строительных конструкций [11, 47, 50, 229], были изданы монографии [59, 79, 93, 133, 171, 179, 196, 214, 219], специальные сборники [162, 163] и библиографические справочники [21, 164], однако в них не нашли отражения все многочисленные аспекты, связанные с быстро развивающимся МКЭ [21, 59, 164, 219]. Например, при применении МКЭ к расчету висячих систем в геометрически нелинейной постановке несущие элементы последних аппрокси-

мируются, как правило, стержнями, работающими на растяжение–сжатие [94, 179, 214, 219]. При этом жесткостью элементов на изгиб пренебрегают. Вместе с тем, как это показано в работах [110, 111, 116, 165, 295], именно изгибная жесткость элементов может оказать существенное влияние на работу конструкции под нагрузкой. Сведений же о расчете с помощью МКЭ в геометрически нелинейной постановке висячих систем повышенной жесткости, расчетной моделью которых служит нить конечной жесткости, в литературе практически не имеется.

Экспериментальные исследования висячих систем повышенной жесткости весьма малочисленны. Можно указать лишь на исследования нитей конечной жесткости [170, 190, 295–297], а также висячих ферм конечной жесткости [96].

Б.К.Немчинов [170] провел испытания нитей конечной жесткости в виде стальных стержней круглого и квадратного поперечных сечений. При испытаниях варьировалась стрела провисания нитей. Для испытаний, выполненных И.П.Петровым и В.В.Спиридоновым [190], в качестве опытных образцов нитей были приняты трубы. При этом так же, как и ранее, варьировалась стрела провисания нити. Особенностью испытаний было то, что здесь наряду со статическими нагрузками учитывалось влияние внутреннего давления на общее напряженно-деформированное состояние трубы. Наиболее полные испытания нитей конечной жесткости были проведены В.Н.Шимановским, Ю.В.Смирновым и Р.Б.Харченко [295–297]. В качестве образцов нитей применяли трубы, а за варьируемые параметры были приняты площадь сечения нити и стрела ее провисания. Трубы испытывали на вертикальные и горизонтальные симметричные и несимметричные нагружения при шарнирном и жестком закреплении концов. В результате испытаний получены зависимости прогибов, углов поворота поперечных сечений и действующих в нити изгибающих моментов при различных схемах нагружения и условиях закрепления на опорах, а также оценено влияние различных факторов (жесткость на изгиб, стрела провисания, граничные условия) на напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости.

В работе [96] приведены результаты испытаний фермы конечной жесткости, представляющей собой двухпоясную висячую систему с параллельными поясами. В качестве верхнего пояса фермы использовался стальной канат, а нижний пояс был выполнен из двух уголков, образующих тавровое сечение. Ферма испытывалась на действие различных вертикальных нагрузок при шарнирном и жестком закреплении опорных сечений. В результате испытаний получены зависимости прогибов и усилий в поясах фермы при различных схемах нагружения.

Анализ результатов исследований, проведенный авторами указанных выше работ, в целом показал удовлетворительное совпадение теоретических решений с данными экспериментов. Однако если при действии распределенных симметричных нагрузок погрешность в определении параметров напря-

женно-деформированного состояния нити конечной жесткости обычно достаточно мала, то при действии сосредоточенных и в особенности несимметричных нагрузок она несколько возрастает. На погрешность влияют и некоторые другие факторы. Например, уменьшение жесткости нити или увеличение стрелы ее провисания также приводят к относительному возрастанию величины погрешности теоретических решений.

§ 1.3. Задачи исследований

Из приведенного обзора следует, что висячие системы повышенной жесткости достаточно широко применяются при строительстве промышленных и гражданских зданий, а также инженерных сооружений. В зависимости от функционального назначения сооружения основное внимание уделяется той части расчета висячей системы, которая обеспечивает выполнение предъявляемых к конструкции эксплуатационных требований. Например, если при расчете висячего трубопровода основное внимание уделяется обеспечению несущей способности и жесткости пролетного строения, то при исследовании применяемых в покрытиях зданий и сооружений висячих ферм повышенной жесткости необходимо выполнить расчет и на устойчивость плоской формы изгиба, поскольку потеря устойчивости хотя бы одной фермы может привести к потере эксплуатационных свойств и даже разрушению всего сооружения. Причем соответствующая этому критическая нагрузка может быть существенно меньше предельной, полученной по обычному расчету на прочность для первоначальной формы равновесия.

Работы, посвященные исследованиям прочности и деформативности нитей конечной жесткости, появились в основном в последние три десятилетия. В них для определения параметров напряженно-деформированного состояния нити используется метод последовательных приближений, с помощью которого решается дифференциальное уравнение изгиба или уравнение неразрывности деформаций, связывающее длины нити в исходном и деформированном состояниях. Вследствие значительной нелинейности задачи расчетные зависимости имеют довольно громоздкий вид, а их решение представляет собой трудоемкий процесс.

Еще мало работ посвящено расчету висячих конструкций повышенной жесткости на устойчивость плоской формы изгиба и еще меньше – расчету с учетом пластических свойств материала.

Недостаток теоретических разработок и приближенность известных методов расчета указанных систем сказываются не только на исследовании напряженно-деформированного состояния реальных конструкций, но и на их проектировании. Все это привело к тому, что в процессе эксплуатации в несущих конструкциях ряда сооружений возникли чрезвычайно большие напряжения. Некоторые сооружения, в том числе и уникальные, обрушились [113, 190, 294].

С другой стороны, ошибки проектировщиков даже в таком, на первый взгляд достаточно простом вопросе, как отнесение нити к категории абсолютно гибких или конечной жесткости, приводят не к лучшим последствиям. Ориентация только на одну жесткость нити на изгиб еще не позволяет решить, по какой из теорий необходимо вести расчет. Как указывается в работе [111], в подобных случаях к расчету нити следует подходить комплексно.

Анализ построенных и запроектированных зданий и инженерных сооружений с применением висячих систем показал, что во многих из них были приняты не лучшие конструктивные решения. При реализации проектов не использовалась, к сожалению, бóльшая часть из присущих висячим конструкциям потенциальных возможностей, что приводило к чрезмерному усложнению схемы сооружения, увеличению его материалоемкости, стоимости и сроков строительства.

В соответствии с вышеизложенным актуальными задачами являются:

1. Создание уточненной теории расчета прочности и устойчивости несущих элементов висячих систем повышенной жесткости в упругой и пластической стадиях работы материала на произвольные нагрузки и воздействия, а также разработка простых и удобных для практического использования инженерных методов расчета.

2. Совершенствование конструктивных форм висячих систем, способов и приемов монтажа при возведении зданий и сооружений с использованием преимуществ этих систем.

Глава 2. УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 2.1. Предпосылки расчета

В предлагаемой теории расчета рассматриваются нити, удовлетворяющие следующим требованиям:

1. Отношение пролета нити к стреле ее провисания должно находиться в пределах $8 \leq l/f < \infty$, т. е. нить принимается полой. При этом если опоры нити расположены на разных уровнях, то угол наклона к горизонту линии, соединяющей точки ее подвеса, не должен превышать 20° .

2. Отношение напряжений от изгиба к напряжениям от растяжения должно находиться в пределах $0,05 < \sigma_u/\sigma_p < \infty$, т. е. нить принимается конечной изгибной жесткости.

3. Материал нити считается однородным, изотропным и абсолютно упругим.

Согласно литературным источникам подавляющее большинство (около 95%) нитей конечной жесткости, применяемых в висячих конструкциях, отвечают данным требованиям.

При расчете нитей необходимо учитывать следующие положения:

1. Гипотеза плоских сечений, предполагающая, что плоские до изгиба поперечные сечения, нормальные к оси нити, после изгиба остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси. Использование этой особенности позволяет свести исследование деформированного состояния нити к рассмотрению изгиба ее оси.

2. Продольные волокна нити не давят одно на другое, т. е. находятся в одноосном напряженном состоянии. Это позволяет считать нормальное напряжение в поперечных сечениях нити функций только относительного удлинения волокна.

3. Кривизна изогнутой оси нити в любой точке зависит только от величины изгибающего момента в этой точке, что позволяет пренебречь влиянием перерезывающей силы на кривизну оси нити вследствие ее незначительности.

4. В связи с тем, что перемещения нити считаются не малыми и соизмеримыми со стрелой ее провисания, расчет является нелинейным и ведется по деформированной схеме.

5. Статическая неопределимость относительно распора раскрывается с помощью принципа возможных перемещений. При этом принцип Лагранжа используется в своей строгой постановке, т. е. к перемещениям бесконечно малым, а не конечным. Это приводит задачу к дифференциальным зависимостям, которые в отличие от известных решений дают более точные результаты при определении параметров напряженно-деформированного состояния нити и позволяют представить решение в замкнутом виде.

Первые три предпосылки являются общепринятыми и составляют основу технической теории изгиба, успешно применяемой при рассмотрении де-

формирования балок и нитей конечной жесткости. Степень их точности хорошо изучена: обычно при расчете балок, у которых отношение пролета к высоте поперечного сечения более пяти, погрешность не превышает нескольких процентов. При расчете нитей конечной жесткости погрешность гораздо меньше, поскольку в данных системах отношение пролета к высоте поперечного сечения во много раз больше пяти.

§ 2.2. Построение общих дифференциальных уравнений равновесия

Рассмотрим расчет нитей конечной жесткости на произвольную вертикальную и горизонтальную поперечные нагрузки, т. е. общий случай расчета несущих элементов висячих систем.

Предположим, что работающая с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок нить конечной жесткости с поперечным сечением площадью F , моментом инерции I и модулем упругости E нагружена произвольной вертикальной $q(x)$ и горизонтальной $p(x)$ нагрузками* и находится в состоянии равновесия. Выберем при выводе разрешающих уравнений в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции примем распор H .

Если площадь поперечного сечения нити F получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δF , то изменятся величины действующих в нити внутренних усилий и ее геометрия. В вертикальной плоскости изгибающий момент M_z получит некоторое приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения на величину δy . Аналогично в горизонтальной плоскости изгибающий момент M_y получит приращение δM_y , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити ψ – приращение $\delta\psi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δz (рис. 2.1). Кроме того распор H получит некоторое приращение, равное δH .

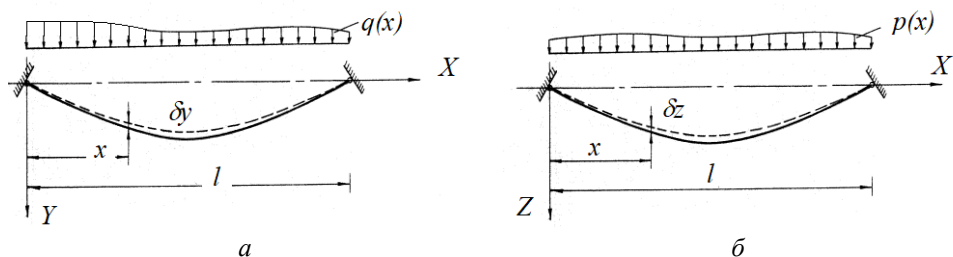


Рис. 2.1. Деформация нити при действии произвольной нагрузки:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

* Под $q(x)$ подразумевается сумма всех нагрузок, действующих на нить в вертикальной плоскости, а под $p(x)$ – то же, в горизонтальной плоскости.

Выразим эти величины через балочный изгибающий момент M_z^δ и M_y^δ , балочный прогиб y^δ и z^δ и искомый распор H . Для этого воспользуемся известными зависимостями [111]:

$$H = \frac{M^\delta - M}{f}; \quad (2.1)$$

$$M = M^\delta \frac{f}{f^\delta}. \quad (2.2)$$

Здесь необходимо отметить, что формула (2.1) абсолютно точна, поскольку отражает условия равновесия нити. Формула (2.2) приближенная, так как получена на базе предпосылки о пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке. Однако точность данной формулы достаточно высока, а ее использование вносит в расчет погрешность, сопоставимую с погрешностью допущения о пологости нити.

С учетом (2.1) и (2.2) выражения для прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости можно записать в виде

$$y = \frac{M_z^\delta y^\delta}{Hy^\delta + M_z^\delta}; \quad (2.3)$$

$$z = \frac{M_y^\delta z^\delta}{Hz^\delta + M_y^\delta}; \quad (2.4)$$

$$M_z = \frac{(M_z^\delta)^2}{Hy^\delta + M_z^\delta}; \quad (2.5)$$

$$M_y = \frac{(M_y^\delta)^2}{Hz^\delta + M_y^\delta}, \quad (2.6)$$

а приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити определяются по формулам:

$$\delta y = - \frac{M_z^\delta (y^\delta)^2 \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (2.7)$$

$$\delta z = - \frac{M_y^\delta (z^\delta)^2 \delta H}{(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + M_y^\delta)}; \quad (2.8)$$

$$\delta M_z = - \frac{(M_z^\delta)^2 y^\delta \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (2.9)$$

$$\delta M_y = - \frac{(M_y^\delta)^2 z^\delta \delta H}{(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + M_y^\delta)}; \quad (2.10)$$

$$\delta dx = \frac{EF\delta H - HE\delta F}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (2.11)$$

$$\delta d\varphi = - \frac{(M_z^\delta)^2 (y^\delta \delta HEI + y^\delta HE\delta I + y^\delta \delta HE\delta I + M_z^\delta E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} dx; \quad (2.12)$$

$$\delta d\psi = - \frac{(M_y^\delta)^2 (z^\delta \delta HEI + z^\delta HE\delta I + z^\delta \delta HE\delta I + M_y^\delta E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + M_y^\delta)} dx. \quad (2.13)$$

Найдем теперь работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил вычисляется как интеграл из произведения функции нагрузки $q(x)$ и $p(x)$ на выражения (2.7) и (2.8) соответственно, распространенный на всю длину пролета l :

$$U_1^1 = - \int_0^l \frac{q(x)M_z^\delta (y^\delta)^2 \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} dx; \quad (2.14)$$

$$U_1^2 = - \int_0^l \frac{p(x)M_y^\delta (z^\delta)^2 \delta H}{(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + M_y^\delta)} dx. \quad (2.15)$$

Работа внутренних сил состоит из работы усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx и работы изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ соответственно:

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (2.16)$$

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 (y^\delta \delta HEI + y^\delta HE\delta I + y^\delta \delta HE\delta I + M_z^\delta E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)^2} dx; \quad (2.17)$$

$$U_2^3 = \int_0^l \frac{(M_y^\delta)^4 (z^\delta \delta HEI + z^\delta HE\delta I + z^\delta \delta HE\delta I + M_y^\delta E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)^2} dx. \quad (2.18)$$

Согласно принципу Лагранжа сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна

$$U_1 + U_2 = 0. \quad (2.19)$$

Тогда, подставляя соотношения (2.14)–(2.18) в формулу (2.19), получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \frac{q(x)M_z^\delta (y^\delta)^2 \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} dx - \\ & - \int_0^l \frac{p(x)M_y^\delta (z^\delta)^2 \delta H}{(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + M_y^\delta)} dx - \\ & - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\ & + \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 (y^\delta \delta HEI + y^\delta HE\delta I + y^\delta \delta SHE\delta I + M_z^\delta E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)^2} dx + \\ & + \int_0^l \frac{(M_y^\delta)^4 (z^\delta \delta HEI + z^\delta HE\delta I + z^\delta \delta SHE\delta I + M_y^\delta E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)^2} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Представим y^δ и z^δ следующим образом:

$$y^\delta = \frac{1}{EI} (y^\delta EI) = \frac{m}{EI}; \quad (2.21)$$

$$z^\delta = \frac{1}{EI} (z^\delta EI) = \frac{n}{EI}. \quad (2.22)$$

Разделив уравнение (2.20) почленно на δH , а затем перейдя к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$ с учетом выражений (2.21) и (2.22), получим общее дифференциальное уравнение для определения распора в упругой нити конечной жесткости

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{IH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^\delta m^2}{(Hm + EIM_z^\delta)^2} dx - \frac{EF^2}{IH^2} \int_0^l \frac{p(x)M_y^\delta n^2}{(Hn + EIM_y^\delta)^2} dx + \\ & + \frac{E^2 F^2 I}{IH^2} \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 m}{(Hm + EIM_z^\delta)^3} dx + \frac{E^2 F^2 I}{IH^2} \int_0^l \frac{(M_y^\delta)^4 n}{(Hn + EIM_y^\delta)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Интегралы, входящие в уравнение (2.23), зависят от вида приложенной к нити нагрузки и условий закрепления ее концов. Они могут быть определены в каждом конкретном случае либо непосредственным интегрированием либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса.

Если в уравнении (2.23) положить $p(x) = 0$, то придем к случаю изгиба нити конечной жесткости только в вертикальной плоскости. Тогда уравнение

(2.23) принимает вид:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^\delta m^2}{(Hm + EIM_z^\delta)^2} dx + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 m}{(Hm + EIM_z^\delta)^3} dx = 0. \quad (2.24)$$

Если допустить, что действующая на нить нагрузка является равномерно распределенной, а концы нити закреплены шарнирно, то после некоторых преобразований получим уравнение

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{25q^2 l^6 EF^2}{12H^2 (5l^2 H + 48EI)^2} + \frac{120q^2 l^6 E^2 F^2 I}{H^2 (5l^2 H + 48EI)^3} = 0. \quad (2.25)$$

Наконец, если в этом уравнении положить, что $I = 0$, то придем к решению, полученному Р.Н.Мацелинским [156, 158], для гибкой упругой нити,

$$\frac{d\omega}{dH} - \frac{\omega}{H} - \frac{q^2 l^2 \omega^2}{12H^4} = 0, \quad (2.26)$$

где $\omega = EF$ – жесткость нити на растяжение.

Таким образом, задача расчета гибких упругих нитей представляет собой частный случай рассматриваемой здесь теории расчета нитей конечной жесткости.

В случае нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузок, исходные соотношения (2.1) и (2.2) могут быть представлены в виде

$$H = \frac{M^\delta - M}{f + f_0}; \quad (2.27)$$

$$M = M^\delta \frac{f}{f^\delta}, \quad (2.28)$$

где f_0 – стрела провисания нити при действии начальной нагрузки.

С учетом последних выражений соотношения для y , z , M_z и M_y можно записать так:

$$y = \frac{(M_z^\delta - Hy_0)y^\delta}{Hy^\delta + M_z^\delta}; \quad (2.29)$$

$$z = \frac{(M_y^\delta - Hz_0)z^\delta}{Hz^\delta + M_y^\delta}; \quad (2.30)$$

$$M_z = \frac{(M_z^\delta - Hy_0)M_z^\delta}{Hy^\delta + M_z^\delta}; \quad (2.31)$$

$$M_y = \frac{(M_y^{\bar{\sigma}} - Hz_0)M_y^{\bar{\sigma}}}{Hz^{\bar{\sigma}} + M_y^{\bar{\sigma}}}. \quad (2.32)$$

Выполнив соответствующие преобразования, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^{\bar{\sigma}}m(m + El y_0)}{(Hm + EIM_z^{\bar{\sigma}})^2} dx - \\ - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{p(x)M_y^{\bar{\sigma}}n(n + El z_0)}{(Hn + EIM_y^{\bar{\sigma}})^2} dx + \\ + \frac{E^2F^2I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^{\bar{\sigma}})^3(M_z^{\bar{\sigma}} - Hy_0)(m + El y_0)}{(Hm + EIM_z^{\bar{\sigma}})^3} dx + \\ + \frac{E^2F^2I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_y^{\bar{\sigma}})^3(M_y^{\bar{\sigma}} - Hz_0)(n + El z_0)}{(Hn + EIM_y^{\bar{\sigma}})^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Если в этом уравнении положить, что $y_0 = z_0 = 0$, то придем к ранее полученному выражению (2.23).

§ 2.3. Решение дифференциальных уравнений

Решение дифференциальных уравнений (2.23) и (2.33) можно получить, воспользовавшись разложением искомой функции в ряд Тейлора

$$H = H_0 + H'_0(F - F_0) + \frac{1}{2!} H''_0(F - F_0)^2 + \dots, \quad (2.34)$$

где H_0 и F_0 – начальные условия.

Коэффициенты ряда Тейлора легко находятся путем последовательного дифференцирования уравнений (2.23) и (2.33):

$$H'_0 = \frac{dH}{dF}; \quad (2.35)$$

$$H''_0 = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{dH}{dF} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{dH}{dF} \right) \frac{dH}{dF}. \quad (2.36)$$

За H_0 можно принять распор, возникающий в недеформируемой нити под действием начальной и дополнительной нагрузок; за F_0 – площадь поперечного сечения нити, в которой при распоре H_0 напряжения от изгиба минимальны.

Методику определения F_0 покажем на примере нити конечной жесткости, находящейся под действием вертикальной нагрузки. Рассмотрим нить кольцевого сечения (в виде трубы), толщина стенки t и средний радиус r_0

($r_0 = (R + r)/2$, где R – наружный, а r – внутренний радиусы трубы). Для такого поперечного сечения имеем:

$$I = \frac{F^3}{8\pi^2 t^2}; \quad (2.37)$$

$$W = \frac{F^2}{4\pi t}, \quad (2.38)$$

где $F = 2\pi r_0 t$ – площадь поперечного сечения; W – момент сопротивления поперечного сечения трубы.

Напряжения от изгиба в нити конечной жесткости вычисляются по формуле

$$\sigma_u = \frac{M_z}{W}, \quad (2.39)$$

которая с учетом выражений (2.5), (2.37) и (2.38) приводится к виду

$$\sigma_u = \frac{4\pi M_z^\delta F}{8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3}, \quad (2.40)$$

где $\alpha = I \frac{y^\delta}{M_z^\delta}$.

После дифференцирования уравнения (2.40) по F находим

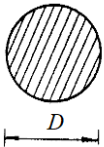
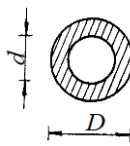
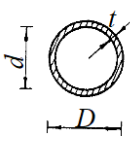
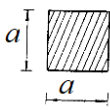
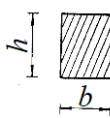
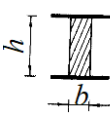
$$\frac{d\sigma_u}{dF} = \frac{4\pi M_z^\delta (8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3) - 12\pi M_z^\delta F^3}{(8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3)^2}. \quad (2.41)$$

Приравнивая правую часть этого равенства нулю, после некоторых преобразований получим соотношение для F_0

$$F_0 = \sqrt[3]{4\pi^2 t^2 \alpha H_0}. \quad (2.42)$$

Геометрические характеристики и начальное значение площади поперечного сечения F_0 для некоторых других характерных поперечных сечений приведены в табл. 2.1. При составлении табл. 2.1 толщина полок двутавра полагалась малой по сравнению с прочими размерами сечения.

Таблица 2.1

Поперечное сечение		Геометрические характеристики			Начальное значение площади F_0
тип	эскиз	площадь F	момент инерции I	момент сопротивления W	
Круг		$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{F^2}{4\pi}$	$\frac{F}{4} \sqrt{\frac{F}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{4}{3} \pi \alpha H_0}$
Толсто-стенное кольцо		$\frac{\pi D^2}{4} (1 - \gamma^2)$ $\gamma = \frac{d}{D}$	$\frac{F^2}{4\pi} \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2}$	$\frac{F(1 + \gamma^2)}{4} \times \sqrt{\frac{F}{\pi(1 - \gamma^2)}}$	$\sqrt{\frac{4\pi(1 - \gamma^2)}{3(1 + \gamma^2)}} \alpha H_0$
Тонко-стенное кольцо (труба)		$\pi d_0 t$ $d_0 = \frac{D + d}{2}$	$\frac{F^3}{8\pi^2 t^2}$	$\frac{F^2}{4\pi t}$	$\sqrt[3]{4\pi^2 t^2 \alpha H_0}$
Квадрат		a^2	$\frac{F^2}{12}$	$\frac{F}{6}$	$\sqrt{12 \alpha H_0}$
Прямоугольник		bh	$\frac{F^3}{12b^2}$	$\frac{F^2}{6b}$	$\sqrt[3]{6b^2 \alpha H_0}$
Двутавр		$bh + 2f$	$\frac{F^3 + 6F^2 f}{12b^2}$ $F = bh$	$\frac{F^2 + 6Ff}{6b}$	$\sqrt[3]{\beta + \sqrt{\beta^2 - f^6}} + \sqrt[3]{\beta - \sqrt{\beta^2 - f^6}} - f$ $\beta = 3b^2 \alpha H_0 - f^3$

Примечание. Здесь приняты следующие обозначения: H_0 – начальный распор в нити; f – площадь полки двутавра; $\alpha = (Iy^{\delta}) / M_z^{\delta}$.

Применение предлагаемой методики покажем на примере расчета нити конечной жесткости, представляющей собой круглую стальную трубу, наружный диаметр $D = 720$ мм, толщина стенки $t = 10$ мм. Труба шарнирно подвешена к двум опорам, расположенным на одном уровне (рис. 2.2).

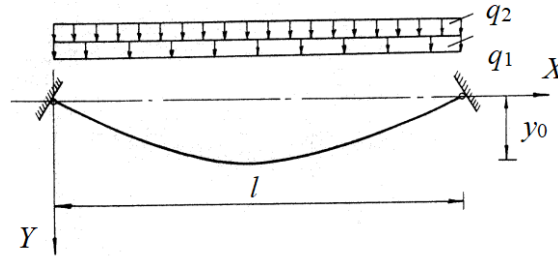


Рис. 2.2. К примеру расчета

Пролет трубы $l = 150$ м. Начальная равномерно распределенная нагрузка (собственный вес трубы) $q_1 = 1,76$ кН/м, дополнительная равномерно распределенная нагрузка $q_2 = 1,961$ кН/м расположена на всем пролете. Стрела провисания нити при начальной нагрузке $y_0 = 6$ м. Модуль упругости материала стенок трубы $E = 20,59 \cdot 10^7$ кН/м². Нить работает с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок.

Определяем H_0 , считая нить недеформируемой,

$$H_0 = \frac{M_{z,x=l/2}^{\delta} (y_{x=l/2}^{\delta} - y_0)}{y_{x=l/2}^{\delta} y_0} = \frac{10350(83,71 - 6)}{83,71 \cdot 6} = 1600,05 \text{ кН.}$$

Вычисляем F_0 по формуле (2.42)

$$F_0 = \sqrt[3]{4\pi^2 t^2 \alpha H_0} = \sqrt[3]{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,01^2 \cdot 11,383 \cdot 10^{-6} \cdot 1600,05} = 0,0416 \text{ м}^2$$

и I_0 по формуле (2.37)

$$I_0 = \frac{F_0^3}{8\pi^2 t^2} = \frac{0,0416^3}{8 \cdot 3,14^2 \cdot 0,01^2} = 90,935 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

Из уравнения (2.25) определяем производную от H по F

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dF} = & \left[\frac{F_0}{H_0} + \frac{25(q_1 + q_2)^2 l^6 E F_0^2}{12 H_0^2 (5 l^2 H_0 + 48 E I_0)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{120(q_1 + q_2)^2 l^6 E^2 F^2 I_0}{H_0^2 (5 l^2 H_0 + 48 E I_0)^3} \right]^{-1} = \left[\frac{0,0416}{1600,05} + \right. \\ & + \frac{25(1,716 + 1,961)^2 \cdot 150^6 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 0,0416^2}{12 \cdot 1600,05^2 (5 \cdot 150^2 \cdot 1600,05 + 48 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4})^2} - \\ & \left. - \frac{120(1,716 + 1,961)^2 \cdot 150^6 \cdot (20,59 \cdot 10^7)^2 \cdot 0,0416^2 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4}}{1600,05^2 (5 \cdot 150^2 \cdot 1600,05 + 48 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4})^3} \right]^{-1} = \\ & = 2527,359 \text{ кН/м}^2. \end{aligned}$$

По формуле (2.34) находим распор в нити

$$H = H_0 + H'_0(F - F_0) = \\ = 1600,05 + 2527,359(0,02231 - 0,0416) = 1551,3 \text{ кН.}$$

При трех членах ряда распор $H = 1583,28$ кН. С увеличением числа членов ряда точность решения практически не изменяется, т. е. уже при трех членах ряда получаем достаточно точный результат.

Изгибающий момент и стрелу провисания в середине пролета нити конечной жесткости определяем по формулам (2.3) и (2.5) соответственно:

$$M_z = \frac{(M_z^\delta)^2}{Hy^\delta + M_z^\delta} = \frac{10350^2}{1583,28 \cdot 83,71 + 10350} = 748,64 \text{ кНм}; \\ y = \frac{M_z^\delta y^\delta}{Hy^\delta + M_z^\delta} = \frac{10350 \cdot 83,71}{1583,28 \cdot 83,71 + 10350} = 6,06 \text{ м.}$$

Напряжения в середине пролета нити находим по известной формуле

$$\sigma = \frac{H}{F} \pm \frac{M_z}{W} = \frac{1583,28}{0,02231 \cdot 10} \pm \frac{748,64}{0,003905 \cdot 10} = \\ = 7096,73 \pm 19171,32 = \begin{cases} +26268,05 & \text{Н/см}^2 \\ -12074,59 & \text{Н/см}^2 \end{cases}.$$

§ 2.4. Учет влияния температурных воздействий

При эксплуатации висячих систем большое влияние на их напряженно-деформированное состояние оказывают температурные воздействия. Изменение температуры на Δt° вызывает изменение длины нити, что, в свою очередь, вызывает изменения стрелы провисания и, следовательно, внутренних усилий (рис. 2.3).

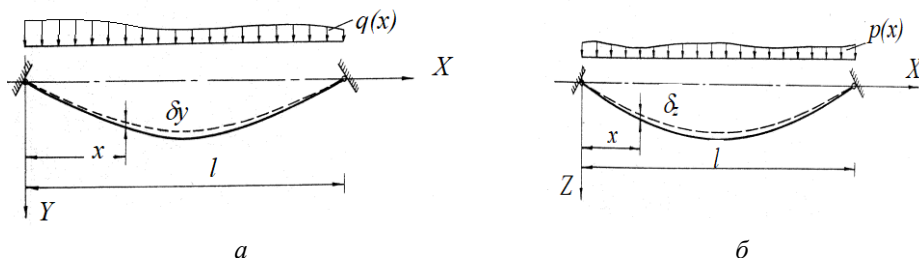


Рис. 2.3. Деформация нити при изменении температуры:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

Определим эти величины. Для этого воспользуемся описанным ранее методом расчета. Только в данном случае вместо независимой переменной F примем приращение температуры Δ_t .

Как уже отмечалось выше, если температура получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное $\delta\Delta_t$, то изменится напряженно-деформированное состояние нити. Распор H получит некоторое приращение δH . В вертикальной плоскости изгибающий момент M_z получит приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения на величину δy . Соответственно в горизонтальной плоскости изгибающий момент M_y получит приращение δM_y , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити ψ – приращение $\delta\psi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δz .

Заметим, что выражения для приращений δy , δz , δM_z и δM_y по-прежнему будут, как в формулах (2.7)–(2.10), а соотношения для приращений δdx , $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ можно записать в виде

$$\delta dx = \frac{\delta H}{EF} dx + \alpha_t \delta\Delta_t dx; \quad (2.43)$$

$$\delta d\varphi = - \frac{(M_z^\delta)^2 y^\delta \delta H}{EI(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} dx; \quad (2.44)$$

$$\delta d\psi = - \frac{(M_y^\delta)^2 z^\delta \delta H}{EI(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + M_y^\delta)} dx, \quad (2.45)$$

где α_t – коэффициент линейного температурного расширения материала нити.

Запишем соотношения, описывающие работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузок $q(x)$ и $p(x)$ на перемещениях δy и δz соответственно и находится по формулам (2.14) и (2.15). Работа внутренних сил состоит из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx

$$U_2^1 = - \int_0^l \left(\frac{\delta H}{EF} + \alpha_t \delta\Delta_t \right) (H + \delta H) dx \quad (2.46)$$

и работы изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ соответственно:

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 y^\delta \delta H}{EI(Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)^2} dx; \quad (2.47)$$

$$U_2^3 = \int_0^l \frac{(M_y^\delta)^4 z^\delta \delta H}{EI(Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + \delta H z^\delta + M_y^\delta)^2} dx. \quad (2.48)$$

Подставляя уравнения (2.14), (2.15) и (2.46)–(2.48) в формулу (2.19), деля полученное выражение почленно на δH и переходя к пределу при $\delta \Delta_t \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, приходим к дифференциальному уравнению, связывающему распор в нити конечной жесткости с изменением температуры

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_t}{dH} + \frac{1}{\alpha_t EF} + \frac{1}{\alpha_t lH} \int_0^l \frac{q(x)M_z^\delta m^2}{(Hm + EIM_z^\delta)^2} dx + \frac{1}{\alpha_t lH} \int_0^l \frac{p(x)M_y^\delta n^2}{(Hn + EIM_y^\delta)^2} dx - \\ - \frac{EI}{\alpha_t lH} \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 m}{(Hm + EIM_z^\delta)^3} dx - \frac{EI}{\alpha_t lH} \int_0^l \frac{(M_y^\delta)^4 n}{(Hn + EIM_y^\delta)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

При этом, как указывалось выше, интегралы, входящие в последнее уравнение, зависят от вида приложенной к нити нагрузки и условий закрепления ее концов. Их значения по-прежнему можно вычислять либо непосредственным интегрированием либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса.

Для решения дифференциального уравнения (2.49) можно воспользоваться двумя способами. При сложных нагружениях (например, равномерно распределенная и несколько сосредоточенных или участковых нагрузок) решить полученное уравнение можно, используя разложение искомой функции в ряд Маклорена

$$H = H_1 + H_1' \Delta_t + \frac{1}{2!} H_1'' \Delta_t^2 + \dots, \quad (2.50)$$

где H_1 – распор в нити при действии начальной и дополнительной нагрузок. Коэффициенты ряда Маклорена получаются путем последовательного дифференцирования уравнения (2.49):

$$H_1' = \frac{dH}{d\Delta_t}; \quad (2.51)$$

$$H_1'' = \frac{\partial}{\partial \Delta_t} \left(\frac{dH}{d\Delta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{dH}{d\Delta_t} \right) \frac{dH}{d\Delta_t}. \quad (2.52)$$

При простых нагружениях решение рассматриваемого уравнения можно получить в общем виде. Например, для случая вертикальной равномерно распределенной нагрузки и шарнирного закрепления концов нити уравнение (2.49) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d\Delta_t}{dH} + \frac{1}{\alpha_t EF} + \\ & + \frac{25q^2 l^6}{12\alpha_t H(5l^2 H + 48EI)^2} - \frac{120q^2 l^6 EI}{\alpha_t H(5l^2 H + 48EI)^3} = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Общий интеграл уравнения (2.53) равен

$$\begin{aligned} \alpha_t \Delta_t = & \frac{\omega}{(48EI)^2} \ln \frac{5l^2 H}{5l^2 H + 48EI} + \\ & + \frac{\omega}{48EI} \frac{5l^2 H + 192EI}{(5l^2 H + 48EI)^2} - \frac{5l^2 H + 48EI}{5l^2 EF} + C, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где $\omega = \frac{5}{12} q^2 l^6$.

Произвольную постоянную интегрирования можно получить, исходя из условия, что при $\Delta_t = 0$ распор $H = H_1$. Затем, подставляя значение C в выражение (2.54), придем к искомому решению, описывающему напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости при изменении температуры.

Следует отметить, что полученные выше решения для нитей конечной жесткости в равной мере описывают поведение и гибкой упругой нити. При этом следует иметь в виду, что зависимости для гибкой нити получаются из соответствующих зависимостей для нити конечной жесткости с учетом условия $I = 0$. Например, для гибкой упругой нити вместо уравнения (2.49) в случае вертикальной нагрузки будем иметь

$$\frac{d\Delta_t}{dH} = -\frac{D}{\alpha_t l H^3} - \frac{1}{\alpha_t EF}. \quad (2.55)$$

Здесь $D = \int_0^l q(x) M_z^6 dx$ – интегральная характеристика нагрузки.

Зависимость (2.55) – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Общий интеграл (2.55) примет вид

$$\Delta_t = \frac{D}{2\alpha_t l H^2} - \frac{H}{\alpha_t EF} - C. \quad (2.56)$$

Произвольную постоянную интегрирования C , как и в случае нити конечной жесткости, определим из условия, что при $\Delta_t = 0$ распор $H = H_1$. Подставляя значение C в выражение (2.56), получим решение рассматриваемой задачи в виде

$$H^3 + \left(\frac{8y_0^2}{3l^2} EF + \alpha_l \Delta_l EF \right) H^2 = \frac{DEF}{2l}. \quad (2.57)$$

Если здесь принять, что $\Delta_l = 0$, то уравнение (2.57) преобразуется в известное соотношение, полученное в работе [158] для гибкой упругой нити.

§ 2.5. Учет влияния деформации основания

Большое влияние на напряженно-деформированное состояние висячих систем повышенной жесткости, кроме изменения температуры окружающей среды, может оказать также деформация основания. Допустим, что в результате такой деформации одна из опор нити сместилась по оси X на величину u , по оси Y – на v и по оси Z – на w (рис. 2.4).

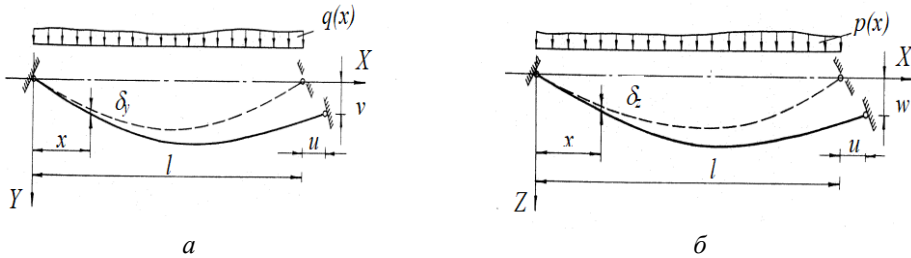


Рис. 2.4. Деформация нити при смещении и осадке опоры:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

Суммарное изменение пролета нити составит

$$\Delta_l = u + \frac{v^2}{l} + \frac{w^2}{l}, \quad (2.58)$$

а длина пролета будет равна $l + \Delta_l$. В связи с этим интегрирование при определении работ внешних и внутренних сил в данном случае должно быть распространено не на длину l , а на новую длину $l + \Delta_l$. Но, как отмечено в работе [111], изменение пролета Δ_l очень мало по сравнению с l и интегрировать можно по длине l .

Определим приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости, возникающие в результате увеличения пролета нити на очень малую, но конечную величину $\delta\Delta_l$. Как и в случае с изменившейся температурой, соотношения для приращений δy , δz , δM_z , δM_y , $\delta d\varphi$, $\delta d\psi$ примем в виде формул (2.7)–(2.10), (2.44), (2.45). Упругое удлинение бесконечно малого элемента нити вычисляется по формуле

$$\delta dx = \frac{\delta H}{EF} dx. \quad (2.59)$$

Работу внешней нагрузки запишем в виде формул (2.14) и (2.15), а для работы распора $H + \delta H$ на пролете Δ_l будем иметь

$$U_1^3 = (H + \delta H) \delta \Delta_l. \quad (2.60)$$

Работу действующих в элементе dx изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ запишем в виде уравнений (2.47) и (2.48), а работу усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx выразим следующим образом:

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{\delta H}{EF} (H + \delta H) dx. \quad (2.61)$$

Подставляя эти выражения для работ внешних и внутренних сил в уравнение (2.19), получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \frac{q(x) M_z^\delta (y^\delta)^2 \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} dx - \\ & - \int_0^l \frac{p(x) M_y^\delta (z^\delta)^2 \delta H}{(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + M_y^\delta)} dx + \\ & + (H + \delta H) \delta \Delta_l - \int_0^l \frac{\delta H}{EF} (H + \delta H) dx + \\ & + \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 y^\delta \delta H}{EI (Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)^2} dx + \\ & + \int_0^l \frac{(M_y^\delta)^4 z^\delta \delta H}{EI (Hz^\delta + M_y^\delta)(Hz^\delta + \delta Hz^\delta + M_y^\delta)^2} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Разделив уравнение (2.62) почленно на δH и затем перейдя к пределу при $\delta \Delta_l \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, получим дифференциальную зависимость между распором и приращением пролета упругой нити конечной жесткости

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_l}{dH} - \frac{l}{EF} - \frac{1}{H} \int_0^l \frac{q(x) M_z^\delta m^2}{(Hm + EIM_z^\delta)^2} dx - \frac{1}{H} \int_0^l \frac{p(x) M_y^\delta n^2}{(Hn + EIM_y^\delta)^2} dx - \\ - \frac{EI}{H} \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 m}{(Hm + EIM_z^\delta)^3} dx - \frac{EI}{H} \int_0^l \frac{(M_y^\delta)^4 n}{(Hn + EIM_y^\delta)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Решить уравнение (2.63), как и в предыдущем случае, можно двумя способами: численным (разложением искомой функции в ряд Маклорена) или аналитическим.

Если в полученном уравнении принять, что $p(x) = 0$ и $I = 0$, то придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Delta_l}{dH} = \frac{D}{H^3} + \frac{l}{EF}. \quad (2.64)$$

Полученная зависимость является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, общий интеграл которого имеет вид

$$\Delta_l = -\frac{D}{2H^2} + \frac{Hl}{EF} + C. \quad (2.65)$$

Произвольную постоянную интегрирования в уравнении (2.65) определим из условия, что при $\Delta_l = 0$ распор $H = H_1$. Затем, подставляя значение произвольной постоянной интегрирования в выражение (2.65), получим

$$H^3 + EF \left(\frac{8y_0^2}{3l^2} - \frac{\Delta_l}{l} \right) H^2 = \frac{DEF}{2l}. \quad (2.66)$$

Отметим, что здесь, как и в случае с изменяющейся температурой, при $\Delta_l = 0$ уравнение (2.66) преобразуется в известное соотношение [158] для гибкой упругой нити, нагруженной произвольной вертикальной нагрузкой.

§ 2.6. Расчет многопролетной гибкой нити на упруго-податливых опорах

Задачи, связанные с расчетом многопролетных нитей, часто возникают при проектировании покрытий линейно-протяженных промышленных зданий и инженерных сооружений типа трубопроводных переходов, висячих мостов и т.п. Рассмотрим решение указанной задачи.

Предположим, что многопролетная нить конечной жесткости с поперечным сечением F , моментом инерции I , модулем упругости E , пролетами $l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_n$ подвешена к упруго-податливым опорам с коэффициентами жесткости $k_0, k_1, \dots, k_i, \dots, k_n$ и работает с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Известно также, что нить нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия. Выберем, как и ранее, в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а искомой функции – распор H .

Если площадь поперечного сечения увеличится на бесконечно малую величину δF , то изменится напряженное состояние нити и ее геометрия. Тогда в i -м пролете распор H_i получит некоторое приращение δH_i , изгибающий момент M_{zi} – приращение δM_{zi} , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ_i – приращение $\delta \varphi_i$, а нить переместится из положения равновесия на величину δy_i (рис. 2.5). При этом опоры получают некоторые перемещения $\delta \Delta_{i-1}$ и $\delta \Delta_i$. Последние, хотя и будут небольшими, но могут оказать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние нити, в частности, на перераспределение усилий в смежных пролетах.

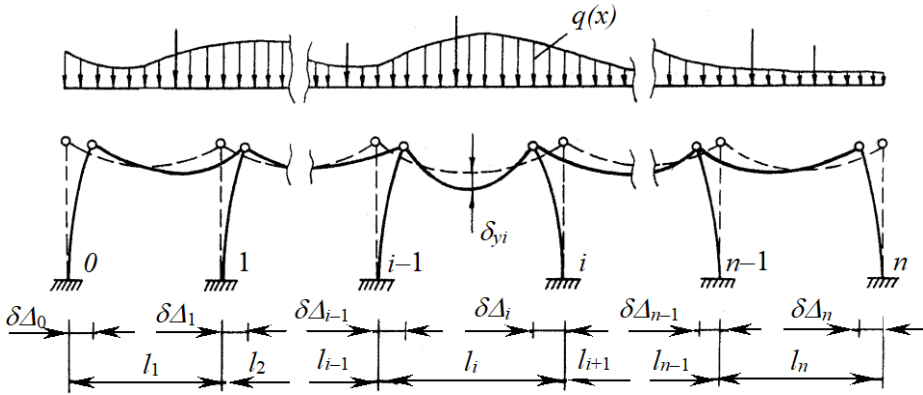


Рис. 2.5. К расчету многопролетной нити на упруго-податливых опорах

Представим приращения усилий и ординат провисания нити в виде

$$\delta y_i = - \frac{M_{zi}^{\delta} (y_i^{\delta})^2 \delta H_i}{(H_i y_i^{\delta} + \delta H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta}) (H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta})}; \quad (2.67)$$

$$\delta M_{zi} = - \frac{(M_{zi}^{\delta})^2 y_i^{\delta} \delta H_i}{(H_i y_i^{\delta} + \delta H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta}) (H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta})}; \quad (2.68)$$

$$\delta dx_i = \frac{E_i F_i \delta H_i - H_i E_i \delta F_i}{E_i F_i (E_i F_i + E_i \delta F_i)} dx; \quad (2.69)$$

$$\delta d\varphi_i = - \frac{(M_{zi}^{\delta})^2 (y_i^{\delta} \delta H_i E_i I_i + y_i^{\delta} H_i E_i \delta I_i + y_i^{\delta} \delta H_i E_i \delta I_i + M_{zi}^{\delta} E_i \delta I_i)}{E_i I_i (E_i I_i + E_i \delta I_i) (H_i y_i^{\delta} + \delta H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta}) (H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta})} dx. \quad (2.70)$$

Виртуальные перемещения опор могут быть записаны следующим образом:

$$\delta \Delta_{i-1} = \pm k_{i-1}^{-1} (\delta H_{i-1} - \delta H_i), \quad (2.71)$$

$$\delta \Delta_i = \pm k_i^{-1} (\delta H_i - \delta H_{i+1}), \quad (2.72)$$

при этом знак «+» соответствует перемещению опоры наружу, а знак «-» – внутрь пролета.

Определим работу внешних сил, т. е. нагрузки $q_i(x)$ на перемещениях δy_i

$$U_{li}^1 = - \int_0^{l_i} \frac{q_i(x) M_{zi}^{\delta} (y_i^{\delta})^2 \delta H_i}{(H_i y_i^{\delta} + \delta H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta}) (H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta})} dx \quad (2.73)$$

и возникающих в упруго-податливых опорах реакций на виртуальных перемещениях опор по направлению этих реакций

$$U_{li}^2 = \pm k_{i-1}^{-1} (\delta H_{i-1} - \delta H_i) (H_{i-1} + \delta H_{i-1} - H_i - \delta H_i) \pm \pm k_i^{-1} (\delta H_i - \delta H_{i+1}) (H_i + \delta H_i - H_{i+1} - \delta H_{i+1}). \quad (2.74)$$

Для работы внутренних сил имеем

$$U_{2i}^1 = - \int_0^{l_i} \frac{(E_i F_i \delta H_i - H_i E_i \delta F_i) (H_i + \delta H_i)}{E_i F_i (E_i F_i + E_i \delta F_i)} dx; \quad (2.75)$$

$$U_{2i}^2 = \int_0^{l_i} \frac{(M_{zi}^{\delta})^4 (y_i^{\delta} \delta H_i E_i I_i + y_i^{\delta} H_i E_i \delta I_i + y_i^{\delta} \delta H_i E_i \delta I_i + M_{zi}^{\delta} E_i \delta I_i)}{E_i I_i (E_i I_i + E_i \delta I_i) (H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta}) (H_i y_i^{\delta} + \delta H_i y_i^{\delta} + M_{zi}^{\delta})^2} dx. \quad (2.76)$$

Применим для решения задачи принцип Лагранжа. Подставляя (2.73)–(2.76) в (2.19) и переходя в полученном выражении к пределу при $\delta F_i \rightarrow 0$ и $\delta H_i \rightarrow 0$, после некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению, описывающему напряженно-деформированное состояние многопролетной нити конечной жесткости на упруго-податливых опорах

$$\begin{aligned} \frac{dF_i}{dH_i} - \frac{F_i}{H_i} + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i} (\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}) + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}) - \\ - \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} \int_0^{l_i} \frac{q_i(x) M_{zi}^{\delta} m_i^2}{(H_i m_i + E_i I_i M_{zi}^{\delta})^2} dx + \\ + \frac{E_i^2 F_i^2 I_i}{l_i H_i^2} \int_0^{l_i} \frac{(M_{zi}^{\delta})^4 m_i}{(H_i m_i + E_i I_i M_{zi}^{\delta})^3} dx = 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

где, как и прежде, $m_i = E_i I_i y_i^{\delta}$.

Записав выражение (2.77) для каждого пролета, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений. В результате решения данной системы одним из численных методов [256] найдем искомые значения распоров $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$. Ординаты провисания и изгибающие моменты в пролетах многопролетной нити определяются из зависимостей (2.3) и (2.5).

Отметим, что по аналогии с уравнением трех моментов соотношение (2.77) может быть названо уравнением трех распоров.

Решение задачи для многопролетной нити конечной жесткости, подвешенной на упруго-податливых опорах, можно получить из (2.77), если принять количество пролетов $i = 1$. Таким образом, в данном случае будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} + \frac{EF^2}{lH} (\pm k_0^{-1} \pm k_1^{-1}) - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^\delta m^2}{(Hm + EIM_z^\delta)^2} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^4 m}{(Hm + EIM_z^\delta)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

В свою очередь, если в уравнении (2.77) положить, что $I_i = 0$, то придем к решению для многопролетной гибкой нити на упруго-податливых опорах

$$\begin{aligned} \frac{dF_i}{dH_i} - \frac{F_i}{H_i} + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i} (\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}) + \\ + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}) - \frac{D_i E_i F_i^2}{l_i H_i^4} = 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

где по-прежнему D_i – интегральная характеристика нагрузки. Эта зависимость является одним из частных случаев дифференциального уравнения Бернулли. Общий интеграл уравнения (2.79) будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_i F_i} = \frac{C}{H_i} + \frac{D_i}{2l_i H_i^3} + \frac{\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}}{l_i} + \\ + \frac{\ln H_i}{l_i H_i} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Произвольную постоянную интегрирования C найдем из условия, что при $E_i F_i = \infty$ и $k_{i-1} = k_i = \infty$ распор в нити определяется по формуле

$$H_i = \frac{\sqrt{3l_i D_i}}{4f_i}, \quad (2.81)$$

где f_i – стрела провисания нерастяжимой гибкой нити в середине пролета при равномерно распределенной нагрузке.

Подставив соотношение (2.81) в (2.80), определим C . Затем, подставив найденное значение произвольной постоянной в выражение (2.80), получим

$$\begin{aligned} H_i^3 + \frac{8E_i F_i l_i + 3n_i^2 (\pm k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \pm k_i^{-1} H_{i+1}) \ln H_i}{3n_i^2 [l_i + E_i F_i (\mp k_{i-1}^{-1} \mp k_i^{-1})]} H_i^2 = \\ = \frac{D_i E_i F_i}{2[l_i + E_i F_i (\mp k_{i-1}^{-1} \mp k_i^{-1})]}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Здесь принято, что $n_i = l_i / f_i$ – коэффициент, который вычисляется без учета упругих деформаций нити, т. е. по ее исходным геометрическим размерам до нагружения.

Если в полученном уравнении положить, что $i = 1$, то придем к случаю

гибкой нити на упруго-податливых опорах, для которого выражение (2.82) запишется в виде

$$H^3 + \frac{8EF l}{3n^2 [l + EF(\mp k_0^{-1} \mp k_1^{-1})]} H^2 = \frac{DEF}{2[l + EF(\mp k_0^{-1} \mp k_1^{-1})]}. \quad (2.83)$$

Этот результат был получен впервые Е.М.Сидоровичем [225].

§ 2.7. Расчет двухпоясной висячей системы

Висячие системы с развитым в вертикальной плоскости поперечным сечением (висячие фермы), сохраняя все традиционные преимущества висячих конструкций в части рационального использования прочностных свойств материалов, способности перекрывать практически неограниченные пролеты, архитектурной выразительности сооружений в целом и пр., вместе с тем обладают повышенной жесткостью на изгиб в плоскости провисания. Последнее позволяет значительно уменьшить кинематические перемещения при действии сосредоточенных и несимметричных нагрузок. Висячие фермы обычно различают по виду воспринимаемых поясами усилий (гибкие или конечной жесткости) и по типу решетки (соединительных элементов). Если различие типа соединительных элементов практически не сказывается на методах расчета висячих ферм, поскольку распорки или подвески принимают обычно абсолютно жесткими, то различие типов поясов предопределяет и различные методы статического расчета рассматриваемых конструкций [84]. Расчет висячих ферм с гибкими поясами достаточно полно представлен в работах [138, 147, 189]. Однако расчет ферм с одним или двумя поясами, выполненными из нитей конечной жесткости, еще не получил широкого применения.

Рассмотрим висячую ферму, пояса которой выполнены из нитей конечной жесткости и связаны между собой по длине посредством подвесок или распорок (рис. 2.6). При рассмотрении напряженно-деформированного состояния такой системы примем в дополнение к предпосылкам расчета нитей конечной жесткости следующие обязательные условия:

1. Соединительные элементы являются абсолютно жесткими, что исключает взаимное смещение поясов фермы в горизонтальной плоскости.
2. Связи между поясами расположены непрерывно по длине фермы, что позволяет использовать дифференциальную, а не дискретную форму записи уравнений равновесия.

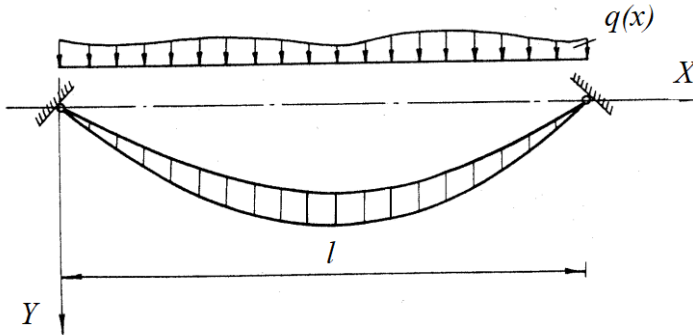


Рис. 2.6. К расчету двухпоясной висячей системы

Геометрию висячей фермы определяет расстояние между ее поясами $h = f(x)$, например, при $h = \text{const}$ имеем систему с параллельными поясами, в противном случае – с непараллельными. Некоторая линия $y = f(x)$ является осью фермы, если для нее соблюдается условие

$$F_1 h_1 - F_2 h_2 = 0, \quad (2.84)$$

где F_1 и F_2 – площади поперечных сечений соответственно нижнего и верхнего поясов; h_1 и h_2 – расстояния от нейтральной оси до осей соответствующих поясов.

Расчетную схему висячей фермы примем в виде нити конечной жесткости с приведенными характеристиками поперечного сечения. В общем случае приведенная изгибная жесткость фермы с непараллельными поясами будет величиной переменной

$$EI(x) = E_1 I_1 + E_1 F_1 h_1^2 + E_2 I_2 + E_2 F_2 h_2^2, \quad (2.85)$$

а приведенная жесткость на растяжение – постоянной

$$EF = E_1 F_1 + E_2 F_2, \quad (2.86)$$

где $E_1 I_1$ и $E_2 I_2$ – жесткость на изгиб соответственно нижнего и верхнего поясов фермы; E_1 и E_2 – модули упругости материала поясов.

Применяя в дальнейшем к расчету висячей фермы, работающей с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, изложенный ранее подход, получим для определения распора в системе дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x) M_z^\delta m^2}{(Hm + EI(x) M_z^\delta)^2} dx +$$

$$+ \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{EI(x)(M_z^\delta)^4 m}{(Hm + EI(x)M_z^\delta)^3} dx = 0. \quad (2.87)$$

При работе фермы без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной вертикальных нагрузок уравнение для определения распора имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^\delta m [m + EI(x)y_0]}{(Hm + EI(x)M_z^\delta)^2} dx + \\ + \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{EI(x)(M_z^\delta)^3 (M_z^\delta - Hy_0) [m + EI(x)y_0]}{(Hm + EI(x)M_z^\delta)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Методика решения дифференциальных уравнений (2.87) и (2.88) аналогична приведенной ранее методике решения таких уравнений для нитей конечной жесткости.

Прогибы и изгибающие моменты в расчетной нити определяются из выражений, получаемых на основе статических соотношений (2.3), (2.5) или (2.29), (2.31) в зависимости от условий работы нити.

Перейдем к определению усилий в поясах фермы. Запишем выражения для распора и изгибающего момента, действующих в висячей системе (рис. 2.7), в виде

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2, \\ M_z &= M_{z1} + H_1 h_1 + M_{z2} - H_2 h_2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

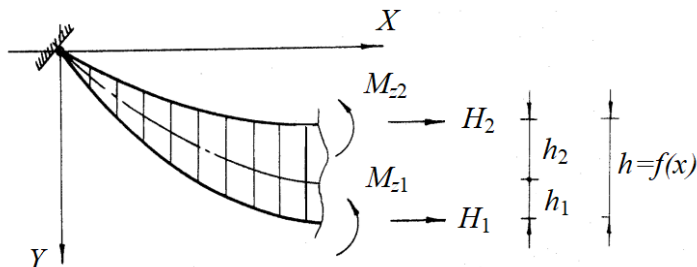


Рис. 2.7. Схема усилий, действующих в висячей системе

В уравнение для M_z входят неизвестные изгибающие моменты, действующие в поясах фермы. Для их определения воспользуемся условием совместности деформаций для поясов отдельно и фермы в целом

$$y(x) = y_1(x) = y_2(x). \quad (2.90)$$

Пользуясь соотношением (2.2), с учетом условия (2.90) для висячей фермы, работающей с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных

нагрузок, получим

$$M_{z1} = M_{z1}^{\delta} \frac{y}{y_1^{\delta}}, \quad M_{z2} = M_{z2}^{\delta} \frac{y}{y_2^{\delta}}. \quad (2.91)$$

Далее, подставляя выражения (2.91) в (2.89) и приводя подобные члены, получаем для определения распоров в поясах висячей фермы следующие зависимости:

$$\begin{aligned} H_1 &= H \frac{h_2}{h} + \frac{M_z}{h} - \frac{yM_{z1}^{\delta}}{hy_1^{\delta}} - \frac{yM_{z2}^{\delta}}{hy_2^{\delta}}, \\ H_2 &= H \frac{h_1}{h} - \frac{M_z}{h} + \frac{yM_{z1}^{\delta}}{hy_1^{\delta}} + \frac{yM_{z2}^{\delta}}{hy_2^{\delta}}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Из анализа полученных соотношений видно, что применение нитей конечной жесткости в висячих фермах приводит к уменьшению распора в нижнем и увеличению – в верхнем поясах.

Аналогично можно получить расчетные зависимости и для висячей фермы, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной вертикальных нагрузок. Следует также отметить, что напряженно-деформированное состояние висячих ферм с одним или двумя гибкими поясами описывается уравнениями (2.91) и (2.92). Только в этом случае необходимо учесть, что изгибающий момент, определяемый по формулам (2.91), для соответствующего пояса равен нулю. В частном случае висячей фермы с двумя гибкими поясами из уравнений (2.92) получается решение, приведенное в работе [84].

При действии на висячую ферму горизонтальной нагрузки рассмотрим два основных случая граничных условий:

шарнирное опирание на опорах (при свободном повороте системы от вертикальной и горизонтальной нагрузок);

жесткое защемление на опорах.

В первом случае граничных условий висячая ферма при действии горизонтальной нагрузки повернется относительно вертикальной оси на угол η (рис. 2.8, а), который можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{P}{q_1 + q_2}, \quad (2.93)$$

при этом равнодействующая нагрузок по-прежнему будет действовать в плоскости провисания висячей системы, которая, однако, уже не будет вертикальной. Она определяется по формуле (рис. 2.8, б)

$$R = \sqrt{(q_1 + q_2)^2 + P^2}. \quad (2.94)$$

В данном случае определение усилий в висячей ферме производится

аналогично случаю, когда на нее действует начальная и дополнительная вертикальные нагрузки. Только теперь за начальную надо взять сумму начальной и дополнительной вертикальных нагрузок $q_1 + q_2$, а за дополнительную – разность между равнодействующей и начальной нагрузками $R - (q_1 + q_2)$.

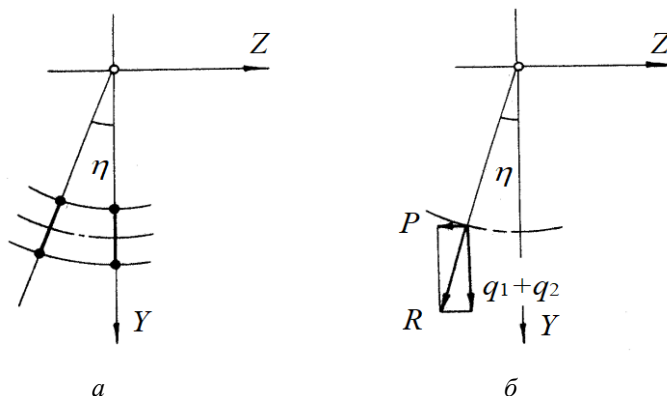


Рис. 2.8. К расчету висячей системы на горизонтальную нагрузку при шарнирном закреплении ее концов:
 а – деформирование системы; б – нагрузки на систему

Во втором случае граничных условий висячая ферма под действием горизонтальной нагрузки искривляется в пространстве и задача резко усложняется. Помимо изменения усилий в висячей системе меняется ее изгибная жесткость как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях, являясь функцией угла отклонения висячей системы от вертикальной плоскости. В этом случае для определения усилий в ферме приходится использовать либо метод последовательных приближений [80, 256] либо какой-нибудь численный метод, например, МКЭ [59, 219].

§ 2.8. Оценка предпосылок расчета и принятых допущений

Положенные в основу настоящей теории исходные предпосылки можно условно разделить на три группы:

1 – связанные с условиями работы рассматриваемых конструкций (пологость нити, упругая работа материала, ограничение пределов отношения напряжений изгиба к напряжениям растяжения);

2 – связанные с характером деформирования поперечных сечений нити конечной жесткости (гипотеза плоских сечений, одноосное напряженное состояние продольных волокон нити);

3 – отражающие характерные особенности работы нитей конечной жесткости (пропорциональная зависимость между прогибами и изгибающими моментами в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке).

Первые две группы являются общепринятыми и широко используются

при построении различных теорий расчета балок, гибких нитей и нитей конечной жесткости. Их область применения и вносимая в результаты расчетов погрешность подробно исследована многими авторами [55, 111, 137, 165, 210, 244, 257]. В этих работах показано, что использование указанных допущений обеспечивает для параметров напряженно-деформированного состояния рассчитываемых конструкций весьма точные результаты. Поэтому в настоящей работе оценка погрешности данных предпосылок не производилась.

Что касается третьей группы допущений, то следует отметить, что применительно к висячим системам повышенной жесткости какие-либо исследования погрешности ранее практически не выполнялись. Между тем этот вопрос сам по себе представляет значительный интерес.

Оценка погрешности допущения о пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке была проведена путем сравнения с результатами, полученными точным способом для различных случаев нагружения нитей конечной жесткости. Были выбраны варианты действия равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной силы, приложенной посередине пролета, т. е. самая благоприятная и самая неблагоприятная схемы нагружения.

В работе [244] С.П.Тимошенко для разных нагрузок вывел соотношения, характеризующие отличие параметров напряженно-деформированного состояния растянуто-изгибаемого стержня от аналогичных параметров балки без осевой силы. Например, для равномерно распределенной нагрузки эта зависимость имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{y}{y^{\delta}} = \frac{\frac{1}{chu} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4}, \quad (2.95)$$

$$\text{где } u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}}.$$

В соответствии с нашим подходом эту же зависимость, пользуясь формулами (2.1) и (2.2), в которые вместо f^{δ} и M^{δ} подставляются их значения, после некоторых преобразований можно представить так:

$$\varphi'_1 = \frac{y}{y^{\delta}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{12}u^2}. \quad (2.96)$$

Аналогично для случая сосредоточенной силы, приложенной посередине пролета, вместо формулы (2.95) имеем [244]

$$\varphi_2 = \frac{y}{y^{\delta}} = \frac{u - \text{th}u}{\frac{1}{3}u^3}, \quad (2.97)$$

а соотношение (2.96) можно записать в виде

$$\varphi'_2 = \frac{y}{y^{\delta}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}u^2}. \quad (2.98)$$

Величины φ_1 и φ'_1 , вычисленные для ряда значений u , приведены в табл. 2.2. В последней графе табл. 2.2 приведены погрешности при определении параметров напряженно-деформированного состояния $\Delta\varphi_1$. Это же решение иллюстрируется рис. 2.9.

Таблица 2.2

u	φ_1	φ'_1 ,	$\Delta\varphi_1 = \frac{\varphi'_1 - \varphi_1}{\varphi_1} 100\%$
0	1	1	0
1	0,7107	0,7059	– 0,67
2	0,3797	0,3750	– 1,25
3	0,2133	0,2105	– 1,29
4	0,1319	0,1304	– 1,14
5	0,0884	0,0876	– 0,94
6	0,0629	0,0625	– 0,75
7	0,0469	0,0467	– 0,61
8	0,0363	0,0362	– 0,48
9	0,0289	0,0288	– 0,41
10	0,0235	0,0234	– 0,33

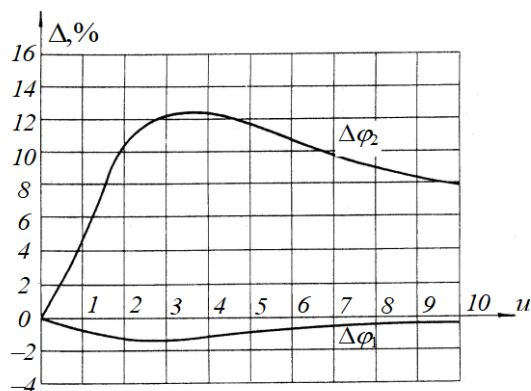


Рис. 2.9. Зависимость между погрешностью исходных предпосылок и параметром u для различных случаев нагружения нити ($\Delta\varphi_1$ – распределенная нагрузка, $\Delta\varphi_2$ – сосредоточенная сила)

Результаты оценки погрешности при определении параметров напря-

женно-деформированного состояния $\Delta\varphi_2$ приведены в табл. 2.3 и показаны на рис. 2.9. Как видно из графика, кривые $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ с увеличением параметра u асимптотически стремятся к нулю.

Таблица 2.3

u	φ_2	φ'_2	$\Delta\varphi_2 = \frac{\varphi'_2 - \varphi_2}{\varphi_2} 100\%$
0	1	1	0
1	0,7152	0,7500	4,86
2	0,3885	0,4286	10,32
3	0,2228	0,2500	12,21
4	0,1407	0,1579	12,22
5	0,0960	0,1071	11,56
6	0,0695	0,0769	10,64
7	0,0525	0,0577	9,91
8	0,0411	0,0447	9,02
9	0,0329	0,0357	8,51
10	0,0269	0,0291	8,12

Из анализа полученных результатов видно, что максимальная погрешность при вычислении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости с использованием формул (2.1) и (2.2) наблюдается, как этого и следовало ожидать, при действии сосредоточенной силы и составляет 12,22% в сторону преувеличения. Причем отрезок, на котором погрешность превышает 10%, представляет собой достаточно узкий интервал изменения параметра u – от 2 до 6,5. При действии же равномерно распределенной нагрузки наибольшая возможная погрешность равняется 1,29%. Следует иметь в виду, что ошибка производится в сторону преуменьшения результатов. А поскольку в практических задачах по расчету висячих конструкций схема нагружения нити представляет собой сочетание разнотиповых нагрузок (как правило, три-пять распределенных и несколько относительно не очень больших сосредоточенных), то реальная погрешность в результате их взаимоналожения всегда будет на много меньше максимальной. Кроме того у реальных висячих систем параметр u в большинстве случаев изменяется в пределах $6 \leq u \leq 14$ [111, 112, 165, 295]. Таким образом, как видно из табл. 2.2, при указанных значениях u даже максимальная ошибка в определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости очень мала. Это свидетельствует не только о высокой степени точности исходных предпосылок (2.1) и (2.2), но и о точности полученного решения в целом.

Заметим также, что в методах расчета как гибких нитей, так и нитей конечной жесткости для определения распора применяется в основном уравнение неразрывности деформаций, связывающее длины нити до и после прило-

жения дополнительной нагрузки с упругим удлинением ее, вызванным этой нагрузкой [111, 167, 219]. При этом кроме принятых нами исходных предположений используют еще два допущения: вместо точных выражений длины и упругого удлинения нити принимаются приближенные значения, полученные разложением их в ряд Тейлора с удержанием только двух первых членов этого ряда. Вносимая этими допущениями погрешность, хотя и невелика, но, как показано в работах [111, 157, 303], составляет при действии равномерно распределенной нагрузки от 8,3% при $l/y_0 = 8$ до, например, 2,1% при $l/y_0 = 16$ в сторону преувеличения. Поэтому общая погрешность еще несколько увеличивается.

В предлагаемой теории эти два допущения не используются, поскольку статическая неопределимость относительно распора раскрывается с помощью принципа возможных перемещений. При этом, как уже отмечалось выше, принцип Лагранжа используется в строгой постановке, что приводит задачу не к алгебраическим уравнениям, а к дифференциальным зависимостям. Последние в отличие от имеющихся решений дают более точные результаты при определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости.

§ 2.9. Расчет нитей конечной жесткости с помощью рядов Фурье

Деформирование нитей конечной жесткости с учетом изгиба от начальной нагрузки. При рассмотрении деформирования нитей конечной жесткости иногда очень удобно представить кривую провисания нити в виде ряда Фурье. Использование такого подхода имеет то преимущество, что позволяет накладывать минимальные ограничения на гладкость разрешающих функций и приводит к единому для всего пролета математическому выражению изогнутой оси нити. Последнее позволяет свести решение к простым расчетным зависимостям, весьма удобным для практического применения [57].

Будем считать, что задана нить конечной жесткости с поперечным сечением F , моментом инерции I , модулем упругости E и шарнирным закреплением на опорах. Известно также, что пролет нити l , начальная длина L_0 , уравнение кривой провисания в исходном состоянии $y_0(x)$, а нить работает с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, являющихся произвольными непрерывными или прерывными функциями координаты x .

В соответствии с принципом возможных перемещений равновесное состояние нити конечной жесткости описывается уравнением (2.19), которое может быть записано в виде

$$\delta \mathcal{E} = \delta W - \delta A = 0, \quad (2.99)$$

где $\delta \mathcal{E}$ представляет собой вариацию полной энергии нити, состоящую из двух слагаемых: δW – вариация потенциальной энергии упругой деформации при каком-либо возможном перемещении нити конечной жесткости из положения равновесия и δA – виртуальная работа внешних сил на этом же пере-

мещении. Здесь было учтено, что работа внутренних сил на возможном перемещении равна взятой со знаком минус вариации потенциальной энергии упругой деформации.

На основании работ [56, 245] для потенциальной энергии деформации нити имеем выражение

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right]^2 + \\ + \int_0^l M_{z0} \frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} \right]^2 dx, \quad (2.100)$$

где H_0 и M_{z0} – соответственно распор и изгибающий момент в нити, находящейся под действием начальной нагрузки; $y(x)$ – уравнение кривой провисания в деформированном состоянии; EF и EI – жесткость нити соответственно на растяжение и изгиб; $\beta = L_0 - l$. Первый и третий члены в правой части уравнения (2.100) представляют собой приращение потенциальной энергии от усилий в начальном состоянии на соответствующих перемещениях, вызванных дополнительной нагрузкой, а второй и четвертый – увеличение потенциальной энергии нити при растяжении и изгибе.

Работу внешних сил определим из соотношения

$$A = \int_0^l q(x)[y(x) - y_0(x)]dx, \quad (2.101)$$

где $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ – сумма начальной и дополнительной нагрузок.

Решение поставленной вариационной задачи о минимуме функционала полной энергии нити конечной жесткости выполним так называемым прямым методом [257]. Для этого представим функцию кривой провисания нити в исходном и деформированном состояниях в виде рядов Фурье по синусам:

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad (2.102)$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.103)$$

Такое представление отличается тем, что входящие в него функции непосредственно удовлетворяют граничным условиям задачи, т. е. при $x = 0$ и $x = l$ величины $y(x)$ и $d^2y(x)/dx^2$ обращаются в нуль и при правильном выборе коэффициентов a_i ($i = 1, \infty$) позволяют представить деформированную ось нити при любой нагрузке. После подстановки соотношений (2.102) и (2.103) в функционал полной энергии $\mathcal{E}[y(x)]$ последний преобразуется в функцию неизвестных коэффициентов разложения a_i ($i = 1, \infty$), слагаемые которого бу-

дуг выглядеть так:

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right]^2 + \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left[a_n^2 - (a_n^0)^2 \right]; \quad (2.104)$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} h_n (a_n - a_n^0), \quad (2.105)$$

где $\frac{2}{l} h_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ – коэффициенты разложения внешней нагрузки в ряд Фурье по синусам.

Заметим, что при выводе соотношения (2.104) вместо M_0 было принято его представление через вторую производную функции прогиба нити конечной жесткости в начальном состоянии.

Поскольку в данном случае полная энергия нити оказывается зависящей от параметров прогиба a_n , то вариацию $\delta \mathcal{E}$ можно представить как сумму вариаций, соответствующих возможным изменениям параметров a_n

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_n} \delta a_n. \quad (2.106)$$

Так как рассматриваемые нами деформированные состояния являются равновесными, то вариация $\delta \mathcal{E}$ в соответствии с (2.99) должна быть равна нулю

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_n} \delta a_n = 0. \quad (2.107)$$

Но вариации δa_n можно считать независимыми одна от другой, поэтому равенство (2.107) будет иметь место, если каждый из множителей при δa_n будет равен нулю, а именно

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_n} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.108)$$

Другими словами, отыскание коэффициентов a_i производится из условий минимизации функции $\mathcal{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \frac{i\pi x}{l} \right]$, представленной в виде (2.99).

Указанные условия выражаются соотношением (2.108) и представляют собой бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений вида

$$a_n = \frac{2lh_n}{n^2 \pi^2 (H_0 + S + n^2 P_{кр})}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.109)$$

где $S = \frac{\pi^2 EF}{4lL_0} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 - \frac{EF\beta}{L_0}$ – приращение распора в нити конечной жесткости от дополнительной нагрузки; $P_{кр} = \pi^2 EI/l^2$ – эйлерова сила для балки с шарнирно опертыми концами.

Введем следующие обозначения:

$$u^2 = \frac{H}{P_{кр}}, \quad \alpha^2 = \frac{\pi^8 r^2 E^2 I^2 L_0}{l^7}, \quad (2.110)$$

где $H = H_0 + S$ – распор; r – радиус инерции поперечного сечения нити.

Учитывая при преобразовании выражения (2.109) введенные обозначения (2.110), получим уравнение для определения параметра u

$$\alpha^2 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{кр}} \right) + \alpha^2 \frac{EF\beta}{P_{кр} L_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^2 (u^2 + n^2)^2}. \quad (2.111)$$

Перепишем уравнение (2.111) в несколько ином виде

$$\alpha^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{кр}} \right) + \alpha^2 \frac{EF\beta}{P_{кр} L_0} u^4 = R - G(u) + \frac{u}{2} G'(u). \quad (2.112)$$

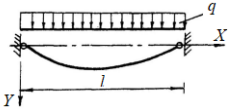
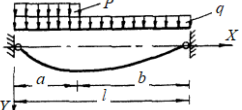
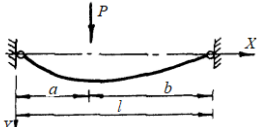
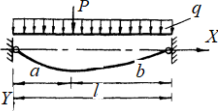
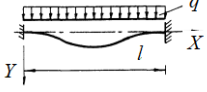
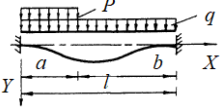
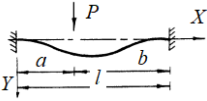
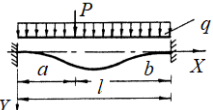
Здесь приняты следующие обозначения:

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2}; \quad (2.113)$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n^2, \quad (2.114)$$

причем под функцией R , по аналогии с [111, 165], понимается характерная функция нагрузки. При этом необходимо отметить, что если функция внешней нагрузки $q(x)$ не является непрерывной на всем пролете, то интегралы, определяющие коэффициенты разложения в выражении для R , вычисляются отдельно на каждом интервале, где функция нагрузки непрерывна, а результаты суммируются. Если нагрузка представлена в виде сосредоточенных сил, то интегралы заменяются суммами из произведений этих сил на соответствующие значения тригонометрических функций. Значения R при шарнирном и жестком закреплении концов нити на опорах и наиболее распространенных типах нагружения приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Схема нагружения	$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n^2$
	$R = \frac{\pi^2 q^2 l^2}{24}$
	$R = \frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q p a^2}{12l} (l + 2b) + \frac{\pi^2 p^2 a^3}{24l^2} (l + 3b)$
	$R = \frac{\pi^2 P^2 ab}{2l^2}$
	$R = \frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P ab}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 ab}{2l^2}$
	$R = \frac{\pi^2 q^2 l^2}{24}$
	$R = \frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q p a^2}{12l} (l + 2b) + \frac{\pi^2 p^2 a^3}{12l}, \left(a \leq \frac{l}{2} \right);$ $R = \frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a^2}{12l} (l + 2b) + \frac{\pi^2 P^2}{24l} (l^3 - 6ab^2), \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$
	$R = \frac{\pi^2 P^2 a}{4l}, \left(a \leq \frac{l}{2} \right); \frac{\pi^2 P^2 b}{4l}, \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$
	$R = \frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P ab}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 a}{4l}, \left(a \leq \frac{l}{2} \right);$ $R = \frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P ab}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 b}{4l}, \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$

Для решения уравнения (2.112) необходимо просуммировать входящие в него ряды. Для этого предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма. Сумма ряда (2.113) однозначно определяется интегральным выражением

$$G(u) = \frac{l}{2} \int_0^l q(x) \varphi(x) dx, \quad (2.115)$$

где функция $\varphi(x)$ является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{\pi^2}{l^2} u^2 \varphi + \frac{\pi^2}{l^2} q = 0 \quad (2.116)$$

с граничными условиями, соответствующими условию задачи.

Для доказательства данного утверждения разложим функцию нагрузки в ряд Фурье по синусам

$$q(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.117)$$

Подставляя выражение (2.117) в (2.115), получим

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.118)$$

Интеграл, входящий в соотношение (2.118), после интегрирования по частям с учетом граничных условий для функции $\varphi(x)$ примет вид

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l^2}{n^2 \pi^2} \int_0^l \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (2.119)$$

или, используя уравнение (2.116), получим

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{h_n}{n^2} - \frac{u^2}{n^2} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (2.120)$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{h_n}{n^2 + u^2}. \quad (2.121)$$

После подстановки (2.121) в (2.118) окончательно имеем

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2},$$

что и доказывает наше утверждение. Полученный результат позволяет просуммировать ряды в уравнении (2.112), тем самым существенно упростив процедуру его решения.

Общий интеграл дифференциального уравнения (2.116) будет

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l} - \frac{\pi}{ul} f_1 \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} + \frac{\pi}{ul} f_2 \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l}, \quad (2.122)$$

где $f_1 = \int q(x) \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l} dx$; $f_2 = \int q(x) \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} dx$.

Произвольные постоянные интегрирования при шарнирном закреплении концов нити конечной жесткости на опорах определяются из выражений:

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{\pi}{ul} f_2(0), \\ C_1 &= \frac{\pi}{ul} \{f_1(l) - [f_2(l) - f_2(0)] \operatorname{cth} \pi u\}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

При действии на нить конечной жесткости равномерно распределенных начальной и дополнительной вертикальных нагрузок интенсивности q_1 и q_2 уравнение (2.122) с учетом (2.123) примет вид

$$\varphi(x) = \frac{q_1 + q_2}{u^2} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l} + \frac{\operatorname{ch} \pi u - 1}{\operatorname{sh} \pi u} \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} \right). \quad (2.124)$$

Подставляя уравнение (2.124) в (2.115) и интегрируя полученное выражение, придем к соотношению

$$G(u) = \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{u^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \operatorname{ch} \pi u}{\pi u \operatorname{sh} \pi u} \right). \quad (2.125)$$

В результате уравнение (2.112) для данного типа нагружения и граничных условий запишется так:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{кр}} \right) + \alpha^2 \frac{EF\beta}{P_{кр} L_0} u^4 + \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{2u^2} \times \\ &\times \left[3 - \frac{\operatorname{ch} \pi u - 1}{\pi u \operatorname{sh} \pi u} (5 + \pi u \operatorname{cth} \pi u) \right] = \frac{\pi^2 (q_1 + q_2)^2 l^2}{24}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Полученное уравнение можно решить с помощью численных методов [80, 256]. Зная параметр u , по первой из формул (2.110) определяем распор H , а по зависимости (2.109) – выражение для любого коэффициента a_n ряда (2.103)

$$a_n = \frac{2lh_n}{\pi^2 n^2 P_{кр} (u^2 + n^2)}. \quad (2.127)$$

Подставив это значение в ряд (2.103), получим уравнение кривой провисания нити конечной жесткости в виде

$$y(x) = \frac{2l}{\pi^2 P_{кр}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^2 (u^2 + n^2)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.128)$$

Изгибающий момент в нити конечной жесткости можно определить путем двукратного дифференцирования выражения (2.128)

$$M_z(x) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{u^2 + n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.129)$$

Необходимо отметить, что полученный ряд Фурье, описывающий изгибающие моменты в нити конечной жесткости, сходится несколько медленнее ряда (2.128). Поэтому для определения значений изгибающих моментов в некоторых расчетных случаях удобно применять выражение (2.5).

Предлагаемая методика остается аналогичной и при других условиях опирания нитей конечной жесткости. Необходимо только в каждом конкретном случае задаваться соответствующими аппроксимационными формулами для представления оси нити конечной жесткости в начальном и деформированном состояниях.

Нить, работающая без изгиба от начальной нагрузки. Данный случай работы нити конечной жесткости отличается от рассмотренного выше тем, что при действии начальной нагрузки в поперечных сечениях нити не возникают напряжения от изгиба, а кривая ее провисания приобретает вид квадратной параболы. Учитывая сказанное, вместо уравнения (2.100) для потенциальной энергии упругой деформации нити будем иметь

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right]^2 + \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (2.130)$$

при этом работа внешних сил по-прежнему определяется формулой (2.101).

Считая концы нити опертymi шарнирно и принимая для аппроксимации ее кривой провисания в исходном и деформированном состояниях ряды Фурье (2.102) и (2.103), для W находим выражение

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right]^2 + \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n - a_n^0)^2, \quad (2.131)$$

а для A остается справедливой зависимость (2.105).

Применяя изложенную выше методику поиска неизвестных значений коэффициентов a_n разложения (2.103), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений

$$a_n = \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{кр} a_n^0}{n^2 (H_0 + S + n^2 P_{кр})}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.132)$$

Заметим, что здесь в отличие от системы уравнений (2.109) второй член числителя учитывает форму провисания нити при действии начальной нагрузки.

Принимая обозначения

$$u^2 = \frac{H}{P_{кр}}, \quad \gamma^2 = \frac{4\pi^4 r^2 E^2 I^2 L_0}{l^5} \quad (2.133)$$

и учитывая их при преобразовании выражения (2.132), получим уравнение для определения параметра u

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{кр}} \right) + \gamma^2 \frac{EF\beta}{P_{кр} L_0} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (u^2 + n^2)^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{кр} a_n^0 \right)^2, \end{aligned} \quad (2.134)$$

или, что то же самое,

$$\gamma^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{кр}} \right) + \gamma^2 \frac{EF\beta}{P_{кр} L_0} u^4 = R - G(u) + \frac{u}{2} G'(u). \quad (2.135)$$

Причем здесь в отличие от формул (2.113) и (2.114) функции G и R равны

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u^2 + n^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{кр} a_n^0 \right)^2; \quad (2.136)$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{кр} a_n^0 \right)^2. \quad (2.137)$$

Для решения уравнения (2.135) необходимо просуммировать входящие в него ряды. Аналогично предыдущему и в этом случае можно показать, что сумма ряда (2.136) однозначно определяется интегральным выражением вида

$$G(u) = \frac{l}{2} \int_0^l \Phi(x) \varphi(x) dx, \quad (2.138)$$

где $\Phi(x) = \frac{2l}{\pi^2} [q(x) + El y_0^{IV}(x)]$ – функция, характеризующая начальное состояние нити конечной жесткости (именуемая в дальнейшем функцией начального состояния), а функция $\varphi(x)$ является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{\pi^2}{l^2} u \varphi + \frac{\pi^2}{l^2} \Phi = 0 \quad (2.139)$$

с соответствующими граничными условиями [289].

Общий интеграл этого уравнения

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l} - \frac{\pi}{ul} f_1 \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} + \frac{\pi}{ul} f_2 \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l}, \quad (2.140)$$

где $f_1 = \int \Phi(x) \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l} dx$; $f_2 = \int \Phi(x) \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} dx$.

Произвольные постоянные интегрирования, а также функции $\varphi(x)$ и $G(u)$ при нагружении нити конечной жесткости равномерно распределенными начальной и дополнительной нагрузками, как и ранее, найдем по формулам (2.123)–(2.125). Тогда уравнение для определения параметра u принимает вид

$$\begin{aligned} & \gamma^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{кр}} \right) + \gamma^2 \frac{EF\beta}{P_{кр} L_0} u^4 + \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{2u^2} \times \\ & \times \left[3 - \frac{\operatorname{ch} \pi u - 1}{\pi u \operatorname{sh} \pi u} (5 + \pi u \operatorname{cth} \pi u) \right] = \frac{\pi^2 (q_1 + q_2)^2 l^2}{24}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Зная параметр u , по первому из соотношений (2.133) можно найти распор в нити H , а по формуле (2.132) – выражение для любого коэффициента a_n ряда (2.103)

$$a_n = \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{кр} a_n^0}{n^2 P_{кр} (u^2 + n^2)}. \quad (2.142)$$

Таким образом, подставляя выражение (2.142) в разложение (2.103), получим выражение оси нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной нагрузки в деформированном состоянии

$$y(x) = \frac{1}{P_{кр}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{кр} a_n^0}{n^2(u^2 + n^2)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.143)$$

Соответственно для изгибающего момента путем двукратного дифференцирования последнего выражения находим

$$M_z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{кр} a_n^0}{u^2 + n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.144)$$

Из анализа последних выражений видно, что они отличаются от соответствующих соотношений для работающей с изгибом от начальной нагрузки нити конечной жесткости тем, что в числителе выражений (2.143) и (2.144) появляется новый член, учитывающий состояние безмоментности нити при действии начальной нагрузки и соответствующую данному состоянию форму ее кривой провисания.

Приведем без вывода еще одно интересное последствие применения метода рядов Фурье. Если принять $I = 0$, т. е. рассмотреть случай гибких нитей, то вместо выражений (2.142) и (2.143) будем соответственно иметь [288]:

$$a_n = \frac{2lL_0 h_n}{\pi^2 n^2 tEF}; \quad (2.145)$$

$$y(x) = \frac{2lL_0}{\pi^2 tEF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.146)$$

Входящий в эти соотношения параметр $t = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - \beta$ определяется из кубического уравнения

$$t + \beta = \frac{lL_0^2 R}{\pi^2 E^2 F^2 t^2}. \quad (2.147)$$

Распор в нити можно определить из уравнения

$$H^3 + \frac{\beta EF}{L_0} H^2 = \frac{REFl}{\pi^2 L_0}, \quad (2.148)$$

структура которого практически идентична решениям в работах [111, 156].

Приближенный метод решения задачи. Известно, что кривую изгиба балки с шарнирным закреплением на опорах также можно представить в виде ряда Фурье по синусам (2.103), который после нахождения с помощью предложенного С.П.Тимошенко энергетического метода [243] неизвестных значений коэффициентов разложения a_n преобразуется следующим образом:

$$y^\delta = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.149)$$

С другой стороны, прогиб нити конечной жесткости определяется известным выражением [45, 245, 295]

$$y = ky^\delta, \quad (2.150)$$

где y^δ – прогиб балки, имеющей такие же граничные условия и несущей такую же нагрузку, как и нить; k – коэффициент.

Для нахождения коэффициента k воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси нити [116, 165]

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_z^\delta + Hy. \quad (2.151)$$

Подстановка выражений (2.149) и (2.150) в уравнение (2.151) дает

$$\begin{aligned} \frac{4ql^2}{\pi^3} k \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{4ql^4}{EI\pi^5} Hk \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (2.152)$$

откуда, обозначая $u = 0,5l(H/EI)^{1/2}$ и производя некоторые преобразования, получаем

$$k = \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2}}. \quad (2.153)$$

Воспользуемся полученным результатом при рассмотрении напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости.

Действие начальной нагрузки. Примем, что нить работает с изгибом от начальной равномерно распределенной нагрузки (собственного веса), а ее концы закреплены шарнирно (рис. 2.10). В этом случае расчетные формулы для определения ординат упругой линии y , углов поворота $\text{tg} \alpha$, изгибающих моментов M_z и поперечных сил Q_z с учетом (2.153) будут:

$$y = \frac{q_1}{24EI} \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (2.154)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (2.155)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (2.156)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (2.157)$$

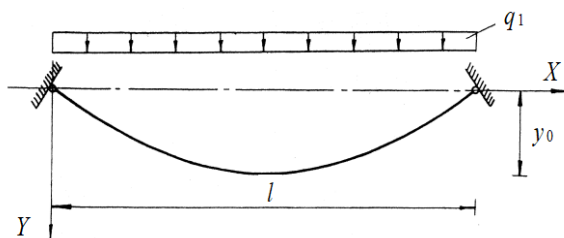


Рис. 2.10. К расчету нити конечной жесткости на начальную равномерно распределенную нагрузку при шарнирном закреплении концов

В формулы (2.154)–(2.157) входит неизвестный параметр u_0 . Его можно определить из соотношения

$$y_0 = \frac{y_0^{\delta}}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}, \quad (2.158)$$

где y_0 – заданный прогиб нити конечной жесткости; y_0^{δ} – прогиб балки под действием начальной нагрузки.

В последних формулах вместо ряда $\sum_{n=1,3,5,\dots} n^{-2}$ учтен только его первый член. Такое допущение вполне приемлемо, так как по данным численных исследований установлено, что точность результата при использовании

двух членов ряда повышается на 0,5%, а 10 – на 0,7% по сравнению с использованием одного члена.

При жестком закреплении концов нити конечной жесткости на опорах (рис. 2.11) расчетные формулы примут вид

$$y = \frac{q_1}{24EI} \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (2.159)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (2.160)$$

$$M_z = \frac{q_1}{24} \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (2.161)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (2.162)$$

Входящий в эти зависимости параметр u_0 вычисляется по формуле

$$y_0 = \frac{y_0^6}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (2.163)$$

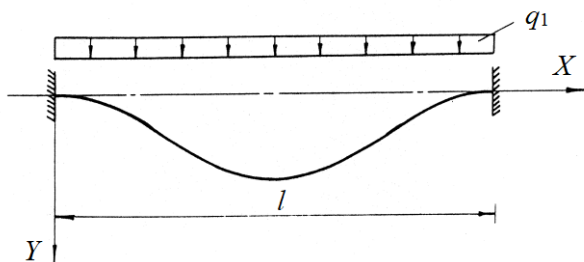


Рис. 2.11. К расчету нити конечной жесткости на начальную равномерно распределенную нагрузку при жестком закреплении концов

Если в поперечных сечениях нити при начальной нагрузке не возникают напряжения от изгиба, то нить работает как абсолютно гибкая. В этом случае уравнение оси нити приобретает вид квадратной параболы с ординатами [157, 165]

$$y = \frac{4y_0x(l-x)}{l^2}.$$

В соответствии с теорией гибких нитей начальный распор находим по формуле

$$H_0 = \frac{M_z^0}{y} = \frac{q_1 l^2}{8y_0},$$

а начальную длину – из уравнения

$$L_0 = l \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

Приложение к нити конечной жесткости дополнительной нагрузки вызывает изменение параметров ее напряженно-деформированного состояния, методика определения которых приведена ниже.

Действие дополнительной нагрузки. В случае шарнирного закрепления концов нити конечной жесткости на опорах и действия дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис. 2.12), при условии работы нити с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, расчетные зависимости можно записать в виде

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.164)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.165)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.166)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}. \quad (2.167)$$

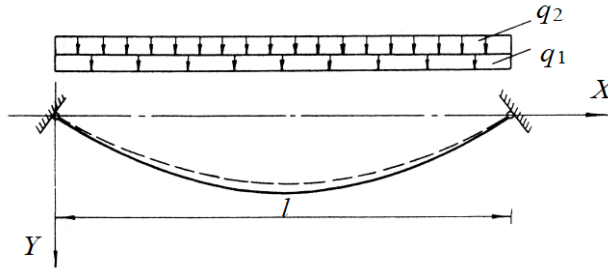


Рис. 2.12. К расчету нити конечной жесткости на начальную и дополнительную равномерно распределенные нагрузки при шарнирном закреплении концов

В соотношения (2.164)–(2.167) входит неизвестный параметр u , который определяется из уравнения

$$\frac{\beta}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \frac{\beta_0}{(\pi^2 + 4u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (2.168)$$

где

$$\beta = \frac{1632\pi^4}{2625} \left(\frac{y^\delta}{r} \right)^2; \quad \beta_0 = \frac{1632\pi^4}{2625} \left(\frac{y_0^\delta}{r} \right)^2.$$

Напомним, что r – радиус инерции поперечного сечения нити.

При жестком закреплении концов нити конечной жесткости на опорах (рис. 2.13) для расчетных формул имеем:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.169)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.170)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.171)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}, \quad (2.172)$$

а параметр u находим из соотношения

$$\frac{\gamma}{(\pi^2 + u^2)^2} - u^2 = \frac{\gamma_0}{(\pi^2 + u_0^2)^2} - u_0^2. \quad (2.173)$$

Здесь принято, что $\gamma_0 = \frac{64\pi^4}{105} \left(\frac{y_0^6}{r} \right)^2$; $\gamma = \frac{64\pi^4}{105} \left(\frac{y^6}{r} \right)^2$.

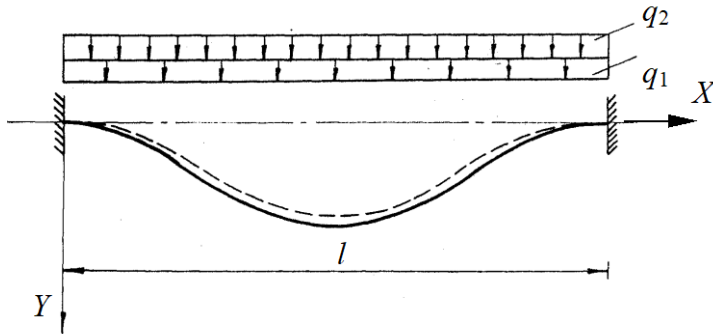


Рис. 2.13. К расчету нити конечной жесткости на начальную и дополнительную равномерно распределенные нагрузки при жестком закреплении концов

При действии дополнительной нагрузки в виде сосредоточенной силы и шарнирном закреплении концов нити конечной жесткости на опорах (рис. 2.14) расчетные формулы можно записать так:

на участке $0 \leq x \leq a$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \frac{x^4 - 2lx^3 + l^3x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.174)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \frac{4x^3 - 6lx^2 + l^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.175)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{Pb}{l} \frac{x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.176)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{Pb}{l} \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (2.177)$$

на участке $a \leq x \leq l$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \frac{x^4 - 2lx^3 + l^3x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6EI} \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{6EI} \frac{(x-a)^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.178)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \frac{4x^3 - 6lx^2 + l^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6EI} \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{2EI} \frac{(x-a)^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.179)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \frac{x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{P(x-a)}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.180)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{P}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}. \quad (2.181)$$

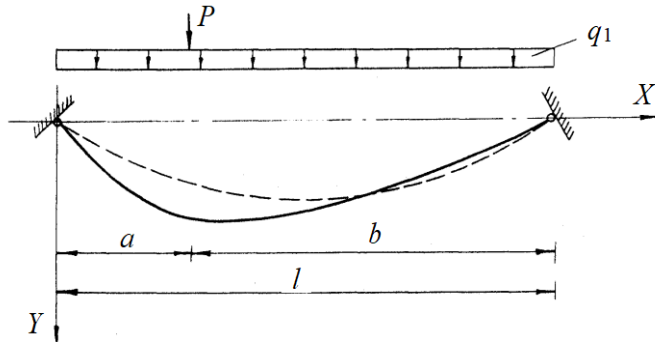


Рис. 2.14. К расчету нити на начальную равномерно распределенную и дополнительную сосредоточенную в произвольном месте нагрузки при шарнирном закреплении концов

Неизвестный параметр u , входящий в формулы (2.174)–(2.181), вычисляется из уравнения

$$\frac{\beta_0 + \mu}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \frac{\beta_0}{(\pi^2 + 4u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (2.182)$$

где

$$\mu = \left(\frac{\pi^2}{24rEI} \right)^2 \left[\frac{q_1 Plb}{5} (3l^5 - 5l^3b^2 + 3lb^4 - b^5) + \frac{P^2 b^2}{5} (8l^4 - 40l^2b^2 + 66lb^3 - 16b^4) \right].$$

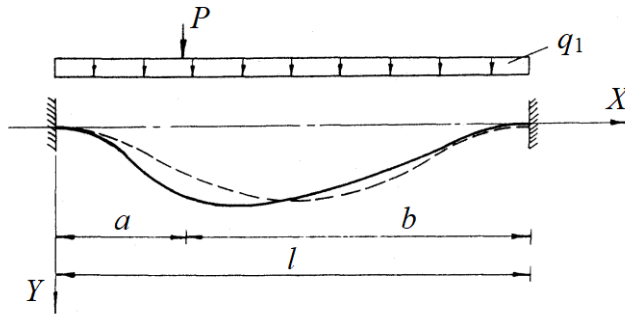


Рис. 2.15. К расчету нити на начальную равномерно распределенную и дополнительную сосредоточенную в произвольном месте пролета нагрузки при жестком закреплении концов

При жестком закреплении концов нити конечной жесткости на опорах (рис. 2.15) для расчетных зависимостей имеем:

на участке $0 \leq x \leq a$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \frac{x^4 - 2lx^3 + l^2x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pabx}{6l^3EI} \frac{3lbx - x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.183)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = & \frac{q_1}{24EI} \frac{4x^3 - 6lx^2 + 2l^2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \\ & + \frac{Pab}{6l^3EI} \frac{6lbx - 3x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \end{aligned} \quad (2.184)$$

$$M_z = \frac{q_1}{24} \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \frac{x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \frac{lb - x(b-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.185)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \frac{a - b}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.186)$$

на участке $a \leq x \leq l$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \frac{x^4 - 2lx^3 + l^2x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pabx}{6l^3EI} \times \\ \times \frac{3lbx - x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{6EI} \frac{(x-a)^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.187)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \frac{4x^3 - 6lx^2 + 2l^2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pab}{6l^3EI} \times \\ \times \frac{6lbx - 3x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{2EI} \frac{(x-a)^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.188)$$

$$M_z = \frac{q_1}{24} \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \frac{x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \\ - \frac{Pab}{l^3} \frac{lb - x(b-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{P(x-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (2.189)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \frac{a - b}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{P}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}. \quad (2.190)$$

Уравнение для определения неизвестного параметра u , входящего в зависимости (2.183)–(2.190), имеет вид

$$\frac{\gamma_0 + \eta}{(\pi^2 + u^2)^2} - u^2 = \frac{\gamma_0}{(\pi^2 + u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (2.191)$$

где

$$\eta = \left(\frac{\pi^2}{24rEI} \right)^2 \left[\frac{q_1 Pl^3 b}{10} (l^5 - l^4 a - 5l^2 b^3 + 6lb^4 - 2b^5) + \frac{P^2 b^2}{10} \times \right. \\ \times (4l^6 - 8l^4 a^2 - 7l^4 ab - 20l^4 b^2 + 24l^3 b^3 + 4l^2 a^4 + 7l^2 a^3 b + \\ \left. + 24l^2 a^2 b^2 + 10l^2 ab^3 - 8l^2 b^4 - 15la^2 b^3 + 3a^2 b^4 - 3ab^5) \right].$$

Для нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузок, при шарнирном закреплении концов на опорах и действии равномерно распределенной дополнительной нагрузки (см. рис. 2.12) параметры напряженно-деформированного состояния вычисляются по формулам:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0 x(l-x)}{l^2 \left[1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (2.192)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0(l-2x)}{l^2 \left[1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (2.193)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{16Elu^2 y_0 x(l-x)}{l^4 \left[1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (2.194)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \frac{l-2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{16Elu^2 y_0(l-2x)}{l^4 \left[1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right]}. \quad (2.195)$$

Для определения входящего в зависимости (2.192)–(2.195) неизвестного параметра u имеем уравнение

$$\frac{\beta_2}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \beta_1 - u_0^2, \quad (2.196)$$

где

$$\beta_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{y_0}{r} \right)^2,$$

$$\beta_2 = \left(\frac{l\pi^2}{2r} \right)^2 \left[\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6}{40320(EI)^2} + \frac{(q_1 + q_2)y_0 l^2}{15EI} + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

При жестком закреплении концов нити на опорах (см. рис. 2.13) расчетные соотношения приобретают вид

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0 x(l-x)}{l^2 \left[1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (2.197)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0(l-2x)}{l^2 \left[1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (2.198)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{24} \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{16EIu^2 y_0 x(l-x)}{l^4 \left[1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (2.199)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \frac{l-2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{16EIu^2 y_0(l-2x)}{l^4 \left[1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right]}. \quad (2.200)$$

Уравнение для нахождения неизвестного параметра u приводится к виду

$$\frac{\gamma_2}{(\pi^2 + u^2)^2} - u^2 = \gamma_1 - u_0^2, \quad (2.201)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{y_0}{r} \right)^2;$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{l\pi^2}{2r} \right)^2 \left[\frac{(q_1 + q_2)^2 l^6}{60480(EI)^2} + \frac{(q_1 + q_2)y_0 l^2}{90EI} + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

Расчетные зависимости для других схем загрузки при работе нити конечной жесткости без изгиба от начальной нагрузки не приводятся. Методика их получения аналогична рассмотренной.

Глава 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 3.1. Принятые допущения

При рассмотрении плоской формы изгиба нитей конечной жесткости в качестве исходного принимаем деформированное состояние нити конечной жесткости, нагруженной начальной и дополнительной вертикальными нагрузками. Кроме того считаем, что ось нити до потери устойчивости – плоская кривая.

Пусть X, Y, Z являются неподвижными координатными осями, а x, y, z – подвижными – для искривленного (выпученного) состояния нити, причем оси y, z направлены по главным центральным осям инерции поперечного сечения, а ось x – по касательной к осевой линии нити.

Допустим, что под действием возрастающей дополнительной нагрузки нить теряет устойчивость. При этом ее поперечные сечения получают поступательные смещения v в горизонтальной плоскости XOY и поворачиваются на угол θ в плоскости сечения (рис. 3.1). Отметим, что в бесконечно близком выпученном состоянии нити данные перемещения считаются бесконечно малыми величинами и рассматриваются как «возмущения».

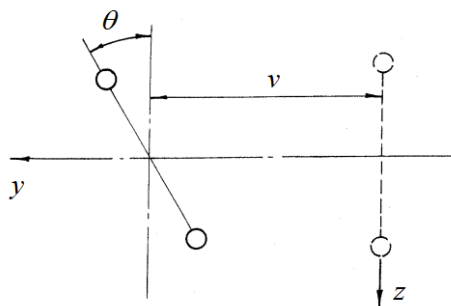


Рис. 3.1. Деформирование поперечного сечения нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба

При таком искривлении оси нити конечной жесткости на повернутые поперечные сечения будут действовать начальные напряжения, т. е. напряжения, возникающие в нити в момент потери устойчивости от начальной и дополнительной нагрузок. Составляющие начальных напряжений принимают вид:

$$\text{продольные } \sigma_N = \frac{N}{F}, \text{ нормальные } \sigma_M = \frac{M_y z}{I_y} \text{ и касательные } \tau = \frac{Q_z S_y}{I_y \delta}.$$

Здесь принято, что Q_z – поперечная сила в сечении; M_y – изгибающий момент, действующий в нити конечной жесткости в плоскости XOZ ; I_y и S_y – соответственно момент инерции и статический момент поперечного сечения в плоскости XOZ . Очевидно, σ_N постоянны, а σ_M и τ переменны по длине нити.

§ 3.2. Определение дополнительных погонных нагрузок

При потере нитью конечной жесткости плоской формы деформирования действующие в ее поперечных сечениях начальные напряжения дадут горизонтальные составляющие в плоскости XOY и крутящие моменты относительно оси X . Для определения дополнительных погонных поперечной нагрузки и крутящего момента воспользуемся методикой, предложенной А.Р.Ржаницыным [212] при рассмотрении им изгибно-крутильных деформаций двутавровых балок.

Рассмотрим смещение нити в плоскости XOY . Проектируя продольное усилие N на неподвижную ось OY , получим поперечную составляющую $dN_y^{(1)}$ (рис. 3.2)

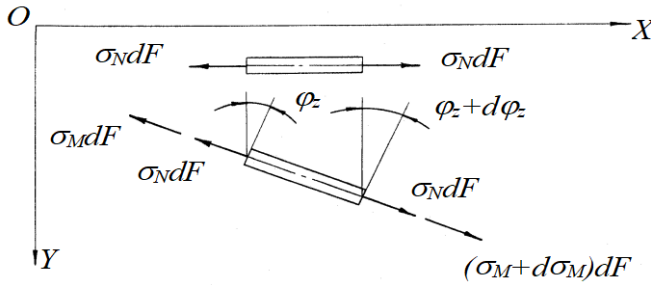


Рис. 3.2. Усилия в элементе нити

$$dN_y^{(1)} = -\sigma_N \sin \varphi_z dF + \sigma_N \sin(\varphi_z + d\varphi_z) dF \approx \sigma_N d\varphi_z dF.$$

Здесь принято, что $\sin(\varphi_z + d\varphi_z) - \sin \varphi_z = d\varphi_z$. Величина погонной поперечной нагрузки от $dN_y^{(1)}$ равна

$$dq_y^{(1)} = \frac{dN_y^{(1)}}{dx} = \sigma_N dF \frac{d\varphi_z}{dx} = \sigma_N dF v''.$$
(3.1)

Нормальные напряжения σ_M при проектировании их на ось OY дадут поперечную составляющую (см. рис. 3.2)

$$\begin{aligned} dN_y^{(2)} &= -\sigma_M \sin \varphi_z dF + (\sigma_M + d\sigma_M) \sin(\varphi_z + d\varphi_z) dF = \\ &= \sigma_M d\varphi_z dF + d\sigma_M \varphi_z dF + d\sigma_M d\varphi_z dF \end{aligned}$$

или, пренебрегая произведением $d\sigma_M d\varphi_z dF$ как величиной высшего порядка малости по сравнению с оставшимися членами, придадим поперечной составляющей следующий вид:

$$dN_y^{(2)} = \sigma_M d\varphi_z dF + d\sigma_M \varphi_z dF = \frac{M_y z}{I_y} d\varphi_z dF + \frac{dM_y z}{I_y} \varphi_z dF ,$$

где $\sigma_M = \frac{M_y z}{I_y}$; $d\sigma_M = \frac{dM_y z}{I_y}$.

Погонная поперечная нагрузка от $dN_y^{(2)}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} dq_y^{(2)} &= \frac{dN_y^{(2)}}{dx} = \frac{M_y z}{I_y} \frac{d\varphi_z}{dx} dF + \frac{dM_y}{dx} \frac{z}{I_y} \varphi_z dF = \\ &= \frac{M_y z}{I_y} v'' dF + \frac{M'_y z}{I_y} v' dF . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Складывая поперечные нагрузки (3.1) и (3.2) и интегрируя найденное выражение по площади поперечного сечения нити F , получаем суммарную погонную поперечную нагрузку от перемещения v

$$q_y^v = \int_F \left(\sigma_N v'' + \frac{M_y z}{I_y} v'' + \frac{M'_y z}{I_y} v' \right) dF = N v'' . \quad (3.3)$$

В соотношении (3.3) было учтено, что $\int_F z dF = 0$, поскольку y и z – центральные оси поперечного сечения нити.

Поперечные нагрузки $dq_y^{(1)}$ и $dq_y^{(2)}$ создают в нити крутящий момент (рис. 3.3), формула для определения которого имеет вид

$$dm_x = -(dq_y^{(1)} + dq_y^{(2)}) z . \quad (3.4)$$

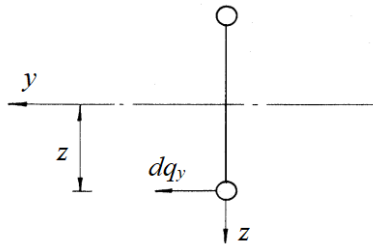


Рис. 3.3. Создание крутящего момента в сечении стержня

Подставляя формулы (3.1) и (3.2) в (3.4) и интегрируя по площади поперечного сечения нити F , для m_x^v находим

$$m_x^v = - \int_F \left(\sigma_N v'' + \frac{M_y z}{I_y} v'' + \frac{M'_y z}{I_y} v' \right) z dF = -M_y v'' - M'_y v', \quad (3.5)$$

причем здесь учтено, что $\int_F z^2 dF = I_y$.

Касательные напряжения, действующие в сечениях нити, дают вертикальную равнодействующую Q_z (рис. 3.4), которая, в свою очередь, создает дополнительный крутящий момент

$$m_x^v dx = (Q_z + dQ_z) v' dx \approx Q_z v' dx,$$

откуда имеем

$$m_x^v = \frac{Q_z v' dx}{dx} = M'_y v'. \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь влияние поворота сечения нити на угол θ (см. рис. 3.1). В этом случае волокна нити смещаются в горизонтальной плоскости на величину $-z \sin \theta \approx -z \theta$. В результате такого смещения напряжения σ_N и σ_M дадут дополнительные поперечные нагрузки $dq_\theta^{(1)}$ и $dq_\theta^{(2)}$, которые можно найти по формулам (3.1) и (3.2), заменив в них параметр v на $-z \theta$. Тогда получим

$$dq_\theta^{(1)} = -\sigma_N z \theta'' dF; \quad (3.7)$$

$$dq_\theta^{(2)} = \frac{M_y z^2}{I_y} \theta'' dF - \frac{M'_y z^2}{I_y} \theta' dF. \quad (3.8)$$

Касательные напряжения τ дают при повороте поперечного сечения нити на угол θ дополнительную погонную поперечную нагрузку (рис. 3.5), которая определяется из соотношения

$$dq_\theta^{(3)} = \frac{-(Q_z + dQ_z)(\theta + d\theta) + Q_z \theta}{dx} = -Q_z \theta' - Q'_z \theta. \quad (3.9)$$

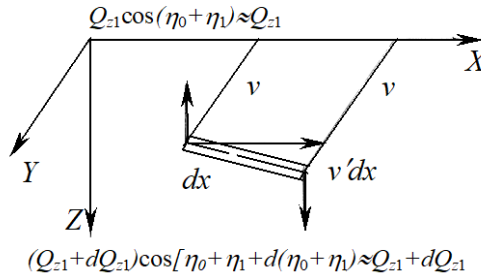


Рис. 3.4. Равнодействующие касательные напряжения при смещении нити в горизонтальной плоскости

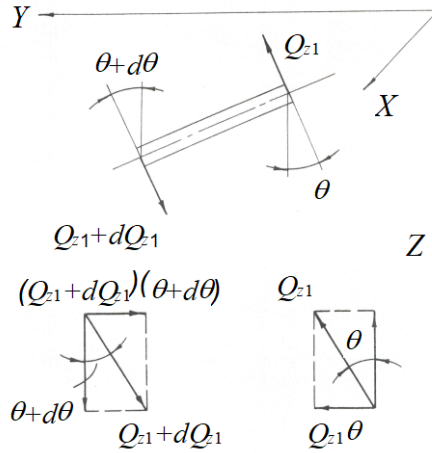


Рис. 3.5. Равнодействующие касательные напряжения при повороте нити в плоскости сечения

Интегрируя выражения (3.7) и (3.8) по площади поперечного сечения нити F и складывая найденный результат с соотношением (3.9), для суммарной погонной поперечной нагрузки от поворота θ имеем

$$q_{\theta} = -M_y \theta'' - M_y' \theta' - Q_z \theta' - Q_z' \theta = -(M_y \theta)'' . \quad (3.10)$$

Поперечные нагрузки $dq_{\theta}^{(1)}$ и $dq_{\theta}^{(2)}$ создают в сечении дополнительный погонный крутящий момент

$$m_x^{\theta} = - \int_F [dq_{\theta}^{(1)} + dq_{\theta}^{(2)}] z = \frac{N I_y}{F} \theta'' . \quad (3.11)$$

В выражении (3.11) учтено, что $\int_F z^3 dF = 0$.

При повороте поперечного сечения на угол θ касательные напряжения не вызовут крутящего момента, поскольку внешняя нагрузка $q = q_1 + q_2$ действует в плоскости симметрии поперечного сечения нити. Крутящий момент от приращений касательных напряжений будет возникать только в том случае, если нагрузка будет приложена не по оси нити. Допустим, что начальная нагрузка q_1 приложена на расстоянии e_1 от центра изгиба сечения, а дополнительная q_2 – на расстоянии e_2 (рис. 3.6). При повороте поперечного сечения нити на угол θ возникает дополнительный крутящий момент, равный

$$m_x^{\theta} = -q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta . \quad (3.12)$$

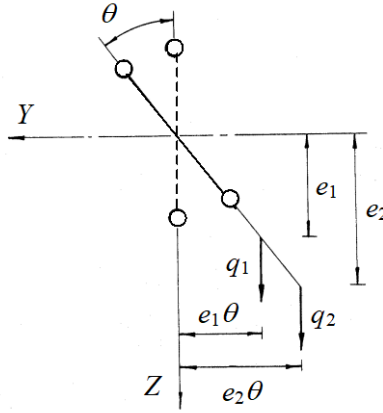


Рис. 3.6. Расположение нагрузок по высоте поперечного сечения нити

С учетом последнего соотношения, а также формулы (3.11) выражение для суммарного погонного крутящего момента от поворота сечения на угол θ можно записать в виде

$$m_x^\theta = \frac{NI_y}{F} \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta. \quad (3.13)$$

Суммируя выражения (3.3) и (3.10), получаем полную дополнительную погонную поперечную нагрузку от перемещения v и поворота θ

$$q_y = Nv'' - (M_y \theta)'', \quad (3.14)$$

а суммируя зависимости (3.5), (3.6) и (3.13) – дополнительный погонный крутящий момент

$$m_x = -M_y v'' + \frac{NI_y}{F} \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta. \quad (3.15)$$

В силу принятого ранее предположения о пологости нити конечной жесткости распор H в ней мало отличается от продольного усилия N [116, 165]. Учитывая данное допущение в формулах (3.14) и (3.15), окончательно получим

$$q_y = Hv'' - (M_y \theta)''; \quad (3.16)$$

$$m_x = -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta, \quad (3.17)$$

где $r^2 = I_y / F$ – радиус инерции поперечного сечения нити.

Воспользуемся полученными соотношениями при рассмотрении устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости.

§ 3.3. Устойчивость нитей конечной жесткости

При воздействии равномерно распределенной нагрузки. В соответствии с работами [56, 183, 307] энергию упругой деформации нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI_{\omega} (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 \right] dx, \quad (3.18)$$

где EI_{ω} – секториальная жесткость поперечного сечения нити; GI_d – крутильная жесткость; EI_z – изгибная жесткость нити в плоскости XOY .

Работу внешних сил при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба определим из выражения

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l (q_y v + m_x \theta) dx, \quad (3.19)$$

а с учетом формул (3.16) и (3.17) получим

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l \left[H v'' v - (M_y \theta)'' v - M_y v'' \theta + H r^2 \theta \theta'' - q_1 e_1 \theta^2 - q_2 e_2 \theta^2 \right] dx. \quad (3.20)$$

Так как рассматриваемое нами отклоненное (выпученное) состояние нити конечной жесткости является равновесным, то в соответствии с энергетическим критерием устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле [56] уравнение устойчивости с учетом соотношений (3.18) и (3.20) принимает вид

$$\int_0^l \left[EI_{\omega} (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - H v'' v + (M_y \theta)'' v + M_y v'' \theta - H r^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2 + q_2 e_2 \theta^2 \right] dx = 0. \quad (3.21)$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах граничные условия можно представить в виде

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad & v = v'' = \theta = \theta'' = 0, \\ \text{при } x = l \quad & v = v'' = \theta = \theta'' = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В качестве функций v и θ , удовлетворяющих граничным условиям (3.22), принимаем

$$v = A \sin \lambda x, \quad \theta = B \sin \lambda x, \quad (3.23)$$

где $\lambda = \pi / l$.

Подставляя значения v и θ из (3.23) в уравнение устойчивости (3.21) и интегрируя полученное выражение, после некоторых преобразований придем к уравнению

$$(P_z + H)A^2 - \frac{4}{l}AB \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx + \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] r^2 B^2 = 0, \quad (3.24)$$

где $P_z = EI_z \lambda^2$ – эйлерова сила при продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega = (EI_\omega \lambda^2 + GI_d)/r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

Коэффициенты A и B в формуле (3.24) подбираются такими, чтобы дополнительная нагрузка, приложенная к нити, имела наименьшее значение.

Обозначая выражение, стоящее в левой части уравнения (3.24), через Π и составляя от него производные по каждому из коэффициентов, получим систему однородных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial A} &= 2(P_z + H)A - \frac{4}{l}B \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial B} &= -\frac{4}{l}A \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx + \\ &+ 2r^2 \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] B = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Потеря устойчивости становится возможной, если эта система уравнений может дать решения для коэффициентов A и B , отличные от нуля. Этому случаю соответствует равенство нулю определителя полученной системы уравнений. Приравнявая его нулю, имеем

$$\begin{vmatrix} P_z + H & -\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx \\ -\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx & r^2 \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (3.26)$$

Раскрывая этот определитель, находим уравнение устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости

$$r^2 (P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx \right]^2 = 0. \quad (3.27)$$

Интеграл, входящий в уравнение (3.27), зависит от вида нагрузки, приложенной к нити и условий закрепления ее концов. Для вычисления изгиба-

ющего момента, действующего в нити, можно воспользоваться формулами уточненного (2.5) или приближенного (2.166) методов. Применение приближенного метода для вычисления изгибающих моментов, действующих в нити, позволяет существенно упростить расчетные зависимости и практически не сказывается на точности расчетов. Так, например, разница между значениями изгибающих моментов в середине пролета, вычисленных по уточненному и приближенному методам при действии равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету, составляет не более 3%.

Рассмотрим нить, работающую с изгибом от начальной нагрузки. В этом случае изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ и определяемый по формуле (2.166), можно представить в виде

$$M_y = \frac{M_y^0}{1 + kH}, \quad (3.28)$$

где M_y^0 – изгибающий момент в плоскости XOZ для балки с геометрическими характеристиками нити конечной жесткости; $k = 1/(EI_y \lambda^2)$ – коэффициент.

Подставляя уравнение (3.28) в (3.27) и производя интегрирование, приходим к уравнению

$$r^2(P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12 \lambda^2} \right)^2 \left(\frac{q_1 + q_2}{1 + kH} \right)^2 = 0. \quad (3.29)$$

Полученное уравнение содержит две неизвестные величины – критическую нагрузку q_2 и критический распор H . Для связи между критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение неразрывности деформаций

$$L = L_0 + \Delta L, \quad (3.30)$$

где L – длина нити конечной жесткости после приложения критической нагрузки; L_0 – длина нити при начальной нагрузке; ΔL – упругое приращение длины нити, вызванное критической нагрузкой.

После подстановки в уравнение (3.30) значений длин нити, получим уравнение (2.168). Перепишем его в несколько измененном виде

$$\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6 EF}{40320(EI_y)^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320(EI_y)^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (3.31)$$

Определяя из уравнения (3.31) величину q_2 и подставляя ее значение в выражение (3.29), придем к уравнению критического распора H :

$$r^2(P_z + H) \left\{ P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} \left[q_1(e_1 - e_2) + e_2(1 + kH) \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} \right] \right\} -$$

$$- \left(\frac{3 + \pi^2}{12 \lambda^2} \right)^2 (a_1^2 H + a_2^2) = 0, \quad (3.32)$$

где
$$a_1^2 = \frac{40320(EI_y)^2}{17l^6 EF}; \quad a_2^2 = \frac{q_1^2}{(1 + kH_0)^2} - \frac{40320(EI_y)^2}{17l^6 EF} H_0.$$

Решая уравнение (3.32), определяем критический распор H , а подставляя его в уравнение (3.31) – дополнительную критическую нагрузку q_2 .

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (3.28) будем иметь

$$M_y = \frac{M_y^0}{1 + kH} - \frac{4y_0 x(l - x)H}{l^2(1 + kH)}, \quad (3.33)$$

где y_0 – стрела провисания нити при действии начальной нагрузки.

Вместо уравнения (3.31) получаем

$$\frac{EF}{(1 + kH)^2} \left[\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6}{40320(EI_y)^2} + \frac{(q_1 + q_2)y_0 l^2}{15EI_y} + \frac{8y_0^2}{3l^2} \right] =$$

$$= \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0, \quad (3.34)$$

а вместо (3.29) –

$$r^2(P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] -$$

$$- \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right)^2 \frac{y_0^2}{(1 + kH)^2} \left(\frac{q_2 l^2}{8y_0} + H_0 - H \right)^2 = 0. \quad (3.35)$$

Уравнение для определения критического распора H примет вид

$$r^2(P_z + H)(1 + kH)^2 \left[P_\omega + H + \frac{e_1 - e_2}{r^2 \lambda^2} q_1 - \frac{e_2 b_2}{2b_3 r^2 \lambda^2} + \right.$$

$$+ \left. \frac{e_2}{2b_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} \right] -$$

$$- \left(\frac{6 + 2\pi^2}{24 \lambda^2} \right)^2 \left[\frac{1}{2b_3} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_2}{2b_3} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0, \quad (3.36)$$

где

$$b_1 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2}; \quad b_2 = \frac{l^2 y_0 EF}{15EI_y}; \quad b_3 = \frac{17l^6 EF}{40320(EI_y)^2}; \quad b_4 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} - H_0.$$

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad v = v' = \theta = \theta' = 0, \\ \text{при } x = l \quad v = v' = \theta = \theta' = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

При таких граничных условиях в качестве функций v и θ можно принять

$$v = A(1 - \cos 2\lambda x), \quad \theta = B(1 - \cos 2\lambda x). \quad (3.38)$$

Подставив значения v и θ из (3.38) в уравнение устойчивости (3.21), получим выражение

$$\begin{aligned} (P_z^* + H)A^2 + \frac{4}{l}AB \int_0^l M_y \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \\ + \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] r^2 B^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где $P_z^* = 4EI_z \lambda^2$ – эйлерова сила при продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega^* = (4EI_\omega \lambda^2 + GI_d)/r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

Поступая далее так же, как и в случае шарнирного закрепления концов нити, придем к уравнению устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости

$$\begin{aligned} r^2 (P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \\ - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Если нить работает с изгибом от начальной нагрузки, то изгибающий момент, действующий в нити, можно представить в виде

$$M_y = \frac{M_y^\sigma}{1 + 0,25kH}. \quad (3.41)$$

Подставляя выражение для изгибающего момента M_y из (3.41) в уравнение (3.40), получаем уравнение устойчивости

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \frac{49}{256\lambda^4} \left(\frac{q_1 + q_2}{1 + 0,25kH} \right)^2 = 0. \quad (3.42)$$

Для связи между критическим распором H и дополнительной критической нагрузкой q_2 используем уравнение неразрывности деформаций (2.173). Перепишем его в несколько измененном виде

$$\begin{aligned} & \frac{(q_1 + q_2)^2 l^6 EF}{60480 (EI_y)^2 (1 + 0,25kH)^2} - H = \\ & = \frac{q_1^2 l^6 EF}{60480 (EI_y)^2 (1 + 0,25kH_0)^2} - H_0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Заимствуя из уравнения (3.43) дополнительную критическую нагрузку q_2 и подставляя ее в формулу (3.42), приходим к уравнению критического распора H

$$r^2(P_z^* + H) \left\{ P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2} [q_1(e_1 - e_2) + e_2(1 + 0,25kH)\sqrt{c_1^2 H + c_2^2}] \right\} - \frac{49}{256\lambda^4} (c_1^2 H + c_2^2) = 0, \quad (3.44)$$

где

$$c_1^2 = \frac{60480 (EI_y)^2}{l^6 EF}; \quad c_2^2 = \frac{q_1^2}{(1 + 0,25kH_0)^2} - \frac{60480 (EI_y)^2}{l^6 EF} H_0.$$

Из уравнения (3.44) определяем критический распор H , а из выражения (3.43) – дополнительную критическую нагрузку q_2 .

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , можно представить в виде

$$M_y = \frac{M_y^0}{1 + 0,25kH} - \frac{4y_0 x(l - x)H}{l^2(1 + 0,25kH)}. \quad (3.45)$$

Подставляя уравнение (3.45) в (3.40), получаем уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости

$$\begin{aligned} & r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \\ & - \left(\frac{3 + \pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \frac{1}{(1 + 0,25kH)^2} \left[\frac{21(q_1 + q_2)}{4(3 + \pi^2)} + \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Для связи между критическим распором H и дополнительной критической нагрузкой q_2 используем уравнение неразрывности деформаций нити

$$\begin{aligned} \frac{EF}{(1+0,25kH)^2} \left[\frac{(q_1+q_2)^2 l^6}{60480(EI_y)^2} + \frac{(q_1+q_2)y_0 l^2}{90EI_y} + \frac{8y_0^2}{3l^2} \right] = \\ = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Решая уравнение (3.47) относительно дополнительной критической нагрузки q_2 и подставляя полученное значение в выражение (3.46), получаем уравнение, содержащее одно неизвестное – критический распор H

$$\begin{aligned} r^2(P_z^* + H)(1+0,25kH)^2 \left[P_\omega^* + H + \frac{3(e_1 - e_2)}{4r^2 \lambda^2} q_1 - \frac{3e_2 d_2}{8d_3 r^2 \lambda^2} + \right. \\ \left. + \frac{3e_2}{8d_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{d_2^2 + 4d_3(d_4 + H)(1+0,25kH)^2 - 4d_1 d_3} \right] - \left(\frac{3+\pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \times \\ \times \left[\frac{21}{8d_3(3+\pi^2)} \sqrt{d_2^2 + 4d_3(d_4 + H)(1+0,25kH)^2 - 4d_1 d_3} - \right. \\ \left. - \frac{21d_2}{8d_3(3+\pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где

$$d_1 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2}; \quad d_2 = \frac{l^2 y_0 EF}{90EI_y}; \quad d_3 = \frac{l^6 EF}{60480(EI_y)^2}; \quad d_4 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} - H_0.$$

Определяя из уравнения (3.48) критический распор H и подставляя его в выражение (3.47), находим дополнительную критическую нагрузку q_2 .

Нити конечной жесткости часто раскрепляют в горизонтальной плоскости какими-либо связями. Причем эти связи, препятствуя смещению нити в горизонтальной плоскости, не препятствуют повороту ее сечения вокруг некоторой оси, в общем случае не совпадающей с центральной осью нити (рис. 3.7). Допустим, что линия раскрепления нити находится на расстоянии e_c от центральной оси y , а начальная q_1 и дополнительная q_2 нагрузки приложены соответственно на расстояниях e_1 и e_2 от той же оси. Примем, что e_c , e_1 и e_2 постоянны по длине нити.

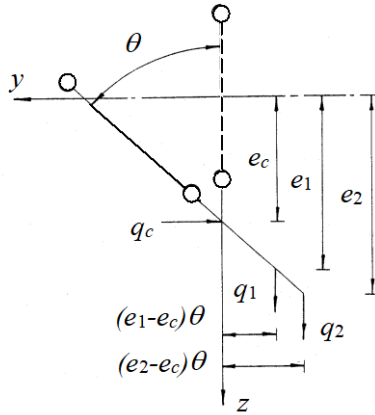


Рис. 3.7. Поворот поперечного сечения нити конечной жесткости, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости

При потере нитью устойчивости плоской формы изгиба горизонтальное перемещение оси нити будет

$$v = e_c \theta. \quad (3.49)$$

Возникающая при этом в связях горизонтальная реакция q_c создает дополнительную крутящую нагрузку $m_c = q_c e_c$ относительно оси нити x . Дополнительный крутящий момент возникает и от внецентренного приложения нагрузок q_1 и q_2 при повороте поперечного сечения нити на угол θ , который равен

$$m_q = -q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta. \quad (3.50)$$

Тогда, добавляя эти члены в выражения для дополнительных погонных поперечной нагрузки (3.16) и крутящего момента (3.17), получаем

$$q_y = H v'' - (M_y \theta)'' - q_c; \quad (3.51)$$

$$m_x = -M_y v'' + H r^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta + q_c e_c. \quad (3.52)$$

Подставляя в уравнения (3.51) и (3.52) вместо v его значение из выражения (3.49), будем иметь

$$q_y = H e_c \theta'' - (M_y \theta)'' - q_c; \quad (3.53)$$

$$m_x = -M_y e_c \theta'' + H r^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta + q_c e_c. \quad (3.54)$$

Тогда уравнение устойчивости плоской формы изгиба примет вид

$$\int_0^l \left[EI_{\omega} (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z e_c^2 (\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)' e_c \theta + \right. \\ \left. + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 (e_1 - e_c) \theta^2 + q_2 (e_2 - e_c) \theta^2 \right] dx = 0. \quad (3.55)$$

При шарнирном закреплении концов нити в качестве функции, аппроксимирующей поворот θ , принимаем функцию (3.23). Подставляя значение θ из выражения (3.23) в уравнение устойчивости нити, раскрепленной связями по всей длине (3.55), и интегрируя полученное выражение, получаем уравнение

$$B^2 \left(EI_{\omega} \lambda^2 + GI_d + Hr^2 + EI_z e_c^2 \lambda^2 + He_c^2 + \right. \\ \left. + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin \lambda x dx \right) = 0. \quad (3.56)$$

Поскольку $B \neq 0$, то уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити, шарнирно раскрепленной связями по всей длине, примет вид

$$r^2 (P_{\omega} + H) + e_c^2 (P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \\ - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx = 0. \quad (3.57)$$

Для нити, работающей с изгибом от начальной нагрузки, уравнение (3.57) после некоторых преобразований запишем в виде

$$r^2 (P_{\omega} + H) + e_c^2 (P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \\ - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \frac{(q_1 + q_2) e_c}{1 + kH} = 0. \quad (3.58)$$

Уравнение (3.58) содержит две неизвестные величины – критический распор H и дополнительную критическую нагрузку q_2 . Для связи между критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение (3.31). Определяя из уравнения (3.31) дополнительную критическую нагрузку q_2 и подставляя ее значение в выражение (3.58), придем к уравнению, в котором неизвестным будет критический распор H

$$r^2 (P_{\omega} + H) + e_c^2 (P_z + H) + \frac{e_1 - e_2}{\lambda^2} q_1 + \\ + \frac{1}{\lambda^2} \left[(e_2 - e_c) (1 + kH) - \frac{3 + \pi^2}{6} e_c \right] \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} = 0. \quad (3.59)$$

Решая уравнение (3.59), определяем критический распор H , а подставляя его значение в уравнение (3.31) – дополнительную критическую нагрузку q_2 .

При работе нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (3.58) будем иметь

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \\ - \frac{3 + \pi^2}{3\pi^2} \frac{4y_0 e_c}{1 + kH} \left(\frac{q_2 l^2}{8y_0} + H_0 - H \right) = 0. \quad (3.60)$$

Связь между дополнительной критической нагрузкой q_2 и распором H задается уравнением (3.34). Определяя из него значение q_2 и подставляя его в уравнение (3.60), получаем уравнение с одним неизвестным – критическим распором H

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_2}{\lambda^2} q_1 - \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} \frac{b_2}{2b_3} + \\ + \frac{e_2 - e_c}{2b_3 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \frac{e_c}{1 + kH} \times \\ \times \left[\frac{1}{2b_3} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{b_2}{2b_3} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (3.61)$$

Вычисляя из уравнения (3.61) критический распор H и подставляя его в выражение (3.34), определяем дополнительную критическую нагрузку q_2 .

При воздействии несимметричной нагрузки. Рассмотрим нить, шарнирно закрепленную на опорах и загруженную начальной нагрузкой q_1 , равномерно распределенной по всему пролету, и дополнительной нагрузкой q_2 , равномерно распределенной на левой половине пролета. Будем считать, что при начальной нагрузке q_1 устойчивость плоской форма изгиба нити обеспечена. При увеличении дополнительной нагрузки q_2 в какой-то момент плоская форма изгиба нити конечной жесткости перестанет быть устойчивой и при определенном значении q_2 нить теряет устойчивость и изгибается по пространственной кривой.

В этом случае выражения для дополнительных погонных поперечной нагрузки q_y и крутящего момента m_x , возникающих от заданного напряженного состояния нити при изменении ее деформированного состояния, можно представить в виде

$$q_y = Hv'' - (M_y \theta)'', \quad (0 \leq x \leq l); \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta, & (0 \leq x \leq l/2), \\
m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta, & (l/2 \leq x \leq l).
\end{aligned} \quad (3.63)$$

Используя изложенный выше подход, получаем уравнение устойчивости нити конечной жесткости при несимметричной нагрузке

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l/2} \left[EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - Hv''v + (M_y \theta)'' v + \right. \\
& \quad \left. + M_y \theta v'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2 + q_2 e_2 \theta^2 \right] dx + \\
& + \int_{l/2}^l \left[EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - Hv''v + (M_y \theta)'' v + \right. \\
& \quad \left. + M_y \theta v'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2 \right] dx = 0.
\end{aligned} \quad (3.64)$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах граничные условия имеют вид (3.22). В качестве функций v и θ , удовлетворяющих граничным условиям, примем

$$v = A \sin 2\lambda x, \quad \theta = B \sin 2\lambda x. \quad (3.65)$$

Подставляя значения v и θ из формул (3.65) в уравнение устойчивости и выполняя интегрирование полученного выражения, придем к уравнению

$$\begin{aligned}
& r^2 (P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{1}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + 0,5 q_2 e_2) \right] - \\
& - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 2\lambda x dx \right]^2 = 0.
\end{aligned} \quad (3.66)$$

Рассмотрим нить, работающую с изгибом от начальной нагрузки. Выражая изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , по формуле (3.28) и подставляя его значение, вычисленное для случая несимметричной нагрузки, в уравнение (3.66), получим выражение

$$\begin{aligned}
& r^2 (P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{1}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + 0,5 q_2 e_2) \right] - \\
& - \left(\frac{3 + 4\pi^2}{48\lambda^2} \right)^2 \left(\frac{q_1 + 0,5 q_2}{1 + kH} \right)^2 = 0.
\end{aligned} \quad (3.67)$$

Для связи между дополнительной критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{17(q_1 + 0,5q_2)^2 l^6 EF}{40320(EI_y)^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320(EI_y)^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (3.68)$$

Определяя из уравнения (3.68) дополнительную нагрузку q_2 и подставляя ее в выражение (3.67), получаем уравнение для определения критического распора H

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1 - e_2}{4r^2 \lambda^2} q_1 + \frac{e_2}{4r^2 \lambda^2} (1 + kH) \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} \right] - \left(\frac{3 + 4\pi^2}{48\lambda^2} \right)^2 (a_1^2 H + a_2^2) = 0. \quad (3.69)$$

При работе нити конечной жесткости без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (3.67) будем иметь

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1}{4r^2 \lambda^2} q_1 + \frac{e_2}{8r^2 \lambda^2} q_2 \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \frac{1}{(1 + kH)^2} \left[\frac{(3 + 4\pi^2)(q_1 + 0,5q_2)}{4(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0, \quad (3.70)$$

а вместо уравнения (3.68) –

$$\frac{EF}{(1 + kH)^2} \left[\frac{17l^6 (q_1 + 0,5q_2)^2}{40320(EI_y)^2} + \frac{(q_1 + 0,5q_2)y_0 l^2}{15EI_y} + \frac{8y_0^2}{3l^2} \right] = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0. \quad (3.71)$$

Уравнение для определения критического распора примет вид

$$r^2(P_z^* + H)(1 + kH)^2 \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1 - e_2}{4r^2 \lambda^2} - \frac{e_2 b_2}{8b_3 r^2 \lambda^2} + \frac{e_2}{8b_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \left[\frac{3 + 4\pi^2}{8b_3(3 + \pi^2)} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{b_2(3 + 4\pi^2)}{8b_3(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0. \quad (3.72)$$

Выведем уравнение пространственной устойчивости нити конечной жесткости, раскрепленной в горизонтальной плоскости. Примем, что линия раскрепления нити проходит на расстоянии e_c от центральной оси поперечного сечения нити y . Расположение начальной q_1 и дополнительной q_2 нагрузок по высоте сечения показано на рис. 3.7.

Как и в случае с равномерно распределенной нагрузкой, горизонтальный прогиб оси нити при повороте поперечного сечения вокруг точки закрепления равен (3.49); погонная горизонтальная реакция, возникающая в связях, равна q_c , а погонный крутящий момент, возникающий от этой реакции, $m_c = q_c e_c$.

Тогда дополнительная погонная поперечная нагрузка q_y определяется соотношением (3.51), а дополнительный погонный крутящий момент –

$$\begin{aligned} m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta + q_c e_c, \quad (0 \leq x \leq l/2), \\ m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta + q_c e_c, \quad (l/2 \leq x \leq l). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Заменяя в формулах (3.51) и (3.73) горизонтальный прогиб оси нити v в соответствии с (3.49) и подставляя полученные выражения в (3.18) и (3.20), находим уравнение устойчивости нити конечной жесткости в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} \left[EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z e_c^2 (\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)'' e_c \theta + \right. \\ & \quad \left. + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1(e_1 - e_c)\theta^2 + q_2(e_2 - e_c)\theta^2 \right] dx + \\ & \quad + \int_{l/2}^l \left[EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z e_c^2 (\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)'' e_c \theta + \right. \\ & \quad \left. + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1(e_1 - e_c)\theta^2 \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Считая, что концы нити конечной жесткости шарнирно закреплены, примем в качестве аппроксимирующей функции θ функцию вида (3.65).

Подставляя значение θ в выражение (3.74), получаем уравнение устойчивости нити конечной жесткости, шарнирно закрепленной связями по всей длине

$$\begin{aligned} & r^2(P_\omega^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \\ & \quad - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin^2 2\lambda x dx = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Если нить конечной жесткости работает с изгибом от начальной нагрузки, то уравнение устойчивости принимает вид

$$r^2(P_\omega^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \frac{3 + 4\pi^2}{24\lambda^2} \frac{(q_1 + 0,5q_2)e_c}{1 + kH} = 0. \quad (3.76)$$

Уравнение неразрывности деформаций будет иметь вид (3.68), а уравнение для определения критического распора H –

$$r^2(P_\omega^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{1}{4\lambda^2} \left[(e_2 - e_c)(1 + kH) - \frac{3 + 4\pi^2}{6} e_c \right] \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} = 0. \quad (3.77)$$

После определения из уравнения (3.77) критического распора H из соотношения (3.68) находим дополнительную критическую нагрузку q_2 .

Если нить работает без изгиба от начальной нагрузки, то вместо уравнения (3.76) будем иметь

$$r^2(P_\omega^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \frac{e_c}{1 + kH} \left[\frac{(3 + 4\pi^2)(q_1 + 0,5q_2)}{4(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (3.78)$$

В качестве уравнения, связывающего критический распор с критической нагрузкой, воспользуемся уравнением (3.71).

Уравнение для определения критического распора будет

$$r^2(P_\omega^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_2}{4\lambda^2} q_1 - \frac{e_2 - e_c}{4\lambda^2} \frac{b_2}{2b_3} + \frac{e_2 - e_c}{8b_3\lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1b_3} - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{e_c}{1 + kH} \times \left[\frac{3 + 4\pi^2}{8b_3(3 + \pi^2)} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1b_3} - \frac{b_2(3 + 4\pi^2)}{8b_3(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (3.79)$$

После определения из уравнения (3.79) критического распора H находим критическую нагрузку q_2 из выражения (3.71).

Глава 4. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 4.1. Исходные допущения

Теория деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости базируется практически на тех же допущениях, что и теория расчета нитей при работе материала в пределах упругости. Единственная дополнительная предпосылка связана с идеализацией диаграммы напряжение–деформация реальных материалов, которая в действительности оказывается достаточно сложной для непосредственного применения при расчете конструкций. В теории пластичности такая идеализация диаграммы сводится к отказу от учета присущих пластическому деформированию специфических эффектов, в том числе ползучести, гистерезиса и др. [78, 101, 107, 236]. Поэтому реальная зависимость между напряжениями и деформациями заменяется некоей аналитической кривой. Обычно эту диаграмму представляют в виде ломаной линии с двумя участками, реже применяются полигональная, параболическая и другие степенные аппроксимации [24, 78, 107, 131, 198].

Чаще других используются четыре модели работы материала: жестко-пластического, жестко-упрочняющегося, упруго-пластического и упруго-пластического с линейным упрочнением (рис. 4.1).

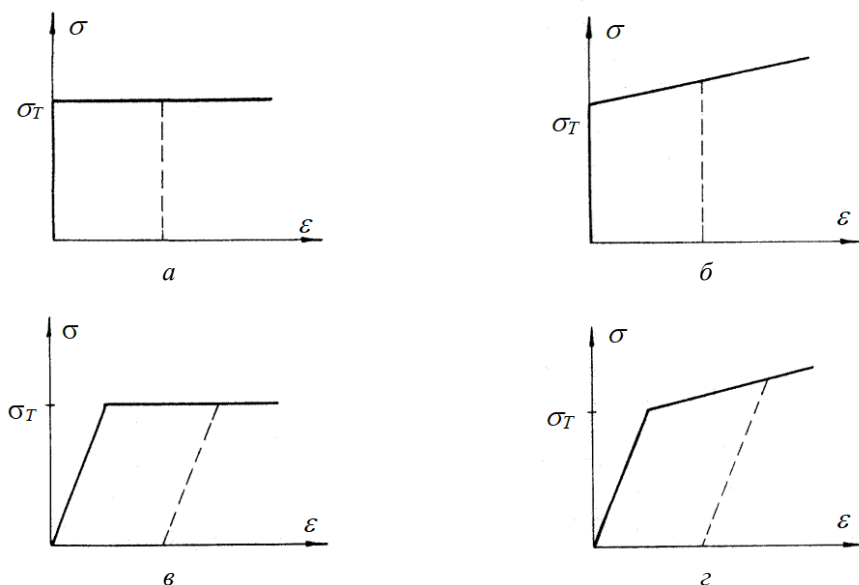


Рис. 4.1. Идеализированные диаграммы напряжение–деформация материала:
а – жестко-пластического; б – жестко-упрочняющегося;
в – упруго-пластического; г – то же, с линейным упрочнением

Из указанных моделей наиболее широко применяется модель идеального упруго-пластического материала (материала Прандтля). Как показали многочисленные исследования [22, 107, 175, 195, 209, 260], такая аппроксимация в целом вполне удовлетворительно отражает работу многих реальных материалов и позволяет более полно по сравнению с упругой стадией работы проанализировать поведение и определить дополнительные резервы прочности конструкции. В дальнейшем при изучении напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости за пределом упругости будем считать материал нити идеальным упруго-пластическим.

§ 4.2. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального упруго-пластического материала

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние упруго-пластической нити конечной жесткости с поперечным сечением идеального профиля, состоящего из двух одинаковых имеющих суммарную площадь F тонких поясов и отстоящих один от другого на расстоянии h (рис. 4.2, *a*). Как показано в работах [24, 145, 246], использование поперечного сечения нити такого профиля несколько облегчает решение задачи и относительно упрощает расчетные зависимости. Однако принципиальные изменения в соотношения при этом не вносятся, что позволяет на данном примере показать последовательность решения и вид разрешающих уравнений, соответствующих предлагаемой теории расчета.

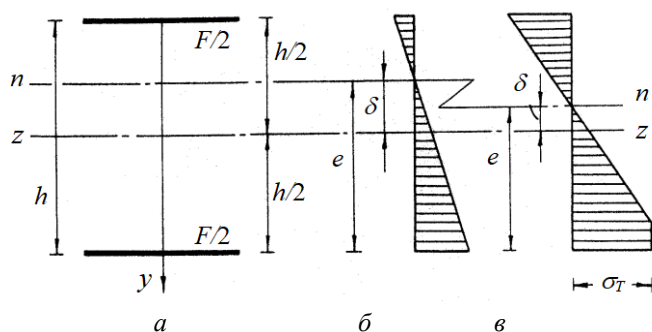


Рис. 4.2. Работа идеального профиля упруго-пластической нити конечной жесткости:
a – сечение профиля нити; *б*, *в* – эпюры напряжений в двух стадиях деформирования нити

Поведение поперечного сечения нити конечной жесткости на всех стадиях работы материала характеризуется зависимостью между распором, изгибающим моментом и кривизной нити. Для ее вывода спроектируем действующие в плоскости сечения элементарные силы на горизонтальную ось $z - z$

и составим сумму моментов этих сил относительно нейтральной оси $n - n$.

$$\int_F \sigma dF = H, \quad \int_F \sigma y dF = M_z + H\delta. \quad (4.1)$$

Входящее в эти зависимости нормальное напряжение σ является известной функцией относительного удлинения ε , вид которой устанавливается диаграммой растяжения материала. Однако в соответствии с гипотезой плоских сечений напряжения в волокне материала можно также представить как функцию кривизны оси нити k и расстояния y от нейтральной оси до рассматриваемого волокна. Записывая площадь элемента сечения dF в виде $dF = b(y)dy$, где $b(y)$ – ширина профиля нити на расстоянии y от оси $n - n$, преобразуем равенства (4.1) следующим образом:

$$\int_{y_1}^{y_2} \sigma(ky)b(y)dy = H, \quad \int_{y_1}^{y_2} \sigma(ky)b(y)ydy = M_z + H\delta, \quad (4.2)$$

пределы интегрирования в которых $y_1 = -(h - e)$, $y_2 = -e$.

Для нити идеального профиля (см. рис. 4.2 а) имеем

$$\begin{aligned} b(y) &= 0 & \text{при } -(h - e) < y < e, \\ b(y) &= \frac{F}{2} \frac{1}{dy} & \text{при } y = -(h - e), y = e. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя указанные условия в уравнения равновесия (4.2), получим

$$\begin{aligned} \{\sigma[-k(h - e)] + \sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= H, \\ \{-(h - e)\sigma[-k(h - e)] + e\sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Закон изменения входящего в последние соотношения нормального напряжения σ в рассматриваемом нами случае идеального упруго-пластического материала можно записать в виде

$$\sigma = Eky \text{ при } |y| \leq \frac{\sigma_T}{Ek}, \quad \sigma = \sigma_T \text{sign } y \text{ при } |y| \geq \frac{\sigma_T}{Ek}, \quad (4.5)$$

где $\text{sign } y = 1$ при $y > 0$ и $\text{sign } y = -1$ при $y < 0$.

Если действующие в нити конечной жесткости усилия не вызывают ни в одном элементе поперечного сечения напряжений текучести, то нить работает в упругой стадии (рис. 4.2, б). Тогда, подставляя первое выражение из (4.5) в уравнения равновесия (4.4), получаем

$$[-Ek(h - e) + Eke] \frac{F}{2} = H, \quad [Ek(h - e)^2 + Eke^2] \frac{F}{2} = M_z + H\delta. \quad (4.6)$$

Учитывая, что параметр e можно записать в виде

$$e = \frac{h}{2} + \delta, \quad (4.7)$$

а δ представить известной формулой [43, 147]

$$\delta = \frac{\varepsilon_0}{k}, \quad (4.8)$$

где ε_0 – относительное удлинение оси нити, после некоторых преобразований получим два уравнения, определяющие соответственно кривизну и относительное удлинение оси нити:

$$\frac{EI k}{M_{np}} = \frac{M_z}{M_{np}}, \quad \frac{E \varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{H}{H_{np}}. \quad (4.9)$$

Здесь принято, что $I = Fh^2/4$ – момент инерции, $M_{np} = \sigma_T Fh/2$ – предельный изгибающий момент и $H_{np} = \sigma_T F$ – предельный распор нити идеального профиля.

Упругая стадия работы профиля закончится, когда напряжения в нижнем (наиболее удаленном от нейтральной оси) волокне достигнут предела текучести. После этого в соответствии с принятой диаграммой растяжения их величина возрастет не будет. Поэтому при дальнейшем увеличении усилий в нити наступает вторая – упруго-пластическая стадия работы, когда в нижнем волокне появляется и по мере роста изгибающих моментов и распора утолщается пластический слой.

Условие появления первых пластических деформаций можно определить с помощью первого выражения из (4.5), устанавливающего распределение напряжений по сечению в упругой области. Приравняв в нем $y = e$ и $\sigma = \sigma_T$, получим

$$Eke = \sigma_T, \quad (4.10)$$

откуда после исключения величин e и k и использования формул (4.7), (4.8) и первого выражения из (4.9) условие появления первых пластических деформаций приводится к виду

$$\frac{M_z}{M_{np}} + \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0. \quad (4.11)$$

По достижении внешней нагрузкой величины, при которой начинает выполняться последнее уравнение, начинается вторая – упруго-пластическая стадия деформирования, когда в сечении развивается область, охваченная пластическими деформациями (рис. 4.2, в). Подставив формулы (4.5) в уравнения равновесия (4.4), найдем

$$[-Ek(h-e) + \sigma_T] \frac{F}{2} = H, \quad [Ek(h-e)^2 + \sigma_T e] \frac{F}{2} = M_z + H\delta. \quad (4.12)$$

Преобразовывая равенства (4.12) аналогично соотношениям (4.6), приходим к зависимостям, характеризующим кривизну и относительное удлинение оси нити:

$$\frac{M_z}{M_{np}} + \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0; \quad (4.13)$$

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{Elk}{M_{np}} + 2 \frac{H}{H_{np}} - 1. \quad (4.14)$$

Заметим следующее. Если сравнить соотношения (4.11) и (4.13), первое из которых отражает условия появления пластических деформаций в поперечных сечениях, а второе характеризует кривизну нити в упруго-пластической стадии деформирования (вырождающееся в данном случае в зависимость между изгибающим моментом и распором), то увидим их полную тождественность. Это свидетельствует о том, что появление в сечениях нити конечной жесткости идеального профиля первых пластических деформаций означает реализацию в нем предельного состояния. Отсюда следует, что деформирование нити идеального профиля сопровождается образованием в ее пролете только двух типов участков: упругих и пластических. Последнее, как указывалось выше, несколько облегчает дальнейшее решение задачи, так как позволяет избежать рассмотрения упруго-пластических участков нити конечной жесткости, не внося при этом принципиальных изменений в расчетные зависимости.

Отметим также, что работа поперечных сечений балок за пределом упругости изучалась ранее Л.М.Беленьким [24], И.Л.Диковичем [81], С.Д.Лейтесом [145] и некоторыми другими авторами. Причем полученные ими результаты, хотя и отличаются по форме представления, но, тем не менее, достаточно хорошо согласуются с полученными в данном параграфе.

§ 4.3. Вывод общих дифференциальных уравнений

Применим полученные выше результаты для вывода уточненной теории деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости.

Допустим, что нить, работающая с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, с поперечным сечением площадью F , моментом инерции I и модулем упругости E нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = q_1 + q_2$ и находится в состоянии равновесия (рис. 4.3, а). Будем также считать, что нить на опорах закреплена шарнирно, ее материал является идеальным упруго-пластическим, а поперечное сечение имеет идеальный профиль. Выберем, как и ранее, в качестве незави-

симой переменной площадь поперечного сечения F , а в качестве искомой функции примем распор H .

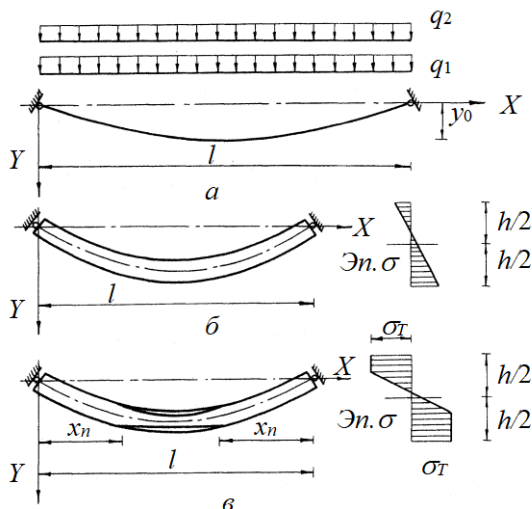


Рис. 4.3. Деформирование упруго-пластической нити конечной жесткости:
 а – расчетная схема нити; б – упругая фаза работы;
 в – упруго-пластическая фаза работы

Поведение нити конечной жесткости в первой фазе изгиба (рис. 4.3, б), когда все ее поперечные сечения работают в упругой стадии, подробно было рассмотрено ранее. Поэтому здесь мы на этом останавливаться не будем.

Упругая фаза изгиба кончается, когда в наиболее нагруженном сечении нити изгибающий момент и распор достигают значений, при которых появляются первые пластические деформации. Для этого значения момента и распора должны удовлетворять условию (4.11).

Определив из уравнения (2.5) изгибающий момент в наиболее нагруженном сечении нити, в данном случае в середине пролета, и подставив его в соотношение (4.11), получим условие появления в нити первых пластических деформаций

$$\frac{6\mu EI}{5l^2 H + 48EI} + \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0, \quad (4.15)$$

где $\mu = ql^2/M_{np}$ – безразмерный параметр поперечной нагрузки.

По достижении внешней нагрузкой значения, определяемого последним выражением, начинается вторая фаза изгиба, когда образовавшийся в момент окончания первой фазы в середине пролета нити пластический шарнир трансформируется в пластический участок конечной протяженности (рис. 4.3, в). Определим расчетные зависимости при работе нити конечной жесткости в этой стадии изгиба. Для этого используем принцип возможных перемещений.

Если площадь поперечного сечения нити получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δF , то изменятся внутренние усилия, действующие в нити, и ее геометрия. Изгибающий момент M_z получит некоторое приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy . Кроме того распор получит некоторое приращение своей величины, равное δH .

Выражения, определяющие изогнутую ось нити и распределение изгибающих моментов для упругих участков ($l \leq x \leq x_n$, $l - x_n \leq x \leq l$) по-прежнему будут иметь вид (2.3) и (2.5), а для пластического участка ($x_n \leq x \leq l - x_n$) с учетом уравнения (4.13) их можно записать так:

$$y = \frac{M_z^0}{H} - \frac{M_{np}}{H} \left(1 - \frac{H}{H_{np}} \right); \quad (4.16)$$

$$M_z = M_{np} \left(1 - \frac{H}{H_{np}} \right). \quad (4.17)$$

Здесь принято, что x_n – координата границы между упругим и пластическим участками. Соответственно приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков также сохраняют свой вид (2.7), (2.9), (2.11) и (2.12), а для пластического участка получим следующие выражения:

$$\delta y = - \frac{M_z^0 - M_{np}}{H(H + \delta H)} \delta H; \quad (4.18)$$

$$\delta M_z = - \frac{M_{np}}{H_{np}} \delta H; \quad (4.19)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{E} \left[\frac{q}{M_{np}} \frac{HE\delta l - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] dx; \quad (4.20)$$

$$\delta dl = \frac{M_{np}(HE\delta l - EI\delta H - H_{np}E\delta l)}{EIH_{np}(EI + E\delta l)} dx. \quad (4.21)$$

При этом относительное удлинение оси пластического участка нити конечной жесткости идеального профиля определялось по формуле (4.14), где было принято, что кривизна оси пластического участка $k = q/H$ [81].

Найдем работу внешних и внутренних сил. Поскольку на нить действует только равномерно распределенная нагрузка, то для работы внешних сил имеем

$$U_1 = 2 \int_0^{x_n} q \delta y dx + \int_{x_n}^{l-x_n} q \delta y dx. \quad (4.22)$$

Работа внутренних сил нити конечной жесткости состоит из двух слагаемых: работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M + \delta M$ на изменение угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$:

$$U_2^1 = -2 \int_0^{x_n} (H + \delta H) \delta dx - \int_{x_n}^{l-x_n} (H + \delta H) \delta dx; \quad (4.23)$$

$$U_2^2 = -2 \int_0^{x_n} (M + \delta M) \delta d\varphi - \int_{x_n}^{l-x_n} (M + \delta M) \delta d\varphi. \quad (4.24)$$

В соответствии с принципом Лагранжа, согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, подставляя в уравнения (4.22)–(4.24) необходимые соотношения для внутренних сил и возможных перемещений, получим

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^{x_n} \frac{q M_z^{\delta} (y^{\delta})^2 \delta H}{(H y^{\delta} + \delta H y^{\delta} + M_z^{\delta})(H y^{\delta} + M_z^{\delta})} dx - \\ & -2 \int_0^{x_n} \frac{EF \delta H - HE \delta F}{EF(EF + E \delta F)} (H + \delta H) dx - \\ & - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_n}^{l-x_n} \left[\frac{q}{M_{np}} \frac{HE \delta I - EI \delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{q(M_z^{\delta} - M_{np}) \delta H}{H(H + \delta H)} dx + \\ & + 2 \int_0^{x_n} \frac{(M_z^{\delta})^4 (y^{\delta} \delta H EI + y^{\delta} HE \delta I + y^{\delta} \delta H EI + M_z^{\delta} E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(H y^{\delta} + M_z^{\delta})(H y^{\delta} + \delta H y^{\delta} + M_z^{\delta})^2} dx - \\ & - \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{M_{np} (HE \delta I - \delta H EI - H_{np} E \delta I)}{EI H_{np}^2 (EI + E \delta I)} \times \\ & \times [M_{np} H_{np} - M_{np} (H + \delta H)] dx = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Разделив уравнение (4.25) почленно на δH и перейдя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{x_n H^2} \left(I_1 + \frac{1}{H^2} I_2 - I_3 \right) - \frac{F^2}{H^2} \left(1 - \frac{l}{2x_n} \right) \times \\ \times \left[\frac{qEIH_{np}}{HFM_{np}} - \frac{M_{np}^2}{IH_{np}^2} (H - H_{np}) - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

интегральные коэффициенты которого I_1 , I_2 и I_3 имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 = q \int_0^{x_n} \frac{M_z^{\sigma} m^2}{(Hm + EIM_z^{\sigma})^2} dx, \quad I_2 = \frac{q}{2} \int_{x_n}^{l-x_n} (M_z^{\sigma} - M_{np}) dx, \\ I_3 = EI \int_0^{x_n} \frac{(M_z^{\sigma})^4 m}{(Hm + EIM_z^{\sigma})^3} dx, \end{aligned}$$

а m по-прежнему находим из формулы (2.21).

Решив последнее уравнение совместно с уравнением (4.13), которое в данном случае примет вид

$$\frac{6\mu EI(lx_n - x_n^2)^2}{l^2 H(l^3 x_n - 2lx_n^3 + x_n^4) + 12EI l^2 (lx_n - x_n^2)} + \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0, \quad (4.27)$$

найдем распор и координату границы между упругим и пластическим участками нити при конкретных размерах поперечного сечения и величине внешней нагрузки. Уравнения (4.26) будем решать путем разложения искомой функции (распора) в ряд Тейлора, а ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов – по формулам (2.3) и (2.5) для упругого и (4.16), (4.17) для пластического участков соответственно.

Нить будет работать во второй фазе до тех пор, пока длина упругого участка не обратится в нуль. Приравнявая в выражении (4.27) $x_n = 0$, найдем распор в момент окончания фазы: $H = H_{np}$. При этом нить конечной жесткости начинает работать как пластическая система, подобная гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному. Тогда предельную поперечную нагрузку можно определить, воспользовавшись известным решением для гибких нитей [156]

$$\mu_{np} = \frac{H_{np} l}{M_{np}} \sqrt{24 \frac{H_{np} L_0^3}{EF l^3} + 64 \frac{y_0^2}{l^2}}. \quad (4.28)$$

Форму изогнутой оси полностью пластической нити конечной жесткости можно представить зависимостью (4.16), приняв, что $H = H_{np}$. В частности, в середине пролета ордината кривой провисания нити будет

$$y = \frac{\mu_{np} M_{np}}{8H_{np}}. \quad (4.29)$$

Таким образом, полностью определено поведение нити конечной жесткости с идеальным поперечным сечением за пределом упругости и установлены зависимости для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния нити во всех стадиях ее работы. Рассмотрение других типов поперечных сечений, как уже отмечалось выше, не вносит в решение принципиальных изменений. В этом случае общий путь решения задачи будет таким же, необходимо только дополнительно рассмотреть упруго-пластическую фазу изгиба и ввести соответствующие члены в уравнение для определения распора.

Необходимо также отметить характерную особенность предлагаемого метода, заключающуюся в автоматическом соблюдении условий неразрывности в местах сопряжения смежных зон по длине нити, поскольку формулы (2.1), (4.16) и (4.17) получены, исходя из условий равновесия, справедливых как для упругих, так и для пластических участков. Используемое при выводе соотношений (2.3) и (2.5) выражение (2.2) вносит в решение погрешность, не превышающую нескольких процентов.

§ 4.4. Влияние пластических шарниров на работу нити конечной жесткости

При выводе уравнения (4.26) считалось, что функция относительного удлинения оси нити конечной жесткости по всей длине нити и во всех фазах ее работы есть величина непрерывная и не претерпевает в процессе своего изменения изломов и разрывов. Предположим теперь, что данное допущение не является строгим и $\varepsilon_0(x)$ по длине нити терпит разрыв. Иными словами, в случае использования модели идеального упруго-пластического материала, деформирование нити конечной жесткости при определенных типах нагружения и граничных условиях может сопровождаться образованием в ее поперечных сечениях стационарных пластических шарниров, вызывающих излом оси нити [43, 81, 175]. Последнее обстоятельство требует дополнения дифференциального уравнения (4.26) двумя новыми членами, входящими в работу внутренних сил. Первый из них отражает работу действующего в нити распора $H + \delta H$ на удлинении оси в пластическом шарнире, а второй – работу изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между примыкающими к пластическому шарниру поперечными сечениями нити (т. е. на угле излома оси нити). Найдем их значения.

Рассмотрим деформированное состояние нити конечной жесткости в стадии пластического шарнира (рис. 4.4).

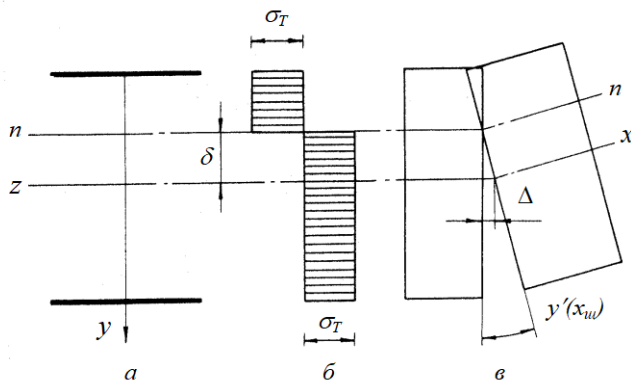


Рис. 4.4. Работа идеального поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости в стадии пластического шарнира:
 а – профиль нити; б – эпюра напряжений; в – деформированный элемент нити

Из рис. 4.4 видно, что в сечениях с пластическими шарнирами относительное удлинение всех волокон нити, кроме волокна $n - n$, равно бесконечности. Точно также равно бесконечности и относительное удлинение оси нити. Но поскольку расстояние между нейтральной осью и осью $z - z$ равно δ , то абсолютное удлинение оси нити конечной жесткости в пластическом шарнире можно представить в виде

$$\Delta = \delta y'(x_u) = \delta \frac{dy(x_u)}{dx}, \quad (4.30)$$

где x_u – координата пластического шарнира по длине нити; $y'(x_u)$ – угол излома оси нити в пластическом шарнире.

Поскольку образование пластического шарнира свидетельствует о реализации в поперечном сечении нити предельного состояния, то для нахождения расстояния между осями $n - n$ и $z - z$ можем применить формулу [24, 81]

$$\delta = -\frac{dM_z}{dH}, \quad (4.31)$$

которая в рассматриваемом нами случае нити конечной жесткости идеального профиля с учетом (4.13) примет вид

$$\delta = \frac{M_{np}}{H_{np}}. \quad (4.32)$$

Используя последнюю зависимость, выражения для указанных выше дополнительных членов работы внутренних сил нити запишем следующим образом:

$$U_2^3 = -\sum \frac{M_{np}}{H_{np}} \frac{dy(x_u)}{dx} (H + \delta H); \quad (4.33)$$

$$U_2^4 = -\sum \frac{M_{np}}{H_{np}} \frac{dy(x_u)}{dx} (H_{np} - H - \delta H), \quad (4.34)$$

причем количество членов суммы в этих зависимостях равно числу образовавшихся в нити пластических шарниров. При этом необходимо иметь в виду, что величина угла излома оси определяется путем однократного дифференцирования уравнения кривой провисания (4.16).

Как уже отмечалось, учитывая соотношения (4.33) и (4.34) при выводе дифференциального уравнения для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости (4.26), приходим к варианту уравнения нити идеального профиля, некоторые сечения которой находятся в предельном состоянии, т. е. работают в стадии пластического шарнира. Подобным образом может быть рассмотрено любое другое поперечное сечение и получены выражения для определения дополнительной работы внутренних сил при любой форме профиля нити. Только при нахождении расстояния δ в формулу (4.31) необходимо подставлять соответствующее конкретному профилю уравнение предельной кривой.

§ 4.5. Учет упрочнения материала

Известно, что одной из наиболее широко применяемых в теории пластичности является диаграмма идеального упруго-пластического материала, использование которой позволяет более полно проанализировать поведение и определить дополнительные резервы прочности конструкции. Уточнить результаты решения задач упруго-пластического деформирования и лучше отразить действительный характер работы материала можно, учитывая его упрочнение. В ряде случаев такое уточнение диаграммы $\sigma - \varepsilon$ приводит к более достоверным решениям и дает возможность выявить неучтенные ранее запасы прочности конструкции.

Как и в случае упруго-пластической нити конечной жесткости, теория расчета нити из упрочняющегося материала также базируется на допущениях и предпосылках, принятых при рассмотрении работы нитей в пределах упругости. Однако далее при исследовании деформирования нити конечной жесткости используется другая модель материала, у которой зависимость «напряжение–деформация» представляется диаграммой идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением (см. рис. 4.1, *з*). При этом необходимо отметить, что общая схема расчета нити, обладающей упрочнением, практически не отличается от пути решения задачи деформирования идеально-пластических нитей конечной жесткости и основана на применении при выводе расчетных зависимостей принципа возможных перемещений.

Другой важной задачей теории пластичности является задача расчета конструкции при уменьшении действующих на нее нагрузок, т. е. в случае разгрузки. Это связано с тем, что при уменьшении нагрузки поведение мате-

риала, получившего пластические деформации, описывается законом, отличающимся от закона нагружения. При разгрузке упруго-пластический материал ведет себя подобно упругому [22, 101, 168, 198]. Работа различных материалов в стадии разгрузки показана на рис.4.1 пунктирной линией, параллельной начальному участку диаграммы растяжения. Такая разгрузка продолжается до тех пор, пока напряжения не достигнут предела текучести противоположного знака. Потом вновь начинается пластическое течение.

Несовпадение зависимости $\sigma - \varepsilon$ при нагрузке и разгрузке приводит к неоднозначности связи между напряжениями и деформациями в пластической области, т. е. одним и тем же напряжениям могут соответствовать разные удлинения. В связи с этим после прекращения действия нагрузки конструкция не возвращается в исходное состояние, а в ней появляются остаточные деформации [175, 209, 260]. Поэтому, чтобы установить решение конкретной упруго-пластической задачи, нужно знать не только действующую нагрузку, но и то, что предшествовало рассматриваемому напряженно-деформированному состоянию. Иными словами, в отличие от упругой стадии дополнительно необходима информация об истории нагружения конструкции. Сказанное особенно актуально применительно к висячим системам, у которых даже небольшие остаточные деформации могут внести значительные коррективы в напряженно-деформированное состояние системы при новом нагружении [88, 205, 298].

При решении указанной задачи принимается, что зависимости $\sigma - \varepsilon$ при разгрузке и повторном нагружении совпадают вплоть до наибольших напряжений предшествовавшего нагружения, т. е. не учитывается явление гистерезиса. Кроме того, приняв во внимание условия работы рассматриваемых висячих систем, считаем, что они не подвержены переменным и циклическим нагружениям [84, 165, 180, 190, 233]. Отметим, что такие допущения являются общепринятыми при рассмотрении работы различных строительных конструкций за пределом упругости [24, 81, 175].

Работа поперечного сечения упруго-пластической нити с линейным упрочнением. Рассмотрим работу поперечного сечения нити конечной жесткости, считая материал упруго-пластическим с линейным упрочнением. Для этого обратимся к составленным ранее условиям равновесия усилий, действующих в поперечном сечении (4.1) и рассмотрим на их основе работу поперечного сечения нити конечной жесткости идеального профиля (рис. 4.5, а). Уравнения равновесия, как это было показано выше, в данном случае примут вид

$$\begin{aligned} \{\sigma[-k(h-e)] + \sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= H, \\ \{-(h-e)\sigma[-k(h-e)] + e\sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \quad (4.35)$$

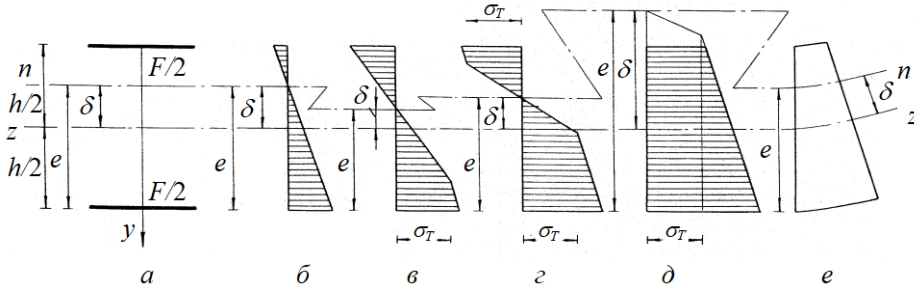


Рис. 4.5. Работа поперечного сечения идеального профиля нити конечной жесткости из упруго-пластического материала с линейным упрочнением:
 а – общий вид профиля нити; б–д – эпюры напряжений в четырех стадиях работы нити; е – деформированный элемент нити

Входящее в соотношения (4.35) нормальное напряжение σ в случае упруго-пластического материала с линейным упрочнением определяется по известным формулам [22]

$$\sigma = Eky \quad \text{при} \quad |y| \leq \frac{\sigma_T}{Ek},$$

$$\sigma = \sigma_T \left(1 - \frac{E}{E_0} \right) \text{sign } y + E_0ky \quad \text{при} \quad |y| \geq \frac{\sigma_T}{Ek}, \quad (4.36)$$

где E и E_0 – соответственно модули упругости и упрочнения; $\text{sign } y = 1$ при $y > 0$ и $\text{sign } y = -1$ при $y < 0$.

В общем случае необходимо рассмотреть четыре стадии работы сечения: упругую, упруго-пластическую с одной областью пластичности, упруго-пластическую с двумя областями пластичности и полностью пластическую.

Работа поперечного сечения нити в первой (упругой) стадии деформирования будет одинакова, независимо от свойств материала в пластической области. Поэтому в данном случае соотношения, характеризующие кривизну и относительное удлинение оси нити, будут иметь вид, аналогичный (4.9), а условие окончания упругой стадии работы – (4.11).

Рассмотрим вторую стадию работы, когда деформирование нити сопровождается развитием в сечении участка, охваченного пластическими деформациями (рис. 4.5, в). Подставляя зависимости (4.36) в уравнения равновесия (4.35), получим выражения:

$$\left[-Ek(h-e) + \sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0ke \right] \frac{F}{2} = H,$$

$$\left[Ek(h-e)^2 + \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0ke^2 \right] \frac{F}{2} = M_z + H\delta. \quad (4.37)$$

Учитывая формулы (4.7) и (4.8) в последних зависимостях, получим формулы для кривизны и относительного удлинения оси нити при работе сечения во второй стадии:

$$\begin{aligned}\frac{Elk}{M_{np}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_z}{M_{np}} - \frac{H}{H_{np}} + 1 \right) + \frac{E}{E_0} \left(\frac{M_z}{M_{np}} + \frac{H}{H_{np}} - 1 \right) \right], \\ \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} &= \frac{1}{1 + E_0/E} \left[\left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \left(\frac{Elk}{M_{np}} - 1 \right) + 2 \frac{H}{H_{np}} \right].\end{aligned}\quad (4.38)$$

Вторая стадия работы поперечного сечения продолжается до тех пор, пока пластические деформации локализуются в районе нижнего пояса нити. При еще большем возрастании внутренних усилий напряжение достигнет предела текучести в верхнем поясе. Принимая во внимание, что знак этих напряжений обратен знаку напряжений с противоположной стороны поперечного сечения, составим условие окончания второй стадии работы. Для этого используем первое выражение из (4.36), принимая в нем $y = -(h-e)$ и $\sigma = -\sigma_T$. Тогда имеем

$$Ek(h-e) = \sigma_T, \quad (4.39)$$

откуда с учетом (4.7), (4.8) и (4.38) находим

$$\frac{M_z}{M_{np}} - \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0. \quad (4.40)$$

В дальнейшем в третьей стадии работы пластические деформации развиваются на двух участках, расположенных по разные стороны как от нейтральной оси, так и от оси симметрии поперечного сечения (рис. 4.5, з). В этом случае уравнения (4.35) принимают вид

$$\begin{aligned}[-E_0k(h-e) + E_0ke] \frac{F}{2} &= H, \\ \left[\sigma_T(h-e) \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0k(h-e)^2 + \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0ke^2 \right] \frac{F}{2} &= \\ &= M_z + H\delta.\end{aligned}\quad (4.41)$$

Исключая из данных зависимостей величины e и δ и используя формулы (4.7) и (4.8), выражения, определяющие кривизну и относительное удлинение оси нити при работе сечения в третьей стадии, можно записать так:

$$\frac{Elk}{M_{np}} = \frac{E}{E_0} \frac{M_z}{M_{np}} - \frac{E}{E_0} + 1, \quad \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{E}{E_0} \frac{H}{H_{np}}. \quad (4.42)$$

Отметим следующее. Как уже указывалось выше, если материал является упруго-пластическим с линейным упрочнением, то кроме рассмотренных теоретически возможна еще вместо третьей четвертая стадия работы поперечного сечения. Суть ее состоит в том, что сечение полностью охватывается пластическими деформациями, причем и у нижнего и у верхнего пояса напряжения имеют один знак (рис. 4.5, δ). Практически это становится возможным в нитях конечной жесткости, у которых напряжения растяжения во много раз превышают напряжения изгиба, т. е. в случае нитей конечной жесткости, приближающихся по характеру своей работы к абсолютно гибким. Обычно такие нити сразу не отвечают требованиям, предъявляемым к нитям конечной жесткости в части отношения напряжений от изгиба к напряжениям от растяжения, и их нужно рассчитывать по теории гибких нитей. Однако полностью исключить возможность такого поведения сечения нити конечной жесткости нельзя. Поэтому выведем расчетные зависимости для этого случая работы поперечного сечения.

Условие окончания второй и начала четвертой стадии получим с помощью первого выражения из (4.36), положив в нем

$$y = (y-e), \sigma = \sigma_T, \quad Ek(e-h) = \sigma_T, \quad (4.43)$$

или, что то же самое (после преобразования с учетом формул (4.7), (4.8) и соотношения (4.38))

$$\frac{M_z}{M_{np}} - \frac{H}{H_{np}} + 1 = 0. \quad (4.44)$$

Зависимости (4.35) после подстановки в них второго условия из (4.36), соответствующего данной стадии работы, имеют вид

$$\begin{aligned} & \left[E_0 k(e-h) + E_0 k e + 2\sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \right] \frac{F}{2} = H, \\ & \left[\sigma_T(e-h) \left(1 - \frac{E_0}{E_0} \right) + E_0 k(e-h)^2 + \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E_0} \right) E_0 k e^2 \right] \frac{F}{2} = \\ & = M_z + H\delta. \end{aligned} \quad (4.45)$$

В результате преобразований получим следующие соотношения, характеризующие кривизну и относительное удлинение оси нити при работе сечения в четвертой стадии:

$$\frac{Elk}{M_{np}} = \frac{E}{E_0} \frac{M_z}{M_{np}}, \quad \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{E}{E_0} \left(\frac{H}{H_{np}} - 1 \right) + 1. \quad (4.46)$$

Таким образом, рассмотрены все возможные стадии работы поперечного сечения нити конечной жесткости идеального профиля и получены зави-

симости, связывающие действующие в нити изгибающие моменты и распор с кривизной и относительным удлинением ее оси.

Вывод дифференциальных уравнений. Применим полученные в предыдущем параграфе результаты для вывода расчетных зависимостей уточненной теории деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости с линейным упрочнением. Для этого, как и ранее, используем принцип возможных перемещений.

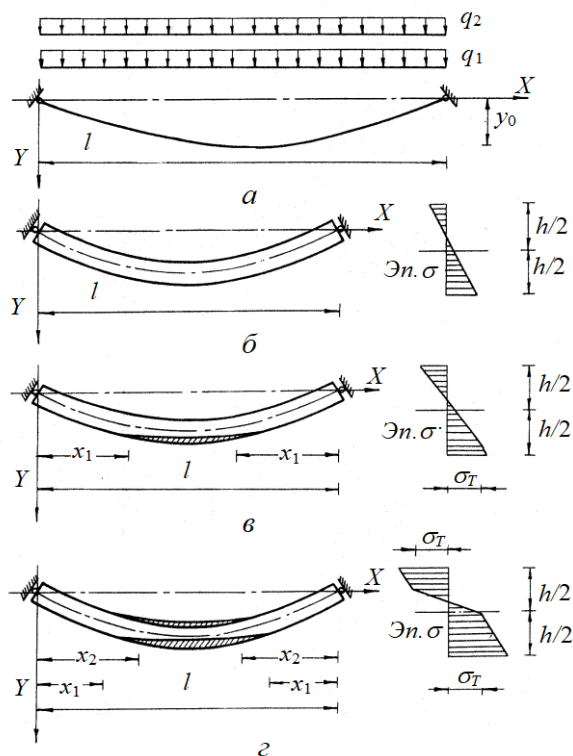


Рис. 4.6. Деформирование нити конечной жесткости из упруго-пластического материала с линейным упрочнением:

- а* – расчетная схема нити; *б* – упругая стадия работы;
в – стадия работы с зоной односторонней пластичности;
г – то же, с зонами одно- и двусторонней пластичности

Предположим, что нить конечной жесткости, работающая с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, с идеальным поперечным сечением площадью F и моментом инерции I нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q = q_1 + q_2$ и находится в состоянии равновесия (рис. 4.6, *а*). Будем также считать, что материал нити является упруго-

пластическим с линейным упрочнением. При выводе разрешающих уравнений примем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения F , а в качестве искомой функции – распор H .

Работа нити конечной жесткости в упругой стадии деформирования (рис. 4.6, б) будет одинакова во всех расчетных случаях независимо от свойств материала в пластической области.

Рассмотрим вторую стадию работы, когда деформирование нити сопровождается развитием локализующейся посередине пролета области конечной протяженности, охваченной пластическими деформациями (рис. 4.6, в). Определим расчетные зависимости при работе нити конечной жесткости в этой стадии изгиба.

Пусть площадь поперечного сечения нити получит очень малое, но конечное приращение своей величины δF . При этом изменятся действующие в нити внутренние усилия и ее геометрия: изгибающий момент M_z получит приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy . Кроме того распор H получит некоторое приращение δH .

Выражения, определяющие изогнутую ось нити и эпюру изгибающих моментов во второй стадии изгиба, сохраняют вид уравнений (2.3) и (2.5), поскольку получены из условий равновесия и пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке, а потому справедливы при любой диаграмме $\sigma - \varepsilon$. При этом необходимо иметь в виду, что при вычислении y и M_z для упругого и пластического участков вместо y^σ и M_z^σ в формулы (2.3) и (2.5) должны быть подставлены соответствующие данному участку зависимости. Тогда приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков ($0 \leq x \leq x_1$; $l - x_1 \leq x \leq l$) сохраняют свой вид (2.7), (2.9), (2.11) и (2.12), а для участка с односторонней пластичностью ($x_1 \leq x \leq l - x_1$) получим следующие выражения:

$$\delta y = - \frac{M_z^\sigma (y^\sigma)^2 \delta H}{(Hy^\sigma + \delta Hy^\sigma + M_z^\sigma)(Hy^\sigma + M_z^\sigma)}; \quad (4.47)$$

$$\delta M_z = - \frac{(M_z^\sigma)^2 y^\sigma \delta H}{(Hy^\sigma + \delta Hy^\sigma + M_z^\sigma)(Hy^\sigma + M_z^\sigma)}; \quad (4.48)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{M_{np}(1 + \alpha)} \left[(1 - \alpha)(I\delta k + k\delta I + \delta I\delta k) + 2 \frac{M_{np}\delta H}{EH_{np}} \right] dx; \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \delta d\varphi = & -\frac{M_{np}(1-\alpha)}{2H_{np}E_0} \left[\frac{H_{np}(1+\alpha)}{M_{np}(1-\alpha)} \times \right. \\ & \times \frac{(M_z^\delta)^2 (y^\delta \delta HI + y^\delta H \delta I + y^\delta \delta H \delta I + M_z^\delta \delta I)}{I(I+\delta I)(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} - \\ & \left. - \frac{I\delta H - H\delta I}{I(I+\delta I)} - \frac{H_{np}\delta I}{I(I+\delta I)} \right] dx, \end{aligned} \quad (4.50)$$

где x_1 – координата границы между упругим и пластическим участками;

$$\alpha = \frac{E_0}{E}; \quad k = \frac{M_{np}(1-\alpha)}{2H_{np}E_0I} \left[\frac{M_z H_{np}(1+\alpha)}{M_{np}(1-\alpha)} + H - H_{np} \right] - \text{кривизна оси пластическо-}$$

го участка нити, определенная с помощью первого из соотношений (4.38).

Кроме того при выводе зависимости для удлинения бесконечно малого элемента участка с односторонней пластичностью δdx относительное удлинение оси нити ε_0 определялось по второму соотношению из (4.38) по формуле

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_T}{E(1+\alpha)} \left[(1-\alpha) \left(\frac{Elk}{M_{np}} - 1 \right) + 2 \frac{H}{H_{np}} \right]. \quad (4.51)$$

Найдем работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузки q на перемещении δy

$$U_1 = 2 \int_0^{x_1} q \delta y dx + \int_{x_1}^{l-x_1} q \delta y dx, \quad (4.52)$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменение угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta d\varphi$:

$$U_2^1 = -2 \int_0^{x_1} (H + \delta H) \delta dx - \int_{x_1}^{l-x_1} (H + \delta H) \delta dx; \quad (4.53)$$

$$U_2^2 = -2 \int_0^{x_1} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_{x_1}^{l-x_1} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi. \quad (4.54)$$

Приравнявая в соответствии с принципом Лагранжа работу внешних и внутренних сил с учетом формул (2.7), (2.9), (2.11) и (2.12), а также (4.47)–(4.50) к нулю и перейдя затем в полученном выражении к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, после интегрирования и некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости с зоной односторонней пластичности

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{4H\alpha x_1} [(1+\alpha)l - 2(1-\alpha)x_1 - I_1] - \frac{EF^2}{H^2 x_1} (I_2 - I_3) = 0. \quad (4.55)$$

Соотношения для входящих в уравнение (4.55) интегральных коэффициентов I_1 , I_2 и I_3 имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E_0 I H_{np} (1-\alpha)}{M_{np}} \int_{x_1}^{l-x_1} \frac{(M_z^\delta)^2 m_0}{(Hm_0 + E_0 I M_z^\delta)^2} dx, \\ I_2 &= q \int_0^{x_1} \frac{M_z^\delta m^2}{(Hm + E I M_z^\delta)^2} dx + \frac{q}{2} \int_{x_1}^{l-x_1} \frac{M_z^\delta m_0^2}{(Hm_0 + E_0 I M_z^\delta)^2} dx, \\ I_3 &= EI \int_0^{x_1} \frac{(M_z^\delta)^4 m}{(Hm + E I M_z^\delta)^3} dx + \frac{E_0 I (1+\alpha)}{4} \int_{x_1}^{l-x_1} \frac{(M_z^\delta)^4 m_0}{(Hm_0 + E_0 I M_z^\delta)^3} dx - \\ &\quad - \frac{M_{np} (1-\alpha)}{4H_{np}} \int_{x_1}^{l-x_1} \frac{(M_z^\delta)^2}{(Hm_0 + E_0 I M_z^\delta)} dx, \end{aligned}$$

где $m_0 = E_0 I y^\delta$. Их значения, как и ранее, могут быть определены непосредственным либо численным интегрированием. Отметим также, что при этом должно соблюдаться соответствие между типом участка нити (упругий или пластический) и типом используемых при вычислении интегральных коэффициентов функций y^δ и M_z^δ .

Координата границы между упругим участком и участком с односторонней пластичностью x_1 определяется из условия (4.11), куда подставляем вместо M_z и, в том числе, M_z^δ соответствующие данному случаю равенства [81]. Таким образом, окончательно получим

$$\begin{aligned} &\frac{6\mu EI (lx_1 - x_1^2)^2}{Hl^2 (l^3 x_1 - 2lx_1^3 + x_1^4) + Hl^5 x_1 (\alpha^{-1} - 1) (1 - 8\mu^{-1})^{3/2} + 12EI l^2 (lx_1 - x_1^2)} + \\ &\quad + \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Из решения полученной системы двух уравнений (4.55) и (4.56) находятся значения распора и координаты границы между упругим и пластическим участками нити, а затем по формулам (2.3), (2.5) – остальные параметры напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости, работающей в данной стадии изгиба.

Вторая стадия работы продолжается до тех пор, пока пластические деформации локализуются в нижнем поясе нити, и оканчивается, когда напря-

жения достигнут предела текучести в ее верхнем поясе. Этому моменту соответствует условие (4.40), которое после подстановки вместо M_z его значения, вычисленного для наиболее нагруженного сечения нити (в середине пролета), приводится к виду

$$\frac{6\mu EI(\omega + 8\alpha\mu^{-1})^2}{5l^2\alpha^2H + l^2\alpha H(1-\alpha)(8\omega^{3/2} - 3\omega^2) + 48E_0I(\omega + 8\alpha\mu^{-1})} - \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0,$$

где $\omega = 1 - \frac{8}{\mu}$.

Когда интенсивность внешней нагрузки достигнет величины, определяемой последним равенством, начинается третья стадия изгиба, при которой пластические деформации развиваются в районе обоих поясов и в каждой половине нити образуются три участка, работающие в различных стадиях изгиба (упругой, упруго-пластической с одной пластической областью и упруго-пластической с двумя пластическими областями) (см. рис. 4.6, з).

В данном случае зависимости, определяющие изогнутую ось нити и распределение изгибающих моментов по ее длине, как указывалось выше, сохраняют вид (2.3), (2.5). Приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков и для участков с односторонней пластичностью также будут описываться равенствами (2.7), (2.9), (2.11), (2.12) и (4.47)–(4.50). Изменяются только пределы участка с односторонней пластичностью, которые теперь можно записать так: $x_1 \leq x \leq x_2$; $l - x_2 \leq x \leq l - x_1$, где x_2 – координата границы между участками с односторонней и двусторонней пластичностью. Для участка с двусторонней пластичностью ($x_2 \leq x \leq l - x_2$) приращения δy , δM_z , δdx и $\delta d\varphi$ определяются по формулам:

$$\delta y = - \frac{M_z^\delta (y^\delta)^2 \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (4.57)$$

$$\delta M_z = - \frac{(M_z^\delta)^2 y^\delta \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (4.58)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T \delta H}{E_0 H_{np}} dx; \quad (4.59)$$

$$\delta d\varphi = - \frac{1}{E_0 I} \left[\frac{(M_z^\delta)^2 (y^\delta \delta H I + y^\delta H \delta I + y^\delta \delta H \delta I + M_z^\delta \delta I)}{(I + \delta I)(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} - \frac{M_{np}(1-\alpha)\delta I}{I + \delta I} \right] dx. \quad (4.60)$$

При этом согласно выражению (4.42) кривизна и относительное удлинение оси участка нити с двусторонней пластичностью принимались равными:

$$k = \frac{1}{E_0 I} [M_z - M_{np}(1 - \alpha)]; \quad (4.61)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_T H}{E_0 H_{np}}. \quad (4.62)$$

Записывая далее, как и при рассмотрении предыдущих стадий изгиба, выражения для работ внешних и внутренних сил для упругих и пластических участков нити и составляя затем уравнения принципа возможных перемещений, приходим к дифференциальному уравнению для определения величины распора в упруго-пластической нити конечной жесткости с зонами односторонней и двусторонней пластичности

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{2H\alpha x_1} [l - (1 - \alpha)(x_1 + x_2) - I_1] - \frac{EF^2}{H^2 x_1} (I_2 - I_3) = 0. \quad (4.63)$$

Входящие в это соотношение интегральные коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E_0 I H_{np} (1 - \alpha)}{M_{np}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(M_z^\sigma)^2 m_0}{(H m_0 + E_0 I M_z^\sigma)^2} dx, \\ I_2 &= q \int_0^{x_1} \frac{M_z^\sigma m^2}{(H m + E I M_z^\sigma)^2} dx + q \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_z^\sigma m_0^2}{(H m_0 + E_0 I M_z^\sigma)^2} dx + \\ &\quad + \frac{q}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} \frac{M_z^\sigma m_0^2}{(H m_0 + E_0 I M_z^\sigma)^2} dx, \\ I_3 &= EI \int_0^{x_1} \frac{(M_z^\sigma)^4 m}{(H m + E I M_z^\sigma)^3} dx + \frac{E_0 I (1 + \alpha)}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(M_z^\sigma)^4 m_0}{(H m_0 + E_0 I M_z^\sigma)^3} dx - \\ &\quad - \frac{M_{np} (1 - \alpha)}{2 H_{np}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(M_z^\sigma)^2}{H m_0 + E_0 I M_z^\sigma} dx + \frac{E_0 I}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} \frac{(M_z^\sigma)^4 m_0}{(H m_0 + E_0 I M_z^\sigma)^3} dx. \end{aligned}$$

Координату границы между упруго-пластическими участками x_2 определяем по формуле, полученной из условия (4.40), куда подставляем вместо

M_z выражение (2.5), а вместо M_z^{δ} – соответствующую зависимость из [81]

$$\begin{aligned}
 & 6\mu EI \left[(lx^2 - x_2^2) - \frac{2l^2}{\mu}(1-\alpha) \right]^2 \left\{ l^2 \alpha H \left[l^3 x_2 - 2lx_2^3 + x_2^4 - \frac{5l^4}{16}(1-\alpha) \right] + \right. \\
 & \left. + l^4 \alpha H(1-\alpha) \left[\frac{12}{\mu} \left(x_2^2 - lx_2 + \frac{l^2}{4} \right) + \frac{l^2}{16} (8\omega^{3/2} - 3\omega^2) \right] + 12l^2 E_0 I \times \right. \\
 & \left. \times \left[(lx^2 - x_2^2) - \frac{2l^2}{\mu}(1-\alpha) \right] \right\}^{-1} - \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0. \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

Решая уравнение (4.63) совместно с уравнениями (4.56) и (4.64), найдем неизвестную величину распора H и координаты границ между участками по длине нити x_1 и x_2 при конкретных размерах поперечного сечения и величине внешней нагрузки. Уравнение (4.63) по-прежнему будем решать путем разложения искомой функции в ряд Тейлора, а ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов – по формулам (2.3) и (2.5). При этом, как уже отмечалось, должно соблюдаться соответствие между типом участка нити и видом используемых в вычислениях функций y^{δ} и M_z^{δ} .

Расчетные зависимости в случае, когда вместо третьей наступает четвертая стадия работы поперечного сечения нити, в настоящем параграфе не приводятся. Их при необходимости можно достаточно просто получить, пользуясь изложенной здесь методикой.

Аналогично можно решить задачу деформирования нити с учетом линейного упрочнения при любом другом виде поперечного сечения, опорных закреплениях и характере внешней нагрузки.

Определение остаточных прогибов при разгрузке. Конечной целью всех приведенных выше решений задачи о деформировании нити конечной жесткости было получение зависимостей, характеризующих элементы изгиба нити при непрерывном росте внешней нагрузки. Не менее важной является задача определения параметров напряженно-деформированного состояния нити при полном или частичном прекращении действия нагрузки. При этом в отличие от работы нити в области упругих деформаций, когда изгиб конструкции при любом изменении нагрузки происходит по одному и тому же закону, деформирование упруго-пластических систем зависит от истории нагружения, т. е. от закона изменения нагрузки в процессе достижения ее текущего значения [22]. Данное обстоятельство является следствием различного поведения упруго-пластического материала в случае увеличения и уменьшения нагрузки.

В теории пластичности обычно принимается, что при увеличении нагрузки материал последовательно проходит упругую и пластическую стадии работы, а связь между напряжениями и деформациями при этом нелинейна. При разгрузке упруго-пластический материал ведет себя как упругий и его поведение описывается законом Гука. Составим уравнения, характеризующие все элементы деформирования нити конечной жесткости при разгрузке.

В случае уменьшения нагрузки на величину Δq изменение изгибающего момента в поперечном сечении работающей за пределом упругости нити будет равно

$$\Delta M_z = M_{z \max} - M_z, \quad (4.65)$$

где $M_{z \max}$ – максимальное значение изгибающего момента. Величина ΔM_z может быть также найдена из условий равновесия, составленных с учетом упругой работы материала нити при разгрузке

$$M_{z \max} - M_z = M_{z \max}^{\delta} - H_{\max} y_{\max} - M_z^{\delta} + H y, \quad (4.66)$$

где $M_{z \max}^{\delta}$, $H_{\max}$ и $y_{\max}$ – соответственно максимальные значения изгибающего момента в балке с характеристиками нити конечной жесткости, распора и кривой провисания нити.

Перегруппировав в выражении (4.66) члены, получим равенство

$$M_z = (M_{z \max} - M_{z \max}^{\delta} + H_{\max} y_{\max}) + M_z^{\delta} - H y. \quad (4.67)$$

В последнем соотношении выражение в скобках совершенно не зависит от изменения нагрузки Δq и представляет собой характерную функцию напряженно-деформированного состояния нити при максимальной нагрузке. Ее значения равны невязке величин действующих в упруго-пластической нити изгибающих моментов и вычисленных в предположении упругой работы материала. Обозначая характерную функцию через Ω , перепишем (4.67) в виде

$$M_z = \Omega + M_z^{\delta} - H y, \quad (4.68)$$

что можно также считать условием равновесия для текущего значения изгибающего момента при разгрузке.

Принимая во внимание, как и при упругом изгибе, формулы (2.1) и (2.2), получим выражения для изогнутой оси и изгибающих моментов:

$$y = \frac{M_z^{\delta} y^{\delta} + \Omega y^{\delta}}{H y^{\delta} + M_z^{\delta}}; \quad (4.69)$$

$$M_z^\delta = \frac{(M_z^\delta)^2 + \Omega M_z^\delta}{Hy^\delta + M_z^\delta}. \quad (4.70)$$

Значения приращений параметров напряженно-деформированного состояния нити вычисляются по формулам:

$$\delta y = - \frac{\left[M_z^\delta (y^\delta)^2 + \Omega (y^\delta)^2 \right] \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (4.71)$$

$$\delta M_z = - \frac{\left[(M_z^\delta)^2 y^\delta + \Omega M_z^\delta y^\delta \right] \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (4.72)$$

$$\delta dx = \frac{EF \delta H - HE \delta F}{EF(EF + E \delta F)} dx; \quad (4.73)$$

$$\delta d\varphi = - \frac{\left[(M_z^\delta)^2 + \Omega M_z^\delta \right] \left[y^\delta \delta H EI + E \delta I (Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta) \right]}{EI(EI + \delta EI)(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} dx. \quad (4.74)$$

Применяя далее использованный при рассмотрении деформирования упругих и упруго-пластических нитей подход, получаем дифференциальную зависимость для определения распора в нити конечной жесткости при разгрузке

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{qm^2(M_z^\delta + \Omega)}{(Hm + EIM_z^\delta)^2} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^\delta)^2 m(M_z^\delta + \Omega)^2}{(Hm + EIM_z^\delta)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Определяя из уравнения (4.75) значение распора, с помощью формул (4.69) и (4.70) можно найти все параметры напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости при разгрузке.

Сравнивая выражения (4.75) и (2.24), видим, что дифференциальная зависимость для определения величины распора при разгрузке отличается от соответствующей зависимости в случае упругого изгиба нити наличием в числителях интегральных коэффициентов дополнительного члена, представляющего собой характерную функцию напряженно-деформированного состояния нити при максимальной нагрузке.

Таким образом, нахождение распора при разгрузке упруго-пластической нити конечной жесткости сводится к решению задачи изгиба упругой нити при соответствующей корректировке значений изгибающих моментов. Одновременно следует отметить, что в данном случае к определению остаточных прогибов нити конечной жесткости неприменима теорема о разгрузке [101, 131], поскольку распор в процессе снятия нагрузки является величиной переменной и связан с ней нелинейной зависимостью (4.75).

Учитывая последнее утверждение, остаточные прогибы надо находить как разность между ординатами начальной кривой провисания и ординатами изогнутой оси нити при разгрузке, значения которых вычисляются по формуле (4.69). Из соотношения (4.70) следует также, что при полном снятии нагрузки в сечениях нити появляются остаточные изгибающие моменты, т. е. в нити возникает состояние самонапряжения. При этом остаточные деформации и напряжения будут действовать по всему пролету нити конечной жесткости, а не локализоваться только на участках, получивших в процессе нагружения пластические деформации.

Глава 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

§ 5.1. Сущность решения задачи

Рассмотрим задачу устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости за пределом упругости с учетом геометрической и физической нелинейностей. Такие задачи вызывают в последнее время большой практический интерес, поскольку при работе современных висячих систем (особенно раскрепленных связями в горизонтальной плоскости) нередко допускаются пластические деформации, а их конструктивные элементы все чаще рассчитываются по предельным нагрузкам. В том случае, когда критическая нагрузка меньше предельной, именно вопросы устойчивости определяют работоспособность конструкции.

Рассмотрим нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, ось которой до потери устойчивости является плоской кривой. Как и при рассмотрении вопросов устойчивости в пределах упругой работы материала, примем оси x, y, z подвижными, а X, Y, Z – неподвижными координатными осями. Направление осей подвижной системы координат выберем таким, чтобы ось x располагалась по касательной к оси нити, а оси y и z – по главным центральным осям инерции поперечного сечения.

Как было показано выше, при работе материала в упругой стадии потенциальная энергия деформации при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба определяется формулой (3.18), интегрирование в которой распространяется на весь пролет нити конечной жесткости.

При работе нити конечной жесткости в своей плоскости за пределом упругости по ее длине наряду с упругими участками развиваются области, охваченные пластическими деформациями. Поэтому потенциальная энергия деформации нити при потере плоской формы равновесия в таком случае будет состоять из суммы энергий упругих и пластических участков. Потенциальную энергию деформации упругих участков по-прежнему будем определять по формуле (3.18), интегрирование в которой будет выполняться только по длине упругих участков. Для определения же потенциальной энергии деформации пластических областей выражение (3.18) неприменимо. Следовательно, для решения задачи устойчивости нити за пределом упругости необходимо установить аналогичное соотношение для участков нити конечной жесткости, испытывающих упруго-пластические деформации.

Поставленную задачу будем решать на основе теории пластического течения [78, 101, 195] с помощью энергетического критерия устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле [56, 107], применение которого позволяет находить критические нагрузки, не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений. В связи с этим разрешающие зависимости принимают довольно компактный вид и весьма удобны в практическом применении.

§ 5.2. Уточнение выражения потенциальной энергии деформации

Допустим, что до потери плоской формы равновесия в нити конечной жесткости имеются только нормальные напряжения σ_x , обусловленные возникающими в ней распором H и изгибающим моментом M_y . Примем, что материал нити является идеальным упруго-пластическим. При упругом деформировании выполняется закон Гука, а за пределом упругости поведение материала соответствует условию текучести Мизеса

$$T^2 = \tau_T^2 = \frac{1}{3} \sigma_T^2, \quad (5.1)$$

где

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} -$$

интенсивность касательных напряжений; τ_T – предел текучести при сдвиге; σ_T – предел текучести при растяжении–сжатии.

Будем считать, что решение задачи упруго-пластического деформирования нити конечной жесткости в своей плоскости известно и определяется зависимостями, приведенными в главе 4. Допустим теперь, что под действием возрастающей дополнительной нагрузки нить теряет устойчивость. При этом, как и при упругой работе нити, поперечные сечения нити получают поступательные смещения v в горизонтальной плоскости и поворачиваются на угол θ в плоскости сечения. При таком выпучивании нить конечной жесткости испытывает дополнительные деформации и напряжения. Данные возмущения изгиба и кручения накладываются на основное состояние упруго-пластического деформирования нити в своей плоскости. Компонентами напряжений σ_y , τ_{xy} и τ_{yz} можно пренебречь, так как боковые поверхности нити свободны от напряжений, а ее толщина обычно намного меньше высоты. Напряжением σ_z также пренебрегаем, поскольку по определению давление продольных волокон одного на другое отсутствует, т. е. они находятся в одноосном напряженном состоянии. Поэтому в соответствии с теорией пластического течения учитываем лишь сдвиг γ_{xz} , характеризующий кручение нити.

Как при упругой, так и при упруго-пластической потере плоской формы изгиба характер деформирования одинаков, поэтому, как показано в работе [107], приращения деформаций можно представить в виде

$$\delta \varepsilon_x = zw'' + yv''; \quad (5.2)$$

$$\delta \gamma_{xz} = -2y\theta'. \quad (5.3)$$

При потере плоской формы равновесия часть сечения будет испытывать нагружение, а часть – разгрузку. В области нагружения приращение работы пластической деформации $\delta W > 0$; при $\delta W < 0$ материал выходит из состоя-

ния текучести и разгружается по упругому закону. В данном случае в соответствии с принятыми допущениями

$$\delta W = \sigma_x \delta \varepsilon_x. \quad (5.4)$$

Поэтому нагружение и разгрузка будут различаться по знаку $\delta \varepsilon_x$, а граница между зонами определится уравнением $\delta \varepsilon_x = 0$, которое в развернутом виде с учетом соотношения (5.2) будет

$$zw'' + yv'' = 0. \quad (5.5)$$

Из последнего уравнения может быть найден угол наклона границы между зонами нагружения и разгрузки

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{v''}{w''}\right). \quad (5.6)$$

Определим вариации напряжений $\delta \sigma_x$ и $\delta \tau_{xz}$. В упругой области поперечного сечения нити и в зонах разгрузки справедлив закон Гука. Тогда выражения для $\delta \sigma_x$ и $\delta \tau_{xz}$ могут быть записаны в виде

$$\delta \sigma_x = E \delta \varepsilon_x; \quad (5.7)$$

$$\delta \tau_{xz} = G \delta \gamma_{xz}. \quad (5.8)$$

В зонах нагружения должно выполняться условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_T + \delta \sigma_x)^2 + 3(\delta \tau_{xz})^2 = \sigma_T^2, \quad (5.9)$$

откуда, пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем

$$\delta \sigma_x = 0. \quad (5.10)$$

Для $\delta \tau_{xz}$ в соответствии с теорией пластического течения и принятыми допущениями будем иметь

$$\delta \tau_{xz} = G \delta \gamma_{xz}, \quad (5.11)$$

т. е., как и в зонах разгрузки, приращения касательного напряжения и сдвига связаны законом Гука.

Найдем приращения изгибающих и крутящего моментов. С учетом соотношения (5.7) и формулы (5.10) выражения для δM_y и δM_z можно представить так:

$$\delta M_y = \int_{F_{yn}} \delta \sigma_x z dF, \quad \delta M_z = \int_{F_{yn}} \delta \sigma_x y dF, \quad (5.12)$$

где интегрирование распространяется на упругую область поперечного сечения нити и зоны разгрузки.

Приращение крутящего момента δM_x с учетом зависимостей (5.8) и (5.11) можно записать в виде

$$\delta M_x = 2 \int_F \delta \tau_{xz} y dF, \quad (5.13)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости. Поэтому, как и при упругой работе нити, приращение крутящего момента определяется по известной формуле [55, 108]

$$\delta M_x = GI_d \theta'. \quad (5.14)$$

Принимая во внимание выражения (5.7)–(5.11), потенциальную энергию деформации упруго-пластических участков нити конечной жесткости при потере устойчивости плоской формы изгиба можно записать в виде

$$W = \int_{V_{уп.пл.}} \left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{1}{2G} T^2 \right) dv. \quad (5.15)$$

Здесь первый член подынтегрального выражения представляет собой энергию объемного сжатия, второй – энергию изменения формы; $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – относительное изменение объема; $V_{уп.пл.}$ – объем упруго-пластических участков нити; $k = (1-2\mu)/E$; μ – коэффициент Пуассона.

Интенсивность касательных напряжений с учетом того, что все компоненты напряженного состояния, кроме $\delta \sigma_x$ и $\delta \tau_{xz}$, в нашем случае равны нулю, приводится к виду

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta \sigma_x^2 + 3\delta \tau_{xz}^2}. \quad (5.16)$$

Приращение нормального напряжения $\delta \sigma_x$ вычисляется по формуле

$$\delta \sigma_x = E \delta \varepsilon_x = E(u' - zw'' - yv'' - \omega \theta''), \quad (5.17)$$

которая для нашего случая имеет вид

$$\delta \sigma_x = E(-yv'' - \omega \theta''). \quad (5.18)$$

Здесь учтено, что на основании кинематических гипотез теории тонкостенных стержней [55] для случая потери плоской формы равновесия члены u' и zw'' считаются величинами высшего порядка малости по сравнению с yv'' и $\omega \theta''$.

Подставляем выражение (5.16) с учетом (5.18) в уравнение (5.15). Принимая во внимание (5.7)–(5.11), а также пренебрегая энергией объемного сжатия для потенциальной энергии деформации, находим

$$W = \frac{1}{6G} \int_{l_{уп.пл.}} \left\{ \int_{F_{уп}} [E^2(-yv'' - \omega \theta'')^2 + 3G^2 \rho^2(\theta')^2] dF + \right.$$

$$+ \int_{F_{пл}} 3G^2 \rho^2 (\theta')^2 dF \Big\} dx. \quad (5.19)$$

Принимаем, что $\delta\tau_{xz} = G\rho\theta'$, где ρ – расстояние от оси до центра тяжести элементарной площадки dF . Кроме того, как указывалось выше, $F_{уп}$ – площадь упругой области поперечного сечения нити и зон разгрузки, $F_{пл}$ – площадь зон пластической деформации; $l_{уп,пл}$ – длина упруго-пластических участков нити.

После соответствующих преобразований и отбрасывания членов высшего порядка малости соотношение (5.19) можно записать в виде

$$W = \frac{E^2}{6G} \int_{l_{уп,пл}} (I_{\omega}^* \theta'^2 + I_z^* v'^2) dx + \frac{1}{2} G I_d \int_{l_{уп,пл}} \theta'^2 dx, \quad (5.20)$$

где I_{ω}^* и I_z^* – соответственно приведенные секториальный момент инерции и момент инерции относительно оси z упруго-пластического поперечного сечения нити конечной жесткости.

Вносим значения $G = E / (2(1 + \mu))$. Считая, что $\mu = 1/2$, т. е. принимая материал нити несжимаемым, окончательно приходим к выражению

$$W = \frac{1}{2} \int_{l_{уп,пл}} (EI_{\omega}^* \theta'^2 + G I_d \theta'^2 + EI_z^* v'^2) dx. \quad (5.21)$$

Отметим, что формулой (5.21) можно пользоваться только при вычислении потенциальной энергии деформации упруго-пластических участков нити. Для упругих участков по-прежнему остается в силе формула (3.18). Таким образом, для решения рассматриваемой задачи становится возможным применение разработанного ранее в главе 3 метода расчета устойчивости плоской формы деформирования упругих нитей конечной жесткости. Только если для упругих участков нити принимаются реальные значения жесткостных характеристик поперечного сечения EI_{ω} и EI_z , то для упруго-пластических – приведенные EI_{ω}^* и EI_z^* . Найдем их значения.

§ 5.3. Определение положения границы раздела зон нагружения и разгрузки поперечного сечения нити

Рассмотрим нить конечной жесткости, поперечное сечение которой представляет собой вытянутый прямоугольник. Известно [81, 145], что при работе нити с прямоугольным поперечным сечением в своей плоскости за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с одной и двусторонней пластичностью (рис. 5.1). При этом каждому участку будет соответствовать свое значение приведенной жесткости EI_z^* , кроме того, секториальный момент инерции для прямоугольного поперечного сечения равен нулю.

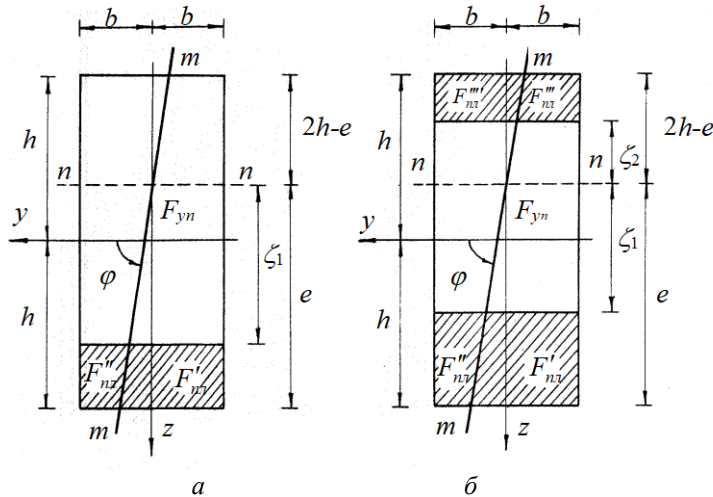


Рис. 5.1. Работа прямоугольного поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба: а – односторонняя пластичность; б – двусторонняя пластичность

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет одну пластическую область (рис. 5.1, а). При $-\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1$, где $\varphi_1 = \arctg(\xi_1 / b)$, граница раздела (линия $m - m$) лежит в сечении F_{yn} упругого ядра и тогда область пластической деформации полностью находится либо в состоянии нагружения либо в состоянии разгрузки.

При $\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1$ граница раздела пересекает область пластической деформации. В этом случае в зоне F'_{nl} происходит нагружение (разгрузка), а в зоне F''_{nl} – разгрузка (нагружение). Можно показать [107, 108], что первый случай нереализуем и граница раздела всегда пересекает область пластической деформации.

Положение границы раздела можно найти, воспользовавшись известным допущением о том, что при потере плоской формы деформирования перемещения нити в вертикальной плоскости нет. Следовательно, выпучивание происходит при одном и том же значении действующего в вертикальной плоскости изгибающего момента, т. е. его приращение $\delta M_y = 0$. Отсюда, принимая во внимание первое из соотношений (5.12), имеем

$$\int_{F_{yn}} \delta \sigma_x z dF = 0. \quad (5.22)$$

Предполагая для определенности, что нагружение происходит в F'_{nl} , а разгрузка – в F''_{nl} , находим развернутую форму уравнения (5.22)

$$(I_y^{yn} + I_y'') w'' + I_{yz}'' v'' = 0, \quad (5.23)$$

где J_y и J_z EMBED Equation.3 J_y J_z – соответственно моменты инерции упругого ядра и зоны разгрузки EMBED Equation.3 J_y J_z относительно оси y ; J_{yz} EMBED Equation.3 J_{yz} – центробежный момент инерции зоны разгрузки EMBED Equation.3 J_{yz} ; w и ψ – соответственно кривизны нити в вертикальной и горизонтальной плоскостях

Введем в рассмотрение функцию $\psi = \text{ctg} b$ однозначной определяющую положение границы раздела. Тогда значения моментов инерции зоны

$$T^2 = \tau_T^2 = \frac{1}{3} \sigma_T^2 \quad \text{можно записать так?}$$

при $\omega = 1$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \left\{ 4 \left[(\eta^3 - \beta^3) + (3\beta + 1) \zeta_1 + \zeta_1^2 \right] - \omega \left[(2\eta^2 + \beta^2) (1 + \zeta_1) + (4\alpha - 1) \zeta_1^2 + 3\zeta_1^3 \right] \right\} (1 - \zeta_1),$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda \left[4(1 - \zeta_1) - \omega^3 (1 - \zeta_1^4) \right],$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \left\{ 6(\alpha + \zeta_1) - \omega^2 \left[(2\alpha + 1) (1 + \zeta_1 + \zeta_1^2) + 3\zeta_1^2 \right] \right\} (1 - \zeta_1);$$

при $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \left(3\zeta_1 \omega - 4 + \zeta_1^{-3} \omega^{-3} \right) \zeta_1^3,$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda \left(\zeta_1^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega^{-1} \right) \zeta_1,$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 \left(\zeta_1^2 \omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2} \omega^{-2} \right) \zeta_1^2,$$

где $\eta = h/e$; $\zeta_1 = \xi_1/e$; $\alpha = 2\eta - 1$; $\beta = \eta - 1$.

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{yn} = \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 \left[(\eta + \beta^2) + (\beta - 1) \zeta_1 + \zeta_1^2 \right] (1 + \zeta_1),$$

$$I_z^{yn} = \frac{2}{3} b^4 \lambda (\alpha + \zeta_1).$$

Подстановка I_y^{yn} , I_y'' и I_{yz}'' в соотношение (5.23) после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω приводит к уравнениям:

$$A_1\omega^2 - A_2\omega + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (5.24)$$

$$B_1\omega^4 + B_2\omega^3 + B_3\omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), \quad (5.25)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 3(\alpha^2 - 4\beta^2\zeta_1^2 - 4\beta\zeta_1^3 - \zeta_1^4); \\ A_2 &= 8[(3\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2\zeta_1 + 3\beta\zeta_1^2 + \zeta_1^3]; \quad A_3 = 6(\alpha - 2\beta\zeta_1 - \zeta_1^2); \\ B_1 &= 3\zeta_1^4; \quad B_2 = 8[(3\eta^3 + \beta^3) + 6\beta^2\zeta_1 + 6\beta\zeta_1^2 + \zeta_1^3]; \quad B_3 = 6\zeta_1^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет две области пластичности (рис. 5.1, б). Здесь так же, как и в случае участка с зоной односторонней пластичности, можно показать, что граница раздела всегда пересекает область пластической деформации. Будем считать, что нагружение происходит в зонах F'_{nl} и F'''_{nl} , а разгрузка – в зонах F''_{nl} и F'''_{nl} . Тогда вместо уравнения (5.23) получим

$$(I_y^{yn} + I_y'' + I_y''')w'' + (I_{yz}'' + I_{yz}''')v'' = 0. \quad (5.26)$$

Моменты инерции, соответствующие нижней и верхней зонам разгрузки при $0 \leq \omega \leq 1$, будут:

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12}b^4\lambda^3 \left\{ 4[(\eta^3 - \beta^3) + (3\beta + 1)\zeta_1 + \zeta_1^2] - \right. \\ &\quad \left. - \omega[(2\eta^2 + \beta^2)(1 + \zeta_1) + (4\alpha - 1)\zeta_1^2 + 3\zeta_1^3] \right\} (1 - \zeta_1), \\ I_z'' &= \frac{1}{12}b^4\lambda \left[4(1 - \zeta_1) - \omega^3(1 - \zeta_1^4) \right], \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24}b^4\lambda^2 \left\{ 6(\alpha + \zeta_1) - \omega^2[(2\alpha + 1)(1 + \zeta_1 + \zeta_1^2) + 3\zeta_1^3] \right\} (1 - \zeta_1), \\ I_y''' &= \frac{1}{12}b^4\lambda^3 \left\{ 4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] - \right. \\ &\quad \left. - \omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3] \right\} (1 - \zeta_2), \end{aligned}$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3 (\alpha^4 - \zeta_2^4)],$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{6(1 + \zeta_2) - \omega^2 [(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha \zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3]\} \times (\alpha - \zeta_2).$$

Здесь введены дополнительные обозначения: $\zeta_2 = \xi_2 / e$; $\gamma = 2\eta^2 + 1$. Далее в зависимости от соотношения между параметрами η , ζ_1 и ζ_2 возможны три попарных варианта прохождения границы раздела через участки пластической деформации поперечного сечения нити, отличающиеся в данном случае один от другого размерами изменения функции $\omega = \omega(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$.

В первом из них (подвариант a_1 : $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$; подвариант a_1' : $1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$) граница раздела проходит через обе области пластичности и моменты инерции нижней и верхней зон разгрузки определяются из одинаковых выражений:

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3\zeta_1 \omega - 4 + \zeta_1^{-3} \omega^{-3}) \zeta_1^3;$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_1^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega^{-1}) \zeta_1,$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_1^2 \omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2} \omega^{-2}) \zeta_1^2,$$

$$\begin{aligned} I_y''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] - \\ &- \omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3]\} (1 - \zeta_2), \\ I_z''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3 (\alpha^4 - \zeta_2^4)], \end{aligned}$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{6(1 + \zeta_2) - \omega^2 [(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha \zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3]\} \times (\alpha - \zeta_2).$$

Во втором варианте каждому из подвариантов будут соответствовать свои зависимости для нахождения моментов инерции. Это связано с тем, что в подварианте a_2 граница раздела проходит только через верхнюю область пластической деформации, а в подварианте a_2' — пересекает обе области пластичности. Тогда будем иметь:

для подварианта $a_2 (\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1})$

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] -$$

$$-\omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3](1 - \zeta_2),$$

$$I_z''' = \frac{1}{12}b^4\lambda[4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3(\alpha^4 - \zeta_2^4)],$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24}b^4\lambda^2\{6(1 + \zeta_2) - \omega^2[(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha\zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3]\} \times (\alpha - \zeta_2);$$

для подварианта $a_2'(\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1})$

$$I_y'' = \frac{1}{12}b^4\lambda^3(3\zeta_1\omega - 4 + \zeta_1^{-3}\omega^{-3})\zeta_1^3,$$

$$I_z'' = \frac{1}{12}b^4\lambda(\zeta_1^3\omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1}\omega^{-1})\zeta_1,$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{8}b^4\lambda^2(\zeta_1^2\omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2}\omega^{-2})\zeta_1^2,$$

$$I_y''' = \frac{1}{12}b^4\lambda^3(3\zeta_2\omega - 4 + \zeta_2^{-3}\omega^{-3})\zeta_2^3,$$

$$I_z''' = \frac{1}{12}b^4\lambda(\zeta_2^3\omega^3 - 4 + 3\zeta_2^{-1}\omega^{-1})\zeta_2,$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{8}b^4\lambda^2(\zeta_2^2\omega^2 - 2 + \zeta_2^{-2}\omega^{-2})\zeta_2^2.$$

В третьем варианте (подвариант $a_3: \alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$; подвариант $a_3': \zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$) граница раздела пересекает только верхнюю область пластической деформации. Поэтому, как и в первом варианте, моменты инерции будут определяться одинаковыми соотношениями:

$$I_y''' = \frac{1}{12}b^4\lambda^3(3\zeta_2\omega - 4 + \zeta_2^{-3}\omega^{-3})\zeta_2^3,$$

$$I_z''' = \frac{1}{12}b^4\lambda(\zeta_2^3\omega^3 - 4 + 3\zeta_2^{-1}\omega^{-1})\zeta_2,$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{8}b^4\lambda^2(\zeta_2^2\omega^2 - 2 + \zeta_2^{-2}\omega^{-2})\zeta_2^2.$$

Моменты инерции упругого ядра для рассматриваемого случая упруго-пластического участка нити конечной жесткости с зонами двусторонней пластичности запишем в виде

$$I_y^{yn} = \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 [3\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)],$$

$$I_z^{yn} = \frac{2}{3} b^4 \lambda(\zeta_1 + \zeta_2).$$

Подставляя I_y^{yn} и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в уравнение (5.26), приходим к уравнениям для определения ω :

$$C_1\omega^2 - C_2\omega + C_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (5.27)$$

$$D_1\omega^4 + D_2\omega^3 + D_3\omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), \quad (1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}); \quad (5.28)$$

$$K_1\omega^2 - K_2\omega + K_3 = 0, \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1}); \quad (5.29)$$

$$L_1\omega^4 + L_2\omega^3 + L_3\omega^2 - 2 = 0, \quad (\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}); \quad (5.30)$$

$$M_1\omega^4 + M_2\omega^3 + M_3\omega^2 - 1 = 0, \quad (\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}), \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}), \quad (5.31)$$

коэффициенты которых принимают значения:

$$C_1 = 3[2\alpha^2 - 4\beta^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - 4\beta(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)];$$

$$C_2 = 8[2\eta^3 + 3\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$C_3 = 6[2\alpha - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)];$$

$$D_1 = 3[-\alpha^2 + 4\beta^2\zeta_2^2 - 4\beta\zeta_2^3 + (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)];$$

$$D_2 = 8[(\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$D_3 = 6[-\alpha - 2\beta\zeta_2 + (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)],$$

$$K_1 = 3(\alpha^2 - 4\beta^2\zeta_2^2 + 4\beta\zeta_2^3 - \zeta_2^4);$$

$$K_2 = 8[(\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$K_3 = 6(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2);$$

$$L_1 = 3(\zeta_1^4 + \zeta_2^4);$$

$$L_2 = 8[6\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 6\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$L_3 = 6(\zeta_1^2 + \zeta_2^2);$$

$$M_1 = 3\zeta_2^4;$$

$$M_2 = 8[6\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 6\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)] ;$$

$$M_3 = 6\zeta_2^2 .$$

Анализ уравнений (5.24), (5.25) и (5.27)–(5.31) показывает, что ω на всей области изменения является однозначной функцией η , ζ_1 и ζ_2 , причем $\omega \geq 0$. Последнее свидетельствует о том, что зоны нагружения всегда больше зон разгрузки. Заметим также, что при упругом изгибе граница раздела совпадает с осью z , а при упруго-пластическом, как указывалось выше, наклонена на угол φ , тангенс которого определяется отношением кривизн нити в горизонтальной и вертикальной плоскостях. При этом с увеличением областей пластической деформации граница раздела все более приближается к оси y и в предельном случае совпадает с ней.

Если в полученных зависимостях положить, что $e = h$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, то придем к случаю потери устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластических балок. При этом реализуется только стадия работы с двумя областями пластической деформации поперечного сечения принятого здесь прямоугольного профиля [81]. Вместо восьми возможных вариантов прохождения границы раздела через области пластичности поперечного сечения балки будем иметь только два, для которых уравнения (5.27)–(5.31) примут вид:

$$3(1 - \zeta^4)\omega^2 - 8(1 + \zeta^3)\omega + 6(1 - \zeta^2) = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (5.32)$$

$$3\zeta^4\omega^4 + 8\zeta^3\omega^3 + 6\zeta^2\omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}). \quad (5.33)$$

С помощью выражений (5.32) и (5.33) на рис.5.2,а построена зависимость функции ω от параметра ζ , характеризующего относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения балки, заключенной между нейтральной осью и областью пластичности. Заметим, что соотношения (5.32) и (5.33) полностью совпадают с решением, впервые полученным Л.М.Качановым и приведенным в монографии [107]. Таким образом, задача устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластических балок представляет собой частный случай рассматриваемой здесь задачи устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости.

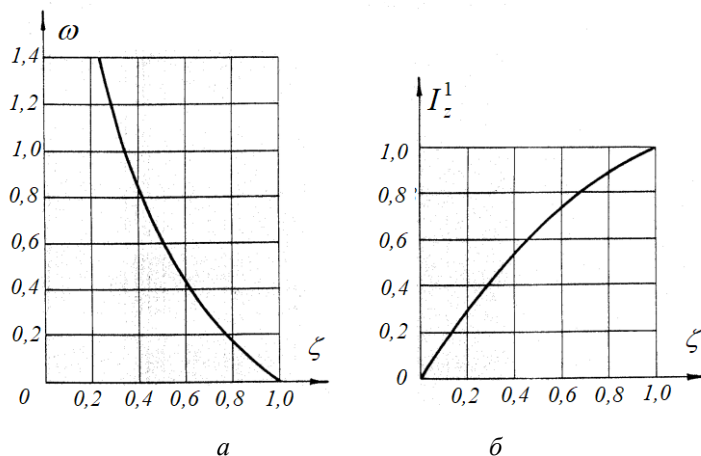


Рис. 5.2. Зависимость между параметром ζ и функциями ω и I_z' для прямоугольного поперечного сечения упруго-пластической балки:
 $a - \omega = \omega(\zeta)$; $b - I_z' = I_z'(\zeta)$

Рассмотрим теперь двутавровое поперечное сечение нити. При этом будем считать, что толщина полок двутавра много меньше высоты профиля, а его стенка всегда работает в упругой стадии. Тогда в случае односторонней пластичности (рис. 5.3,а) пределы изменения функции ω составят $(0 \leq \omega \leq 1)$, а значения моментов инерции зоны F_{nl}'' можно представить так:

$$I_y'' = \frac{1}{3} b^4 \lambda^3 (1 - \omega) \left[(\eta^3 - \beta^3) - 3\beta^2 \zeta_1 - 3\beta \zeta_1^2 - \zeta_1^3 \right],$$

$$I_z'' = \frac{1}{3} b^4 \lambda (1 - \omega^3) (1 - \zeta_1),$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{4} b^4 \lambda^2 (1 - \omega^2) (\alpha - 2\beta \zeta_1 - \zeta_1^2).$$

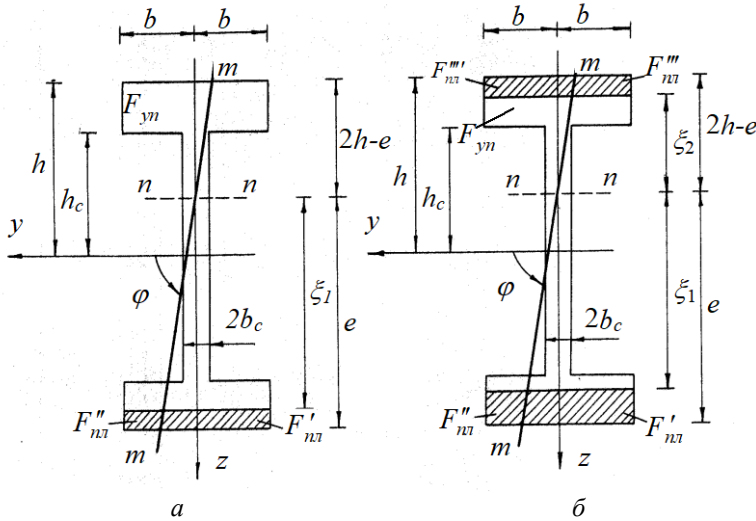


Рис. 5.3. Работа двутаврового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба: а – односторонняя пластичность; б – двусторонняя пластичность

Выражения для моментов инерции упругого ядра в данном случае можно записать таким образом:

$$I_y^{yn} = \frac{4}{3} b_c b^3 \lambda^3 \eta_c^3 + \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 (\eta^3 - \eta_c^3) + \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 [(\beta^3 - \eta_c^3) + 3\beta^2 \zeta_1 + 3\beta \zeta_1^2 + \zeta_1^3],$$

$$I_z^{yn} = \frac{4}{3} b_c^3 b \lambda \eta_c + \frac{2}{3} b^4 \lambda (\alpha - 2\eta_c + \zeta_1),$$

где дополнительно принято, что $\eta_c = h_c / e$.

Выполняя далее подстановки и преобразования, аналогичные выполненным для прямоугольного поперечного сечения, получим уравнение для определения функции ω

$$A_1 \omega^2 + A_2 \omega + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1), \quad (5.34)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 3\alpha - 4(\eta^3 - \beta^3) + 6\beta(2\beta - 1)\zeta_1 + 3(4\beta - 1)\zeta_1^2 + 4\zeta_1^3; \\ A_2 &= 16b_c b^{-1} \eta_c^3 + 4[(3\eta^3 - 4\eta_c^3 + \beta^3) + 3\beta^2 \zeta_1 + 3\beta \zeta_1^2 + \zeta_1^3]; \\ A_3 &= -3(\alpha - 2\beta \zeta_1 - \zeta_1^2). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь упруго-пластический участок нити конечной жест-

кости двутаврового поперечного сечения, имеющего две области пластичности (рис. 5.3,б). Как и ранее, будем считать, что нагружение происходит в зонах F'_{nl} и F'''_{nl} , а разгрузка – в зонах F''_{nl} и F'''_{nl} . Тогда в случае $0 \leq \omega \leq 1$ значения моментов инерции, соответствующие нижней и верхней зонам разгрузки, примут вид

$$I''_y = \frac{1}{3} b^4 \lambda^3 (1 - \omega) \left[(\eta^3 - \beta^3) - 3\beta^2 \zeta_1 - 3\beta \zeta_1^2 - \zeta_1^3 \right],$$

$$I''_z = \frac{1}{3} b^4 \lambda (1 - \omega^3) (1 - \zeta_1),$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{4} b^4 \lambda^2 (1 - \omega^2) (\alpha - 2\beta \zeta_1 - \zeta_1^2),$$

$$I'''_y = \frac{1}{3} b^4 \lambda^3 (1 - \alpha \omega) \left[(\eta^3 + \beta^3) - 3\beta^2 \zeta_2 + 3\beta \zeta_2^2 - \zeta_2^3 \right],$$

$$I'''_z = \frac{1}{3} b^4 \lambda (1 - \alpha^3 \omega^3) (\alpha - \zeta_2),$$

$$I'''_{yz} = \frac{1}{4} b^4 \lambda^2 (1 - \alpha^2 \omega^2) (\alpha + 2\beta \zeta_2 - \zeta_2^2).$$

При $1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$ граница раздела проходит только через верхнюю область пластической деформации. Это означает, что разгрузка будет происходить только в зоне F'''_{nl} , так как вся нижняя область пластичности будет находиться в состоянии нагружения. При этом зависимости для I'''_y , I'''_z и I'''_{yz} будут тождественны приведенным выше.

Выражения для моментов инерции упругого ядра двутаврового поперечного сечения с зонами двусторонней пластичности записываются в виде

$$I_y^{yn} = \frac{4}{3} b_c b^3 \lambda^3 \eta_c^3 + \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 \left[-2\eta_c^3 + 3\beta^2 (\zeta_1 + \zeta_2) + \right. \\ \left. + 3\beta (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3) \right],$$

$$I_z^{yn} = \frac{4}{3} b_c^3 b \lambda \eta_c + \frac{2}{3} b^4 \lambda (-2\eta_c + \zeta_1 + \zeta_2).$$

Подставляя I_y^{yn} и соответствующие соотношения для I''_y , I'''_y , I''_{yz} и I'''_{yz} в уравнение (5.26), приходим к уравнениям для определения значений функции ω :

$$B_1 \omega^2 + B_2 \omega + B_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (5.35)$$

$$C_1\omega^2 + C_2\omega + C_3 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}). \quad (5.36)$$

В уравнениях (5.35) и (5.36) обозначено:

$$\begin{aligned} B_1 &= 3\alpha(\alpha^2 + 1) - 8(\eta^4 + \beta^4) + 12\beta^2(\zeta_1 + \alpha\zeta_2) - 6\beta(\zeta_1 - \alpha^2\zeta_2) + \\ &\quad + 12\beta(\zeta_1^2 - \alpha\zeta_2^2) - 3(\zeta_1^2 + \alpha^2\zeta_2^2) + 4(\zeta_1^3 + \alpha\zeta_2^3); \\ B_2 &= 16b_c b^{-1}\eta_c^3 + 4[(2\eta^3 - 4\eta_c^3) + 3\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)]; \\ B_3 &= -3[2\alpha - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]; \\ C_1 &= \alpha^2(6\beta - \alpha^2) + 6\alpha\beta(2\alpha - 1)\zeta_2 - 3\alpha(3\alpha - 2)\zeta_2^2 + 4\alpha\zeta_2^3; \\ C_2 &= 16b_c b^{-1}\eta_c^3 + 4[(\eta^3 - 4\eta_c^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + \\ &\quad + 2\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)]; \\ C_3 &= -3(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2). \end{aligned}$$

Если в полученных зависимостях положить, что $e = h$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, то придем к случаю потери устойчивости плоской формы изгиба двутавровой упруго-пластической балки. При этом, как указывалось выше, реализуется только стадия работы с двумя областями пластической деформации поперечного сечения. Поэтому в рамках принятых нами допущений вместо двух возможных вариантов прохождения границы раздела через области пластичности сечения балки будем иметь только одну ($0 \leq \omega \leq 1$), для которой вместо уравнений (5.35) и (5.36) получим зависимость

$$(1 + 3\zeta^2 - 4\zeta^3)\omega^3 - 4\left[1 - 2\eta_c^3\left(1 - \frac{b}{b_c}\right) + \zeta^3\right]\omega + 3(1 - \zeta^2) = 0. \quad (5.37)$$

Для иллюстрации данного решения на рис. 5.4, а построена зависимость функции ω от параметра ζ , характеризующего относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения двутавровой балки, заключенной между нейтральной осью и пластической областью. Отметим, что кривые построены для трех значений η_c , соответственно равных 0,9; 0,7 и 0,5. При этом считалось, что отношение ширины стенки двутавра к ширине его полки составляет $b_c/b = 0,1$.

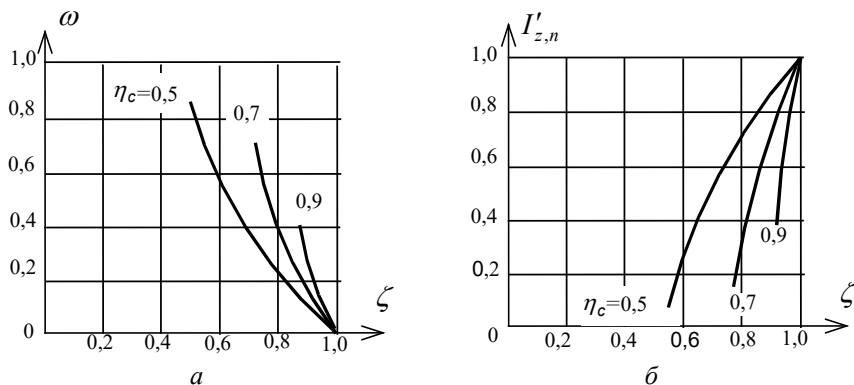


Рис. 5.4. Зависимость между параметром ζ и функциями ω , $I'_{z,\Pi}$ для двутаврового поперечного сечения упруго-пластической балки ($b_c/b = 0,1$):

$$a - \omega = \omega(\zeta); \quad б - I'_{z,\Pi} = I'_{z,\Pi}(\zeta)$$

§ 5.4. Определение приведенной жесткости поперечного сечения

Для того, чтобы найти приведенную жесткость поперечного сечения нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба за пределом упругости, необходимо вначале установить зависимость приращения изгибающего момента δM_z от кривизны нити в горизонтальной плоскости v'' . Решение указанной задачи можно получить с использованием второго соотношения из выражения (5.12), куда подставляется вместо $\delta \sigma_x$ соответствующая зависимость. Применим данный подход для вычисления δM_z при различных типах поперечного сечения и вариантах распространения зон пластической деформации по сечению нити.

Рассмотрим прямоугольное поперечное сечение нити. Приращение изгибающего момента в горизонтальной плоскости с учетом выражения (5.2) и второго соотношения из выражения (5.12) для участка нити с односторонней пластичностью будет

$$\delta M_z = E(I_z^{yn} + I_z'' - I_{yz}'' \operatorname{ctg} \varphi) v'' . \quad (5.38)$$

Последнюю зависимость можно также представить в виде

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \zeta_1) v'' , \quad (5.39)$$

где $I_z^*(\eta, \zeta_1) = I_z I'_z(\eta, \zeta_1)$; $I_z = (4/3)b^4 \lambda \eta$ – момент инерции относительно оси z полностью упругого поперечного сечения нити; $I'_z(\eta, \zeta_1)$ – поправка к упругому моменту инерции, характеризующая изменение его значения в результате развития в сечении участков пластической деформации.

Подставляя соответствующие значения моментов инерции в выражение (5.38), получаем

$$I'_z(\eta, \zeta_1) = \frac{1}{32\eta} \left\{ 8[(2\alpha + 1) + \zeta_1] - 6(\alpha - 2\beta\zeta_1 - \zeta_1^2)\omega + \right. \\ \left. + [(2\alpha - 1) - 4\beta\zeta_1^3 - \zeta_1^4] \omega^3 \right\} \quad \text{при } (0 \leq \omega \leq 1); \\ I'_z(\eta, \zeta_1) = \frac{1}{32\eta} [3\omega^{-1} + 8(2\alpha + \zeta_1) + 6\zeta_1^2\omega - \zeta_1^4\omega^3] \quad \text{при } (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}),$$

где значение функции ω по-прежнему определяется по уравнениям (5.24) и (5.25).

В случае упруго-пластического участка нити конечной жесткости с двусторонней пластичностью вместо соотношения (5.38) будем иметь

$$\delta M_z = E[I_z^{ym} + I_z'' + I_z''' - (I_{yz}'' + I_{yz}''') \operatorname{ctg} \varphi] v'', \quad (5.40)$$

которое в силу связи между ω и η , ζ_1 и ζ_2 , можно записать так:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2) v''. \quad (5.41)$$

Аналогично предыдущему, величина $I_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$ представляется произведением двух членов

$$I_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = I_z I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2),$$

первый из которых, как и в случае участка нити с односторонней пластичностью, представляет собой упругий момент инерции поперечного сечения, второй – поправку к его значению, зависящую от размеров областей пластичности.

Внося I_z^{ym} , I_z'' , I_z''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в соотношение (5.40) для поправки к упругому моменту инерции, имеем:

при $(0 \leq \omega \leq 1)$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \{ 8[(\alpha + 1) + (\zeta_1 + \zeta_2)] - \\ - 6[2\alpha - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)] \omega + \\ + [(2\alpha - 1) - \alpha^3(\alpha - 2) - 4\beta(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)] \omega^3 \}; \\ \text{при } (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), (1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}) \\ I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \{ 3\omega^{-1} + 8[\alpha + (\zeta_1 + \zeta_2)] - \\ - 6[\alpha + 2\beta\zeta_2 - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]\omega - [\alpha^3(\alpha - 2) - 4\beta\zeta_2^3 + (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)] \omega^3 \};$$

при $\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1}$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \left\{ 8[\alpha + (2\zeta_1 + \zeta_2) - 6(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2)\omega - \right. \\ \left. - [\alpha^3(\alpha - 2) - 4\beta\zeta_2^3 + \zeta_2^4] \omega^3 \right\};$$

при $\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} [6\omega^{-1} + 8(\zeta_1 + \zeta_2) + 6(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\omega - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)\omega^3];$$

при $\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$, $\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} [3\omega^{-1} + 8(2\zeta_1 + \zeta_2) + 6\zeta_2^2\omega - \zeta_2^4\omega^3].$$

Здесь нужно отметить, что входящее в последние зависимости значение функции ω определяется из соответствующих уравнений (5.27)–(5.31).

При потере устойчивости плоской формы равновесия упруго-пластических балок ($e = h$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$) выражения для $I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$ после упрощений будут иметь вид

$$I'_z(\zeta) = \frac{1}{16} [8(1 + \zeta) - 6(1 - \zeta^2)\omega + (1 - \zeta^4)\omega^3] \text{ при } (0 \leq \omega \leq 1);$$

$$I'_z(\zeta) = \frac{1}{16} (8 + 3\zeta^{-1}\omega^{-1} + 6\zeta\omega - \zeta^3\omega^3)\zeta \quad \text{при } (1 \leq \omega \leq \zeta^{-1}),$$

где ω определяется по (5.32) и (5.33) соответственно. На рис. 5.2, б показан график $I'_z(\zeta)$.

Рассмотрим двутавровое поперечное сечение нити. В этом случае зависимость (5.39) при односторонней пластичности преобразуется таким образом:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) \eta'', \quad (5.42)$$

причем входящую сюда величину $I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1)$ можно представить так:

$$I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) = I_z^c + I_{z,n}^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) = I_z^c + I_z^n I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1),$$

где $I_z^c = \frac{4}{3} b b_c^3 \lambda \eta_c$ и $I_z^n = \frac{4}{3} b^4 \lambda (1 - \eta_c)$ – упругие моменты инерции относительно оси z соответственно стенки и полка двутавра; $I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1)$ – поправка к упругому моменту инерции полки, характеризующая изменение его значения в результате развития в сечении участков пластичности.

Учитывая необходимые значения моментов инерции в соотношениях (5.38) и (5.42), после некоторых преобразований получим поправку к упруго-

му моменту инерции полок

$$I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1) = \frac{1}{16(1-\eta_c)} \left\{ 4(1+2\alpha-4\eta_c+\zeta_1) - \right. \\ \left. - 3(\alpha-2\beta\zeta_1-\zeta_1^2)\omega + [3\alpha-4-2(3\beta-2)\zeta_1-3\zeta_1^2] \omega^3 \right\}, \quad (0 \leq \omega \leq 1).$$

При этом входящая в формулу функция ω определяется из уравнения (5.34).

В случае упруго-пластического участка нити конечной жесткости с двусторонней пластичностью вместо выражения (5.42) будем иметь

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) v'', \quad (5.43)$$

а зависимость для приведенного момента инерции соответственно примет вид:

$$I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = I_z^c + I_z^n I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2).$$

Здесь, как и выше, I_z^c и I_z^n – упругие моменты инерции стенки и полок двутавра, а $I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2)$ – поправка к упругому моменту инерции полок для случая двусторонней пластичности.

Внеся I_z^{yn} , I_z'' , I_z''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в соотношение (5.40) и учитывая выражение (5.43), получим выражения для поправки к упругому моменту инерции: при $0 \leq \omega \leq 1$

$$I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16(1-\eta_c)} \left\{ 4[2(\eta-2\eta_c) + (\zeta_1 + \zeta_2)] - 3[2\alpha - \right. \\ \left. - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)] \omega + [3\alpha(1+\alpha^2) - 4(1+\alpha^4) + \right. \\ \left. + 4(\zeta_1 + \alpha^3\zeta_2) - 6\beta(\zeta_1 - \alpha^2\zeta_2) - 3(\zeta_1^2 + \alpha^2\zeta_2^2)\omega^3 \right\};$$

при $1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$

$$I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16(1-\eta_c)} \left\{ 4(\alpha-4\eta_c+2\zeta_1+\zeta_2) - \right. \\ \left. - 3(\alpha+2\beta\zeta_2-\zeta_2^2)\omega - \alpha^2[\alpha(8\beta+1)-2(7\beta+2)\zeta_2+3\zeta_2^2] \omega^3 \right\}.$$

Входящая в данные соотношения функция ω вычисляется из соответствующих уравнений (5.35), (5.36).

В балочном варианте ($e = h$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$) выражение для поправки к упругому моменту инерции полок двутавра после упрощений примет вид

$$I'_{z,n}(\eta_c, \zeta) = \frac{1}{8(1-\eta_c)} \left[4(1-2\eta_c+\zeta) - 3(1-\zeta^2)\omega - \right.$$

$$-\left(1 - 4\zeta + 3\zeta^2\right)\omega^3 \Big], \quad (0 \leq \omega \leq 1),$$

где ω определяется из уравнения (5.37).

С использованием последнего соотношения на рис. 5.4,б построена серия кривых, связывающих параметр ζ с функцией $I'_{z,n} = f(\eta_c, \zeta)$ при различных значениях η_c для частного случая $b_c/b = 0,1$.

Таким образом, для рассматриваемых задач устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости прямоугольного и двутаврового поперечных сечений получены зависимости для определения приведенных жесткостных характеристик нити конечной жесткости при всех возможных случаях ее работы.

§ 5.5. Вывод уравнения устойчивости для нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости

Рассмотрим задачу устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластической нити конечной жесткости, свободной от связей в горизонтальной плоскости. В данном случае получить уравнение устойчивости в общем виде для произвольного поперечного сечения, подобно тому, как это было сделано в главе 3 при исследовании устойчивости нити в пределах упругой работы материала, в принципе можно. Однако окончательное выражение не удастся привести к компактному и удобному для практического использования виду. Поэтому целесообразнее выводить уравнение устойчивости специально в каждом конкретном случае поперечного сечения нити.

Используя полученные выше результаты, а также принимая во внимание приведенные в главе 3 решения, можно получить уравнение устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластической нити конечной жесткости прямоугольного поперечного сечения. При работе нити с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, шарнирного закрепления концов на опорах и загрузки равномерно распределенными нагрузками q_1 и q_2 уравнение устойчивости может быть представлено в виде

$$\left(P_z^* + H\right) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0, \quad (7.44)$$

где P_z^* – приведенная критическая сила при упруго-пластическом продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega = GI_d/r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости; $\Psi(q_1, q_2)$ – характерная функция нагрузки для случая упруго-пластической потери устойчивости; $\lambda = \pi/l$.

Для входящих в зависимость (5.44) функций P_z^* и Ψ имеем выражения:

$$P_z^* = P_z P'_z = P_z \left[\frac{4}{l} \int_0^{x_1} \sin^2 \lambda x dx + \frac{4}{l} \int_{x_1}^{x_2} I'_z(\eta, \varsigma_1) \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{2}{l} \int_{x_2}^{l-x_2} I'_z(\eta, \varsigma_1, \varsigma_2) \sin^2 \lambda x dx \right]; \quad (5.45)$$

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr} \left[\int_0^{x_1} M_y \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y \sin^2 \lambda x dx \right], \quad (5.46)$$

где $P_z = EI_z \lambda^2$ – критическая сила при упругом продольном изгибе в плоскости XOY ; P'_z – поправка к значению P_z , зависящая от размеров областей пластичности в поперечном сечении нити; x_1 и x_2 – координаты границы между упругим участком и участком с односторонней пластичностью, а также между участками с односторонней и двусторонней пластичностью.

При использовании приведенных формул следует иметь в виду, что координаты x_1 и x_2 определяются в результате решения задачи упруго-пластического деформирования нити конечной жесткости, а поправка к значению изгибающего момента I'_z – в соответствии с рекомендациями, содержащимися в предыдущем параграфе.

Для представления входящих в подынтегральные выражения функции Ψ изгибающих моментов M_y , как и в упругом случае, воспользуемся формулой (3.28). Тогда после некоторых преобразований получим

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^{\sigma} \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^{\sigma} \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^{\sigma} \sin^2 \lambda x dx \right]. \quad (5.47)$$

При этом необходимо только соблюдать соответствие между типом участка нити конечной жесткости (упругий, упруго-пластический с зоной односторонней пластичности и упруго-пластический с зоной двусторонней пластичности) и видом используемых в данном представлении зависимостей, характеризующих распределение балочных изгибающих моментов. Эти соотношения приведены в работах [24, 81]. Значения же интегралов в формуле (5.47) могут быть определены либо непосредственным интегрированием либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса.

При жестком закреплении концов нити на опорах уравнение (5.44) преобразуется к виду

$$(4P_z^* + H) \left[P_\omega + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0. \quad (5.48)$$

Значение характерной функции нагрузки будет

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^\sigma \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \right. \quad (5.49) \\ \left. + \int_{x_1}^{x_2} M_y^\sigma \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^\sigma \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right].$$

Для нити конечной жесткости, загруженной начальной равномерно распределенной по всему пролету и дополнительной равномерно распределенной на левой половине пролета нагрузками, при шарнирном закреплении концов на опорах уравнения устойчивости с учетом выражения (3.66) можно представить так:

$$(4P_z^* + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{4r^2 \lambda^2} \left(q_1 e_1 + \frac{1}{2} q_2 e_2 \right) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0. \quad (5.50)$$

В последнем соотношении P_z^* и Ψ , в отличие от своих выражений (5.45), (5.47) и (5.49), при симметричном нагружении запишутся как

$$P_z^* = P_z \left[\frac{2}{l} \int_0^{x_1} \sin^2 2\lambda x dx + \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} I'_z(\eta, \zeta_1) \sin^2 2\lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{2}{l} \int_{x_2}^{x_3} I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) \sin^2 2\lambda x dx + \frac{2}{l} \int_{x_3}^{x_4} I'_z(\eta, \zeta_1) \sin^2 2\lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{2}{l} \int_{x_4}^{l-x_4} \sin^2 2\lambda x dx \right]; \quad (5.51)$$

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{2}{lr(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^\sigma \sin^2 2\lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^\sigma \sin^2 2\lambda x dx + \right. \\ \left. + \int_{x_2}^{x_3} M_y^\sigma \sin^2 2\lambda x dx + \int_{x_3}^{x_4} M_y^\sigma \sin^2 2\lambda x dx + \int_{x_4}^{l-x_4} M_y^\sigma \sin^2 2\lambda x dx \right]. \quad (5.52)$$

Здесь принято, что x_1 и x_2 — координаты между участками на левой половине пролета нити конечной жесткости, а x_3 и x_4 — то же, на правой половине пролета.

Зависимости для других расчетных случаев (работа без изгиба от начальной нагрузки, иной вид поперечного сечения и др.) упруго-

пластической нити конечной жесткости, свободной от связей в горизонтальной плоскости, здесь не показаны, поскольку могут быть получены аналогично приведенным.

Уравнения (5.44), (5.48) и (5.50) содержат две неизвестные величины – критическую дополнительную нагрузку q_2 (значение начальной нагрузки q_1 считается заданным и неизменным в процессе нагружения) и критический распор H . Для связи между ними используем, как и при упругой работе материала, уравнение неразрывности деформаций (3.30). Очевидно, что данное соотношение вполне правомочно, поскольку, во-первых, нить под действием любой дополнительной, в том числе и критической нагрузки деформируется в плоскости XOY , во-вторых, оно получено на основании чисто геометрических соображений, поэтому справедливо при любом характере зависимости между напряжением и деформацией. Однако в данном случае уравнение (3.30) должно быть раскрыто иначе.

Полагая, что удлинение нити конечной жесткости происходит за счет растяжения ее оси, ΔL может быть вычислено по формуле

$$\Delta L = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx, \quad (5.53)$$

где первый член правой части представляет собой удлинение оси нити от начальной и дополнительной нагрузок, а второй – только от начальной нагрузки.

Внося в соотношение (3.30) значения длин нити с учетом работ [111, 165], а также принимая во внимание формулу (5.53), для уравнения неразрывности деформаций получим

$$\frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l (w'_0)^2 dx = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx, \quad (5.54)$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1+kH)} \int_0^l \left(\frac{dw^\delta}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2(1+kH_0)} \int_0^l \left(\frac{dw_0^\delta}{dx} \right)^2 dx = \\ = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Подставляя сюда соответствующие выражения для балочного прогиба w^δ [81], удлинения оси нити ε (см. главу 4) и решая полученное уравнение совместно с уравнениями устойчивости (5.44), (5.48) и (5.50), находим значения критического распора H и критической дополнительной нагрузки q_2 непосредственно в каждом конкретном случае работы упруго-пластической нити конечной жесткости. При этом должно соблюдаться соответствие между типом участка нити и видом используемых при интегрировании уравнения (5.55) функций w^δ и ε .

§ 5.6. Основные уравнения устойчивости для нити конечной жесткости, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости

Методика, применяемая при выводе уравнений устойчивости упруго-пластической нити конечной жесткости, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости, аналогична методике, приведенной в § 5.4.

Рассмотрим нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, шарнирно закрепленную на опорах, загруженную равномерно распределенными нагрузками q_1 , q_2 и имеющую прямоугольное поперечное сечение. Тогда на основании уравнения (3.57), используя приведенные выше решения, уравнение устойчивости после некоторых преобразований может быть представлено в виде

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \Psi(q_1, q_2) = 0. \quad (5.56)$$

Здесь, как и прежде, приведенная критическая сила при упруго-пластическом продольном изгибе P_z^* определяется по формуле (5.45), а для характерной функции нагрузки Ψ находим

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{8e_c}{l(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^{\bar{\sigma}} \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^{\bar{\sigma}} \sin^2 \lambda x dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^{\bar{\sigma}} \sin^2 \lambda x dx \right]. \quad (5.57)$$

Напомним, что в зависимостях (5.56) и (5.57) через e_c обозначено расстояние от точки раскрепления нити до центра тяжести ее поперечного сечения.

При жестком закреплении концов нити на опорах вместо уравнения (5.56) будем иметь

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(4P_z^* + H) + \frac{3}{4\lambda^2} [(e_1 - e_c)q_1 + (e_2 - e_c)q_2] - \Psi(q_1, q_2) = 0, \quad (5.58)$$

а вместо выражения (5.57) соответственно

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{8e_c}{l(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^{\bar{\sigma}} \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_1}^{x_2} M_y^{\delta} \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^{\delta} \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]. \quad (5.59)$$

В случае действия на раскрепленную в горизонтальной плоскости упруго-пластическую нить конечной жесткости несимметричной нагрузки (начальная нагрузка q_1 равномерно распределена по всему пролету, а дополнительная q_2 – только на левой половине пролета) и при шарнирном закреплении концов на опорах уравнение устойчивости приводится к виду

$$\begin{aligned} r^2(P_{\omega} + H) + e_c^2(4P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \\ - \Psi(q_1, q_2) = 0, \end{aligned} \quad (5.60)$$

причем для приведенной критической силы P_z^* сохраняется вид (5.51), а выражение для характерной функции нагрузки будет отличаться от соответствующей зависимости (5.52) только постоянным коэффициентом $2e_c/r$.

Уравнения устойчивости для других случаев работ упруго-пластических нитей конечной жесткости не приводятся в виду ясности методики их получения.

Для связи между содержащимися в зависимостях (5.50), (5.58) и (5.60) критическим распором H и критической дополнительной нагрузкой q_2 будем использовать уравнение неразрывности деформаций (5.55).

Таким образом полностью определено поведение нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала при потере устойчивости плоской формы деформирования, а также установлены зависимости для нахождения критического распора и критической дополнительной нагрузки при различных условиях ее работы. Аналогично может быть получено решение задачи при любом другом виде поперечного сечения, опорных закреплениях и характере внешней нагрузки.

Глава 6. РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ ПОВЫШЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПО МКЭ

§ 6.1. Методика расчета висячих систем

Висячие системы повышенной жесткости имеют специфические особенности, связанные с объединением в единую конструкцию элементов различной структуры, мерности и жесткости, например, вантовых сетей, нитей конечной жесткости и мембран и заключающихся в большой кинематической подвижности и высокой деформативности в процессе нагружения. Поэтому указанные системы и задачи их расчета являются геометрически нелинейными. Методика расчета висячих систем основана на специально построенных нелинейных соотношениях МКЭ и является частным случаем (задача статики) сильно нелинейных эволюционных задач взаимодействия деформируемых тел, решение которых сводится к моделированию изменения свойств и структуры системы при ее нагружении. В такой постановке параметр времени служит параметром продолжения решения и в зависимости от вида задачи может трактоваться как реальное время или как ведущий параметр воздействия [120, 124, 147].

В соответствии с таким подходом описание нелинейного деформирования висячих систем повышенной жесткости удобно выполнить аналогично описанию движения сплошной среды в пространстве и во времени [219]. Для получения разрешающих соотношений воспользуемся вариационным принципом Гамильтона [148, 257], с помощью которого вариационное уравнение движения сплошной среды может быть представлено в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_v \delta U dv + \int_v \rho \ddot{\vec{R}} \delta \vec{R} dv - \int_v \vec{p} \delta \vec{R} dv \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_s \vec{q} \delta \vec{R} ds = 0. \quad (6.1)$$

С другой стороны, для любого момента времени t вместо соотношения (6.1) будем иметь

$$\int_v \delta U dv + \int_v \rho \ddot{\vec{R}} \delta \vec{R} dv - \int_v \vec{p} \delta \vec{R} dv - \int_s \vec{q} \delta \vec{R} ds = 0. \quad (6.2)$$

В уравнениях (6.1) и (6.2) первый член представляет собой вариацию энергии деформации, второй – вариацию работы инерционных сил, а третий и четвертый – вариации работы внешних объемных и поверхностных сил. Кроме того здесь приняты следующие обозначения: δU – вариация удельной энергии деформации; $\ddot{\vec{R}}$ и $\vec{R}$ – соответственно вектор ускорений и радиус-вектор материальной точки тела; $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – обобщенные векторы объемных и поверхностных сил; v и s – соответственно объем и поверхность тела; ρ – плотность.

Начальные условия задачи (6.2) задаются в момент времени $t = t_0$

$$\vec{R}(t_0) = \vec{R}_0, \quad \dot{\vec{R}}(t_0) = \dot{\vec{R}}_0, \quad \hat{\sigma}(t_0) = \hat{\sigma}_0, \quad \hat{\gamma}(t_0) = \hat{\gamma}_0, \quad \rho(t_0) = \rho_0. \quad (6.3)$$

Значительная геометрическая нелинейность рассматриваемых систем при наличии больших перемещений обуславливает необходимость учета в расчетах конечных приращений деформаций. Для этого в соответствии с работой [224] введем понятия фиксируемых конфигураций сплошной среды как трехмерного тела в зависимости от его состояния. Рассмотрим три состояния тела в процессе его деформирования:

натуральное – когда напряжения и деформации отсутствуют;

начальное – когда тело находится в состоянии равновесия под действием начальных внешних нагрузок и воздействий;

конечное – когда тело при дополнительных внешних нагрузках и воздействиях приходит в новое состояние равновесия.

Каждому из перечисленных состояний тела соответствует своя фиксируемая конфигурация:

C_0 в момент времени $t = 0$;

C_t – « – $t = t$;

$C_{t+\Delta t}$ – « – $t = t + \Delta t$.

В качестве отсчетной принимаем конфигурацию C_t , соответствующую начальному состоянию тела. Введем далее в рассмотрение две системы координат: глобальную декартовую Z^1, Z^2, Z^3 и местную криволинейную лагранжевую x^1, x^2, x^3 . Тогда положение произвольной точки в фиксируемых конфигурациях задается непрерывными и требуемое число раз дифференцируемыми вектор-функциями

$$\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{matrix} (x^1, x^2, x^3), \quad \vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2, x^3), \quad \vec{R} = \vec{R}(x^1, x^2, x^3), \quad (6.4)$$

которые в глобальной системе координат записываются с помощью формул:

$$\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{matrix} Z^{i'} \vec{e}_{i'}; \quad \vec{r} = Z^{i'} \vec{e}_{i'}; \quad \vec{R} = Z^{i'} \vec{e}_{i'}^*, \quad (6.5)$$

где $\vec{e}_{i'}$ – единичные масштабные векторы-орты глобальной системы координат, а функции $Z^{i'}$, $Z^{i'}$ и $Z^{i'}$ определяются соотношением

$$\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{matrix} Z^{i'} = \begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{matrix} Z^{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad Z^{i'} = Z^{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad Z^{i'} = Z^{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad (6.6)$$

причем однозначность функций (6.6) обеспечивается неравенством нулю их якобианов [148].

Базисные векторы для фиксируемых конфигураций тела запишем в виде

$$\begin{matrix} \vec{e}_i \\ \vec{e}_i \end{matrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}, \quad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}, \quad \vec{e}_i^* = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^i}. \quad (6.7)$$

Компоненты метрических тензоров каждого из состояний в свою очередь определяются выражениями:

$$\begin{aligned} G_{ij}^o = e_i^o e_j^o &= C_i^{k'} C_j^{m'} \delta_{k'm'}^o, & G_{ij} &= \bar{e}_i \bar{e}_j = C_i^{n'} C_j^{s'} \delta_{n's'}^o, \\ G_{mn}^* &= e_m^* e_n^* = C_m^{t'} C_n^{f'} \delta_{t'f'}^o, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $C_i^{n'}$ – компоненты тензора преобразования из глобальной в местную систему координат; δ_{mn} – символ Кронекера.

Деформацию сплошной среды можно представить как изменение длин и направлений векторов, отнесенных к отсчетной конфигурации [148],

$$ds^r = d\vec{r} \hat{G} d\vec{r}, \quad (6.9)$$

где $d\vec{r} = dx^s d\vec{e}_s$; $\hat{G} = G_{sk} \vec{e}^s \vec{e}^k$ – мера деформации Коши-Грина.

В соответствии с выбранной отсчетной конфигурацией введем вектор приращений перемещений

$$\vec{u} = \vec{R} - \vec{r}. \quad (6.10)$$

В силу сильной геометрической нелинейности рассматриваемых задач используем тензор конечных деформаций Коши-Грина

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2} \left(G_{sk}^* - G_{sk} \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T + \nabla \vec{u} \nabla \vec{u}^T \right), \quad (6.11)$$

где $\nabla \vec{u} = \nabla_i u_j \vec{e}^i \vec{e}^j$.

Представим функцию удельной энергии деформации в виде скалярной функции тензорного аргумента второго ранга с учетом ее индифферентности [74] как

$$U = U(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{12}^2, \dots, \varepsilon_{31}). \quad (6.12)$$

Тогда, задавая ε_{ij} бесконечно малые приращения $\delta \varepsilon_{ij}$ при неизменном t , можно получить выражение функции удельной энергии деформации вместо конфигурации C_t в близкой ей конфигурации $C_{t+\Delta t}$. Для этого представим полиномиальную функцию (6.12) разложением в ряд Тейлора с удержанием трех членов ряда [257]

$$U(\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}) = U(\varepsilon_{ij}) + \hat{U}_{\hat{\varepsilon}} \cdot \delta \varepsilon + \frac{1}{2} \delta \varepsilon^T \cdot \hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} \cdot \delta \varepsilon^T, \quad (6.13)$$

где $\delta \varepsilon^T = \delta \varepsilon_{mn} \vec{e}^m \vec{e}^n$; $\hat{U}_{\hat{\varepsilon}} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{st}} \vec{e}^s \vec{e}^t$ – тензор второго ранга;

$\hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{st}} \vec{e}^m \vec{e}^n \vec{e}^s \vec{e}^t$ – тензор четвертого ранга.

Представляя напряжения и внешние воздействия в приращениях и вводя известные обозначения [148]

$$\hat{U}_{\hat{\varepsilon}} = \hat{\sigma}', \quad \hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \hat{C}_4, \quad \delta\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma}, \quad (6.14)$$

соотношение для вариации удельной энергии деформации относительно отсчетной конфигурации приводится к следующему виду

$$\delta U = \left(\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma} \right) \cdot \delta \hat{\gamma}, \quad (6.15)$$

где $\hat{\sigma}'$ – второй симметричный тензор начальных напряжений Пиола-Кирхгоффа; $\hat{\gamma}$ – тензор конечных деформаций Коши-Грина.

Подставляя соотношение (6.15) в формулу (6.2) и учитывая выражение (6.10), приходим к уравнению

$$\int_v \left(\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma} \right) \cdot \delta \hat{\gamma} dv + \int_v \bar{\rho} \ddot{u} \delta \bar{u} dv - \int_v \bar{p} \delta \bar{u} dv - \int_s \bar{q} \delta \bar{u} ds = 0. \quad (6.16)$$

При статических воздействиях вариация работы инерционных сил равна нулю и принцип Гамильтона сводится к принципу минимума потенциальной энергии сплошной среды (принципу Лагранжа)

$$\delta \Pi = \delta W - \delta A = 0, \quad (6.17)$$

откуда имеем

$$\int_v \left(\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma} \right) \cdot \delta \hat{\gamma} dv - \int_v \bar{p} \delta \bar{u} dv - \int_s \bar{q} \delta \bar{u} ds = 0. \quad (6.18)$$

Последнее выражение является исходным для получения основных соотношений МКЭ.

§ 6.2. Разрешающие уравнения МКЭ

Принимая во внимание допущение о постоянстве объемных и поверхностных сил в пределах конечных элементов [179], выражение вариации полной потенциальной энергии можно представить таким образом:

$$\delta \Pi = \sum_L \left[\left(R_L^{k'} \right)_{c.z.} + \left(R_L^{k'} \right)_m + \left(R_L^{k'} \right)_{c.ж.} - P_L^{k'} - Q_L^{k'} \right] \delta u_{k'}^L, \quad (6.19)$$

где $\left(R_L^{k'} \right)_{c.z.}$, $\left(R_L^{k'} \right)_m$, $\left(R_L^{k'} \right)_{c.ж.}$ – коэффициенты матриц реакций соответственно стержня, воспринимающего растяжение–сжатие, мембраны и стержня, воспринимающего растяжение–сжатие с изгибом; $P_L^{k'}$ – компоненты вектора объемных узловых сил; $Q_L^{k'}$ – компоненты вектора поверхностных узловых сил.

Распространим в выражении (6.19) суммирование по всем конечным элементам дискретной модели всяческой системы повышенной жесткости

$$\sum_{\mathfrak{L}} \left[\sum_L \left[\left(R_L^{k'} \right)_{c.z.} + \left(R_L^{k'} \right)_m + \left(R_L^{k'} \right)_{c.ж.} - P_L^{k'} - Q_L^{k'} \right] \delta u_{k'}^L \right] = 0 \quad (6.20)$$

и переходя затем от суммирования по элементам к суммированию по всем узлам дискретной модели, получим

$$\sum_N \left[(R_N^{k'})_{c.z.} + (R_N^{k'})_M + (R_N^{k'})_{c.ж.} - P_N^{k'} - Q_N^{k'} \right] \delta u_{k'}^N = 0, \quad (N=1,2,...,M), \quad (6.21)$$

где M – общее число узлов дискретной модели.

Отсюда в силу независимости вариаций перемещений $\delta u_{k'}^N$ получаем систему нелинейных уравнений равновесия

$$\sum_{N=1}^M \left[(R_N^{k'})_{c.z.} + (R_N^{k'})_M + (R_N^{k'})_{c.ж.} - P_N^{k'} - Q_N^{k'} \right] = 0, \quad (6.22)$$

решая которую, можно определить неизвестные значения параметров напряженно-деформированного состояния висячей системы повышенной жесткости.

§ 6.3. Алгоритм решения нелинейной задачи

Как было показано в § 6.2, равновесное состояние конечно-элементной модели висячей конструкции повышенной жесткости описывается системой нелинейных уравнений высокого порядка (6.22). Обычно для решения таких систем используются различные итерационные методы, которые можно трактовать как методы установления решения дифференциального уравнения, описывающего некоторый нестационарный процесс [216]. При таком подходе задача статики висячей системы сводится к задаче отыскания равновесных состояний динамической дискретной модели, уравнение движения которой на данном шаге нагружения имеет вид [118]

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + \{F(u)\} - \{Q(u)\} = 0, \quad (6.23)$$

где $[M]$ и $[C]$ – матрицы, интерпретируемые как матрицы масс и вязкого демпфирования конечно-элементной модели; $\{F(u)\}$ и $\{Q(u)\}$ – векторы обобщенных внутренних и внешних сил дискретной модели конструкции; $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$ – векторы ускорений, скоростей и неизвестных приращений перемещений (точкой обозначена операция дифференцирования по времени t).

Уравнение (6.23) получено, когда дискретная модель приходит в равновесное состояние, соответствующее значению приложенных внешних нагрузок. Одновременно должны выполняться требования равенства нулю уравнений равновесия и вектора скорости системы

$$\{F(u)\} - \{Q(u)\} = 0, \quad \{\dot{u}\} = 0. \quad (6.24)$$

Скорость решения и, как следствие, общий объем вычислительных операций зависят от многих факторов: демпфирующих свойств модели, эффективности алгоритма численного интегрирования уравнения (6.23), выбора матриц $[M]$ и $[C]$ и др. [219].

Результаты большого количества выполненных численных экспериментов и решения различных сильно нелинейных задач [125, 127, 264, 290–293, 322, 331] показывают, что наиболее целесообразным применительно к исследованию рассматриваемых конструкций является использование не одного, хотя и эффективного итерационного метода, а их комбинации. В этом случае окончательное решение задачи достигается поэтапно на основе ряда последовательных решений, каждое из которых есть не что иное, как начальное приближение к последующему этапу решения. В предлагаемой схеме исследования висячих систем повышенной жесткости в такой взаимодополняющей комбинации используются методы дискретных торможений [118] и Ньютона-Канторовича [121].

Представляя скорости и ускорения через центральные разности

$$\{\dot{u}^{n+1/2}\} = \frac{\{u^{n+1}\} - \{u^n\}}{\Delta t}, \quad \{\ddot{u}^n\} = \frac{\{\dot{u}^{n+1/2}\} - \{\dot{u}^{n-1/2}\}}{\Delta t} \quad (6.25)$$

и выбирая матрицы масс и вязкого демпфирования в виде

$$[M] = \rho[D], \quad [C] = c[D], \quad [D] = \text{diag}[K],$$

$$[K] = \left[\frac{\partial(\{F(u)\} - \{Q(u)\})}{\partial\{u\}} \right]_{\{u\}=0}, \quad (6.26)$$

где ρ – фиктивная плотность системы; C – коэффициент вязкого сопротивления, рекуррентные формулы указанных выше итерационных методов представим следующим образом [123]:

метод дискретных торможений

$$\{\dot{u}_0^{n+1/2}\} = \frac{2 - c \Delta t / \rho}{2 + c \Delta t / \rho} \{\dot{u}_0^{n-1/2}\} - \frac{2 \Delta t / \rho}{2 + c \Delta t / \rho} [D]^{-1} (\{F(u)\} - \{Q(u)\}),$$

$$\{\dot{u}^{n+1/2}\} = H(\Delta T_0^n) \{\dot{u}_0^{n+1/2}\} + (H(\Delta T_0^n) - 1) \frac{\Delta t}{2\rho} [D]^{-1} (\{F(u)\} - \{Q(u)\}),$$

$$\{u^{n+1}\} = \{u^n\} + \Delta t \{\dot{u}^{n+1/2}\},$$

$$\Delta T_0^n = \{\dot{u}_0^{n+1/2}\}^T [D] \{\dot{u}_0^{n+1/2}\} - \{\dot{u}^{n-1/2}\}^T [D] \{\dot{u}^{n-1/2}\}; \quad (6.27)$$

метод Ньютона-Канторовича

$$([K^n] + c^n[E]) \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\} = \{Q(u_i^{n+1})\} - \{F(u_i^{n+1})\}, \quad \{u_{i+1}^{n+1}\} = \{u_i^{n+1}\} + \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\}, \quad (6.28)$$

где ΔT_0^n – приращение «кинетической» энергии системы; $[K^n]$ – линеаризованная матрица жесткости конечно-элементной модели; $[E]$ – единичная

матрица; $H(\Delta) = \begin{cases} 0, & \Delta < 0 \\ 1, & \Delta \geq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

Необходимо отметить, что при выводе формул (6.28) было принято $\Delta t = 1$, а также, что матрица $[K^n]$ совпадает с матрицей Якоби системы (6.24) в начальной точке $n+1$ -го шага нагружения при $\{\mu_0^{n+1}\} = 0$ и остается постоянной.

Известно, что метод Ньютона-Канторовича весьма эффективен и обладает высокой скоростью сходимости итерационного процесса при одном условии – ему требуется начальное весьма близкое приближение решения [219]. Данное обстоятельство применительно к висячим системам связано с их большой кинематической подвижностью и высокой деформативностью, что приводит к ухудшению обусловленности и даже в некоторых случаях к вырождаемости матрицы жесткости системы линеаризованных уравнений. Особенно это характерно для начальных этапов расчета, когда еще не достигнут достаточный для увеличения жесткости конструкции уровень напряженного состояния. В этих случаях используется метод дискретных торможений, обеспечивающий достаточно быструю сходимость и высокую гибкость вычислительного процесса относительно вида нелинейности [118]. В этом методе решение системы уравнений (6.23) обеспечивается не только учетом диссипативных сил, но и введением в процессе численного интегрирования дискретного затухания (торможения) в те моменты времени, когда система «проскакивает» равновесное положение (см. формулы (6.27). Иными словами, в моменты торможения, которые характеризуются локальными максимумами кинетической энергии системы, скорости всех точек приравниваются нулю. Однако и здесь также желательно предварительное задание параметров начального напряженно-деформированного состояния конструкции, поскольку в противоположном случае как время счета, так и число итераций вычислительного процесса могут неоправданно возрасти.

Учитывая вышеизложенное, схема алгоритма исследования деформирования висячих систем повышенной жесткости включает следующие этапы:

1. Предварительное определение параметров напряженно-деформированного состояния основных несущих элементов висячей системы с помощью решений, представленных в первой части настоящей работы.
2. Уточнение полученного на первом этапе напряженно-деформированного состояния для всей висячей системы методом дискретных торможений.
3. Решение задачи методом Ньютона-Канторовича с учетом определенного на втором этапе напряженно-деформированного состояния системы.
4. Дополнительный этап, на котором при необходимости производится решение задачи с учетом итогового напряженно-деформированного состояния конструкции от статических нагружений на специфические, неучтенные ранее нагрузки и воздействия, например, ветровые, сейсмические и пр.

§ 6.4. Реализация методики исследования всяких систем на ЭВМ

Для решения проблемных задач прочности сильно нелинейных конструкций используется вычислительный комплекс ПАРУС [120, 124, 126, 285, 320], включающий специализированные программы, предназначенные для исследования статики и динамики пространственных систем. Ведущим в решениях рассматриваемых задач является МКЭ.

Исследование нелинейного деформирования сложных объектов методом конечных элементов сводится к решению больших систем нелинейных уравнений, что сопряжено со значительными математическими трудностями. Решение данной проблемы реализуется на основе двух подходов: глобальной редукции исходных уравнений равновесия конечно-элементных моделей с помощью энергетических методов [219] и декомпозиции (фрагментации).

Декомпозиция расчетной модели позволяет использовать конечные элементы различной мерности и жесткости, локальные сгущения расчетной сети, а также различные шаги ведущего параметра алгоритма в пределах каждого фрагмента. На самом высоком уровне декомпозиции выделяются взаимодействующие объекты. Последующие уровни реализуются по различным признакам: размерность задачи, структура объектов, однородность или неоднородность физико-механических свойств, условия работы отдельных элементов конструкции, топологические признаки дискретной модели и др. Выбор схемы дискретизации определяется типом фрагмента.

В процессе расчета осуществляется последовательное рассмотрение отдельных фрагментов на основе содержащейся информации о нагрузках, граничных условиях, физико-механических характеристиках и др. Граничные условия фрагментов могут приниматься в виде ограничений на все или некоторые компоненты перемещений, а также в виде уравнений связи в обобщенных неизвестных на границах. Одной из основных характеристик фрагмента является тип используемого базового элемента, оптимально моделирующего фрагмент. Информация, идентифицирующая тип базового элемента, содержит следующие характеристики: количество узлов, число неизвестных в узле, тип и число степеней свободы конечного элемента, количество и тип независимых физико-механических констант и пр.

Используемый для расчета всяких систем повышенной жесткости комплекс программ является одной из составных вычислительного комплекса ПАРУС и ориентирован на исследование всяких конструкций, включающих фрагменты стержней, воспринимающих растяжение–сжатие (ванты) и растяжение–сжатие с изгибом (нити конечной жесткости), а также мембран. Одна из основных задач комплекса – исследование напряженно-деформированного состояния указанных выше конструкций с учетом больших перемещений и деформаций на основе шагового интегрирования уравнений движения дискретных моделей. Эти задачи, как было отмечено ранее, решаются на основе методов Ньютона-Канторовича и дискретных торможений [119, 120, 121, 219].

Комплекс программ базируется на современных принципах построения системного математического обеспечения таких, как модульная организация основных алгоритмов и программ, универсальность и незамкнутость по отношению к применению новых типов конечных элементов и вычислительных алгоритмов, высокая степень автоматизации всех этапов расчета, удобство и наглядность средств подготовки и контроля исходных данных. Укрупненная блок-структура комплекса программ показана на рис. 6.1.

Каждый блок выполняет свои функции. Так, блок «Управление вычислительным процессом» осуществляет управление ходом решения задачи, последовательно вызывая программные блоки.

Блок «Задание исходных данных» производит определение всех параметров, необходимых для решения задачи: реализует разбивку конструкции на фрагменты, а фрагментов – на конечные элементы и задает информацию об их связях с узлами дискретной модели (т. е. определяет топологическую структуру конструкции), производит задание геометрических данных, физико-механических и жесткостных характеристик, граничных условий, внешних воздействий и др.

Блок «Обработка, контроль и отображение исходных данных» систематизирует их задание, производит анализ и поиск ошибок по тем или иным формальным признакам, а также по выбору пользователя выдает или не выдает исходные данные на экран дисплея или печатающее устройство.

Блок «Решение системы нелинейных уравнений равновесия» в соответствии с принятой схемой алгоритма исследования деформирования висячих систем повышенной жесткости производит решение системы нелинейных уравнений, определение параметров напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов висячей системы, а также в случае необходимости и учет дополнительных воздействий. При этом из программных модулей, реализующих соотношения метода конечных элементов для стержней и мембран, автоматически выбираются те, которые необходимы для решения данной конкретной задачи.

Блок «Обработка и анализ результатов расчета» производит их систематизацию и формальный анализ на соответствие тем или иным заранее заданным характерным признакам, соответствующим реальному процессу деформирования висячей системы повышенной жесткости.

Блок «Отображение результатов расчета» производит запись на магнитные носители и выдачу полученных в результате решения задачи параметров напряженно-деформированного состояния висячей конструкции по желанию пользователя на экран дисплея, печатающее устройство или графопостроитель. Принятые здесь формы выдачи и представления результатов решения задачи позволяют значительно сократить трудоемкость их обработки и анализа.

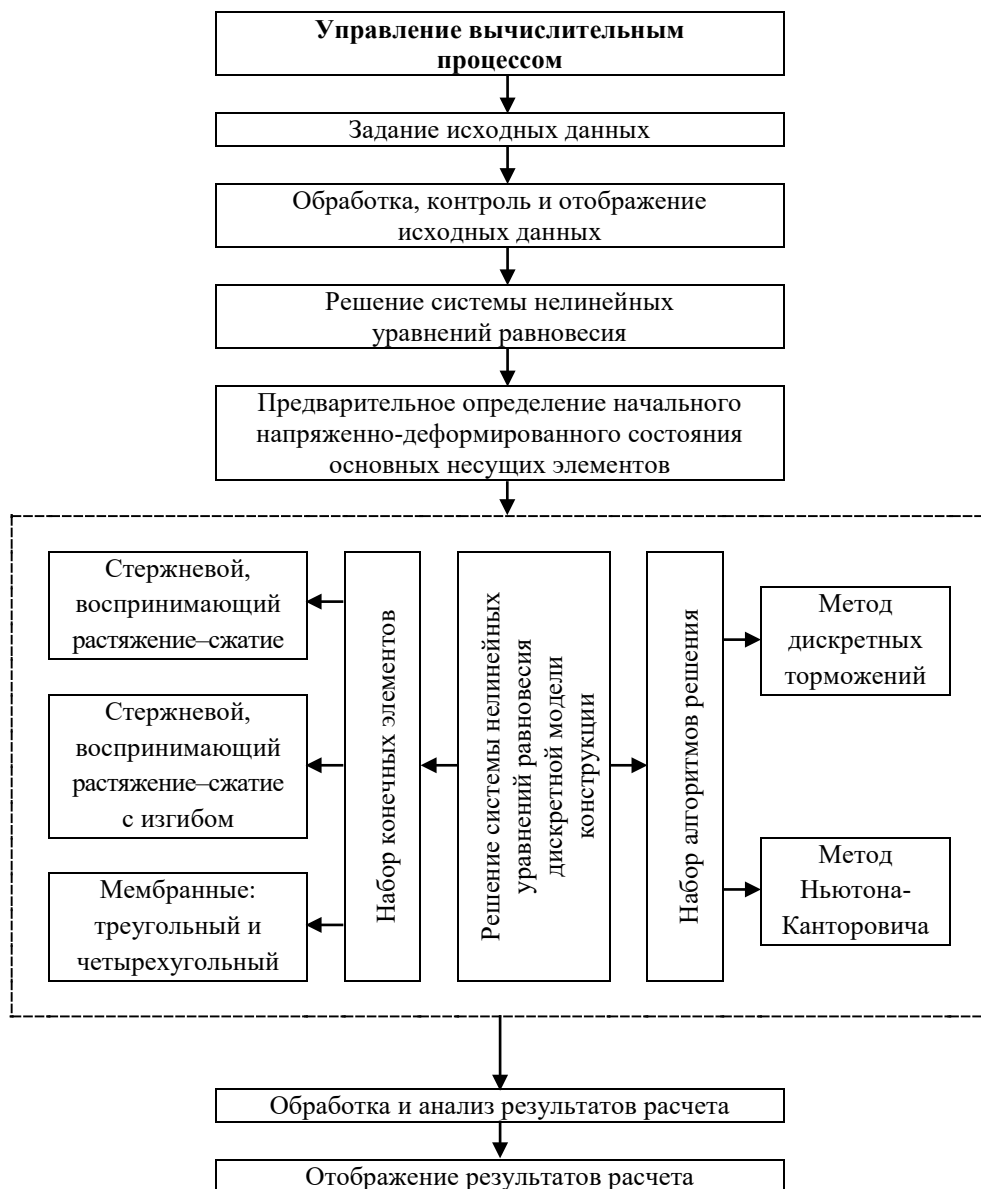


Рис. 6.1. Укрупненная блок-структура комплекса программ по расчету висячих систем повышенной жесткости

Часть II ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Глава 7. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

§ 7.1. Бездефектные композитные конструкции

В различных отраслях современной техники широкое распространение получили многослойные тонкостенные конструкции, выполняемые из композитных материалов с различными физико-механическими характеристиками. Эти конструкции не только воплотили лучшие качества однослойных оболочек, но и во многом превосходили их по различным характеристикам. Внедрение в производство композитных конструкций потребовало разработок новых методов их моделирования и расчета. Вопросы теории и методы расчета слоистых конструкций и жесткой связью между слоями рассматривались в трудах Н.А.Алфутова, П.А.Зиновьева, Б.Г.Попова [9], В.А.Баженова, А.С.Сахарова, А.В.Гондляха, С.Л.Мельникова [19], В.В.Болотина, Ю.Н.Новичкова [40], Э.И.Григолюка, П.П.Чулкова [69], Я.М.Григоренко, А.Т.Василенко, Г.П.Голуба [72], С.Г.Лехницкого [146], Б.Л.Пелеха, В.А.Лазько [185], В.В.Пикуля [191], А.П.Прусакова [199], А.О.Рассказова, И.И.Соколовской, Н.А.Шульги [206], В.Г.Пискунова, В.Е.Веригина, В.К.Присяжнюка, В.С.Сипетова, В.С.Карпиловского [207], А.Ф.Рябова [215], К.Штамма, Х.Витте [302] и др.

Анализ приведенных публикаций показывает, что в процессе развития методов расчета слоистых конструкций было сформировано три основных подхода к построению теории. Один из них основан на использовании различных методов осреднения характеристик слоев и введении для всего слоистого пакета в целом общих гипотез Кирхгофа-Лява и С.П.Тимошенко. Такой подход является корректным для тонких изотропных, слабо анизотропных пластин и оболочек, у которых жесткости слоев примерно одного порядка.

Второй подход основан на построении точных решений для слоистых конструкций, как правило, трехслойных, получаемых без каких-либо допущений о характере напряженно-деформированного состояния в слоях. Этот подход представляет значительный интерес, так как позволяет проконтролировать точность вводимых допущений и уточнить границы применимости технической теории. Однако ввиду сложности реализации он применяется лишь при рассмотрении простейших конструкций.

Промежуточное место между теорией слоистых пластин и оболочек, основанной на гипотезах для пакета в целом, и точным подходом, основанным на уравнениях теории упругости, занимает дискретно-континуальный подход, при котором для каждого из слоев принимаются гипотезы Кирхгофа-Лява, С.П.Тимошенко или другие уточненные гипотезы с выбором общей для

слоев координатной поверхности. Использование в различных комбинациях тех или иных гипотез приводит в результате к значительному разнообразию расчетных схем и уравнений. При этом одной из наиболее распространенных является схема (гипотеза ломаной линии), позволяющая получать разрешающие уравнения равновесия слоистых конструкций, задавая по толщине мягкого связующего слоя гипотезу о линейном изменении перемещений, а по толщине несущих тонких слоев – гипотезу Кирхгофа-Лява. Применение указанных гипотез дает хорошее приближение для большого класса задач [46, 73], учитывающее как деформации поперечных сдвигов и поперечного обжатия заполнителя, так и его работу на продольные силы и моменты, а также изгибную жесткость тонких несущих слоев. Однако следует отметить, что линейное изменение поперечных сдвигов по толщине заполнителя и неучет его обжатия не позволяют рассматривать конструкции, у которых жесткости слоев различаются на два порядка и выше, а также конструкции с заполнителями средней толщины и толстостенные.

Методы расчета, ориентированные на определенные классы бездефектных трехслойных композитных конструкций, развиты в работах многих отечественных и зарубежных ученых и достаточно подробно освещены в литературе [2, 3, 67, 70, 140] и др. Существенный вклад в развитие этих исследований внесли А.Я.Александров, С.А.Амбарцумян, Л.Э.Брюккер, К.З.Галимов, Э.И.Григолюк, М.А.Колтунов, Л.М.Куршин, А.П.Прусаков, А.В.Саченков, П.П.Чулков и др. Наибольшее распространение для расчета указанных конструкций получила теория, в основу которой положена гипотеза ломаной линии.

При расчете трехслойных конструкций, состоящих из композитных слоев, упругие постоянные для слоев определяют в основном путем осреднения физико-механических свойств композитов [40]. Осреднение проводят в сочетании с некоторыми гипотезами о полях напряжений, перемещений и деформаций, учитывающих физический способ взаимодействия элементов композита. Такой прием, как показано в работах [51, 241, 261, 314] и др., позволяет рассматривать слои как однородные по объему ортотропные оболочки и получать результаты, удовлетворительно согласующиеся с опытными данными, и поэтому достаточные для технических приложений.

Однако на практике из-за разного рода нарушений технологии изготовления, а также в процессе эксплуатации и при нагружении конструкций возможно появление различных дефектов на поверхностях контакта слоев. В реальных конструкциях расслоения технологического происхождения чаще всего появляются на границах контакта слоев, у концевых и подкрепляющих элементов, в местах резкого изменения формы. В процессе эксплуатации расслоения могут возникать в ослабленных участках, соединительных прослойках, местах приложения сосредоточенных сил или резкого изменения геометрии и т.п. Разрушение конструкций из многослойных композитов по типу расслоения определяется их низким сопротивлением поперечному сдвигу и

поперечному отрыву. Именно достаточно высокая вероятность наличия межслойных дефектов в композитных конструкциях вызвала необходимость разработки дополнительных методик, позволяющих выполнять исследование указанных выше типов конструкций.

§ 7.2. Слоистые конструкции с дефектами между слоями

Исследование нелинейного деформирования и устойчивости слоистых конструкций при наличии в последних расслоений приобретает практическую значимость и все больше привлекает к себе внимание исследователей. Такой повышенный интерес обуславливается, во-первых, расширением области использования композитных материалов в технике, эксплуатируемой в экстремальных условиях, во-вторых, неизбежным появлением структурных дефектов при незначительных нарушениях технологических режимов, допущенных в процессе изготовления композитных материалов и, как следствие, необходимость в определении условий эксплуатации для дефектной, но дорогостоящей конструкции, в-третьих, особенностями механизма потери устойчивости конструкций с расслоениями.

Систематические исследования работы многослойных стержней, пластин и оболочек с различного рода несовершенствами поверхностей контакта между слоями начались примерно со второй половины 70-х годов, хотя имеются отдельные более ранние публикации. Впервые теоретическая оценка влияния дефектности структуры на упругие свойства слоистого композитного материала была получена В.В.Болотиным [31].

Принимая во внимание работу [38], следует выделить два класса задач: первый – расчет конструкций, содержащих равновесные расслоения; второй – определение возможности роста расслоений при действии нагрузок и нахождение их критических размеров, при которых может быть исчерпана несущая способность конструкции.

Расчет конструкций, содержащих равновесные расслоения. Теоретическое и экспериментальное исследования влияния дефектов типа непрочности на устойчивость композитных конструкций в отечественной литературе впервые было выполнено на примере двухслойных цилиндрических изотропных оболочек при внешнем давлении [7] на основе приближенной расчетной схемы, использующей для участка расслоения эквивалентную жесткость. Были рассмотрены участки непрочности квадратной формы, расположенные симметрично относительно торцов оболочки, и непрочности в кольцевом направлении, расположенные на произвольном расстоянии от края.

Из дальнейшего анализа литературных источников, посвященных описанию исследования конструкций, содержащих равновесные расслоения, можно выделить два существенно разных подхода к построению расчетных моделей [186].

Первый характеризуется тем, что дефектный участок моделируется поверхностью нулевой толщины, на которой претерпевают разрыв компоненты вектора перемещений (модели «типа скачка»). При этом в зависимости от характера задачи обычно рассматривают два частных случая таких моделей:

образование нормальных расслоений, у которых в процессе деформирования берега расходятся, т. е. имеет место разрыв нормальных перемещений;

образование сдвиговых расслоений, которые характеризуются разрывом только тангенциальных компонент вектора перемещений при переходе через поверхность раздела слоев или смежных фаз в композите. Они играют существенную роль, например, в теории адгезионной прочности композитов [186].

При втором подходе зона дефекта между слоями (или ослабленная межфазовая граница) моделируется дополнительным контактным слоем ненулевой толщины с определенными физико-механическими свойствами (это так называемые модели плавного перехода).

Стоит оговорить сразу тот факт, что трехслойные конструкции в подавляющем большинстве устроены таким образом, что внешние – несущие слои являются тонкими и обладают физико-механическими характеристиками, значительно превосходящими параметры заполнителя. В результате этого дефекты располагаются вблизи поверхности сжатого элемента конструкции или сжатого участка изгибаемого элемента. Этот факт немаловажен, так как необходимо учитывать возможное выпучивание тонкого отслоившегося участка над зоной расслоения. Именно с учетом этого рассматривается большинство задач по расчету конструкций с равновесными расслоениями. Они посвящены, в основном, исследованию стержней, пластин и отдельных классов оболочек.

Обычно предполагается, что невозмущенное напряженно-деформированное состояние элемента, содержащего участки расслоения, безмоментно и не отличается от соответствующего состояния в элементе без расслоений. Как правило, принимаются также два существенных предположения, позволяющих свести задачу устойчивости к классической задаче на собственные значения [39]:

невозмущенное состояние и состояние нейтрального равновесия как в области с расслоением, так и в бездефектной области, описываются уравнениями технической теории стержней, пластин и оболочек (что, конечно, налагает ограничения на размеры расслоений);

не учитывается контактное взаимодействие между противоположными сторонами расслоения.

При этих предположениях в большинстве проанализированных работ по стержням и пластинам используется приближенная инженерная расчетная схема типа жестко защемленной полосы (так называемое балочное приближение) либо энергетический метод. Они позволяют получить оценки критических напряжений, при которых будет происходить выпучивание расслоений без последующего их распространения или с одновременным продвиже-

нием трещины [39, 54, 192, 193]. Как отмечается в работе [193], при сжатии стержня возможны различные виды прощелкивания тонкой полоски над расслоением:

прощелкивание по Эйлеру над участками расслоения;

прощелкивание с ростом расслоения на некоторую длину или до одного края.

При этом реализуется такой вид выпучивания, который соответствует наименьшему критическому напряжению. Над внутренним прямоугольным расслоением в пластине также может происходить выпучивание по форме заземленной пластины или с дополнительным расслоением.

Во многих работах отмечается тот факт, что выпучивание отслоения происходит, как правило, при закритических деформациях отслоившегося участка. Поэтому задачи об устойчивости и росте поверхностных расслоений обычно рассматриваются в геометрически нелинейной постановке [90, 253, 254, 330 и др.] или в полулинейной постановке, когда поведение отслоения описывается в рамках геометрически нелинейной теории, а для остальной части конструкции используются линейные уравнения [39].

В работе [13] приведен приближенный метод определения критической нагрузки цилиндрической оболочки по модели «суммарных жесткостей». Исследовано влияние длины и участка расположения расслоения в ортотропной цилиндрической оболочке на критическую нагрузку при осевом сжатии и внешнем давлении. В расчете учитывается взаимодействие между противоположными берегами расслоения. В соответствии с этой моделью принимается, что нескрепленные слои при потере устойчивости не разделяются и их деформации растяжения–сжатия и сдвига слоев равны. Поэтому в области расслоения приведенные жесткости на растяжение и сдвиг такие же, как и у монолитной оболочки, а изгибная жесткость и жесткость на кручение определяются суммой соответствующих жесткостей нескрепленных слоев относительно собственных срединных поверхностей.

Подробный параметрический анализ влияния размера и места расположения расслоения по толщине ортотропной цилиндрической оболочки, а также длины, относительной толщины и кривизны оболочки на критическое внешнее давление выполнен в работах [253, 254]. В работе [254] рассмотрено продольное расслоение, идущее на всю длину ортотропной цилиндрической оболочки. Предполагается, что при докритических нагрузках границы участка расслоения остаются неизменными и что расслоение разделяет оболочку на отдельные сопряженные одна с другой цилиндрические панели. При этом в местах сопряжения панелей выполняются условия равенства усилий, моментов, перемещений и углов поворота. Для решения задачи используется геометрически нелинейная постановка. Уравнения устойчивости для каждой из трех цилиндрических панелей после разделения переменных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях. Интегрирование этих уравнений совместно с граничными условиями и условия-

ми сопряжения проводится методом Кутта-Мерсона с промежуточным ортонормированием векторов решения. Сравнение с решением линейной задачи устойчивости, проведенное в работе [253] (при этом предполагается, что докритическая сжимающая нагрузка распределяется между цилиндрическими панелями на участке расслоения пропорционально их жесткостям на растяжение–сжатие), показывает, что решение линейной задачи отражает лишь малое начальное возмущение тонкого слоя. При несимметричном расположении расслоения по толщине оболочки (вблизи наружной или внутренней поверхности) может происходить локальное выпучивание одного тонкого слоя. Если же толщина слоев в зоне расслоения относительно велика, то оболочка будет терять устойчивость по смешанным формам. При этом расслоение, расположенное вблизи внутренней поверхности оболочки, в большей мере снижает критическое внешнее давление, чем расслоение, расположенное возле наружной поверхности. При больших размерах расслоения может возникать контактное взаимодействие берегов расслоения (это обнаруживается по пересечению линий прогибов расслоившихся частей оболочки при построении форм потери устойчивости).

Устойчивость в линейной постановке подкрепленных цилиндрических оболочек из композитных материалов с расслоениями при одновременном воздействии осевого сжатия и внешнего давления исследована в работе [248]. Для понижения порядка уравнений нейтрального равновесия реальная оболочка с расслоениями моделируется квазимонолитной оболочкой с переменной изгибной жесткостью, претерпевающей разрывы первого рода на границах областей расслоений, описываемые импульсными функциями. Проанализировано влияние площади расслоений, места их расположения по длине и толщине оболочки, величины раскрытия на критические нагрузки.

Устойчивость упругой сферической оболочки с расслоением в виде сферического сегмента, эквидистантного срединной поверхности, рассмотрена в работах [38, 39]. Предполагается, что в исходном невозмущенном состоянии между слоями дефектного участка сохраняется равномерный контакт по всей поверхности. В возмущенном состоянии слои либо не контактируют между собой, кроме границы расслоения, либо имеется контакт отдельных участков внутри зоны расслоения (соответственно разными будут граничные условия). В работе [38] рассмотрены как осесимметричные, так и несимметричные формы потери устойчивости. Показано, что отличительной особенностью задачи устойчивости оболочки с расслоениями является последовательная смена форм потери устойчивости, соответствующих минимальному значению критической нагрузки. Возможны как локальные, так и общие формы потери устойчивости.

В общем случае оценка несущей способности оболочек и пластин с расслоениями требует построения моделей, описывающих взаимосвязанные процессы деформирования конструкций и роста расслоения. Из-за сложности такого подхода обычно предполагается, что развитию расслоения (и решению

соответствующей задачи разрушения) предшествует потеря устойчивости сжатого слоя в дефектной зоне [32, 193, 333].

Один из возможных способов учета неполного контакта слоев в двухслойных ортотропных цилиндрических оболочках предложен в работах [223, 224], в которых рассмотрены дискретные связи между слоями типа сварных швов или клеевых полос. Для описания работы таких связей используется модель легкого заполнителя, принятого в теории трехслойных оболочек Э.И.Григолюка [67]. Согласно этой модели сопротивление связующего слоя (толщина которого считается значительно меньшей толщины слоев оболочки) определяется только деформациями поперечного сдвига. Дифференциальные уравнения равновесия и устойчивости оболочек с дискретными связями между слоями получаются исходя из принципа возможных перемещений.

В работе [223] выполнено исследование осесимметричной устойчивости рассмотренной цилиндрической оболочки. В работе [224] численно проанализировано влияние количества продольных связей на критическую нагрузку. Показано, что для сварных швов и клеевых прослоек, модуль сдвига которых не более чем на два порядка ниже модулей материала склеиваемых оболочек, необходим учет дискретности связей. В других случаях при потере устойчивости оболочки можно использовать модель со сплошным соединительным слоем.

Отметим также, что при потере устойчивости оболочек с несвязанными слоями возможны несинфазные формы потери устойчивости отдельных слоев [63].

В работе [77] обращается внимание на то, что приближенные расчетные схемы исследования устойчивости типа балочного приближения часто не вполне удовлетворительны, так как идеализируют условия на границе расслоения и не отражают действительное напряженно-деформированное состояние в окрестностях его края. Кроме того такой подход заведомо неприемлем, если полоса является толстой. Исследования поведения композитных материалов с расслоениями как приповерхностными, так и с внутренними (достаточно удаленными от всех граничных поверхностей материала) проводилось в работах [76, 77] на основе трехмерной линеаризованной теории устойчивости и теории трещин в телах с начальными напряжениями. Так, в работе [77] определены значения критических нагрузок, соответствующих началу разрушения, в зависимости от отношения модулей упругости слоев и их конфигурации. Полученные в такой постановке значения критических нагрузок существенно отличаются от значений, определенных на основе приближенных расчетных схем.

Различные задачи устойчивости стержней, пластин и оболочек с расслоениями рассмотрены также в работах [63, 109, 310, 311, 328, 330, 333].

Для тонких многослойных пластин и оболочек с идеальным сцеплением иногда применяются два различных подхода к построению уточненных двумерных теорий, называемых часто феноменологическим и дискретным

(структурным) [68]. При феноменологическом подходе кусочно-неоднородные по толщине слоистые пластины или оболочки рассматриваются как квазиоднородные с приведенными упругими характеристиками. Порядок получающихся при этом уравнений не зависит от числа слоев. При дискретном подходе учитывается неоднородность строения оболочки введением кинематических или статических (или кинематических и статических) гипотез для каждого отдельного слоя. Порядок уравнений при этом зависит от числа слоев, но эти уравнения позволяют учитывать локальные эффекты на границах слоев. Поэтому именно дискретный подход оказался пригодным, в частности, для расчета многослойных конструкций с разного рода несовершенствами поверхности контакта слоев.

Смешанный функционал геометрически нелинейной теории тонких многослойных оболочек, состоящих из проскальзывающих и односторонне контактирующих слоев, с учетом трения и заданных зазоров построен в работе [90]. Получена разрешающая система дифференциальных уравнений осесимметричной деформации гибких оболочек вращения, проскальзывающих с трением. Нахождение зон контакта производится итерационным путем.

Обобщенная вариационная постановка задачи расчета напряженно-деформированного состояния многослойных анизотропных оболочек при наличии зон неидеального межслойного контакта сформулирована в работах [141, 142].

Стоит отметить расширенный функционал, построенный в работе [75], из которого следуют уравнения равновесия, соотношения Коши, закон Гука, граничные условия и условия на поверхностях контакта слоев. Переход к двумерным уравнениям многослойных анизотропных оболочек осуществлен в работе [142] с использованием разложения компонент напряженно-деформированного состояния в ряды по полиномам Лежандра.

Развитие этого подхода и распространение его на различные кусочно-однородные среды описано в работах [143, 144, 159, 184, 187]. Поверхность контакта смежных слоев в работах [143, 187] предполагается состоящей в общем случае из участков:

- жесткого (идеального) сцепления слоев;

- межслойных трещин нормального разрыва (участок нормального расслоения) с заданными напряжениями на краях (на этом участке контактные поперечные и касательные напряжения, возникающие на поверхности контакта смежных слоев, предполагаются равными нулю);

- сдвигового расслоения. Это участок межслойных дефектов типа пластического проскальзывания, сухого трения и т.п.

На участке межслойных дефектов с соприкасающимися краями могут претерпевать разрыв тангенциальные компоненты перемещений, а касательные напряжения могут задаваться различным образом, в частности, могут быть функциями нормальных контактных напряжений. Межслойные касательные

тельные напряжения выражаются через усредненные перемещения соседних слоев.

При произвольных границах межслойных дефектов из вариационного уравнения варьированием по неизвестным параметрам можно получить условия определения границ дефектов и определить эти границы подбором [144].

Изгиб нагруженных равномерной поперечной нагрузкой свободно опертых трехслойных пластин симметричного строения с произвольно расположенной зоной непрочности методом конечных разностей рассмотрен в работе [187]. Для несущих слоев принимаются справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява, заполнитель считается легким, ортотропным. Расчет сводится к совместному решению уравнений равновесия для бездефектных участков и участков с расслоениями с учетом условий сопряжения на границах участков и граничных условий для пластины. Получены зависимости между максимальным прогибом изучаемой и полностью расслоенной пластиной. Выявлено, что участок непрочности, расположенный в углу пластины, слабее влияет на прогиб пластины, чем такой же участок в центре при одинаковой форме и площади. Показано, что максимальные прогибы в пластине при наличии участков расслоения площадью 0,05–0,1% общей площади рассматриваемой пластины возрастают на порядок и оказываются близкими по размерам к прогибам полностью расслоенной пластины. Непрочности, равномерно распределенные на нескольких участках, оказывают меньшее влияние на прогибы, чем непрочности, сосредоточенный на одном участке той же суммарной площади. При смещении участка непрочности от центра к краю максимальный прогиб также смещается в сторону дефектного участка.

В работе [130] в аналогичной постановке рассмотрена задача цилиндрического изгиба трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем и приведены графики изменения нормальных напряжений в несущих слоях и касательных напряжений в заполнителе в зависимости от сжимаемости заполнителя и площади участков расслоения. Рассмотрено также влияние модулей упругости и толщины заполнителя и несущих слоев на напряженно-деформированное состояние трехслойных панелей с расслоениями. Даны рекомендации конструктивного характера по снижению чувствительности конструкции к расслоениям.

Расчет конструкций с учетом эволюции расслоения. К этому классу относятся задачи об определении возможности роста расслоений под действием нагрузок и нахождении их критических размеров, при которых может быть исчерпана несущая способность конструкции (они решаются обычно методами механики разрушения) [32, 33, 34, 35, 36, 37, 128, 166, 173, 265, 304, 325, 334] и др.

В настоящее время единой теории расчета трехслойных конструкций с учетом эволюции расслоений пока не разработано, поэтому для оценки условий распространения расслоения используют приближенные зависимости.

Известно, что для трехслойных пластин и оболочек возможны расслоения когезионного и адгезионного типов. При когезионном расслоении происходит нарушение целостности однородного материала, т. е. либо расслоение несущего слоя, либо расслоение сплошного заполнителя. При адгезионном нарушении целостности происходит расслоение по границе слоев разнородных материалов. Этот вид расслоений наиболее характерен для трехслойных конструкций. Зачастую при рассмотрении эволюции расслоений принимается, что разрушение происходит по промежуточному типу между адгезионным и когезионным. Если несущие слои очень жесткие, а заполнитель малопрочный, то расслоение приближается к адгезионному типу; если параметры жестких несущих слоев и заполнителя близки, то расслоение близко к когезионному типу [130].

Достаточно общая постановка задачи о росте расслоений и отслоений (отслоениями принято считать расслоения, расположенные вблизи поверхности) в конструкциях из однонаправленных, волокнистых композитных материалов развивается в работах В.В.Болотина [32, 33, 34, 35, 36, 37]. Она является обобщением на многопараметрические задачи энергетической концепции Гриффитса в механике квазихрупкого разрушения, состоящей в учете влияния рассеянных микроповреждений, накапливаемых на фронте расслоений, на сопротивление их росту.

На основе этого подхода рассмотрены задачи разрушения пластин, имеющих тонкие отслоения различной формы в плане – прямоугольные, круговые, эллиптические. Получены оценки продолжительности инкубационной стадии отслоения (до наступления страгивания дефекта) и направления преимущественного роста отслоения от страгивания [173]. Экспериментальное и теоретическое исследования кинетики роста тонких отслоений в плоских и оболочечных конструкциях при квазистатическом и циклическом нагружении выполнены в работах [166, 167, 174, 305].

Модель роста расслоений, в которой мера повреждений определяется комбинированным действием напряжений межслойного сдвига и отрыва, рассмотрена в работе [306].

Общая постановка задачи о развитии расслоений вдоль границы различных слоев в многослойных тонких пластинах и оболочках из композитных материалов, в частности, усталостных трещин расслаивания, основанная на свойствах инварианта J -интегралов, предложена Г.П.Черепановым [266]. Используется эквивалентное критерию Гриффитса предположение о том, что расслоение будет развиваться при достижении J -интегралом критического значения, соответствующего удельной энергии разрушения для данного материала. В такой постановке решены некоторые задачи о докритическом росте эллиптической и параболической трещин расслоения в пластинах и осесимметричной трещины расслаивания в двухслойной цилиндрической оболочке.

Стоит также отметить работы, в которых рост участка расслоения оценивается МКЭ по интенсивности освобождения упругой энергии при различных типах нагружения [317, 325, 327, 328, 334, 335].

На основе МКЭ авторами работ [155, 218] разработана методика и алгоритм численного анализа напряженно-деформированного состояния композитных конструкций в процессе их нагружения до потери несущей способности с учетом пластического деформирования и разрушения материала слоев. Предложенная методика предусматривает физически обоснованную коррекцию тензора физико-механических констант разрушенной области в зависимости от вида разрушения – отрыва, сдвига или смятия.

Оценка конечного времени разрушения при медленном росте выпучивания на основе критерия вязкохрупкого разрушения получена в работе [109].

В работе [330] энергетическим методом рассмотрено скачкообразное отщепление внутреннего слоя стеклопластиковой трубы при действии на нее внешнего давления. Во внутренних точках трубы будут наибольшие окружные сжимающие напряжения, которые определяются по формуле Ламе. При значительных сжимающих напряжениях и относительно малой прочности материала трубы в радиальном направлении может произойти скачкообразное отслоение внутреннего слоя. Критическое напряжение, при котором происходит отслаивание, определяется сравнением энергетических уровней форм равновесия до и после прощелкивания.

Энергетический критерий используется также в работе [265] для объяснения механизма разрушения композитных цилиндрических труб по форме «китайского фонарика» (в результате расщепления вдоль волокон и выпучивания образовавшихся полосок).

Разрушение тонкой трансверсально-изотропной упругой замкнутой сферической оболочки с расслоением эллипсоидальной формы рассмотрено в работе [172]. Размеры отслоения считаются малыми по сравнению с радиусом, тангенциальными перемещениями срединной поверхности отслоения пренебрегается по сравнению с нормальными. Предполагается также, что потеря устойчивости происходит при конечных перемещениях отслоившегося участка. Поэтому отслоение после выпучивания рассматривается как тонкая защемленная по контуру панель с заданными смещениями на контуре. Определены верхняя и нижняя критические нагрузки для отслоений, расположенных на наружной и внутренней поверхностях, и равновесные размеры отслоений.

Нелинейная модель осесимметричного деформирования и разрушения пологой сферической оболочки с расслоением развита в работе [90]. Принимается, что на участке расслоения имеются чередующиеся зоны раздельного деформирования слоев и зоны нормального контакта между слоями. Трение между слоями не учитывается. На границах зон контакта и зон раздельного деформирования, а также внутри зон контакта должны выполняться дополнительные условия равенства прогибов внутреннего и внешнего слоев.

Вариационная задача строится с помощью неопределенных множителей Лагранжа. Из условия стационарности функционала с переменными границами получены системы нелинейных уравнений для каждого из слоев на каждом из участков, граничные условия, условия совместности и трансверсальности на границах зон контакта и зон раздельного деформирования. Выполнен анализ форм изгиба, который позволил проследить переход от локальной формы потери устойчивости к общей потере устойчивости по мере роста расслоения в процессе деформирования.

В работе [324] рассматривается процесс расслоения в слоистых композитах в предположении, что слои волокон моделируются трансверсально-изотропными пластинами, а связующее – поверхностью нулевой толщины, выдерживающей лишь ограниченные значения межслойных напряжений. Разрыв перемещений на поверхности расслоения связан с межслойными напряжениями с помощью многозначных немонотонных операторов. Показано, что краевые задачи для квазистационарных процессов расслоения приводят в этом случае к системе полувариационных неравенств. Возможность их использования для оценки механических свойств композитов с расслоениями показана также в работе [326].

Отметим также работы, в которых рассматриваются критерии прочности соединения слоев при наличии расслоений, виды и модели разрушения, а также экспериментальные методы сопротивления композитов расслоению [92, 130, 187, 312, 336].

§ 7.3. Задачи исследования

Анализ состояния вопроса показывает, что большинство работ по исследованию устойчивости слоистых конструкций с расслоениями выполнено, как правило, в рамках приближенных расчетных схем и носят, в основном, постановочный характер. Многие модели ограничиваются либо классом рассматриваемых оболочек, либо неучетом одностороннего взаимодействия отслоившихся участков несущих слоев с поверхностью заполнителя. Обращает на себя внимание малое количество систематических численных и экспериментальных результатов, посвященных анализу влияния различных параметров конструкций с расслоениями на характеристики их несущей способности. Необходимы экспериментальная проверка различных моделей расслоения, создание научно обоснованных методик и разработка на их основе пакетов прикладных программ для численного анализа напряженно-деформированного состояния и устойчивости слоистых конструкций с учетом расслоений.

Исследованию устойчивости трехслойных оболочечных конструкций с учетом эволюции дефектов типа расслоений посвящено незначительное количество работ, в основном ориентированных на рассмотрение плоских и осесимметричных объектов. Построение расчетных моделей для таких конструкций, как правило, базируется на использовании геометрически линей-

ных теорий. Небольшой объем работ по данной тематике обусловливается сложностью решения таких задач, так как они являются одновременно геометрически и конструктивно нелинейными.

Таким образом, разработка методов алгоритмов расчета трехслойных конструкций с учетом указанных особенностей их работы является на сегодня актуальной задачей строительной механики. Ее решение в работе осуществляется в результате последовательной реализации таких основных этапов:

1. Построение расчетной модели для анализа нелинейного деформирования трехслойных пластинчатых и оболочечных конструкций общего вида с учетом эволюции расслоений;
2. Разработка алгоритмов численного исследования устойчивости трехслойных пространственных конструкций с учетом одностороннего контакта между расслоившимися участками смежных слоев;
3. Реализация разработанных алгоритмов на ПЭВМ в виде комплекса программ;
4. Использование комплекса программ для решения широко применяемых в различных отраслях современной техники задач деформирования и устойчивости трехслойных пластинчатых и оболочечных конструкций с учетом возможного образования и роста дефектов типа расслоений.

1.2. Исходные допущения

Рассмотрим трехслойную конструкцию несимметричной по толщине структуры, состоящую из упругих криволинейных слоев с различными физико-механическими характеристиками, под действием произвольной статической нагрузки. Расположим ее в общей системе декартовых координат XYZ . При этом ось OZ направим по нормали к слоям, а ортогональную ей плоскость OXY расположим согласно правилу формирования правосторонней системы координат (рис. 8.1).

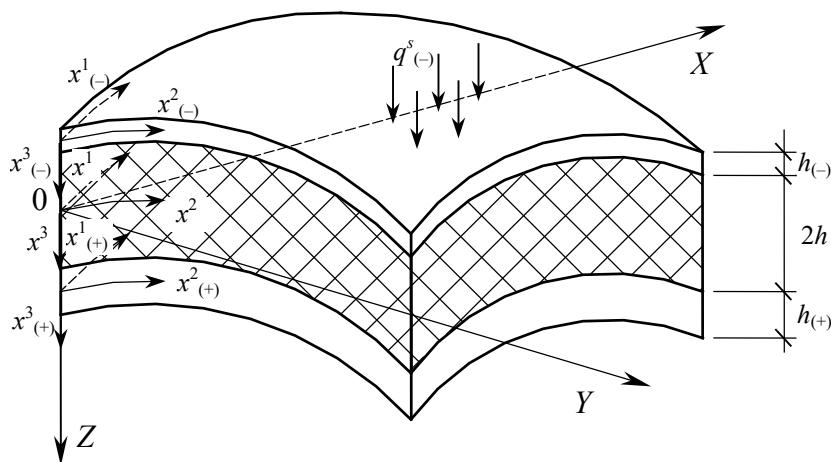


Рис. 8.1. Фрагмент трехслойной композитной оболочки

Для каждого слоя введем локальные системы криволинейных координат x^1 , x^2 , x^3 . Ориентация местных систем координат выбрана таким образом, что направление оси Ox^3 совпадает с направлением оси OZ глобальной системы координат. Оси Ox^1 , Ox^2 для слоя заполнителя размещаются на его срединной поверхности, а для наружных слоев – на произвольных поверхностях.

Остановимся более подробно на допущениях, которые приняты при описании каждого отдельного слоя, составляющего трехслойную композитную оболочку.

В зависимости от физико-механических характеристик материала слои делятся на мягкие и жесткие. В подавляющем большинстве случаев в трехслойных оболочечных конструкциях наружные слои выполняют функции несущих слоев. Исходя из этого, принимается, что они являются жесткими и тонкими (по принятой в классической теории оболочек классификации) изотропными оболочками. Средний слой-заполнитель в основном выполняет связующую функцию и моделируется мягкой изотропной оболочкой (тонкой или средней толщины).

Для описания деформирования наружных слоев принимается гипотеза Кирхгофа-Лява, на основании которой перемещения по толщине слоя определяются по формулам

$$u_s = u_s^k + \nu_s x^3, \quad u_3 = u_3^k, \quad (8.1)$$

где u_3^k , u_s^k – соответственно нормальные и тангенциальные перемещения точек, принадлежащих координатной поверхности; ν_s – углы поворота нормали в плоскостях $x^1 = \text{const}$ и $x^2 = \text{const}$ соответственно. Здесь и далее в работе греческие индексы принимают значения 1, 2, 3, а латинские – 1, 2.

С учетом закона линейного распределения перемещений по толщине слоя (8.1) деформации e_{is} можно представить в виде

$$e_{is} = \varepsilon_{is} + x^3 \mu_{is}, \quad (8.2)$$

где ε_{is} и μ_{is} – соответственно компоненты тензоров тангенциальных и изгибных деформаций.

Исходя из той же гипотезы Кирхгофа-Лява, упругое относительное удлинение в нормальном к координатной поверхности направлении ε_{33} и поперечные сдвиги ε_{i3} принимаются равными нулю, а нормальные напряжения на площадке, параллельной координатной поверхности, не оказывают существенного влияния на величины деформаций слоев.

Рассмотрим допущения, принятые для среднего слоя-заполнителя. Принимая во внимание, что заполнитель является мягким слоем с существенно неоднородной структурой, изменяющейся по толщине, построение расчетной модели требует учета поперечного сдвига и поперечного обжатия. Задавая гипотезу о линейном изменении перемещений по толщине заполнителя, получим

$$u_s = u_s^c + (\nu_s + \gamma_s) x^3, \quad u_3 = u_3^c + \gamma_3 x^3, \quad (8.3)$$

где u_s^c – ковариантные составляющие вектора перемещений точек срединной поверхности заполнителя; γ_s – углы поворота прямолинейного элемента, обусловленные поперечным сдвигом; γ_3 – поперечное обжатие заполнителя.

Согласно введенной гипотезе считается, что нормаль, проведенная к срединной поверхности слоя до его деформации, остается прямолинейной, но не перпендикулярной к ней после деформирования слоя. Кроме этого нормаль в процессе деформирования может изменять свою длину.

Линейному распределению перемещений (8.3) соответствуют неравномерное распределение деформаций поперечного сдвига ε_{i3} и равномерное распределение деформации поперечного обжатия ε_{33} .

Принятая гипотеза достаточно эффективна и дает хорошее приближение для широкого класса задач по исследованию слоистых конструкций.

За систему индивидуального отсчета принимается декартовая система координат XYZ , а задание точек координатной поверхности слоя осуществляется при помощи вектор-функции

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2), \quad (8.4)$$

где параметры x^1, x^2 определяют неподвижные в общем случае косоугольные криволинейные координаты, связанные с недеформированной координатной поверхностью слоя (рис. 8.2).

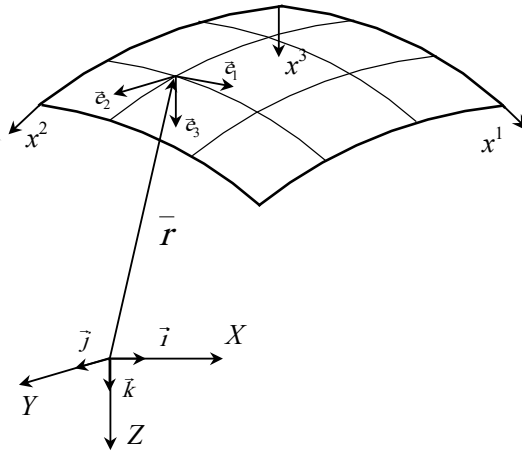


Рис. 8.2. Системы декартовых и криволинейных координат

В декартовой системе координат проекции вектор-функции $\vec{r}$ точек срединной поверхности в пределах элемента слоя задаются непрерывными однозначными функциями вида

$$X = X(x^1, x^2), \quad Y = Y(x^1, x^2), \quad Z = Z(x^1, x^2). \quad (8.5)$$

Векторы $\vec{e}_s$, направленные по касательным к координатным линиям x^1, x^2 , и вектор $\vec{e}_3$, совпадающий с ортом нормали к срединной поверхности, представляют собой основной локальный базис точек координатной поверхности слоя оболочки.

В выбранной системе координат коэффициенты α_{ts} , определяющие внутреннюю метрику координатной поверхности слоя и представляющие собой компоненты дважды ковариантного метрического тензора, выражаются зависимостью

$$a_{ts} = \vec{e}_t \cdot \vec{e}_s, \quad (8.6)$$

а фундаментальный определитель метрического тензора имеет вид

$$a = a_{11} a_{22} a_{12}^2. \quad (8.7)$$

Связь между ковариантными и контрвариантными составляющими векторов и тензоров, заданных на поверхности слоя, устанавливается при помощи тензора (8.6)

$$u_\alpha = a_{\alpha\beta} u^\beta, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\mu} \varepsilon^{\gamma\mu}. \quad (8.8)$$

Векторы взаимного базиса криволинейных координат x^1, x^2 связаны с векторами основного локального базиса соотношениями

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\sqrt{a}}, \quad \bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_3}{\sqrt{a}}, \quad \bar{e}^3 = \bar{e}_3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\sqrt{a}}. \quad (8.9)$$

1.3. Построение дифференциальных соотношений для заполнителя

Эта задача базируется на применении операции проектирования к трехмерным уравнениям механики деформируемого тела без привлечения кинематической и статической гипотез классической теории оболочек. При этом вид и свойства приближенного решения, а также его сходимости к точному обуславливаются надлежащим выбором координатных базисных функций.

Для отыскания компонент тензора напряжений и вектора смещений целесообразно воспользоваться разложениями по полиномам Лежандра относительно скалярной координаты x^3 , примененными И.Н.Векуа для построения неклассической теории оболочек [53]. Коэффициенты этих разложений будем называть моментами соответствующих величин, а номера коэффициентов – порядками этих моментов. Для искомого тензора напряжений и вектора смещений из уравнений теории упругости получим систему уравнений бесконечного порядка с двумя независимыми переменными. Для построения приближенного решения задачи теории оболочек ограничимся двумя элементами рассматриваемых рядов. Таким образом, получим систему уравнений конечного порядка, представляющую в приближенной форме необходимые условия равновесия заполнителя [16].

Представим уравнение равновесия элемента тонкой упругой среды, описывающее работу заполнителя в произвольной системе координат, в виде

$$\frac{\partial(\sqrt{a}\bar{B}^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \sqrt{a}\bar{F} = 0, \quad (8.14)$$

где $\bar{B}^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} \bar{e}_\beta^*$ – контрвариантный вектор внутренних напряжений с компонентами $\sigma^{\alpha\beta}$; $\bar{F}$ – вектор объемной силы.

Предположим, что вектор-функция напряжений в достаточной степени является гладкой. Тогда $\bar{B}^\alpha(x^1, x^2, x^3)$ относительно скалярной координаты x^3

для каждой точки (x^1, x^2) срединной поверхности можно разложить в ряд по полиномам Лежандра $P_n\left(\frac{x^3}{h}\right)$

$$\bar{B}^\alpha(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=0}^n \bar{B}^\alpha(x^1, x^2) P_n\left(\frac{x^3}{h}\right). \quad (8.15)$$

Здесь n – некоторое фиксированное целое положительное число, характеризующее степень приближения для искомой функции напряжений; $\bar{B}^\alpha$ – момент вектора напряжений порядка n , определяемый по формуле

$$\bar{B}^\alpha(x^1, x^2) = (n+0,5)h^{-1} \int_{-h}^h \bar{B}^\alpha(x^1, x^2, x^3) P_n(x^3/h) dx^3,$$

где h – половина толщины заполнителя.

Представим уравнение (8.14) в следующем виде

$$\begin{aligned} & (n+0,5)h^{-1} \int_{-h}^h \frac{\partial(\sqrt{a}\bar{B}^s)}{\partial x^s} P_n\left(\frac{x^3}{h}\right) dx^3 + (n+0,5)h^{-1} \int_{-h}^h \frac{\partial(\sqrt{a}\bar{B}^s)}{\partial x^s} \times \\ & \times P_n\left(\frac{x^3}{h}\right) dx^3 + (n+0,5)h^{-1} \int_{-h}^h F\sqrt{a}P_n\left(\frac{x^3}{h}\right) dx^3 = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Принимая момент вектора силы $\bar{F}$ равным нулю и производя необходимые преобразования, представим уравнение (8.16) в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\left(\sqrt{a}\bar{B}^s\right)}{\partial x^s} + (n+0,5)h^{-1}\sqrt{a}\left[\bar{B}_{(+)}^3 - \bar{B}_{(-)}^3(-1)^n\right] - \\ & - (2n+1)\sqrt{a}\sum_{k=0}^{(n-2k-1)} h^{-1} \cdot \bar{B}^3 = 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ограничиваясь приближением порядка $n=1$ в соответствии с принятой гипотезой (8.3), получим уравнения равновесия в векторной форме:

$$\frac{\partial\left(\sqrt{a}\bar{B}^s\right)}{\partial x^s} + \frac{1}{2h}\sqrt{a}\left[\bar{B}_{(+)}^3 - \bar{B}_{(-)}^3\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \left(\sqrt{a} \vec{B}^{(1)} \right)}{\partial \chi^s} + \frac{3}{2h} \sqrt{a} [\vec{B}_{(+)}^3 + \vec{B}_{(-)}^3] - \frac{3}{2h} \sqrt{a} \vec{B}^{(0)} = 0, \quad (B = 0 \text{ при } m \leq 0). \quad (8.18)$$

Раскладывая векторы $\vec{B}^{(n)}$ и $\vec{B}^3$ по ортам $\vec{e}_\alpha^*$ и умножая левые и правые части уравнений на $2h$, окончательно запишем:

$$2h \frac{\partial \left(\sqrt{a} \sigma^{s\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right)}{\partial \chi^s} + \sqrt{a} (\sigma_{(+)}^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^* - \sigma_{(-)}^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^*) = 0; \quad (8.19)$$

$$2h \frac{\partial \left(\sqrt{a} \sigma^{s\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right)}{\partial \chi^s} + 3\sqrt{a} (\sigma_{(+)}^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^* + \sigma_{(-)}^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^*) - 6\sqrt{a} \sigma^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^* = 0, \quad (8.20)$$

где $\sigma_{(\pm)}^{3\alpha}$ – напряжения, определяющие внешнюю нагрузку на лицевых поверхностях заполнителя.

В уравнения равновесия (8.19) и (8.20) в качестве неизвестных входят моменты компонент тензора напряжений $\sigma^{s\alpha}$ порядка $n = 1$. Для того чтобы выразить величины $\sigma^{\alpha\beta}$ через моменты компонент тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)}$, воспользуемся законом Гука в форме

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda \theta a^{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\gamma\omega} a^{\gamma\alpha} a^{\omega\beta}. \quad (8.21)$$

Здесь $\theta = \alpha^{\gamma\omega} \varepsilon_{\gamma\omega}$ – первый инвариант тензора деформаций; $\alpha^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты основного метрического тензора; λ, μ – коэффициенты Ламе, которые определяются по формулам

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где E – модуль упругости заполнителя; ν – коэффициент Пуассона заполнителя.

Применяя проекционный метод к равенству (8.21) и учитывая, что $\alpha^{13} = \alpha^{23} = 0$, $\alpha^{33} = 1$, получим следующие выражения для моментов компонент тензора напряжений:

$$\sigma^{ij} = (n + 0,5) h^{-1} \int_{-h}^h \left[\lambda a^{ij} (a^{tk} \varepsilon_{tk} + \varepsilon_{33}) + 2\mu a^{ti} \varepsilon_{tk} \right] P_n \frac{x^3}{h} dx^3,$$

$$\begin{aligned}\sigma^{i3} = \sigma^{3i} &= (n+0,5)h^{-1} \int_{-h}^h 2\mu a^{ti} \varepsilon_{t3} P_n \frac{x^3}{h} dx^3, \\ \sigma^{33} &= (n+0,5)h^{-1} \int_{-h}^h \left[\lambda \left(a^{tk} \varepsilon_{tk} + \varepsilon_{33} \right) + 2\mu \varepsilon_{33} \right] P_n \frac{x^3}{h} dx^3, \quad (n=0,1). \quad (8.22)\end{aligned}$$

Перейдем в правых частях равенств (8.22) к моментам компонент тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)}$. Произведя необходимые преобразования, формулы для моментов компонент тензора напряжений окончательно запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma^{ij} &= \left(\lambda a^{ij} a^{tk} + 2\mu a^{ti} a^{kj} \right) \varepsilon_{tk}^{(n)} + \lambda a^{ij} \varepsilon_{33}^{(n)}, \quad \sigma^{i3} = 2\mu a^{ti} \varepsilon_{t3}^{(n)}, \\ \sigma^{33} &= \lambda a^{tk} \varepsilon_{tk}^{(n)} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33}^{(n)}, \quad (n=0,1). \quad (8.23)\end{aligned}$$

Определив моменты компонент тензора напряжений, можно вычислить компоненты напряжений в любой точке заполнителя по формуле

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^1 \sigma^{\alpha\beta} P_n \left(\frac{x^3}{h} \right). \quad (8.24)$$

Положительные направления компонент тензора напряжений показаны на рис. 8.3.

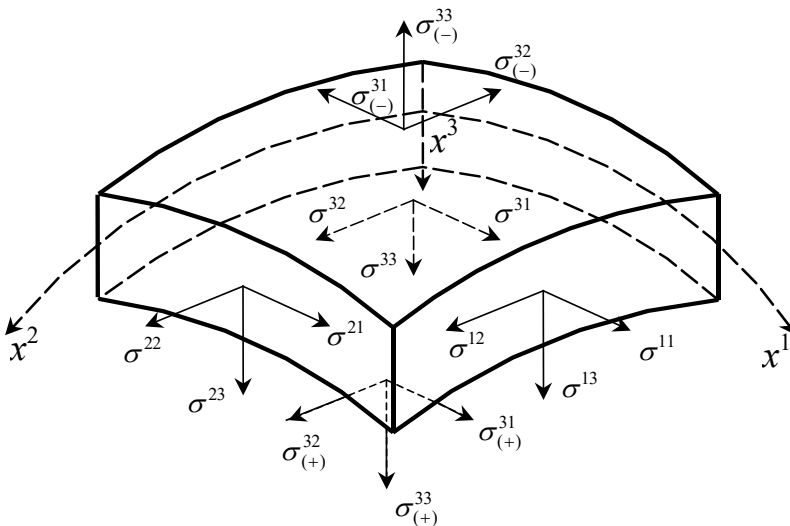


Рис. 8.3. Положительные направления внутренних напряжений и компонент нагрузки, действующих на элемент заполнителя

Для описания деформации заполнителя воспользуемся тензором конечных деформаций, ковариантные составляющие которого выражаются через составляющие вектора перемещений зависимостью

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha} \vec{e}_\beta + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta} \right). \quad (8.25)$$

Применив операцию проектирования к равенству (8.25), а также учитывая, что при деформировании тонких оболочек происходит существенное изменение ориентации локальных базисов при незначительном изменении их длин, получим следующие выражения для моментов компонент тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tk}^{(0)} &= 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}^{(0)}}{\partial x^t} \vec{e}_k + \frac{\partial \vec{u}^{(0)}}{\partial x^k} \vec{e}_t + v_t^{(0)} v_k^{(0)} + \frac{1}{3} v_t^{(1)} v_k^{(1)} \right), \\ \varepsilon_{t3}^{(0)} &= 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}^{(0)}}{\partial x^t} \vec{e}_3 + h^{-1} \vec{u}^{(1)} \vec{e}_t - h^{-1} \vec{e}_3 v_t^{(0)} \vec{u}^{(1)} \right), \\ \varepsilon_{33}^{(0)} &= h^{-1} \vec{u}^{(1)} \vec{e}_3 + 0,5 h^{-2} \left(\vec{u}^{(1)} \right)^2, \\ \varepsilon_{tk}^{(1)} &= 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial x^t} \vec{e}_k + \frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial x^k} \vec{e}_t + v_t^{(0)} v_k^{(1)} + v_t^{(1)} v_k^{(0)} \right), \\ \varepsilon_{t3}^{(1)} &= 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial x^t} \vec{e}_3 - h^{-1} \vec{e}_3 v_t^{(1)} \vec{u}^{(1)} \right), \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (8.28)$$

Для подсчета компонент тензора деформаций заполнителя используется формула

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^1 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} P_n \left(\frac{x^3}{h} \right). \quad (8.29)$$

Подстановка в соотношения (8.23) моментов деформаций (8.28), выраженных через моменты компонент вектора перемещений, приводит к выражению моментов компонент напряжений через составляющие вектора перемещений. Подставив выражения для внутренних напряжений в уравнения

равновесия (8.19), (8.20) и спроектировав их на векторы взаимного локального базиса, получим систему из шести скалярных дифференциальных уравнений двенадцатого порядка в перемещениях.

1.4. Основные дифференциальные соотношения для наружных слоев

Уравнения равновесия для наружных слоев, представленные в векторном виде в общей системе криволинейных координат с учетом поворотов векторов локального базиса, запишем в форме

$$\frac{\partial(\sqrt{a}\vec{T}^s)}{\partial x^s} + \sqrt{a}\vec{q} = 0, \quad (8.30)$$

где $\vec{T}^s = T^{s\alpha}\vec{e}_\alpha^*$ – контравариантные векторы внутренних усилий с компонентами $T^{s\alpha}$, имеющими смысл тангенциальных усилий T^{st} и перерезывающих сил T^{s3} .

Условие равенства нулю главного момента всех сил и моментов, приложенных к рассматриваемому элементу, приводит к соотношению

$$\frac{\partial(\sqrt{a}\vec{M}^s)}{\partial x^s} + [\vec{e}_s \times \vec{T}^s]\sqrt{a} = 0. \quad (8.31)$$

Контравариантные векторы внутренних моментов, входящие в (8.31), удобно представлять в виде разложения по векторам взаимного локального базиса

$$\vec{M}^s = C_{kj}M^{sk}\vec{e}^j,$$

где M^{sk} – компоненты разложения, имеющие смысл величин внутренних моментов; C_{kj} – компоненты дважды ковариантного дискриминантного тензора, принимающие в зависимости от сочетания индексов значения

$$C_{11} = C_{22} = 0, \quad C_{12} = -C_{21} = \sqrt{a}.$$

Соотношения для компонент тензоров внутренних тангенциальных усилий и внутренних моментов запишем в виде

$$\begin{aligned} T^{st} &= E \frac{h}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{ij} \left[\nu a^{st} a^{ij} + (1-\nu) a^{si} a^{tj} \right] + \\ &+ E \frac{h c}{(1-\nu^2)} \mu_{ij} \left[\nu a^{st} a^{ij} + (1-\nu) a^{si} a^{tj} \right], \\ M^{st} &= \frac{Ehc}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{\alpha\beta} \left[\nu a^{st} \alpha^{\alpha\beta} + (1-\nu) \alpha^{si} \alpha^{t\beta} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{E \left(\left(h^3 / 12 \right) + h c^2 \right)}{(1 - \nu^2)} \mu_{\alpha\beta} \left[\nu \alpha^{st} \alpha^{\alpha\beta} + (1 - \nu) \alpha^{si} \alpha^{t\beta} \right], \quad (8.32)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина слоя оболочки; c – смещение координатной поверхности; ε_{ij} , μ_{ij} – компоненты тензоров соответственно тангенциальных и изгибных деформаций.

Учитывая специфику деформирования тонких оболочек, компоненты тензора тангенциальных деформаций выражаем соотношением

$$\varepsilon_{ij} = 0,5 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^i} \bar{e}_j + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^j} \bar{e}_i + \nu_i \nu_j \right), \quad (8.33)$$

Зависимости компонент тензора изгибных деформаций от вектора углов поворотов $\bar{\Omega}$ приняты с учетом упрощения, связанного с пренебрежением влияния тангенциальных деформаций на изменение кривизны оболочки

$$\mu_{ij} = -0,5 \left(C_{jt} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x^i} \bar{e}^t + C_{is} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x^j} \bar{e}^s \right). \quad (8.35)$$

При определении вектора углов поворота малой окрестности оболочки, пренебрегаем ее поворотом вокруг нормали

$$\bar{\Omega} = C^{ij} \nu_i \bar{e}_j,$$

где $C^{11} = C^{22} = 0$, $C^{12} = -C^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Перерезывающие усилия T^{s3} , входящие в уравнение равновесия (8.30), определяются из соотношения (8.31). Умножая скалярно выражение (8.31) соответственно на вектора основного локального базиса $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_1$, получаем:

$$T^{13} = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial (\sqrt{a} \bar{M}^s)}{\partial x^s} \right] \bar{e}_2, \quad T^{23} = -\frac{1}{a} \left[\frac{\partial (\sqrt{a} \bar{M}^s)}{\partial x^s} \right] \bar{e}_1. \quad (8.36)$$

Положительные направления компонент внутренних усилий, моментов и внешней нагрузки, действующих на элемент срединной поверхности наружного слоя показаны на рис. 8.4.

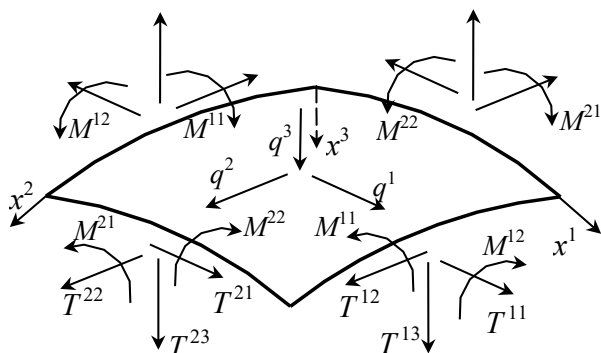


Рис. 8.4. Положительные направления компонент внутренних усилий на срединной поверхности наружного слоя

Подстановка в соотношения (8.32) тангенциальных (8.33) и изгибных (8.35) деформаций, выраженных через компоненты вектора перемещений, приводит к выражению компонент тангенциальных усилий и моментов через составляющие вектора перемещений. Перерезывающие силы $T^{\delta 3}$ определяются через компоненты вектора перемещений посредством подстановки в соотношение (8.36) выражений внутренних моментов через компоненты вектора перемещений. Подставив выражения для внутренних усилий в уравнение (8.30) и спроектировав его на векторы взаимного локального базиса, получаем нелинейную систему трех скалярных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях.

1.4. Построение алгебраических соотношений

Для преобразования дифференциальных соотношений, описывающих нелинейное деформирование слоев, к алгебраическому виду, используется модифицированная схема метода конечных разностей – метод криволинейных сеток [14], позволяющая полностью исключить отрицательное влияние жестких смещений на сходимость результатов, что приводит к значительному повышению точности решения задач теории оболочек.

Определяя вектор внутренних напряжений на линиях между узлами разностной сетки, преобразуем уравнения равновесия элемента заполнителя (8.19) и (8.20) в узле (i, j) к разностному виду

$$\begin{aligned}
& (2h)_{i,j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{1\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i+0,5;j} - (2h)_{i,j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{1\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i-0,5;j} + \\
& + (2h)_{i,j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{2\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i;j+0,5} - (2h)_{i,j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{2\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i;j-0,5} + \\
& + \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^* - \sigma_{(-)}^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i,j} = 0; \tag{8.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2h)_{i,j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{1\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i+0,5;j} - (2h)_{i,j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{1\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i-0,5;j} + \\
& + (2h)_{i,j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{2\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i;j+0,5} - (2h)_{i,j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{2\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i;j-0,5} + \\
& + 3 \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^* + \sigma_{(-)}^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i,j} - 6 \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{(0)} \sigma^{3\alpha} \vec{e}_\alpha^* \right) \right]_{i,j} = 0. \tag{8.63}
\end{aligned}$$

Проецируя конечноразностные векторные уравнения равновесия элемента заполнителя (8.62) и (8.63) с центром в узле (i, j) на векторы взаимного локального базиса в этом узле, получаем систему шести скалярных уравнений

$$\begin{aligned}
& h_{i,j} \left[\left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} \right) \left(\sigma^{(0)} \sigma^{1\alpha} a_\alpha^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i+0,5;j} - \\
& - \left(\sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) \left(\sigma^{(0)} \sigma^{1\alpha} a_\alpha^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i-0,5;j} + \\
& + \left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} \right) \left(\sigma^{(0)} \sigma^{2\alpha} a_\alpha^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i;j+0,5} - \\
& - \left(\sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) \left(\sigma^{(0)} \sigma^{2\alpha} a_\alpha^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i;j-0,5} + \\
& + 0,25 \left[\left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} a_\alpha^{*\beta(i;j)} - \sigma_{(-)}^{3\alpha} a_\alpha^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i+0,5;j+0,5} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} - \sigma_{(-)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i+0,5;j-0,5} + \\
& + \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} - \sigma_{(-)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i-0,5;j+0,5} + \\
& + \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} - \sigma_{(-)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i-0,5;j-0,5} \Big\} = 0; \quad (8.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_{i,j} \left[\left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} \right) \left(\sigma^{(1)} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right)_{i+0,5;j} - \right. \\
& - \left(\sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) \left(\sigma^{(1)} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right)_{i-0,5;j} + \\
& + \left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} \right) \left(\sigma^{(1)} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right)_{i,j+0,5} - \\
& - \left. \left(\sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) \left(\sigma^{(1)} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right)_{i,j-0,5} \right] + \\
& + 0,75 \left\{ \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} + \sigma_{(-)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i+0,5;j+0,5} + \right. \\
& + \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} + \sigma_{(-)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i+0,5;j-0,5} + \\
& + \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} + \sigma_{(-)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i-0,5;j+0,5} + \\
& + \left[\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} + \sigma_{(-)}^{3\alpha} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right) \right]_{i-0,5;j-0,5} - 1,5 \left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \right. \\
& + \left. \sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) \left(\sigma^{(0)} a_{\alpha}^{*\beta(i;j)} \right)_{i,j} \Big\} = 0. \quad (8.65)
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$a_{\alpha i \pm 0,5; j \pm 0,5}^{*\beta(i;j)} = \bar{e}_{\alpha i \pm 0,5; j \pm 0,5}^* \bar{e}_{i,j}^{\beta}.$$

Разностный аналог уравнения равновесия для наружного слоя (8.30), отнесенный к узлу (i, j) , имеет вид

$$\begin{aligned}
 & 0,5 \left[\left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} \right) (T^{1\alpha} \bar{e}_\alpha^*)_{i+0,5;j} - \right. \\
 & \quad - \left(\sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) (T^{1\alpha} \bar{e}_\alpha^*)_{i-0,5;j} + \\
 & \quad + \left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} \right) (T^{2\alpha} \bar{e}_\alpha^*)_{i;j+0,5} - \\
 & \quad - \left(\sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) (T^{2\alpha} \bar{e}_\alpha^*)_{i;j-0,5} \left. \right] + \\
 & + 0,25 \left[\left(\sqrt{aq}^\alpha \bar{e}_\alpha^* \right)_{i+0,5;j+0,5} + \left(\sqrt{aq}^\alpha \bar{e}_\alpha^* \right)_{i+0,5;j-0,5} + \right. \\
 & \quad + \left(\sqrt{aq}^\alpha \bar{e}_\alpha^* \right)_{i-0,5;j+0,5} + \left. \left(\sqrt{aq}^\alpha \bar{e}_\alpha^* \right)_{i-0,5;j-0,5} \right] = 0. \quad (8.69)
 \end{aligned}$$

Проецируя (8.69) на векторы взаимного локального базиса в узле (i, j) , получаем систему трех скалярных уравнений

$$\begin{aligned}
 & 0,5 \left[\left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} \right) \left(T^{1\alpha} a_\alpha^{*\beta i;j} \right)_{i+0,5;j} - \right. \\
 & \quad - \left(\sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) \left(T^{1\alpha} a_\alpha^{*\beta i;j} \right)_{i-0,5;j} + \\
 & \quad + \left(\sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j+0,5}} \right) \left(T^{2\alpha} a_\alpha^{*\beta i;j} \right)_{i;j+0,5} - \\
 & \quad - \left(\sqrt{a_{i+0,5;j-0,5}} + \sqrt{a_{i-0,5;j-0,5}} \right) \left(T^{2\alpha} a_\alpha^{*\beta i;j} \right)_{i;j-0,5} \left. \right] + \\
 & + 0,25 \left[\left(\sqrt{aq}^\alpha a_\alpha^{*\beta i;j} \right)_{i+0,5;j+0,5} + \left(\sqrt{aq}^\alpha a_\alpha^{*\beta i;j} \right)_{i+0,5;j-0,5} + \right. \\
 & \quad + \left(\sqrt{aq}^\alpha a_\alpha^{*\beta i;j} \right)_{i-0,5;j+0,5} + \left. \left(\sqrt{aq}^\alpha a_\alpha^{*\beta i;j} \right)_{i-0,5;j-0,5} \right] = 0. \quad (8.70)
 \end{aligned}$$

1.5. Граничные условия

Широкий спектр использования оболочечных конструкций вызывает необходимость реализации различных граничных условий. В предлагаемой методике на торцевых поверхностях слоев оболочки реализованы граничные условия свободного края, подвижного и неподвижного шарнирного опирания, скользящей и жесткой заделки, симметрии и косой симметрии поля перемещений. Эти условия в каждом конкретном случае в зависимости от спо-

соба приложения нагрузки или закрепления торцов для наружного слоя записываются в усилиях (напряжениях), перемещениях или в смешанном виде.

Приведем граничные условия на контурных линиях сеточной области ($i_1 \leq i \leq i_m$; $j_1 \leq j \leq j_n$).

Для свободного края наружного слоя, расположенного вдоль линии $i = i_1$, справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\sqrt{a} (T^{1\alpha} \bar{e}_\alpha) \right]_{i_1-0,5;j} + \left[(aM^{11} \bar{e}^2 - aM^{12} \bar{e}^1)_{i_1-0,5;j+0,5} \left(\frac{\bar{e}_1}{\sqrt{a}} \right)_{i_1;j+0,5} \right] \times \right. \\ & \times \bar{e}_{3\ i_1;j+0,5} - \left[(aM^{11} \bar{e}^2 - aM^{12} \bar{e}^1)_{i_1-0,5;j-0,5} \left(\frac{\bar{e}_1}{\sqrt{a}} \right)_{i_1;j-0,5} \right] \bar{e}_{3\ i_1;j-0,5} \Big\} \times \\ & \times \bar{e}_{i_1,j}^\beta = 0, \\ & (aM^{11} \bar{e}^2 - M^{12} \bar{e}^1)_{i_1;j} \left(\frac{\bar{e}_2}{\sqrt{a}} \right)_{i_1+0,5;j} = 0. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Соответствующие условия для свободного края заполнителя имеют вид

$$\left\{ (2h)_{i_1;j} \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{1\alpha} \bar{e}_\alpha \right)^{(n)} \right]_{i_1-0,5;j} \right\} \bar{e}_{i_1,j}^\beta = 0, \quad (n = 0, 1). \quad (8.72)$$

На свободном крае по линии $i = i_m$ в выражениях (8.71) и (8.72) меняются индексы i_1 на i_m , $i_1 - 0,5$ на $i_m + 0,5$ и $i_1 + 0,5$ на $i_m - 0,5$.

Для свободного края наружного слоя, расположенного вдоль линии $j = j_1$, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\sqrt{a} (T^{2\alpha} \bar{e}_\alpha) \right]_{i;j_1-0,5} + \left[(aM^{22} \bar{e}^1 - aM^{21} \bar{e}^2)_{i+0,5;j_1-0,5} \left(\frac{\bar{e}_2}{\sqrt{a}} \right)_{i+0,5;j_1} \right] \times \right. \\ & \times \bar{e}_{3\ i+0,5;j_1} - \left[(aM^{22} \bar{e}^1 - aM^{21} \bar{e}^2)_{i-0,5;j_1-0,5} \left(\frac{\bar{e}_2}{\sqrt{a}} \right)_{i-0,5;j_1} \right] \bar{e}_{3\ i-0,5;j_1} \Big\} \times \\ & \times \bar{e}_{i,j_1}^\beta = 0, \end{aligned}$$

$$\left(aM^{22}\bar{e}^1 - M^{21}\bar{e}^2\right)_{i;j_1} \left(\frac{\bar{e}_1}{\sqrt{a}}\right)_{i;j_1+0,5} = 0. \quad (8.73)$$

Соответствующие условия для свободного края заполнителя имеют вид

$$\left(\left[\sqrt{a}\left(\sigma^{2\alpha}{}^{(n)}\bar{e}_\alpha\right)\right]_{i;j_1-0,5} + \left[\sqrt{a}\left(\sigma^{32}{}^{(n)}\bar{e}_\alpha\right)\right]_{i;j_1}\right)\bar{e}_{i;j_1}^\beta = 0, \quad (n=0,1). \quad (8.74)$$

На свободном крае по линии j_n в выражениях (8.73) и (8.74) меняются индексы j_1 на j_n , $j_1 - 0,5$ на $j_n + 0,5$ и $j_1 + 0,5$ на $j_n - 0,5$.

Программная реализация условий свободного края осуществляется посредством исключения из разностного уравнения той его части, которая по условиям (8.71), (8.72) равна нулю, что приводит к исключению неизвестных в законтурных узлах сетки. В случае ортогональной сетки предельный переход в соотношениях (8.71) и (8.72) приводит к классическому виду граничных условий свободного края:

$$T^{11} = T^{12} = T^{13} - \frac{\partial M^{12}}{\partial x^2} = M^{11} = 0,$$

$$T^{21} = T^{22} = T^{23} - \frac{\partial M^{21}}{\partial x^1} = M^{22} = 0.$$

В узле $(i_1; j_1)$, расположенном на пересечении двух контурных линий с условиями свободного края, из разностного уравнения исключаются две группы членов, равные нулю согласно соотношениям (8.71) и (8.73) или (8.72) и (8.74), что приводит к исключению всех законтурных точек. Аналогичная операция исключения производится и в трех остальных узлах: $(i_1; j_n)$, $(i_m; j_1)$, $(i_m; j_n)$.

Различные варианты шарнирного опирания и заземления торцов наружного слоя реализуются посредством замены одного или нескольких соотношений (8.71) на одно или несколько соответствующих соотношений вида

$$\begin{aligned} (u_\alpha)_{i;j} &= 0, \\ \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{a}}(v_1\bar{e}_2 - v_2\bar{e}_1) \right]_{i_1+0,5;j} + \left[\frac{1}{\sqrt{a}}(v_1\bar{e}_2 - v_2\bar{e}_1) \right]_{i_1-0,5;j} \right\} \times \\ &\times \bar{e}_{i;j}^2 = 0, \end{aligned} \quad (8.75)$$

справедливых для линии $i = i_1$. Для заполнителя аналогичная замена соотношений (8.72) производится с использованием равенства

$$\begin{pmatrix} (0) \\ u_\alpha \end{pmatrix}_{i;j} = 0, \quad \begin{pmatrix} (1) \\ u_\alpha \end{pmatrix}_{i;j} = 0. \quad (8.76)$$

На торцах слоев по линии $j = j_1$ различные варианты граничных условий моделируются соотношениями (8.73) с учетом равенств:

$$\begin{aligned} (u_\alpha)_{i;j_1} &= 0, \\ \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{a}} (\nu_2 \vec{e}_1 - \nu_1 \vec{e}_2) \right]_{i,j_1+0,5} + \left[\frac{1}{\sqrt{a}} (\nu_2 \vec{e}_1 - \nu_1 \vec{e}_2) \right]_{i,j_1-0,5} \right\} \times \\ &\times \vec{e}_{i;j_1}^1 = 0 \end{aligned} \quad (8.77)$$

или соотношениями (8.74) с учетом равенств

$$\begin{pmatrix} (0) \\ u_\alpha \end{pmatrix}_{i;j_l} = 0, \quad \begin{pmatrix} (1) \\ u_\alpha \end{pmatrix}_{i;j_l} = 0. \quad (8.78)$$

На контурной линии $i = i_1$, расположенной на плоскости симметрии, исключение неизвестных, определяющих перемещения в законтурных узлах, для наружного слоя осуществляется с помощью равенств

$$\begin{aligned} (u_1)_{i_1-k;j} &= -(u_1)_{i_1+k;j}, & (u_2)_{i_1-k;j} &= (u_2)_{i_1+k;j}, \\ (u_3)_{i_1-k;j} &= (u_3)_{i_1+k;j}, \end{aligned} \quad (8.79)$$

для заполнителя – с помощью равенств:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (n) \\ u_1 \end{pmatrix}_{i_1-k;j} &= -\begin{pmatrix} (n) \\ u_1 \end{pmatrix}_{i_1+k;j}, & \begin{pmatrix} (n) \\ u_2 \end{pmatrix}_{i_1-k;j} &= \begin{pmatrix} (n) \\ u_2 \end{pmatrix}_{i_1+k;j}, \\ \begin{pmatrix} (n) \\ u_3 \end{pmatrix}_{i_1-k;j} &= \begin{pmatrix} (n) \\ u_3 \end{pmatrix}_{i_1+k;j}, & (n=0,1). \end{aligned} \quad (8.80)$$

Глава 9. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ ЭВОЛЮЦИИ РАССЛОЕНИЙ

§ 9.1. Основные предпосылки и этапы расчета

Рассматривается проблема исследования нелинейного деформирования и устойчивости трехслойных пространственных конструкций с учетом эволюции расслоений при действии статической нагрузки. Между слоями допускается наличие исходных дефектных участков, т.е. участков с неидеальным сопряжением слоев и их развитие, а также образование новых в процессе деформирования. В границах дефектных участков смежные поверхности могут скользить одна по другой без отрыва или полностью отрываться одна от другой, не пересекаясь между собой. Зоны контакта при этом известны либо подлежат определению. Отметим, что рассматриваемая задача является как геометрически, так и конструктивно нелинейной. Конструктивная нелинейность обуславливается возможностью роста расслоений, а также неопределенностью зон контакта между смежными слоями в пределах дефектных участков.

Формирование условий сопряжения слоев в трехслойной оболочке при такой постановке задачи связано с достаточно сложным процессом учета и перераспределения усилий и перемещений, возникающих на границах слоев. Реализация всех реальных процессов, протекающих на границах контакта слоев при деформировании трехслойных оболочек, достаточно трудоемка. Для упрощения моделирования указанных процессов принято несколько допущений.

В случае проскальзывания смежных поверхностей слоев без отрыва трение между ними при моделировании условий контакта не учитывается.

Согласно гипотезам, принятым в § 8.1, толщина наружного слоя предполагается либо значительно меньше толщины заполнителя, либо они являются величинами одного порядка. Исходя из этого принимаем, что в первом случае срединная поверхность наружного слоя является поверхностью контакта и совпадает с соответствующей лицевой поверхностью заполнителя, а во втором – за поверхность контакта в наружном слое принимается его лицевая поверхность.

Несмотря на то, что толщина каждого слоя трехслойной оболочки ограничивается, толщина всего пакета в общем случае малой не является и ограничений на его суммарную толщину не накладывается. Поэтому будем учитывать изменение метрических свойств координатной поверхности по толщине пакета. Это один из существенных моментов теории слоистых конструкций с криволинейными слоями.

Допускается также, что каждый конструктивный слой трехслойной оболочки в отдельности может представлять собой некоторую композицию из произвольно набранных оболочечных фрагментов, имеющих вырезы и отвер-

ствия. Линии сопряжения фрагментов составной оболочки, а также контуры отверстий и вырезов считаются совпадающими с координатными линиями на поверхности слоя. Стык может быть гладким или с изломом поверхности по линии сопряжения фрагментов.

Достаточно часто для соединения слоев трехслойного пакета используются клеевые соединения. В этом случае считаем, что толщина клеевого слоя несопоставима с толщиной заполнителя, а модуль сдвига предполагаем значительно больше соответствующего модуля заполнителя. Поэтому деформация клеевого слоя практически не оказывает влияние на общую деформацию оболочки и в расчетах не учитывается.

Методика решения задач о нелинейном деформировании и устойчивости трехслойных конструкций с учетом эволюции дефектов типа расслоений базируется на использовании дискретного подхода для построения исходной расчетной модели оболочки [16] и шагово-итерационного алгоритма, который объединяет концепции метода продолжения решения по параметру, метода Ньютона-Канторовича и итерационного метода. При этом процесс коррекции исходной расчетной модели совмещается с процессом решения геометрически нелинейной задачи. Для уточнения расчетной модели на каждом шаге используется метод итераций.

Построение исходной расчетной модели для трехслойной оболочки на основе дискретного подхода делится на два этапа.

На первом этапе отдельно для внешних слоев с позиций классической теории оболочек, а для заполнителя – неклассической теории (принимается гипотеза о линейном распределении перемещений по его толщине, учитываются деформации поперечного сдвига и обжатия) формируются полные системы геометрически нелинейных дифференциальных соотношений. После этого с использованием метода криволинейных сеток для узлов сеточной области строятся системы конечноразностных уравнений с учетом граничных условий и внешних воздействий. Построение указанных моделей описано в главе 8.

На втором этапе с учетом статических и кинематических условий соединения узлов смежных слоев формируется система разрешающих уравнений для трехслойной оболочки в целом. Реализация различных вариантов соединения смежных слоев позволяет смоделировать жесткое соединение, проскальзывание участков одного из внешних слоев или обоих по поверхности заполнителя, а также вариант полного отрыва участков несущих слоев от заполнителя. При этом контактные напряжения между слоями исключаются из числа искоемых и являются соответственно непрерывными на участках совместной работы и равными нулю в зонах расслоений. Размер наименьшего возможного дефектного участка принимается равным размеру ячейки конечноразностной сетки. Образование и развитие дефектных участков в процессе нагружения может протекать на обеих лицевых поверхностях заполни-

теля. Все эти варианты соединения смежных слоев, а также их комбинации имеют место при эксплуатации трехслойных конструкций.

Опишем процесс построения разрешающих систем уравнений для узла $(i; j)$ трехслойной оболочки при различных вариантах соединения слоев.

§ 9.2. Условия сопряжения слоев

Формирование уравнений трехслойной оболочки выполняется с помощью соответствующих статических и кинематических условий, характеризующих взаимодействие наружных несущих слоев и слоя заполнителя.

Статические условия связи будем формулировать в виде зависимостей между напряжениями на контактных поверхностях слоев, а кинематические – в виде аналогичных зависимостей между перемещениями.

Рассмотрим возможные виды сопряжения слоев в узле $(i; j)$ трехслойной оболочки: жесткое соединение, проскальзывание несущего слоя по заполнителю без отрыва от него и, наконец, полный отрыв несущего слоя от заполнителя.

Первый вид контакта слоев предполагает, что слои оболочки жестко связаны между собой и не допускают проскальзывания и отрыва. При втором варианте допускается скольжение несущего слоя по поверхности заполнителя без отрыва от него. В случае полного отрыва несущего слоя от заполнителя принимается, что на участке отрыва слои работают самостоятельно, как отдельные оболочки. Каждый из перечисленных видов сопряжения слоев может возникнуть на любом участке поверхности контакта смежных слоев.

Рассмотрим кинематические и статические условия контакта слоев оболочки при жестком соединении слоев. На поверхности контакта смежных слоев выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}u_{\alpha} &= 0,5 \left(u_{\alpha(+)} \frac{\sqrt{a_{(+)}^{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} + u_{\alpha(-)} \frac{\sqrt{a_{(-)}^{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} \right), \\
 {}^{(1)}u_{\alpha} &= 0,5 \left(u_{\alpha(+)} \frac{\sqrt{a_{(+)}^{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} - u_{\alpha(-)} \frac{\sqrt{a_{(-)}^{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} \right), \\
 q_{(-)}^{k\alpha} &= \sigma_{(-)}^{k3\alpha} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}}}, \quad q_{(+)}^{k\alpha} = -\sigma_{(+)}^{k3\alpha} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}}},
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

где $a_{(+)}^{\alpha\alpha}$, $a_{(-)}^{\alpha\alpha}$ – компоненты метрического тензора несущих слоев; $\sigma_{(\pm)}^{k3\alpha}$ – контактные напряжения на поверхности заполнителя; $q_{(\pm)}^{k\alpha}$ – контактные напряжения на поверхности несущих слоев.

При соединении слоев, допускающем проскальзывание между слоями без отрыва, условия связи принимают вид

$$\begin{aligned} u_3^{(0)} &= 0,5(u_{3(+)} + u_{3(-)}), \quad u_3^{(1)} = 0,5(u_{3(+)} - u_{3(-)}), \\ q_{(-)}^{k3} &= \sigma_{(-)}^{k33}, \quad q_{(+)}^{k3} = -\sigma_{(+)}^{k33}, \\ q_{(-)}^{kt} &= q_{(+)}^{kt} = \sigma_{(-)}^{kt} = \sigma_{(+)}^{kt} = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

При моделировании условий отрыва несущих слоев от заполнителя принимается, что:

контактные напряжения на поверхностях слоев равны нулю

$$\sigma_{(-)}^{k3\alpha} = q_{(-)}^{k\alpha} = \sigma_{(+)}^{k3\alpha} = q_{(+)}^{k\alpha} = 0; \quad (9.3)$$

перемещения каждого из смежных слоев могут быть различными, но при этом необходимо выполнение кинематического условия, базирующегося на допущении о взаимном непроникновении слоев

$$u_{3(\pm)} \leq u_3. \quad (9.4)$$

В процессе деформирования конструкции могут образовываться участки комбинированного сопряжения слоев.

Рассмотрим случай комбинированного сопряжения, когда связь между первым несущим слоем и заполнителем предполагается жесткой, а второй несущий слой имеет возможность проскальзывать без отрыва или с отрывом от заполнителя. Соответствующие им условия сопряжения слоев имеют вид

$$\begin{aligned} u_3^{(0)} &= 0,5(u_{3(+)} + u_{3(-)}), \quad u_3^{(1)} = 0,5(u_{3(+)} - u_{3(-)}), \\ u_t^{(1)} &= u_t^{(0)} - u_{t(-)} \frac{\sqrt{a_{(-)}^{tt}}}{\sqrt{a^{tt}}}, \quad q_{(-)}^{k\alpha} = \sigma_{(-)}^{k3\alpha} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}}}, \\ q_{(+)}^{kt} &= \sigma_{(+)}^{k3t} = 0, \quad q_{(+)}^{k3} = -\sigma_{(+)}^{k33}; \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$u_\alpha^{(1)} = u_\alpha^{(0)} - u_{\alpha(-)} \frac{\sqrt{a_{(-)}^{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}}, \quad q_{(-)}^{k\alpha} = \sigma_{(-)}^{k3\alpha} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}}}, \quad q_{(+)}^{k\alpha} = \sigma_{(+)}^{k3\alpha} = 0. \quad (9.6)$$

При жесткой связи между вторым и третьим слоями и проскальзывании первого слоя соответственно без отрыва или с отрывом от заполнителя условия связи принимают вид

$$\begin{aligned} u_t^{(0)} &= u_{t(+)} \frac{\sqrt{a_{(+)}^{tt}}}{\sqrt{a^{tt}}} - u_t^{(1)}, & u_3^{(0)} &= 0,5(u_{3(+)} + u_{3(-)}), \\ u_3^{(1)} &= 0,5(u_{3(+)} - u_{3(-)}), & q_{(+)}^{k\alpha} &= -\sigma_{(+)}^{k3\alpha} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha(+)} }}, \\ q_{(-)}^{k3} &= \sigma_{(-)}^{k33}, & q_{(-)}^{kt} &= \sigma_{(-)}^{k3t} = 0; \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} u_\alpha^{(0)} &= u_{\alpha(+)} \frac{\sqrt{a_{(+)}^{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} - u_\alpha^{(1)}, & q_{(+)}^{k\alpha} &= -\sigma_{(+)}^{k3\alpha} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha(+)} }}, \\ q_{(-)}^{k\alpha} &= \sigma_{(-)}^{k3\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

При построении полной расчетной модели оболочки условия сопряжения, аналогичные (9.1)–(9.8), формулируются в каждом узле конечноразностной сетки. Такой подход позволяет описывать участки с различными условиями сопряжения, при этом точность моделирования ограничивается размерами ячейки принятой сетки.

§ 9.3. Построение систем разрешающих нелинейных уравнений

На основе конечноразностных соотношений (8.64), (8.65), (8.70), описывающих равновесие слоев, и условий связи (8.1–8.3), (8.5–8.8) построим для узла $(i; j)$ разностной сетки системы алгебраических нелинейных уравнений равновесия для трехслойной оболочки при различных видах сопряжения слоев.

Введем величины L^α , $L^{\alpha+3}$, $L_{(\pm)}^\alpha$, характеризующие операторы конечноразностных уравнений (8.64), (8.65) и (8.70) соответственно, а также параметры $q_{(\pm)}^{r\alpha}$, $\sigma_{(\pm)}^{r3\alpha}$, определяющие компоненты внешней поверхностной нагрузки на слои оболочки.

С учетом принятых обозначений представим уравнения (8.64), (8.65) и (8.70) в виде

$$L^\alpha \left(u_{\beta}^{(0)}, u_{\beta}^{(1)} \right) + \sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{k3\alpha} - \sigma_{(-)}^{k3\alpha} + \sigma_{(+)}^{r3\alpha} - \sigma_{(-)}^{r3\alpha} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
L^{\alpha+3} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ u_{\beta}, u_{\beta} \end{pmatrix} + 3\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{k3\alpha} - \sigma_{(-)}^{k3\alpha} + \sigma_{(+)}^{r3\alpha} + \sigma_{(-)}^{r3\alpha} \right) &= 0, \\
L_{(-)}^{\alpha} (u_{\beta(-)}) + \sqrt{a_{(-)}} (q_{(-)}^{k\alpha} + q_{(-)}^{r\alpha}) &= 0, \\
L_{(+)}^{\alpha} (u_{\beta(+)} + \sqrt{a_{(+)}} (q_{(+)}^{k\alpha} + q_{(+)}^{r\alpha}) &= 0
\end{aligned} \tag{9.9}$$

(по r и k не суммировать).

Приведенная система уравнений при условии $\sigma_{(\pm)}^{k3\alpha} = q_{(\pm)}^{k\alpha} = 0$ соответствует случаю полного отслоения наружных слоев от заполнителя в узле $(i; j)$.

Принимая во внимание условия (9.1) и выполнив необходимые преобразования в (9.9), получим уравнения, описывающие равновесие трехслойных оболочек при жесткой связи между слоями:

$$\begin{aligned}
&\frac{L_{(+)}^{\alpha} (u_{\beta(+)} + \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}})}{\sqrt{a_{(+)}}} + \frac{L^{\alpha} (u_{\beta(+)}, u_{\beta(-)}) \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a}} + \frac{L_{(-)}^{\alpha} (u_{\beta(-)}) \sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}}}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
&+ \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}} q_{(+)}^{r\alpha} + \sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}} q_{(-)}^{r\alpha} + \sqrt{a_{\alpha\alpha}} (\sigma_{(+)}^{r3\alpha} - \sigma_{(-)}^{r3\alpha}) = 0, \\
&\frac{L_{(+)}^{\alpha} (u_{\beta(+)} + \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}})}{\sqrt{a_{(+)}}} + \frac{L^{\alpha+3} (u_{\beta(+)}, u_{\beta(-)}) \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{3\sqrt{a}} - \frac{L_{(-)}^{\alpha} (u_{\beta(-)}) \sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}}}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
&+ \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}} q_{(+)}^{r\alpha} - \sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}} q_{(-)}^{r\alpha} + \sqrt{a_{\alpha\alpha}} (\sigma_{(+)}^{r3\alpha} + \sigma_{(-)}^{r3\alpha}) = 0,
\end{aligned} \tag{9.10}$$

(по r не суммировать).

Аналогичные уравнения для оболочек, где между слоями допускается проскальзывание без отрыва (9.2), имеют вид

$$\begin{aligned}
&L_{(-)}^s (u_{\beta(-)}) + \sqrt{a_{(-)}} q_{(-)}^{rs} = 0, \\
&\frac{L^3 \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ u_i, u_i, u_{3(-)}, u_{3(+)} \end{pmatrix}}{\sqrt{a}} + \frac{L_{(-)}^3 (u_{\beta(-)})}{\sqrt{a_{(-)}}} + \frac{L_{(+)}^3 (u_{\beta(+)})}{\sqrt{a_{(+)}}} + \\
&+ \sigma_{(+)}^{r33} - \sigma_{(-)}^{r33} + q_{(+)}^{r3} + q_{(-)}^{r3} = 0, \\
&L^3 \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ u_i, u_i, u_{3(-)}, u_{3(+)} \end{pmatrix} + \sqrt{a} (\sigma_{(+)}^{r3s} - \sigma_{(-)}^{r3s}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L^{s+3} \left(u_t^{(0)}, u_t^{(1)}, u_{3(-)}, u_{3(+)} \right) + 3\sqrt{a} \left(\sigma_{(+)}^{r3s} + \sigma_{(-)}^{r3s} \right) = 0, \\
& L_{(+)}^s(u_{\beta(+)} + \sqrt{a_{(+)}} q_{(+)}^{r\alpha} = 0, \\
& \frac{L^6 \left(u_t^{(0)}, u_t^{(1)}, u_{3(-)}, u_{3(+)} \right)}{3\sqrt{a}} - \frac{L_{(-)}^3(u_{\beta(-)})}{\sqrt{a_{(-)}}} + \frac{L_{(+)}^3(u_{\beta(+)})}{\sqrt{a_{(+)}}} + \\
& + \sigma_{(+)}^{r33} + \sigma_{(-)}^{r33} - q_{(+)}^{r3} + q_{(-)}^{r3} = 0.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Уравнения равновесия для трехслойных оболочек при комбинированном сопряжении слоев (9.5) или (9.6) соответственно представим в форме:

$$\begin{aligned}
& \frac{L^{s+3} \left(u_t^{(0)}, u_{\beta(-)}, u_{3(+)} \right)}{3\sqrt{a}} + \frac{L_{(-)}^s(u_{\beta(-)}) \sqrt{a_{ss(-)}}}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
& + \sqrt{a_{ss}} \left(\sigma_{(+)}^{r3s} + \sigma_{(-)}^{r3s} \right) - \sqrt{a_{ss(-)}} q_{(-)}^{rs} = 0, \\
& \frac{L^6 \left(u_t^{(0)}, u_{\beta(-)}, u_{3(+)} \right)}{3\sqrt{a}} - \frac{L_{(-)}^3(u_{\beta(-)})}{\sqrt{a_{(-)}}} + \frac{L_{(+)}^3(u_{\beta(+)})}{\sqrt{a_{(+)}}} + \\
& + \sigma_{(+)}^{r33} + \sigma_{(-)}^{r33} + q_{(+)}^{r3} - q_{(-)}^{r3} = 0, \\
& \frac{L^s \left(u_t^{(0)}, u_{\beta(-)}, u_{3(+)} \right)}{\sqrt{a}} + \frac{L_{(-)}^s(u_{\beta(-)}) \sqrt{a_{ss(-)}}}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
& + \sqrt{a_{ss}} \left(\sigma_{(+)}^{r3s} - \sigma_{(-)}^{r3s} \right) + \sqrt{a_{ss(-)}} q_{(-)}^{rs} = 0;
\end{aligned} \tag{9.12}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 \left(u_t^{(0)}, u_{\beta(-)}, u_{3(+)} \right)}{\sqrt{a}} + \frac{L_{(+)}^3(u_{\beta(+)})}{\sqrt{a_{(+)}}} + \frac{L_{(-)}^3(u_{\beta(-)})}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
& + \sigma_{(+)}^{r33} - \sigma_{(-)}^{r33} + q_{(+)}^{r3} + q_{(-)}^{r3} = 0, \\
& L_{(+)}^s(u_{\beta(+)} + \sqrt{a_{(+)}} q_{(+)}^{rs} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^{\alpha+3} \left(u_{\beta}, u_{\beta(-)} \right)^{(0)}}{3\sqrt{a}} - \frac{L_{(-)}^{\alpha} (u_{\beta(-)}) \sqrt{a_{\alpha(-)}}}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
& + \sqrt{a_{\alpha\alpha}} (\sigma_{(+)}^{r3\alpha} + \sigma_{(-)}^{r3\alpha}) - \sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}} q_{(-)}^{r\alpha} = 0, \\
& \frac{L^{\alpha} \left(u_{\beta}, u_{\beta(-)} \right)^{(0)} \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a}} + \frac{L_{(-)}^{\alpha} (u_{\beta(-)}) \sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}}}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
& + \sqrt{a_{\alpha\alpha}} (\sigma_{(+)}^{r3\alpha} - \sigma_{(-)}^{r3\alpha}) + \sqrt{a_{\alpha\alpha(-)}} q_{(-)}^{r\alpha} = 0, \\
& L_{(+)}^{\alpha} (u_{\beta(+)} + \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}} q_{(+)}^{\alpha} = 0. \tag{9.13}
\end{aligned}$$

В случае комбинированного сопряжения несущих слоев с заполнителем, описываемого условием (9.7), уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}
& L_{(-)}^s (u_{\beta(-)} + \sqrt{a_{(-)}} q_{(-)}^{rs} = 0, \\
& \frac{L^6 \left(u_t, u_{\beta(+)}, u_{3(-)} \right)^{(1)}}{3\sqrt{a}} + \frac{L_{(+)}^3 (u_{\beta(+)})}{\sqrt{a_{(+)}}} - \frac{L_{(-)}^3 (u_{\beta(-)})}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
& + \sigma_{(+)}^{r33} + \sigma_{(-)}^{r33} + q_{(+)}^{r3} - q_{(-)}^{r3} = 0, \\
& \frac{L^{s+3} \left(u_t, u_{\beta(+)}, u_{3(-)} \right)^{(1)} \sqrt{a_{ss}}}{3\sqrt{a}} + \frac{L_{(+)}^s (u_{\beta(+)}) \sqrt{a_{ss(+)}}}{\sqrt{a_{(+)}}} + \\
& + \sqrt{a_{ss}} (\sigma_{(+)}^{r3s} + \sigma_{(-)}^{r3s}) + \sqrt{a_{ss(+)}} q_{(+)}^{rs} = 0, \\
& \frac{L^s \left(u_s, u_{\beta(+)}, u_{3(-)} \right)^{(1)} \sqrt{a_{ss}}}{\sqrt{a}} + \frac{L_{(+)}^s (u_{\beta(+)}) \sqrt{a_{ss(+)}}}{\sqrt{a_{(+)}}} + \\
& + \sqrt{a_{ss}} (\sigma_{(+)}^{r3s} - \sigma_{(-)}^{r3s}) + \sqrt{a_{ss(+)}} q_{(+)}^{rs} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 \left(u_3, u_{\beta(+)}, u_{3(-)} \right)^{(1)}}{\sqrt{a}} + \frac{L^3_{(+)}(u_{\beta(+)})}{\sqrt{a_{(+)}}} + \frac{L^3_{(-)}(u_{\beta(-)})}{\sqrt{a_{(-)}}} + \\
& + \sigma_{(+)}^{r3} - \sigma_{(-)}^{r3} + q_{(+)}^{r3} + q_{(-)}^{r3} = 0.
\end{aligned} \tag{9.14}$$

При полном отрыве одного из несущих слоев от заполнителя и жестком соединении другого (9.8) уравнения равновесия приобретают вид

$$\begin{aligned}
& L^{\alpha}_{(-)}(u_{\beta(-)}) + \sqrt{a_{(-)}} q_{(-)}^{\alpha} = 0, \\
& \frac{L^{\alpha+3} \left(u_{\beta}, u_{\beta(+)} \right)^{(1)} \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{3\sqrt{a}} + \frac{L^{\alpha}_{(+)}(u_{\beta(+)}) \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}}}{\sqrt{a_{(+)}}} + \\
& + \sqrt{a_{\alpha\alpha}} (\sigma_{(+)}^{r3\alpha} + \sigma_{(-)}^{r3\alpha}) + \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}} q_{(+)}^{r\alpha} = 0, \\
& \frac{L^{\alpha} \left(u_{\beta}, u_{\beta(+)} \right)^{(1)} \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a}} + \frac{L^{\alpha}_{(+)}(u_{\beta(+)}) \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}}}{\sqrt{a_{(+)}}} + \\
& + \sqrt{a_{\alpha\alpha}} (\sigma_{(+)}^{r3\alpha} - \sigma_{(-)}^{r3\alpha}) + \sqrt{a_{\alpha\alpha(+)}} q_{(+)}^{r\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{9.15}$$

В зависимости от вида сопряжения слоев оболочки для каждого узла конечноразностной сетки формулируется одна из приведенных систем уравнений равновесия. В итоге совместно с граничными условиями, составленными для контурных линий сеточных областей слоев, получаем полную систему разрешающих нелинейных уравнений равновесия для дискретной модели трехслойной оболочки с учетом расслоений.

Порядок системы разрешающих уравнений в узле $(i; j)$ зависит от условий сопряжения слоев и в предельном случае (полное расслоение всех слоев) равен $2s + l$, а для всей сеточной области размерами $m \times n - (2s + l) \times m \times n$, где s и l – порядки систем уравнений соответственно для наружного слоя и заполнителя.

Следует отметить, что получаемые конечноразностные соотношения остаются справедливыми и на границах зон расслоения, соответствующих переходу от бездефектных к расслоенным участкам оболочки, что исключает необходимость введения дополнительных уравнений стыковки.

§ 9.4. Алгоритм решения нелинейных задач

Решение геометрически нелинейной задачи. Запишем полученную систему разрешающих уравнений равновесия для трехслойной оболочки в виде системы нелинейных алгебраических уравнений, зависящей от параметра нагрузки p

$$F(X, p) = 0, \quad (9.16)$$

где X – вектор неизвестных, компоненты которых представляют собой компоненты векторов перемещений узлов сеточной области соответствующего слоя оболочки. Ее размерность $k = 12 \times m \times n$, где m и n – размеры сеточной области в направлениях x^1 и x^2 . Компоненты вектора неизвестных представляют собой компоненты векторов перемещений узлов сеточной области соответствующего слоя оболочки. Система (9.16) такова, что при $p_0 \leq p \leq p_i$ имеет непрерывно зависящее от p решение $\bar{X}(p)$, которое известно при $p = p_0$:

$$\bar{X}_0 = X(p). \quad (9.17)$$

Рассмотрим $(k + 1)$ -мерное линейное пространство, в котором совокупность решений (9.16) при различных значениях p представляет кривую равновесных состояний дискретной модели трехслойной оболочки. Определим в указанном пространстве вектор $X = [X^T, p]^T$ и запишем (9.16) в виде

$$F(X) = 0, \quad (9.18)$$

введя параметр p в число неизвестных наравне с компонентами векторов перемещений узлов сеточной области.

Предполагаем, что вектор-функция F является непрерывной и дифференцируемой достаточное число раз по X , а матрица Якоби данной функции имеет вид

$$F'(X) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, k + 1). \quad (9.19)$$

Дополним систему (9.18) функцией $f_{k+1}(X) = \lambda$, которая является выражением величины выбранного ведущего параметра $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_i]$. Будем считать компоненты вектора X непрерывными и дифференцируемыми функциями этого параметра $X_j = X_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, k + 1$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} F(X) &= 0, \\ f_{k+1}(X) - \lambda &= 0, \end{aligned} \quad (9.20)$$

которая также, как и система (9.18), имеет известное решение (9.17) при $\lambda = \lambda_0$.

Представим систему (9.20) в окрестности некоторой точки $r + 1$ кривой равновесных состояний в виде разложения в ряд Тейлора с сохранением двух его членов

$$F(X_{r+1}) \approx F(X_r) + [F'(X_r)](X_{r+1} - X_r) = 0,$$

$$f_{k+1}(X_{r+1}) \approx f_{k+1}(X_r) + \frac{\partial f_{k+1}}{\partial X}(X_{r+1} - X_r) = \Delta\lambda_{r+1} + \lambda_r. \quad (9.21)$$

Будем считать $F(X_r) \neq 0$ и $f_{k+1}(X_r) - \lambda_r \neq 0$ невязками функций $F(X)$ и $f_{k+1}(X)$ в точке r кривой равновесных состояний. Тогда задачу решения системы (9.20) можно заменить численным интегрированием задачи Коши методом продолжения решения по параметру с коррекцией линеаризованной системы уравнений невязкой одного шага итерации метода Ньютона в точке X_{r+1} [71]

$$F'(X_r)\Delta X_{r+1} = -F(X_r),$$

$$\left(\frac{\partial f_{k+1}}{\partial X}\right)_r \Delta X_{r+1} = \lambda_r + \Delta\lambda_{r+1} - f_{k+1}(X_r). \quad (9.22)$$

Формулы (9.22) позволяют, исходя из некоторого известного состояния (обычно исходного ненагруженного), последовательным увеличением параметра λ находить соответствующие ему приближенные решения системы (9.20).

Анализ собственных чисел μ_i матрицы Якоби (9.19) на каждом шаге алгоритма (9.22) позволяет выявлять особые точки на кривой нагружения и судить об устойчивости состояния равновесия. При всех $\mu_i > 0$ система устойчива. Смена знака одного из собственных чисел μ_i свидетельствует о том, что на траектории нагружения в интервале λ , λ_{r+1} обнаружена особая точка. Предельное значение параметра λ , при котором одно из собственных чисел обращается в нуль, является критическим.

При этом, если соответствующий собственный вектор ортогонален вектору решения уравнения (9.20), то такая особая точка является бифуркационной и в ней реализуется потеря устойчивости первого рода, характеризуемая ветвлением траектории нагружения. Если же собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, не ортогонален вектору решения, то такая особая точка является предельной и в ней реализуется потеря устойчивости второго рода. Так как в окрестности особой точки оператор F' вырождается и продолжение траектории по алгоритму (9.22) становится невозможным, то для преодоления этого параметр нагрузки объявляется дополнительным неизвестным и ведущим параметром назначается компонента искомого вектора ΔX , соответствующая максимальной компоненте собственного вектора. Для построения бифуркационной ветви уточняется положение

бифуркационной точки на кривой нагружения и к накопленному вектору решения X_r прибавляется собственный вектор X_i с некоторым множителем. После уточнения суммарного вектора без приращения ведущего параметра продолжение решения по ответившейся траектории осуществляется описанным выше способом.

Принятый подход к построению задач о деформировании и устойчивости трехслойных оболочечных конструкций позволяет реализовать пошаговый процесс, сводящий решение исходных нелинейных уравнений равновесия к последовательности решений линеаризованных уравнений.

Получим линеаризованные системы уравнений для наружного слоя и слоя заполнителя.

Поскольку нелинейные уравнения теории оболочек сформулированы в исходной недеформированной метрике, линеаризацию операторов $L_{(\pm)}^\alpha$, L^α , $L^{\alpha+3}$ уравнений равновесия слоев, входящих в (9.9)–(9.15), и соотношений (8.28), (8.33) производим с учетом изменения векторов локального базиса.

Специфика деформирования тонких оболочек заключается в существенном изменении внешней метрики при незначительном изменении внутренней. Это позволяет представить выражения для базисных векторов точек деформированных поверхностей слоев в форме

$$\vec{e}_{\alpha(\pm)}^* = \vec{e}_{\alpha(\pm)}^0 + \vec{e}_{\alpha(\pm)}, \quad \vec{e}_\alpha^* = \vec{e}_\alpha^0 + \vec{e}_\alpha, \quad (9.23)$$

где $\vec{e}_{\alpha(\pm)}$ и $\vec{e}_\alpha$ характеризуют приращения векторов основных локальных базисов систем криволинейных координат $x_{(+)}^\alpha$, x^α и имеют вид

$$\vec{e}_{\alpha(\pm)} = [\vec{\Omega}_{(\pm)} \times \vec{e}_{\alpha(\pm)}], \quad \vec{e}_\alpha = [\vec{\Omega} \times \vec{e}_\alpha] \quad (9.24)$$

или

$$\begin{aligned} \vec{e}_{1(\pm)} &= \nu_{1(\pm)} \vec{e}_{3(\pm)}, \quad \vec{e}_{2(\pm)} = -\nu_{2(\pm)} \vec{e}_{3(\pm)}, \\ \vec{e}_{3(\pm)} &= \nu_{2(\pm)} \vec{e}_{(\pm)}^2 + \nu_{1(\pm)} \vec{e}_{(\pm)}^1 \end{aligned} \quad (9.25)$$

для точек деформированных поверхностей наружных слоев;

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= -\begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 = -\begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3, \\ \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}^2 + \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}^1 - \end{aligned} \quad (9.26)$$

для точек деформированной поверхности заполнителя. При записи соотношений (9.26) учтено, что

$$\nu_s = \sum_{n=0}^1 \nu_s^{(n)} P_n \left(\frac{x^3}{h} \right) = \nu_s^{(0)} + \nu_s^{(1)}. \quad (9.27)$$

Пренебрегая членами, содержащими накопленные значения перерезывающих усилий T^{*s3} , как это принято в теории устойчивости тонких оболочек, представим линеаризованные уравнения равновесия (8.70) в окончательном виде

$$\begin{aligned} 0,5 \left\{ \left[\left(\sqrt{a_{\pm}} \right)_{l+0,5;j+0,5} + \left(\sqrt{a_{\pm}} \right)_{l+0,5;j-0,5} \right] \left[T_{(\pm)}^{11} \bar{e}_{1(\pm)}^* + T_{(\pm)}^{12} \bar{e}_{2(\pm)}^* + T_{(\pm)}^{13} \bar{e}_{3(\pm)}^* - \right. \right. \\ \left. - T_{(\pm)}^{*11} \nu_{1(\pm)} \bar{e}_{3(\pm)}^0 - T_{(\pm)}^{*12} \nu_{2(\pm)} \bar{e}_{3(\pm)}^0 \right]_{i+0,5;j} - \left[\left(\sqrt{a_{\pm}} \right)_{l-0,5;j+0,5} + \left(\sqrt{a_{\pm}} \right)_{l-0,5;j-0,5} \right] \times \\ \times \left[T_{(\pm)}^{11} \bar{e}_{1(\pm)}^* + T_{(\pm)}^{12} \bar{e}_{2(\pm)}^* + T_{(\pm)}^{13} \bar{e}_{3(\pm)}^* - T_{(\pm)}^{*11} \nu_{1(\pm)} \bar{e}_{3(\pm)}^0 - T_{(\pm)}^{*12} \nu_{2(\pm)} \bar{e}_{3(\pm)}^0 \right]_{i-0,5;j} + \\ + \left[\left(\sqrt{a_{\pm}} \right)_{l+0,5;j+0,5} + \left(\sqrt{a_{\pm}} \right)_{l-0,5;j+0,5} \right] \left[T_{(\pm)}^{21} \bar{e}_{1(\pm)}^* + T_{(\pm)}^{22} \bar{e}_{2(\pm)}^* + T_{(\pm)}^{23} \bar{e}_{3(\pm)}^* - \right. \\ \left. - T_{(\pm)}^{*21} \nu_{1(\pm)} \bar{e}_{3(\pm)}^0 - T_{(\pm)}^{*22} \nu_{2(\pm)} \bar{e}_{3(\pm)}^0 \right]_{i;j+0,5} - \left[\left(\sqrt{a_{\pm}} \right)_{l+0,5;j-0,5} + \left(\sqrt{a_{\pm}} \right)_{l-0,5;j-0,5} \right] \times \\ \times \left[T_{(\pm)}^{21} \bar{e}_{1(\pm)}^* + T_{(\pm)}^{22} \bar{e}_{2(\pm)}^* + T_{(\pm)}^{23} \bar{e}_{3(\pm)}^* - T_{(\pm)}^{*21} \nu_{1(\pm)} \bar{e}_{3(\pm)}^0 - T_{(\pm)}^{*22} \nu_{2(\pm)} \bar{e}_{3(\pm)}^0 \right]_{i;j-0,5} + \\ + 0,5 \left[\sqrt{a_{(\pm)}} \left(q_{(\pm)}^1 \bar{e}_{1(\pm)}^0 + q_{(\pm)}^2 \bar{e}_{2(\pm)}^0 + q_{(\pm)}^3 \bar{e}_{3(\pm)}^0 \right) \right]_{i+0,5;j+0,5} + \\ + 0,5 \left[\sqrt{a_{(\pm)}} \left(q_{(\pm)}^1 \bar{e}_{1(\pm)}^0 + q_{(\pm)}^2 \bar{e}_{2(\pm)}^0 + q_{(\pm)}^3 \bar{e}_{3(\pm)}^0 \right) \right]_{i-0,5;j+0,5} + \\ + 0,5 \left[\sqrt{a_{(\pm)}} \left(q_{(\pm)}^1 \bar{e}_{1(\pm)}^0 + q_{(\pm)}^2 \bar{e}_{2(\pm)}^0 + q_{(\pm)}^3 \bar{e}_{3(\pm)}^0 \right) \right]_{i+0,5;j-0,5} + \\ + 0,5 \left[\sqrt{a_{(\pm)}} \left(q_{(\pm)}^1 \bar{e}_{1(\pm)}^0 + q_{(\pm)}^2 \bar{e}_{2(\pm)}^0 + q_{(\pm)}^3 \bar{e}_{3(\pm)}^0 \right) \right]_{i-0,5;j-0,5} \left. \right\} \times \\ \times \left(\bar{e}_{(\pm)}^{01} + \bar{e}_{(\pm)}^{02} + \bar{e}_{(\pm)}^{03} \right)_{i;j} = 0. \quad (9.28) \end{aligned}$$

Линеаризацию уравнений равновесия (8.64) и (8.65) выполним с учетом приращения базисных векторов (9.26) и накопленных напряжений $\sigma^{*Sr(0)}, \sigma^{*Sr(1)}$, пренебрегая при этом значениями следующих напряжений

$$\sigma^{*S3(0)} \approx \sigma^{*S3(1)} \approx \sigma^{*3S(0)} \approx \sigma^{*33(0)} \approx 0.$$

В результате получены линеаризованные уравнения равновесия для заполнителя трехслойной оболочки

$$\left\{ h_{i;j} \left[\left(\sqrt{a} \right)_{i+0,5;j+0,5} + \left(\sqrt{a} \right)_{i+0,5;j-0,5} \right] \left[\sigma^{(0)11} \bar{e}_1^* + \sigma^{(0)12} \bar{e}_2^* + \sigma^{(0)13} \bar{e}_3^* - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma^{(0)*11} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 - \sigma^{(0)*12} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 \Big]_{i+0,5;j} - \\
& - h_{i,j} \left[(\sqrt{a})_{i-0,5;j+0,5} + (\sqrt{a})_{i-0,5;j-0,5} \right] \times \\
& \times \left[\sigma^{(0)*11} \vec{e}_1^* + \sigma^{(0)*12} \vec{e}_2^* + \sigma^{(0)*13} \vec{e}_3^* - \sigma^{(0)*11} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 - \sigma^{(0)*12} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 \right]_{i-0,5;j} + \\
& + h_{i,j} \left[(\sqrt{a})_{i+0,5;j+0,5} + (\sqrt{a})_{i-0,5;j+0,5} \right] \times \\
& \times \left[\sigma^{(0)*21} \vec{e}_1^* + \sigma^{(0)*22} \vec{e}_2^* + \sigma^{(0)*23} \vec{e}_3^* - \sigma^{(0)*21} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 - \sigma^{(0)*22} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 \right]_{i;j+0,5} - \\
& - h_{i,j} \left[(\sqrt{a})_{i+0,5;j-0,5} + (\sqrt{a})_{i-0,5;j-0,5} \right] \times \\
& \times \left[\sigma^{(0)*21} \vec{e}_1^* + \sigma^{(0)*22} \vec{e}_2^* + \sigma^{(0)*23} \vec{e}_3^* - \sigma^{(0)*21} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 - \right. \\
& \left. - \sigma^{(0)*22} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 \right]_{i;j-0,5} + 0,25 \left\{ \left[\sqrt{a} (\sigma_{(+)}^{3\beta} \vec{e}_\beta^0 - \sigma_{(-)}^{3\beta} \vec{e}_\beta^0) \right]_{i+0,5;j+0,5} + \right. \\
& + \left[\sqrt{a} (\sigma_{(+)}^{3\beta} \vec{e}_\beta^0 - \sigma_{(-)}^{3\beta} \vec{e}_\beta^0) \right]_{i-0,5;j+0,5} + \left[\sqrt{a} (\sigma_{(+)}^{3\beta} \vec{e}_\beta^0 - \sigma_{(-)}^{3\beta} \vec{e}_\beta^0) \right]_{i+0,5;j-0,5} \times \\
& \times \left. \left[\sqrt{a} (\sigma_{(+)}^{3\beta} \vec{e}_\beta^0 - \sigma_{(-)}^{3\beta} \vec{e}_\beta^0) \right]_{i-0,5;j-0,5} \right\} \Bigg\} \times e_{i,j} \stackrel{\rightarrow 0\alpha}{=} 0, \\
& \{ h_{i,j} \left[(\sqrt{a})_{i+0,5;j+0,5} + (\sqrt{a})_{i+0,5;j-0,5} \right] \times \left[\sigma^{(1)*11} \vec{e}_1^* + \sigma^{(1)*12} \vec{e}_2^* + \sigma^{(1)*13} \vec{e}_3^* - \right. \\
& \left. - \sigma^{(1)*11} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 - \sigma^{(1)*12} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 \right]_{i+0,5;j} - \\
& - h_{i,j} \left[(\sqrt{a})_{i-0,5;j+0,5} + (\sqrt{a})_{i-0,5;j-0,5} \right] \times \\
& \times \left[\sigma^{(1)*11} \vec{e}_1^* + \sigma^{(1)*12} \vec{e}_2^* + \sigma^{(1)*13} \vec{e}_3^* - \sigma^{(1)*11} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 - \sigma^{(1)*12} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 \right]_{i-0,5;j} + \\
& + h_{i,j} \left[(\sqrt{a})_{i+0,5;j+0,5} + (\sqrt{a})_{i-0,5;j+0,5} \right] \times \\
& \times \left[\sigma^{(1)*21} \vec{e}_1^* + \sigma^{(1)*22} \vec{e}_2^* + \sigma^{(1)*23} \vec{e}_3^* - \sigma^{(1)*21} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_1 + \nu_1 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 - \sigma^{(1)*22} \begin{pmatrix} (0) & (1) \\ \nu_2 + \nu_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3^0 \right]_{i;j+0,5} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h_{i,j} \left[\left(\sqrt{a} \right)_{i+0,5;j-0,5} + \left(\sqrt{a} \right)_{i-0,5;j-0,5} \right] \times \\
& \times \left[\sigma^{21}_{(+)} \bar{e}_1^* + \sigma^{22}_{(+)} \bar{e}_2^* + \sigma^{23}_{(+)} \bar{e}_3^* - \sigma^{*21}_{(-)} \left(\nu_1 + \nu_1 \right) \bar{e}_3^0 - \sigma^{*22}_{(-)} \left(\nu_2 + \nu_2 \right) \bar{e}_3^0 \right]_{i,j-0,5} + \\
& + 0,75 \left\{ \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{3\beta}_{(+)} \bar{e}_\beta^0 + \sigma^{3\beta}_{(-)} \bar{e}_\beta^0 \right) \right]_{i+0,5;j+0,5} + \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{3\beta}_{(+)} \bar{e}_\beta^0 + \sigma^{3\beta}_{(-)} \bar{e}_\beta^0 \right) \right]_{i+0,5;j-0,5} + \right. \\
& \left. \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{3\beta}_{(+)} \bar{e}_\beta^0 + \sigma^{3\beta}_{(-)} \bar{e}_\beta^0 \right) \right]_{i-0,5;j+0,5} + \left[\sqrt{a} \left(\sigma^{3\beta}_{(+)} \bar{e}_\beta^0 + \sigma^{3\beta}_{(-)} \bar{e}_\beta^0 \right) \right]_{i-0,5;j-0,5} \right\} - \\
& - 1,5 \left[\left(\sqrt{a} \right)_{i+0,5;j+0,5} + \left(\sqrt{a} \right)_{i+0,5;j-0,5} + \right. \\
& \left. + \left(\sqrt{a} \right)_{i-0,5;j+0,5} + \left(\sqrt{a} \right)_{i-0,5;j-0,5} \right] \left(\sigma^{31}_{(+)} \bar{e}_1^* + \sigma^{32}_{(+)} \bar{e}_2^* + \sigma^{33}_{(+)} \bar{e}_3^* \right)_{i,j} \Bigg\} \times \\
& \times \vec{e}_{i,j} = 0.
\end{aligned} \tag{9.29}$$

В уравнениях (9.28), (9.29) слагаемые, задающие внешнее воздействие, определены для сил, которые в процессе деформирования не меняют своего направления. В случаях, когда в процессе деформирования слоев оболочки, внешние силы изменяют свою первоначальную ориентацию, члены уравнения равновесия, характеризующие нагрузку, являются нелинейными, поэтому в (9.28) и (9.29) необходимо учесть соответствующие добавки.

Линеаризованные выражения для тангенциальных деформаций (8.33) представим в форме

$$\varepsilon_{ij(\pm)} = 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}_{(\pm)}}{\partial x^i_{(\pm)}} \bar{e}_{j(\pm)}^0 + \frac{\partial \vec{u}_{(\pm)}}{\partial x^j_{(\pm)}} \bar{e}_{i(\pm)}^0 + \nu_{i(\pm)} \nu_{j(\pm)}^* + \nu_{i(\pm)}^* \nu_{j(\pm)} \right). \tag{9.30}$$

В результате линеаризации моментов компонент тензора деформаций заполнителя (8.28) получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ik}^{(0)} &= 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i} \bar{e}_k^0 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} \bar{e}_i^0 + \nu_i \nu_k^* + \nu_i^* \nu_k + \frac{1}{3} \nu_i \nu_k^* + \frac{1}{3} \nu_i^* \nu_k \right), \\
\varepsilon_{i3}^{(0)} &= 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i} \bar{e}_3^0 + h^{-1} \vec{u} \bar{e}_i^0 - h^{-1} \nu_i \vec{u}^* \bar{e}_3^0 - h^{-1} \nu_i^* \vec{u} \bar{e}_3^0 \right), \\
\varepsilon_{33}^{(0)} &= h^{-1} \vec{u} \bar{e}_3^0 + h^{-2} \vec{u}^* \vec{u},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ik}^{(1)} &= 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i} \vec{e}_k^0 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^k} \vec{e}_i^0 + v_i^{(0)} v_k^{(1)*} + v_i^{(1)} v_k^{(0)*} + v_k^{(1)} v_i^{(0)*} + v_k^{(0)} v_i^{(1)*} \right), \\
 \varepsilon_{i3}^{(1)} &= 0,5 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i} \vec{e}_3^0 - h^{-1} v_i^{(1)} \vec{u}^* \vec{e}_3^0 - h^{-1} v_i^{(1)*} \vec{u} \vec{e}_3^0 \right). \quad (9.31)
 \end{aligned}$$

В соотношениях (9.28)–(9.31) звездочками обозначены значения накопленных величин, нулями – выражения базисных векторов точек исходных недеформированных поверхностей слоев, параметры без звездочек и нулей обозначают приращения переменных величин.

Используя соотношения (9.30), (9.31), (8.23), (8.32), (8.34)–(8.36) с учетом полученных выражений (9.28) и (9.29) в процедуре (9.22), получим системы линейаризованных уравнений равновесия трехслойных оболочек, коэффициенты которых на некотором шаге алгоритма (9.22) вычисляются с использованием характеристик состояния предыдущего шага. Для решения систем линейаризованных уравнений используется блочный метод Гаусса.

Критерием потери устойчивости трехслойной оболочки является вырождение линейаризованного оператора левой части разрешающих уравнений равновесия. При конечноразностной дискретизации исходных уравнений с частными производными это эквивалентно обращению в нуль определителя матрицы левой части системы линейаризованных уравнений. Если при этом дефект расширенной матрицы равен нулю, то рассматриваемое критическое состояние является предельным. Продолжение решения в этом случае возможно назначением ведущим параметром перемещения в характерной точке области, определяемой по максимальным значениям приращения компонент вектора перемещений на предыдущем шаге решения. Если дефект расширенной матрицы больше нуля, то критическое состояние является бифуркационным. В этом случае построение отвечающего решения можно осуществлять удачным выбором в качестве ведущего параметра прогиба оболочки в некоторой точке ее поверхности.

Учет эволюции расслоений. Разработанный в работе алгоритм позволяет учитывать возможность роста исходных или образование новых дефектных участков, а также изменение контактных условий между слоями в границах дефектных зон. Выбор критерия оценки эволюции расслоений базируется на предположении, что инициатором их роста может послужить концентрация напряжений в окрестности дефекта или утрата материалом связующего слоя (заполнителя) первоначальных свойств в результате длительной эксплуатации конструкции. Допускалось также, что расслоения не достигают

критических размеров, при которых происходит исчерпание несущей способности конструкции [17].

Критерием распространения расслоения является условие, имеющее вид неравенства

$$\sigma^{3t} \geq [R], \quad (9.32)$$

где σ^{3t} – касательные напряжения в соответствующих точках на лицевой поверхности заполнителя; $[R]$ – расчетное сопротивление сдвигу слоя заполнителя или клеевого соединения.

Уточнение границ зон расслоений в процессе деформирования трехслойной конструкции сочетается с пошаговым методом решения геометрически нелинейной задачи. При этом на каждом шаге алгоритма анализируются касательные напряжения σ^{3t} на лицевых поверхностях в узлах дискретной модели заполнителя и их значения сопоставляются со значением $[R]$ для материала данного слоя или в случае клеевого соединения слоев – клеевого состава. В случае выполнения неравенства (9.32) расчетная модель слоистой конструкции корректируется в соответствии с условиями соединения смежных слоев (9.1)–(9.8).

В процессе деформирования конструкции в границах дефектных участков или во вновь образованных дефектных зонах могут наблюдаться участки отрыва несущего слоя от заполнителя. При дальнейшем нагружении конструкции существует вероятность изменения условий контакта в границах дефектных зон: отдельные отслоившиеся участки могут вновь вступить в контакт с поверхностью заполнителя. Для исследования указанного процесса разработан алгоритм, позволяющий учитывать односторонность контакта между несущими слоями и заполнителем.

Условия контакта по нормали к поверхности слоя формируются на границе смежных лицевых поверхностей слоев. В возмущенном состоянии отслоившиеся слои (имеется в виду скольжение) могут не контактировать либо контактировать на участках поверхности. Для анализа условий контактного взаимодействия слоев в процессе деформирования используется кинематический подход. В его основу положено предположение о взаимном непроникновении слоев, которое выражается в виде кинематических условий на контактных поверхностях смежных слоев. Указанные ограничения имеют вид неравенств, при этом не требуется априорного задания площадок контакта. Условия взаимодействия оболочек формулируются относительно нормальных перемещений u_z и поверхностных контактных усилий q^{k3} в узлах дискретной модели, принадлежащих области контакта, где предполагается полное прилегание оболочек и отсутствие касательных усилий. Возникающие контактные давления считаются действующими нормально к поверхностям слоев.

Область контактного взаимодействия определяется путем анализа на каждом шаге алгоритма продолжения решения по параметру выполнения кинематического условия непроникновения слоев

$$q^{k3} = q_{(\pm)}^{k3} = 0 \quad \text{при} \quad u_{3(\pm)}^* - u_3^* \geq 0, \quad (9.33)$$

где $u_{3(\pm)}^*$ и u_3^* – накопленный прогиб соответственно несущего слоя и заполнителя.

В узлах дискретной модели, принадлежащих области контакта, обязательным является выполнение на последующем шаге условий:

кинематического

$$u_{3(\pm)}^* = u_3^* \quad (9.34)$$

и статического

$$q_{(\pm)}^{k3} = q^{k3}. \quad (9.35)$$

Равенство (9.34) подразумевает равенство приращений прогибов контактирующих узлов обеих оболочек, что аналогично условию равенства кривизн взаимодействующих частей. Условие (9.35) обеспечивает равенство по абсолютному значению искомых точечных усилий контактного взаимодействия слоев.

Таким образом, задача по анализу устойчивости трехслойных оболочек состоит в определении минимального значения внешней нагрузки q^a , при котором реализуется тривиальное решение системы алгебраических уравнений.

Остановимся на вопросе определения критической нагрузки и соответствующей ей формы потери устойчивости.

Известно, что в трехслойных конструкциях (как и в многослойных композитных конструкциях), имеющих дефекты типа расслоений, могут наблюдаться различные формы потери устойчивости.

Различают общую форму потери устойчивости, при которой происходит потеря устойчивости всей оболочки; локальную форму потери устойчивости несущих слоев в дефектных зонах и смешанные формы потери устойчивости. Все эти формы могут быть как симметричными, так и кососимметричными.

Рассмотрим случаи, характеризующие образование тех или иных форм потери устойчивости в трехслойных конструкциях в процессе их деформирования (рис. 9.1).

Для бездефектных конструкций (кривая *a*) и конструкций, имеющих дефектные участки с проскальзыванием несущих слоев по поверхности заполнителя без отрыва от него (кривая *б*), характерными являются общие формы потери устойчивости – симметричные (предельные точки 1 и 3) и кососимметричные (бифуркационные точки 2, 4). На траектории нагружения (кривая *в*), построенной для конструкции с дефектными участками, в границах которых возможен отрыв несущего слоя от заполнителя (полный или частичный), различается несколько особых точек, соответствующих характер-

ным формам потери устойчивости. При этом кроме общих форм у таких оболочек могут наблюдаться смешанные (точки 5, 6) и локальные формы (точки 7, 8). Смешанные формы в этом случае довольно часто являются формами, соответствующими минимальной критической нагрузке. Локальные формы характеризуют потерю устойчивости несущего слоя в границах дефектного участка.

Для определения реальной формы потери устойчивости дефектного участка используется итерационный процесс. На первом шаге определяются реальные локальные либо смешанные формы потери устойчивости для участков с расслоениями как для отдельных оболочек (точка 7). Затем в соответствии

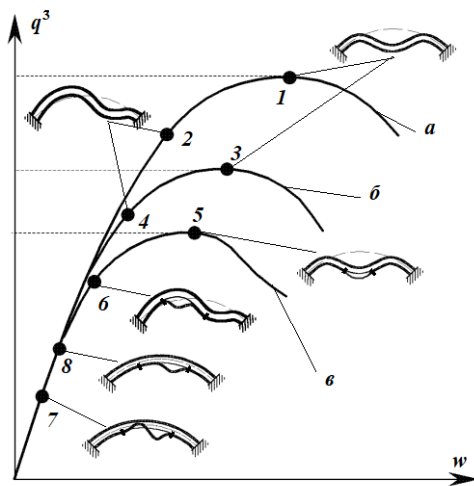


Рис. 9.1. Кривые нагружения (a , $б$, $в$) с характерными точками (1–8) и формами потери устойчивости

с условием (9.33) полученная форма корректируется до тех пор, пока полностью не совпадут две последние формы потери устойчивости (точка 8). Эта последняя форма равновесия и принимается за действительную локальную либо смешанную форму потери устойчивости, а полученная нагрузка — за действительную критическую нагрузку. Как показали дальнейшие исследования, форма потери устойчивости конструкции зависит от размера дефекта и его месторасположения.

§ 9.5. Вычислительный комплекс для решения геометрически и конструктивно нелинейных задач

Разработанный комплекс прикладных программ TOSOR-2 предназначен для решения на ПЭВМ в двумерной постановке статических задач анализа напряженно-деформированного состояния, исследования нелинейного деформирования и устойчивости трехслойных композитных пластин и оболочек сложной канонической формы с учетом эволюции расслоений. Програм-

мы комплекса написаны на алгоритмическом языке высокого уровня FORTRAN-32 и для эффективности их использования оформлены в виде выполняемого модуля. Функционирование комплекса осуществляется на ЭВМ типа IBM PC под управлением операционной системы Windows 98. Результаты расчета выводятся на дисплей или печатающее устройство в виде цифровой либо графической информации.

Весь программный комплекс можно условно разделить на несколько функциональных блоков (рис. 9.2), реализующих этапы построения расчетной модели для трехслойной оболочки и алгоритм решения задачи:

1-й – блок управления решением задачи о нелинейном деформировании и устойчивости;

2-й – блок построения шаблона коэффициентов при неизвестных в разрешающей системе уравнений и ее правой части;

3-й – блок построения массивов проекций векторов локальных базисов и шаблонов жесткостных характеристик оболочки;

4-й – блок решения системы линеаризованных уравнений равновесия;

5-й – блок учета эволюции расслоений и одностороннего контакта между слоями.

1-й блок включает головную программу MAIN, которая вызывает подпрограмму WWODT для ввода и распечатки исходных и преобразованных данных задачи. После этого вызывается управляющая подпрограмма NELUPT.

В составе формальных параметров управляющей программы имеются имена следующих подпрограмм:

OPERLN – подпрограмма выбора оператора левой части;

BMGWP – подпрограмма решения алгебраических систем уравнений по блочной схеме Гаусса;

DMST – подпрограмма формирования блоков системы уравнений;

OPERP_{*i*} – подпрограмма формирования вектора нагрузки (*i* – означает конкретный вид нагружения);

SOSTAT – подпрограмма, осуществляющая стыковку различных поверхностей составной оболочки и формирование проекций касательных векторов основного локального базиса поверхности точек сеточного шаблона.

Имена подпрограмм, выступающих в качестве фактических параметров при обращении к управляющей подпрограмме NELUPT, декларируются внешним оператором EXTERNAL в головной программе MPG. Здесь же оператором DEFINE FILE декларируются параметры файла прямого доступа № 8, который предназначен для обмена результатами преобразования исходной матрицы в прямом ходе блочного метода Гаусса и для хранения результатов счета необходимого числа последних шагов алгоритма при решении нелинейной задачи. Данная операция необходима для возобновления счета с любого из предыдущих шагов.

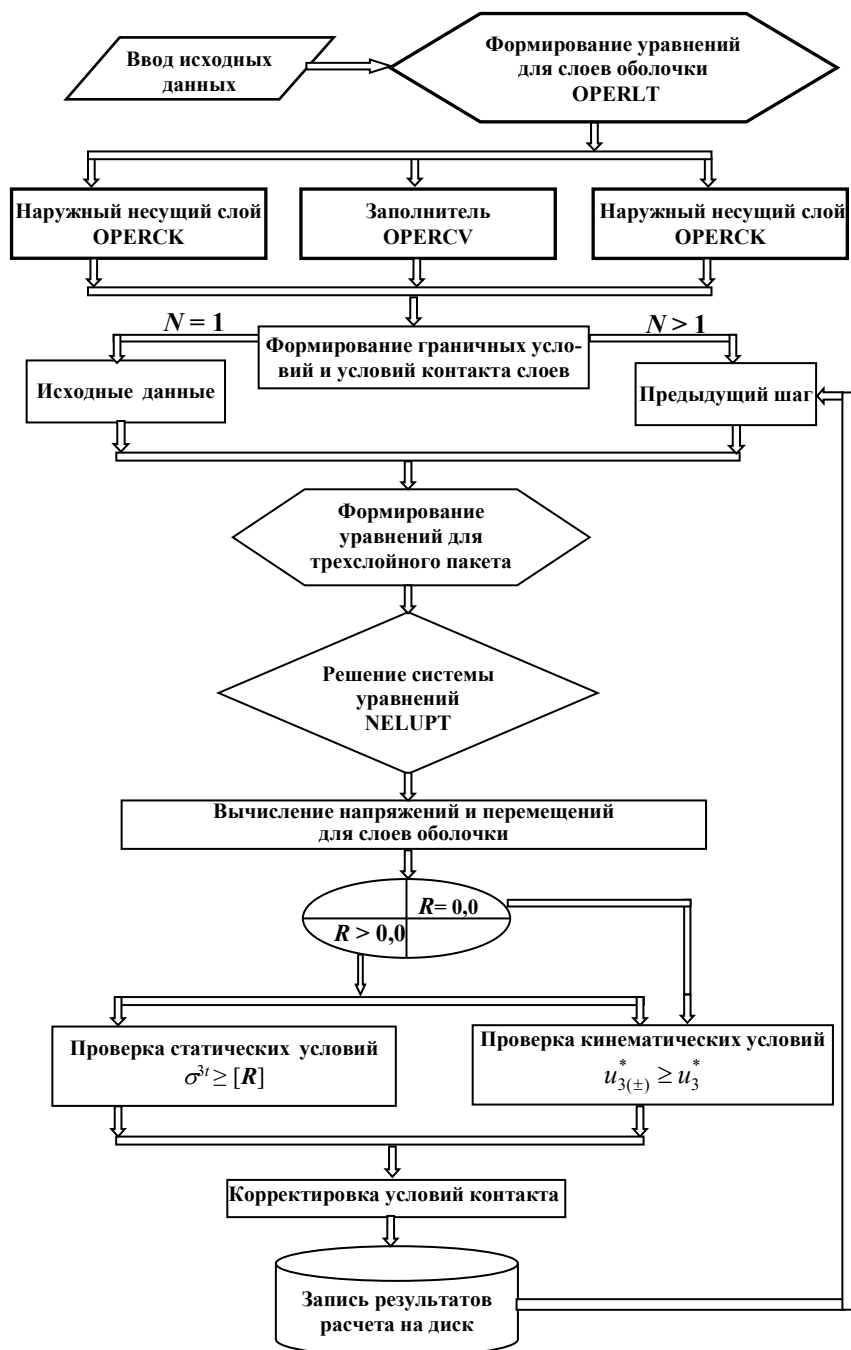


Рис. 9.2. Программная реализация основных этапов расчета

Режимы работы управляющих подпрограмм определяются на уровне задания исходных данных переменными:

NBEGIN – номер шага, с которого начинается (возобновляется) счет;

NEND – номер шага, которым счет оканчивается (прерывается);

DW – значение приращения ведущего параметра перемещения;

DP – значение приращения параметра нагрузки.

После завершения расчета или шага расчета в зависимости от значений элементов массива IFPULT, задаваемых в исходных данных, печатаются поля накопленных физических значений перемещений, напряжений, координат узлов сеточной области.

Блок решения системы линейаризованных уравнений равновесия состоит из подпрограммы BMGWP, реализующей алгоритм блочного метода Гаусса, и DBMST, управляющей формированием блоков исходной матрицы.

Подпрограмма BMGWP вызывает следующие подпрограммы:

OBMB с дополнительным входом OBML осуществляет обмен информацией на уровне оперативной памяти;

AIM осуществляет поразрядный обмен с МОЗУ;

OBMEN1 с дополнительным входом в OBMEN2 осуществляет обмен информацией с МД;

DBMST осуществляет построение блоков исходной матрицы;

PRINBL осуществляет отладочную печать блоков исходной и преобразованной матриц;

MULTIM осуществляет умножение двух блоков с вычитанием их произведения;

MULTIP осуществляет умножение двух блоков со сложением их произведения;

MATIND обращает блок матрицы.

Результатом работы подпрограммы BMGWP являются векторы решений, которые блоками по 30 неизвестных хранятся на МД.

При построении блоков исходной матрицы подпрограммой DBMS вызывается подпрограмма OPERLN, которая в зависимости от номера слоя трехслойного пакета осуществляет вызов подпрограмм построения конечно-разностных шаблонов коэффициентов: OPERCK_i – для наружных слоев пакета и OPERCV – для заполнителя, и подпрограммы вычисления коэффициентов однопараметрической нагрузки OPERP_i. Посредством обращения к подпрограмме DBOUND осуществляется исключение неизвестных в законтурных узлах за плоскостями симметрии и кососимметрии.

Блок построения разностного шаблона коэффициентов при неизвестных для наружных слоев состоит из ряда подпрограмм, моделирующих основные этапы вывода разрешающих уравнений классической теории оболочек, осуществляя последовательное накопление значений элементов массива конечно-разностных коэффициентов.

Построение скалярных уравнений равновесия моделирует программа OPERCK, вызывая подпрограммы NELTRT, NELMRT, NTETS. Она накапливает значения разностных коэффициентов, полученных от вклада каждого из усилий, с последующим умножением их на множители, с которыми эти усилия входят в каждое из трех уравнений равновесия. Коэффициенты, с которыми входят усилия в уравнения равновесия, определяются в подпрограмме GEOMT.

Принадлежность узла, для которого строится шаблон коэффициентов, к контурным или предконтурным узлам, свободного или шарнирно опертого края определяется в результате работы подпрограммы анализа поля признаков APPT.

Подпрограмма NELTRT, осуществляющая накопление значений коэффициентов разностного шаблона при неизвестных линеаризованных уравнений равновесия в приращениях от внутренних усилий, состоит из блоков, которые реализуют подстановку в уравнения соотношений для мембранных усилий и соотношений между перерезывающими силами и внутренними моментами.

При функционировании подпрограммы NELTRT осуществляется обращение к блокам подпрограмм NEPSS, NELMUS и NELMRT, работа которых заключается в накоплении коэффициентов разностного шаблона от выражений мембранных и изгибных деформаций и выражений внутренних моментов соответственно.

Подпрограмма NELMRT, осуществляющая накопление значений коэффициентов разностного шаблона при неизвестных линеаризованных уравнений равновесия в приращениях от выражений внутренних моментов, состоит из самостоятельных блоков, каждый из которых реализует подключение выражения соответствующей компоненты тензора внутренних моментов при определении перерезывающих сил. При работе подпрограмма NELMRT обращается к дополнительным подпрограммам NELMUS и NEPSS. Программа NEPSS осуществляет накопление коэффициентов разностного шаблона от выражений мембранных деформаций и состоит из блоков, каждый из которых реализует подключение выражения соответствующей компоненты тензора мембранных деформаций в выражениях внутренних усилий и моментов.

Подпрограмма NELMUS осуществляет накопление коэффициентов разностного шаблона от выражений компонент изгибных деформаций. При работе программа NELMUS обращается к подпрограмме NTETS, которая накапливает коэффициенты разностного шаблона от выражений компонент тензора углов поворота.

Блок построения разностного шаблона коэффициентов при неизвестных линеаризованных уравнений равновесия заполнителя состоит из подпрограмм, моделирующих основные этапы вывода разрешающих уравнений неклассической теории тонких оболочек.

Построение скалярных уравнений равновесия осуществляет программа OPERCK, вызывая подпрограммы NELG, NELGU, NTET, BOUNDE, BOUNDA. Она накапливает значения разностных коэффициентов, полученных от вклада компонент тензора напряжений в заполнителе. Коэффициенты, с которыми входят компоненты напряжений в уравнения равновесия, определяются в подпрограмме GEOMT.

Подпрограммы NELG и NELGU, осуществляющие накопление значений коэффициентов разностного шаблона при неизвестных линейаризованных уравнений равновесия в приращениях от компонент тензора напряжений соответственно между узлами и в узлах разностной сетки, состоят из самостоятельных блоков, каждый из которых реализует подключение в уравнения равновесия выражения соответствующей компоненты тензора внутренних деформаций. Объединение самостоятельных блоков в одну программу обусловлено общностью их декларативных операторов и функционального назначения.

При функционировании подпрограмм NELGU, NELG осуществляется обращение к блокам подпрограмм NEPS, NEPS12, NEPS3, NEPS33, NEPSU, работа которых заключается в накоплении коэффициентов разностного шаблона от выражений тангенциальных деформаций, деформаций сдвига и обжатия. Вызываемые подпрограммы состоят также из самостоятельных блоков, каждый из которых реализует подключение выражения соответствующей компоненты тензора деформаций. Обращение к этим блокам осуществляется по именам дополнительных входов в подпрограммы.

При работе подпрограмм NEPS, NEPS12, NEPS3 осуществляется обращение к дополнительным входам подпрограммы NTET, а при работе подпрограммы NEPSU – к входам подпрограммы NTETU. Работа подпрограммы NTET и NTETU заключается в накоплении коэффициентов разностного шаблона от выражений компонент тензора углов поворота между узлами и в узлах разностной сетки соответственно. Эти подпрограммы состоят из самостоятельных блоков, каждый из которых реализует подключение выражения соответствующего угла поворота. Обращение к блокам подпрограммы NTET осуществляется по следующим именам входов: ENTRY VTET1 реализует подключение выражения $\nu_{1(i \pm 0,5; j)}$; ENTRY VTET1N – выражения $\nu_{1(i; j \pm 0,5)}$; ENTRY VTET2N – выражения $\nu_{2(i \pm 0,5; j)}$; ENTRY VTET2 – выражения $\nu_{2(i; j \pm 0,5)}$.

Подпрограмма NTETU состоит из двух блоков TET1U и TET2U, которые реализуют подключение выражений $\nu_{1(i; j)}$ и $\nu_{2(i; j)}$ соответственно.

Для построения коэффициентов разностного шаблона используется блок подпрограмм: GEOMT, PERGEO и SOSTAT. В этом блоке производится построение массива компонент векторов локальных базисов, массива корней квадратных из фундаментальных определителей и массивов жесткостей оболочки.

Обращение к подпрограмме GEOMT в вызывающих подпрограммах осуществляется в циклах, реализующих обход сеточной области по узлам в

направлении x^1 , а затем в направлении x^2 . При этом в узле сеточной области производится построение указанных массивов для каждого из слоев трехслойного пакета. Переход от слоя к слою осуществляется подпрограммой PERGEO. В подпрограмме GEOMT вызывается подпрограмма ENJ, осуществляющая заполнение массивов жесткостных характеристик сечений оболочки.

Когда рассчитываемый слой представляет собой оболочку, срединная поверхность которой является гладкой аналитической поверхностью, подключается только та программа, которая предназначена для построения касательных векторов основного локального базиса этой аналитической поверхности. В тех случаях, когда слой представляет собой оболочку, срединная поверхность которой составлена из различных аналитических поверхностей, подключается программа SOSTAT, осуществляющая построение шаблона проекций касательных векторов основного базиса для составных поверхностей. Составной считается оболочка, на отдельных участках которой, ограниченных координатными линиями, имеют место различия поверхностей, и (или) физических параметров материала и (или) шага разностной сетки.

Для построения в уравнениях равновесия коэффициентов от различных видов нагрузок в комплексе программ TOSOR-2 имеется ряд подпрограмм, подключение каждой из которых обеспечивает решение задачи от нагрузки соответствующего вида.

После завершения построения блоков исходных матриц для несущих слоев трехслойного пакета и заполнителя производится вызов подпрограммы BLOKLT, функция которой заключается в формировании общей матрицы коэффициентов при неизвестных в линеаризованных уравнениях равновесия. Построение осуществляется с учетом условий связи, задаваемых на поверхности контакта слоев.

Наличие и характер связей между слоями определяются в каждом узле конечноразностной сетки в подпрограмме ANALIZ. Принадлежность узла к бездефектной зоне или зоне, содержащей расслоение, определяется значениями четырех логических переменных SW12, SW12W, SW23 и SW23W. Истинные значения (.TRUE.) всех переменных свидетельствуют об отсутствии дефектов типа расслоений в рассматриваемом узле сетки, а ложные (.FALSE.) – об отсутствии связей между несущими слоями и заполнителем. Ложные значения переменных SW12 и SW12W и истинные переменные SW23 и SW23W свидетельствуют об отсутствии связей только между первым несущим слоем и заполнителем. Аналогично моделируются и другие варианты сопряжения слоев.

Полученные значения перемещений и напряжений на каждом шаге решения задачи анализируются блоком программ EVOLUCIYA. В случае $[R] > 0,0$ выполняется проверка условия (9.32). При удовлетворении условия (9.32) выполняется корректировка условий связи слоев. Кроме того для каждого узла сеточной области выполняется проверка перемещений, нормальных к срединной поверхности наружных слоев и поверхности заполнителя. Сопо-

ставление величин перемещений выполняется по условию (9.33) и в случае его выполнения в программе ANALIZ осуществляется корректировка условий связи слоев.

Исходная информация, необходимая для определения конфигурации программы под конкретную задачу, запуска вычислительного комплекса и последующих вычислений, организуется как набор последовательно расположенных данных и представляет собой набор констант, характеризующих топологию трехслойной конструкции, физико-механические характеристики материалов слоев, их геометрические размеры, а также констант управления процессом счета, выводом данных на печатающие устройства.

Структура входных данных, оформленных библиотечным разделом, следующая.

В первой строке задаются параметры: MO – количество узлов сеточной области в рассчитываемом фрагменте в направлении координаты x^1 ; NO – то же, в направлении x^2 ; KOLFOB – количество разрешающих функций; KOLPCH – количество правых частей в матрице разрешающих уравнений; MSGU – параметр автоматического сгущения сетки в направлении координаты x^1 , NSGU – то же, в направлении x^2 . Область задаваемых значений: MO, NO – целые положительные числа ≥ 5 ; KOLFOB – принимается равным 12; KOLPCH – для задач НДС и устойчивости принимается равным 3, MSGU, NSGU – целые положительные числа (при MSGU и NSGU, равных 0 или 1, сгущение сетки не происходит).

Во второй строке задаются значения переменных ABKRIT и OTKRIT, служащие критериями контроля абсолютной и относительной погрешностей преобразования исходной матрицы по схеме Гаусса, а также переменной

RKR, задающей значение отношения $\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$, при котором возможно прене-

брежение косоугольностью разностной сетки.

Далее задается параметр LITR, которому присваивается значение, равное количеству записей по две строки, определяющих поле признаков узлов сеточной области.

Следующая группа записей (по две строки) задает поле признаков, содержащее информацию о местоположении и граничных условиях для каждого узла сеточной области, первое и третье числа которой характеризуют номера начального и конечного узлов в направлении координатной линии x^1 , второе и четвертое – то же, в направлении координатной линии x^2 участка сеточной области, характеризующегося одинаковыми признаками. Последующие двенадцать чисел задают информацию о кинематических и статических условиях закрепленных контурных узлов участка.

После строк поля признаков задается переменная $GEO = KGEO \cdot 3$, где KGEO определяет число составных элементов, образующих слой. Далее следует группа строк (по 4 каждая), описывающих геометрические и физические

параметры каждого геометрического элемента составной оболочки. Первая строка группы определяет для каждого из слоев начальный и конечный номера узлов в направлениях координатной линии x^1 (первый и третий элементы массива) и координатной линии x^2 (второй и четвертый элементы массива), код подпрограммы, описывающей соответствующую поверхность, а также номер слоя в трехслойном пакете. Вторая строка определяет соответственно модуль упругости материала слоя, толщину слоя, коэффициент Пуассона. Третья строка группы описывает значения геометрических параметров слоя. Четвертая строка задает значения шести параметрам, определяющим положение местной декартовой системы координат, рассматриваемого элемента, относительно общей для составной оболочки декартовой системы координат. Три первых параметра определяют соответственно координаты в глобальной, а три последующих – задают эйлеровы углы поворота местной системы относительно общей: первый параметр характеризует угол поворота в радианах относительно оси OX , второй – угол поворота относительно оси OY , третий – то же, относительно оси OZ . Угол является положительным, если его вектор совпадает с направлением оси, вокруг которой происходит вращение.

В следующих двух строках вводятся параметры, определяющие начальный (NBEGIN) и конечный (NEND) номера шагов вычислительного процесса. Параметр NBEGIN принимается равным 1 или задается равным последующему номеру шага в случае, если результаты предыдущего шага считываются из файла прямого доступа.

В следующей строке содержатся значения переменных WETW, NWW, IWW, JWW и DWW, характеризующие возможность ветвления решения задач.

Далее задается массив, управляющий печатью полей перемещений, напряжений и координат X, Y, Z узлов разностной сетки для каждого слоя трехслойной конструкции. Каждому элементу массива IFPULT присваивается 0 или 1; 0 – выключить печать, 1 – включить печать.

В следующей строке вводятся значения логических переменных NEL и NELDEF. При решении геометрически нелинейной задачи $NEL = .TRUE.$, $NELDEF = .TRUE.$, при решении линейной задачи $NEL = .FALSE.$, $NEL = .FALSE.$.

Следующие две строки задают значения параметров DW, DP, переменным NW, IW, JW, где DP – определяет приращение нагрузки, а DW – приращение характерного перемещения.

Следующая строка определяет число участков контакта между слоями трехслойного пакета. Для бездефектной оболочки – 1. В этой же строке вводится параметр $[R]$, характеризующий предельное значение расчетного сопротивления на сдвиг материала заполнителя или клеевого соединения. Для расчета без учета эволюции расслоений значение $[R] = 0,0$.

Следующая группа строк определяет сеточные координаты участков контакта и размеры исходных дефектных участков, содержащих расслоения,

а также определяет характер связи между слоями четырьмя логическими переменными.

Далее следует группа строк (по 2 каждая), определяющих вид и действующие на оболочку нагрузки.

Исходные данные готовятся в любом текстовом редакторе, затем после запуска программы они компилируются, в результате чего происходит автоматизированное формирование исходных наборов данных, описывающих геометрию объекта. Файл с исходными данными имеет расширение ID.

Выходные данные формируются в виде таблиц перемещений, напряжений и координат узлов сеточной области. Эта информация оформляется в виде файла с расширением REZ.

§ 9.6. Определение пределов применимости расчетной модели трехслойной оболочки

Анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных изотропных пластин. Для определения пределов применимости расчетной модели трехслойной оболочки, выполнен анализ напряженно-деформированного состояния бездефектных трехслойных пластин под действием синусоидального давления.

Рассмотрены трехслойные симметричные по толщине пластины, свободно опертые по контуру и нагруженные поперечной синусоидальной нагрузкой вида

$$q_{(-)}^3 = q_0 \sin \frac{\pi x^1}{a} \sin \frac{\pi x^2}{a},$$

где q_0 – параметр интенсивности, равный 1 МПа; a – длина стороны квадратной пластины.

Для данной задачи имеется достаточно строгое решение Л.Э.Брюккера [44], где слой заполнителя рассматривается как трехмерное тело, а для жестких слоев принята гипотеза Кирхгофа-Лява.

Расчеты выполнялись для пластин, имеющих следующие физические и геометрические параметры слоев: $E_{(\pm)} = 200$ ГПа, коэффициенты Пуассона для слоев приняты равными $\nu_{(\pm)} = \nu = 0,3$; отношение длины стороны пластины к толщине заполнителя $a/(2h) = 10\text{--}30$; отношение толщин заполнителя и наружных слоев $h_{(\pm)}/(2h)$ варьировалось от 1/10 до 1/80, а отношение модулей упругости несущих слоев и заполнителя $E_{(\pm)}/E$ – от 1 до 10^4 . Расчетная схема изображена на рис. 9.3.

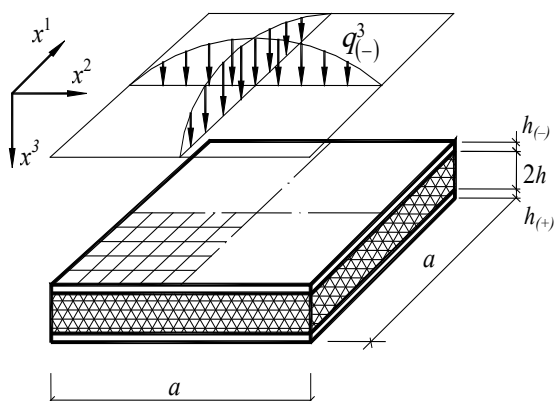


Рис. 9.3. К расчету трехслойной пластины

Наличие симметрии в форме деформирования конструкции позволяет выделить в качестве расчетного фрагмента четвертую часть пластины, ограниченную контурными линиями $x^1 = a/2$, $x^2 = a/2$. В результате исследования сходимости за расчетную для рассматриваемого фрагмента пластины была принята разностная сетка 9×9 узлов. При этом количестве узлов погрешность определения параметров напряженно-деформированного состояния составила менее 3%. Результаты исследования сходимости решений для двух пластин в зависимости от густоты конечноразностной сетки сведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

a , м	$h_{(\pm)}10^{-3}$, м	$2h$, м	E , ГПа	$u_{3(-)}10^4$, м			
				5×5	9×9	17×17	25×25
0,40	0,5	0,04	2	0,951	0,944	0,9400	0,9391
0,14	0,5	0,04	2	0,117	0,114	0,1116	0,1112

Сопоставление результатов расчетов по нормальным прогибам $u_{3(-)}$ и напряжениям $\sigma_{(+)}^{11}$, определенным в центре нагруженного слоя, приведены в табл. 9.2. При сопоставлении полученных результатов с данными Л.Э.Брюккера предполагалось, что расхождение между ними не должно превышать 5%.

Было определено, что использование гипотезы ломаной линии для принятой модели трехслойной оболочки позволяет получать достаточно точные результаты при $a/(2h) \geq 10$ и отношении модулей упругости слоев $E_{(\pm)}/E$ в диапазоне от 1 до 10^4 .

Таблица 9.2

$a/(2h)$	$2h/h_{(\pm)}$	$E_{(\pm)}/E$			
		по прогибам $u_{3(-)}$		по напряжениям $\sigma_{(+)}^{11}$	
		при совпадении координатной поверхности с			
		срединой	координатной	срединой	координатной
10	2	—	1–130	—	$1-10^4$
	5	—	1–750	—	$1-10^4$
	10	—	1–4500	1–5	$1-10^4$
	20	1–3	$1-10^4$	1–5	$1-10^4$
	40	1–10	$1-10^4$	1–50	$1-10^4$
15	1	—	1–65	—	$1-10^4$
	2	—	1–300	—	$1-10^4$
	5	—	1–2000	—	$1-10^4$
	10	—	$1-10^4$	1–15	$1-10^4$
	20	1–4	$1-10^4$	1–50	$1-10^4$
	40	1–50	$1-10^4$	1–50	$1-10^4$
20	1	—	1–100	—	$1-10^4$
	2	—	1–500	—	$1-10^4$
	5	—	1–3000	—	$1-10^4$
	10	—	$1-10^4$	1–15	$1-10^4$
	20	1–5	$1-10^4$	1–100	$1-10^4$
	40	1–50	$1-10^4$	$1-10^4$	$1-10^4$
30	1	—	1–200	—	$1-10^4$
	2	—	1–700	—	$1-10^4$
	5	—	1–5000	—	$1-10^4$
	10	—	$1-10^4$	1–15	$1-10^4$
	20	1–4	$1-10^4$	$1-10^4$	$1-10^4$
	40	1–50	$1-10^4$	$1-10^4$	$1-10^4$

Примечание. Значения, отличающиеся от решения [44] более чем на 5%, отмечены прочерками.

Деформирование трехслойных ортотропных пластин и оболочек.

Выполнен анализ напряженно-деформированного состояния бездефектных квадратных пластин с изотропными внешними слоями и сотовым заполнителем. Пластины нагружались поперечной синусоидальной нагрузкой

$q_{(-)}^3 = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} x^1\right) \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} x^2\right)$. На торцах слоев пластин выполнялись условия свободного опирания типа Навье.

Для этой задачи имеется аналитическое решение Л.Э.Брюккера [44], полученное при условии, что перемещения и напряжения по толщине пластины изменяются по закону ломаной линии. Рассматриваемый сотовый наполнитель относится к классу легких наполнителей, работающих только на поперечный сдвиг. Для жестких наружных слоев принималась гипотеза Кирхгофа-Лява.

Расчеты выполнены для пластин, сотовые наполнители которых моделируются однородными ортотропными слоями постоянной толщины при интенсивности нагрузки $q_0 = 0,1$ МПа. Геометрические и физические параметры слоев приняты следующие:

наружные слои – модуль упругости $E_{(\pm)} = 3,1 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu_{(\pm)} = 0,3$;

заполнитель – модули упругости по направлениям x^1, x^2, x^3 соответственно равны $E_1 = E_2 = 0, E_3 = \infty$; коэффициенты Пуассона $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0$; модуль сдвига в плоскости x^1x^2 $G_{12} = 0$; отношение модулей сдвига в плоскостях x^1x^3 и x^2x^3 варьировалось $G_{13}/G_{23} = 1, 2, 3$. G_{23} принимался равным 45 МПа;

отношение толщины наружных слоев и наполнителя принималось равным $h_{(\pm)}/2h = 1/20$, длина стороны пластины $a = 40$ см, а отношение длины стороны к толщине наполнителя варьировалось в пределах $a/(2h) = 5 \dots 10$.

С учетом симметрии рассматривалась четвертая часть пластины, ограниченная контурными линиями $x^1 = 0, x^2 = 0$ и линиями $x^1 = a/2, x^2 = a/2$, на которую накладывалась разностная сетка 9×9 узлов. При этом параметры напряженно-деформированного состояния определялись с погрешностью до 1,5%.

Результаты расчета приведены в табл. 9.3 в виде нормальных прогибов $u_{3(-)}$ и напряжений $\sigma_{(-)}^{11}, \sigma_{(-)}^{22}$, определенных в центре верхнего нагруженного слоя на его лицевой поверхности, для отношений $a/(2h) = 5$ и 10.

Таблица 9.3

$a/(2h)$	$\frac{G_{13}}{G_{23}}$	Аналитическое решение [44]			Предлагаемая методика					
		$u_{3(-)},$ см	$\sigma_{(-)}^{11},$ МПа	$\sigma_{(-)}^{22},$ МПа	$u_{3(-)},$ см	$\Delta,$ %	$\sigma_{(-)}^{11},$ МПа	$\Delta,$ %	$\sigma_{(-)}^{22},$ МПа	$\Delta,$ %
5	1	0,0185	11,494	11,494	0,0186	0,5	12,122	5,5	12,122	5,5
	2	0,0128	9,188	7,731	0,0129	0,8	9,616	4,7	8,206	6,1
	3	0,0099	7,985	5,768	0,0101	1,0	8,313	4,1	6,148	6,6
10	1	0,0410	17,229	17,229	0,0411	0,2	17,963	4,3	17,961	4,3
	2	0,0280	16,684	10,960	0,0281	0,4	17,169	2,9	11,489	4,8
	3	0,0220	16,417	7,892	0,0221	0,5	16,784	2,2	8,313	5,3

Сопоставление полученных результатов с данными решения [44] (см. табл. 9.3) показало их хорошее совпадение по всем параметрам напряженно-деформированного состояния при $a/(2h) \geq 10$. Погрешность определения прогибов во всех рассмотренных случаях составляет менее 5%.

Рассматривалась также задача об изгибе несимметричной по толщине трехслойной цилиндрической панели с ортотропными обшивками и изотропным заполнителем. Цилиндрическая панель шарнирно опертая и нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q_{(-)}^3$ интенсивностью 1 МПа, приложенной к верхнему слою (рис. 9.4).

Расчеты выполнены для цилиндрической панели с углом раствора $\varphi = \pi/2$, имеющей следующие параметры слоев:

наружные слои: модули упругости в направлении координатных линий x^1 и x^2 – $E_{1(\pm)} = 4,389 \cdot 10^5$ МПа, $E_{2(\pm)} = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; модули сдвига в плоскостях x^1x^2 , x^2x^3 и x^1x^3 – $G_{12(\pm)} = G_{23(\pm)} = G_{13(\pm)} = 1,418 \cdot 10^4$ МПа; коэффициенты Пуассона $\nu_{21(\pm)} = 0,041$, $\nu_{31(\pm)} = 0,086$;

заполнитель: толщина $2h = 0,75$ см; модули упругости $E_1 = E_2 = E_3 = 2,436 \cdot 10^3$ МПа; модули сдвига в плоскостях x^1x^2 , x^2x^3 и x^1x^3 – $G_{12} = G_{23} = G_{13} = 4,67 \cdot 10^2$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$.

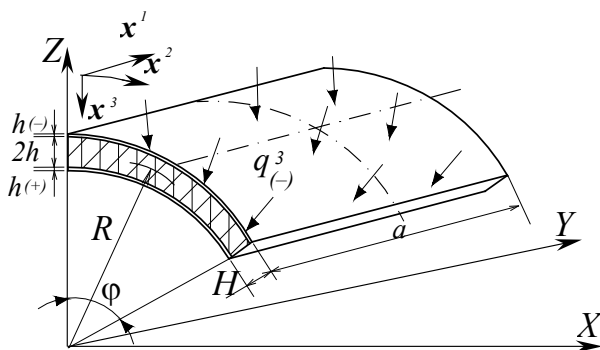


Рис. 9.4. К расчету изгиба цилиндрической панели

Длина цилиндрической панели была принята $L = 400$ см, радиус $R = 100$ см. Отношение толщин слоев $h_{(-)} : 2h : h_{(+)}$ варьировалось.

С учетом симметрии в форме деформирования панели выделялась ее четвертая часть, ограниченная контурными линиями $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ и линиями симметрии $x^1 = a/2$, $x^2 = \varphi/2$ (см. рис. 9.4). В качестве расчетной на рассматриваемый фрагмент панели накладывалась конечноразностная сетка 13×13 узлов, при которой погрешность определения прогибов и нормальных напряжений не превышала 3%. Результаты исследования сходимости реше-

ний по нормальным напряжениям в зависимости от густоты конечноразностной сетки сведены в табл. 9.4.

Таблица 9.4

$h_{(-)} : 2h : h_{(+)} = 0,2 : 0,75 : 0,05$	Густота сетки		
	9×9	13×13	17×17
$\sigma_{(+)}^{11} \cdot 10^{-4}$, МПа	0,329	0,331	0,333
$\sigma_{(+)}^{22} \cdot 10^{-3}$, МПа	1,165	1,310	1,357

Результаты расчета цилиндрической панели в виде нормальных напряжений, определенных в ее центре на верхней $\sigma_{(-)}^{11}$, $\sigma_{(-)}^{22}$ и нижней $\sigma_{(+)}^{11}$, $\sigma_{(+)}^{22}$ контурных поверхностях, приведены в табл. 9.5. Здесь отражены аналогичные напряжения, полученные в работе [12], где рассматривались две модели слоистых оболочек. Модель 1 строилась на основе дискретного учета работы слоев с применением гипотез С.П.Тимошенко. Модель 2 предполагала замену неоднородной по толщине оболочки однородной с эффективными жесткостями и строилась на основе принципа однородности напряженно-деформированного состояния тонкостенного элемента произвольной по толщине структуры.

Таблица 9.5

$h_{(-)} : 2h : h_{(+)}$	$\frac{\sigma_{(\pm)}^{11} \cdot 10^{-4}}{q_{(-)}^3}$			$\frac{\sigma_{(\pm)}^{11} \cdot 10^{-3}}{q_{(-)}^3}$		
	по [12]		по предлагаемой методике	по [12]		по предлагаемой методике
	модель 1	модель 2		модель 1	модель 2	
1:6:1	0,343	0,343	0,343	0,540	0,530	0,538
	0,411	0,412	0,409	0,370	0,380	0,369
0,2:0,75:0,05	0,331	0,395	0,331	1,360	1,260	1,310
	0,388	0,393	0,387	0,009	0,010	0,0085
0,05: 0,75: 0,2	0,357	0,352	0,359	0,820	0,900	0,836
	0,415	0,412	0,416	-0,400	-0,300	-0,419

Анализ результатов показал, что расхождение между полученными значениями напряжений и данными работы [12] не превышает 2%.

Часть III **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ** **БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Глава 10. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ **И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ**

§ 10.1. Работа нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций

Напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости зависит от многих факторов: характера и величины дополнительной нагрузки, стрелы провисания, жесткости нити на растяжение и изгиб, способа закрепления концов нити на опорах и др. Для изучения влияния указанных факторов на работу нитей конечной жесткости проводились численные исследования.

В качестве объекта исследований были приняты нити в виде стальных труб пролетом 30 м с шарнирным и жестким закреплением концов на опорах. Наружный диаметр труб 26,8; 60,0 и 89,0 мм при толщине стенки соответственно 2,8; 3,5 и 4,0 мм. При исследовании стрела провисания нитей варьировалась в пределах 1/10–1/40 пролета. Модуль упругости материала стенок труб равен $2,1 \cdot 10^7$ Н/см².

Ниже приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния нитей при различной стреле провисания и жесткости на изгиб при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис. 10.1–10.4).

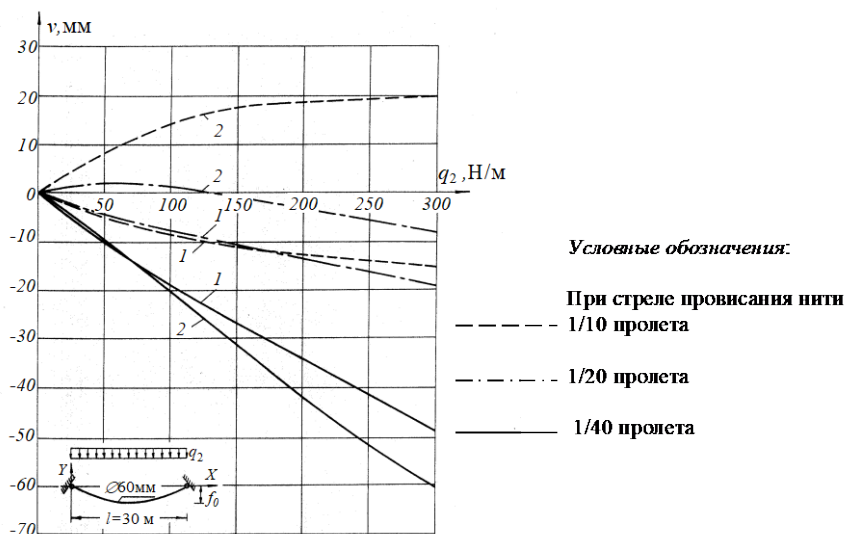


Рис. 10.1. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:
 1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

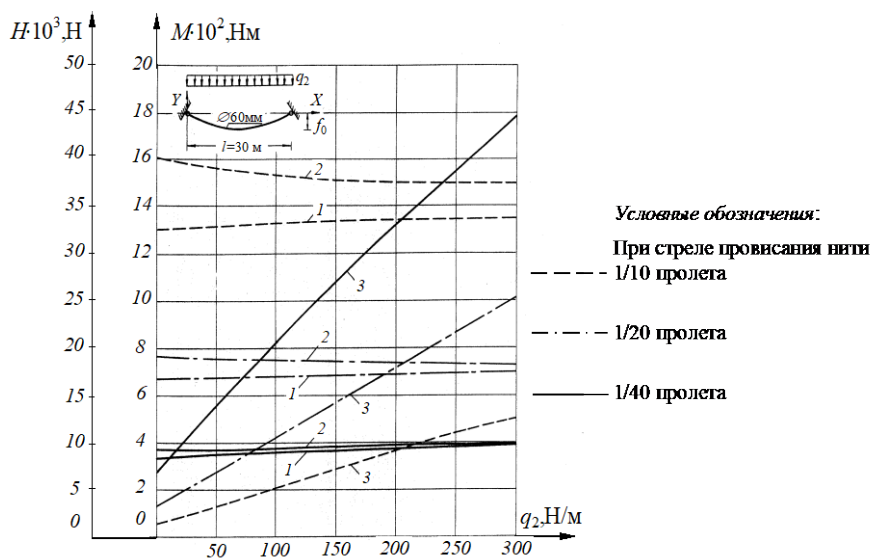


Рис. 10.2. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 – изгибающий момент в четверти пролета;
2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

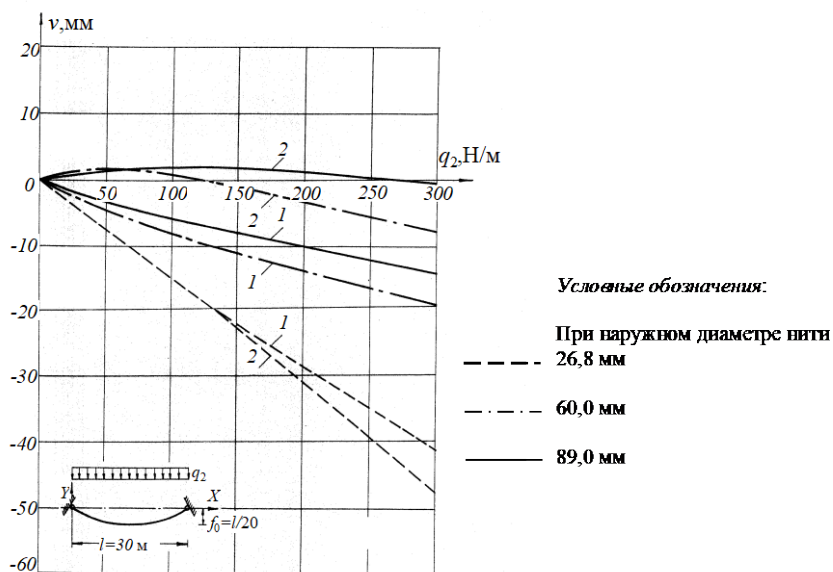


Рис. 10.3. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

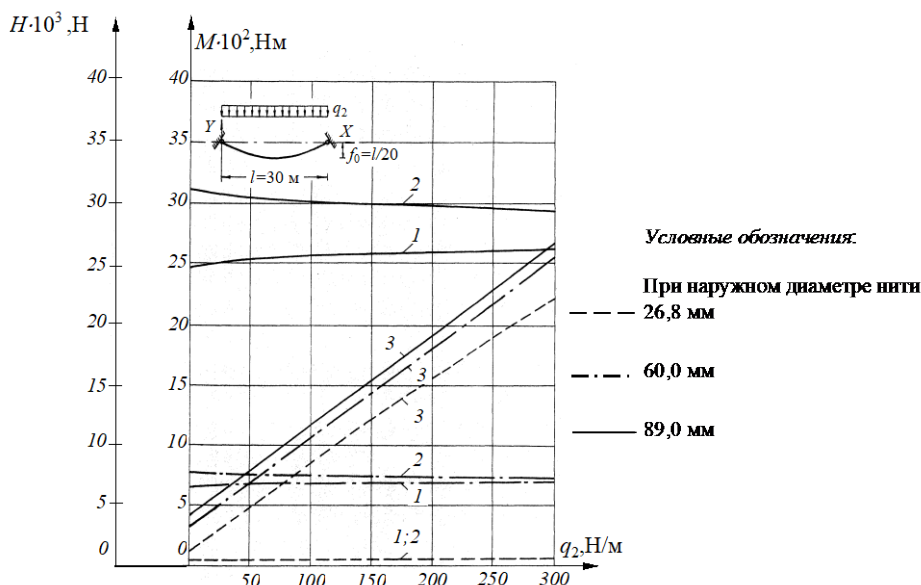


Рис. 10.4. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 – изгибающий момент в четверти пролета;
2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

Из рис. 10.1 видно, что изменение стрелы провисания существенно сказывается не только на значениях вертикальных перемещений нити, но и на их направлении. С увеличением стрелы провисания отрицательные перемещения нити уменьшаются, а в середине пролета даже становятся положительными. Если при стреле провисания $1/40$ пролета нить перемещается вниз как в четверти, так и в середине пролета при всех рассмотренных значениях интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки, то при стреле провисания $1/20$ пролета нить в середине пролета перемещается вниз при значении интенсивности дополнительной нагрузки более 130 Н/м . При меньшей дополнительной нагрузке нить в середине пролета перемещается вверх. При стреле провисания $1/10$ пролета нить в середине пролета перемещается вверх при всех рассмотренных значениях интенсивности дополнительной нагрузки, причем с увеличением интенсивности дополнительной нагрузки положительные перемещения нити в середине пролета также увеличиваются. При увеличении стрелы провисания нити с $1/40$ до $1/20$ пролета (при интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) отрицательные перемещения нити в середине пролета уменьшаются в $7,4$ раза, а в четверти пролета – в $2,5$ раза. При увеличении стрелы провисания с $1/20$ до $1/10$ пролета отрицательные перемещения нити в четверти пролета уменьшаются в $1,3$ раза, а в середине пролета изменяют знак.

Такой характер деформирования нити конечной жесткости можно объяснить тем, что при увеличении стрелы кривая провисания нити все более отличается от квадратной параболы, а дополнительная равномерно распреде-

ленная нагрузка, приближая форму нити к параболическому очертанию, способствует приподниманию нити в середине пролета и опусканию в четвертях.

Изменение усилий, действующих в нити, связано с изменением стрелы провисания почти прямо пропорциональной зависимостью (см. рис. 10.2). Так, увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/20$ пролета приводит к уменьшению распора и увеличению изгибающих моментов в четверти и середине пролета в 1,8 раза. При дальнейшем увеличении стрелы провисания с $1/20$ до $1/10$ пролета происходит уменьшение распора и увеличение изгибающих моментов в четверти и середине пролета в 2 раза. При увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки происходит выравнивание значений изгибающих моментов в четверти и середине пролета. Выравнивание изгибающих моментов объясняется приближением формы кривой провисания нити под нагрузкой к параболическому очертанию.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки близка к линейной. При этом увеличение интенсивности нагрузки в 6 раз (с 50 до 300 Н/м) вызывает увеличение распора в 3,2 раза при стреле провисания $1/40$ пролета, в 3,7 раза – при стреле провисания $1/20$ пролета и в 3,9 раза – при стреле провисания $1/10$ пролета. При этом при увеличении распора действующий в нити изгибающий момент практически не меняется.

Влияние жесткости нити на ее деформативность показано на рис. 10.3. Как и стрела провисания, жесткость нити влияет не только на перемещения, но и на их направление. С увеличением жесткости отрицательные перемещения нити в четверти и середине пролета уменьшаются. Так, при увеличении наружного диаметра нити с 26,8 до 60,0 мм (и интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) отрицательные перемещения в четверти пролета уменьшаются в 2,2 раза, а в середине – в 5,8 раза. При увеличении наружного диаметра с 60,0 до 89,0 мм уменьшение отрицательных перемещений нити в четверти и середине пролета составило соответственно 1,4 и 16,2 раза.

Кривые изменения распора и изгибающих моментов для нитей различной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки показаны на рис. 10.4. Зависимость распора от интенсивности дополнительной нагрузки близка к линейной. При этом приращение распора во всех трех образцах при увеличении интенсивности нагрузки от 0 до 300 Н/м близко к одному значению. С увеличением жесткости нити увеличиваются действующие в ней изгибающие моменты. Так, изгибающие моменты в нити наружным диаметром 89,0 мм (при интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) превышают изгибающие моменты в нити наружным диаметром 60,0 мм в 4 раза. В свою очередь, моменты в нити наружным диаметром 60,0 мм больше моментов в нити наружным диаметром 26,8 мм в 13 раз. При увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки происходит выравнивание действующих в нити изгибающих моментов.

На рис. 10.5–10.8 показаны зависимости перемещений нити и действующих в ней усилий при различной стреле провисания и жесткости нити от

дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета.

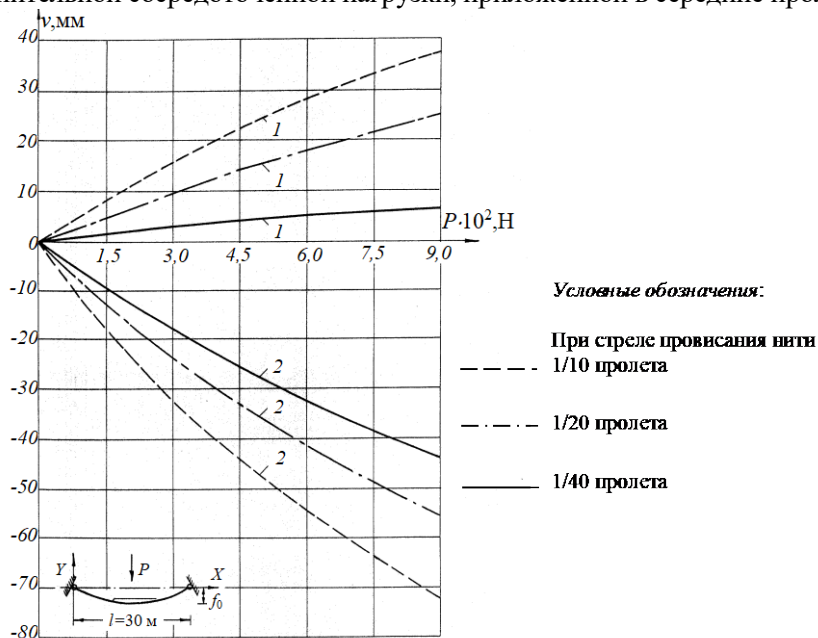


Рис. 10.5. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

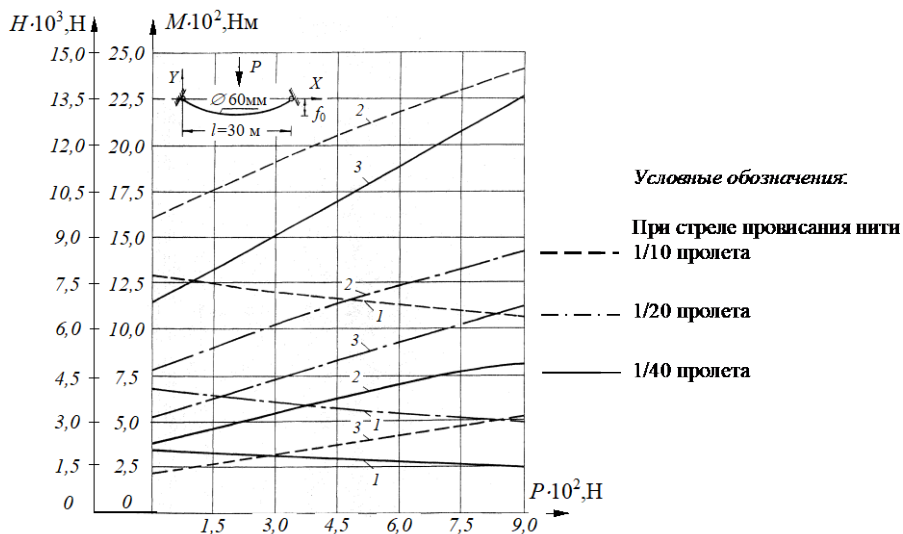


Рис. 10.6. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – изгибающий момент в четверти пролета;

2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

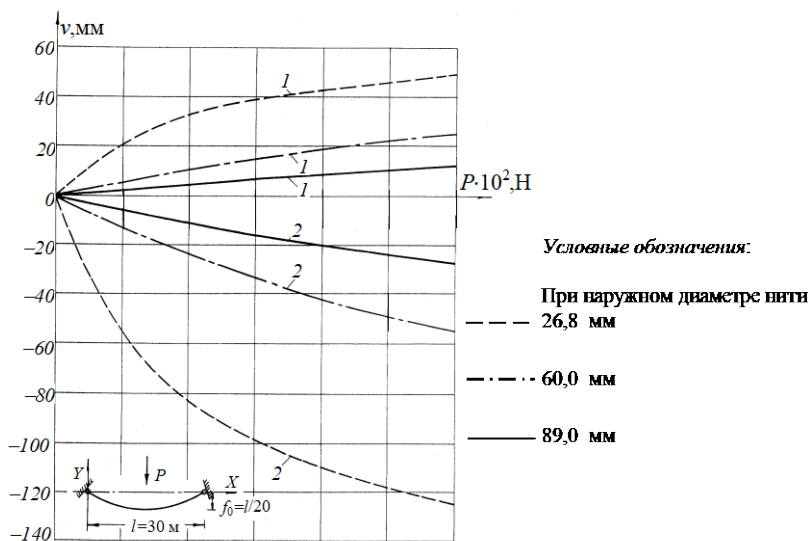


Рис. 10.7. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

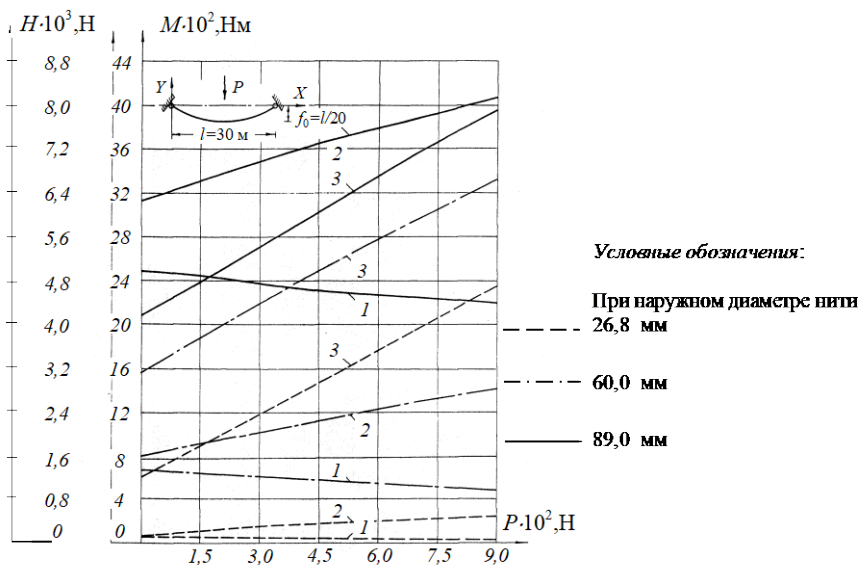


Рис. 10.8. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – изгибающий момент в четверти пролета;

2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

Из рис. 10.5 видно, что перемещения нити при разных стрелах провисания имеют одинаковый характер: в середине пролета нить резко опускается, а в четверти пролета – поднимается. С увеличением сосредоточенной силы увеличиваются перемещения как в четверти, так и в середине пролета нити. Так, при увеличении сосредоточенной силы со 150 до 900 Н перемещения нити при стреле провисания $1/40$ пролета увеличились в четверти пролета в 4,1 раза, при стреле провисания $1/20$ пролета – в 5,3 раза и при стреле провисания $1/10$ пролета – в 5 раз. В середине пролета перемещения увеличиваются в 4,5 раза при всех стрелах провисания. Увеличение стрелы провисания при постоянном значении сосредоточенной нагрузки также приводит к увеличению перемещений, несмотря на то, что при этом уменьшаются перемещения, вызванные упругими деформациями нити. Так, при увеличении стрелы провисания с $1/40$ до $1/10$ пролета (при сосредоточенной нагрузке 900 Н) перемещения нити в четверти пролета увеличиваются в 5,7 раза, а в середине пролета – в 1,6 раза. Такое явление деформации нити конечной жесткости можно объяснить большой кинематической податливостью нити, т.е. изменением формы ее равновесия.

Зависимости усилий, действующих в нити, от сосредоточенной нагрузки показаны на рис. 10.6. С увеличением сосредоточенной силы увеличение распора в нити при всех стрелах провисания растет почти линейно. Изгибающие моменты, действующие в нити в точке приложения сосредоточенной нагрузки, значительно увеличиваются. Они более чем в 2 раза превышают изгибающие моменты, действующие в четверти пролета нити. С увеличением сосредоточенной силы происходит увеличение изгибающих моментов в середине и уменьшение в четверти пролета. С уменьшением стрелы провисания изгибающие моменты уменьшаются. Так, уменьшение стрелы провисания с $1/10$ до $1/20$ пролета приводит к уменьшению изгибающих моментов в четверти и середине пролета соответственно в 4,3 и 3 раза.

На рис. 10.7 изображены зависимости вертикальных перемещений при различных жесткостях нити от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета. Как видно из рис. 10.7, жесткость нити влияет только на перемещения, направление их остается постоянным; в четверти пролета нить перемещается вверх, а в середине – вниз. Наибольшие перемещения получает нить наружным диаметром 26,8 мм. Они превышают перемещения нити наружным диаметром 60,0 мм в 1,9–2,2 раза, а перемещения нити наружным диаметром 89,0 мм – в 4,1–4,7 раза.

Влияние жесткости нити на возникающие в ней усилия при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета, показано на рис. 10.8, откуда видно, что жесткость нити почти не влияет на возникающий в ней распор. Так, при увеличении сосредоточенной силы от 0 до 900 Н распор увеличивается на 3550 Н для всех рассматриваемых образцов.

Большее влияние оказывает жесткость нити на изгибающие моменты и на отношения моментов в середине пролета к моментам в четверти пролета. С увели-

чением жесткости нити это отношение уменьшается. Так, если для нити наружным диаметром 26,8 мм момент в середине пролета превышает момент в четверти пролета в 17 раз, то для нити наружным диаметром 60,0 мм это превышение составляет 2,8 раза, а для нити наружным диаметром 89,0 мм – 1,9 раза.

Результаты исследования напряженно-деформированного состояния нитей при различной стреле провисания и жесткости на изгиб при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета, показаны на рис. 10.9–10.12.

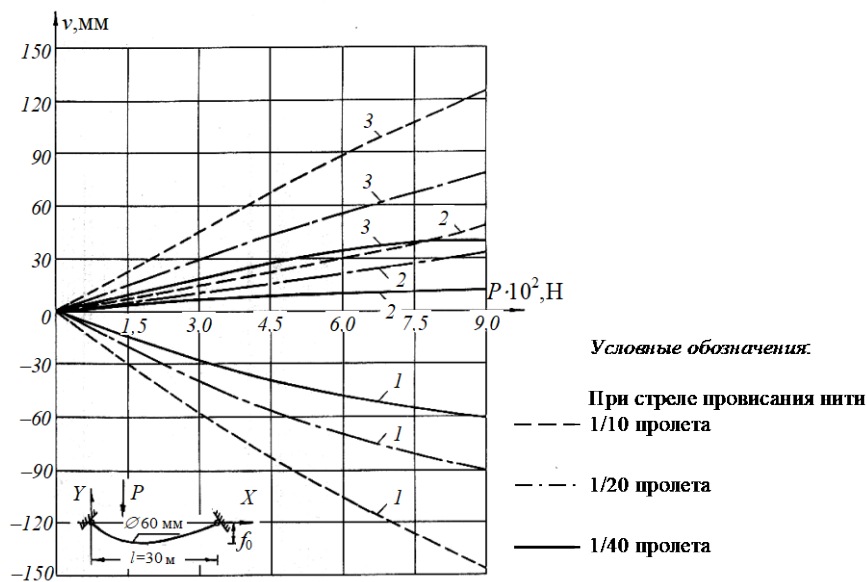


Рис. 10.9. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной четверти пролета:
1 – в загруженной четверти пролета; 2 – в середине пролета;
3 – в незагруженной четверти пролета

Несимметричная нагрузка сильно влияет на характер деформирования нитей конечной жесткости. На рис. 10.9 построены графики вертикальных перемещений нити при различных стрелах провисания. Из рис. 10.9 видно, что нить в загруженной четверти пролета резко опускается вниз, а в середине и незагруженной четверти пролета – поднимается вверх. Значения отрицательных перемещений в 2 раза, а положительных – в 3 раза превосходят значение соответствующих перемещений нити, находящейся под действием дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета. Перемещения нити с увеличением стрелы провисания увеличиваются. Так, при увеличении стрелы провисания с 1/40 до 1/10 пролета перемещения нити в загруженной четверти пролета увеличиваются в 2,5 раза, а в середине и незагруженной четверти пролета – соответственно в 3,8 и 3,1 раза. При этом перемещения нити в незагруженной четверти пролета превышают перемеще-

ния в середине пролета в 2,5 раза при всех стрелах провисания.

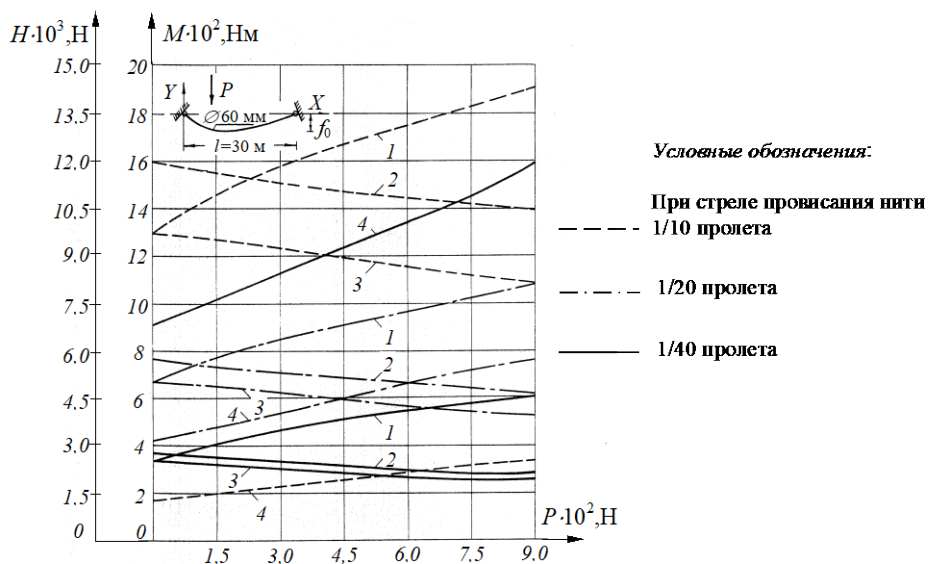


Рис. 10.10. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – изгибающий момент в нагруженной четверти пролета; 2 – то же, в середине пролета; 3 – то же, в незагруженной четверти пролета; 4 – распор

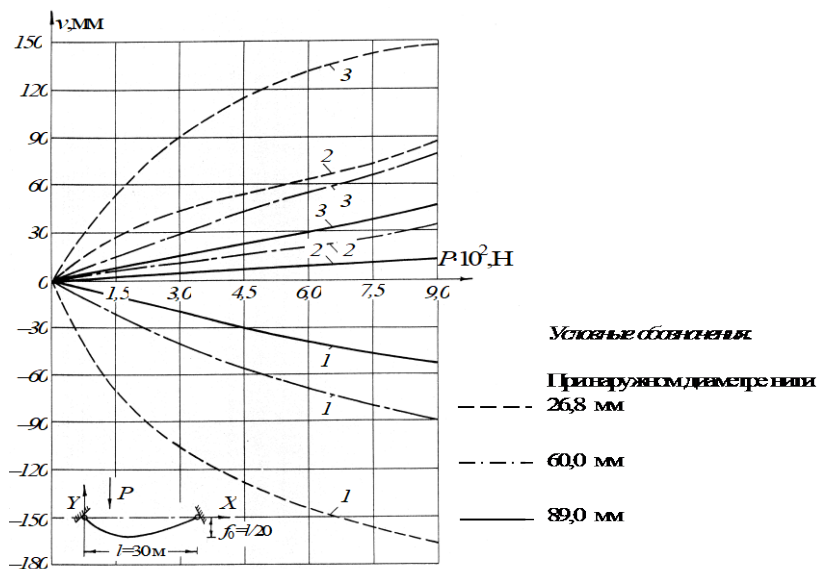


Рис. 10.11. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – в нагруженной четверти пролета; 2 – в середине пролета;

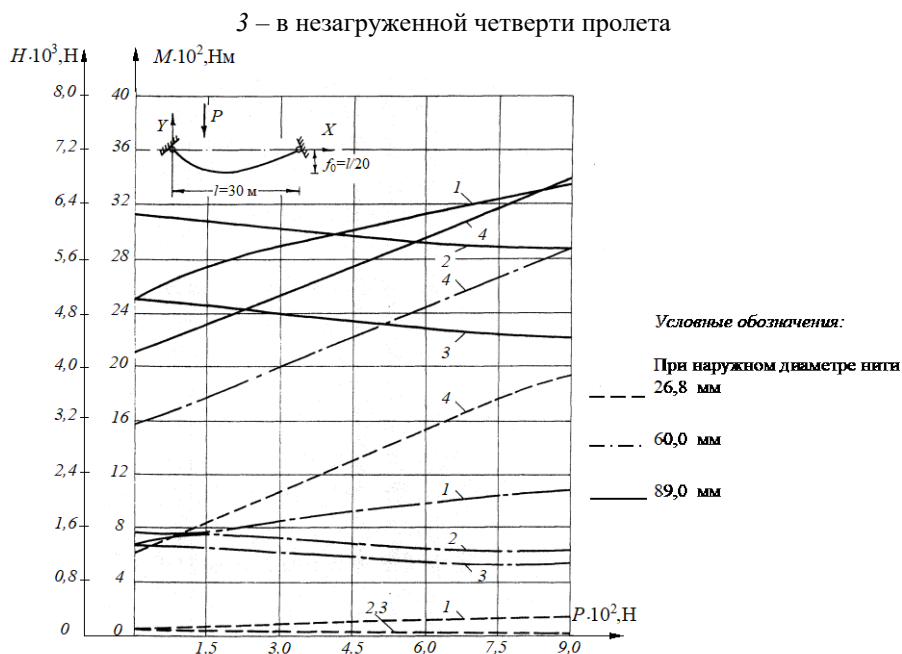


Рис. 10.12. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – изгибающий момент в загруженной четверти пролета; 2 – то же, в середине пролета; 3 – то же, в незагруженной четверти пролета; 4 – распор

Графики усилий, действующих в нити конечной жесткости, при различных стрелах провисания построены на рис. 10.10. Зависимость распора от дополнительной сосредоточенной нагрузки при всех стрелах провисания близка к линейной. При этом распор достигает несколько меньшего значения, чем в нити под действием симметричной сосредоточенной нагрузки. Распор уменьшается примерно на 20% при всех стрелах провисания.

При увеличении сосредоточенной нагрузки происходит увеличение изгибающих моментов в загруженной четверти пролета и уменьшение изгибающих моментов в середине и незагруженной четверти пролета. Так, при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н момент в загруженной четверти пролета увеличивается в 1,6 раза, а в середине и незагруженной четверти пролета уменьшается в 1,2 раза. Следует отметить, что при несимметричной нагрузке максимальные значения изгибающих моментов меньше, чем в нити под действием симметричной сосредоточенной нагрузки (при одном и том же значении сосредоточенной силы). Изгибающие моменты уменьшаются примерно на 30% при всех стрелах провисания.

Влияние жесткости нити на перемещения и возникающие в ней усилия при действии сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета, показано на рис. 10.11 и 10.12. Из рис. 10.11 видно, что характер деформиро-

вания для нитей различной жесткости одинаков: в загруженной четверти пролета нить опускается вниз, а в середине и в незагруженной четверти пролета – поднимается вверх. Уменьшение жесткости нити приводит к увеличению перемещений. Так, перемещения нити наружным диаметром 26,8 мм превышают перемещения нити наружным диаметром 60,0 мм в 1,8–2,6 раза, а перемещения нити наружным диаметром 89,0 мм – в 3,2–6,9 раза. По сравнению с нитью, находящейся под действием дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета, отрицательные перемещения нити возрастают в 1,4–2,0 раза, а положительные – в 3,0–3,9 раза. Причем с увеличением жесткости нити разность между перемещениями возрастает.

Зависимость распора от сосредоточенной нагрузки близка к линейной (см. рис. 10.12). Причем жесткость нити почти не влияет на распор. Так, при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н распор во всех нитях увеличился на 2600 Н.

Более существенно влияет жесткость нити на изгибающий момент. Так, при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н изгибающий момент в загруженной четверти пролета увеличился в 3,2 раза для нити наружным диаметром 26,8 мм, в 1,6 раза для нити наружным диаметром 60,0 мм и в 1,3 раза для нити наружным диаметром 89,0 мм. Одновременно происходит уменьшение изгибающего момента в середине и незагруженной четверти пролета в 2,8 и 2,1 раза для нити наружным диаметром 26,8 мм, в 1,3 раза для нити наружным диаметром 60,0 мм и в 1,1 раза для нити наружным диаметром 89,0 мм.

Анализ данных численных исследований позволяет сделать выводы:

характер дополнительной нагрузки заметно влияет на деформативность нитей конечной жесткости. Если при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки нить перемещается в вертикальной плоскости в основном за счет упругих деформаций, то при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине и в особенности в четверти пролета, перемещения нити в вертикальной плоскости происходят в основном за счет изменения формы кривой провисания;

дополнительная равномерно распределенная нагрузка вызывает значительное увеличение распора при незначительном изменении изгибающего момента. Причем изгибающий момент, действующий в четверти пролета увеличивается, а в середине пролета – уменьшается;

дополнительная сосредоточенная нагрузка при незначительном увеличении распора вызывает значительное увеличение изгибающих моментов, действующих в сечениях нити, расположенных непосредственно под нагрузкой. Причем изгибающие моменты быстро уменьшаются при удалении от места приложения нагрузки;

удаление дополнительной сосредоточенной нагрузки от середины пролета приводит к увеличению перемещений и уменьшению изгибающих моментов и распора в нити;

жесткое закрепление концов нити на опорах, мало влияя на общее

напряженно-деформированное состояние нити, резко уменьшает перемещения и увеличивает изгибающие моменты в приопорных участках длиной до 0,05 пролета. Влияние жесткого закрепления увеличивается с увеличением жесткости нити и стрелы ее провисания;

увеличение стрелы провисания увеличивает перемещения и действующие в нити изгибающие моменты при одновременном уменьшении распора;

жесткость нити практически не сказывается на распоре. С увеличением жесткости уменьшаются перемещения и увеличиваются действующие в нити изгибающие моменты;

при действии на нить дополнительной равномерно распределенной нагрузки определенной интенсивности в середине пролета наблюдаются положительные перемещения;

горизонтальные перемещения нити в плоскости ее провисания зависят, в основном, от изменения формы кривой равновесия и достигают максимального значения при действии несимметричной сосредоточенной нагрузки.

§ 10.2. Работа нити конечной жесткости за пределом упругости

Исследование напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости за пределом упругости проводилось на примере нити с идеальным поперечным сечением пролетом 30 м с шарнирным и жестким закреплением концов на опорах. Площадь поперечного сечения нити составляла $F = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, а момент инерции $I = 8,64 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$. При исследовании стрела провисания нити варьировалась в пределах 1/10–1/40 пролета, площадь поперечного сечения оставалась постоянной, а жесткость на изгиб изменялась за счет увеличения или уменьшения высоты профиля. Рассматривалась работа нитей из идеального упруго-пластического материала ($\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$) и из идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением. В связи с тем, что равномерно распределенная нагрузка является самой распространенной среди нагрузок, действующих на висячие системы, то наиболее подробно работа нитей конечной жесткости за пределом упругости изучалась именно при действии этой нагрузки.

Рассмотрим сначала работу нитей из идеального упруго-пластического материала. Результаты исследования напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости при различных стрелах провисания показаны на рис. 10.13.

Из рис. 10.13 видно, что изменение стрелы провисания существенно сказывается на величине и характере перемещений нити на всем интервале изменения дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, при минимальной из принятых стрел провисания $f_0 = 1/40$ перемещения нити в четверти и в середине пролета качественно однородны и близки по значению. Увеличение стрелы провисания с 1/40 до 1/20 пролета приводит к уменьшению перемещений нити приблизительно в 2–2,5 раза. Причем в начале упругой стадии работы, как уже отмечалось ранее, в середине пролета нити

наблюдаются небольшие положительные перемещения.



Рис. 10.13. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

Наиболее ярко нелинейность работы нитей конечной жесткости видна при работе нити со стрелой провисания 1/10 пролета. Здесь практически на всем интервале изменения интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки ($0 \leq q_2 \leq 0,85q_{np}$) перемещения нити в середине пролета положительны, причем максимальное их значение достигает весьма значительной величины $v = 39$ мм, что составляет 1/770 пролета. И только на самом последнем этапе, когда интенсивность дополнительной нагрузки близка к предельной ($0,85q_{np} \leq q_2 \leq q_{np}$) и пластические деформации охватывают практически всю нить, она в середине пролета начинает перемещаться вниз. Наибольшее значение этого прогиба составляет всего $v = 13$ мм, что в 3 раза меньше полученного ранее нитью положительного перемещения.

Весьма характерно также в этом случае поведение нити в четверти пролета. До значения интенсивности дополнительной нагрузки, равного $q_2 = 0,6q_{np}$, прогибы в этом сечении определяются в основном кинематическими составляющими перемещений, связанными с изменением формы кривой провисания нити – от заданной к параболической. Об этом свидетельствует тот факт, что при непрерывном возрастании интенсивности дополнительной нагрузки прогибы нити вначале увеличиваются, а затем начинают уменьшаться. И только после того, как форма нити при $q_2 = 0,6q_{np}$ стабилизируется, при дальнейшем увеличении нагрузки начинается равномерное увеличение перемещений, максимальное значение которых достигает

$\nu = 70$ мм или $1/430$ пролета.

Влияние жесткости нити на ее деформативность при различных значениях параметра жесткости $u = 0,5l(H_{np}/EI)^{1/2}$ показано на рис. 10.14.



Рис. 10.14. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Из рис. 10.14 видно, что жесткость нитей из идеального упруго-пластического материала заметно влияет на их работу под нагрузкой. Так, при прочих равных условиях нити с большим параметром жесткости оказываются более деформативны, чем нити с меньшим параметром жесткости. При этом увеличение квадрата параметра u от 1 до 5 приводит к увеличению безразмерного прогиба середины пролета нити в 1,3 раза, а увеличение квадрата параметра жесткости от 1 до 25 – только в 2,1 раза. В свою очередь, нити с меньшим значением параметра u быстрее достигают стадии полной пластичности и по своей работе становятся подобны абсолютно гибким нитям.

Следует также отметить, что учет в расчетах возможности пластической работы материала приводит к значительному занижению воспринимаемых нитями нагрузок. В данном случае, например, предельная нагрузка для разных кривых от 2 до 3,5 раза превышает нагрузку, соответствующую появлению текучести в нити конечной жесткости.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при разных стрелах провисания близка к линейной (рис. 10.15).

При этом увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/20$ пролета вызывает уменьшение распора в нити в 1,4 раза, а увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/10$ пролета – в 2,2 раза. Соответственно увеличивается воспри-

нимаемая нитью предельная нагрузка: в первом случае в 1,6 раза, во втором – в 2,6 раза. Отметим также, что нелинейный характер представленных кривых проявляется сильнее в нитях с малыми стрелами провисания.

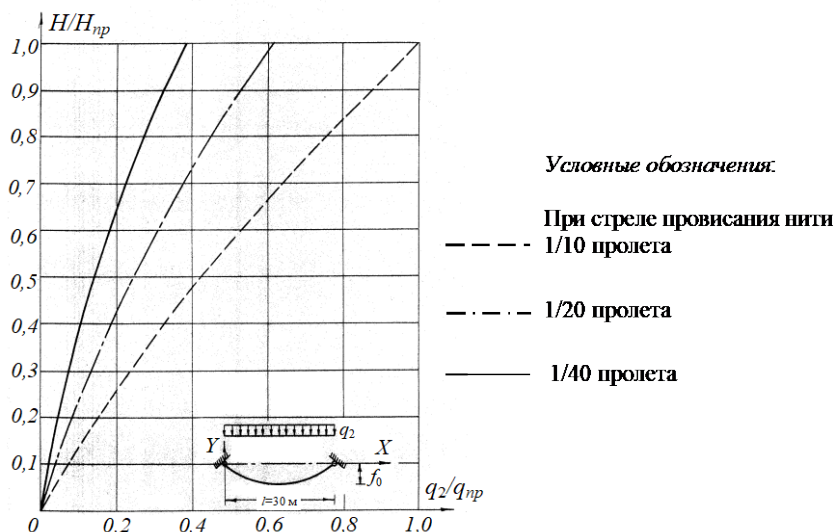


Рис. 10.15. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Кривые изменения изгибающих моментов в середине пролета упруго-пластических нитей конечной жесткости изображены на рис. 10.16.

Из рис. 10.16 видно, что как жесткость нити на изгиб, так и стрела ее провисания заметно влияют на изгибающие моменты. При увеличении квадрата параметра жесткости от 5 до 15 изгибающие моменты уменьшаются в 2 раза. При дальнейшем увеличении параметра u^2 от 15 до 25 изгибающие моменты также уменьшаются в 2 раза, что свидетельствует о некотором возрастании интенсивности уменьшения изгибающих моментов. Причем такой характер изменения изгибающих моментов в зависимости от параметра жесткости характерен для всех рассмотренных стрел провисания нити.

Из анализа зависимости кривых на рис. 10.16 также следует, что жесткость нити на изгиб влияет не только на значения моментов, но и на характер их изменения при увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, при $u^2 = 5$ уменьшение изгибающих моментов в нити происходит практически на всем интервале увеличения интенсивности дополнительной нагрузки. При $u^2 = 15$ и 25 при увеличении дополнительной нагрузки от 0 до $(0,6 - 0,7)q_{нр}$ изгибающие моменты остаются почти постоянными и только на последнем участке интервала при $q_2 > 0,7q_{нр}$, т. е. когда в

нити развиваются значительные области пластического деформирования, резко уменьшаются. При этом они перестают влиять на форму кривой провисания нити конечной жесткости, которая становится подобной гибкой нити.

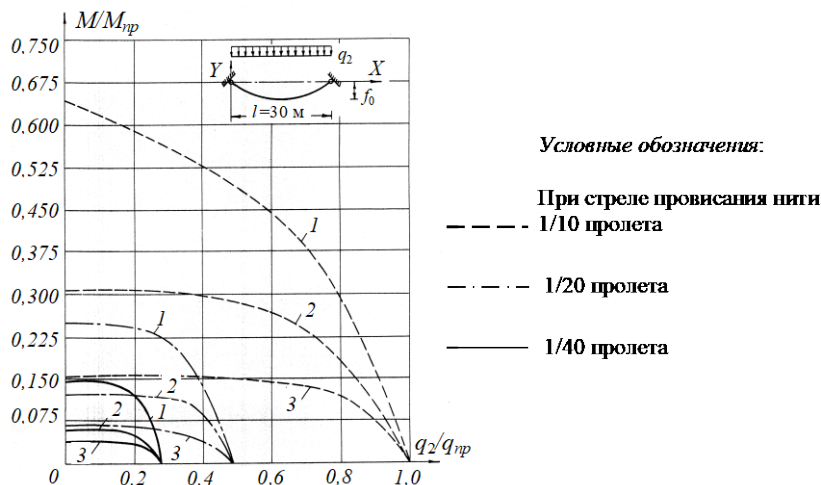


Рис. 10.16. Зависимость изгибающего момента в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

$$1 - u^2 = 5; 2 - u^2 = 15; 3 - u^2 = 25$$

Стрела провисания нити конечной жесткости влияет только на действующие в ней изгибающие моменты, оставляя неизменной качественную картину их изменения. Например, при уменьшении стрелы провисания с 1/10 до 1/20 пролета действующие в нити изгибающие моменты уменьшаются в 2,8 раза. В свою очередь, моменты в нити со стрелой провисания 1/20 пролета превышают моменты в нити со стрелой провисания 1/40 пролета в 1,6 раза, т. е. интенсивность их уменьшения несколько замедляется. Отметим, что последнее замечание справедливо как для упругих, так и для упруго-пластических стадий работы нити.

На рис. 10.17 показана зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при различных значениях жесткости нити $u = 0,5l(H_{np}/\alpha EI)^{1/2}$, где коэффициент α по-прежнему представляет собой отношение модулей упрочнения и упругости, т. е. $\alpha = E_0/E$. На рис. 10.17 линии со значениями $u^2 = 1, 5, 15, 25$ и 50 построены только до момента начала упрочнения материала, а график со значением $u^2 = 3$ охватывает всю площадь работы нити. Причем каждая из кривых этого графика для последней стадии изгиба нити (когда начинается упрочнение материала) соответствует определенному модулю упрочнения.

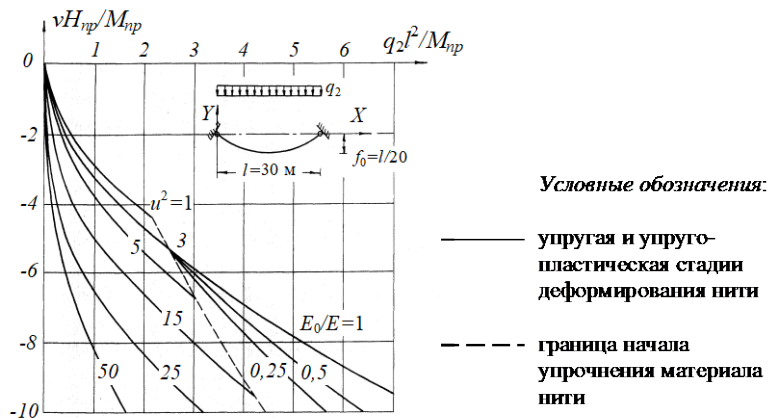


Рис. 10.17. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Из анализа полученных результатов и сопоставления кривых графиков рис. 10.14 и 10.17 видно, что вплоть до момента начала упрочнения материала нити, какая-либо заметная разница в характере деформирования нитей конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала и материала с упрочнением отсутствует. Как и ранее, интенсивность изменения перемещений нити достигает наибольшего значения, когда она входит в пластическую стадию. В дальнейшем с увеличением нагрузки приращение прогиба уменьшается.

Следует также отметить, что при нагрузке, превышающей предельную для нитей из идеального упруго-пластического материала, напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости практически полностью определяется действующим в них распором, поскольку изгибающие моменты при этом весьма незначительны. Кроме того из рис. 10.17 видно, что с уменьшением модуля упрочнения материала характер деформирования нитей все более точно соответствует работе нитей конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала.

Характер изменения остаточных прогибов для нити с параметром жесткости $u^2 = 100$ при разгрузке показан на рис. 10.18.

Как уже отмечалось выше, при данном соотношении геометрических размеров нить в предельном состоянии имеет максимальные прогибы в четвертях пролета. В середине пролета перемещения нити незначительны. При снятии нагрузки нить конечной жесткости ввиду работы ее поперечных сечений в пластической стадии не возвращается в исходное состояние и ее ось остается деформированной. В этом случае распределение остаточных прогибов по пролету нити в какой-то мере остается аналогичным распределению прогибов при активном нагружении: их максимальные значения по-прежнему наблюдаются в чет-

вертях пролета и достигают $v = 42$ мм. При этом стрела провисания нити конечной жесткости после снятия нагрузки оказывается даже меньше, чем при действии начальной нагрузки, поскольку в середине пролета возникают положительные перемещения $v = 23$ мм. Отметим также, что, как следует из рис. 10.18, поведение нити конечной жесткости не только при активном нагружении, но и при разгрузке носит существенно нелинейный характер.

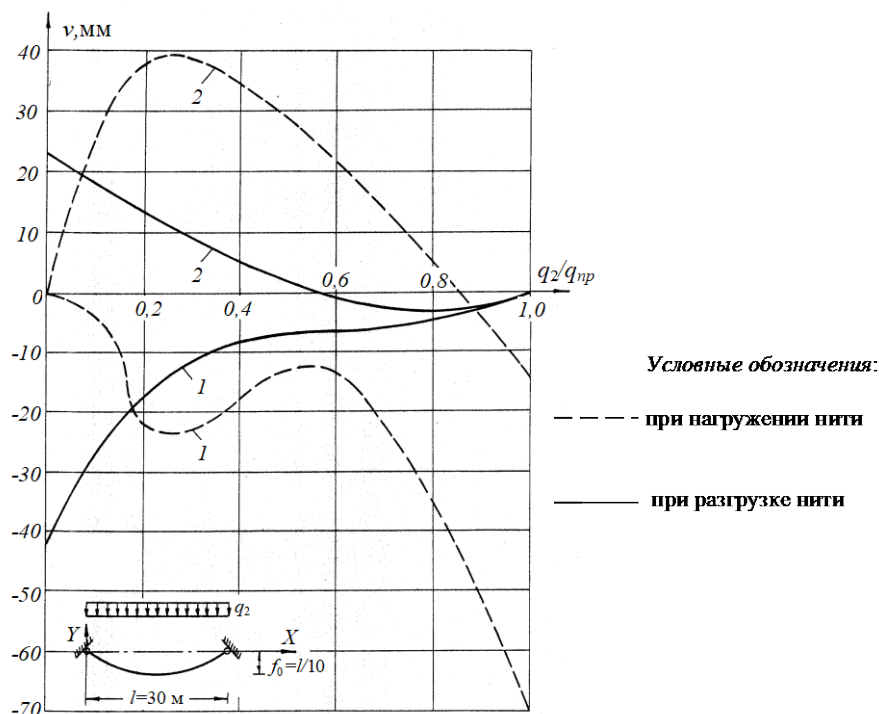


Рис. 10.18. Зависимость перемещений упруго-пластической нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при нагружении и разгрузке:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

Анализ данных выполненных численных исследований позволяет сделать следующие выводы:

стрела провисания не только в упругой, но и в упруго-пластической стадиях деформирования нити конечной жесткости оказывает существенное влияние на перемещение нити. Если при уменьшении стрелы увеличиваются прогибы в середине, то при ее увеличении – в четвертях пролета. При этом в зависимости от стрелы провисания с увеличением нагрузки интенсивность прогибов может увеличиваться вплоть до предельного состояния нити, а может и уменьшаться;

увеличение стрелы провисания вызывает значительное уменьшение распора в нити и, наоборот, при уменьшении стрелы провисания распор в нити увеличивается. Причем данная зависимость сохраняется при любом значении дополнительной нагрузки;

жесткость на изгиб заметно сказывается на перемещениях нити только до момента, пока по ее длине еще не развились значительные области пластического деформирования. При развитых пластических деформациях влияние жесткости на прогибы несколько уменьшается, однако при этом выясняется, что нить с большей жесткостью на изгиб является более деформативной, чем нить с меньшей жесткостью;

характер изменения изгибающих моментов в нити конечной жесткости определяется не столько приложенной нагрузкой, сколько размером стрелы провисания и жесткостью на изгиб. С увеличением нагрузки и ростом пластических деформаций изгибающие моменты в нити уменьшаются, а при приближении нагрузки к предельному значению – стремятся к нулю. При этом нить конечной жесткости становится по характеру своей работы подобна гибкой нити;

жесткое закрепление концов нити на опорах сколь-нибудь заметное влияние оказывает на напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости только в начальный период нагружения, когда она работает в упругой стадии и то лишь в случаях большой жесткости на изгиб и значительной стрелы провисания. При увеличении дополнительной нагрузки характер деформирования нити с жестким закреплением аналогичен характеру деформирования нити с шарнирным опиранием;

пластические деформации, вызывая перераспределение и выравнивание напряжений в нити конечной жесткости, значительно повышают ее несущую способность, которая может в 3,5 и даже 10 раз превышать нагрузку, соответствующую моменту появления текучести;

влияние упрочнения материала сказывается только на заключительном этапе деформирования, когда нагрузка близка или превышает предельную для нитей из идеального упруго-пластического материала. До этого момента существенной разницы в работе этих двух групп нитей не отмечается. Кроме того учет упрочнения существенно (более чем в 5 раз) повышает предельную нагрузку по сравнению с нитями, выполненными из идеального упруго-пластического материала;

в случае снятия нагрузки нить не возвращается в исходное состояние и ее ось остается деформированной, причем оказывается расположенной выше кривой равновесия при действии начальной нагрузки. В связи с этим разгрузка приводит к появлению остаточных перемещений и возникновению в нити состояния самонапряжения.

§ 10.3. Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости при симметричных и несимметричных нагружениях

С целью изучения влияния характера и интенсивности дополнительной нагрузки, жесткости на изгиб и кручение, раскрепления нити связями в горизонтальной плоскости, эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки и установки связей на устойчивость плоской формы деформирования нитей конечной жесткости были проведены численные исследования. При этом исходные данные принимались такими, чтобы работа опытных образцов нитей при значениях дополнительных нагрузок, близких к критическим, была характерна для широкого класса висячих систем.

В качестве объекта исследований принимались нити двутаврового поперечного сечения пролетом 30 м, стрелой провисания $f_0 = l/20$, с расположенными на одном уровне опорами, с шарнирным и жестким закреплением на концах. Площадь поперечного сечения нити составляла $F = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, моменты инерции соответственно в плоскостях наибольшей и наименьшей жесткости – $I_y = 1,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ и $I_z = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$, а полярный момент инерции – $I_d = 8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Модуль упругости материала равен $2,1 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$. Пространственная устойчивость нитей изучалась при действии дополнительных симметричных и несимметричных равномерно распределенных нагрузок. При этом считалось, что в раскрепленных нитях дополнительная нагрузка всегда была приложена в уровне верхнего пояса.

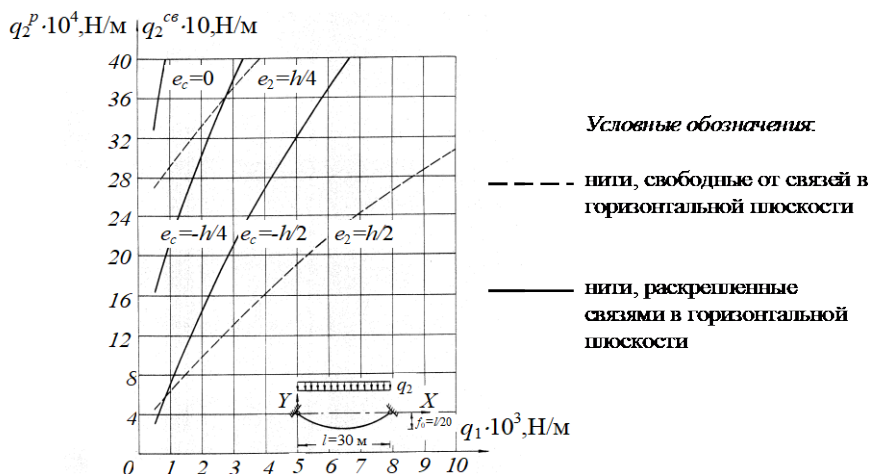


Рис. 10.19. Зависимость между критической дополнительной и начальной равномерно распределенной нагрузками при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

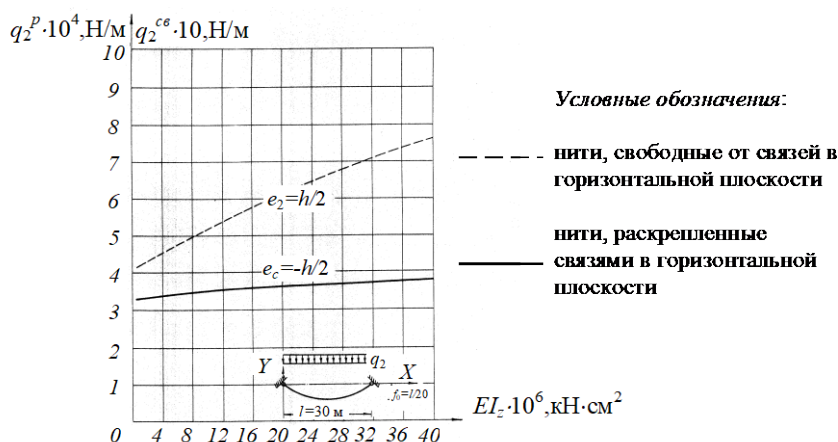


Рис. 10.20. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на изгиб в горизонтальной плоскости при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

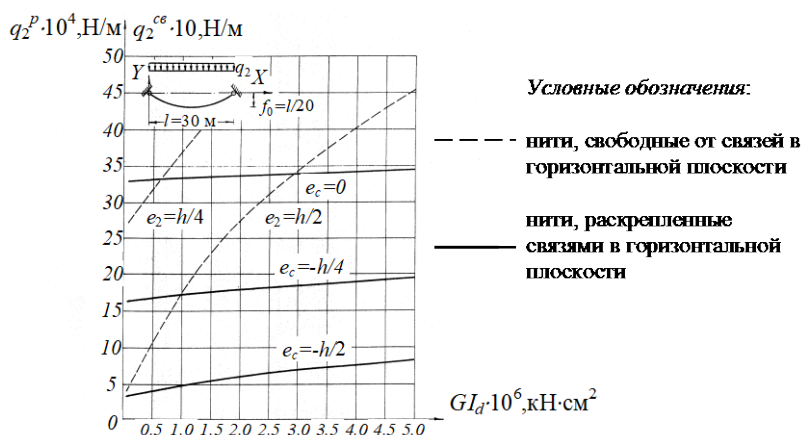


Рис. 10.21. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на кручение при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

На рис. 10.19–10.21 приведены результаты исследования устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости при различных значениях начальной равномерно распределенной нагрузки, жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и жесткости нити на кручение при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету.

Интенсивность начальной равномерно распределенной нагрузки (собственного веса нити) существенно сказывается на критической дополнитель-

ной нагрузке как в свободных от связей в горизонтальной плоскости, так и в раскрепленных связями нитях. При прочих равных условиях это влияние гораздо сильнее проявляется в раскрепленных нитях (см. рис. 10.19). Например, если при увеличении интенсивности начальной нагрузки в 10 раз с 1000 до 10000 Н/м критическая дополнительная равномерно распределенная нагрузка в свободных от связей нитях возрастает в 5,3 раза, то в раскрепленных нитях она увеличивается уже в 9,7 раза. При этом необходимо отметить, что само по себе раскрепление нитей связями в горизонтальной плоскости вызывает рост критической дополнительной нагрузки в 750 раз. Зависимость $q_2 = f(q_1)$, как это видно из рис. 10.19, носит более выраженный нелинейный характер для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости. Для нитей, раскрепленных связями, эта зависимость близка к прямо пропорциональной.

Перемещение уровня раскрепления нити от нижнего пояса к верхнему (т. е. при изменении эксцентриситета установки связей от $e_c = -h/2$ до $e_c = h/2$, где h – высота профиля) вызывает весьма значительный рост интенсивности критической дополнительной нагрузки. Причем эта интенсивность оказывается связанной с эксцентриситетом квадратичной функциональной зависимостью вида $q_2 = f(e_c)$, близкой к гиперболической, кривая которой имеет бесконечную ветвь с асимптотой $e_c = h/2$. Иными словами, при приближении эксцентриситета линии раскрепления нити к верхнему поясу интенсивность критической дополнительной нагрузки неограниченно возрастает. Практически это означает, что при раскреплении нитей конечной жесткости в уровне верхнего пояса устойчивость плоской формы изгиба полностью обеспечена.

Из рис. 10.19 видно также, что понижение уровня приложения дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, оказывает на пространственную устойчивость нитей конечной жесткости такое же воздействие, как и повышение уровня установки связей в раскрепленных нитях. Так, при изменении эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки от верхнего пояса к нижнему дополнительная критическая нагрузка все более возрастает, а при $e_c = -h/2$ стремится к бесконечности. Последнее свидетельствует о том, что при приложении дополнительной нагрузки к нижнему поясу нить устойчивости плоской формы изгиба не теряет.

Увеличение жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки (см. рис. 10.20) вызывает достаточно значительный рост интенсивности критической дополнительной нагрузки для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и практически не сказывается на раскрепленных нитях. Если для свободных от связей нитей увеличение наименьшей жесткости на изгиб в 10 раз (от $4 \cdot 10^6$ до $40 \cdot 10^6$ кН·см²) вызывает увеличение критической дополнительной нагрузки в 1,6 раза, то для раскрепленных нитей – всего в 1,1 раза. Причем повышение уровня связей в раскрепленных нитях и понижение уровня приложения дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приводит к еще более сильному

ослаблению этого влияния, которое в итоге практически полностью исчезает.

Влияние крутильной жесткости нити на интенсивность критической дополнительной нагрузки видно из рис. 10.21. Как и жесткость нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки, жесткость на кручение весьма заметно сказывается на критической дополнительной нагрузке для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и мало влияет на пространственную устойчивость раскрепленных нитей. Об этом свидетельствует то, что при увеличении крутильной жесткости нити в 10 раз (от $0,5 \cdot 10^6$ до $5 \cdot 10^6$ кН·см²) интенсивность критической дополнительной нагрузки для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, увеличивается в 9,2 раза, а для раскрепленных нитей – всего в 1,9 раза. При этом, как и в предыдущем случае (см. рис. 10.21), соответствующее изменение уровня установки связей и приложения внешней нагрузки в раскрепленных и свободных нитях конечной жесткости приводит к уменьшению воздействия крутильной жесткости нити на ее устойчивость плоской формы деформирования.

Результаты исследования пространственной устойчивости нитей конечной жесткости при различных значениях начальной равномерно распределенной нагрузки, жесткости нити на изгиб в горизонтальной плоскости и жесткости нити на кручение при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной на половине пролета, показаны на рис. 10.22–10.24.

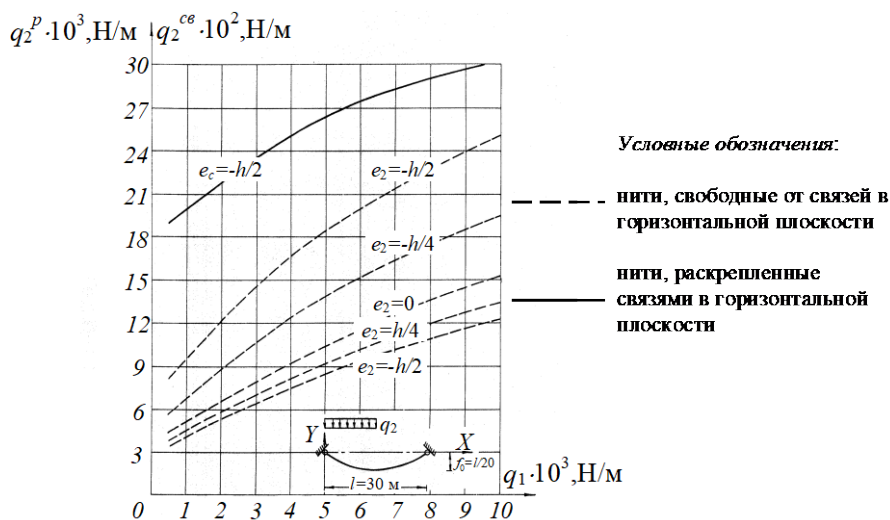


Рис. 10.22. Зависимость между критической дополнительной и начальной равномерно распределенной нагрузками при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

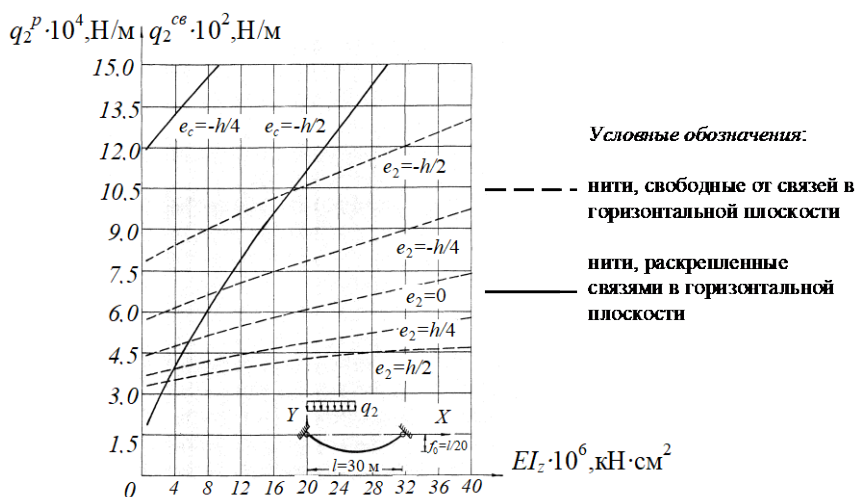


Рис. 10.23. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на изгиб в горизонтальной плоскости при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

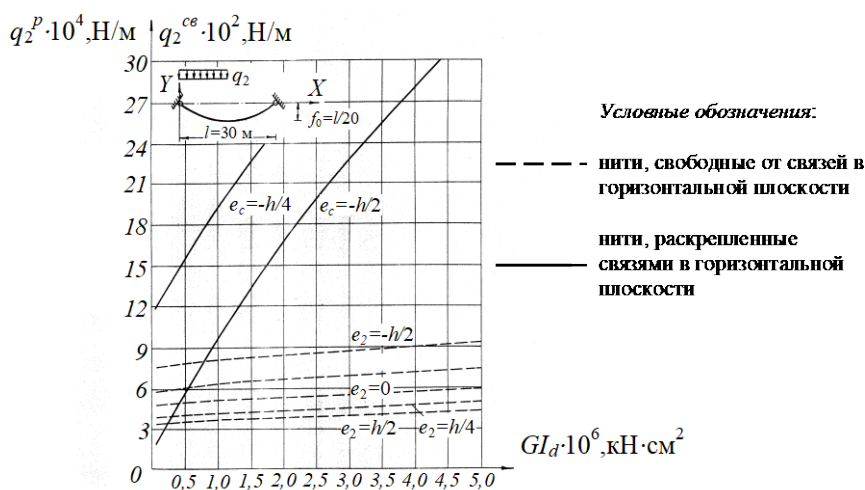


Рис. 10.24. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на кручение при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

Изменение характера дополнительной нагрузки (несимметричная вместо симметричной) приводит к качественно иной работе нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и значительно изменяет количественные показатели потери плоской формы изгиба для раскрепленных нитей. Как показано на рис. 10.22, в этом случае свободные от связей нити конечной жест-

кости теряют пространственную устойчивость не только при приложении внешней нагрузки к верхнему, но и к нижнему поясу. При этом влияние приложенной к нижнему поясу дополнительной нагрузки на деформирование нити оказывается чуть менее значительным, но носит более выраженный нелинейный характер, чем при нагрузке, приложенной к верхнему поясу. Например, при увеличении начальной равномерно распределенной нагрузки в 10 раз от 1000 до 10000 Н/м интенсивность дополнительной критической нагрузки, приложенной к нижнему поясу, увеличивается в 2,6 раза, а приложенной к верхнему поясу – в 3 раза. Заметим также, что по сравнению с рассмотренным ранее симметричным нагружением в данном случае дополнительная критическая нагрузка увеличивается приблизительно в 10 раз. Последнее свидетельствует о более неблагоприятном воздействии симметричного нагружения на висячие системы, свободные от связей в горизонтальной плоскости.

Снижение уровня приложения внешней нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приводит, как и ранее, к повышению интенсивности критической нагрузки (см. рис. 10.22). Однако теперь этот закон выражается не гиперболической, а параболической зависимостью, кривая которой имеет достаточно большой растрвор.

В раскрепленных нитях увеличение начальной нагрузки вызывает более плавное нарастание интенсивности критической дополнительной нагрузки, чем при симметричном нагружении. Так, при увеличении начальной нагрузки в 10 раз от 1000 до 10000 Н/м в данном случае интенсивность критической нагрузки возрастает в 1,6 раза, а при симметричном нагружении – в 9,7 раза. Абсолютная же величина критической дополнительной нагрузки уменьшается при этом в среднем в 1,7 раза, что свидетельствует о более опасном воздействии несимметричного нагружения на раскрепленные висячие системы.

Повышение уровня раскрепления нити от нижнего пояса к верхнему оказывает на работу нитей конечной жесткости такое же воздействие, как и при симметричном нагружении – происходит значительное повышение критической нагрузки. Причем зависимость $q_2 = f(e_c)$ имеет здесь практически тот же гиперболический характер, что и в указанном случае, т. е. при раскреплении нити в уровне верхнего пояса она устойчивости плоской формы изгиба не теряет ни при каких значениях дополнительной нагрузки.

Из рис. 10.23 и 10.24 видно, что несимметричная нагрузка совершенно меняет характер влияния жесткостных параметров нити на ее пространственную устойчивость. Так, если при симметричном нагружении увеличение жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и на кручение вызывает увеличение критической дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и почти не сказывается на раскрепленных нитях, то здесь наблюдается обратная зависимость, а именно: не очень заметное увеличение критической нагрузки в нераскрепленных и значительное ее увеличение в раскрепленных нитях. Это видно из следующего. При увеличении наименьшей

жесткости нити на изгиб (см. рис. 10.23) в 10 раз от $4 \cdot 10^6$ до $40 \cdot 10^6$ кН·см² интенсивность критической нагрузки возрастает для свободных от связей нитей в 1,5 и 1,2 раза при приложении внешней нагрузки соответственно к нижнему и верхнему поясам, а для раскрепленных нитей – уже в 5,2 раза.

Аналогичный характер имеет также зависимость $q_2 = f(GI_d)$. Например, изменение жесткости на кручение (см. рис. 10.24) в 10 раз (от $0,5 \cdot 10^6$ до $5 \cdot 10^6$ кН·см²) вызывает увеличение дополнительной критической нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, в 1,2 раза независимо от эксцентриситета ее приложения, а в раскрепленных нитях – в 5,9 раза. Кроме того отметим, что зависимости $q_2 = f(EI_z)$ и $q_2 = f(GI_d)$ для нераскрепленных нитей весьма близки к линейным, а для раскрепленных нитей носят нелинейный характер.

Анализ данных выполненных исследований позволяет сделать следующие выводы:

характер дополнительной нагрузки заметно влияет на устойчивость плоской формы изгиба нитей конечной жесткости. Если при симметричном нагружении (нагрузка равномерно распределена по всему пролету) интенсивность критической нагрузки у нитей, раскрепленных связями в горизонтальной плоскости, отнесенная к интенсивности критической нагрузки у нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приблизительно равна 750, то при несимметричном нагружении (нагрузка равномерно распределена на половине пролета) отношение q_2^p / q_2^{cs} уменьшается до 60. Это является результатом одновременно происходящего уменьшения критической нагрузки для раскрепленных и увеличения для свободных нитей;

симметричное нагружение по сравнению с несимметричным оказывается более опасным для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и, наоборот, для раскрепленных нитей более опасным по сравнению с симметричным будет несимметричное нагружение;

жесткость нити на изгиб в горизонтальной плоскости и на кручение оказывает достаточно значительное влияние на интенсивность критической нагрузки. Причем при симметричном нагружении это влияние существеннее для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, а при несимметричном – для раскрепленных нитей;

начальная равномерно распределенная нагрузка вызывает значительное увеличение критической дополнительной нагрузки как у нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, так и у раскрепленных. Отметим, что при несимметричном нагружении интенсивность критической нагрузки растет сравнительно медленнее, чем при симметричном;

жесткое закрепление концов нити на опорах сказывается на интенсивности критической дополнительной нагрузки лишь тогда, когда у нитей значительная жесткость на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и на кручение. С уменьшением жесткостных параметров разница между значениями критической нагрузки у нитей с жестким и шарнирным закреплением

концов становится несущественной;

раскрепление нити связями в горизонтальной плоскости в уровне нижнего пояса вызывает очень значительное увеличение интенсивности критической дополнительной нагрузки, которая при прочих равных с нераскрепленными нитями условиях возрастает в 750 раз. Повышение уровня установки связей от нижнего пояса нити к верхнему приводит к дальнейшему увеличению критической нагрузки, происходящему по гиперболической зависимости. При раскреплении нити конечной жесткости связями в уровне верхнего пояса устойчивость плоской формы изгиба нити полностью обеспечена как при симметричном, так и при несимметричном нагружении;

понижение уровня приложения внешней нагрузки от верхнего пояса к нижнему оказывает на работу нитей конечной жесткости, свободных от связей в горизонтальной плоскости, такой же эффект, как и установка связей – происходит увеличение интенсивности критической дополнительной нагрузки. Однако если при симметричном нагружении критическая нагрузка связана с эксцентриситетом своего приложения гиперболической зависимостью, причем при приложении нагрузки к нижнему поясу нить пространственной устойчивости ни при каких условиях не теряет, то при несимметричном нагружении эта зависимость имеет уже параболический характер. Последнее означает, что при несимметричном нагружении нить теряет устойчивость плоской формы изгиба при приложении внешней нагрузки как к верхнему, так и к нижнему поясу нити конечной жесткости.

§ 10.4. Сопоставление теоретических результатов с данными экспериментальных исследований

Сравнение результатов расчета с данными экспериментальных исследований проводилось для нити конечной жесткости, подверженной действию дополнительной равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузок, а также для фермы конечной жесткости, находящейся под действием дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Проводилось также сравнение методов расчета фермы конечной жесткости на устойчивость плоской формы изгиба. Решения этих задач аналитическими и экспериментальными методами приведены в работах [96, 111, 295–297].

Результаты сравнения полученных решений с данными экспериментальных исследований для нити конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис.10.25) приведены в табл.10.1, из которой видно, что максимальная погрешность при определении распора по уточненной теории составляет 0,2%, по МКЭ – 0,8%, по приближенному методу – 0,6% и по аналитическому решению – 0,3%. Погрешность при определении стрелы провисания нити в середине пролета составила: по уточненной теории – 1,1%, по МКЭ – 0,2%, по приближенному методу – 1,8 и по аналитическому решению – 1,5%. При приближении к опорам погреш-

ность при определении стрелы провисания уточненным и приближенным методами возрастает, достигая максимального значения в приопорных участках длиной 0,15 пролета.

Максимальная погрешность при вычислении изгибающих моментов по уточненной теории составляет 9,4%, по МКЭ – 8,8%, по приближенному методу – 10,8% и по аналитическому решению – 10,7%. Из табл. 10.1 видно, что изгибающие моменты, определенные по МКЭ, приближенному методу и аналитическому решению, превышают опытные во всему пролету, а определенные по уточненной теории – только на участке 0,25–0,75 пролета. В приопорных участках изгибающие моменты, вычисленные по уточненной теории, меньше, чем определенные экспериментально.

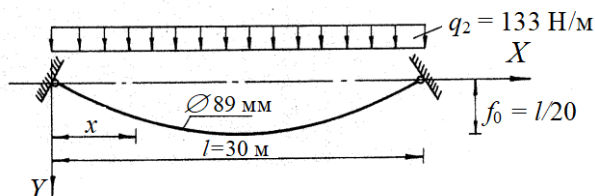


Рис. 10.25. К сопоставлению результатов расчета нити конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Таблица 10.1

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор, $H/\%$	Стрела провисания, см / %	Изгибающий момент, Нм / %
1	2	3	4	5
0,0	I	14314,9/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	14343,4/100,2	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	14201,7/99,2	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	14400,8/100,6	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	14361,8/100,3	0,0/100,0	0,0/100,0
0,1	I	14314,9/100,0	48,9/100,0	1531,1/100,0
	II	14343,4/100,2	51,1/103,5	1387,2/90,6
	III	14201,7/99,2	49,0/100,2	1645,0/107,4
	IV	14400,8/100,6	51,6/104,5	1682,0/109,9
	V	14361,8/100,3	49,4/101,0	1694,3/110,7
0,2	I	14314,9/100,0	91,8/100,0	2314,2/100,
	II	14343,4/100,2	93,6/101,9	2182,7/94,3
	III	14201,7/99,2	91,3/99,4	2356,7/101,8
	IV	14400,8/100,6	94,6/103,1	2436,9/105,3

1	2	3	4	5
	Y	14361,8/100,3	91,7/99,8	2411,4/104,2

Окончание табл. 10.1

1	2	3	4	5
0,3	I	14314,9/100,0	124,0/100,0	2568,9/100,0
	II	14343,4/100,2	123,6/99,7	2762,4/107,5
	III	14201,7/ 99,2	123,3/ 99,4	2767,2/107,7
	IV	14400,8/100,6	124,6/100,5	2771,6/107,9
	Y	14361,8/100,3	123,4/ 99,5	2764,1/107,6
0,4	I	14314,9/100,0	143,5/100,0	2726,3/100,0
	II	14343,4/100,2	142,2/99,1	2979,8/109,3
	III	14201,7/ 99,2	143,1/ 99,7	2964,9/108,8
	IV	14400,8/100,6	142,8/99,5	3020,7/110,8
	Y	14361,8/100,3	141,7/98,8	2963,2/108,7
0,5	I	14314,9/100,0	150,1/100,0	2902,6/100,0
	II	14343,4/100,2	148,5/ 98,9	3039,6/104,7
	III	14201,7/ 99,2	149,8/ 99,8	2994,9/103,2
	IV	14400,8/100,6	147,3/ 98,2	3126,1/107,7
	Y	14361,8/100,3	147,8/ 98,5	3066,1/105,6

Примечание. I – эксперимент [295]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; Y – аналитическое решение [111].

В табл.10.2 приведены результаты сравнения теоретических и экспериментальных значений распора, стрелы провисания и изгибающих моментов в нити конечной жесткости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, расположенной в середине пролета (рис. 10.26). В этом случае наблюдается несколько большая погрешность при определении характеристик напряженно-деформированного состояния нити, чем при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, погрешность при определении распора по уточненной теории составляет 0,8%, по МКЭ – 1,1%, по приближенному методу – 1,3% и по аналитическому решению – 1,6%. Погрешность при определении стрелы провисания нити в середине пролета по уточненной теории составляет 1,5%, по МКЭ – 0,5%, по приближенному методу – 2,1% и по аналитическому решению – 1,8%. При этом, как и в случае с дополнительной равномерно распределенной нагрузкой, погрешность при определении стрелы провисания уточненным и приближенными методами увеличивается при приближении к опорам, а максимального значения достигает в приопорных участках длиной 0,15 пролета.

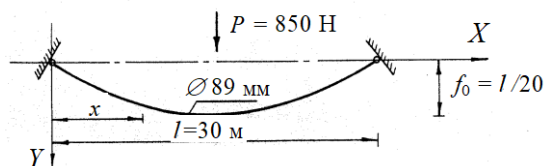


Рис. 10.26. К сопоставлению результатов расчета нити конечной жесткости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки

Таблица 10.2

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор, Н / %	Стрела провисания, см / %	Изгибающий момент, Нм / %
0,0	I	7736,6/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	7796,4/100,8	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	7818,4/101,1	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	7837,2/101,3	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	7861,3/101,6	0,0/100,0	0,0/100,0
0,1	I	7736,6/100,0	46,2/100,0	1030,2/100,0
	II	7796,4/100,8	48,8/104,6	913,8/ 88,7
	III	7818,4/101,1	46,9/101,5	1135,2/110,2
	IV	7837,2/101,3	49,8/106,2	1147,5/111,4
	V	7861,3/101,6	47,4/102,6	1191,5/115,8
0,2	I	7736,6/100,0	88,5/100,0	1790,6/100,0
	II	7796,4/100,8	90,7/102,5	1630,4/ 91,1
	III	7818,4/101,1	88,8/100,3	1907,4/106,5
	IV	7837,2/101,3	93,0/104,1	1933,3/108,0
	V	7861,3/101,6	89,5/101,1	1917,7/107,1
0,3	I	7736,6/100,0	122,3/100,0	2220,2/100,0
	II	7796,4/100,8	122,3/100,0	2471,5/111,3
	III	7818,4/101,1	122,1/ 99,8	2496,7/112,5
	IV	7837,2/101,3	123,5/101,0	2513,8/113,2
	V	7861,3/101,6	1122,2/ 99,9	2545,9/114,7
0,4	I	7736,6/100,0	144,8/100,0	2890,4/100,0
	II	7796,4/100,8	143,4/ 99,0	3245,9/112,3
	III	7818,4/101,1	144,3/ 99,6	3130,6/108,3
	IV	7837,2/101,3	143,0/ 98,7	3315,3/114,7
	V	7861,3/101,6	142,7/ 98,5	3367,4/116,6
0,5	I	7736,6/100,0	153,2/100,0	3950,1/100,0
	II	7796,4/100,8	152,3/ 99,4	4301,6/108,9
	III	7818,4/101,1	152,9/ 99,5	4127,9/104,5
	IV	7837,2/101,3	150,7/ 98,4	4349,1/110,1
	V	7861,3/101,6	150,4/ 98,2	4399,3/111,4

Примечание. I – эксперимент [295]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; V – аналитическое решение [111].

Максимальная погрешность при определении изгибающих моментов составляет: по уточненной теории – 12,3%, по МКЭ – 12,5%, по приближенному методу – 14,7% и по аналитическому решению – 16,6%.

Результаты сравнения полученных решений с данными экспериментальных исследований для фермы конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис. 10.27) приведены в табл. 10.3. Максимальная погрешность при определении распора в верхнем поясе фермы по уточненной теории составляет 1,3%, по МКЭ – 1,5%, по приближенному методу – 2,1% и по аналитическому решению – 1,5%. Соответственно для нижнего пояса максимальная погрешность составляет 1,1; 1,3; 1,7 и 1,2%. Из табл. 10.3 видно, что погрешность при определении прогиба в середине пролета составляет: по уточненной теории – 1,0%, по МКЭ – 0,6%, по приближенному методу – 2,2% и по аналитическому решению – 1,7%. Причем максимальная погрешность наблюдается в приопорных участках длиной 0,15 пролета.

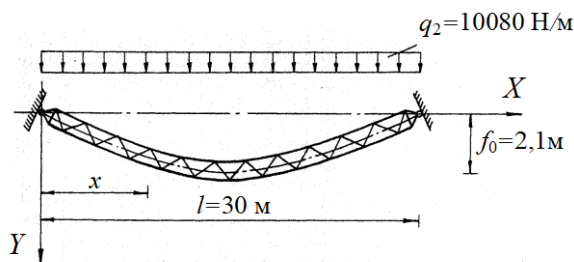


Рис. 10.27. К сопоставлению результатов расчета фермы конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Таблица 10.3

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор в поясе, Н/ %		Прогиб, см / %	Изгибающий момент, Нм / %
		верхнем	нижнем		
1	2	3	4	5	6
0,0	I	191400/100,0	338800/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	188529/ 98,5	334734/ 98,8	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	195419/102,1	344560/101,7	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	194222/101,5	342830/101,2	0,0/100,0	0,0/100,0
	I	191400/100,0	338800/100,0	3,92/100,0	21360/100,0

0,125	II	193888/101,3	342527/101,1	4,13/105,3	19073/ 89,3
	III	188529/ 98,5	334734/ 98,8	3,97/101,2	23453/109,8
	IV	195419/102,1	344560/101,7	4,21/107,4	23774/111,3
	V	194222/101,5	342830/101,2	4,05/103,3	23911/111,9

Окончание табл. 10.3

1	2	3	4	5	6
0,241	I	191400/100,0	338800/100,0	6,99/100,0	32800/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	7,01/100,3	3128/101,0
	III	188529/ 98,5	334734/ 98,8	6,93/ 99,2	34014/103,7
	IV	195419/102,1	344560/101,7	7,21/103,2	35129/107,1
	V	194222/101,5	342830/101,2	6,95/ 99,4	34571/105,3
0,360	I	191400/100,0	338800/100,0	9,00/100,0	40343/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	8,91/ 99,0	44337/109,9
	III	188529/ 98,5	334734/ 98,8	8,95/ 99,4	43005/106,6
	IV	195419/102,1	344560/101,7	8,93/ 99,2	45467/112,7
	V	194222/101,5	342830/101,2	8,91/ 99,0	44914/111,3
0,5	I	191400/100,0	338800/100,0	9,89/100,0	43380/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	9,79/ 99,0	46113/106,3
	III	188529/ 98,5	334734/ 98,8	9,83/ 99,4	45245/104,3
	IV	195419/102,1	344560/101,7	9,67/ 97,8	47892/110,4
	V	194222/101,5	342830/101,2	9,72/ 98,3	46417/107,0

Примечание. I – эксперимент [96]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; V – аналитическое решение [111].

Максимальная погрешность при вычислении изгибающих моментов по уточненной теории составляет 10,7, по МКЭ – 9,8, по приближенному методу – 12,7 и по аналитическому решению – 11,9%.

Анализ приведенных решений показывает, что результаты полученные по уточненной теории и МКЭ, достаточно близки к экспериментальным данным. Худшее совпадение имеем для результатов, полученных по приближенному методу и аналитическому решению. Относительное совпадение результатов, полученных по уточненной и приближенной методикам, а также по МКЭ, с аналитическим решением объясняется выбором расчетных схем нитей. При увеличении стрелы провисания и сосредоточенной нагрузки, а также при удалении ее от середины пролета погрешность при аналитическом определении усилий и перемещений нити возрастает.

На рис. 10.28 показана зависимость дополнительной критической равномерно распределенной нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости плоской формы изгиба фермы (см. рис. 10.27), от начальной равномерно распределенной нагрузки. Критическая равномерно распределенная

нагрузка вычислялась по методике, изложенной в главе 3. Погрешность при определении критической нагрузки достигает 9,3%. При увеличении начальной нагрузки погрешность несколько уменьшается. Из рис. 10.28 видно, что график зависимости, построенный с применением предлагаемого метода расчета, носит более выраженный нелинейный характер, чем приведенный в работе [96].

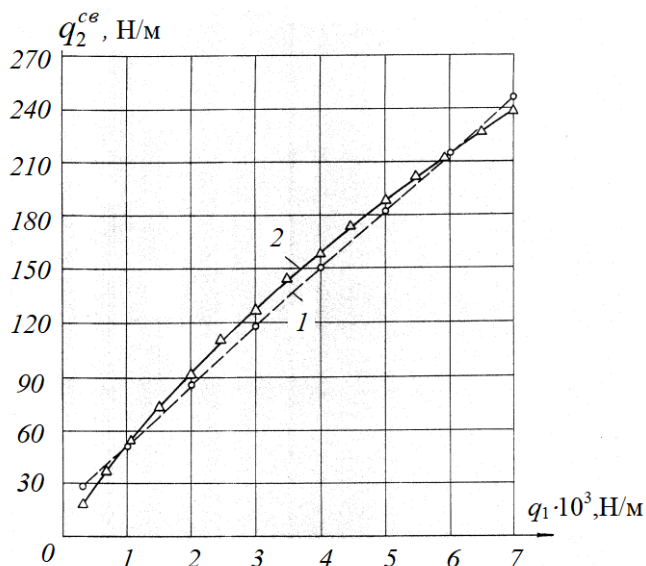


Рис. 10.28. Зависимость дополнительной критической равномерно распределенной нагрузки от начальной равномерно распределенной:

1 – метод И.М. Зотовой [96]; 2 – предлагаемый метод

§ 10.5. Разработка и совершенствование конструктивных решений висячих систем

На основании анализа результатов выполненных исследований и изучения влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости разработаны предложения по совершенствованию конструктивных решений висячих систем повышенной жесткости, включающие вопросы компоновки сооружений, выбора рациональных соотношений геометрических размеров, уменьшения напряжений в конструктивных элементах и пр.

Известно, что системы висячих переходов трубопроводов имеют недостаточную горизонтальную жесткость пролетного строения. Поэтому при действии ветровой нагрузки могут наблюдаться значительные горизонтальные перемещения трубопровода [112, 113]. Обычно для предупреждения подобного явления конструкция снабжается горизонтальными ветровыми фер-

мами с укрепленными на пилонах консольными ригелями или специальными оттяжками [190]. Недостаток подобного решения заключается в большой материалоемкости и трудоемкости монтажа, обусловленных наличием горизонтальных ветровых конструкций.

Добиться желаемого результата – повышения горизонтальной жесткости перехода при одновременном уменьшении его материалоемкости и трудоемкости монтажа можно, располагая поддерживающие канаты под углом как к вертикальной, так и к горизонтальной плоскостям, что позволяет включить их в работу на горизонтальные (ветровые) нагрузки. Такое расположение поддерживающих канатов в пространстве достигается двумя путями.

1. Канаты выполняются расходящимися от середины пролета к опорам, причем их вертикальная стрела провисания меньше вертикальной стрелы провисания трубопровода (рис. 10.29). При этом соединительные элементы располагаются наклонно в поперечном направлении, а их длина и угол наклона к вертикали увеличиваются от середины пролета к опорам.

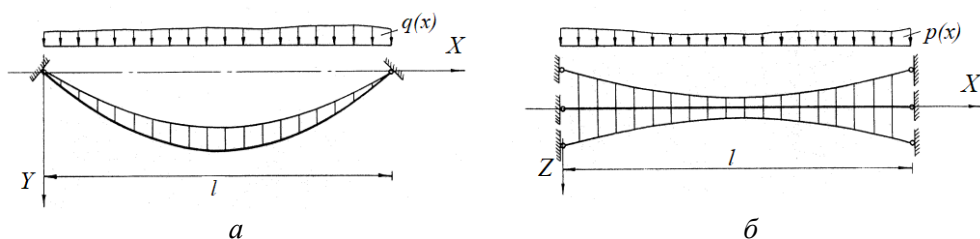


Рис. 10.29. Система с поддерживающими канатами, расходящимися от середины пролета к опорам с повышенной жесткостью на изгиб в горизонтальной плоскости:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

2. Канаты выполняются расходящимися от опор к середине пролета, где между ними устанавливается балка-распорка, перпендикулярная к продольной оси перехода и воспринимающая горизонтальную составляющую распора в канатах (рис. 10.30). При этом соединительные элементы, как и в первом случае, располагаются наклонно, только если угол их наклона к вертикали увеличивается по-прежнему от середины пролета к опорам, то длина увеличивается в противоположном направлении – от опор к середине пролета.

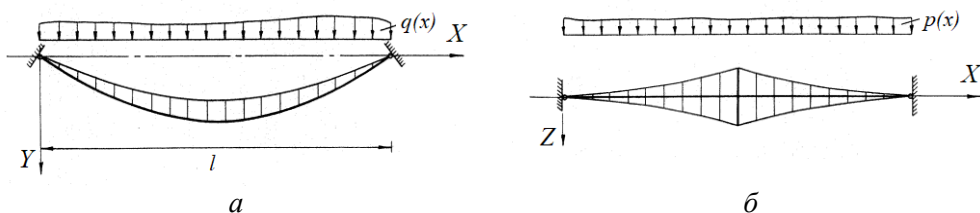


Рис. 10.30. Система с поддерживающими канатами, расходящимися от опор к середине пролета

дине пролета с повышенной жесткостью на изгиб в горизонтальной плоскости:
 a – вертикальная проекция; b – горизонтальная проекция

Предложена новая конструкция прямоугольного в плане висячего покрытия повышенной жесткости промышленных и гражданских зданий, отличающаяся от запроектированных малой материалоемкостью и строительной высотой (рис. 10.31). Покрытие содержит наружный и внутренние опорные контуры, стороны которых взаимно параллельны. Внешний опорный контур опирается на угловые колонны, которые выполнены выше уровня покрытия. В углах внутренних опорных контуров установлены пилоны, верхушки которых соединены между собой вдоль диагонали висячего покрытия и прикреплены к верхушкам соответствующих угловых колонн связями. В углах внутренних опорных контуров установлены пилоны, верхушки которых соединены между собой вдоль диагонали висячего покрытия и прикреплены к верхушкам соответствующих угловых колонн связями.

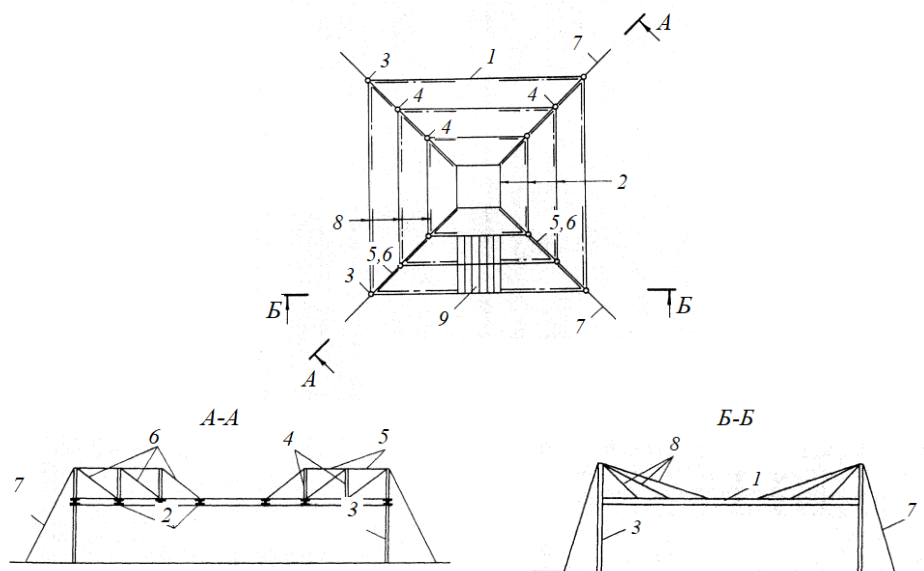


Рис. 10.31. Висячее покрытие:

1 – наружный опорный контур; 2 – внутренний опорный контур; 3 – угловая колонна;
 4 – пилон; 5 – связь; 6 – несущий диагональный элемент; 7 – наклонная оттяжка;
 8 – подвеска; 9 – плита перекрытия

Для повышения жесткости покрытия в уровне наружного и внутренних опорных контуров могут быть установлены несущие диагональные элементы, выпущенные за пределы здания и заанкеренные к фундаментам угловых колонн наклонными оттяжками. Каждый внутренний опорный контур в углах поддерживается подвеской, нисходящей с верхушки пилона, установленного на предыдущем от наружного внутреннем контуре. Наружный и внутренние опорные контуры поддерживаются в пролете подвесками, нисходящими с

верхушки соответствующего пилона или угловой колонны. На верхние пояса наружного и внутренних опорных контуров опираются плиты покрытия.

Предлагаемое висячее покрытие обладает повышенной жесткостью, что допускает устройство подвешного транспорта с эффективной его работой как вдоль, так и поперек здания, а также позволяет осуществить унификацию и типизацию используемых конструктивных элементов.

Предложен способ монтажа висячего покрытия зданий и сооружений, несущими конструкциями которого являются висячие фермы повышенной жесткости. Пояса таких ферм, как правило, выполняют из элементов достаточно гибких, но обладающих по сравнению с нитями повышенной жесткостью и способных воспринимать сжимающие усилия, не выключаясь из работы [114, 116, 165]. Несмотря на наличие таких элементов, указанные фермы обладают заметной деформативностью, особенно при неравномерных нагрузках. Поэтому существуют различные способы обеспечения жесткости рассматриваемых висячих покрытий [84], но они имеют серьезный недостаток – повышенную трудоемкость производства работ. Устранить указанный недостаток можно, монтируя фермы участками, в каждом из которых верхние пояса объединяют между собой и с опорами шарнирно, нижние пояса выполняют разрывными, а после пригружения покрытия соединяют участки ферм по нижним поясам жесткими вставками.

Монтаж конструкций покрытия осуществляется в такой последовательности (рис. 10.32). Участки висячих ферм, соединенных между собой в уровне верхнего пояса шарнирами, поднимают в проектное положение и крепят к опорам (рис. 10.32, *а*). Затем устанавливают горизонтальные связи, укладывают по фермам и закрепляют плиты перекрытия (рис. 10.32, *б*), после чего пригружают покрытие временной нагрузкой, равной или близкой расчетной (рис. 10.32, *в*). На следующем этапе производится заглушение шарниров путем соединения нижних поясов участков ферм между собой с помощью жестких вставок соответствующей длины (рис. 10.32, *г*). На последнем этапе снимают ранее уложенный пригруз (рис. 10.32, *д*).

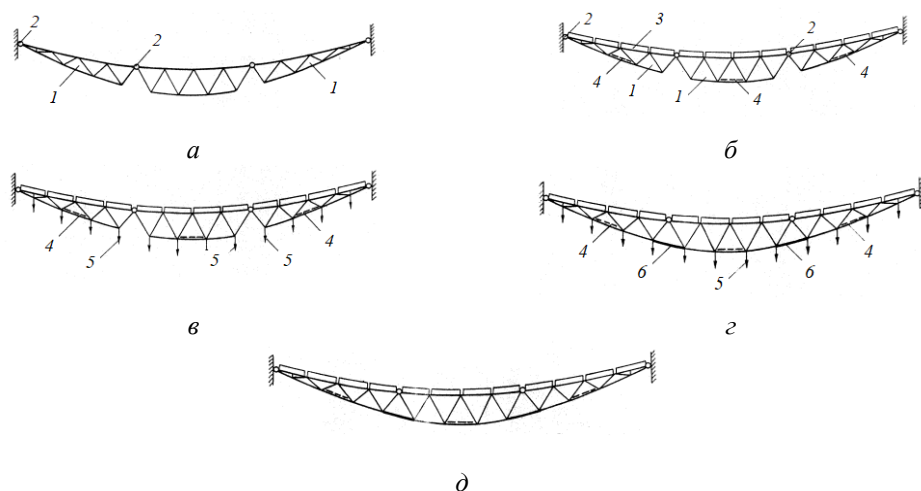


Рис. 10.32. Этапы монтажа (а–д) висячего покрытия повышенной жесткости:

1 – участок висячей фермы; 2 – шарнир; 3 – плита перекрытия;
4 – связь; 5 – временная пригрузка; 6 – жесткая вставка

Таким образом, наряду с уменьшением трудоемкости монтажа (в частности, отсутствуют такие принятые операции, как предварительное специальное обжатие высокопрочными канатами или замоноличивание стыков плит перекрытия) геометрия висячей фермы оказывается зафиксированной в положении, соответствующем действию временной нагрузки. Тем самым кинематическая податливость фермы оказывается в значительной степени исчерпанной, что благоприятно сказывается на работе висячего покрытия в целом.

Наряду со стандартными подходами анализ результатов выполненных исследований позволил также сформулировать непредвиденные подходы в применении висячих систем (в том числе повышенной жесткости) и разработать с их использованием новые конструктивные решения.

Одним из таких предложенных нестандартных решений является новая конструкция подпорной стенки, включающая вертикальные опоры, анкерные плиты и прикрепленную к ним соответственно верхними и нижними концами парусную оболочку, пригруженную грунтом обратной засыпки (рис. 10.33).

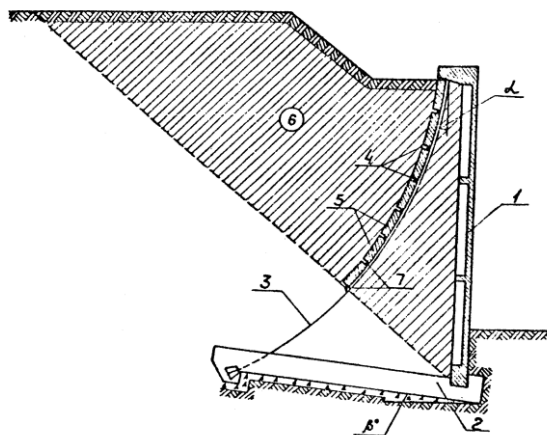


Рис. 10.33. Поперечный разрез подпорной стенки:

1 – передняя стенка; 2 – анкерная плита; 3 – гибкий несущий элемент; 4 – зазор; 5 – сборные железобетонные плиты; 6 – грунт обратной засыпки; 7 – упоры

Подпорная стенка выполнена из сборных железобетонных элементов – анкерных плит и установленной на них вертикальной передней стенки. Верхушка передней стенки и задний конец анкерных плит соединены расположенными вдоль подпорной стенки поперечными гибкими несущими элементами из канатов (круглой стали, полос и т.п.). По несущим элементам уложены с зазором между ними сборные железобетонные плиты. Причем плиты располагаются не по всей длине несущих элементов, а только в пределах призмы обрушения (в зоне воздействия грунта обратной засыпки), что соответствует в зависимости от свойств грунта примерно половине длины несущих элементов. При этом размеры зазоров назначаются предельно допустимыми из условия исключения передачи части распора засыпки на переднюю стенку. С учетом угла внутреннего трения грунта, т.е. геометрии призм обрушения (на рис. 10.33 не показаны) в зазорах, размеры имеют такой же порядок, как и высота железобетонных плит. Во избежание сползания плит вниз на несущих элементах устроены упоры. Для максимального обжатия передней стенки угол α между вертикалью и касательной к оси несущего элемента у примыкания к передней стенке принимается минимальным (не более 10°), угол β наклона анкерных плит – как обычно (7°).

Подпорная стенка работает следующим образом. Давление массы грунта обратной засыпки через железобетонные плиты передается на несущие элементы и вызывает в них усилия растяжения. Передняя стенка при минимальном значении угла α воспринимает, в основном, вертикальную составляющую распора в несущих элементах и работает на сжатие. Поскольку железобетонные плиты располагаются в пределах призмы обрушения, исключается передача на стенку горизонтальной составляющей нагрузки от распора грунта обратной засыпки. Передняя стенка и анкерные плиты совместно с

несущими элементами образуют замкнутый контур, который и воспринимает действующую в них горизонтальную составляющую распорных усилий. Вертикальная составляющая этих усилий через переднюю стенку пригружает анкерные плиты, увеличивая тем самым силы трения бетона по грунту.

Таким образом, в описанной конструкции железобетонные плиты работают преимущественно на сжатие. Отсутствуют значительные сосредоточенные нагрузки. Вертикальная составляющая распора используется для пригружения через переднюю стенку анкерных плит, повышая способность последних воспринимать горизонтальную составляющую распора. Сам распор существенно меньше благодаря тому, что парусная оболочка выполнена не сплошной, а в виде дискретных нитей, а также в связи с ограничением зоны размещения железобетонных плит упорами. В результате достигается возможность значительного уменьшения сечения элементов, исключения трудоемких работ при монтаже по забивке мощных свай и повышения степени заводской готовности конструкции.

Следующим нестандартным решением является новая конструкция резервуара для хранения жидких продуктов, стенка которого представляет собой цилиндрическую оболочку, провисающую в виде нити конечной жесткости (рис. 10.34).

Резервуар является многоугольным в плане. Каждый участок многоугольника выполняется из рулонируемого на заводе полотнища стенка-днище. Одним торцом полотнища крепится к наружному опорному контуру, другим – к трубчатой обойме, свободно обхватывающей центральную колонну и возвышающейся над уровнем жидких продуктов. На оголовке центральной колонны устанавливается внутренний опорный контур, к которому прикреплены радиальные ванты, поддерживающие наружный опорный контур. По вантам уложена кровля. С целью исключения кольцевых напряжений лепестки стенки резервуара соединяются между собой посредством компенсаторов.

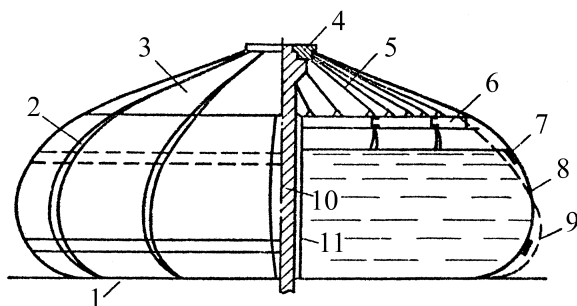


Рис. 10.34. Фасад и поперечное сечение резервуара с эпюрой кинематических перемещений (штриховые линии):

1 – днище; 2 – компенсаторы; 3 – кровля; 4 – внутренний опорный контур; 5 – радиальная ванта; 6 – парусный опорный контур; 7 – внутреннее кольцо жесткости;

8 – стенка; 9 – парусное кольцо жесткости; 10 – центральная колонна;
11 – трубчатая обойма

Для уменьшения кинематических перемещений рулонированных полотнищ стенок при выкачке и закачке жидкости по высоте резервуара в местах наибольших положительных и отрицательных ординат эпюры кинематических перемещений стенок резервуара устанавливаются параллельно днищу два кольца жесткости: нижнее – на расстоянии $(1/4-1/3)h$, а верхнее – $(2/3-3/4)h$, где h – высота от днища резервуара до наружного опорного контура. Указанные параметры связаны с положением максимальных положительных (наружу резервуара) и отрицательных (внутрь резервуара) ординат эпюр кинематических перемещений цилиндрической оболочки. Эпюры построены на основании результатов численного исследования резервуара с учетом жесткости цилиндрической оболочки (эпюра при выкачке из резервуара продукта показана пунктиром на рис. 10.34). Аналогичные результаты достигнуты при исследовании нитей конечной жесткости, являющихся расчетной моделью висячей цилиндрической оболочки – стенки резервуара.

Будучи установленными в указанных зонах, кольца жесткости фиксируют проектное положение стенок резервуара при действии расчетной нагрузки независимо от того, закачан или выкачан из резервуара продукт. При этом нижнее кольцо жесткости, устанавливаемое с внешней стороны резервуара, предотвращает кинематические перемещения цилиндрической оболочки наружу резервуара при полной выкачке продукта, а верхнее кольцо, располагаемое с внутренней стороны – препятствует кинематическим перемещениям оболочки внутрь резервуара.

Стенка и днище по каждой стороне многоугольника, который представляет собой резервуар в плане, выполняются из совместно рулонированного на заводе полотнища и крепятся, соответственно, к наружному опорному контуру и свободно обхватывающей центральную колонну трубчатой обойме, на оголовке которой устанавливается внутренний опорный контур. К последнему крепятся радиальные ванты, поддерживающие наружный опорный контур. Угол α примыкания провисающей по кривой нити конечной жесткости стенки к наружному опорному контуру находится в диапазоне $0,5 < \operatorname{tg} \alpha < 1,5$. По вантам укладывается кровля, а стенки соединяются между собой компенсаторами. Такая конструкция обеспечивает повышенную надежность при неравномерных осадках основания за счет приварки полотнищ лепестков днища к трубчатой обойме, а при сейсмических воздействиях – за счет возможности изменения геометрической формы резервуара, принимающей такое очертание, при котором усилия в несущих элементах будут минимальными.

В местах наибольших ординат эпюры перемещений устанавливаются наружное и внутреннее кольца жесткости. Нижнее кольцо крепится к стенкам на расстоянии $1/4-1/3$ высоты от днища резервуара до наружного опорного контура, в зоне наибольших положительных кинематических перемещений

оболочки. Кольцо работает на растяжение. Конструктивно оно представляет собой полосу, площадь сечения которой определяется из расчета предотвращения кинематических перемещений оболочки наружу резервуара при полной выкачке продукта. Верхнее кольцо жесткости крепится к стенкам с внутренней стороны резервуара на расстоянии $2/3$ – $3/4$ высоты резервуара до наружного опорного контура, в зоне наибольших отрицательных кинематических перемещений оболочки. Работающее на сжатие кольцо выполняется коробчатого или двутаврового поперечного сечения, площадь которого принимается из расчета предотвращения кинематических перемещений оболочки внутрь резервуара при полной выкачке продукта. Каждое из колец жесткости может не крепиться к стенкам, а быть подвешено к наружному опорному контуру на указанной высоте с непосредственным примыканием к стенкам резервуара. Причем в обоих кольцах жесткости возникают сравнительно небольшие усилия, поскольку основная нагрузка на них зависит от кинематических перемещений стенок резервуара при отсутствии в нем продукта. По мере заполнения резервуара продуктом усилия в кольцах жесткости будут уменьшаться.

Таким образом, в резервуаре предлагаемой конструкции за счет установки колец жесткости в указанных зонах достигается возможность существенно (более чем на порядок) снизить кинематические перемещения стенок при выкачке продукта, т.е. практически зафиксировать проектную геометрию цилиндрической оболочки при расчетной нагрузке (заполненном продуктом резервуаре). Например, установлено, что постановка даже одного наружного нижнего кольца жесткости позволяет уменьшить ординаты эпюры кинематических перемещений в верхней части резервуара в 4–6 раз. Тем самым достигается возможность значительно упростить конструкцию компенсаторов между стенками резервуара и повысить его надежность.

Глава 11. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

§ 11.1. Висячий трубопроводный переход нефтепровода

На линии нефтепровода Чимкент–Чарджоу был запроектирован двухниточный трубопроводный переход через р. Амударью с пролетом 950 м, стрелой провисания 70 м, диаметром труб 630 мм (рис. 11.1, *а*). Предложенное решение обеспечивает необходимую несущую способность и повышенную жесткость пролетной конструкции. Это достигается тем, что несущие канаты очерчены по пространственным кривым, имеющим наклон как к горизонтальной под углом $56^{\circ}12'$, так и к вертикальной под углом $33^{\circ}88'$ плоскостям. Трубопровод крепится к несущим канатам посредством тросовых стяжек, расположенных с шагом 40 м. Посередине пролета расстояние между канатами 6 м. В поперечном сечении тросовые стяжки располагаются наклонно, причем их длина и угол наклона к вертикали возрастают от середины пролета к опорам. Пилоны приняты V-образными с шарнирным креплением к опорам. Отметка верха пилон над уровнем земли – 115 м.

В качестве расчетной принята дискретная модель, в которой несущие канаты, оттяжки пилонов, тросовые стяжки и поперечные элементы по верху пилонов представляются растянуто-напряженными стержневыми элементами, пилоны – шарнирно соединяемыми стержнями, способными воспринимать растяжение–сжатие, а трубопровод – стержневыми элементами, воспринимающими растяжение–сжатие с изгибом.

Схема разбивки вантово-стержневой системы трубопроводного перехода нефтепровода на конечные элементы изображена на рис. 11.1, *б*. Порядок нумерации узлов дискретной модели и ориентация осей глобальной системы координат понятны из рис. 1.1.

Расчет трубопроводного перехода производился при четырех схемах нагружения:

- 1 – собственный вес перехода ($q_1 = 6,08$ кН/м);
- 2 – несимметричное нагружение: собственный вес, нагрузка от снега ($q_c = 0,33$ кН/м), вес нефти на половине пролета ($q_n = 4,87$ кН/м) и изменение температуры ($\Delta t = 22^{\circ}\text{C}$);
- 3 – симметричное нагружение: собственный вес, нагрузка от снега, вес нефти на всем пролете и изменение температуры;
- 4 – дополнительное сочетание нагрузок: симметричное нагружение плюс ветровая нагрузка ($q_v = 0,99$ кН/м).

При 1-й схеме нагружения вся нагрузка от собственного веса перехода воспринимается только канатами. При других схемах труба и несущие канаты работают как единое целое.

Усилия, возникающие в канатах и трубе при различных схемах нагружения трубопроводного перехода, приведены в табл. 11.1 и табл. 11.2. Из них

видно, что несимметричная нагрузка (2-я схема нагружения), существенно влияя на величины усилий в трубе, почти не сказывается на распределении усилий в несущих канатах. И, наоборот, ветровая нагрузка (4-я схема нагружения), почти не сказываясь на усилиях в трубе, значительно влияет на усилия в канатах. При этом усилия в канатах, расположенных с наветренной стороны, по сравнению с 3-й схемой нагружения увеличиваются, а в канатах, расположенных с подветренной стороны, — уменьшаются.

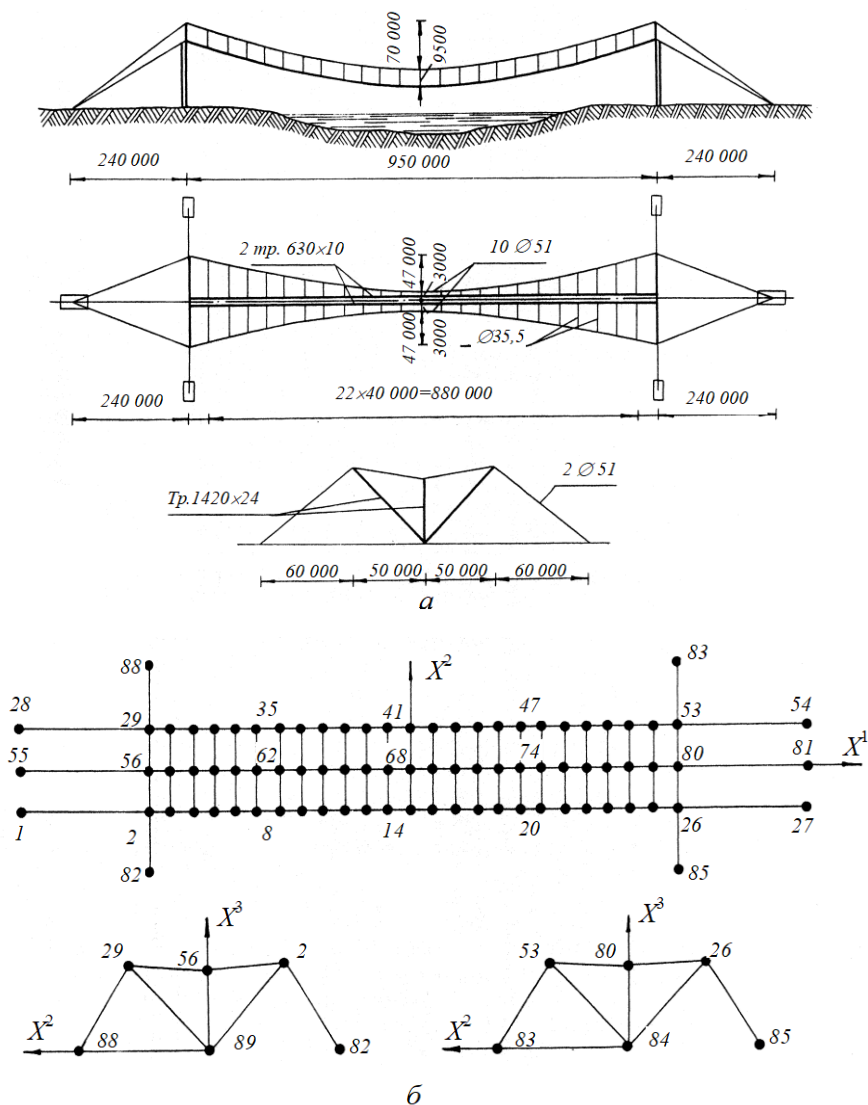


Рис. 11.1. Конструктивная (а) и топологическая (б) с нумерацией узлов схемы висячего трубопроводного перехода нефтепровода

Таблица 11.1

Схема загрузки	Труба					
	продольное усилие, кН			изгибающий момент, кН·м		
	середина пролета	узел примыкания к пилону		середина пролета	четверть пролета	
		левому	правому		левая	правая
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	917,71	776,0	1352,94	142,86	96,86	185,85
3	2152,46	2387,63	2387,63	147,95	129,54	129,54
4	2142,09	2374,89	2374,89	144,13	125,17	125,17

Таблица 11.2

Схема загрузки	Канаты					
	с наветренной стороны			с подветренной стороны		
	продольные усилия, кН					
	середина пролета	узел примыкания к пилону		середина пролета	узел примыкания к пилону	
		левому	правому		левому	правому
1	5783,37	6218,79	6218,79	5783,37	6218,79	6218,79
2	7238,19	7739,60	7717,44	7238,19	7739,60	7717,44
3	8086,07	8660,45	8660,45	8086,07	8660,45	8660,45
4	9028,0	9678,18	9678,18	7178,27	7684,59	7684,59

Эпюры перемещений конструктивных элементов нефтепровода, полученные в результате расчетов, изображены на рис.11.2. Из анализа этих эпюр следует, что перемещения трубы в вертикальной плоскости u^3 и вдоль оси трубопроводного перехода u^1 при 3 и 4-й схемах нагружения совпадают. Эти же перемещения и при этих же видах нагружения совпадают и для канатов. Кроме того перемещения трубы и канатов в вертикальной плоскости и вдоль оси трубопровода при 1, 3 и 4-й схемах нагружения имеют одинаковый характер.

Перемещения трубы в вертикальной плоскости и вдоль оси трубопроводного перехода имеют наибольшие значения в четвертях пролета для 1, 3 и 4-й схем нагружения. Это объясняется тем, что если в середине пролета перемещения зависят в основном от упругих деформаций нити, то в четвертях пролета велико значение кинематических перемещений, т. е. перемещений за счет изменения формы кривой провисания нити. Это особенно хорошо видно при 2-й схеме нагружения – перемещения трубы вдоль оси перехода u^1 в 5 раз больше (за счет изменения формы равновесия), чем в остальных схемах.

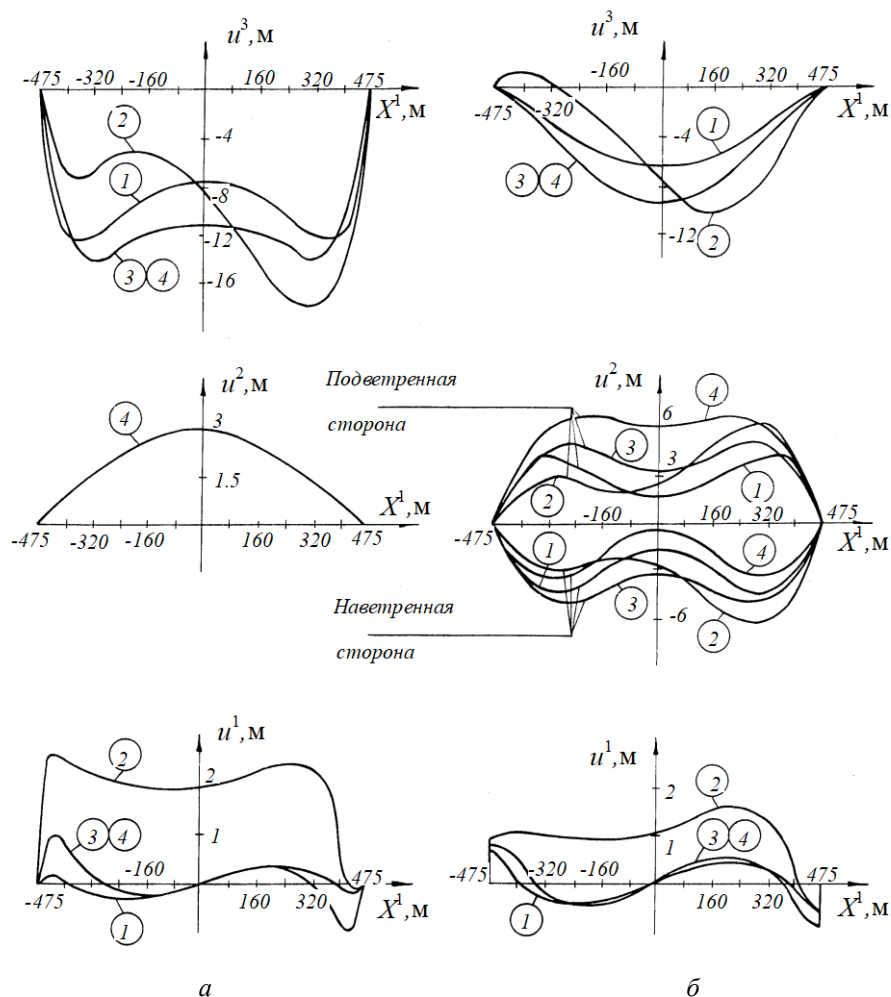


Рис. 11.2. Эпюры перемещений конструктивных элементов висячего трубопроводного перехода нефтепровода при различных схемах нагружения: а – труба; б – канаты; 1 – собственный вес; 2 – несимметричное нагружение; 3 – симметричное нагружение; 4 – дополнительное сочетание нагрузок

Эпюры перемещений трубы и канатов в горизонтальной плоскости u^2 также показаны на рис. 11.2. Из приведенных эпюр видно, что оба каната при 1, 2 и 3-й схемах нагружения деформируются симметрично относительно оси трубопроводного перехода. При действии ветровой нагрузки (4-я схема нагружения) перемещения обоих канатов в горизонтальной плоскости приблизительно одинаковы, но если абсолютные значения перемещений каната, находящегося с наветренной стороны, уменьшаются, то для каната с подветренной стороны – увеличиваются.

Труба при 1, 2 и 3-й схемах нагружения деформируется только в вертикальной плоскости. При действии ветровой нагрузки максимальное отклонение трубы от вертикали наблюдается посередине пролета и равно 3 м, что составляет 1/317 пролета.

Результаты исследования напряженно-деформированного состояния пространственной вантово-стержневой системы висячего трубопроводного перехода нефтепровода свидетельствуют о том, что предложенное конструктивное решение обеспечивает высокую несущую способность и жесткость пролетной конструкции перехода как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях, а усилия и перемещения при всех четырех схемах нагружения находятся в допустимых пределах.

§ 11.2. Висячее покрытие универсального спортивно-зрелищного зала

С использованием разработанной методики расчета исследовано напряженно-деформированное состояние висячего комбинированного покрытия универсального спортивно-зрелищного зала (УСЗЗ) на 10500 мест, возведенного в г. Алма-Аты. Несущая система представляет собой пространственную большепролетную ферменную конструкцию с мембранным покрытием (рис. 11.3).

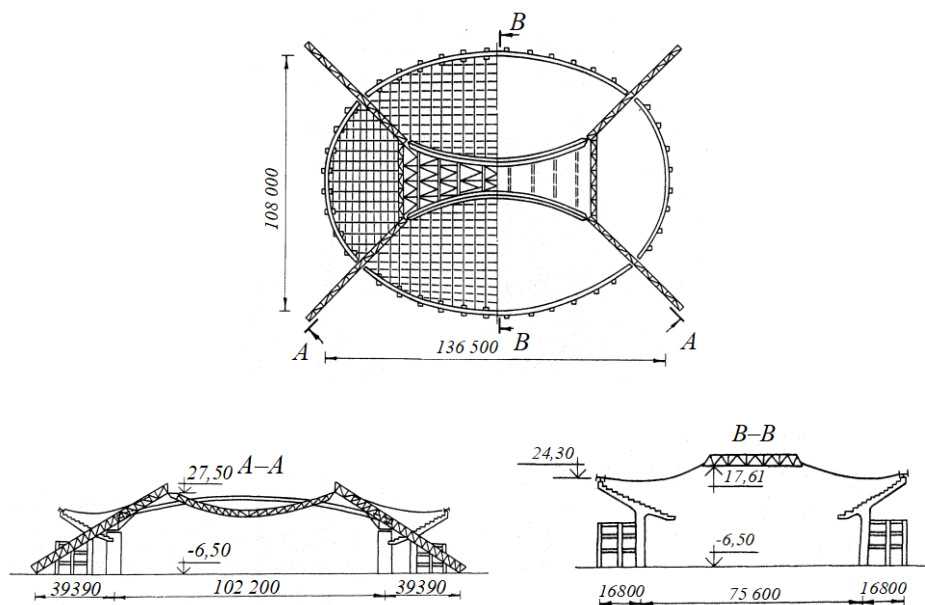


Рис. 11.3. Конструктивная схема покрытия универсального спортивно-зрелищного зала

Ферменная конструкция состоит из двух наклонных под углом 40° рам, каждая из которых включает два пилона и соединяющий их ригель, двух трехгранных ферм и связевых ферм центральной части. При этом пилоны, трехгранные фермы и ригели имеют решетчатое пространственное поперечное сечение. Мембранное покрытие состоит из центральной оболочки и четырех оболочек боковых пролетов, выполненных из стальной мембраны. Оболочка центральной части имеет нулевую, а оболочки боковых пролетов – отрицательную гауссовую кривизну. Причем для формообразования последних используется ортогональная сетка, образованная направляющими нитями (висячими нитями конечной жесткости) и поперечными прогонами. Мембранное покрытие боковых пролетов крепится к овальному в плане упруго-податливому внешнему опорному контуру, выполненному из сварного двутавра и опертому на железобетонные консоли трибун.

Две шарнирно подвешенные трехгранные висячие фермы служат внутренними опорными контурами оболочек соответствующих боковых пролетов и наклонены под углом $30^\circ 40'$ к вертикальной плоскости. Этот конструктивный прием обеспечивает работу внутреннего опорного контура одновременно по двум схемам: по вертикали – висячей фермы конечной жесткости, а по горизонтали – двухшарнирной арки. Для двух других оболочек боковых пролетов внутренними опорными контурами являются соединяющие пилоны ригели. Боковыми же опорными контурами для всех оболочек боковых пролетов служат пилоны.

Ввиду двухсторонней симметрии конструктивной схемы покрытия УСЗЗ, а также учитывая симметрию действующих нагрузок в качестве расчетной принята 1/4 часть покрытия (рис. 11.4, а). При этом горизонтальная плоскость глобальной системы координат проходит через узлы опирания пилонов на поддерживающие стойки, где конструктивно обеспечены условия работы, эквивалентные жесткому защемлению.

В расчетной схеме мембранная оболочка представляется набором мембранных четырехугольных конечных элементов, толщина которых определяется в результате учета листовой мембраны и «размазывания» прогонов, исходя из эквивалентной цилиндрической жесткости конструкции мембраны с прогонами и гладкой тонкой оболочки. Ферменные элементы несущей системы – пилоны, трехгранные фермы, ригели и связевые фермы, а также направляющие нити и опорный контур представляются стержневыми конечными элементами прямоугольного поперечного сечения, воспринимающими усилия растяжения–сжатия и изгиба. Их параметры устанавливаются с учетом эквивалентного «размазывания» стержневых элементов покрытия. Для каждого типа конечных элементов определяются соответствующие размеры поперечного сечения и эквивалентный модуль упругости, обеспечивающие равенство цилиндрических и изгибных жесткостных характеристик расчетных и реальных конструктивных элементов. По осям симметрии фрагмента наложены связи на соответствующие перемещения узлов, опорный контур покрытия закреплен от смещения по третьему направлению, а узлы опирания пилонна закреплены жестко.

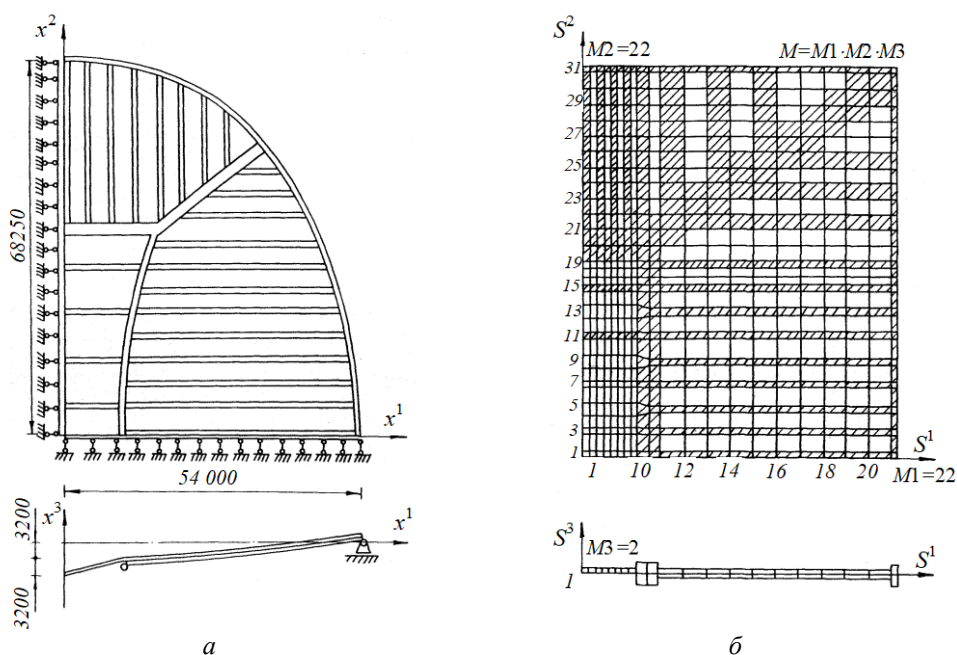


Рис. 11.4. Расчетная (а) и топологическая (б) схемы покрытия универсального спортивно-зрелищного зала (штрихами отмечены участки повышенной жесткости)

При описании топологической структуры конечноэлементной модели покрытия расчетная схема отображается на прямоугольную сеточную область с координатами S^1 , S^2 , S^3 и единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов модели: в плане от 1 до $M1 = 22$ и от 1 до $M2 = 32$, по толщине оболочки от 1 до $M3 = 2$, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели понятен из рис. 11.4, б.

Расчет конструкции покрытия производился на два вида воздействий: статическое (собственный вес покрытия с учетом кратковременной и снеговой нагрузок) с суммарной интенсивностью равномерно распределенной нагрузки $q = 4 \text{ кН/м}^2$ и динамическое при расчетной сейсмичности района строительства 9 баллов.

Составляющая сейсмическая нагрузка $S_{ij}(x^1, x^2)$ для двумерной области комбинированного висячего покрытия в ij -м направлении вычислялась согласно работе [135] по формуле

$$S_{ij}(x^1, x^2) = q(x^1, x^2) K_c \mu(x^1, x^2) \eta_{ij}(x^1, x^2) \beta_{ij}, \quad (11.1)$$

где $q(x^1, x^2)$ – функция распределения нагрузки по покрытию; K_c – коэффициент сейсмичности; $\mu(x^1, x^2)$ – функция распределения переносного движения по покрытию; $\eta_{ij}(x^1, x^2)$ – коэффициент формы колебаний системы; β_{ij} – коэффициент

динамичности, характеризующий динамический эффект сейсмического воздействия; i, j – число полуволн в продольном и поперечном направлениях.

Выражение для коэффициента формы колебаний всячего покрытия можно записать в виде

$$\eta_{ij}(x^1, x^2) = \frac{\Phi_{ij}(x^1, x^2) \int_S m(x^1, x^2) \mu(x^1, x^2) \Phi_{ij}(x^1, x^2) dx^1 dx^2}{\mu(x^1, x^2) \int_S m(x^1, x^2) \Phi_{ij}^2(x^1, x^2) dx^1 dx^2}, \quad (11.2)$$

где $m(x^1, x^2)$ – функция распределения массы системы; $\Phi_{ij}(x^1, x^2)$ – функция формы собственных колебаний покрытия, а его значение определяется на основе численного интегрирования инвариантных динамических характеристик для дискретной конечноэлементной модели покрытия.

Функция распределения переносного движения в каждом конкретном случае может быть представлена в соответствии с рекомендациями [135], а формула для определения коэффициента динамичности имеет вид

$$\beta_{ij} = \frac{\Delta\beta_{ij}}{T_{ij}} = \frac{\Delta\beta_{ij} \omega_{ij}}{2\pi}, \quad (11.3)$$

где $\Delta\beta_{ij}$ – поправка к коэффициенту динамичности, отражающая уменьшение характеристики затухания всячих мембранно-стрепневых оболочек по сравнению со значением, принятым в действующих нормах [135]; T_{ij} – период собственных колебаний; ω_{ij} – частота собственных колебаний.

Спектр собственных частот и соответствующий им спектр форм собственных колебаний комбинированного всячего покрытия можно найти из решения так называемого векового уравнения, получаемого из соотношения (6.23) при $[C] = 0$ по стандартной схеме. При этом задача вычисления форм собственных колебаний дискретной конечноэлементной модели решается методом итераций подпространства.

Для нахождения максимальной величины сейсмической нагрузки, как показано в работе [135], в формуле (11.1) достаточно удержать только один член, зависящий от низшей формы колебаний, т. е. $S_{11}(x^1, x^2)$. Значение функции $\mu(x^1, x^2) = 1$, поскольку в этом случае ускорение переносного движения для всех точек колеблющейся системы одинаково. Кроме того было также принято, что $K_c = 0,1$ и $\Delta\beta_{ij} = 3,5$.

О характере напряженно-деформированного состояния покрытия при сейсмическом нагружении можно судить по результатам, отраженным на рис. 11.5–11.7. Опорный контур по всей своей длине оказался сжатым и практически безызгибным. Так, если максимальные сжимающие усилия $N = 5660$ кН, то изгибающие моменты не превышают $M = 192$ кН·м и почти не сказываются на его напряженном состоянии. Это свидетельствует о том, что очертание опорного контура покрытия близко к оптимальному. Перемещения контура в горизонтальной плоскости достигают наибольших значе-

ний в 43 и в 1365 узлах и соответственно равны $u_{43}^1 = -11,4$ см и $u_{1365}^2 = -4,9$ см.

Наиболее нагруженным элементом несущей системы УСЗЗ является трехгранная ферма, значение продольного усилия в которой находится в пределах от $N = -9910$ кН до $N = 8800$ кН, а изгибающих моментов — $M = -19430$ кН·м до $M = 9020$ кН·м. Соответственно сжимающие напряжения в верхнем поясе фермы достигают $\sigma_{\text{с}} = 24$ МПа, а растягивающие в нижнем — $\sigma_{\text{н}} = 75,6$ МПа. Перемещения узла опирания фермы на пилон $u_{811}^1 = -0,58$ см, $u_{811}^2 = -16,31$ см и $u_{811}^3 = -25,69$ см, а прогиб фермы в центральной точке составляет $u_{19}^3 = 77,91$ см.

Возникающие в направляющих нитях конечной жесткости продольные усилия и изгибающие моменты почти по всему пролету нити относительно невелики и только в местах примыкания к опорному контуру их значения резко (в 5–10 раз) увеличиваются. Максимальные растягивающее усилие и изгибающий момент наблюдаются в совпадающей с осью X_1 нити и составляют $N = 1999$ кН, $M = 163$ кН·м. Соответствующие данным силовым факторам напряжения в верхнем и нижнем поясах нити $\sigma_{\text{с}} = 413$ МПа, $\sigma_{\text{н}} = -210$ МПа при расчетном сопротивлении материала $R_y = 215$ МПа.

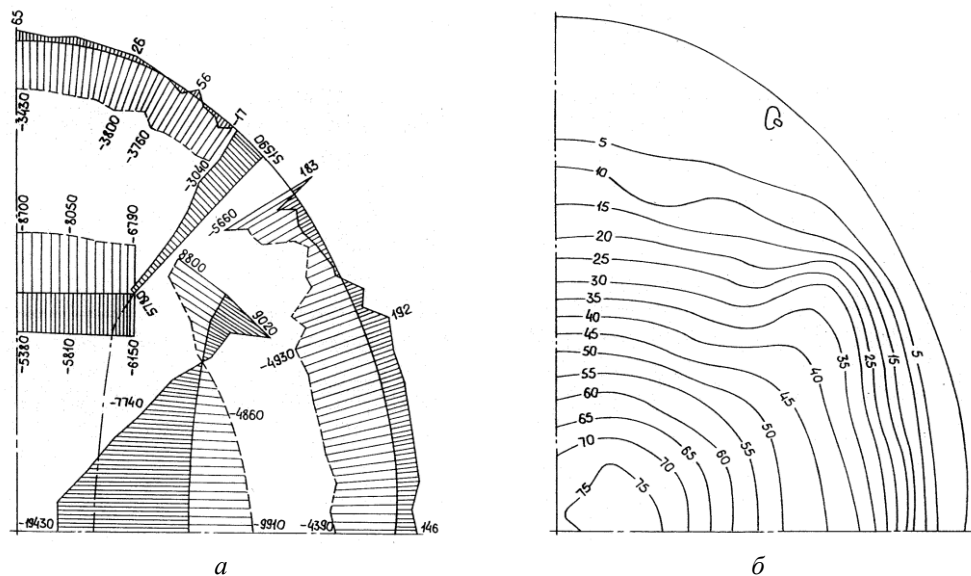


Рис. 11.5. К расчету покрытия универсального спортивно-зрелищного зала при статических и сейсмических нагрузках:

а — эпюры N (---), кН и M (—), кН·м в несущих элементах покрытия;
б — изолинии u^3 , см

Максимальные растягивающие напряжения в мембране $\sigma_m = 186$ МПа. В приконтурных зонах мембрана испытывает небольшое сжатие $\sigma_m = 50\text{--}100$ МПа, но в местах примыкания опорного контура к пилону модуль отрицательного главного напряжения достигает $\sigma_m = 374$ МПа, что может привести к образованию складок. Характер распределения главных напряжений на срединной поверхности мембранной оболочки показан на рис. 11.7.

Следует также отметить, что анализ результатов расчетов покрытия УСЗЗ на статическую и сейсмическую нагрузки показал, что данное сооружение мало восприимчиво к сейсмическим воздействиям. Учет в расчете сейсмических нагрузок при сейсмичности района строительства 9 баллов позволил уточнить его результаты в пределах 8% общего напряженно-деформированного состояния, что находится в пределах точности наших сведений о реальных нагрузках и задания исходных данных, а, следовательно, не оказывает решающего влияния на прочностные показатели.

На основании выполненного расчета можно заключить, что несущая система покрытия УСЗЗ обладает в целом достаточно большим запасом прочности. Небольшое перенапряжение наблюдается в направляющих нитях в местах их примыкания к опорному контуру. Здесь же в мембране возникают и складчатые зоны, обусловленные наличием ограниченного одноосного напряженного состояния. Подобные явления практически полностью зависят от начальной формы оболочки и условий ее закрепления, а потому могут быть легко устранены, например, путем установки в приугловых зонах покрытия распорок или жестких вставок.

§ 11.3. Висячий трубопроводный переход керосинопровода

На линии керосинопровода в районе г. Ангарска запроектирован двухниточный трубопроводный переход через р. Ангару, представляющий собой комбинированную пространственную вантово-стержневую систему, состоящую из несущих канатов, пилонов и соединительных тросовых элементов (рис. 11.8, а). Общая длина перехода – 702,958 м, пролет – 450 м, отметка верха пилона над уровнем земли – 48 м.

Несущие канаты разведены в плане, образуя пространственную конструкцию из двух наклонно расположенных под углом 45° висячих систем, соединенных между собой тросовыми стяжками с шагом 12 м. Посередине пролета расстояние между канатами составляет 6 м. Конструктивно трубы исключены из совместной работы с канатами (на рис. 11.8, а показаны жирной линией).

В расчетной схеме тросовые элементы представляются набором прямолинейных растянуто-напряженных стержней, а пилоны – прямолинейными сжатыми стержнями, шарнирно соединенными с тросовыми элементами и основанием. Схема разбивки вантово-стержневой системы перехода на конечные элементы изображена на рис. 11.8, б. Порядок нумерации узлов дискретной модели и ориентация осей глобальной системы координат понятны из рис. 11.8, б.

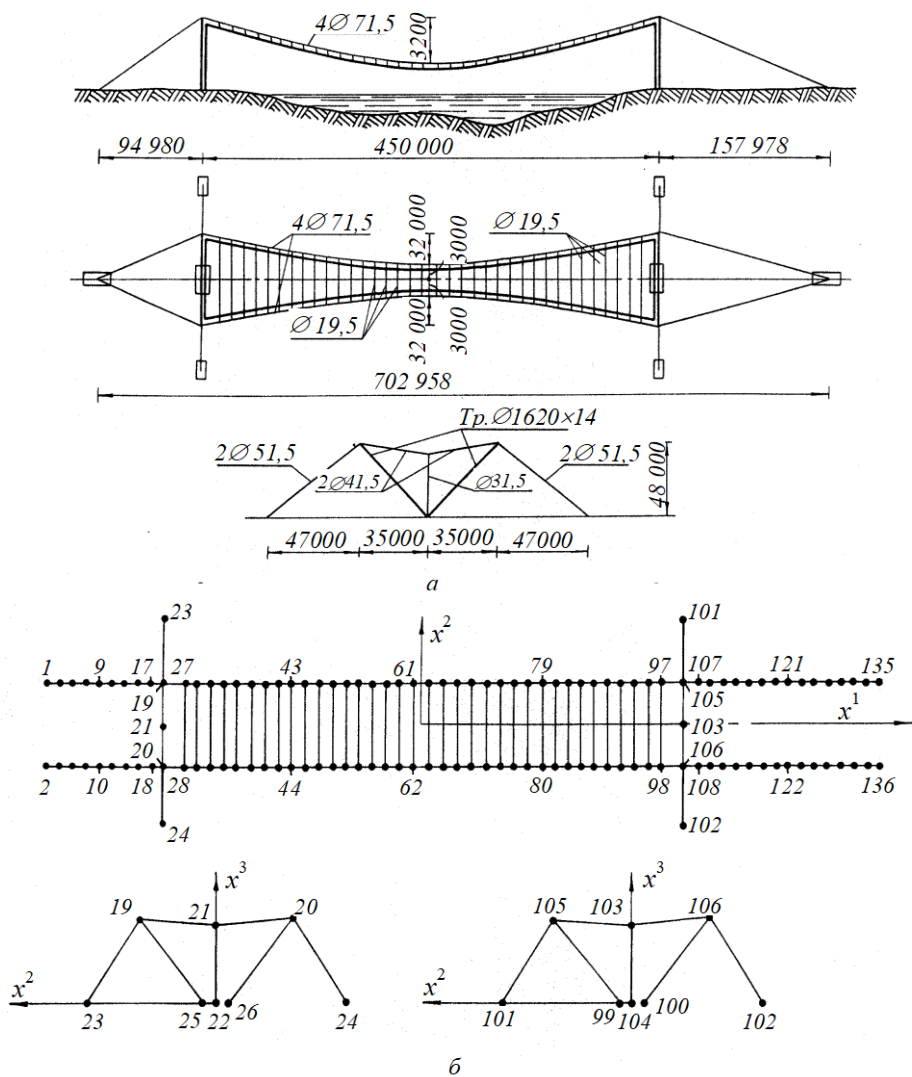


Рис. 11.8. Конструктивная (а) и топологическая (б) с нумерацией узлов схемы висячего трубопроводного перехода керосинопровода

При расчете трубопроводного перехода была поставлена задача определения начальной формы вантово-стержневой системы, напряженной действием собственного веса, и напряженно-деформированного состояния при действии различных эксплуатационных нагрузок и их комбинаций.

На первом этапе расчета была определена начальная конфигурация вантово-стержневой системы по ее заданным основным геометрическим параметрам. На втором – расчет трубопроводного перехода производился при следующих схемах нагружения:

- 1 – собственный вес ($q_1 = 6,55 \text{ кН/м}$) и снеговая нагрузка ($q_c = 1,828 \text{ кН/м}$);
 2 – то же и отрицательная разность температур ($\Delta t^x = -54^\circ\text{C}$);
 3 – « – и положительная разность температур ($\Delta t^t = 57^\circ\text{C}$);
 4 – « – и ветровая нагрузка ($q_w = 1,44 \text{ кН/м}$);
 5 – « – снеговая и ветровая нагрузки;
 6 – « – снеговая и ветровая нагрузки и отрицательная разность температур.

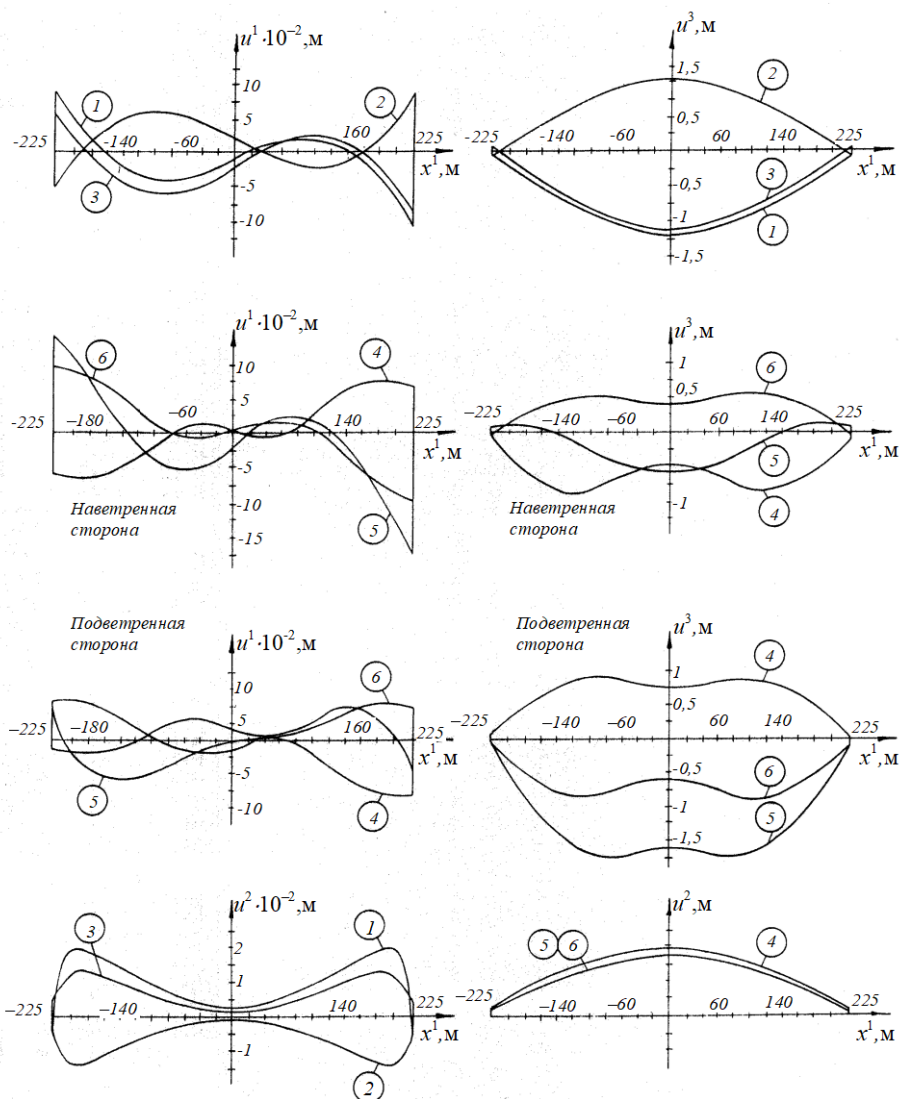


Рис. 11.9. Эпюры перемещений несущих канатов висячего трубопроводного перехода керосинопровода при различных схемах загрузки

О характере напряженно-деформированного состояния перехода можно судить по рис. 11.9. Максимальные продольные перемещения наблюдаются в точке крепления к пилону несущего каната, расположенного с наветренной стороны перехода, при 5-й схеме нагружения. Максимальное перемещение $u_1 = 0,148$ м. При остальных нагружениях перемещения вдоль оси трубопроводного перехода относительно малы.

Деформирование несущих канатов в горизонтальном, поперечном к оси трубопровода направлении при 1, 2 и 3-й схемах нагружения происходит симметрично. Максимальное перемещение канатов наблюдается в приопорных участках, и составляет $u^2 = 0,015$ м. При действии ветровой нагрузки (4, 5 и 6-я схемы нагружения) перемещения обоих канатов в горизонтальной плоскости приблизительно одинаковы. Максимальное отклонение канатов от начального положения наблюдается при 4-й схеме нагружения в середине пролета, $u^2 = 1,916$ м, что составляет 1/234 пролета.

Перемещения канатов в вертикальной плоскости при 1 и 3-й схемах нагружения практически совпадают, а при 4 и 6-й – имеют одинаковый характер. Максимальные перемещения возникают при 5-й схеме нагружения в несущем канате, расположенном с подветренной стороны перехода, $u^3 = 1,752$ м, что вполне допустимо.

Сопоставление результатов расчетов трубопроводного перехода на действие эксплуатационных нагрузок показало, что наиболее неблагоприятным сочетанием является собственный вес, снеговая и ветровая нагрузки и отрицательная разность температур. При этом в несущих канатах усилие $N = 8,885$ МН, что соответствует напряжению $\sigma = 6,117 \cdot 10^2$ МПа.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что рассчитанная конструкция висячего трубопроводного перехода керосинопровода обладает высокой несущей способностью и жесткостью, а усилия и перемещения при наиболее неблагоприятном сочетании эксплуатационных нагрузок находятся в допустимых пределах.

§ 11.4. Облегченная складчатая конструкция ангара для самолетов

В аэропорту г. Донецка запроектирован и рассчитан ангар для самолетов пролетом 48 м и длиной 49 м, представляющий собой бескаркасную тонкостенную складчатую конструкцию, состоящую из 7 одинаковых секций шириной 7 м. Каждая секция образована из жестко защемленной арки полигонального очертания, составленной из 14 однотипных панелей длиной 5 м, выполненных из холодногнутых алюминиевых листов толщиной 2,5 мм (рис. 11.10, а). Высота арки 21,5 м. Поперечное сечение секции здания показано на рис. 11.10, б. В местах изломов арки по всей длине сооружения расположены решетчатые диафрагмы из стальных холодногнутых профилей для придания ему повышенной жесткости. Ангар оборудован подвесным краном грузоподъемностью 50 кН и

пролетом 12 м, расположенным в центре здания.

Учитывая двустороннюю симметрию конструкции ангара, а также то, что здание состоит из 7 одинаковых складчатых секций, в качестве расчетной принята одна из этих секций (средняя). По направлению неучитываемых в расчете частей сооружения поставлены связи на соответствующие перемещения узлов (рис. 11.10, в).

В расчетной схеме листы секции представляются набором мембранных треугольных конечных элементов. Места стыковки листов секции, представляющие собой зоны повышенной жесткости, и решетчатые диафрагмы аппроксимируются стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения–сжатия. На рис. 11.10, в показана также схема разбивки расчетной секции на конечные элементы.

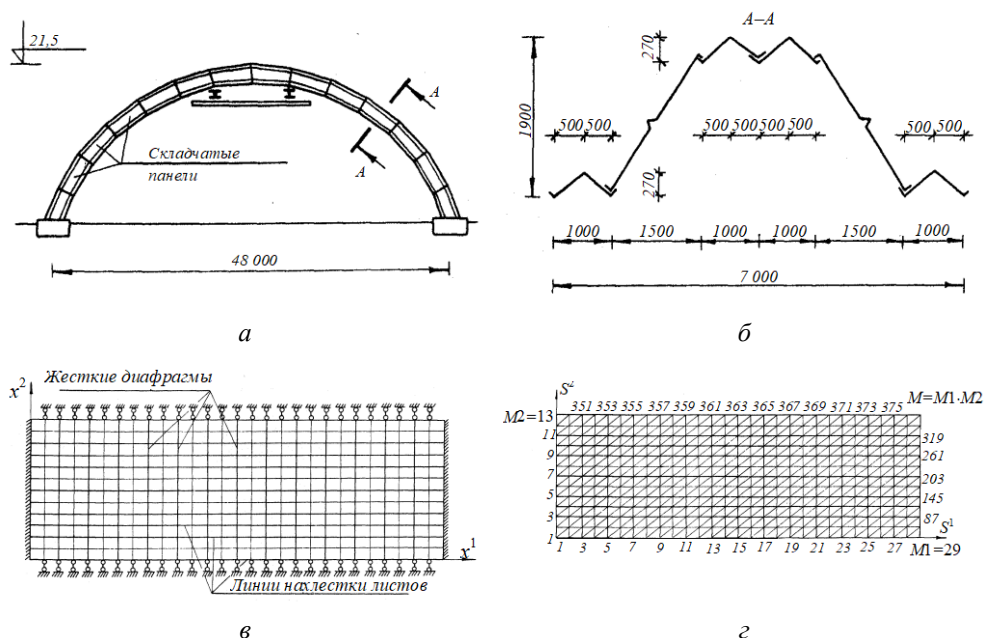


Рис. 11.10. Схемы облегченной складчатой конструкции ангара для самолетов: а – конструктивная – поперечного сечения сооружения; б – то же, складчатой секции; в – расчетная секции; з – топологическая складчатой секции с номерами координатных линий и узлов сеточной области

При описании топологической структуры конструкции расчетная схема секции отображается на прямоугольную сеточную область. Вводится местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 29$ и от 1 до $M2 = 13$ по каждому направлению, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 = 377$, как это показано на рис. 11.10, з. Таким образом, каждый узел дискретной модели определяется номером N с текущими сеточными координатами I, J соответственно

по S^1 и по S^2 . При этом величины N , I и J связаны зависимостью

$$N(I, J) = I + M1(I - 1). \quad (11.4)$$

Расчет ангара производился в три этапа. На первом – была определена исходная форма сооружения от действия собственного веса его конструктивных элементов (рис. 11.11, *а*). На втором – исследовано напряженно-деформированное состояние здания при четырех комбинациях постоянных и временных нагрузок (рис. 11.11, *б–д*) и определено наиболее неблагоприятное их сочетание, включающее собственный вес сооружения, симметричную снеговую нагрузку и нагрузку от кранового оборудования. На третьем – был произведен расчет здания на действие определенного ранее наиболее неблагоприятного сочетания нагрузок (рис. 11.11, *е*).

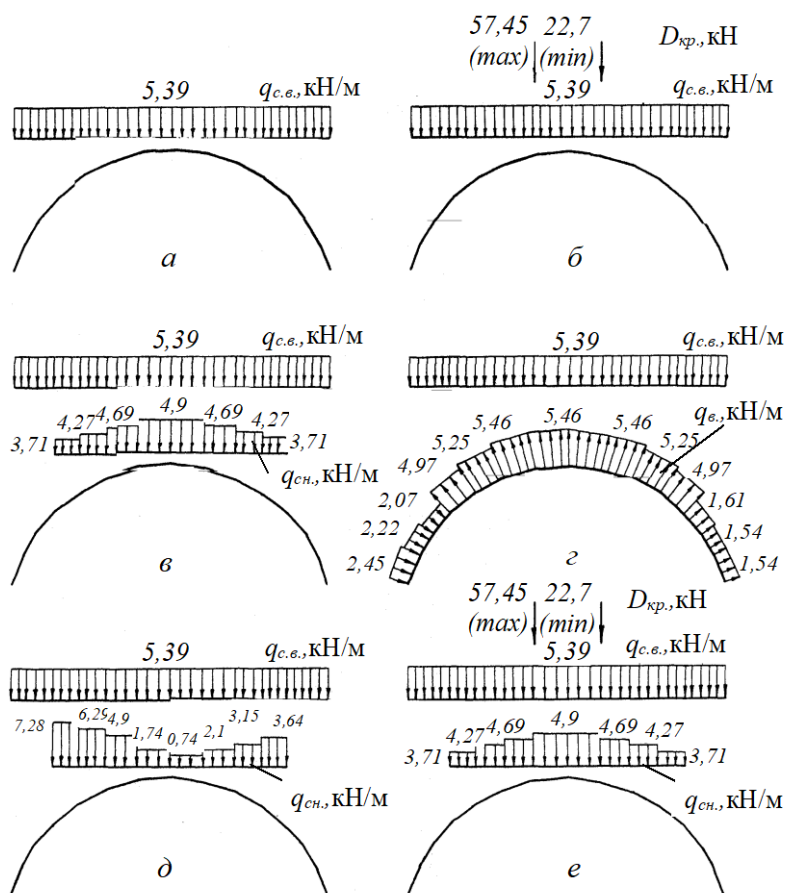


Рис. 11.11. Схемы загрузки (а–е) ангара постоянными и временными нагрузками

Результаты расчета в виде эпюр напряжений, возникающих в крайних волокнах поперечного сечения складчатой секции, и вертикальных перемещений ее нейтральной оси приведены на рис. 11.12. Причем каждая эпюра рис. 11.12 соответствует аналогичной на рис. 11.11. Из анализа представленных эпюр можно сделать следующие выводы. Наибольшие сжимающие напряжения, возникающие в месте опирания секции, составили $\sigma_{min} = 146$ МПа, что меньше расчетного сопротивления алюминиевого сплава $R_y = 150$ МПа. Максимальные растягивающие напряжения составили $\sigma_{max} = 91$ МПа. Наибольший прогиб наблюдается в коньке секции и равен $u^3_{max} = 7,43$ см, что также меньше допускаемого прогиба $[u] = 10,75$ см (1/200 высоты сооружения).

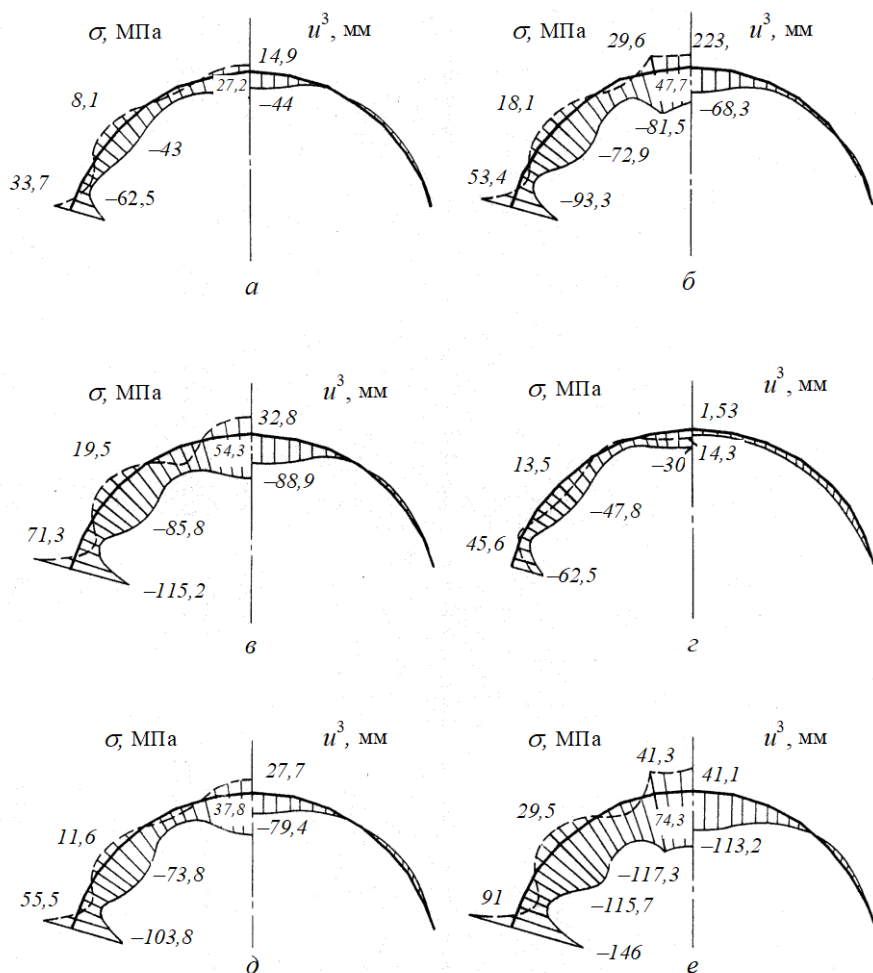


Рис. 11.12. Эпюры напряжений — — — σ_{max} ; — σ_{min} и перемещений складчатой секции ангара при различных схемах загрузки (а–е)

Результаты свидетельствуют о том, что рассчитанное сооружение имеет высокую несущую способность и жесткость, а напряжения и перемещения при полной эксплуатационной нагрузке находятся в допустимых пределах. Максимальные напряжения возникают в местах опирания секции на фундамент и, хотя не достигают допускаемых значений, весьма близки к ним. Поэтому для обеспечения нормальной эксплуатации сооружения было рекомендовано заменить жесткое опирание секции на шарнирное или применить другие специальные способы крепления.

§ 11.5. Висячая мембранная оболочка покрытия

Рассмотрим покрытие, представляющее собой висячую мембранную оболочку на упруго-податливом трубобетонном опорном контуре прямоугольной формы, поддерживаемом спаренными железобетонными колоннами. Отличительной чертой данного покрытия является то, что мембрана крепится к опорному контуру по всему периметру.

В процессе монтажа на отметке покрытия из отдельных стальных листов сваривается первоначально плоская мембрана и опорный контур с дополнительной арматурой. При подъеме в проектное положение оболочка под действием собственного веса, начальных несовершенств при сварке и прогиба контура принимает свободно провисающую форму. После закрепления опорный контур заполняется бетоном. По достижении бетоном расчетной прочности по мембране укладывается стабилизирующий и антикоррозионный слой торкрет-бетона, слой утеплителя и рулонный ковер на мастике.

Постоянной нагрузкой, действующей на покрытие, является собственный вес его несущих и конструктивных элементов. В качестве временной принята снеговая нагрузка. Воздействие ветрового давления на пологую мембрану с учетом стабилизирующего слоя оказывает только разгружающее влияние и при расчете не принимается во внимание.

Конструктивная схема висячего покрытия показана на рис. 11.13, а. Как уже отмечалось, прямоугольная в плане мембранная оболочка подвешена на достаточно гибком ($h/l = 1/50 \dots 1/100$) замкнутом опорном трубобетонном контуре. Покрытие является конструктивно анизотропным, состоящим из двух слоев – стальной мембраны толщиной 4 мм и железобетонной тонкой оболочки толщиной 30 мм. Модуль упругости материала мембраны $E_m = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,33$. Для железобетонной оболочки соответственно принимаем $E_{об} = 3 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{об} = 0,18$. Опорный трубобетонный контур приводится к эквивалентному стержню с круглым поперечным сечением площадью $F_k = 1,169 \text{ м}^2$ и модулем упругости $E_k = 3,92 \cdot 10^4$ МПа. Исходная форма покрытия определяется по формуле

$$z = -f_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (11.5)$$

где f_0 – начальная стрела провисания; a и b – половина длины и ширины покрытия соответственно.

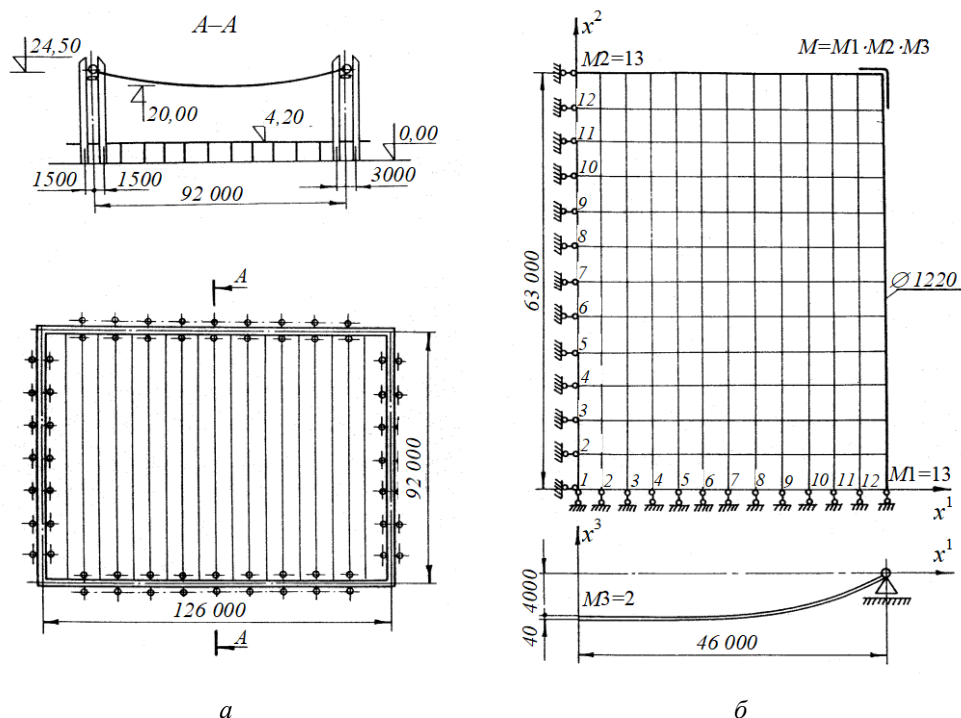


Рис. 11.13. Конструктивная (а) и расчетная (б) с нумерацией координатных линий сеточной области схемы висячего покрытия

Ввиду симметрии конструкции и действующих нагрузок расчеты произведены для 1/4 части покрытия. Расчетная схема фрагмента изображена на рис. 11.13, б. При описании топологической структуры покрытия расчетная схема фрагмента отображается на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 13$, от 1 до $M2 = 13$ и от 1 до $M3 = 2$ по каждому направлению, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели понятен из рис. 11.13, б.

В расчетной схеме оболочка представляется набором мембранных четырехугольных конечных элементов, а контур – стержневыми конечными элементами, воспринимающими растяжение – сжатие с изгибом. По осям симметрии фрагмента наложены связи на соответствующие перемещения уз-

лов, а узел, находящийся в углу опорного контура, закреплен жестко.

О характере напряженно-деформированного состояния покрытия при полной расчетной нагрузке (2,63 МПа) можно судить по результатам, показанным на рис. 11.14. Опорный контур практически по всей длине оказался сжатым и только в приугловых участках наблюдаются растягивающие усилия. Изгибающие моменты в контуре относительно невелики, за исключением тех же приугловых участков, где момент достигает достаточно большого значения. Максимальные сжимающие усилия, изгибающие моменты и прогибы в контуре (в горизонтальной плоскости) составляют: $N = 4352$ кН, $M = 13383$ кН·м, $u^1 = 0,38$ м. Прогиб висячей оболочки в центральной точке $u^3 = 1,22$ м.

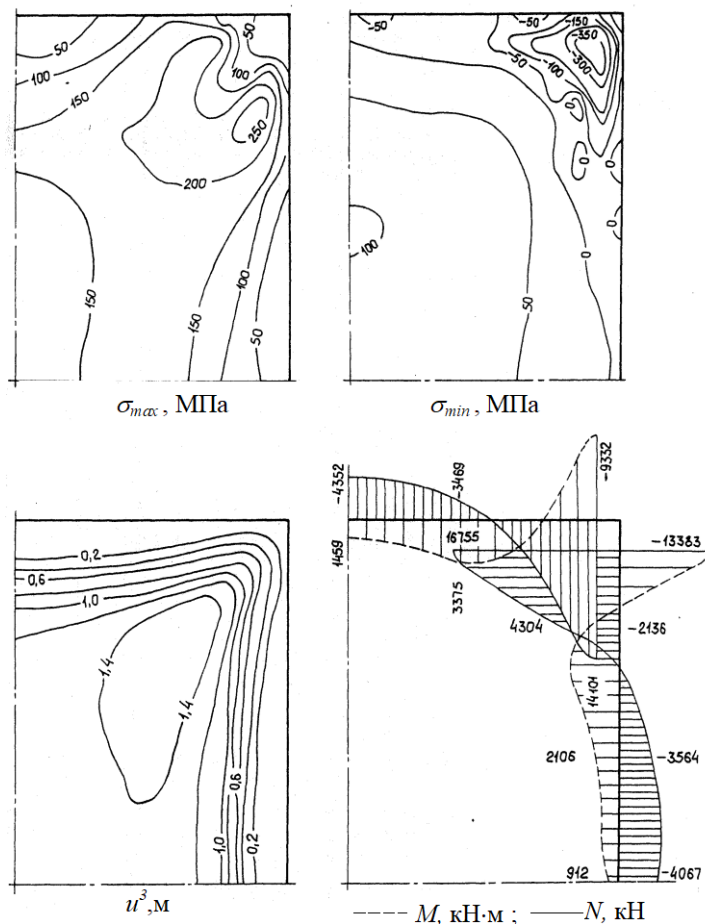


Рис. 11.14. К расчету висячего покрытия

Максимальные мембранные напряжения в оболочке $\sigma_{max} = 261$ МПа. Некоторые элементы оболочки в приугловых зонах испытывают одноосное напряженное состояние. При этом модуль отрицательного главного напряжения достаточно большой $\sigma_{min} = 368$ МПа, что может привести к образованию значительных складок. Для предотвращения подобного явления и для восприятия сжимающих напряжений в приугловых зонах покрытия необходимо предусмотреть специальные распорки или жесткие вставки. В этом случае принятая конструкция покрытия обеспечит его нормальную эксплуатацию.

§ 11.6. Трансформирующаяся вантово-стержневая оболочка

Выполнен расчет трансформирующейся вантово-стержневой оболочки, которая при освобождении некоторых связей превращается в механизм, изменяющий свои размеры без нарушения целостности узловых соединений. Складывание такой системы производится за счет продавливания половины узлов каркаса к центру кривизны. Обратный процесс – раскрытие осуществляется путем поочередного выдавливания тех же узлов в проектное положение.

Общий вид трансформирующейся вантово-стержневой оболочки пролетом 20,5 м и высотой 4,72 м показан на рис. 11.15, *а*. Ее каркас образован из шестиугольных ячеек, выполненных из элементов двух типов: стержней, способных воспринимать растяжение–сжатие (на рис. 11.15 выделены жирными линиями), и ванта, воспринимающих только растягивающие усилия. В исходном недеформированном состоянии стержни предварительно сжаты усилием $N = 500$ Н, а ванты предварительно растянуты усилием $N = 144$ Н.

В связи с несимметричностью конструкции относительно осей координат в качестве расчетной схемы принята вся оболочка с учетом наложенных на ее конструктивных элементов связей. При разбивке трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на составляющие фрагменты было учтено наличие в ее конструкции так называемых «верхних» и «нижних» узлов (см. рис. 11.15, *б*, где «верхние» узлы обозначены точками). В связи с этим в отдельные фрагменты были выделены соединяющие «верхние» и «нижние» узлы вантовые сети, а также сжатые стержневые элементы. Схемы разбивки оболочки на фрагменты с нумерацией узлов сеточной области изображены на рис. 11.16 и 11.17. Тонкими линиями показаны «фиктивные» стержни и узлы, введенные в топологические схемы вантовых сетей и сжатых стержней с целью придания им большей регулярности.

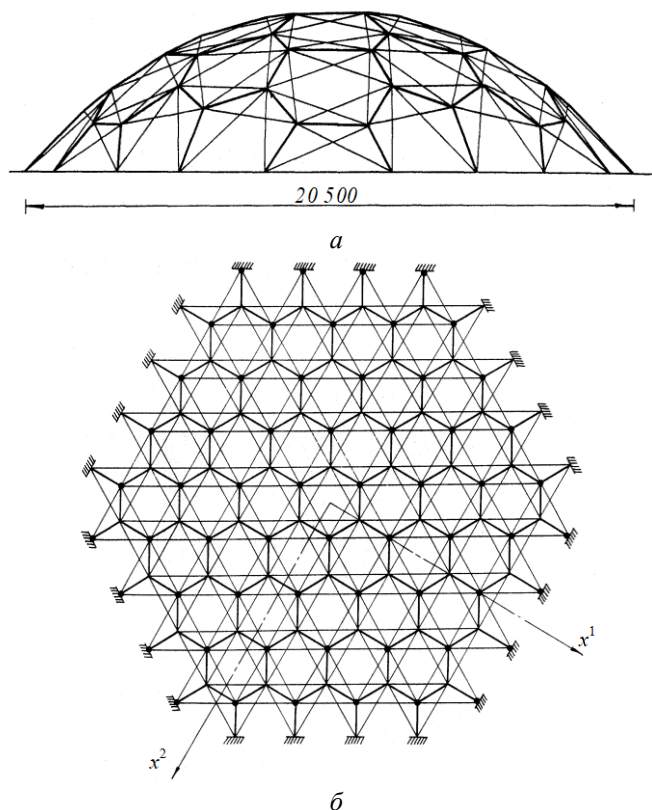


Рис. 11.15. Общий вид (а) и расчетная схема (б) трансформирующейся вантово-стержневой оболочки

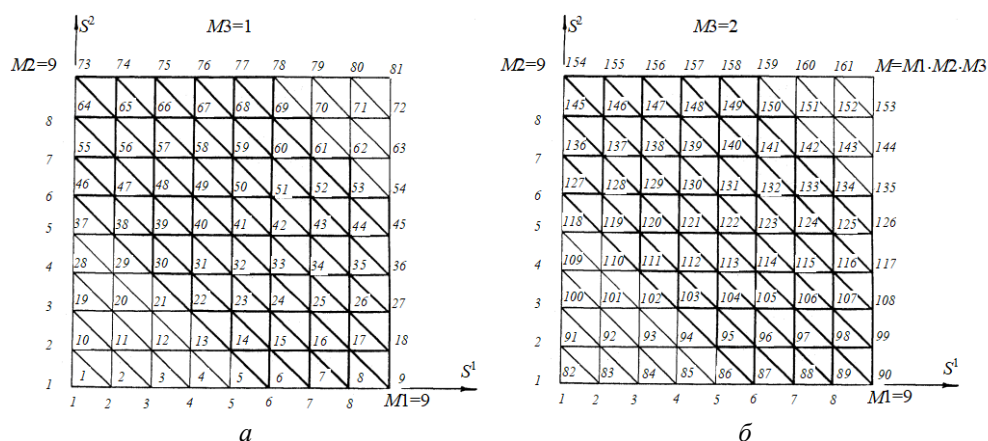


Рис. 11.16. Топологические схемы фрагментов вантовых сетей трансформирующейся вантово-стержневой оболочки:

а – вантовая сеть, соединяющая «нижние» узлы; б – то же, соединяющая «верхние» узлы

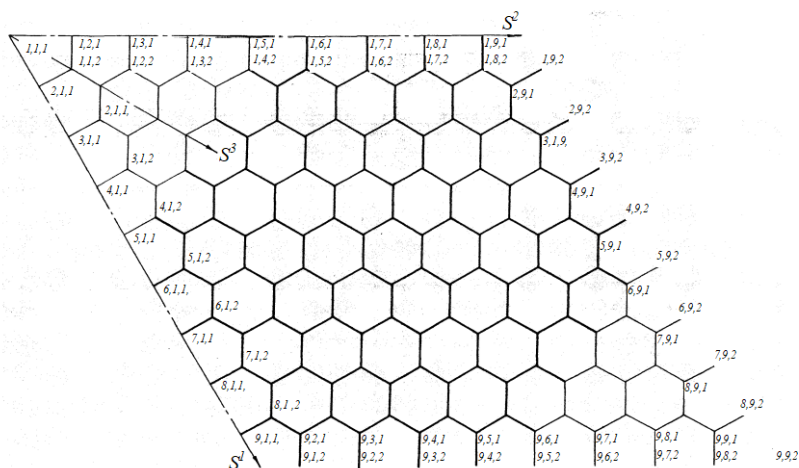


Рис. 11.17. Топологическая схема фрагмента сжатых стержней трансформирующейся вантово-стержневой оболочки

Указанные фрагменты отображаются на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов по оси S^1 от 1 до $M1 = 9$, по оси S^2 от 1 до $M2 = 9$ и по оси S^3 от 1 до $M3 = 2$, как показано на рис.11.16 и 11.17, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Таким образом, каждый узел дискретной модели определяется номером N с текущими сеточными координатами I, J, K соответственно по осям S^1, S^2, S^3 . При этом величины N, I, J, K будут связаны зависимостью

$$N(I, J, K) = I + M1(I - 1) + M1 \cdot M2(K - 1). \quad (11.6)$$

Отметим также, что в расчетной схеме ванты представляются набором прямолинейных стержневых конечных элементов, способных воспринимать только растягивающие усилия, а сжатые элементы – прямолинейными стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения – сжатия.

Расчет трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на общую устойчивость проводился при двух типах нагружения:

полном – когда направленная по оси x^3 нагрузка прикладывалась во все узлы оболочки;

неполном – когда направленная по оси x^3 нагрузка прикладывалась только к «верхним» узлам оболочки.

Как в первом, так и во втором случаях в качестве исходного положения для дальнейших расчетов принималось равновесное состояние оболочки, полученное с учетом собственного веса ее конструктивных элементов и заданных усилий преднапряжения.

В результате расчета было установлено, что критическая нагрузка при

первом типе нагружения $P_{кр} = 370$ Н, при втором – $P_{кр} = 170$ Н. На рис. 11.18 изображены кривые «нагрузка–перемещение» для наиболее характерных узлов оболочки. Из анализа представленных результатов видно, что при увеличении нагрузки некоторые узлы оболочки претерпевают положительные перемещения (опускаются), а другие – отрицательные (поднимаются). Причем если при полном нагружении поднимаются только крайние как «нижние», так и «верхние» узлы, а все остальные опускаются, то при неполном нагружении поднимаются независимо от их расположения исключительно «нижние» узлы, а все «верхние» также независимо от их расположения опускаются. Такое деформирование оболочки объясняется ее значительной конструкционной нелинейностью.

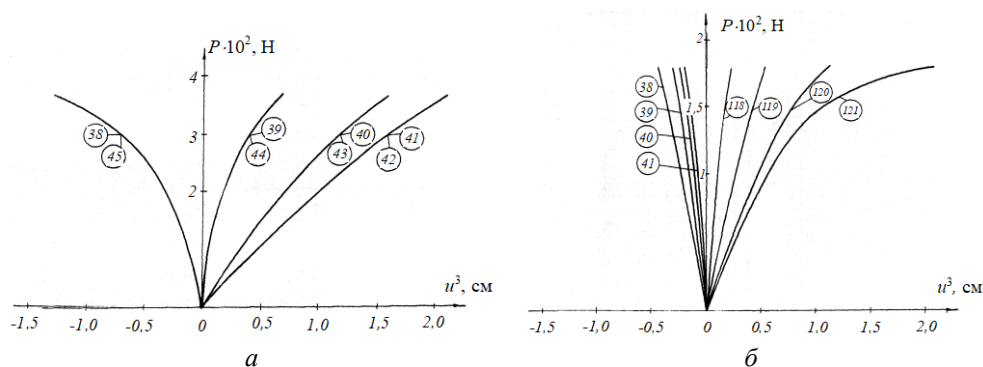


Рис. 11.18. К расчету трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на общую устойчивость:

a , $б$ – кривые «нагрузка – перемещение»
соответственно для полного и неполного нагружения

§ 11.7. Висячее покрытие универсального производственного здания

Исследовано напряженно-деформированное состояние висячего покрытия круглого в плане универсального производственного здания диаметром 51,4 м (рис. 11.19, a). Мембранная оболочка подвешена на внешнем упруго-податливом замкнутом кольцевом железобетонном контуре с отношением $H/R = 1/100$. В центре покрытия имеется отверстие диаметром 4,1 м, через которое по технологическим требованиям проходит вентиляционная шахта. В месте примыкания к шахте мембрана опирается на внутренний упруго-податливый контур ($h/r = 1/100$). Материал мембраны – тонкий стальной лист с приведенной толщиной $h_m = 4$ мм, модулем упругости $E_m = 2,1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu_m = 0,3$. Модуль упругости и коэффициент Пуассона материала опорных контуров для приведенного сечения соответственно равны $E_k = 2,273 \cdot 10^4$ МПа и $\nu_k = 0,2$.

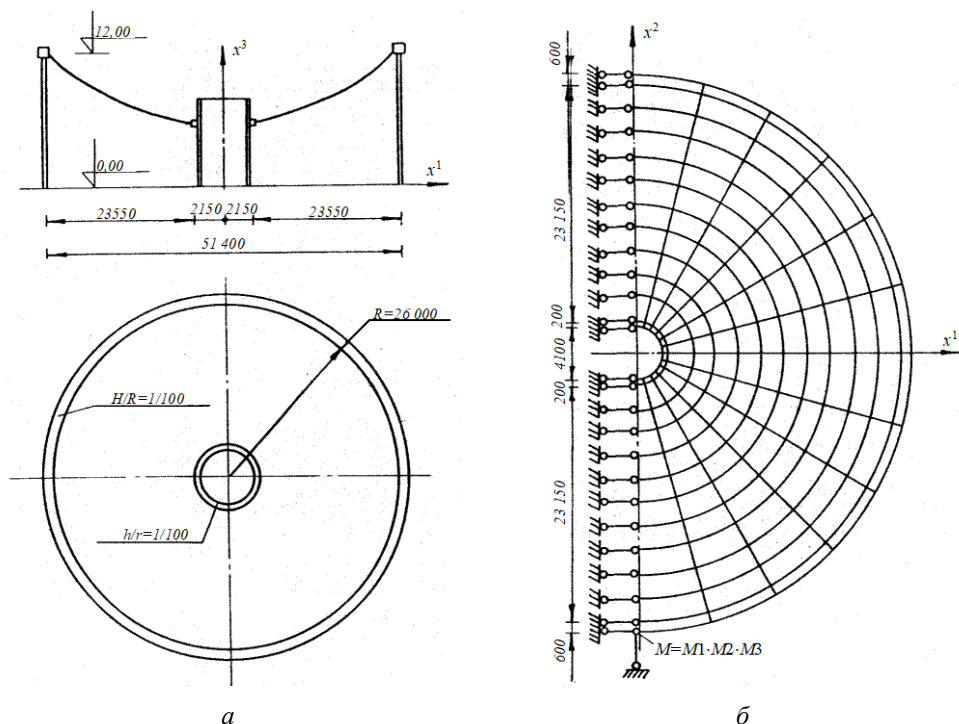
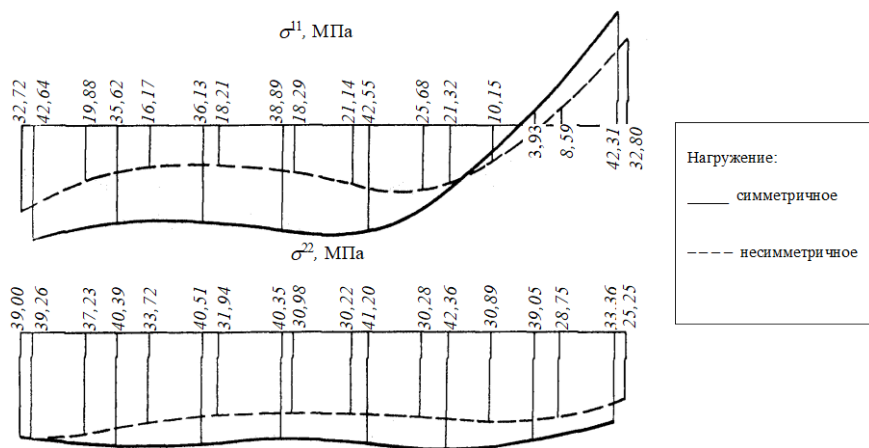


Рис. 11.19. Конструктивная (а) и расчетная (б) схемы висячего покрытия универсального производственного здания

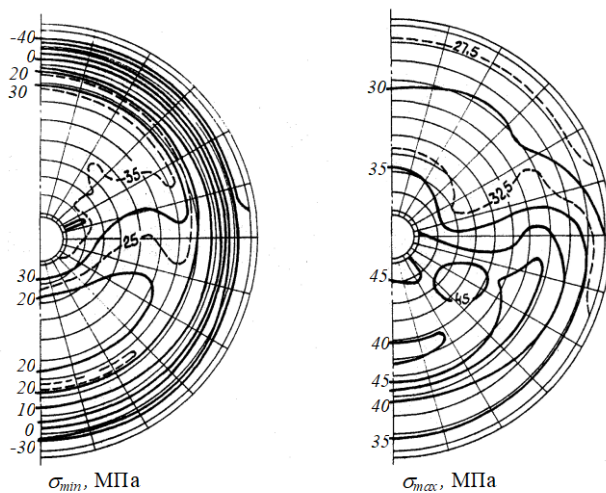
Исходная форма мембранной оболочки задана в виде перевернутого усеченного параболоида вращения диаметром в основании 50,8 м, в вершине – 4,5 м при высоте 5,6 м. Начальные координаты поверхности оболочки определяются по формуле

$$z = \frac{5}{23,15^2} \left(x^2 + y^2 - 4,5\sqrt{x^2 + y^2} + 5,0625 \right) + 0,004. \quad (11.7)$$

При описании топологической структуры конечно-элементной модели покрытия расчетная схема отображается на сеточную область с единичными размерами ячеек, координатными линиями которой являются равномерно расположенные concentricкие полуокружности (направление S^1). Вводится местная нумерация узлов модели: в плане от 1 до $M1 = 13$ и от 1 до $M2 = 13$, по толщине оболочки от 1 до $M3 = 2$, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели понятен из рис. 11.19, б. По оси симметрии расчетной схемы наложены связи на перемещения по оси x^1 , а опорные контуры покрытия закреплены от смещения по третьему направлению. С целью исключения смещения дискретной модели в горизонтальной плоскости на один из узлов внешнего опорного контура наложены связи, обеспечивающие его шарнирное закрепление.



а



б

Рис. 11.20. К расчету висячего покрытия универсального производственного здания:
 а – распределение главных напряжений в кольцевом направлении;
 б – распределение главных мембранных напряжений

Расчет конструкции покрытия производился в два этапа: на постоянную (собственный вес) нагрузку интенсивности $q_1 = 3,8 \text{ кН/м}^2$ с учетом временной (снеговой) как симметричной по всему покрытию, так и несимметричной на половине покрытия нагрузки интенсивностью $q_c = 0,2 \text{ кН/м}^2$. При симметричном нагружении расчет выполнялся для 1/4 покрытия без закрепления внутреннего опорного контура, а при несимметричном – для половины покрытия.

О характере напряженно-деформированного состояния мембранного покрытия можно судить по результатам, показанным на рис. 11.20.

Максимальные растягивающие напряжения в мембране $\sigma^{22} = 42,36$ МПа возникают при действии симметричной нагрузки в радиальном направлении. Некоторые элементы мембраны в приконтурных зонах испытывают достаточно большое сжатие. При этом модуль отрицательного главного напряжения в кольцевом направлении $\sigma^{11} = 42,31$ МПа при симметричном и $\sigma^{11} = 32,8$ МПа при несимметричном нагружении, что может привести к образованию складок. Характер распределения главных мембранных напряжений в покрытии при несимметричном нагружении показан на рис. 11.20. Максимальные сжимающие усилия в опорных контурах возникают при действии симметричной нагрузки и для внешнего и внутреннего контура соответственно будут $N_1 = 2407,2$ кН и $N_2 = 360,7$ кН.

На основании выполненного расчета можно заключить, что висячая мембранная оболочка обладает значительным запасом прочности, поскольку толщина листовой стали подбиралась не по прочностным, а по конструктивным и технологическим требованиям. Складчатые зоны, обусловленные наличием ограниченного одноосного напряженного состояния, могут возникать в приконтурной зоне мембранной оболочки и распространяться до $1/6$ – $1/5$ длины радиуса в зависимости от условий закрепления оболочки и ее начальной формы.

Глава 12. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ РАССЛОЕНИЙ

§ 12.1. Исследование влияния расслоений на несущую способность сотовой пластины

Рассмотрена свободно опертая трехслойная квадратная пластина с изотропными обшивками и сотовым заполнителем, образованным ячейками правильной шестиугольной формы (рис. 12.1, а). Обшивки и соты заполнителя изготовлены из пластинок оргстекла со следующими геометрическими и физическими параметрами: $L = 20$ см; $h_{(-)} = h_{(+)} = 0,1$ см; $2h = 4$ см; $\delta_3 = \delta_4 = 0,05$ см; $a = 0,866$ см; $b = c = 1$ см; $\alpha = 60^\circ$; $E_{(-)} = E_{(+)} = E_3 = E_4 = 0,275 \cdot 10^4$ МПа; $G_{(-)} = G_{(+)} = G_3 = G_4 = 10^3$ МПа; $\nu_{(-)} = \nu_{(+)} = \nu_3 = \nu_4 = 0,3$.

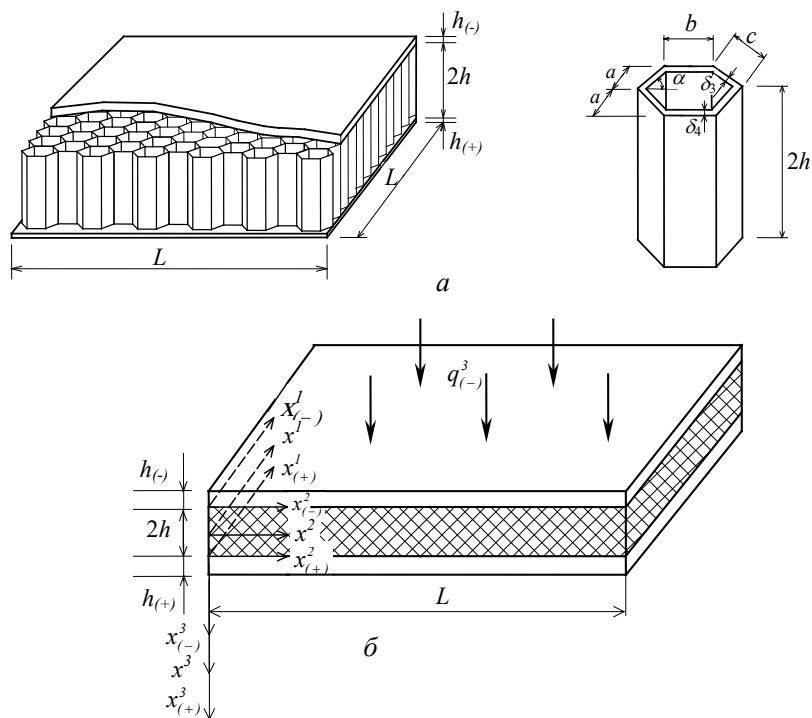


Рис. 12.1. Общий вид (а) и расчетная схема (б) сотовой пластины

При расчете сотовый заполнитель был заменен условным однородным по объему сплошным ортотропным слоем (рис. 12.1, б), упругие параметры которого вычислялись по формулам (8.57). В результате были определены приведенные механические характеристики сотового заполнителя: модули

упругости по направлениям x^1, x^2, x^3 – $E'_1 = 0,1525 \cdot 10^2$ МПа, $E'_2 = 0,1524 \cdot 10^2$ МПа, $E'_3 = 0,2118 \cdot 10^3$ МПа; коэффициенты Пуассона $\nu_{21} = 0,8248$, $\nu_{32} = \nu_{23} = 0$; модули сдвига в плоскостях x^1x^2 , x^2x^3 и x^1x^3 – $G_{12} = 0,1986 \cdot 10^2$ МПа, $G_{23} = 0,3664 \cdot 10^2$ МПа, $G_{13} = 0,3256 \cdot 10^2$ МПа.

Исследовано влияние участков расслоений на параметры напряженно-деформированного состояния данной трехслойной пластины при действии двух видов внешней нагрузки: равномерно распределенной по поверхности первого слоя интенсивностью $q_{(-)}^3 = 1$ МПа и сжимающей в направлении x^1 интенсивностью $T^{11} = 1$ МН/м, равномерно распределенной по торцам 1-го слоя на линиях его контакта с заполнителем. Участки расслоений располагались между наружными слоями и заполнителем, при этом на участках расслоений обшивки при изгибе пластины скользят по заполнителю без отрыва. Рассматривались различные варианты расположения участков расслоений по площади контактирующих слоев: в центре, в углу, у краев, у торца. В качестве расчетного фрагмента с учетом симметрии принималась четверть пластины, на которую накладывалась конечноразностная сетка 9×9 узлов. Результаты исследования сходимости решений в зависимости от густоты конечноразностной сетки приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Компоненты напряженно-деформированного состояния	Густота сетки		
	5×5	9×9	13×13
$u_{3(-)}$, см	0,0128	0,0129	0,0129
$\sigma_{(-)}^{11}$, МПа	–10,359	–9,616	–9,41

Результаты исследования деформирования конструкции при действии нормальной и торцевой нагрузок показаны соответственно на рис. 12.2–12.4.

На рис. 12.2, а и 12.3, а изображены графики зависимости относительного прогиба u_3 / u_{3c} (u_3 – расчетный прогиб в центре пластины при заданном участке расслоения; u_{3c} – максимальный прогиб при совместной работе слоев) от отношения $(\Delta S / S)^{0,5}$, где ΔS – площадь участка расслоения, S – площадь контактирующей поверхности слоя пластины. Сплошные линии характеризуют зависимость прогиба пластины от площади участка расслоения 1-го слоя от заполнителя, пунктирные – 3-го слоя. Для случая равномерно распределенного давления сплошные и штриховые линии совпадают.

Установлено, что при действии равномерно распределенной нагрузки существенное увеличение прогибов происходит, когда площадь участка расслоения достигает 20–25% площади пластины. При торцевой нагрузке на первый слой при расслоениях между 1 и 2-м слоями наблюдается резкое уменьшение прогибов до нуля. При этом влияние расслоений более значительно при отслоении 3-го слоя, прогибы в 2–10 раз больше соответствующим

щих значений, полученных при отслоении участков 1-го слоя. В обоих случаях нагружения развитие расслоений из центра или из угла пластины не оказывает заметного влияния на деформирование трехслойной пластины. Значительное увеличение прогибов происходит при расслоении, равном 60–70% площади поверхности слоя. При полном отслоении 3-го слоя оно превышает значение прогиба для бездефектной пластины в 1,3–1,5 раза. Наибольшее расхождение между прогибами дефектной и бездефектной пластин наблюдается при развитии расслоений от краев к центру пластины. Анализ данных на рис. 12.2, *а* и 12.3, *а* показывает, что для двух видов внешней нагрузки наиболее неблагоприятное влияние на прогибы рассмотренной конструкции оказывают расслоения, развивающиеся от краев к центру пластины.

На рис. 12.2, *б*; 12.3, *б* и *в* соответственно для двух случаев нагрузки приведены графики зависимости относительных нормальных напряжений $\sigma^{11}/\sigma_c^{11}$ и $\sigma^{22}/\sigma_c^{22}$ (σ^{11}, σ^{22} – расчетные нормальные напряжения в центре на лицевой поверхности первого слоя при заданном участке расслоения; $\sigma_c^{11}, \sigma_c^{22}$ – аналогичные напряжения при совместной работе слоев) от отношения $(\Delta S/S)^{0.5}$. Сплошными линиями обозначены отслоения участков 1-го слоя, пунктирными – участков 3-го слоя. Следует отметить, что для данной конструкции при действии равномерно распределенного давления значения нормальных напряжений σ^{11}, σ^{22} совпадают (см. рис. 12.2, *б*). Совпадают также значения напряжений, полученные при отслоении аналогичных участков 1 и 3-го слоев. При этом видно, что с увеличением площади участков расслоений напряжения уменьшаются в 3–4 раза и при полном отслоении одного из наружных слоев приближаются к нулю. Существенное уменьшение напряжений происходит, когда площадь участков расслоения достигает 20–25% площади поверхности слоя.

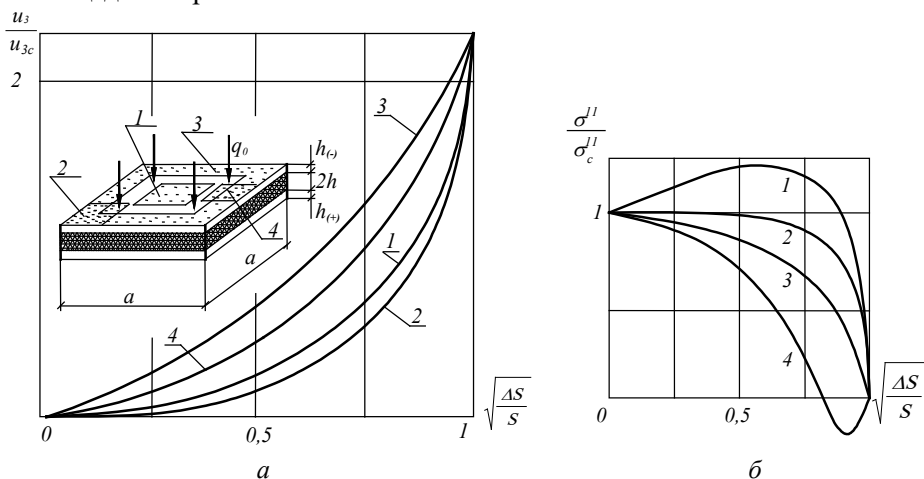


Рис. 12.2. Зависимость прогибов пластины (*а*) и напряжений (*б*) при равномерно-распределенной нагрузке от площади участков расслоений, расположенных:
1 – в центре; 2 – в углу; 3 – у краев; 4 – у торца

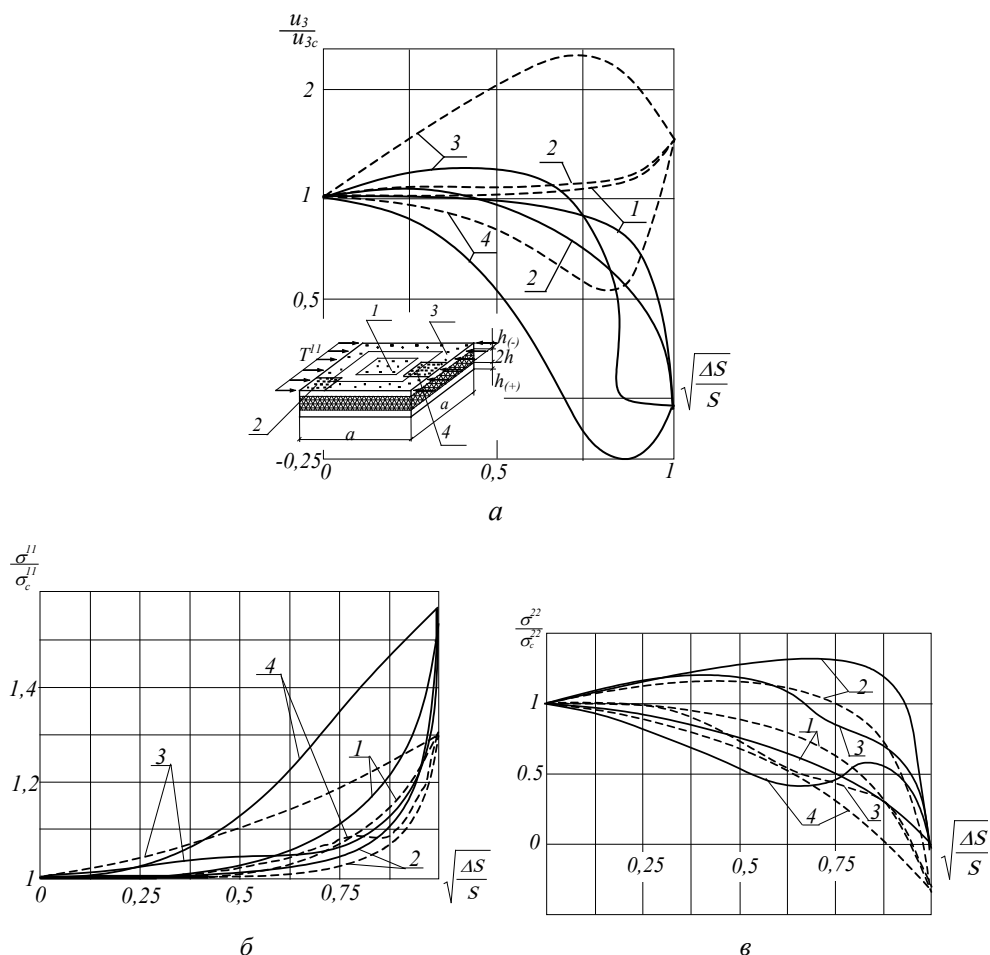


Рис. 12.3. Зависимость прогибов пластины (а) и напряжений (б) при торцевой нагрузке от площади участков расслоения, расположенной: 1 – в центре; 2 – в углу; 3 – у краев; 4 – у торца

Кривые нормальных напряжений $\sigma^{22}/\sigma_c^{22}$ при сжимающей торцевой нагрузке (см. рис. 12.3, б) сходны по виду и характеру распределения с аналогичными кривыми для равномерно распределенной нагрузки. При этом во всех случаях отслоений резкое уменьшение напряжений наблюдается при площади расслоений, достигающей 60–65% площади соответствующего слоя пластины. Нормальные напряжения σ^{11} (см. рис. 12.3, а) возрастают с увеличением площади расслоений, и при полном отслоении 1 или 3-го слоев превышают значение σ_c^{11} соответственно в 1,6 и 1,3 раза. Заметное увеличение напряжений для всех случаев отслоений происходит, когда площадь участков расслоения достигает 30% площади поверхности слоя.

Анализ графиков на рис. 12.3 показывает, что для обоих рассмотренных видов нагрузки наиболее неблагоприятное влияние на деформирование сотовой пластины оказывает расслоение, развивающееся от краев к центру (кривые 3) и от торца к центру (кривые 4) конструкции. В этих случаях значения прогибов в 2–3 раза больше аналогичных значений, получаемых при развитии участков расслоений из центра (кривые 1) и из угла (кривые 2) пластины. Для сжимающей нагрузки T^{11} при развитии расслоений от краев к центру конструкции наиболее существенное расхождение между прогибами u_3 и u_{3c} наблюдается в случае отслоения участков 3-го слоя.

§ 12.2. Расчет элемента панели кия самолета

Выполнен анализ деформирования элемента панели кия самолета, расположенного в корневой части кия и представляющего собой трехслойную пластину, наружные слои которой являются слоистыми композитами. Верхний композит состоит из четырех, а нижний из восьми одинаковых монослоев, уложенных под разными углами (рис. 12.4). Средний слой панели имеет коробчатую структуру и образован намоткой двух одинаковых монослоев. Материал монослоев – углепластик на основе углереленты ЭЛУРП-0,8 и связующего ЭДТ-69Н. Геометрические и физические характеристики монослоя в системе координат $x_i^1 x_i^2 x_i^3$, где оси x_i^1 и x_i^2 совпадают с главными направлениями упругости слоя, следующие: длина $l = 0,75$ м; ширина $a = 0,4$ м; толщина $h_i = 8 \cdot 10^{-4}$ м; модули упругости по направлениям x_i^1 , x_i^2 – $E_{1i} = 1,35 \cdot 10^5$ МПа, $E_{2i} = 8 \cdot 10^3$ МПа; модуль сдвига в плоскости $x_i^1 x_i^2$ – $G_{12i} = 6 \cdot 10^3$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu_{21i} = 0,286$.

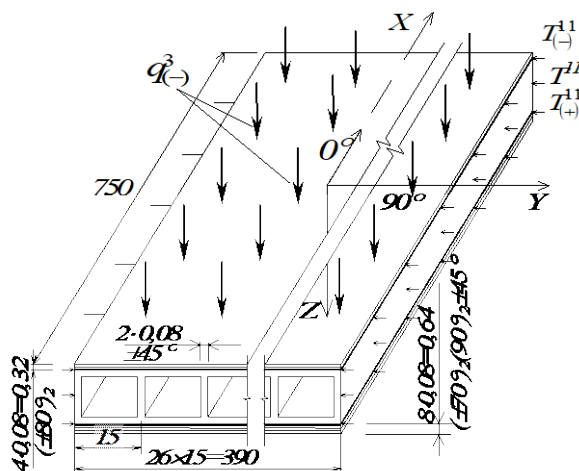


Рис. 12.4. К расчету элемента панели кия самолета

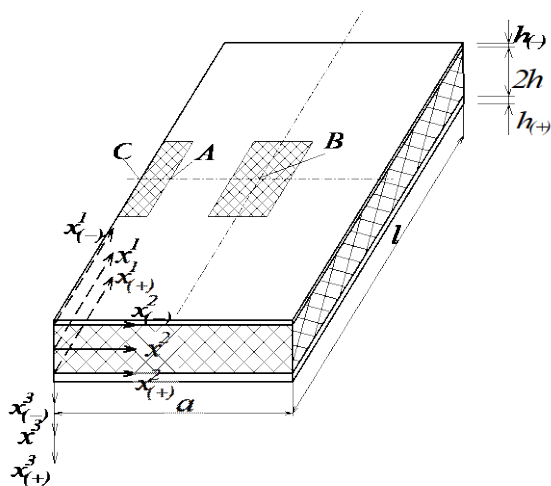


Рис. 12.5. Расчетная схема элемента панели киля самолета
(A, B, C – характерные точки для участков с расслоениями)

На исследуемую конструкцию действует два вида нагрузок: равномерно распределенная по поверхности верхнего слоя интенсивностью $q_{(-)}^3 = 200 \text{ Н/м}^2$ и равномерная сжимающая в направлении оси OY с интенсивностью $T_1^{11} = 300 \text{ Н/м}$, $T_2^{11} = 11070 \text{ Н/м}$, $T_3^{11} = 600 \text{ Н/м}$, приложенная соответственно к верхнему, среднему и нижнему слоям (см. рис. 12.4).

При расчете данной конструкции наружные слои, являющиеся слоистыми композитами, рассматривались как тонкие и ортотропные с приведенными упругими характеристиками, определенными на основе формул (8.61). Коробчатый наполнитель моделировался сплошным ортотропным слоем (рис. 12.5), приведенные упругие параметры которого определялись экспериментальным путем и принимались следующими: толщина $2h = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; модули упругости по направлениям x_i^1, x_i^2, x_i^3 – $E_1 = E_3 = 0,7264 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_2 = 1,4528 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; модули сдвига в плоскостях x^1x^2 , x^2x^3 и x^1x^3 – $G_{12} = G_{23} = 1,1622 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $G_{13} = 0,5811 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; коэффициенты Пуассона $\nu_{21} = 0,2552$, $\nu_{23} = \nu_{13} = 0$.

Расчеты проводились для двух случаев закрепления торцов наружных слоев панели. Первый – соответствует жесткому защемлению торцов $x_{(\pm)}^1 = 0$, $x_{(\pm)}^1 = l$ и шарнирному опиранию $x_{(\pm)}^2 = 0$, $x_{(\pm)}^2 = a$. Второй – жесткому защемлению торцов $x_{(\pm)}^1 = 0$, $x_{(\pm)}^1 = l$ и свободному краю на торцах $x_{(\pm)}^2 = 0$, $x_{(\pm)}^2 = a$. Для каждого вида закрепления рассматривались такие варианты сопряжения слоев панели: совместная работа всех слоев, отслоение

участков верхнего слоя от заполнителя с учетом и без учета отрыва, отслоение участков нижнего слоя с учетом и без учета отрыва. Участки дефектов располагались в центре или на контуре панели и имели размеры соответственно 30×60 мм и 15×60 мм.

С учетом симметрии в форме деформирования панели для расчета был выделен ее фрагмент, ограниченный контурными линиями $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ и линиями симметрии $x^1 = l/2$, $x^2 = a/2$. На расчетный фрагмент накладывалась конечноразностная сетка 13×13 узлов, погрешность численного решения составила около 3%.

Результаты расчета элемента панели киля самолета при жестком шарнирном закреплении торцов приведены в табл. 12.2, а при жестком и свободном закреплении – в табл. 12.3. Полученные нормальные напряжения $\sigma_{(\pm)}^{11}$, $\sigma_{(\pm)}^{22}$ определялись на лицевых поверхностях наружных слоев и заполнителя.

Анализ результатов показывает, что при рассмотренных видах граничных условий наличие заданного участка расслоения у контура панели существенно влияет на ее несущую способность. При проскальзывании участка верхнего наружного слоя без отрыва от заполнителя нормальные напряжения $\sigma_{(\pm)}^{11}$ в расслоенной зоне отличаются от аналогичных при совместной работе в 6 раз, нормальные напряжения $\sigma_{(\pm)}^{22}$ – в 3 раза (см. табл. 12.2). При расположении дефекта между нижним наружным слоем и заполнителем напряжения $\sigma_{(\pm)}^{11}$ увеличиваются в 4 раза, $\sigma_{(\pm)}^{22}$ – в 3–6 раз.

Таблица 12.2

Компоненты напряженно-деформированного состояния	Расположение дефекта на панели (см. рис. 12.5)						
	у торца (точка A)			отслоение 3-го слоя	в центре (точка B)		
	совместная работа слоев	проскальзывание между слоями			совместная работа слоев	проскальзывание между слоями	
		1 и 2-м	2 и 3-м			1 и 2-м	2 и 3-м
1	2	3	4	5	6	7	8
1-й слой							
$u^3 \cdot 10^{-5}$, м	0,97	0,81	1,26	1,48	9,1	9,1	9,1
$\sigma_{(+)}^{11}$, МПа	−8,50	−88,79	−8,97	−8,94	−9,69	−9,69	−9,69
$\sigma_{(-)}^{11}$, МПа	−8,48	−88,74	−9,01	−9,05	−9,72	−9,71	−9,72
$\sigma_{(+)}^{22}$, МПа	−13,57	−30,85	−14,49	−15,91	15,13	15,09	15,13
$\sigma_{(-)}^{22}$, МПа	−13,57	−30,85	−14,52	−15,91	15,04	15,00	15,04

Окончание табл. 12.2

1	2	3	4	5	6	7	8
<i>2-й слой</i>							
$u_{(\pm)}^3 \cdot 10^{-5}, \text{ м}$	0,97	0,81	1,26	1,48	9,1	9,1	9,1
$\sigma_{(+)}^{11}, \text{ МПа}$	–81,17	–83,68	–70,50	–70,66	–79,44	–79,44	–79,44
$\sigma_{(-)}^{11}, \text{ МПа}$	–76,67	–70,62	–81,24	–81,13	–88,06	–88,06	–88,06
$\sigma_{(+)}^{22}, \text{ МПа}$	–51,24	–52,95	–45,66	–44,24	–12,99	–12,99	–12,99
$\sigma_{(-)}^{22}, \text{ МПа}$	–49,97	–46,38	–52,55	–53,98	–21,59	–21,59	–21,59
<i>3-й слой</i>							
$u^3 \cdot 10^{-5}, \text{ м}$	0,97	0,81	1,26	53,65	9,1	9,1	9,1
$\sigma_{(+)}^{11}, \text{ МПа}$	–20,68	–21,41	–91,85	–16,07	–19,60	–19,60	–19,61
$\sigma_{(-)}^{11}, \text{ МПа}$	–20,58	–21,16	–92,03	–167,1	–19,70	–19,70	–19,71
$\sigma_{(+)}^{22}, \text{ МПа}$	–18,80	–19,50	–42,94	–6,09	6,21	6,21	6,20
$\sigma_{(-)}^{22}, \text{ МПа}$	–18,79	–19,45	–43,02	–57,47	6,03	6,03	6,02

Таблица 12.3

Компоненты напряженно- деформиро- ванного состо- яния	Расположение дефекта на панели (см. рис. 12.5)					
	у торца (точка С)			в центре (точка В)		
	совмест- ная рабо- та слоев	проскальзывание между слоями		совмест- ная рабо- та слоев	проскальзывание между слоями	
		1 и 2-м	2 и 3-м		1 и 2-м	2 и 3-м
1	2	3	4	5	6	7
<i>1-й слой</i>						
$u^3 \cdot 10^{-4}, \text{ м}$	5,45	5,45	5,45	4,56	4,56	4,56
$\sigma_{(+)}^{11}, \text{ МПа}$	–21,01	–228,06	–22,42	–9,49	–9,49	–9,49
$\sigma_{(-)}^{11}, \text{ МПа}$	4,21	45,61	4,50	–9,50	–9,50	–9,50
$\sigma_{(+)}^{22}, \text{ МПа}$	–31,32	–105,25	–30,88	4,44	4,66	4,43
$\sigma_{(-)}^{22}, \text{ МПа}$	–31,96	–105,88	31,52	3,88	4,10	3,87

Окончание табл. 12.3

1	2	3	4	5	6	7
<i>2-й слой</i>						
$u_{(\pm)}^3 \cdot 10^{-4}, \text{ м}$	5,45	5,45	5,45	4,56	4,56	4,56
$\sigma_{(+)}^{11}, \text{ МПа}$	–82,62	–85,31	–71,05	–81,46	–81,46	–81,46
$\sigma_{(-)}^{11}, \text{ МПа}$	–76,24	–69,55	–81,06	–86,03	–86,03	–86,03
$\sigma_{(+)}^{22}, \text{ МПа}$	–40,36	–41,19	–33,59	–1,86	–1,86	–1,84
$\sigma_{(-)}^{22}, \text{ МПа}$	–69,99	–65,79	–71,31	–32,98	–32,99	–32,99
<i>3-й слой</i>						
$u^3 \cdot 10^{-4}, \text{ м}$	5,45	5,45	5,45	4,56	4,56	4,56
$\sigma_{(+)}^{11}, \text{ МПа}$	10,29	10,67	46,47	–19,98	–19,98	–19,99
$\sigma_{(-)}^{11}, \text{ МПа}$	–51,56	–53,38	–232,67	–20,05	–20,05	–20,06
$\sigma_{(+)}^{22}, \text{ МПа}$	–10,38	–10,43	–65,41	14,55	14,55	14,35
$\sigma_{(-)}^{22}, \text{ МПа}$	–11,39	–11,43	–66,42	13,69	13,69	13,48

Установлено, что наиболее неблагоприятным для работы данной конструкции является вариант полного отслоения контурного участка 3-го слоя от заполнителя при шарнирном опирании панели (см. табл. 12.2). В этом случае прогибы на участке отслоения возрастают в 20 раз по сравнению с аналогичными при совместной работе слоев, а нормальные напряжения $\sigma_{(\pm)}^{11}$ и $\sigma_{(\pm)}^{22}$ – соответственно в 8 и 3 раза. При другом расположении участка расслоения и других граничных условиях полное отслоение дефектного участка не реализуется.

Наличие участка проскальзывания в центре панели незначительно влияет на ее несущую способность при заданной нагрузке. Параметры напряженно-деформированного состояния в этом случае практически не отличаются от параметров при совместной работе слоев.

§ 12.3. Изгиб слоистого стержня с проскальзыванием между слоями

В качестве тестовой рассмотрена задача изгиба шарнирно опертого по торцам стержня длиной $2l$, состоящего из двух слоев одинаковой жесткости толщиной $2h$ (рис. 12.6). В качестве нагрузки принято равномерно распределенное давление $q_{(-)}^3$.

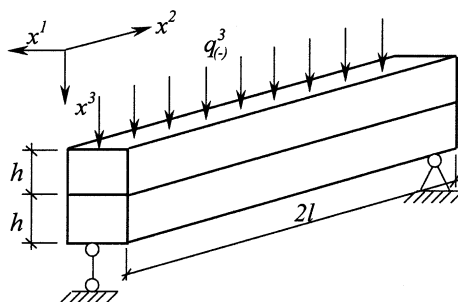


Рис. 12.6. Общий вид шарнирно опертого по торцам стержня

Исследовано распределение и размер дефектных зон, образуемых в результате деформирования стержня. Расчет стержня выполнялся при исходных данных: модуль упругости $E = 210$ ГПа; толщина стержня $2h = 2$ см, длина $2l = 200$ см. Значение расчетного сопротивления на сдвиг принято равным $[R] = 10$ кПа. Для данной задачи имеется известное решение, полученное Ю.Н.Новичковым [177].

В качестве расчетного при исследовании принимался фрагмент стержня, ограниченный контурными линиями $x^2 = 0$ и линией симметрии $x^2 = l$. На выделенный таким образом фрагмент наносилась конечноразностная сетка 5×31 узлов (5 узлов в направлении x^1 и 31 – в направлении x^2), при которой погрешность определения напряжений сдвига на границе слоев не превышает 3%. Определение напряжений сдвига на границе слоев в зависимости от густоты конечноразностной сетки приведено в табл. 12.4.

Таблица 12.4

$l, \text{ м}$	$h_{(\pm)} 10^{-3}, \text{ м}$	$[R], \text{ кПа}$	$\sigma_{31}, \text{ МПа (в 1/3 пролета)}$			
			5×5	5×21	5×31	5×45
1,0	0,01	10	5,651	4,944	4,723	4,7215

Результаты расчета для стержня отображены на рис. 12.7 в виде зависимости размера участка проскальзывания $\Delta S = \Delta S/S$ (ΔS – площадь дефектного участка, S – общая площадь контакта на границе слоев) от параметра $q^* = q^3/[R]$ (q^3 – нагрузка, $[R]$ – расчетное сопротивление на сдвиг).

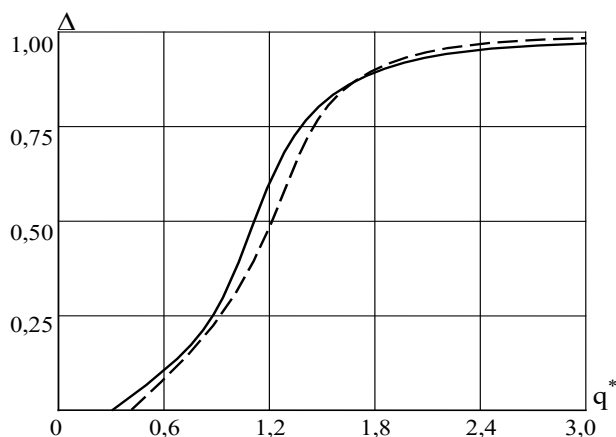


Рис. 12.7. Зависимость размера участка проскальзывания от нагрузки (пунктирной линией обозначены значения известного решения, сплошной – значения, полученные по предполагаемой методике)

Выполненный расчет подтверждает корректность работы алгоритма, учитывающего эволюцию расслоения (максимальные расхождения между полученными результатами и данными Ю.Н.Новичкова не превышают 6%).

§ 12.4. Устойчивость трехслойной пластины

В нелинейной постановке выполнено исследование устойчивости симметричной трехслойной пластины, содержащей дефект типа расслоения, с учетом одностороннего взаимодействия между слоями. Прямоугольная пластина, шарнирно опертая по контуру, нагружается по торцам в направлении оси Ox^2 сжимающей равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q^2 (рис.12.8).

Рассматривались пластины со следующими физико-геометрическими параметрами слоев: $a = 0,8$ м; $b = 0,6$ м; $h_{(\pm)} = 0,005$ м; $2h = 0,09$ м; модуль упругости несущих слоев $E_{(\pm)} = 71$ ГПа, заполнителя – $E = 0,022$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu_{(\pm)} = \nu = 0,33$.

В качестве исходных дефектных зон принимались прямоугольные участки, расположенные как между наружным несущим слоем и заполнителем, так и между внутренним слоем и заполнителем. Рассчитывались пластины:

a – с полным отслоением несущих слоев по всей площади пластины;

b – с отслоением несущих слоев в направлении оси Ox^2 размером $c = 0,4$ м и в направлении оси Ox^1 по всей ширине заполнителя;

v – с дефектами, размеры которых ограничивались как в направлении оси Ox^2 ($c = 0,4$ м), так и Ox^1 ($d = 0,4$ м);

z – бездефектные пластины.

Принимая во внимание симметрию нагрузки и геометрию пластины, в качестве расчетного фрагмента исследовалась четвертая часть конструкции, ограниченная контурными линиями $x^1=0$, $x^2=0$ и линиями симметрии $x^1=b/2$, $x^2=a/2$.

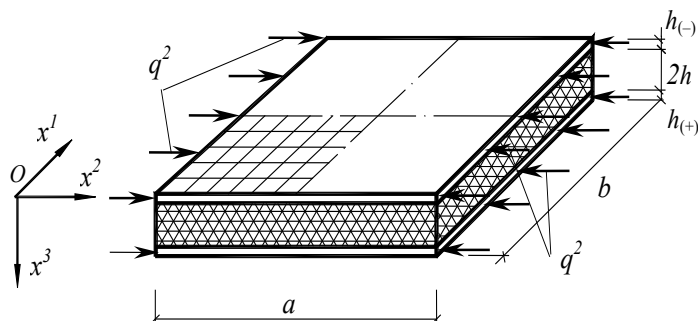


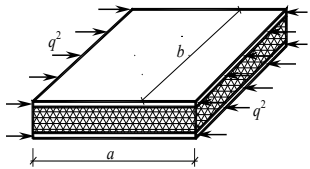
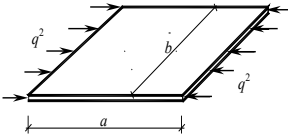
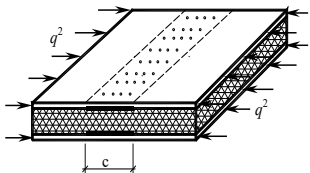
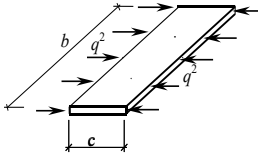
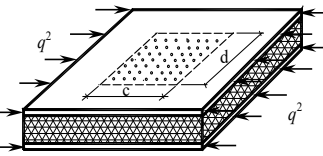
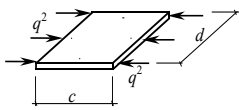
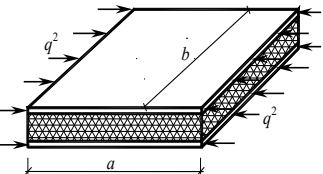
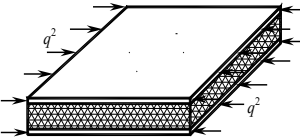
Рис. 12.8. К расчету устойчивости трехслойной пластины

В результате исследования сходимости решения в качестве расчетной была принята конечноразностная сетка 25×25 узлов, при которой погрешность определения критической нагрузки составила менее 3%. При этом 20 разностных делений отводилось на область, содержащую дефект.

Основные результаты исследований сведены в табл.12.5, где изображены расчетные схемы трехслойной пластины и критические нагрузки $q_{кр}$. Для проверки полученных результатов с использованием формул, приведенных в [56], выполнен расчет однослойных пластин, размеры которых принимались равными размерам дефектных участков в рассмотренных трехслойных пластинах.

В табл. 12.5 в 1 и 2-й графах приведены соответственно расчетные схемы рассматриваемых трехслойных пластин и критические нагрузки, полученные на основе предлагаемой методики. Расчетные схемы, расположенные в 3-й графе, приняты для выполнения аналитических расчетов по [56]. В двух последующих графах соответственно приводятся критические нагрузки для однослойных пластинок и процентное сопоставление результатов Δ , полученных аналитическим методом и с применением предлагаемой методики. Сопоставление результатов проводилось для расчетов, выполненных без учета одностороннего контакта наружных слоев с заполнителем. Расхождение между полученными данными и результатами [56] в этих случаях не превышает 3%.

Таблица 12.5

Результаты исследований		Аналитический результат [56]		
Варианты расчетной схемы трехслойной пластины	$q_{кр} \cdot 10^2$, Н/м	Расчетная схема дефектного участка	$q_{кр} \cdot 10^2$, Н/м	Δ , %
Полное отслоение несущих слоев 	1,0		0,97	3
Отслоение на участке 	$\frac{2,47}{3,67}$		2,52	2
Отслоение на участке 	$\frac{4,69}{4,51}$		4,43	1,9
Бездефектная пластина 	394		392	0,5

Примечание. В числителе – критические нагрузки без учета одностороннего контакта с заполнителем; в знаменателе – то же, с учетом одностороннего контакта с заполнителем.

Расчеты, выполненные без учета одностороннего контакта смежных слоев, показывают хорошую сходимость с аналитическим решением [56]. Исследование трехслойных пластин, выполненное с учетом одностороннего контакта слоев для вариантов *б* и *в*, демонстрирует увеличение критической нагрузки для варианта *б* более чем на 47%. Это свидетельствует о степени влияния одностороннего контакта на критическую нагрузку и форму потери устойчивости рассмотренных конструкций.

§ 12.5. Устойчивость цилиндрической оболочки

Рассмотрена задача устойчивости шарнирно опертой цилиндрической оболочки с круговым поперечным сечением, содержащей продольное расслоение. За нагрузку принято равномерно распределенное давление, приложенное к внешней поверхности оболочки. Общий вид и поперечное сечение оболочки изображены на рис. 12.9.

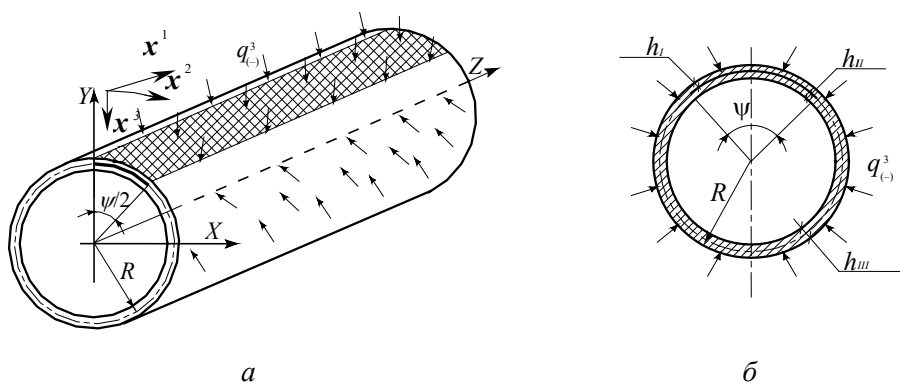


Рис. 12.9. Общий вид (а) и поперечное сечение цилиндрической оболочки с расслоением (б)

Расслоение разделяет оболочку по толщине на несколько характерных участков с толщинами h_I , h_{II} , h_{III} . Введенный параметр $h^* = h^I / h^{III}$ определяют место расположения дефекта по толщине оболочки. Для нейтральной поверхности $h^* = 0,5$. Изменение размера дефекта в поперечном направлении характеризуется параметром $\psi^* = \psi / \pi$. Для данной задачи имеется известное решение, полученное В.П.Трошиным [254].

Исследовано влияние размера и места расположения межслойной трещины по толщине оболочки на значение критического внешнего давления. Расчет оболочки выполнялся при следующих исходных данных: модуль упругости $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,25$; отношение радиуса срединной поверхности оболочки к ее толщине $R / h_{III} = 100$; угол раскрытия дефекта ψ изменялся в диапазоне от 0 рад до 0,754 рад; отношение длины оболочки к радиусу срединной поверхности принималось равным $l / R = 1$; 2. Отношение толщин слоев h^I / h^{III} изменялось от 0,1 до 0,9.

В качестве расчетного принимался фрагмент оболочки, ограниченный контурными линиями $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ и линиями симметрии $x^1 = l/2$, $x^2 = \pi$. На выделенный таким образом фрагмент наносилась конечноразностная сетка 15×37 узлов (15 узлов в направлении x^1 и 37 – в направлении x^2 , 20 из 37 узлов накладывалось на дефектный участок), при которой погрешность вычисления не превышает 3%.

Результаты расчета для оболочки с дефектом, расположенным на срединной поверхности, показаны на рис. 12.10 в виде зависимостей безразмерных нагрузок $q^* = q_{кр}/q_0$ от параметра $\psi^* = \psi/(2\pi)$, где $q_{кр}$ – критическая нагрузка для оболочки с дефектом; q_0 – критическое внешнее давление для бездефектной оболочки длиной $l = 1$ м, которое определялось по формуле

$$q_0 = \frac{1,75\pi E}{lR^2} \sqrt[3]{\frac{h_{III}^{10}}{12^3(1-\nu^2)^3}} \quad [254].$$

Результаты расчетов получены без учета одностороннего взаимодействия между слоями в границах дефектных участков.

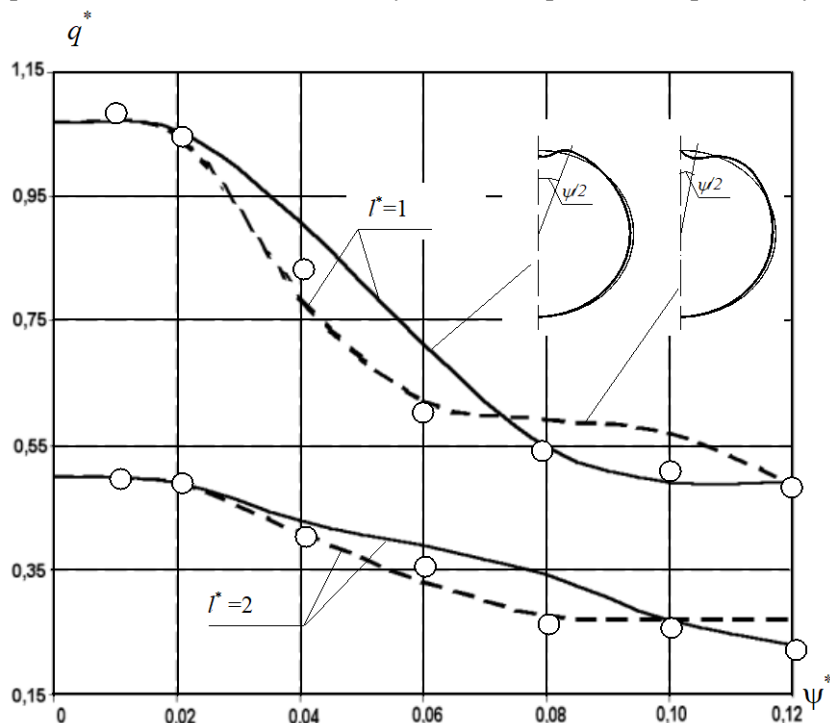


Рис. 12.10. К расчету цилиндрической оболочки с дефектным участком (сплошные линии – критические нагрузки, соответствующие симметричным формам потери устойчивости; пунктирные – то же, кососимметричным; круглые маркеры – результаты, полученные по предлагаемой методике)

Выполненный расчет показывает хорошую сходимость значений критической нагрузки (максимальные расхождения не превышают 5%).

Как видно из рис. 12.10, изменение длины оболочки существенно влияет на абсолютные значения критического внешнего давления. Однако общий характер кривых при варьировании длины оболочки сохраняется. Все приведенные зависимости при смене ψ^* от нуля до $\psi^* = 0,015$ – $0,02$ имеют горизон-

тальный участок, в пределах которого критический параметр $q_{кр}$ остается постоянным. Следовательно, параметр $\psi_{0,02}^*$ определяет предельную ширину допустимого раскрытия расслоения. Меньшие по размерам расслоения не снижают первоначального уровня критической нагрузки. Большие по размерам расслоения приводят к снижению критического внешнего давления и локализации общей формы волнообразования.

Анализ форм потери устойчивости показывает, что при симметричной форме и малых размерах исходных дефектов может происходить раскрытие трещины. В зависимости от размеров расслоения происходит чередование форм потери устойчивости – симметричной и кососимметричной. Порядок смены форм потери устойчивости может изменяться в зависимости от длины оболочки.

Исследование несимметричных по толщине оболочки расслоений показало, что их расположение вблизи внутренней поверхности оболочки может привести к выпучиванию одного тонкого слоя. При большой толщине тонкого слоя оболочка теряет устойчивость по смешанным формам.

Следует отметить, что при больших размерах расслоений возможны контактные взаимодействия между слоями (этот факт определялся по пересечению слоев при построении форм потери устойчивости).

В отличие от общих форм потери устойчивости критические нагрузки для локальных форм потери устойчивости мало зависят от длины оболочки. Очевидно, что для оболочек относительно большой длины уровень критического внешнего давления бездефектной оболочки может быть ниже наименьшего значения критической нагрузки местной формы оболочки с расслоением.

Расчет показал, что расслоения, расположенные симметрично от нейтральной поверхности оболочки в интервале $h^* = 0,35 - 0,65$, равноопасны. В общем случае на критический параметр и размер предельных расслоений влияет кривизна поверхности. По этой причине расслоение, расположенное ближе к внутренней поверхности оболочки, в большей степени снижает величину критического давления, чем расслоение, находящееся ближе к наружной поверхности.

Предельный размер расслоений определен исходя из степени снижения критической нагрузки. Так как при местной форме потери устойчивости следует ожидать неустойчивости только одного тонкого слоя, то потери устойчивости всей оболочки в этом случае не происходит (при условии нераспространения расслоения). Следовательно, найденные на основе местной формы потери устойчивости предельные размеры расслоений не являются ограничениями по несущей способности.

В развитие исследования выполнен анализ устойчивости шарнирно опертой трехслойной цилиндрической оболочки с дефектом в центральной части, расположенным между внутренним несущим слоем и заполнителем (рис. 12.11).

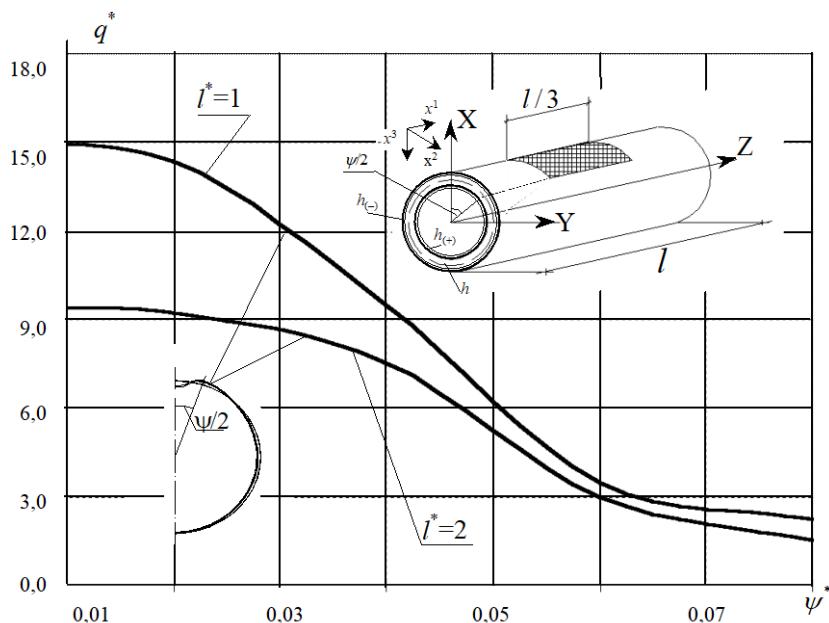


Рис. 12.11. К расчету устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с дефектом в центральной части

Оболочка нагружалась равномерно распределенным давлением, прикладываемым к наружной поверхности несущего слоя. В качестве расчетного фрагмента принималась часть оболочки, ограниченная линиями вдоль оси $x^1 = 0$, $x^1 = l/2$ и линиями симметрии в направлении $x^2 = 0$, $x^2 = \pi$.

В качестве исходных были приняты следующие параметры: модуль упругости несущих слоев $E_{(\pm)} = 210$ ГПа; модуль упругости заполнителя $E = 2,10$ ГПа; коэффициент Пуассона для всех трех слоев принят $\nu_{(\pm)} = \nu = 0,25$. Толщина внешнего несущего слоя $h_{(-)} = 0,002$ м, заполнителя $h = 0,018$ м, внутреннего слоя $h_{(+)} = 0,001$ м. Отношение радиуса срединной поверхности трехслойной оболочки к толщине трехслойного пакета $R/H = 100$; размер дефекта ψ в направлении оси x^2 изменялся в диапазоне от 0,1 рад до 0,754 рад; отношение длины оболочки к радиусу срединной поверхности $l/R = 1; 2$.

В результате выполненного расчета найдены критические нагрузки, определены формы потери устойчивости.

Основные результаты расчета показаны на рис. 12.11 в виде зависимости безразмерной величины критической нагрузки $q^* = [q_{кр} / (E_{(\pm)})] 10^6$ от параметра $\psi^* = \psi / (2\pi)$. Здесь же изображена характерная форма потери устой-

чивости. Полученные критические нагрузки соответствуют симметричным формам потери устойчивости.

Установлено, что изменение размера дефекта по направлению оси x^2 в диапазоне от $\psi^* = 0,01$ – $0,015$ не снижает критическую нагрузку. Углы раскрытия дефекта, превышающие $\psi^* = 0,015$, приводят к снижению критической нагрузки и локализации общей формы потери устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки.

§ 12.6. Устойчивость замкнутой сферической оболочки

Рассмотрена задача устойчивости сферической оболочки, нагруженной внешним равномерно распределенным давлением интенсивностью $q_{(-)}^3$. В оболочке имеется расслоение, расположенное на сферическом сегменте с центральным углом ψ , отстоящее на расстоянии h_I от внутренней поверхности. Наличие дефекта позволяет выделить в оболочке три характерных участка с различными толщинами, положение и обозначение которых показано на рис. 12.12.

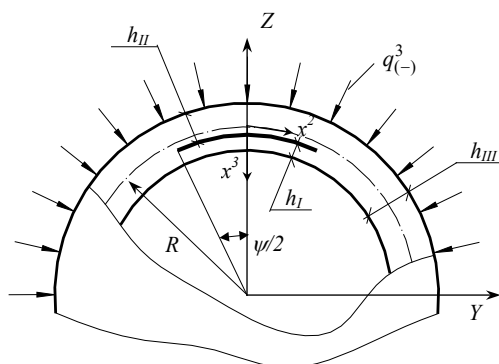


Рис. 12.12. К расчету устойчивости замкнутой сферической оболочки

Для рассматриваемой задачи имеется известное численное решение, полученное В.В Болотиным [39].

В качестве исходных данных при исследовании приняты следующие физические и геометрические параметры: радиус кривизны срединной поверхности оболочки $R = 1$ м; толщина оболочки $h_{III} = 0,02$ м; отношение h^I / h^{III} (h^I – толщина внутреннего слоя, образованного дефектом) изменялось от 0,1 до 0,5; модуль упругости $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Рассматривались малые дефекты, размеры которых находятся в диапазоне $0 \leq \psi / \pi \leq 0,2$.

Расчетный фрагмент формируется вычлениением из оболочки сегмента, ограниченного линиями симметрии $x^1 = 0$, $x^1 = \pi/2$, $x^2 = 0$, $x^2 = \pi$. По результа-

там исследования сходимости численных решений в качестве расчетной на фрагмент наносилась конечноразностная сетка 11×27 узлов (11 узлов в направлении x^1 и 27 – в направлении x^2 , 21 узел в меридиональном направлении отводился на дефектный участок), при которой погрешность определения критической нагрузки не превышает 3%. Рассматривались осесимметричные деформации оболочки. Сопоставление полученных результатов с известным решением выполнялось как для вариантов расчетов, выполненных без учета взаимодействия между противоположными краями расслоения, так и с учетом одностороннего контакта.

Основные результаты расчета сферической оболочки с дефектом показаны на рис. 12.13 в виде зависимостей безразмерного критического параметра нагрузки $q^* = q_{кр}/q^0$ от размера дефектного участка $\psi^* = \psi/(2\pi)$, где $q_{кр}$ – критическая нагрузка для дефектной оболочки; $q^0 = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h_{III}}{R} \right)^2$ –

критическое внешнее давление для бездефектной оболочки.

Полученные результаты показывают хорошую сходимость критических нагрузок (максимальное расхождение между ними не превышает 7%).

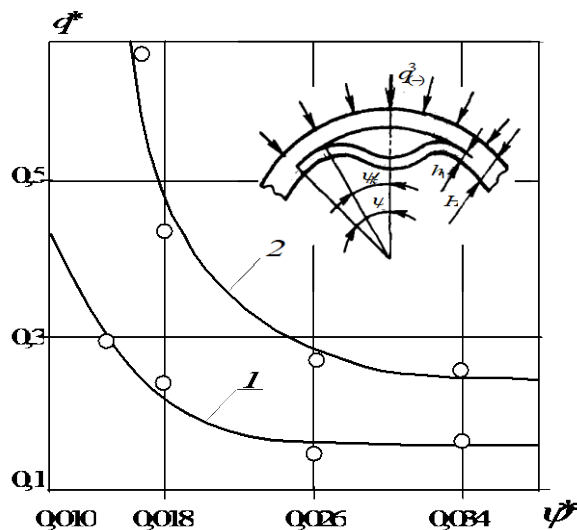


Рис. 12.13. Зависимость критического давления от размера расслоения:
1 – результаты, полученные для оболочки без учета взаимодействия смежных слоев в границах дефектного участка; 2 – то же, с учетом одностороннего контакта;
круглые маркеры – результаты, полученные по предлагаемой методике

Исследования показали, что при малых углах дефекта $0,01 < \psi^* < 0,034$ наблюдаются локальные формы потери устойчивости (рис. 12.14), сопровождающиеся раскрытием краев расслоения на всем дефектном участке или

формы с различными вариантами одностороннего контакта смежных слоев (в подавляющем большинстве случаев).

При увеличении угла дефекта ψ^* критическая нагрузка быстро уменьшается, стремясь к значению критической нагрузки для монолитной оболочки толщиной h_1 . Изменение толщины h_1 приводит к качественному изменению форм потери устойчивости. При больших размерах дефектов наблюдаются формы потери устойчивости, характеризующиеся проскальзыванием смежных слоев в границах существующего дефектного участка без отрыва от него.

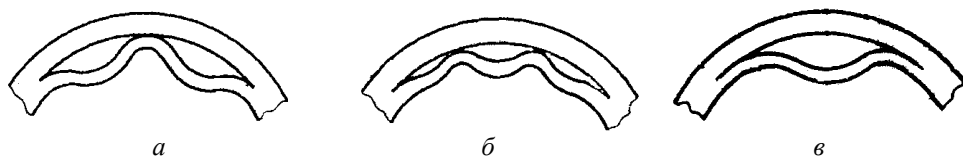


Рис. 12.14. Характерные формы потери устойчивости:

a – контакт в зените; *б* – контакт по окружности; *в* – полный отрыв

В развитие описанного расчета выполнено исследование устойчивости трехслойной сферической оболочки с различными дефектными участками. Радиус срединной поверхности и общая толщина оболочки приняты аналогично предыдущему расчету. Толщина наружного и внутреннего несущих слоев $h_{(\pm)} = h_{(-)} = 0,002$ м, толщина заполнителя $h = 0,016$ м. Модуль упругости для несущих слоев принят $E_{(\pm)} = 210$ ГПа. Отношение модуля упругости несущих слоев к модулю упругости заполнителя $E_{(\pm)}/E$ варьировалось от 10 до 100. Расположение дефектного участка принято между внутренним несущим слоем и заполнителем. Угол раскрытия дефекта изменялся от $0,0188 < \psi/(2\pi) < 0,2$. Граничные условия и тип нагрузки аналогичны предыдущему расчету.

В результате выполненного исследования определены критические нагрузки для оболочки с различными размерами дефектов и соответствующие им формы потери устойчивости. Основные результаты расчета показаны на рис. 12.15 в виде кривых, характеризующих изменение критической нагрузки $q^* = q_{кр}/q^1$ в зависимости от размера дефектного участка $\psi^* = \psi/(2\pi)$, где $q_{кр}$ – критическая нагрузка дефектной оболочки; q^1 – то же, для оболочки с межслойным размером дефекта $\psi^* = 0,0188$ и отношением модулей упругости слоев $E_{(\pm)}/E = 10$.

Формы потери устойчивости качественно схожи с формами, изображенными на рис. 12.14. Практически при всех размерах дефектов формы потери устойчивости характеризуются пересечением смежных слоев в границах дефектного участка. Следует отметить, что уменьшение жесткости внутреннего слоя качественно не влияет на формы потери устойчивости. Дефекты в

трехслойной сферической оболочке в большей степени влияют на ее устойчивость, чем такие же дефекты в однослойной оболочке.

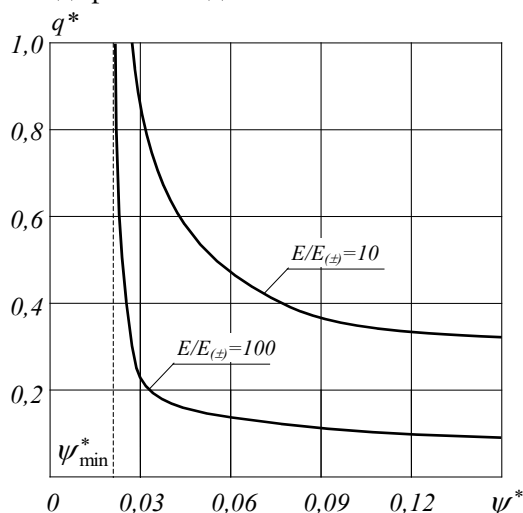


Рис. 12.15. Зависимость критической нагрузки от размера дефекта

§ 12.7. Исследование влияния расслоений на устойчивость трехслойной круговой арки

С учетом одностороннего контакта между смежными слоями в пределах дефектного участка выполнен анализ устойчивости трехслойной круговой арки (рис. 12.16).

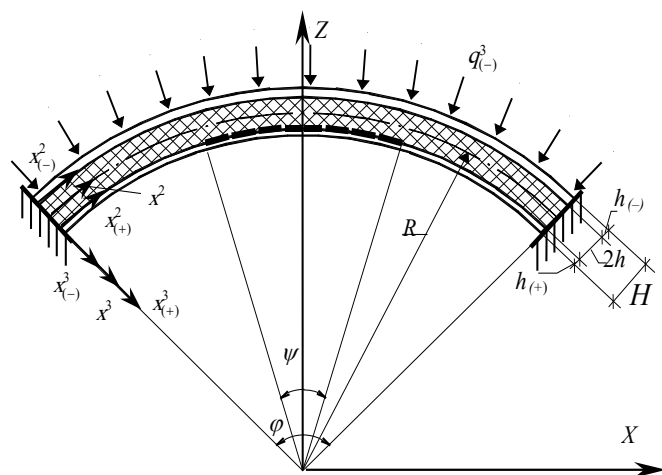


Рис. 12.16. К расчету устойчивости трехслойной круговой арки

Арка расположена в общей системе декартовых координат XYZ . Для каждого слоя приняты локальные системы криволинейных координат x^1 , x^2 , x^3 . За координатную в заполнителе принята его срединная поверхность, а во внешних слоях – поверхности контакта. Параметры несущих слоев обозначались индексами $(-)$ и $(+)$. Угол φ характеризует раствор арки, а угол ψ определяет размер возможного дефектного участка. В качестве исходных данных приняты следующие параметры: радиус арки (срединная поверхность заполнителя) $R = 2$ м; толщина $H = 0,13$ м; угол раствора арки $\varphi = \pi/2$; модуль упругости внешних слоев $E_{(\pm)} = 210$ ГПа; отношение модуля упругости внешних слоев к модулю упругости заполнителя $E_{(\pm)}/E$ варьировалось от 1 до 100; коэффициент Пуассона для всех трех слоев $\nu_{(\pm)} = \nu = 0,3$; соотношение между толщиной заполнителя и толщинами внешних слоев $h_{(-)} : h : h_{(+)}$ соответственно 2 : 10 : 1. В виде нагрузки прикладывалось нормальное, равномерно распределенное внешнее давление с интенсивностью $q_{(-)}^3$.

В качестве исходных дефектов принимались нераспространяющиеся в процессе нагружения дефектные участки, характеризующиеся проскальзыванием слоев либо полным отрывом одного из несущих слоев от заполнителя. Рассматриваемые дефектные зоны располагались как между внутренним несущим слоем и заполнителем, так и между наружным слоем и заполнителем. Кроме этого варьировалось расположение дефектов в направлении оси x^2 : рассматривались дефектные участки в приопорной части арки, в 1/3 части арки и в центральной части арки. Размеры дефектных участков принимались $\psi = 0,175$ рад, 0,349 рад и 0,549 рад. В качестве граничных условий принималась жесткая заделка краев.

По результатам исследования сходимости численных решений за расчетную была принята конечноразностная сетка 5×61 узлов (5 узлов в направлении оси x^1 , 61 – в направлении оси x^2 , причем 30 узлов накладывались на дефектный участок), при которой ошибка в определении критического параметра нагружения составляла менее 3%. Исследование сходимости результатов расчета арок, содержащих дефектные участки, приведено в табл. 12.6.

Таблица 12.6

ψ , рад	φ , рад	$h_{(-)} : h : h_{(+)}$	$E_{(\pm)}/E$	$(q_{кр} 10^3)/E_{(\pm)}$			
				5×31	5×45	5×61	5×75
0,349	1,57	1:10:2	1	7,27	6,44	6,3	6,296
0,524	1,57	1:10:2	10	2,27	1,98	1,94	1,937

При указанной сетке результаты расчета для бездефектных арок, приведенные в табл.12.7, хорошо согласуются с данными [6].

Таблица 12.7

$E_{(\pm)}/E$	$(q_{кр} 10^3)/E_{(\pm)}$		
	Решение [6]	Предлагаемая методика	$\Delta, \%$
1	0,3202	0,3361	4,7
10	0,1631	0,1708	4,2
20	0,1443	0,1495	3,6
30	0,1319	0,1362	2,8
40	0,1226	0,1251	1,7

В результате исследования устойчивости круговых арок, содержащих расслоения, получены критические нагрузки и формы потери устойчивости, определены расположение и размеры дефектных участков, которые наиболее существенно влияют на критические параметры, отмечены особенности в работе арок, возникающие при изменении физико-геометрических параметров их слоев.

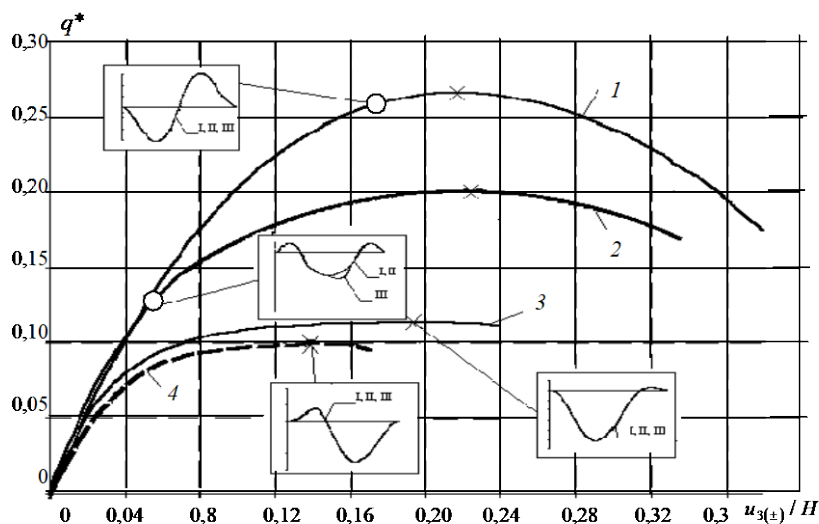


Рис. 12.17. Кривые нагружения и характерные формы потери устойчивости для трехслойных арок:

О – расположение бифуркационных точек;

X – точки предельных значений критической нагрузки;

I – наружный несущий слой; II – заполнитель; III – внутренний несущий слой

Характерные кривые нагружения и формы потери устойчивости для бездефектной арки (кривая 1), и трех вариантов арки с исходными дефектными участками, расположенными между внутренним слоем и заполнителем в центральной части (кривая 2), в приопорной части (кривая 3) и в 1/3 части пролета (кривая 4) показаны на рис. 12.17.

Приведенные кривые нагружений соответствуют соотношению $E_{(\pm)}/E = 100$ и $\psi = 0,349$ рад. Вдоль вертикальной оси откладывается безразмерный параметр нагрузки $q^* = (q_{кр}/E_{(\pm)})10^4$, по горизонтальной оси – отношение максимального прогиба арки к толщине арки.

Критические нагрузки для рассмотренных круговых арок сведены в табл. 12.8.

Таблица 12.8

Расположение и размер дефектного участка (рад)	$E_{(\pm)}/E$			Расположение и размер дефектного участка (рад)	$E_{(\pm)}/E$		
	1	10	100		1	10	100
1	2	3	4	1	2	3	4
Бездефектная арка 	6,300	2,750	1,325	 $\psi = 0,175$	6,186	2,565	0,950
 $\psi = 0,175$	*	*	*	 $\psi = 0,349$	6,125	1,890	0,792
 $\psi = 0,349$	*	*	*	 $\psi = 0,524$	5,400	1,593	0,415
 $\psi = 0,524$	*	*	*	 $\psi = 0,175$	5,755	2,345	0,995
 $\psi = 0,175$	6,195	2,565	0,948	 $\psi = 0,349$	5,690	1,941	0,624
 $\psi = 0,349$	5,982	1,975	0,562	 $\psi = 0,524$	5,565	1,925	0,555

1	2	3	4	1	2	3	4
 $\psi = 0,524$	5,710	1,655	0,525	 $\psi = 0,175$	6,362	2,540	0,770

Окончание табл. 12.8

1	2	3	4	1	2	3	4
 $\psi = 0,175$	6,224	2,612	0,812	 $\psi = 0,349$	6,055	1,912	0,505
 $\psi = 0,349$	6,112	1,985	0,481	 $\psi = 0,524$	5,835	1,665	0,450
 $\psi = 0,524$	5,865	1,625	0,400	—	—	—	—

Примечание. Жирным шрифтом отмечено наличие бифуркационной точки на кривой нагружения, символом * – наличие локальной формы потери устойчивости в дефектном участке.

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

размер и расположение дефектного участка в значительной степени влияют как на количественный параметр – критическую нагрузку, так и на качественный – форму потери устойчивости;

достаточно заметное влияние на устойчивость конструкции оказывает изменение отношения модулей упругости слоев. Как видно из табл.12.8, с увеличением отношения $E_{(\pm)}/E$ критическая нагрузка достаточно сильно уменьшается и в процентном соотношении для различных вариантов расположения и размеров дефектов колеблется в диапазоне от 16% при $E_{(\pm)}/E = 1$ до 70% при $E_{(\pm)}/E = 100$;

изменение места расположения дефектного участка по толщине арки незначительно влияет на критическую нагрузку и изменяет ее значение на 11–15%. Вероятнее всего такое небольшое влияние объясняется незначительной толщиной трехслойного пакета по сравнению с радиусом кривизны конструкции;

наиболее существенное влияние на критическую нагрузку оказывают дефекты, расположенные в 1/3 части пролета арки. При этом в зависимости от размеров дефекта и отношения $E_{(\pm)}/E$ критическая нагрузка изменяется до

70%. Это замечание справедливо как для дефектов, расположенных между внутренним слоем и заполнителем, так и для дефектов, расположенных между внешним слоем и заполнителем;

для большей части расчетов характерны кососимметричные формы потери устойчивости. Это вызвано изначально заданными дефектными участками, расположенными несимметрично относительно оси симметрии. При симметричном расположении дефектов наблюдается симметричная форма потери устойчивости для всей арки в целом и локальная, кососимметричная – для дефектного участка.

Выполненное численное исследование устойчивости трехслойных арок с различными физико-геометрическими параметрами, содержащих межслойные дефектные участки, позволяет отметить, что устойчивость арочных конструкций в значительной степени зависит от соотношений модулей упругости слоев и достаточно немаловажного фактора – межслойных дефектов, их расположения (по длине и толщине арки) и размеров. Учет межслойных дефектов при проведении прочностных расчетов конструкций на стадии проектирования позволяет определить наиболее уязвимые и слабые места в конструкциях, что в свою очередь приведет к изготовлению более надежных конструкций.

§ 12.8. Исследование устойчивости цилиндрической панели

Выполнен анализ устойчивости трехслойной цилиндрической панели с учетом изменения размеров исходных и образования новых дефектных участков, содержащих межслойные расслоения (рис. 12.18).

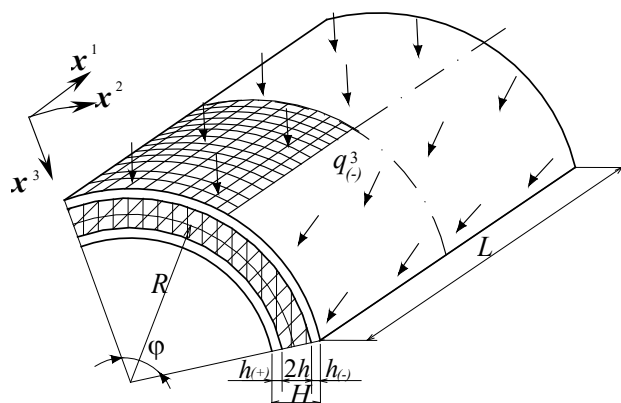


Рис. 12.18. К расчету устойчивости трехслойной цилиндрической панели

Для расчета были приняты следующие физические и геометрические параметры слоев: радиус кривизны срединной поверхности панели $R = 2$ м; длина стороны $a = 4$ м; угол раствора $\varphi = \pi/2$; модуль упругости внешних слоев $E_{(\pm)} = 210$ ГПа; соотношение модулей упругости внешних слоев к модулю заполнителя $E_{(\pm)}/E$ варьировалось от 1 до 100; толщина панели $H = 0,05$ м; соотношение между толщиной заполнителя и толщинами внешних слоев $h_{(-)} : h : h_{(+)}$ задавалось равным 1 : 8 : 1; коэффициент Пуассона для всех трех слоев был принят $\nu_{(\pm)} = \nu = 0,3$. Расчетное сопротивление на сдвиг $[R]$ изменялось от 1,0 до 30,0 МПа. В качестве нагрузки рассматривалось равномерно распределенное давление, приложенное к внешней поверхности наружного несущего слоя.

Для закрепления контура панели принимались два варианта опирания: шарнирно неподвижное и жесткая заделка. Рассматривались панели:

- а) бездефектные, без учета эволюции расслоения;
- б) то же, с учетом эволюции расслоения;
- в) содержащие исходные участки расслоения без учета эволюции расслоения;
- г) то же, с учетом эволюции расслоения.

В качестве исходных, содержащих дефекты типа расслоений, рассматривались участки, расположенные в центральной части панели и в приопорной. Размеры и места расположения исходных участков расслоений показаны на рис. 12.19.

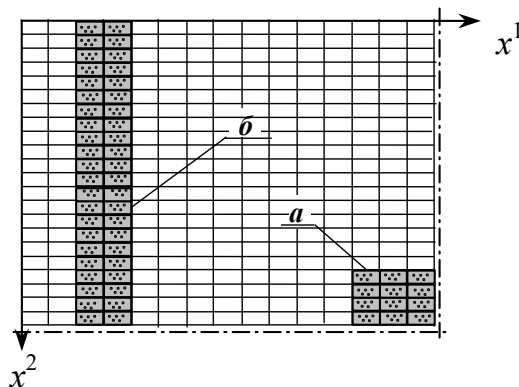


Рис. 12.19. Расположение исходных участков с дефектами:
а – в центральной части; б – в приопорной части

В процентном отношении площадь расслоения к площади одного из слоев панели составляет: для варианта а – 12,8%, для варианта б – 5,2%. Участки расслоений размещались между внутренним несущим слоем и заполнителем. Было принято, что участки расслоений имеют прямоугольную

форму. За единицу участка принималась одна ячейка конечноразностной сетки.

В связи с наличием симметрии в форме деформирования панели для расчета был выделен фрагмент, ограниченный контурными линиями $x^1=0$, $x^2=0$, и линиями симметрии $x^1=a/2$, $x^2=\varphi/2$. При исследовании сходимости результатов расчета жестко закрепленных панелей за расчетную была принята конечноразностная сетка 15×21 узлов, при которой ошибка определения критического параметра нагружения составляла меньше, чем 2% (табл. 12.9).

Таблица 12.9

$[R]$, МПа	$h_{(-)}:h:h_{(+)}$	$E_{(\pm)}/E$	$(q_{кр} 10^5)/E_{(\pm)}$			
			5×7	9×13	15×21	21×33
30	0,5:4:0,5	10	37,27	42,32	43,1	43,14
10	0,5:4:0,5	50	28,71	33,01	33,92	33,93

Для проверки возможности образования несимметричных форм потери устойчивости было выполнено исследование панелей без учета плоскостей симметрии. Установлено, что несимметричные формы потери устойчивости не реализуются при выбранных граничных условиях и физико-геометрических параметрах слоев.

В результате выполненного расчета построены кривые нагружения, получены значения критических нагрузок и соответствующие им формы потери устойчивости.

Для панелей, не содержащих исходных дефектов и расчет для которых проводился с учетом изменения параметра $[R]$, критические нагрузки сведены в табл. 12.10.

Таблица 12.10

$\frac{E_{(\pm)}}{E}$	$q_{кр}, \text{ МПа}$						
	Проскаль- зывание нижнего слоя по за- полнителю	$[R], \text{ МПа}$					Жесткое сопряже- ние слоев
		1	3	6	10	30	
<i>Шарнирно-неподвижное опирание</i>							
1	127,00	127,40	141,80	160,50	175,70	198,30	217,51
10	16,60	35,78	49,28	78,69	84,12	86,00	87,09
50	4,90	22,31	34,31	62,34	67,90	68,25	68,25

100	3,20	12,57	27,82	55,43	58,92	59,40	59,40
<i>Жесткая заделка</i>							
1	127,40	127,96	142,30	164,20	176,55	203,10	219,00
10	16,40	34,92	49,38	79,10	84,32	87,60	87,62
50	4,87	22,10	34,44	64,44	68,23	68,70	68,80
100	3,19	14,41	28,45	55,60	59,40	60,28	60,28

В ходе исследования выявлено, что при выбранных параметрах конструкции не происходит раскрытия берегов дефектов. На рис. 12.20 изображены характерные формы потери устойчивости для жестко защемленных панелей, не содержащих исходных дефектных участков. Представленные результаты показывают, что форма потери устойчивости бездефектной оболочки характеризуется образованием двух выпучин и одной вмятины. Для панелей, расчет которых производился с учетом эволюции расслоений, наблюдается образование одной вмятины с эпицентром в срединной части панели. Таким образом, межслойные дефекты не только количественно влияют на критическую нагрузку, но и качественно изменяют форму потери устойчивости конструкций.

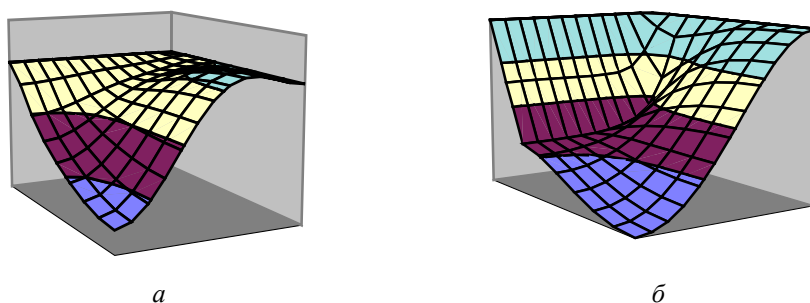


Рис. 12.20. Характерные формы потери устойчивости для цилиндрической панели:
 а – без учета эволюции расслоений; б – с учетом эволюции расслоений

Анализ выполненных расчетов показал, что увеличение значений $[R]$ при фиксированном значении отношения $E_{(\pm)}/E$, приводит к уменьшению размеров областей, содержащих дефекты типа расслоений. Так, при $[R] = 1,0$ МПа, площадь дефектов в момент потери устойчивости составляет 50%–65%, а при $[R] = 30,0$ МПа уменьшается до 10%. Подобное изменение площадей дефектных областей справедливо для всех рассмотренных вариантов отношения $E_{(\pm)}/E$ как при шарнирно-неподвижном опирании, так и при жестком защемлении контура панелей. Изменение $[R]$ от 1 до 30 МПа повлекло за собой увеличение критической нагрузки на 42–43 % при соотноше-

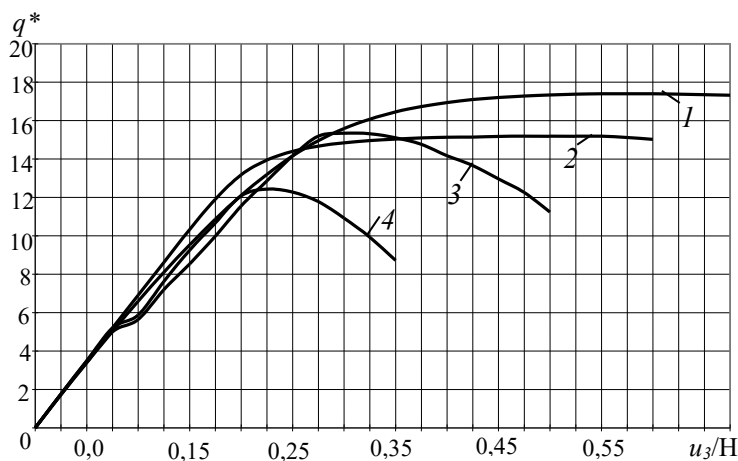


Рис. 12.22. Кривые нагружения для шарнирно опертой панели:
 1 – бездефектная панель без учета эволюции расслоений; 2 – то же, с учетом эволюции расслоений; 3 – панель с исходным межслойным дефектом без учета эволюции расслоений; 4 – то же, с учетом эволюции расслоений

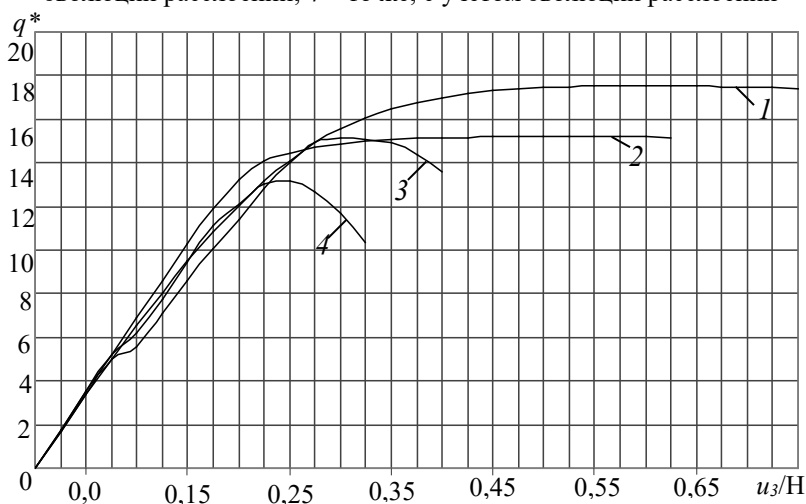


Рис. 12.23. Кривые нагружения для жестко защемленной панели:
 1 – бездефектная панель без учета эволюции расслоений; 2 – то же, с учетом эволюции расслоений; 3 – панель с исходным межслойным дефектом без учета эволюции расслоений; 4 – то же, с учетом эволюции расслоений

На рис. 12.22 и 12.23 изображены кривые нагружения для шарнирно опертых и жестко защемленных панелей. Вдоль вертикальной оси откладывается безразмерная критическая нагрузка $q^* = q_{кр}/[R]$, а вдоль горизонтальной – отношение максимального прогиба панели к толщине всего трехслойного пакета.

Подобие результатов, полученных в ходе расчета как для жестко защемленных, так и шарнирно опертых панелей, позволяет сделать общий анализ результатов. 1-я кривая характеризует изменение величины критической нагрузки при расчете бездефектной панели. 2-я кривая описывает процесс деформирования панели (не содержащей исходной дефектной зоны) с учетом эволюции расслоений. Следует обратить внимание на некоторые отличия, наблюдаемые между 1 и 2-й кривыми нагружения. Уже на ранней стадии 2-я кривая нагружения несколько отклоняется от 1-й. Анализ полей межслойных контактов показал, что именно на этом этапе начинается процесс образования расслоения. Значение критической нагрузки для бездефектной панели с учетом эволюции расслоения на 13,5% меньше, чем для аналогичной панели без учета эволюции расслоения. Последующие кривые нагружения построены для вариантов расчета, при которых на поверхности контакта между заполнителем и внутренним несущим слоем была задана исходная дефектная область. 3-я кривая построена для варианта расчета, при котором не учитывается эволюция расслоения. Форма потери устойчивости при этом расчете аналогична форме, полученной для бездефектной панели с учетом эволюции расслоения и отличается от нее лишь количественно. 4-я кривая характеризует поведение панели, содержащей исходное расслоение с учетом эволюции расслоений. Критическая нагрузка при этом варианте расчета на 11,18% меньше, чем для панели с исходным межслойным дефектом без учета эволюции расслоений.

Полученные результаты демонстрируют степень влияния учета процесса развития межслойных дефектов на устойчивость трехслойных цилиндрических панелей.

§ 12.9. Нелинейное деформирование сферического купола покрытия

Рассматривается трехслойный сферический купол, являющийся оболочкой покрытия сооружения культового назначения (рис. 12.24, а). Сборка оболочки выполняется в непосредственной близости от места монтажа. На металлодеревянный каркас укладываются и временно закрепляются листы гипсокартона. После зачистки внешней поверхности гипсокартона на его поверхность наносится клеевой состав ПВА и укладываются листы пенопласта. На следующем этапе выполняется заделка стыков, образовавшихся между плитами заполнителя. На наружную поверхность заполнителя в установленном порядке крепятся деревянные бруски, являющиеся подпорками под арматурные сетки. Завершающим этапом является формирование наружного несущего слоя. Для его изготовления используется гипсобетонная смесь с добавками пластификаторов и замедлителем процесса твердения, позволяющих равномерно распределить смесь по поверхности заполнителя. Монтаж

купола и установка в проектное положение осуществляются после того, как несущие элементы наберут прочность, близкую к проектной.

После установки конструкции в проектное положение на поверхность наружного слоя наносится гидроизоляционный ковер из трех слоев рубероида на битумной мастике. Внешняя сторона оболочки обшивается листовой жестию толщиной 1 мм. Для завершения архитектурного ансамбля в зените купола монтируется шпиль с культовой символикой.

Известно, что изготовление трехслойных конструкций требует соблюдения соответствующих условий технологического процесса в ходе их сборки. Нарушение технологии на этапах изготовления, транспортировки или монтажа может вызвать образование участков с несовершенным контактом слоев. Кроме этого в процессе эксплуатации конструкции, особенно в осенне-весенний период, возможно намокание слоев оболочки из-за внешних атмосферных осадков. Этот процесс может носить как локальный, так и глобальный характер. Намокание несущих слоев рассматриваемой оболочки способно вызвать снижение физико-механических характеристик материалов несущих слоев, что в свою очередь может уменьшить их сцепление с заполнителем.

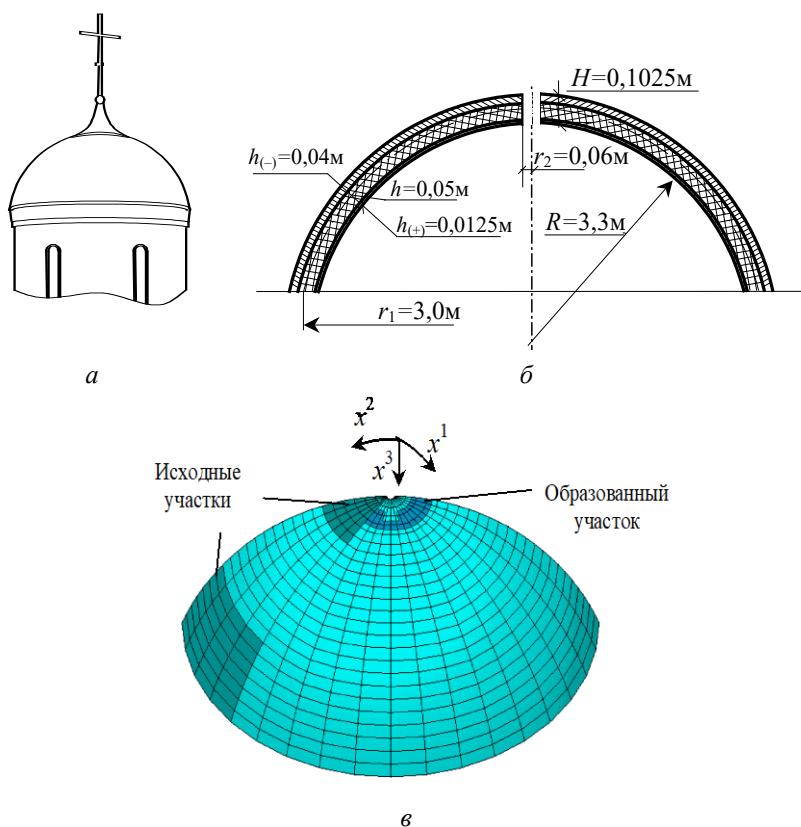


Рис.12.24. Расчет сферического купола покрытия:
 а – общий вид; б – поперечный разрез;
 в – расположение дефектных участков

Перечисленные факторы обуславливают необходимость исследования нелинейного деформирования купола с учетом возможного образования и развития межслойных дефектов.

В качестве нагрузки на купол принят вес конструктивных слоев, гидроизоляционного ковра и жестяной кровли, а также снеговая нагрузка. Перечисленные нагрузки моделируются равномерно распределенным вертикальным давлением интенсивностью $q^e = 402,3$ Па и прикладываются к внешней поверхности наружного слоя оболочки. Вес шпиля моделируется равномерно распределенной вертикальной нагрузкой $q^e = 234$ кПа, прикладываемой в кольцевом направлении к наружному слою оболочки в непосредственной близости от зенита.

Радиус кривизны внутренней поверхности оболочки $R = 3,3$ м, высота купола – 2,0 м. Радиус срединной поверхности оболочки в основании $r_1 = 3,0$ м. Отверстие радиусом $r_2 = 0,06$ м, расположенное в зените купола,

является технологическим и предназначено для крепления анкера к подъемному устройству, с помощью которого выполняется монтаж конструкции в проектное положение (рис.12.24,б).

Наружный несущий слой изготовлен из гипсобетона: толщина его $h_{(-)} = 0,04$ м, модуль упругости $E_{(-)} = 5,0$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$ и плотность $\gamma = 13,0$ кН/м³. Заполнитель изготовлен из фенолформальдегидного пенопласта толщиной $h = 0,05$ м. Материал заполнителя характеризуется следующими параметрами: $E = 10,0$ МПа; $\nu = 0,35$; $\gamma = 0,40$ кН/м³; расчетное сопротивление на сдвиг $[R] = 50$ кПа. Внутренний несущий слой выполнен из гипсобетона: $h_{(+)} = 0,0125$ м; $E_{(+)} = 2,5$ ГПа; $\nu = 0,2$; $\gamma = 8,50$ кН/м³.

Рассматривались варианты конструкции:

а – бездефектная;

б – то же, с учетом эволюции расслоений;

в – с исходными межслойными дефектами без учета эволюции расслоения;

г – то же, с учетом эволюции расслоений.

Наличие симметрии в форме деформирования конструкции позволяет выделить для ее расчета фрагмент, ограниченный вертикальной плоскостью симметрии.

В качестве условий закрепления конструкции в проектном положении рассмотрено два варианта опирания нижней стороны оболочки: шарнирно неподвижное опирание и жесткое защемление.

По результатам исследования сходимости решения за расчетную была принята конечноразностная сетка 17×37 узлов (17 узлов в направлении оси Ox^1 , 37 узлов в направлении Ox^2).

В результате расчета определена степень влияния эволюции расслоений на параметры напряженно-деформированного состояния оболочки. Результаты расчета в виде напряжений $\sigma_{1(+)}$ и перемещений $u_{3(+)}$ в реперных узлах для разных вариантов исследования сведены в табл.12.11. На рис.12.24,в показано расположение исходных дефектных участков и участка, образованного в процессе деформирования конструкции.

Анализ полученных результатов показал, что при расчетных нагрузках купол не теряет устойчивость. При расчете бездефектной оболочки (вариант а) наибольшие вертикальные перемещения возникают в зонах, расположенных в непосредственной близости от мест крепления шпилья. Максимальные значения вертикальных перемещений при расчетной нагрузке составляют 0,0114 м. Нормальные напряжения σ_{11} в сечениях несущих слоев изменяются от 0,4 до 9,0 кПа.

При расчете бездефектной оболочки с учетом эволюции расслоения установлено, что уже при нагрузке, равной 70% расчетной, в зонах, прилегающих к местам опирания шпилья, наблюдается образование межслойных дефектов. Участки расслоений характеризуются проскальзыванием внутренне-

го слоя по поверхности заполнителя без отрыва от него. При достижении нагрузки расчетного значения дефектный участок, содержащий расслоение, составляет площадь, равную 6% площади расчетного фрагмента (см. рис. 12.24, в). Образовавшийся дефектный участок качественно не меняет форму деформирования купола. Максимальные вертикальные перемещения, расположенные в зените купола, достигают 0,0059 м, а нормальные напряжения в несущих слоях изменяются от 3,8 до 15,1 кПа.

Таблица 12.11

Номер узла	$\sigma_{11(+)} \text{, кПа}$					$u_{3(+)} \cdot 10^{-3} \text{, м}$				
	Бездефектная оболочка		Дефект			Бездефектная оболочка		Дефект		
			в приопорной части		в зените			в приопорной части		в зените
	б/э	с/э	б/э	с/э	с/э	б/э	с/э	б/э	с/э	с/э
[3;3]	3,99	13,71	3,99	13,72	14,30	5,60	5,85	5,60	5,85	5,68
[3;9]	8,98	8,84	8,99	8,83	8,72	0,09	0,17	0,11	0,17	0,20
[3;9]	2,35	2,18	2,35	2,18	2,05	0,03	0,043	0,03	0,046	0,046
[3;12]	1,75	1,74	1,82	1,79	1,67	-0,20	-1,94	-0,20	-0,20	-0,23
[3;16]	0,41	0,41	0,37	0,38	0,39	-0,12	-0,14	-0,12	-0,12	-0,11

Примечание. Сокращения б/э и с/э обозначают соответственно «без» и «с» эволюцией расслоения.

Наличие исходного дефекта (вариант в) приводит к незначительному перераспределению напряжений лишь в зонах, непосредственно примыкающих к ней. При этом перемещения в зените купола увеличиваются на 15% по сравнению с бездефектной оболочкой.

Исследование нелинейного деформирования купола с исходным дефектом и с учетом эволюции расслоений (вариант г) показало, что при такой постановке рост дефектов схож с процессом, наблюдавшимся в варианте б. При увеличении нагрузки, в 1,5 раза превышающей расчетную, рост межслойных дефектов в других зонах не наблюдается.

Исходя из анализа результатов выполненного исследования, можно сделать вывод, что наличие или образование дефектов в виде расслоений в куполе при заданном нагружении не приводит к потере его устойчивости, а лишь незначительно (до 18%) изменяет параметры напряженно-деформированного состояния. Эти изменения не являются опасными для работоспособности конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.Я.* Об определении приведенных упругих параметров сотовых заполнителей // Расчет элементов авиационных конструкций. – 1965. – № 4. – С. 59–70.
2. *Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куришин Л.М., Прусаков А.П.* Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 270 с.
3. *Александров А.Я., Куришин Л.М.* Трехслойные пластины и оболочки // Прочность, устойчивость, колебания. – 1968. – Т. 2. – С. 243–308.
4. *Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А.* Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. – М.: Стройиздат, 1976. – 248 с.
5. *Александров А.Я., Трофимова Э.П.* Расчет трехслойных панелей с сотовым заполнителем с поперечными сечениями ячеек сот в форме удлиненных шестиугольников // Расчет элементов авиационных конструкций. Трехслойные пластины и оболочки. – М.: Машиностроение, 1965. – С. 159–171.
6. *Андреев А.Н.* Расчет слоистых арок и цилиндрических покрытий при ограниченном сопротивлении поперечному сдвигу // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 5. – С. 23–25.
7. *Андреев Л.В., Ободан Н.И.* Задачи устойчивости цилиндрической оболочки с переменной жесткостью при внешнем давлении // Прикладная механика. – 1968. – Т. 4, № 12. – С. 82–88.
8. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
9. *Алфутов Н.А., Зинovieв П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
10. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук. – 1953. – Т. 6, № 3. – С. 3–20.
11. *Аргирис Дж.* Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Стройиздат, 1968. – 241 с.
12. *Бабич Д.В., Кошевой И.К., Шпаков О.Г.* Об учете неоднородных свойств материала в задачах упругого равновесия и устойчивости оболочек // Математические методы и физико-механические поля. – 1988. – С.89–93.
13. *Бабич Д.В.* Влияние расслоения материала на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 1983. – Т. 2, № 10. – С. 52–56.
14. *Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Оглобля А.И., Динкевич Ю.Л., Геращенко О.В.* Расчет композитных конструкций с учетом расслоений. – К.: Будівельник, 1992. – 136 с.
15. *Баженов В.А., Оглобля А.И.* Исследование нелинейного деформирования и устойчивости оболочек подземных трубопроводов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1984. – № 4. – С. 30–33.
16. *Баженов В.А., Оглобля А.И., Геращенко О.В.* Теория и расчет трехслойных конструкций, содержащих расслоения. – К.: Наук. думка, 1997. – 248 с.

17. *Баженов В.А., Оглобля О.И., Якімкін О.В.* Дослідження стійкості тришарових конструкцій з урахуванням еволюції розшарувань // Буд-во України. – 2000. – № 5. – С. 41–46.
18. *Баженов В.А., Цихановський В.К., Кислоокий В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – К.: КНУБА, 2000. – 386 с.
19. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Гондляр А.В., Мельников С.Л.* Нелинейные задачи механики многослойных оболочек. – К.: НИИ строит. механики, 1994. – 264 с.
20. *Балдин В.А., Шейнфельд Н.М.* Применение трубчатых конструкций из стали повышенной и высокой прочности в перекрытиях // Металлические конструкции. – М.: Стройиздат, 1966. – С. 50–63.
21. *Барская Н.А.* Метод конечных элементов в строительной механике. – Л.: ВНИИГ, 1973. – Вып. 1. – 101 с.; вып. 2. – 68 с.
22. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
23. *Безухов Н.И., Лужин О.В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высш. шк., 1974. – 200 с.
24. *Беленький Л.М.* Расчет судовых конструкций в пластической стадии. – Л.: Судостроение, 1983. – 448 с.
25. *Беленя Е.И.* Основные направления научных исследований в металлических конструкциях // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1969. – № 12. – С. 3–9.
26. *Битюцкий А.И.* Некоторые вопросы расчета висячих покрытий с ортогональной пространственной сеткой нитей // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 150–159.
27. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
28. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
29. *Болотин В.В.* О пространственной деформации балок после потери устойчивости // Расчет пространственных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1959. – Вып. 5. – С. 61–73.
30. *Болотин В.В.* Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1966. – Вып. 12. – С. 3–31.
31. *Болотин В.В.* Теория армирования слоистой среды со случайными начальными неправильностями // Механика полимеров. 1966. – № 1. – С. 11–19.
32. *Болотин В.В.* Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Механика композитных материалов. – 1984. – № 2. – С. 239–255.
33. *Болотин В.В.* Уравнения роста отслоений в оболочках из композиционных материалов // Надежность и ресурс машин и конструкций: Межвед. темат. сб. тр. – М.: МЭИ, 1984. – № 26. – С. 5–10.

34. Болотин В.В. Энергетический подход к описанию роста усталостных трещин при неодноосном напряженном состоянии // ПМТФ. – 1985. – № 5. – С. 136–143.
35. Болотин В.В. Разрушение композиционных материалов по типу отслоений // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение. – 1986. – № 27. – С. 8–20.
36. Болотин В.В. Повреждение и разрушение композитов по принципу расслоений // Механика композитных материалов. – 1987. – № 3. – С. 424–432.
37. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
38. Болотин В.В., Зебельян З.Х. Устойчивость упругих сферических оболочек с расслоениями // В сб.: Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – Вып. 22. – С. 150–165.
39. Болотин В.В., Зебельян З.Х., Курзин А.А. Устойчивость сжатых элементов с дефектами типа расслоений // Проблемы прочности. – 1980. – № 7. – С. 3–8.
40. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
41. Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. – М.: Стройиздат, 1972. – 190 с.
42. Борейко А.С. О расчете физически нелинейного гибкого стержня // Автоматизация и оптимизация проектируемых конструкций. – Хабаровск: 1977. – С. 35–38.
43. Броуде Б.М. Предельные состояния стальных балок. – М. – Л.: Госстройиздат, 1953. – 216 с.
44. Брюккер Л.Э. Пределы применимости формул инженерного расчета трехслойных пластин несимметричного строения с изотропным и сотовым заполнителями при изгибе // Расчет элементов авиационных конструкций. Трехслойные пластины и оболочки. – М.: Машиностроение, 1985. – С. 92–99.
45. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин. – М.: Гостехиздат, 1953. – 423 с.
46. Бударейко О.В., Носова З.М., Сухнин С.Н. О границах применимости различных гипотез к анализу осесимметричного напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек из композитных материалов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. – 1986. – С. 92–99.
47. Бурман З.И., Лукашенко В.И., Тимофеев М.Т. Расчет тонкостенных подкрепленных оболочек методом конечных элементов с применением ЭЦВМ. – Казань: КГУ, 1973. – 569 с.
48. Бурчак Г.П. О пространственной устойчивости и колебаниях сплошных балочных пролетных строений с ездой поверху: Дис. ... канд. техн. наук. – М., 1953. – 197 с.
49. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – 475 с.
50. Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 28–33.

51. *Ван Фо Фы Г.А.* Конструкции из армированных пластмасс. – К.: Техника, 1971. – 220 с.
52. *Варвак П.М., Варвак А.П.* Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.
53. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 286 с.
54. *Викторов Е.Г.* О развитии трещин в стержнях при продольном изгибе // *Механика материалов и конструкций*: Тр. МЭИ. – М., 1982. – Вып. 578. – С. 40-42.
55. *Власов В.З.* Избранные труды. – М.: АН СССР, 1962. – Т. 1. – 528 с.; т. 2. – 507 с.; т. 3. – 472 с.
56. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
57. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. – М.: Наука, 1975. – 367 с.
58. *Галин Л.А.* Упруго-пластические задачи. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
59. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
60. *Гвамичава А.С., Лазарева Г.С.* Применение гибких элементов при создании компактно складывающихся поверхностей // *Исследования, разработка и внедрение висячих систем в покрытиях и инженерных сооружениях*. – К., 1982. – С. 114–116.
61. *Геммерлинг А.В.* Общий метод расчета рам из упруго-пластического материала // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1968. – № 3. – С. 1–7.
62. *Геммерлинг А.В.* Расчет стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1974. – 206 с.
63. *Герштейн М.С., Красулин И.Д., Розедент Б.Я., Сапрыкин Ю.М.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической многослойной составной оболочки при продольном сжатии // *Конструкции, методы расчета газонефтепроводов и способы их строительства*. – М.: ВНИИСТ, 1980. – С.86–95.
64. *Гольденблат И.И., Николаенко Н.А.* Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсных сил. – М.: Госстройиздат, 1961. – 320 с.
65. *Гольдштейн А.С., Киреенко В.И.* Висячие и арочные переходы нефтепроводов. – М.: Недра, 1964. – 115 с.
66. *Гордеев В.Н., Илиев К.Н., Перельмутер А.В., Прицкер А.Я.* Исследование совместной работы плоского мембранного настила и податливого бортового элемента // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1972. – № 3. – С. 50–54.
67. *Григолюк Э.И.* Уравнение трехслойных оболочек с легким заполнителем // *Изв. АН СССР. ОТН*. – 1957. – № 1. – С. 77–84.
68. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // *Прикладная механика*. – 1972. – Т. 8, вып. 6. – С. 3–17.
69. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Нелинейные уравнения многослойных пологих оболочек регулярного строения // *Механика твердого тела*. – 1967. – № 1. – С. 3–18.
70. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 216 с.

71. Григолюк Э.И., Шалашин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
72. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
73. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. К оценке допущений теории трехслойных оболочек с заполнителем // Прикладная механика. – 1984. – № 5. – С. 19–25.
74. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
75. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 275 с.
76. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
77. Гузь А.Н., Кнюх В.И., Назаренко В.М. Расслаивание композитных материалов при сжатии вдоль внутренних и приповерхностных макротрещин // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22, № 11. – С. 40–46.
78. Гудьер Дж. Н., Ходж Ф.Г. Упругость и пластичность. – М.: ИЛ, 1960. – 190 с.
79. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976. – 95 с.
80. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
81. Дикович И.Л. Статика упруго–пластических балок судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1967. – 264 с.
82. Динник А.Н. Устойчивость упругих систем. – М.: ОНТИ, 1935. – 183 с.
83. Дмитриев Л.Г. Расчет вантовых покрытий // Стр-во и архитектура. – К., 1963. – № 2. – С. 16–17.
84. Дмитриев Л.Г., Касилов А.В. Вантовые покрытия. – К.: Будівельник, 1974. – 272 с.
85. Дривинг А.Я. Устойчивость мачт на оттяжках. – М.: Стройиздат, 1964. – 112 с.
86. Ендогур А.И., Вайнберг М.В., Иерусалимский К.М. Сотовые конструкции. Выбор параметров и проектирование. – М.: Машиностроение, 1986. – 200 с.
87. Еришов Н.Ф. Упруго–пластический расчет пластин с распором // Прикладная механика. – 1963. – Т. 9, № 6. – С. 55–62.
88. Еришов Н.Ф. Цилиндрический изгиб пластин с распором, выполненных из линейно упрочняющихся материалов // Тр. ГПИ. – Горький: ГГУ, 1966. – № 3. – С. 21–30.
89. Еришов Н.Ф., Свечников О.И. Предельное состояние и надежность конструкций речных судов. – Л.: Судостроение, 1970. – 152 с.
90. Железко И.П., Ободан Н.И. Влияние расслоений на несущую способность оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – № 6. – С. 153–158.
91. Завриев К.С., Ониашвили О.Д. Избр. тр. – Тбилиси: Мецниереба, 1978. – 297 с.

92. Захаров В.В., Никитин Л.В. Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов // *Механика композитных материалов*. – 1983. – № 4. – С. 20–25.
93. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
94. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений в механике сплошных сред. – М.: Недра, 1974. – 239 с.
95. Знаменский П.М. Общая устойчивость длинных открытых профилей при продольном сжатии // *Техника воздушного флота*. – 1934. – № 12. – С. 1–16.
96. Зотова И.М. Исследование висячих систем покрытия типа «опрокинутых» арок: Дис. ... канд. техн. наук. – М.: 1979. – 216 с.
97. Зотова И.М. К расчету висячих покрытий с конечной изгибной жесткостью // *Строительные конструкции. Исслед. по метал. конструкциям: Сб. науч. тр. ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко*. – М.: ЦИНИС, 1970. – Вып. 5. – С. 6–29.
98. Ивович В.А. Нелинейные колебания гибкой пологой нити // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1966. – № 5. – С. 39–44.
99. Иерусалимский К.М. Несущая способность и оптимальные параметры шарнирно опертых по контуру трехслойных пластин с сотовым наполнителем при сжатии // *Тр. ЦАГИ*. – 1968. – Вып. 1101. – 290 с.
100. Илленко К.Н. О расчете нити с изгибной жесткостью // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1966. – № 6. – С. 47–50.
101. Ильюшин А.А. Пластичность. – М. – Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
102. Ильясевич С.А. Металлические коробчатые мосты. – М.: Транспорт, 1970. – 279 с.
103. Кантор Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. – К.: Наук. думка, 1971. – 136 с.
104. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
105. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
106. Карякин Н.И. Основы расчета тонкостенных конструкций. – М.: Высш. шк., 1960. – 239 с.
107. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 324 с.
108. Качанов Л.М. Устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости // *Прикладная математика и механика*. – 1951. – Т. XV, № 2. – С. 195–206.
109. Качанов Л.М. К вопросу о расслоении композитных материалов // *Вестник Ленингр. ун-та*. – 1976. – № 13. – С. 77–81.
110. Качурин В.К. Статический расчет вантовых систем. – Л.: Стройиздат, 1969. – 141 с.
111. Качурин В.К. Теория висячих систем. – М.-Л.: Госстройиздат, 1962. – 224 с.
112. Качурин В.К., Брагин А.В., Ерунов Б.Г. Проектирование висячих и вантовых мостов. – М.: Транспорт, 1971. – 280 с.

113. Киреенко В.И., Шимановский В.Н., Коришунов Д.А., Смирнов Ю.В. Висячие трубопроводные переходы. – К.: Будівельник, 1968. – 160 с.
114. Кирсанов Н.М. Висячие и вантовые конструкции. – М.: Стройиздат, 1981. – 158 с.
115. Кирсанов Н.М. Висячие покрытия производственных зданий. – М.: Стройиздат, 1990. – 127 с.
116. Кирсанов Н.М. Висячие системы повышенной жесткости. – М.: Стройиздат, 1973. – 116 с.
117. Кирсанов Н.М. Расчет висячих комбинированных систем по линиям влияния с учетом прогибов. – Воронеж: ВГУ, 1976. – 103 с.
118. Кислоокий В.Н. Алгоритм численного решения задач статики и динамики нелинейных систем // Прикладная механика. – 1966. – Т. II, вып. 6. – С. 87–91.
119. Кислоокий В.Н. Исследование статики и динамики висячих, пневмонапряженных и комбинированных систем методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – № 4. – С. 27–30.
120. Кислоокий В.Н. Реализация МКЭ в расчетах мембранно-стержневых, висячих, пневмонапряженных и комбинированных систем // Комплексный расчет зданий и сооружений с применением ЭВМ. – К.: КИСИ, 1978. – С. 61–65.
121. Кислоокий В.Н. Статика и динамика нелинейных вантово-стержневых систем // Сопротивл. материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1969. – Вып. IX. – С. 13–21.
122. Кислоокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А. Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек // Проблемы прочности. – 1977. – № 7. – С. 25–32.
123. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Фесенко О.А. Сравнительный анализ алгоритмов решения задач статики мягких оболочек методом конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1983. – Вып. 43. – С. 53–58.
124. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В. Решение задач формообразования и расчета сильно нелинейных пространственных покрытий // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 5. – С. 1–4.
125. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Боговис В.Е. Численный расчет большепролетных пространственных комбинированных конструкций // Изв. вузов. Стр.-во и архитектура. – 1987. – № 7. – С. 33–38.
126. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Касилова Т.А., Крицкий В.Б. Комплекс программ для статических и динамических расчетов нелинейных комбинированных систем // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 48. – С. 32–35.
127. Кислоокий В.Н., Шимановский А.В., Лазарева Г.С., Крицкий А.Б. Решение задач общей устойчивости сильно нелинейных вантово-стержневых систем // Изв. вузов. Стр.-во и архитектура. – 1985. – № 9. – С. 28–33.
128. Кисляков С.А., Нефедов С.В. Равновесные размеры эллипсоидальных отслоений в ортотропной цилиндрической оболочке // Надежность и ресурс машин и конструкций: Межвед. темат. сб. тр. – М.: МЭИ, 1984. – Вып. 26. – С. 29–33.

129. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
130. Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. Расчет трехслойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 303 с.
131. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упруго–пластических сред. – М.: МЛ, 1961. – 79 с.
132. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1965. – 632 с.
133. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: ЛГУ, 1977. – 206 с.
134. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1949. – 376 с.
135. Корчинский И.Л., Грилл А.А. Расчет висячих покрытий на динамические воздействия (землетрясение, ветер). – М.: Стройиздат, 1978. – 220 с.
136. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. – М.: Стройиздат, 1965. – 272 с.
137. Косенко И.С. Висячие конструкции покрытий. – М.: Стройиздат, 1966. – 87 с.
138. Кузнецов Э.Н. Пространственные вантовые системы. Теория и расчет // Строительная механика и расчет сооружений. – 1967. – № 3. – С. 1–6.
139. Кульбах В.Р. Вопросы статического расчета висячих систем. – Таллинн: ТПИ, 1970. – 118 с.
140. Куришин Л.М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек // Расчет пространственных конструкций. – 1962. – Вып. 7. – С. 163–192.
141. Лазько В.А. Напряженно–деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // Механика композитных материалов. – 1981. – № 5. – С. 832–836.
142. Лазько В.А. Напряженно–деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 2. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 77–84.
143. Лазько В.А. О вариационных формулировках задач для кусочнооднородных сред при наличии зон несовершенной связи на границах раздела // Механика неоднородных структур: Матер. 1 Всесоюз. конф. – К., 1986. – С. 123–129.
144. Лазько В.А., Мачуга О.С. Определение границ межслойных дефектов в слоистых анизотропных оболочках // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 1112–1115.
145. Лейтес С.Д. Устойчивость сжатых стальных стержней. – М.: Госстройиздат, 1954. – 308 с.
146. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
147. Лилеев А.Ф., Селезнева Е.Н. Методы расчета пространственных вантовых систем. – М.: Стройиздат, 1964. – 171 с.

148. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
149. Людковский И.Г. Комбинированные висячие покрытия // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: ЦИНИС, 1973. – № 8. – С. 4–24.
150. Людковский И.Г. Современное состояние и перспективы применения висячих покрытий // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 5–52.
151. Людковский И.Г., Иванов М.А., Пасюта А.В., Филякин А.А. Висячие оболочки покрытий с внешним листовым армированием // На стройках России. – 1987. – № 11. – С. 7–11.
152. Людковский И.Г., Федоров А.Д. Работа опорных участков вант // Висячие покрытия: Сб. научн. тр. НИИЖБ. – М.: ЦИНИС, 1971. – С. 157–162.
153. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1972. – 498 с.
154. Матевосян Р.Р. Устойчивость стержневых систем (качественная теория). – М.: Госстройиздат, 1961. – 252 с.
155. Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем / Сахаров А.С., Козак А.Л., Гондлях А.В., Мельников С.Л. // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1984. – Вып. 44. – С. 13–16.
156. Мацелинский Р.Н. Расчет гибких нитей на произвольную вертикальную нагрузку // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 52–60.
157. Мацелинский Р.Н. Статический расчет гибких висячих конструкций. – М. – Л.: Госстройиздат, 1950. – 192 с.
158. Мацелинский Р.Н. Статический расчет упругих нитей // Строительная механика и расчет сооружений. – 1959. – № 4. – С. 3–9.
159. Мачуга О.С., Пелех Б.Л. О сопротивлении разрушению слоистых анизотропных пластин с дефектами на границах раздела // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – № 1. – С. 168–174.
160. Медведев С.В., Каранетян Б.К., Быховский В.А. Сейсмические воздействия на здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1968. – 191 с.
161. Мельников Н.П. Пути прогресса в области металлических конструкций. – М.: Стройиздат, 1974. – 136 с.
162. Метод конечных элементов в механике сплошной среды / Под ред. П.М.Варвака. – К.: КАДИ, 1976. – 114 с.
163. Метод конечных элементов в строительной механике / Под ред. А.Г.Угодчикова. – Горький: ГГУ, 1975. – 165 с.
164. Метод конечных элементов в строительной механике сплошных сред // Реферативный обзор зарубежной литературы за период 1966-1970 гг. – Л.: ВНИИГ, 1971. – 160 с.
165. Москалев Н.С. Конструкции висячих покрытий. – М.: Стройиздат, 1980. – 331 с.

166. Мурзаханов Г.Х., Кисляков С.А. Экспериментально–теоретическое исследование развития расслоений в пластинах из композитного материала // Науч. тр. МЭИ. – 1985. – № 83. – С. 10–15.
167. Мурзаханов Г.Х., Щугорев В.Н. Влияние вторичных трещин на устойчивость и рост отслоений в конструкциях из композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 6. – С. 1120–1124.
168. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: ИЛ, 1954. – Т. 1. – 620 с.; М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 863 с.
169. Немчинов Б.К. Численный метод расчета нитей конечной жесткости // Труды ВИСИ. – Воронеж: ВГУ, 1970. – Т. 16, вып. 3. – С. 10–17.
170. Немчинов Б.К. Экспериментальное исследование нитей конечной жесткости // Тр. ВИСИ. – Воронеж: ВГУ, 1971. – Т. 17, вып. 7. – С. 7–13.
171. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). – К.: Будівельник, 1980. – 232 с.
172. Несин Д.Н. Разрушение по типу расслоений в конструкциях из композиционных материалов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1984. – 16 с.
173. Нефедов С.В. Анализ роста эллипсоидальных отслоений в композитах при длительных квазистатических нагрузках // Механика композитных материалов. – 1988. – № 5. – С. 827–833.
174. Нефедов С.В. Расчет роста эллипсоидальных отслоений в пластинах из композиционных материалов при межслойном разрушении // Науч. тр. МЭИ. – 1988. – № 190. – С. 14–18.
175. Нил Б.Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материала. – М.: Госстройиздат, 1961. – 315 с.
176. Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.
177. Новичков Ю.Н. Изгиб слоистых стержней с проскальзыванием между слоями // Изв. АН АССР. Механика. – 1974. – № 4. – С. 67–73.
178. Новожиллов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М. – Л.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
179. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
180. Отто Ф. Висячие покрытия, их формы и конструкции. – М.: Госстройиздат, 1960. – 179 с.
181. Отто Ф., Шлейер Ф.К. Тентовые и вантовые строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1970. – 175 с.
182. Панин В.Ф. Конструкции с сотовым наполнителем. – М.: Машиностроение, 1982. – 152 с.
183. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
184. Пелех Б.Л., Коровайчук И.М. Об одном классе задач для слоистых композитов при наличии зон проскальзывания на границе раздела фаз // Механика композитных материалов. – 1981. – № 2. – С. 342–345.

185. *Пелех Б.Л., Лазько В.А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наук. думка, 1982. – 295 с.
186. *Пелех Б.Л., Максимчук А.В., Коровайчук И.М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – К.: Наук. думка. – 1988. – 280 с.
187. *Пелех Б.Л., Мачуга О.С.* Двухпараметрическая модель разрушения адгезионных соединений // *Механика композитных материалов.* – 1988. – № 6. – С. 1034–1039.
188. *Передерий Г.П.* Курс мостов. Конструкция, проектирование и расчет. – М. – Л.: Госжелдориздат, 1933. – 490 с.
189. *Перельмутер А.В.* Основы расчета вантово-стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1969. – 190 с.
190. *Петров И.П., Спиридонов В.В.* Надземная прокладка трубопроводов. – М.: Недра, 1965. – 447 с.
191. *Пикуль В.В.* Теория расчета слоистых конструкций. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
192. *Полилов А.Н., Погарский М.В.* Оценка опасности продольных трещин при сжатии композитных элементов // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* – 1992. – № 4. – С.87–93.
193. *Полилов А.Н., Работнов Ю.Н.* Развитие расслоений при сжатии композитов // *Изв. АН СССР. МТТ.* – 1983. – № 4. – С. 166–171.
194. *Попов Н.Н., Расторгуев Б.С.* Динамический расчет висячих конструкций. – М.: Стройиздат, 1966. – 84 с.
195. *Постнов В.А.* Теория пластичности и ползучести. – Л.: ЛПИ, 1975. – 266 с.
196. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 279 с.
197. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 342 с.
198. *Прагер В.* Проблемы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.
199. *Прусаков А.П.* Нелинейные уравнения изгиба пологих многослойных оболочек // *Прикладная механика.* – 1971. – Т. 7, № 3. – С. 3–8.
200. *Пуховский А.Б.* Повышение сейсмостойкости стальных листовых конструкций методами предварительного напряжения // *Проектирование и строительство трубопроводов и газонефтепромысловых сооружений.* – 1982. – № 10. – С. 29–32.
201. *Пуховский А.Б., Капцов В.В.* Исследование работы висячих покрытий при сейсмических воздействиях // *Металлические конструкции в строительстве: Сб. науч. тр. МИСИ им. В.В.Куйбышева.* – М., 1983. – № 183. – С. 82–92.
202. *Рабинович И.М.* Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. – М.: Стройиздат, 1975. – 144 с.
203. *Рабинович И.М.* Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Гостройиздат, 1960. – 519 с.
204. *Рабинович И.М., Сеницын А.П., Теренин Б.М., Лужин О.В.* Расчет сооружений на импульсные воздействия. – М.: Стройиздат, 1970. – 304 с.

205. Раковщик Ю.А. К определению остаточных прогибов гибких сжато-изогнутых (или растянуто-изогнутых) стержней // Тр. МАДИ. – М., 1972. – Вып. 36. – С. 32–40.
206. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища шк., 1986. – 191 с.
207. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов / Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К. и др. – К.: Вища шк., 1987. – 200 с.
208. Рекач Г.В. Расчет гибкой растяжимой нити по деформированному состоянию // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1970. – Вып. 18. – С. 178–182.
209. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. – М.: Госстройиздат, 1954. – 287 с.
210. Ржаницын А.Р. Статика и динамика пологой упругой нити // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 60–76.
211. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
212. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Гостехтеоретиздат, 1955. – 475 с.
213. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.
214. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. – Л.: ЛГУ, 1976. – 232 с.
215. Рябов А.Ф. Розрахунок багатошарових оболонок. – К.: Будівельник, 1968. – 96 с.
216. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
217. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1974. – Вып. 24. – С. 147–156.
218. Сахаров А.С., Гондлях А.В., Мельников С.Л. Уточненная теория многослойных композитных оболочек в задачах статики и динамики // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 49. – С. 38–41.
219. Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
220. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 284 с.
221. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.
222. Серов В.Н. Упруго-пластический изгиб судовых пластин конечной жесткости: Дис. ... канд. техн. наук. – Л., 1955. – 141 с.
223. Семенюк Н.П. Об учете несовершенного контакта слоев в двухслойных цилиндрических оболочках // Прикладная механика. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 58–63.

224. Семенюк Н.П., Бойко Н.Б. Моделирование дискретной связи слоев при расчете на устойчивость двухслойной цилиндрической оболочки // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 46–51.
225. Сидорович Е.М. К расчету гибких нитей на упругих опорах // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1965. – № 6. – С. 53–57.
226. Синицын А.П. Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки. – М.: Стройиздат, 1967. – 145 с.
227. Скворцов В.И. Расчет жесткой нити при произвольном нагружении в плоскости ее провисания // Тр. МИИТ. – М., 1971. – Вып. 371. – С. 108–114.
228. Складнев Н.Н. Исследование прямоугольных пластин из материала с криволинейной несимметричной диаграммой растяжения–сжатия в условиях действия плоского напряженного состояния и поперечного изгиба // Некоторые задачи сопротивления материалов: Сб. науч. тр. МИСИ им. В.В.Куйбышева. – М., 1969. – № 63. – С. 39–52.
229. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Шапошников Н.Н. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. – М.: Судпромгиз, 1965. – 380 с.
230. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов. – М.: Высш. шк., 1970. – 408 с.
231. Снитко Н.К. Динамика сооружений. – М.-Л.: Госстройиздат, 1960. – 356 с.
232. Снитко Н.К. Устойчивость сжатых и сжатоизогнутых стержневых систем. – М. – Л.: Госстройиздат, 1956. – 207 с.
233. Сobotка З. Висячие покрытия. – М.: Стройиздат, 1964. – 151 с.
234. Соколов А.Г. Опоры линий электропередач. Расчет и конструирование. – М.: Госстройиздат, 1961. – 171 с.
235. Соколов А.Г., Гвамичава А.С. Решения инженерных конструкций космических радиотелескопов // Антенны. – М.: Радио и связь, 1981. – Вып. 29. – С. 3–10.
236. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
237. Сорокин В.В. Сложный упруго–пластический изгиб удлиненных пластин // Тр. НТО судостроит. пром-сти. – Л., 1964. – Вып. 53. – С. 111–124.
238. Спиро В.Е. Оценка упруго–пластических деформаций вытянутых прямоугольных пластин при сложном изгибе. – Л.: Судостроение, 1964. – № II. – 64 с.
239. Стрелецкий Н.С. Избранные труды. – М.: Стройиздат, 1975. – 423 с.
240. Стрельбицкая А.И., Колгадин В.А., Матошко С.И. Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости. – К.: Наук. думка, 1971. – 244 с.
241. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с.
242. Тартаковский Г.А. Строительная механика трубопровода. – М.: Недра, 1967. – 312 с.
243. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 508 с.
244. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 363 с.; т. 2. – 480 с.

245. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избр. работы. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
246. Тихенко Ю.Н. Учет пластических деформаций при изгибе балок двутаврового сечения. – М.: Госстройиздат, 1955. – 208 с.
247. Тихомирова Е.И. Расчет идеально упруго-пластических статически неопределимых стержневых систем: Дис... канд. техн. наук. – М., 1983. – 118 с.
248. Томашевский В.Т., Захватов А.С., Яковлев В.С. Влияние расслоений на устойчивость цилиндрических оболочек из композитов // Механика композитных материалов. – 1981. – № 4. – С. 683–691.
249. Торнтон Ч., Томасетти Р. Строительство крупных ангаров с несущим консольным покрытием // Гражданское стр-во. – 1970. – № II. – С. 17–22.
250. Трофимов В.И., Гольденберг Л.И. Большепролетные покрытия Олимпийских сооружений // Стр-во и архитектура. – М.: Знание, 1984. – № 5. – 61 с.
251. Трофимов В.И., Еремеев П.Г., Давыдов Е.Ю. Мембранные (тонколистовые) висячие покрытия. Обзорная информация // Стр-во и архитектура. Строит. конструкции. – М.: ЦИНИС, 1981. – Серия 8. – Вып. 1. – 65 с.
252. Трофимович В.В. Метод расчета предварительно напряженных статически неопределимых висячих систем // Прикладная механика. – 1968. – № 12. – С. 49–57.
253. Трошин В.П. К устойчивости цилиндрических оболочек с расслоениями // Механика композитных материалов. – 1981. – № 4. – С. 729–731.
254. Трошин В.П. Влияние продольного расслоения в слоистой цилиндрической оболочке на величину критического внешнего давления // Механика композитных материалов. – 1982. – № 5. – С. 839–843.
255. Тютюнин Г.В., Гольдениллюгер С.В. К определению прогибов при упруго-пластическом изгибе балок // Некоторые вопросы прочности и надежности. – Фрунзе, 1979. – С. 102–106.
256. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М. – Л.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
257. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 832 с.; 1978. – Т. 2. – 616 с.; 1981. – Т. 3. – 480 с.
258. Филин А.П. Проблемы использования современных вычислительных средств в строительной механике // Тр. I Всес. конф. по применению ЭЦВМ в строит. механике. – М., 1966. – С. 9–14.
259. Фридман Ю.Г. Устойчивость плоской формы деформации нитей конечной изгибной жесткости // Вопросы архитектуры и стр-ва зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры. – М.: ЦНИИЭП учеб. зданий, 1974. – № 2. – С. 112–123.
260. Ходж Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. – М.: Машгиз, 1963. – 380 с.
261. Хорошун Л.П. О методе определения упругих модулей армированных тел // Механика полимеров. – 1968. – № 1. – С. 78–85.
262. Цаплин С.А. Висячие мосты. – М.: Дориздат, 1949. – 287 с.

263. Цаплин С.А. Висячие мосты. Теория и расчет. – М. – Л.: Гострансиздат, 1937. – 240 с.
264. Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Сергатая Т.А. Расчет пространственной висячей системы по деформированной схеме // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1990. – № 5. – С. 34–39.
265. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
266. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
267. Шаров Я.Ф. Некоторые особенности упруго–пластического изгиба сварных перекрытий корпуса судна // Проектирование и прочность сварных конструкций: Сб. науч. тр. НТО Машпрома. – М., 1959. – С. 72–85.
268. Шимановский А.В. Влияние осадки и смещения опор на напряженно-деформированное состояние гибких нитей // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1984. – Вып. 45. – С. 65–67.
269. Шимановский А.В. Исследование напряженно–деформированного состояния нитей конечной жесткости при активном нагружении и разгрузке // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, № 11. – С. 110–117.
270. Шимановский А.В. К расчету гибких нитей при изменении температуры // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1984. – Вып. 37. – С. 88–91.
271. Шимановский А.В. К расчету нитей конечной жесткости // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1980. – Вып. 37. – С. 96–102.
272. Шимановский А.В. К расчету нитей конечной изгибной жесткости на устойчивость // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1981. – Вып. 39. – С. 91–94.
273. Шимановский А.В. Метод нелинейного расчета многопролетных упругих нитей // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 49. – С. 58–61.
274. Шимановский А.В. Некоторые вопросы устойчивости плоской формы деформирования нитей конечной жесткости за пределами упругости // Проблемы прочности. – 1992. – № 4. – С. 43–49.
275. Шимановский А.В. Некоторые задачи статики нитей конечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 6. – С. 29–32.
276. Шимановский А.В. Об одном подходе к расчету нити конечной жесткости // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1980. – Вып. 33. – С. 10–19.
277. Шимановский А.В. Общий метод статического расчета висячих ферм // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 39. – С. 32–34.
278. Шимановский А.В. Особенности реализации метода рядов Фурье в расчетах несущих элементов висячих систем // Висячие комбинированные конструкции. – Воронеж: ВГУ, 1991. – С. 43–51.
279. Шимановский А.В. Применение принципа Лагранжа к расчету многопролетных нитей конечной жесткости // Висячие покрытия и мосты. – Воронеж: ВГУ, 1986. – С. 91–95.

280. Шимановский А.В. Расчет упруго–пластических нитей конечной жесткости с использованием принципа Лагранжа // Строительная механика и расчет сооружений. – 1992. – № 2. – С. 27–33.
281. Шимановский А.В. Трубопроводный переход висячего типа // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1981. – Вып. 34. – С.23–26.
282. Шимановский А.В. Упруго–пластический расчет нитей конечной жесткости из упрочняющегося материала // Изв. вузов. Строительство. – 1992. – № 2. – С. 27–32.
283. Шимановский А.В. Устойчивость раскрепленных вантовых ферм повышенной жесткости // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1983. – Вып. 43. – С. 39–42.
284. Шимановский А.В. Уточнение методики расчета нитей конечной жесткости при статических воздействиях // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1985. – № 5. – С. 115–118.
285. Шимановский А.В., Гайна Г.А. Интерактивная система для расчетов прочности и устойчивости строительных конструкций на микроЭВМ // Системы автоматизированного проектирования объектов строительства (САПР–ОС). – К.: Будівельник, 1988. – Вып. 5. – С. 72–77.
286. Шимановский А.В., Марзицин Б.М. Метод рядов Фурье в задачах нелинейного расчета струн конечной изгибной жесткости // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1986. – № 3. – С. 21–26.
287. Шимановский А.В., Марзицин Б.М. Представление кривой провисания гибких струн рядами Фурье // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1984. – Вып. 44. – С. 40–44.
288. Шимановский А.В., Марзицин Б.М. Применение рядов Фурье в задачах статики гибких упругих нитей // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1985. – Вып. 47. – С. 95–98.
289. Шимановский А.В., Марзицин Б.М. Ряды Фурье в нелинейных задачах расчета нитей конечной жесткости // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1987. – Вып. 51. – С. 78–82.
290. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Анализ нелинейного деформирования мембранных и стержневых систем // Расчет прочности, устойчивости и колебаний сооружений. – Воронеж: ВГУ, 1990. – С.150–156.
291. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Исследование вантово–стержневой системы висячего перехода трубопровода при больших перемещениях // Изв. СКНЦ ВШ. Технические науки. – 1987. – № 3. – С.90–96.
292. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Статический расчет нелинейных внешне-распорных конструкций при сложных нагрузках // Висячие конструкции покрытий и мостов. – Воронеж: ВГУ, 1988. – С. 35–42.
293. Шимановский А.В., Цыхановский В.К., Тулебаев К.Р. Численное исследование комбинированного висячего покрытия спортивной арены на статические и сейсмические воздействия // Изв. вузов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 18–24.
294. Шимановский В.Н. Висячие системы. – К.: Будівельник, 1984. – 208 с.

295. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости). – К.: Будівельник, 1973. – 198 с.
296. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б. Статические и динамические испытания моделей трубопроводных переходов в виде провисающей нити // Экспериментальные исследования инженерных сооружений. – К.: Будівельник, 1969. – Вып. 5. – С. 44–49.
297. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б., Присяженко Е.К. Экспериментальное исследование нитей конечной жесткости // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1967. – Вып. 6. – С. 5–21.
298. Шимановский В.Н., Соколов А.А. Расчет висячих конструкций за пределом упругости. – К.: Будівельник, 1975. – 104 с.
299. Шимановский В.Н., Харченко Р.Б., Киреенко В.И., Лысов В.Б. Новое решение трубопроводного перехода висячего типа // Промышленное стро-во и инженерные сооружения. – 1975. – № 6. – С. 18–20.
300. Шимановский В.Н., Шимановский А.В. Устойчивость плоской формы изгиба пологих нитей конечной жесткости // Развитие металлических конструкций. Работы школы Н.С.Стрелецкого. – М.: Стройиздат, 1987. – С. 391–403.
301. Ширко Н.В. Упруго–пластический изгиб гибких криволинейных стержней // Тр. ВНИИ физико-технических и радио-технических измерений. – М., 1971. – Вып. 8. – С. 77–85.
302. Штамм К., Витте Х. Многослойные конструкции. – М.: Стройиздат, 1982. – 296 с.
303. Щедров В.С. Основы механики гибкой нити. – М.: Машгиз, 1961. – 172 с.
304. Щугорев В.Н. Дефекты типа отслоений при совместном действии отрыва и межслойного сдвига // Механика композитных материалов. – 1987. – № 3. – С. 539–542.
305. Щугорев В.Н. Экспериментально–теоретическое исследование кинетики роста карманообразных отслоений в цилиндрической оболочке из композиционного материала // Научн. тр. МЭИ. – 1988. – № 190. – С. 10–14.
306. Щугорев В.Н. Кинетика дефектов типа отслоений при совместном действии отрыва и межслойного сдвига // Механика композитных материалов. – 1988 – № 2. – С. 227–231.
307. Ягн Ю.И. Изгибно–крутильные деформации тонкостенных стержней открытого профиля. Теория и расчет. – М.: Гостехиздат, 1952. – 108 с.
308. Bandel H.K. Das orthogonale Seilnetz hyperbolisch–parabolischer Form unter verticalen Lastzusanden und Temperaturanderung // Der Bauingenieur. – 1959. – Jg. 34, № 10. – S. 394–401.
309. Bauer. Das flache biegesteife Seil mit elastischer Einspannung an der Enden // Der Bauingenieur. – 1972. – Jg. 47, № 11. – S. 387–393.
310. Bolotin V.V. Fracture and fatigue of composite plates and shells.–Inelastic behaviour of plates and shells // IUTAM symposium. – 1986. – P. 131–161.
311. Chen Z.Q., Simitses G.J. Delamination buckling of pressure loaded, cross–ply, laminated cylindrical shells // Z. angew. Math. und Mech. – 1988. – Bd. 68, № 10. – S. 491–501.

312. *Fish John C., Lee Sung W.* Delamination of tapered composite structures // *Eng. Fract. Mech.*, 1989. – V. 34, № 1. – P. 43–54.
313. *Gibson L.J., Ashby M.F., Schajer G.S., Robertson C.J.* The mechanics of two-dimensional cellular materials // *Proc. Roy. Soc. London A* 382. – 1982. – № 178. – P. 25–42.
314. *Hill R.* Theory of mechanical properties of fibrestrengthened materials // *J. Mech. and Phys. Solids*. – 1964. – V. 12, № 4. – P. 199–218.
315. *Hoffman G.A.* Poissons ratio for honeycomb sandwich cores // *J. Aerosol. Sci.* – 1958. – V. 25, № 18. – P. 534–535.
316. *Ichizou T., Kimihira K., Hiroshi Y.* Inelastic coupled buckling of vertically curved girders under pure bending // *Technol. Repts Kansai Univ.* – 1975. – № 16. – P. 77–91.
317. *Ilis S., Williams J.F.* Compression failure modes in composites // *Theor. And Appl. Fract. Mech.* – 1986. – V. 6, № 2. – P. 121–127.
318. *Jensen I.I.* Eine statische und dynamische Untersuchung der Seil – und Membautragwerke // *Bericht*. – 1970. – № 70. – S. 120–128.
319. *Kappus R.* Zentrisches und exzentrisches Drehknicken von Staben mit offenem Profil // *Der Stahlbau*. – 1953. – Jg. 22, H. 1. – S. 6–12.
320. *Kislookij V.N., Kasilova T.A., Krizkij W.B., Zichanovskij W.K., Shimanovskij A.V.* Programm-komplex zur nichtlinearen statischen und dynamischen Berechnung Kombinierten Konstruktionen // *Wiss. Z. Hochsch. Archit. Bauwes.* – Weimar, 1985. – Reihe B. – Jg. 31, H. 31. – S. 97–99.
321. *Koichi T., Kuniaki U., Hisashi T.* Failure of steel beams due to lateral buckling under repeated loads // *Rapp. commis. trav. Assoc. Ints. ponts. Et charpentes*. – 1973. – V. 13. – P. 312–325.
322. *Lissitsin B. M., Shimanovsky A.V.* The new solutions and the theory of calculation for the overground radial – cable – stayed main product lines and for passages of large spans // *IASS Symposium: Spatial structures at the turn of millennium*. – Copenhagen, 1991. – V. III. – P. 165–172.
323. *Nagao Hiroshi.* The shear modulus of honeycomb cores / In.: *Proc. 9-th Japan Nat. Cong., Tokio* // *Appl. Mech.* – 1960. – P. 97–100.
324. *Naniewicz Z., Wozniak Cz.* On a quasi –stationary model of debonding processes in layered composites // *Ing.-Arch.* – 1988. – V. 58, № 6. – P. 403–412.
325. *Ochoa Ozder O., Moore Allan.* A parametric study on strain energy release rates of compression members // *Compos. Struct.* – 1989. – V. 11, № 2. – P. 151–163.
326. *Panagiotopoulos P.D., Stavroulakis G.E.* A hemivariational inequality approach to the delamination effect in theory of layered plates // *Arch. mech. stosow.* – 1987. – V. 39, № 5. – P. 497–512.
327. *Partridge C., Weachter R.T., Williams J.F., Jones R.* A finite element analysis of delamination behaviour in a circular laminate // *Comput. And Struct.* – 1989. – V. 31, № 1. – P. 17–20.
328. *Sallam S., Simitses G.J.* Delamination buckling and growth of flat, cross-ply laminates // *Compos. Struct.* – 1985. – V. 4. – P. 361–381.

329. *Schleyer F.K.* Die Berechnung von Seilon, Seilnetzen und Seilwerken // Lugbeanspruchte Konstruktionen. – 1966. – Bd. 2, H. 10. – S. 48–61.
330. *Sheinman I., Bass M., Ishi O.* Effect of delamination on stability of laminated composite strip // *Compos.Struct.* – 1989. – V. 11, № 2. – P. 227–242.
331. *Shimanovsky A.V., Tylebayev K.R.* New type of seismic stable large – span suspended roofing of public building and method of its calculation // *IASS International Congress: Innovative Large Span Structures.* – Toronto, 1992.
332. *Skladnev N.N., Shimanovsky A.V.* General calculation for suspended structures of large-span buildings and construction considering plastic properties of materials // *IASS International Congress: Innovative Large Span Structures.* – Toronto, 1992.
333. *Suemasu H., Wang S.S.* Analytical method to solve postbuckling behaviour of delaminated composite plates // *J. Jap. Soc. Compos. Mater.* – 1988. – V. 14, № 1. – P. 26–35.
334. *Sun C.T., Manoharan M.G.* Growth of delamination cracks due to bending in a [90s/0s/90s] laminate // *Compos. Sci. and Technol.* – 1989. – V. 34, № 4. – P. 365–377.
335. *Trethewey B.R., Gillespie J. W., Carlsson L. A.* Mode II cyclic delamination growth // *J. Compos. Mater.* – 1988. – V. 22, № 5. – P. 459–493.
336. *Tsai Sw., Hahn Ht.* Analysis of composite fracture // In: *Inelastic behaviour of composite materials.* Vol. 13./Ed. Carl T. Herakovich. N.-Y.: ASME, 1975. – P. 73–96. Перевод: Цай С., Хан Х. Анализ разрушения композитов // В кн.: Неупругие свойства композитных материалов. / Под ред. К.Герасовича. М.: Мир, 1978. – С. 104–139.
337. *Wagner H.* Verdrehung und Knickung von offenem Profilen // *Festschrift zum 25 Jahrgen T.H. – Danzig.* – 1929. – S. 241–254.
338. *Weber C.* Biegung und Schub in geraden Balken // *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik.* – 1924. – Bd. 4, H. 4. – S. 334–348.
339. *Young A.G.* Ship plating beyond the elastic limit // *Quart. Trans. Inst. Naval Architects.* – 1959. – V. 101, № 2. – P. 107–112.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Часть I. ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ	7
Глава 1. СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	7
§ 1.1. Некоторые тенденции совершенствования висячих систем	7
§ 1.2. Обзор теоретических и экспериментальных исследований	15
§ 1.3. Задачи исследований	27
Глава 2. УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ	29
§ 2.1. Предпосылки расчета	29
§ 2.2. Построение общих дифференциальных уравнений равновесия	30
§ 2.3. Решение дифференциальных уравнений	35
§ 2.4. Учет влияния температурных воздействий	39
§ 2.5. Учет влияния деформации основания.....	43
§ 2.6. Расчет многопролетной гибкой нити на упруго-податливых опорах.....	45
§ 2.7. Расчет двухпоясной висячей системы.....	49
§ 2.8. Оценка предпосылок расчета и принятых допущений	53
§ 2.9. Расчет нитей конечной жесткости с помощью рядов Фурье	57
Глава 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ.....	79
§ 3.1. Принятые допущения	79
§ 3.2. Определение дополнительных погонных нагрузок	80
§ 3.3. Устойчивость нитей конечной жесткости	85
Глава 4. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ.....	99
§ 4.1. Исходные допущения	99
§ 4.2. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального упруго-пластического материала	100
§ 4.3. Вывод общих дифференциальных уравнений	103
§ 4.4. Влияние пластических шарниров на работу нити конечной жесткости ...	108
§ 4.5. Учет упрочнения материала.....	110
Глава 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ.....	125
§ 5.1. Сущность решения задачи	125
§ 5.2. Уточнение выражения потенциальной энергии деформации	126
§ 5.3. Определение положения границы раздела зон нагружения и разгрузки поперечного сечения нити.....	129
§ 5.4. Определение приведенной жесткости поперечного сечения	140
§ 5.5. Вывод уравнения устойчивости для нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости	144

§ 5.6. Основные уравнения устойчивости для нити конечной жесткости, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости	148
Глава 6. РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ ПОВЫШЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПО МКЭ	150
§ 6.1. Методика расчета висячих систем	150
§ 6.2. Разрешающие уравнения МКЭ	153
§ 6.3. Алгоритм решения нелинейной задачи	154
§ 6.4. Реализация методики исследования висячих систем на ЭВМ	157
Часть II. ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ	160
Глава 7. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА	160
§ 7.1. Бездефектные композитные конструкции	160
§ 7.2. Слоистые конструкции с дефектами между слоями	162
§ 7.3. Задачи исследования	171
Глава 8. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СЛОЕВ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ	173
§ 8.1. Исходные допущения	173
§ 8.2. Построение дифференциальных соотношений для заполнителя	177
§ 8.3. Основные дифференциальные соотношения для наружных слоев	183
§ 8.4. Учет ортотропии материала слоев	186
§ 8.5. Определение приведенных упругих параметров заполнителей с периодической структурой	195
§ 8.6. Вычисление упругих постоянных слоистых композитов	198
§ 8.7. Построение конечноразностных соотношений	201
§ 8.8. Граничные условия	210
Глава 9. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ ЭВОЛЮЦИИ РАССЛОЕНИЙ	213
§ 9.1. Основные предпосылки и этапы расчета	213
§ 9.2. Условия сопряжения слоев	215
§ 9.3. Построение систем разрешающих нелинейных уравнений	217
§ 9.4. Алгоритм решения нелинейных задач	222
§ 9.5. Вычислительный комплекс для решения геометрически и конструктивно нелинейных задач	231
§ 9.6. Определение пределов применимости расчетной модели трехслойной оболочки	240
Часть III. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	246
Глава 10. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ	246
§ 10.1. Работа нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций	246
§ 10.2. Работа нити конечной жесткости за пределом упругости	257
§ 10.3. Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости при симметричных и несимметричных нагружениях	265

§ 10.4. Сопоставление теоретических результатов с данными экспериментальных исследований	272
§ 10.5. Разработка и совершенствование конструктивных решений висячих систем	278
Глава 11. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ	286
§ 11.1. Висячий трубопроводный переход нефтепровода	286
§ 11.2. Висячее покрытие универсального спортивно-зрелищного зала	290
§ 11.3. Висячий трубопроводный переход керосинопровода	296
§ 11.4. Облегченная складчатая конструкция ангара для самолетов	299
§ 11.5. Висячая мембранная оболочка покрытия	303
§ 11.6. Трансформирующаяся вантово-стержневая оболочка	306
§ 11.7. Висячее покрытие универсального производственного здания	309
Глава 12. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ РАССЛОЕНИЙ	313
§ 12.1. Исследование влияния расслоений на несущую способность сотовой пластины	313
§ 12.2. Расчет элемента панели киля самолета	317
§ 12.3. Изгиб слоистого стержня с проскальзыванием между слоями	321
§ 12.4. Устойчивость трехслойной пластины	323
§ 12.5. Устойчивость цилиндрической оболочки	326
§ 12.6. Устойчивость замкнутой сферической оболочки	330
§ 12.7. Исследование влияния расслоений на устойчивость трехслойной круговой арки	333
§ 12.8. Исследование устойчивости цилиндрической панели	338
§ 12.9. Нелинейное деформирование сферического купола покрытия	344
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	349

Научное издание

**Шимановский Александр Витальевич
Оглобля Александр Иванович**

**ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ
НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Ответственный редактор	<i>Л.И.Шитова</i>
Компьютерный набор	<i>В.Н.Трохимец, Н.А. Чабан</i>
Компьютерная верстка и техническое редактирование	<i>Т. Ф. Демченко</i>
Оригинал-макет	<i>Т.Ф. Демченко</i>

Подписано в печать 07.06.02.
Формат издания 70х100/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Times New Roman». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29,99. Уч.-изд. л. 27,11.
Тираж 1000 экз. Заказ № 7.

ООО Издательство «Сталь»
г. Киев-125, просп. Освободителей, 1,
Тел./факс 516-45-02, тел. 516-55-92

Ш 61**Шимановский А. В., Оглобля А. И.**

Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. – К.: ООО Издательство «Сталь», 2002. – 372 с., рис. 174, табл. 25.

ISBN 966-7589-09-9

В книге изложены нелинейная теория, построение основных разрешающих соотношений, методы и алгоритмы численного исследования, а также анализ прочности, жесткости и устойчивости несущих элементов большепролетных пространственных конструкций, в том числе висячих систем и трехслойных оболочек произвольной геометрии и различного назначения. Приведены уточненные результаты исследований реальных нелинейных пространственных конструкций с учетом конструктивной анизотропии, пластических свойств материалов, больших перемещений, потери устойчивости плоской формы деформирования и эволюции расслоений.

Предназначена для научных работников, инженеров, преподавателей, аспирантов и магистров технических вузов.