УЧЕНЫЕ УКРАИНЫ — НАРОДНОМУ ХОЗЯЙСТВУ

«... всемерно ускорить научно-технический прогресс. Решительно поднять роль науки и техники в качественном преобразовании производительных сил, переводе экономики на рельсы всесторонней интенсификации ...»

(Из Материалов XXVII съезда КПСС)

В. Н. Шимановский
В. Н. Гордеев
М. Л. Гринберг

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ПОКРЫТИЙ

Изложены теоретические и методические основы оптимизации плит, оболочек и куполов по комплексному экономическому критерию. Приведены параметры конструкций, обеспечивающие экономию материальных, трудовых и энергетических ресурсов.

„БУДІВЕЛЬНИК"

УЧЕНЫЕ УКРАИНЫ НАРОДНОМУ ХОЗЯЙСТВУ

В. Н. Шимановский
В. Н. Гордеев
М. Л. Гринберг

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ПОКРЫТИЙ

КИЕВ «БУДІВЕЛЬНИК» 1987

38.44—02
Ш61

УДК 69.024.001.2

Оптимальное проектирование пространственных решетчатых покрытий / В. Н. Шимановский, В. Н. Гордеев, М. Л. Гринберг. — К.: Будівельник, 1987.— 224 с.
В книге изложена методика оптимизации типовых и уникальных стержневых плит, оболочек и куполов по комплексному экономическому критерию — приведенным затратам. Значительное внимание уделено оценке металлоемкости, трудоемкости изготовления и монтажа, энергоемкости конструктивной формы.
Рекомендована эффективная технология машинного расчета и оптимального проектирования в режиме диалога.
Для инженерно-технических работников проектных и научно-исследовательских организаций.
Табл. 19. Ил. 36. Библиогр.: 52 назв.

Рецензенты: *д-р техн. наук* А. С. Городецкий,
канд. техн. наук В. А. Пермяков

Редакция литературы по строительным конструкциям, материалам и изделиям
Зав. редакцией *инж. А. А. Петрова*

УЧЕНЫЕ УКРАИНЫ — НАРОДНОМУ ХОЗЯЙСТВУ

Производственное издание

Виталий Николаевич Шимановский, чл.-корр. АН УССР, д-р техн. наук, проф., Вадим Николаевич Гордеев, д-р техн. наук, Марк Львович Гринберг, канд. техн. наук

Оптимальное проектирование пространственных решетчатых покрытий

Редактор *В. А. Кочан*
Технический редактор *Б. В. Сушко*
Художественный редактор *З. П. Золотарева*
Корректоры *Ж. А. Медведь, Н. М. Мирошниченко*

ИБ № 2678

Сдано в набор 12.11.86. Подп. в печ. 04.03.87. БФ 28063. Формат 84×108 1/32. Бум. тип. № 1. Гарн. лит. Печ. выс. Усл. печ. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,97. Уч.-изд. л. 11,88. Тираж 2000 экз. Изд. № 114. Заказ 6—1654. Цена 85 к.

Издательство «Будівельник», 252053, Киев-53, Обсерваторная, 25.

Киевская фабрика печатной рекламы им. XXVI съезда КПСС, 252067, Киев-67, Выборгская, 84.

Ш $\frac{3202000000-046}{М203(04)-87}$ 38.87

© Издательство «Будівельник», 1987

ВВЕДЕНИЕ

Разработка и применение экономичных объемно-планировочных решений, более совершенных типов конструкций при последовательном сокращении расхода всех видов ресурсов содействуют ускоренному развитию строительного комплекса, его дальнейшей индустриализации, осуществлению намеченных XXVII съездом КПСС и последующими Пленумами ЦК КПСС планов перестройки отрасли, повышению эффективности инвестиционного процесса и сокращению его продолжительности. Мощный рычаг научно-технического прогресса и повышения эффективности проектирования — внедрение автоматизированных систем.

Развитие производств с гибкой технологией, совершенствование промышленного оборудования, появление агрегатов большой мощности, укрупнение общественных центров с защитой от атмосферных воздействий требуют зданий со значительными объемами, свободными от несущих конструкций, и соответственно эффективных большепролетных покрытий. Такие покрытия должны быть легкими, чтобы увеличить долю полезных нагрузок, не перегружать опорные конструкции, и, таким образом, экономить материал и транспортные расходы, технологичными в изготовлении и монтаже, допускать применение эффективных типов кровли, подвесных крановых путей и других примыкающих элементов, отвечать архитектурно-композиционному замыслу и иметь высокие эксплуатационные качества.

Создание в нашей стране новой отрасли строительной индустрии — специализированного производства легких металлических конструкций (ЛМК) комплектной поставки позволяет уменьшить массу производственных зданий и сооружений не менее чем на 10...15 %, трудоемкость изготовления в 1,3...1,5 раза и стоимость на 8...10 %. Одна из действенных мер по реализации основных направлений и задач экономического и социального развития СССР на период до 2000 года — планируемое увеличение выпуска ЛМК за 15 лет в 7 ... 8 раз. Справиться с этим заданием призвана комплексная программа по совершенствованию конструктивных решений типов зданий из ЛМК и повышению уровня их индустриализации.

На рубеже 11-й и 12-й пятилеток отечественные стан-

дартные системы ЛМК на 1/3 по номенклатуре и на 40 % по мощности заводов-изготовителей представлены структурными покрытиями. Пространственные стержневые системы и их эффективная разновидность — пространственные решетчатые покрытия (ПРП) регулярной структуры выдвинулись на одно из первых мест среди прогрессивных конструкций. По сравнению с традиционными плоскостными они имеют ряд преимуществ: благоприятные условия работы под нагрузкой несущих элементов и примыкающих конструкций, равномерность силового поля; унификация узлов и стержней, позволяющая автоматизировать (роботизировать) изготовление; возможность пакетирования и контейнеризации элементов, простота транспортирования, укрупнительной сборки и крупноблочного монтажа, в том числе конвейерного; уменьшение строительной высоты покрытий и, следовательно, снижение стоимости стенового ограждения и энергетических затрат при эксплуатации; функциональная гибкость и архитектурная выразительность.

В мировой строительной практике применяются разнообразные формы ПРП: наиболее часто — стержневые плиты, в их числе — структурные; реже — решетчатые (сетчатые) оболочки и купола. Разработаны стандартные конструктивные системы, унифицирующие наборы схем, сортаменты элементов. Известны и универсальные узлы, пригодные для плит и оболочек, куполов, что позволяет рассматривать некоторые системы ПРП с позиций единства их конструктивной формы. Продолжается усовершенствование покрытий и изыскание новых перспективных форм с целью расширения области применения ПРП. Исследования, выполненные в институтах ЦНИИСК им. Кучеренко, ЦНИИПСК им. Мельникова, МАрхИ, НИИСК, УкрНИИПСК и других, посвящены вопросам рационального конструирования и расчета ПРП, изучению их действительной работы, сравнению по экономическим показателям с традиционными покрытиями. Признано, что один из наиболее эффективных путей экономии ресурсов — оптимизация.

Однако работ по оптимальному проектированию ПРП сравнительно мало. Некоторые из них рассматривают лишь распределение материала при неизменной геометрической схеме, что не позволяет выявить значительные резервы конструктивной формы и в условиях современного производства не дает заметного эффекта. Во многих работах используется простейший критерий качества — расход металла, не отражаются существенные свойства конструкции, например, трудо- и энергоемкость. Не всегда в должной мере учитываются факторы продольного изгиба стержней, унификации. Фактически не изучены оптимальные размеры регулярной ячейки и высоты покрытия для решетчатых плит, оболочек и куполов. Такое положение в отдельных случаях приводит к необоснованным проектным решениям.

В настоящей работе основное внимание уделено оптимизации по комплексному экономическому критерию — приведенным затратам, включающим единовременные вложения и эксплуатационные издержки, что позволяет оценить конструктивную форму по расходам материальных, трудовых и энергетических ресурсов. Предлагаемые методы и средства решения оптимизационных задач ориентированы на автоматизированное проектирование в режиме диалога, рекомендуемая проектировщикам технология иллюстрируется примерами исследования и расчета параметров различных пространственных систем.

1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ПОКРЫТИЙ (ПРП)

Рассматриваемый объект проектирования относится к одному из самых сложных видов несущих металлических конструкций. При разработке ПРП инженер прежде всего должен выбрать решение из существующего многообразия конструктивных форм, предопределяемого, во-первых, геометрией покрытий и структурой стержневой решетки, характером работы под нагрузкой и, во-вторых, материалом и профилями элементов, типом узловых соединений, способом изготовления, транспортировки и монтажа. Назначая параметры конструкций, проектировщик использует результаты расчетно-теоретического, а в последнее время и оптимизационного анализа.

В главе освещаются основные этапы синтеза и анализа конструктивных форм ПРП.

1.1. ГЕОМЕТРИЯ И ОСНОВЫ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

Переход от плоских форм к ПРП обусловлен потребностью в наилучшем распределении действующих нагрузок и передаче их из пролета к опорам с помощью равномерных силовых потоков. Поэтому пространственность конструкции связывают не только с геометрическим фактором, но и со статическим.

Геометрические формы ПРП классифицируют по аналогии со сплошными (массивными) конструкциями (табл. 1). Если срединная поверхность стержневого набора представляет собой плоскость, то ПРП относят к стержневым плитам и дискам. Узлы решетчатых сводов, оболочек и куполов располагают на гладких криволинейных поверхностях одинарной или двоякой кривизны. Пирамидальные шатры и простейшие складки можно рассматривать как набор из плоских плит или дисков. Возможны и более сложные формы, например волнистые своды, купола.

Пространственную стержневую систему, узлы которой лежат на некоторой поверхности, ограничивающей односвязную область, называют сетчатой. В односетчатых пространственных решетчатых покрытиях узлы ле-

Таблица 1. Геометрические формы ПРП

Срединная поверхность	Тип конструкции: Наименование	Схема	План	Односетчатые: кв.	Односетчатые: тр.	Двухсетчатые: Перекрестные: кв.	Двухсетчатые: Перекрестные: тр.	Двухсетчатые: Структурные: кв.	Двухсетчатые: Структурные: тр.	Двухсетчатые: Смешанные: кв.	Двухсетчатые: Смешанные: тр.
Плоская	Диск		□	+	++	+	+	+	++	+	+
			△	–	+	+	++	+	+	+	+
			○	–	+	+	+	+	+	+	+
	Плита		□	–	–	++	++	+++	+	+++	+
			△	–	–	+	+	++	++	+	+
			○	–	–	+	+	+	–	+	+
Криволинейная гладкая одинарной кривизны	Свод		□	+	+	+	++	+	+	+	+
			△	–	–	–	–	–	–	–	–
			○	–	–	–	–	–	–	–	–
	Оболочка: цилиндрическая		□	–	+++	–	+++	–	++	–	+
			△	–	–	–	–	–	–	–	–
			○	–	–	–	–	–	–	–	–
	коническая		□	–	+	–	+	–	+	–	–
			△	–	+	–	+	–	+	–	–
			○	–	+	–	++	–	–	–	–
Криволинейная гладкая двоякой кривизны	сферическая		□	–	+	–	++	+	+	–	–
			△	–	+	–	+	+	+	–	–
			○	–	+	–	+	+	+	–	–
	гипар		□	+	+	+	+	++	+	+	+
			△	–	–	–	–	–	–	–	–
			○	–	–	–	–	+	–	–	–
	гиперболоид		□	–	+	–	+	–	+	–	–
			△	–	–	–	–	–	–	–	–
			○	–	–	–	–	–	–	–	–
	Купол: радиально-кольцевой		□	–	+	–	+	–	–	–	–
			△	–	+	–	+	–	–	–	–
			○	–	++	–	+++	–	–	–	–
	геодезический		□	–	–	–	–	–	–	–	–
			△	–	–	–	–	–	–	–	–
			○	–	+++	–	+++	–	–	–	–

Продолжение табл.

Срединная поверхность	Тип конструкции: Наименование	Схема	План	Односетчатые: кв.	Односетчатые: тр.	Двухсетчатые: Перекрестные: кв.	Перекрестные: тр.	Структурные: кв.	Структурные: тр.	Смешанные: кв.	Смешанные: тр.
Криволинейная ломаная	Шатер		□	—	+	+	+	+	++	+	
			△	—	+	+	+	+	+	+	
			○	—	+	+	+	+	+	+	
	Складки		□	—	++	—	+	+	+	+	
			△	—	—	—	—	—	—	—	
			○	—	+	—	+	+	+	+	

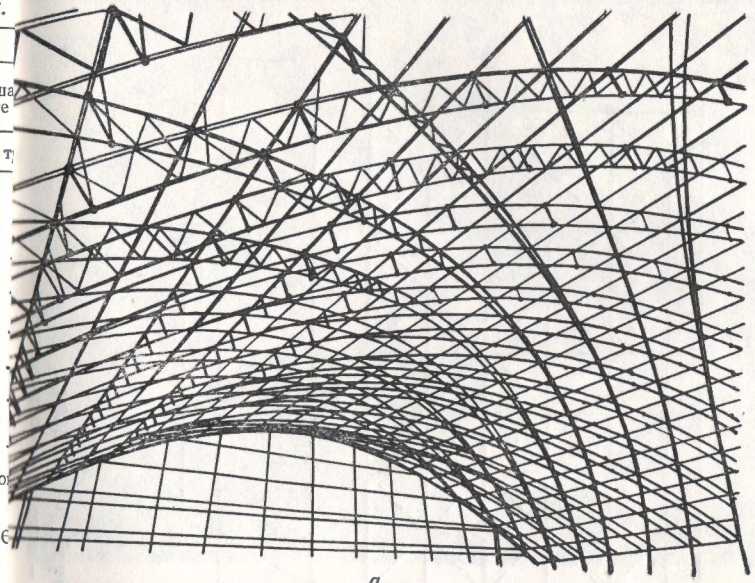
Примечания: 1. Обозначено: «—» — маловероятное сочетание; «+» — возможное; «++» — применяется; «+++» — широко распространено.
2. Сокращения: кв. — квадратные, тр. — треугольные ячейки поясных сеток.

жат на срединной поверхности, в двухсетчатых * — отнесены от нее по обе стороны [1].

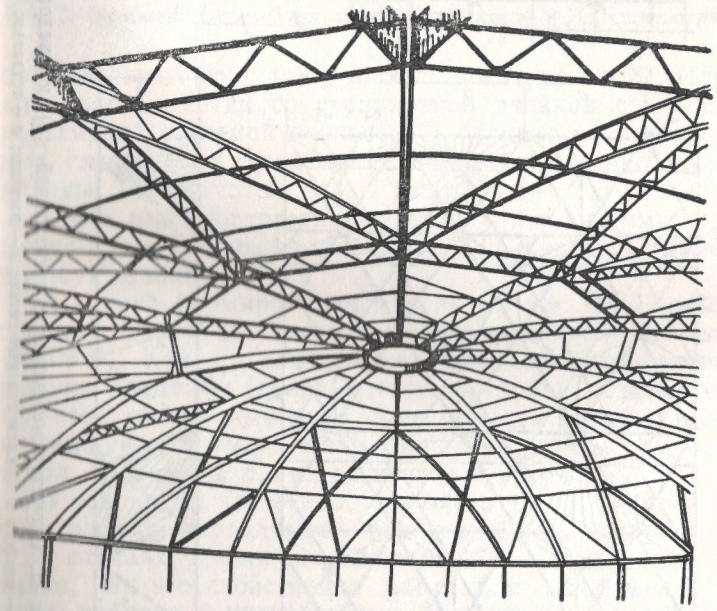
Под перекрестной авторы подразумевают такую двухсетчатую систему, которая формируется из плоских ферм, пересекающихся по нормалям к срединной поверхности ПРП. При этом обе поясные сетки, внешняя (верхняя) и внутренняя (нижняя) одинаковы по рисунку и близки по размерам. Стержневые плиты в виде перекрестных ферм многократно реализованы в металле [2, 3]. Несколько труднее признать перекрестными двухсетчатые цилиндрические системы и сферические куполa [4, 5], самые характерные из них приведены на рис. 1.

Структурную конструкцию можно определить как геометрически неизменяемую шарнирно-стержневую систему, составленную из элементарных кристаллов, например тетраэдров, октаэдров и т. д. Таким образом, односетчатые системы не могут быть структурами, для которых характерна изначальная объемность. Различают структурные массивы, брусья (образования удлиненной формы), например, трехгранные фермы. «Двухмерная» структура формируется как двухсетчатая. Известны структуры-оболочки, куполы, шатры, но самые распространенные — структурные плиты, узлы которых лежат в

* Этим терминам соответствуют понятия «одно-, двухпоясные» и «одно-, двухслойные», причем последнее менее удачно в связи с применением для расчета двухсетчатых систем трехслойной сплошной модели.



а



б

Рис. 1. Двухсетчатые перекрестные системы:
а — цилиндрическая; б — сферическая.

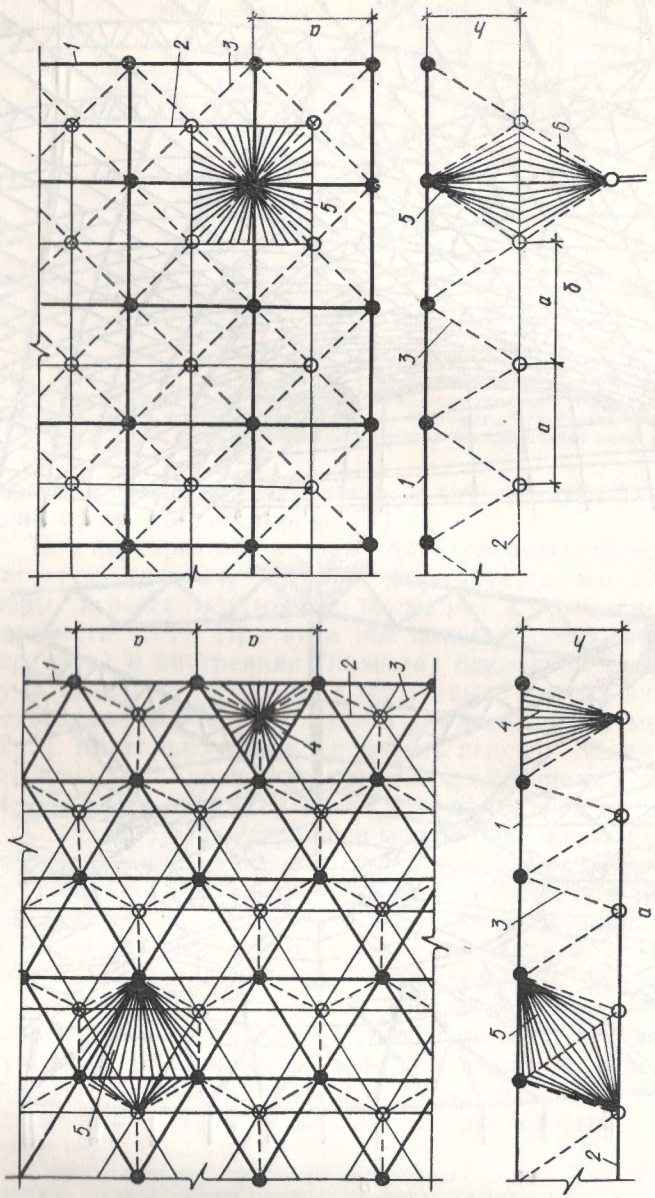


Рис. 2. Структурные плиты с треугольной (*а*) и квадратной (*б*) ячейками:
1, 2 — верхняя и нижняя поясные сетки; *3* — раскосы; *4* — тетраэдр; *5* — октаэдр; *6* — опорная капитель.

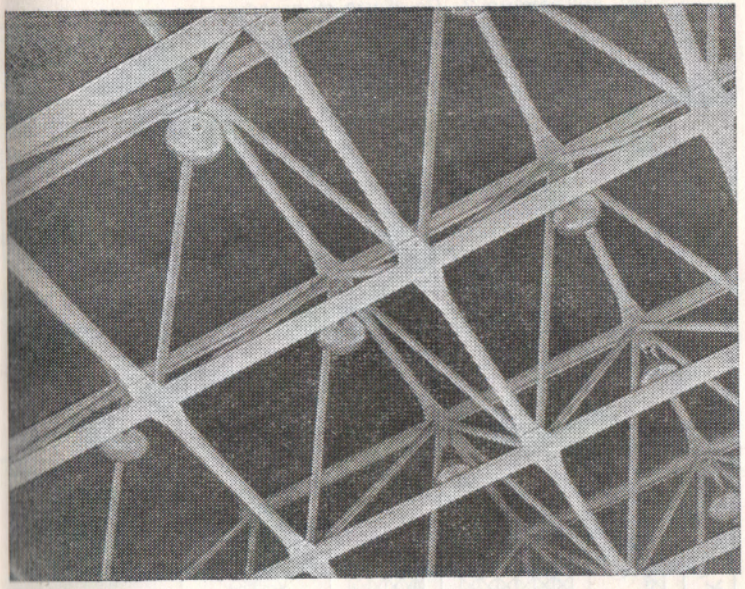


Рис. 3. Фрагмент решетчатой плиты автовокзала в Ворошиловграде.

параллельных друг другу плоскостях (рис. 2 и 3). Плоские поясные сетки со стандартной ячейкой соединены регулярной системой раскосов. В отличие от перекрестных систем, обе сетки могут быть существенно неодинаковы. Трехсетчатые плиты используют мало.

Реже, чем перекрестные и структурные системы, применяют смешанные, включающие одновременно элементы двух главных схем.

В основе формирования многих систем ПРП лежат плоские элементарные фермы с традиционной решеткой (табл. 2). Как и в плоских фермах, различают главные рабочие элементы (пояса, раскосы и стойки) и вспомогательные, воспринимающие только местную нагрузку и служащие для уменьшения свободной длины стержней (табл. 2, схемы *5*, *6*, они выделены пунктиром).

В покрытиях часто можно ориентировать решетку относительно направления преобладающей нагрузки. В этих случаях усилия в одноименных элементах одного знака, как это свойственно раскосным решеткам. При этом вариант с нисходящими растянутыми раскосами оказывается предпочтительней варианта с восходящими сжатыми раскосами, так как стойки короче раскосов и,

Таблица 2. Основные типы решеток

Тип решетки: Название	Тип решетки: Схемы и пояснения	Конструкции: Поясная сетка-диск	Конструкции: Цилиндрическая оболочка	Конструкции: Сферический купол	Примечание
1	2	3	4	5	6
Раскосная	①	a, b	c*	d	В гр.2 выделены сжатые элементы
	②	a, b	c	d	
Крестовая	③ ③=①+②	a*	c	d*	Возможно преднапряжение решетки
Ромбическая	④	a, b	c	d	Средняя стойка обеспечивает неизменяемость
Треугольная	⑤ *	a, b	c	a, e	
	⑥ *	a*, b	c*	d*, e*	Схема e* неизменяема лишь при нечетном числе граней цикличности
Перекрестная	⑦ ⑦=⑤+⑥	a, b	c	d, e	Требует большей точности изготовления, чем ромбическая

Продолжение табл. 2

Тип решетки: Название	Тип решетки: Схемы и пояснения	Конструкции: Поясная сетка-диск	Конструкции: Цилиндрическая оболочка	Конструкции: Сферический купол	Примечание
1	2	3	4	5	6
Полураскосная	⑧	a, b	c	d, e	Применяется при относительно длинных стойках
Безраскосная	⑨	a, * b	c	d	

Примечания: 1. Звездочкой (*) обозначены наиболее употребительные схемы решеток.
2. ① ... ⑨ — номера схем решеток.

значит, менее гибки при прочих равных условиях. По этой же причине схема *1, c* по табл. *2* сетчатой цилиндрической оболочки экономичнее *2, c*.

При значительной знакопеременной нагрузке, например ветровой, можно применять крестовую решетку (см. табл. 2, схему *3*) с гибкими раскосами, выключающимися из работы при сжатии, в связи с чем стойки почти всегда сжаты, а раскосы растянуты. Следовательно, в конкретном случае нагружения как бы формируется схема *1, c*. Одно из положительных свойств решетки *3* — возможность предварительного напряжения и регулирования усилий. В работу могут одновременно включаться оба гибких раскоса одной панели. При этом жесткость системы будет повышаться.

Крестовая решетка характерна для осециклической пространственной фермы Шведлера (см. п. 3, *d* табл. 2), в которой пояса-ребра располагают в меридиональных плоскостях, стойки-кольца представляют собой правильные многоугольники и лежат в горизонтальных плоскостях, а раскосы замыкают трапециевидные (наклонные) или прямоугольные (вертикальные) панели поверхности покрытия.

К недостаткам крестовой решетки можно отнести сравнительно большое число элементов в панели — два раскоса и стойка, усложнение узлов. В этом отношении

бесспорное преимущество треугольных решеток, технологичность которых способствовала их широкому распространению в отечественной и зарубежной практике. Так, стропильные и подстропильные фермы для зданий с пролетами 18, 24 и 30 м стандартных систем ЛМК типа «Молодечно» и «Урал» — решены соответственно по схемам *5* и *6*. Решетка плоских элементов перекрестных систем также повсеместно выполняется треугольной. Стержневые плиты в виде перекрестных ферм с ортогональными сетками поясов (см. табл. 2, схему *9, а*), соединенными треугольной системой раскосов [2], использованы в покрытиях Дворца культуры «Украина» (Киев) и рынка (Волгоград).

Несущие конструкции покрытия Дворца культуры «Украина» осуществлены по проекту ГПИ Укрпроектстальконструкция. Решетчатая плита опирается по контуру, представляющему собой равнобочную трапецию с основаниями 60 и 52 и высотой 52 м. Одна система ферм ориентирована параллельно основаниям, другая — параллельно высоте, чем образована квадратная поясная ячейка 6×6 м. Структура решетки максимально унифицирована, стойки сохранены в местах пересечения ферм; сварные секции ферм высотой 3,7 и длиной 12 м стыковали на монтаже.

Покрытие рынка набрано из трех плит, каждая из которых опирается на двенадцать точек по периметру квадрата 36×36 м и имеет консоли 6 и 3 м. Размер ячейки 3×3 м, высота ферм — 2 м. Разработчики (Волгоградгражданпроект и ЦНИИСК им. Кучеренко) упростили пространственные узлы пересечения ферм. С этой целью раскосы ферм одного направления подведены к узлу верхней сетки, другого — нижней, оба узла соединены вертикальной стойкой, так что в каждом из них сходятся по семь элементов — четыре пояса, два раскоса и стойка. Кроме того, пояса пересекаются в двух уровнях.

На рис. 1, 4 почти везде можно различить треугольную решетку плоских ферм, перекрещивающихся так, что их пояса образуют пространственные верхнюю и нижнюю сетки: для оболочек и куполов — «полные» сетки из остроугольных треугольников, расположенных таким образом, что каждая из вершин принадлежит всем окружающим ее треугольникам (см. табл. 2, схемы *6, а, с, d*); для цилиндрических сводов — «неполная» сетка (см. табл. 2, схему *6, б*).

Двухсетчатыми системами могут быть перекрыты значительные пролеты: 60 м (см. рис. 1, *а*), 86 м (см.

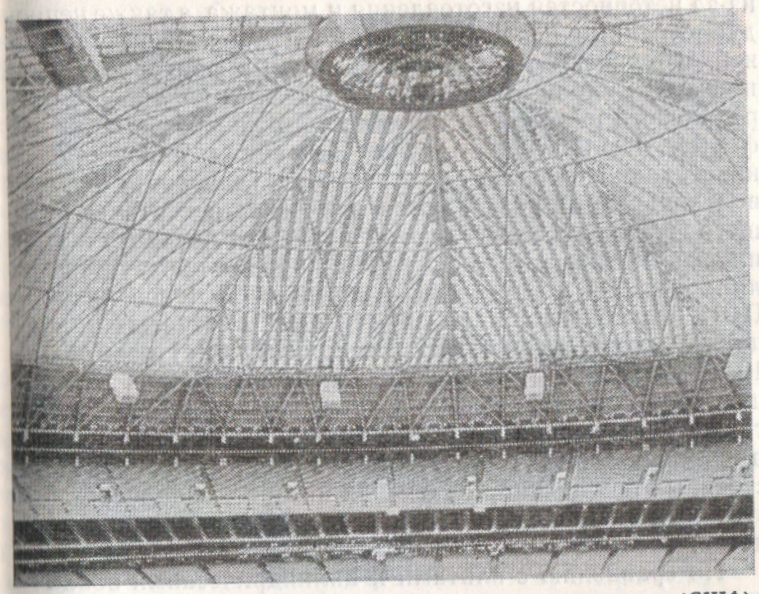


Рис. 4. Двухсетчатый купол диаметром 196 м в Хьюстоне (США).

рис. 1, *б*), 196 м (см. рис. 4). Купола решены по схеме Чивитта, больший разделен меридиональными ребрами на двенадцать секторов, в каждом по 36 треугольных ячеек, образованных шестью ярусами колец и двумя семействами квазимеридиональных линий. Ребра составлены из шести (18-метровой длины) ферм с параллельными поясами. Высота ферм и остальных двухветвевых стержней (колец и раскосов) — 1,82 м. Разбивка секторов по схеме *6, d* (см. табл. 2) позволяет получить значительно меньше типоразмеров элементов, чем разбивка купола Шведлера, особенно для пологих сегментов.

Купол по схеме *6, е* (см. табл. 2) называют звездчатым. Он образован тремя семействами криволинейных стержневых цепей: два из них спирально восходят от опорного кольца к вершине, третье — концентрически опоясывает по горизонтали. По этой схеме построен ряд односетчатых куполов в Брно (ЧССР), диаметр наибольшего из них 90, высота 20 м.

Односетчатые оболочки и купола характеризуются меньшими пролетами по сравнению с двухсетчатыми (их верхние теоретические границы соответственно 60...150 и 300...500 м). Для односетчатых систем опаснее возможные отклонения от заданной геометрической формы

из-за неточностей изготовления и монтажа, а также непредусмотренные неравномерности нагрузок. В результате неблагоприятного сочетания указанных факторов может произойти «прощелкивание» узлов через положение безразличного равновесия к новой, устойчивой, равновесной форме. Чтобы улучшить условия работы односетчатых конструкций, сечения стержней-хорд (для дуг с ненулевой кривизной) развиваются в плоскости соответствующего сегмента и защемляются в узлах от поворота в этой плоскости, т. е. вместо шарового шарнира образуется цилиндрический с осью, почти нормальной к поверхности ПРП. Подобным образом решены узлы сетчатых цилиндрических оболочек (см. табл. 2, схему *6, с*) размерами 12×24 и 18×36 м, разработанных ЛенЗНИИЭП для общественных зданий Севера. Система «Вупперман» (ФРГ) также реализована по схеме *6, с*. Односетчатые цилиндрические своды применяют для покрытия производственных помещений, небольших ангаров, складов, общественных зданий — выставок и спортзалов средних пролетов.

По сравнению с плитами и цилиндрическими оболочками купол, как поверхность двоякой кривизны, более эффективно работает под нагрузкой. Сферический купол дает максимум внутреннего объема на единицу площади ограждающей поверхности. Однако решетчатый купол значительно сложнее в исполнении, чем стержневые плиты и сетчатые цилиндрические оболочки, изготовляемые из минимального числа типоразмеров элементов. Так, структуру с поясными сетками, лежащими во взаимно параллельных плоскостях, можно запроектировать из стержней одной длины при однотипных узлах. То же справедливо и для односетчатого покрытия со схемой *6, с* и *9, с* (см. табл. 2) при круговой образующей, к которой можно приблизиться теоретически с любой точностью. С другой стороны, попытки лучше вписаться в сферу приводят к большому числу типоразмеров, например, при радиально-концентрической системе разрезки куполов (см. табл. 2, графа 5), по мере приближения к вершине размеры панелей уменьшаются.

Другой принцип формирования сетчатых поверхностей куполов, интенсивно развиваемый в последнее время, основан на свойствах геодезических линий криволинейных поверхностей, как кратчайших расстояний между точками на поверхности. В частности, для сферы, — прямолинейные стержни или ломаную цепочку стержней вписывают в дуги большого круга. Для разбивки опорной геодезической сети используется теория правильных выпуклых многогранников: 4-, 6-, 8-, 12- и 20-гранников. Особый интерес представляют два последних. Каждая из двадцати граней икосаэдра — равносторонний треугольник, поэтому, устанавливая по его ребрам стержни, можно получить неизменяемую сетчатую систему из тридцати элементов одинаковой длины. Однако их середины отстоят от поверхности описанной сферы примерно на 15 % радиуса, в связи с чем для куполов больших диаметров грани икосаэдра проектируют на сферу и членят полученные сферические треугольники на более мелкие треугольные ячейки [6, 7].

По проекту Укрпроектстальконструкция в Киевском зоопарке сооружен вольер для птиц в виде решетчатого купола диаметром 24 м: схема — 720-гранник, полученный развитием икосаэдра; 6-кратное членение. Купол собран из плоских треугольных рамок заводского изготовления, сечения стержней — спаренные стальные швеллеры восьми типоразмеров. Каркас купольного здания оранжереи Центрального республиканского Ботанического сада в Киеве (диаметр 44, высота 24 м) запроектирован по схеме дополнения граней пентагон-додекаэдра до неизменяемой системы.

Представляет интерес используемое в дальнейшем построение с помощью правильной сети Чебышева.

Треугольная решетка и схема на основе регулярной треугольной ячейки для структурных конструкций также традиционны (см. рис. 2, *а*). Образовать такую схему можно из перекрестной системы, сдвигая верхнюю и нижнюю сетки типа 6, *а* (см. табл. 2), при этом плоские фермы трех направлений наклоняются и в каждом узле сходятся шесть поясных элементов и три раскоса. Более простая в конструктивном отношении и распространенная — схема на основе квадратной ячейки (см. рис. 2, *б* и *3*): центр ячейки верхнего (нижнего) пояса лежит над (под) узлом нижнего (верхнего) пояса, в каждом узле стыкуются до восьми стержней (четыре поясных и четыре раскоса). Многочисленные модификации схемы с квадратными ячейками связаны с разрежением сеток, разворотом ячеек верхнего и нижнего поясов относительно друг друга на 45°. Некоторые из них нашли широкое применение: плиты типа «Берлин», «Нодус», «Юнибат», «Кросс», «Диск» и др. Значительно реже реализуется в металле схема с шестиугольными ячейками (природный аналог — пчелиные соты).

1.2. КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ И УЗЛОВ

Решения конструктивных схем ПРП зависят от выбора металла и сортамента элементов, типа узлового соединения, членения на отправочные и монтажные марки. Несущие конструкции покрытий выполняются преимущественно стальными. Алюминиевые сплавы применяют в тех случаях, когда предъявляются особые (антикоррозийные, эстетические и др.) требования, например ПРП в виде структурной плиты над летним концертным залом в Сочи (Гипротеатр, ЦНИИСК). В плане покрытие — неправильный шестиугольник со сторонами 45 и 36 м, максимальный пролет между опорами 60 м; решетка по схеме рис. 2, *а*; длина стержней — 3 м, высота плиты 2,45 м. Трубы диаметром 90...120 мм из алюминиево-магниевого сплава сварены на заводе в правильные тетраэдры (верхний пояс и раскосы) и треугольники (нижний пояс), монтажные стыки — на кадмированных высокопрочных болтах.

На высокопрочных болтах собирают отдельные стержни длиной 1,65...2,35 м из прессованных алюминиевых профилей в односетчатых сферических куполах (диаметром — 20...60 м) многоцелевого назначения (ЦНИИПСК). Сечения стержней — замкнутые коробчатые, типа спаренного двутавра, узловые детали — шестилучевые, обеспечивающие шесть цилиндрических шарниров (в сетке с треугольной ячейкой). Изготовление элементов упрощено (разрезка профилей и сверление отверстий), вес монтажных марок не превышает 20 кг, сборка может производиться вручную от опор к вершине без поддерживающих лесов. В ЦНИИпроектстальконструкция им. Мельникова продолжаются разработки алюминиевых сводов, оболочек и куполов с пролетами 30...150 м. Использование легких сплавов целесообразно и для сборно-разборных, многократно перевозимых конструкций.

За рубежом широко применяют алюминиевые ПРП на основе конструкций типа «Триодетик». В США серийно выпускают купола системы Р. Б. Фуллера, в которых алюминиевые листы совмещают ограждающие и несущие функции [8].

Стальные прокатные профили часто используются в ПРП различных типов, так стержневые плиты перекрестной системы в зданиях Киева, Волгограда выполнены из парных уголков и швеллеров, соединяемых в узлах на листовых фасонках сваркой и высокопрочными болтами.

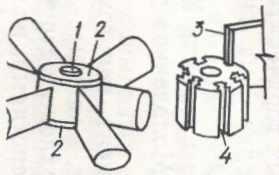
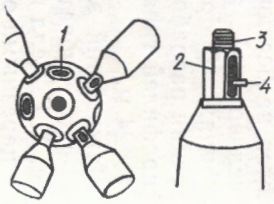
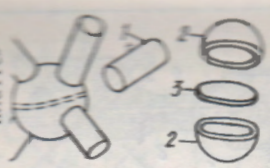
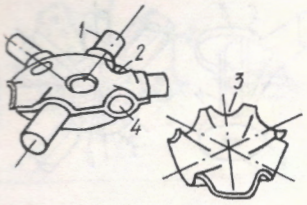
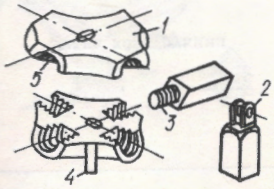
Из длинноразмерных плоских секций ферм на земле собирают блоки или плиту с последующим подъемом кранами или гидроподъемниками. Покрытие Дворца культуры «Украина» в Киеве смонтировано методом надвижки с подращиванием на проектной отметке [2]. Прокатные профили применяют для перекрестных систем оболочек и куполов. Широко известны структурные конструкции типа «ЦНИИСК» и их модификация «Москва», в которых верхние пояса двутаврового сечения, остальные элементы из уголков; заводские соединения — на сварке, укрупнительная сборка — на болтах нормальной точности.

Зарубежные решения структурных плит включают разнообразные сочетания профилей. В США осуществлено несколько крупных общественных сооружений, где в решетчатых плитах узлы выполнены в виде сварных листовых фасонок, а стержни — из стальных двутавровых профилей, в том числе широкополочных [3]. Такие же профили применяются и в сетчатых оболочках и куполах. Экономичны легкие открытые профили из листового проката, получаемые гнутьем, штамповкой (своды «Вупперман», ФРГ; структурная система «Юнистрат», США).

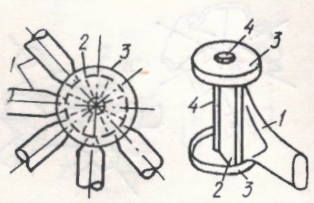
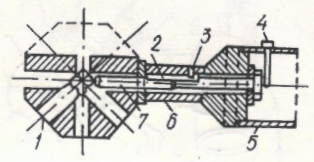
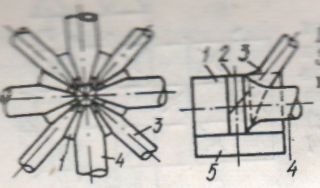
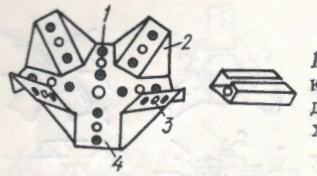
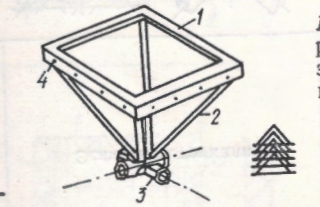
Замкнутые трубчатые профили выгодны для стержней пространственных конструкций: они хорошо работают на продольные усилия, благодаря равноустойчивости во всех плоскостях, проходящих через ось; обеспечивают длительный срок службы покрытия, так как меньше восприимчивы к коррозии; отвечают высоким архитектурно-эстетическим требованиям. ПРП из стальных труб перекрывают здания массового строительства и уникальные сооружения. Из шести серийных систем ЛМК две базируются на бесшовных горячекатаных трубах («Урал» и «Кисловодск»), а одна — на гнутосварных замкнутых профилях («Молодечно»). В Укрниипроектстальконструкция разработаны чертежи КМ перекрестных систем из профилей типа «Молодечно» для сетки колонн 18×18 и 24×24 м.

Важнейший элемент конструктивной формы ПРП, особенно трубчатых,— узловые соединения. В начале XX в. А. Г. Белл предложил структурный узел в виде шара с нарезными отверстиями, рассчитанный на примыкание стержней из круглых труб и ставший прообразом современных узлов «Меро», «Октаплатте» и их производных — *NS*, «Веймар», «Окта-*S*», «МАрхИ» и др. Во многих странах разработаны универсальные узлы для различных типов и схем ПРП — плит, оболочек и куполов,

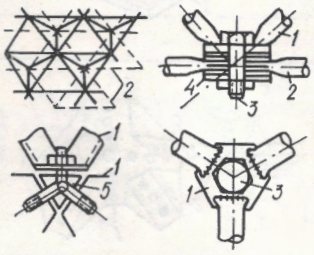
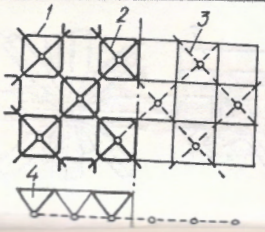
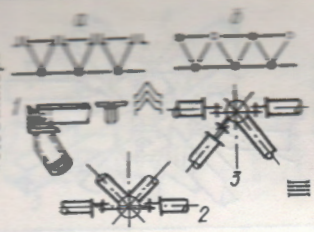
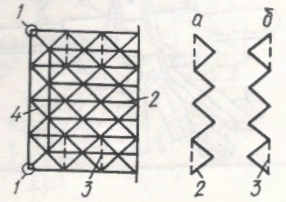
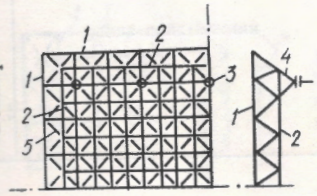
Таблица 3. Конструкции пространственных решетчатых систем

Тип конструкции	№ п. п.	Название	Эскиз конструкции	Схема: максимальное к-во стержней в узле	Схема: ячейка: квадратная	Схема: ячейка: треугольная	Узлы: стык на монтаже: сваркой	Узлы: стык на монтаже: зацеплением	Узлы: разборность	Узлы: возможность замены стержней	Узлы: способ изготовления узловых элементов	Стержни (материал, сечение)	Заводские марки	Примечание
Универсальные узлы	1	«Триодетик»		9	+	+	—	+	+	—	Прессование, механическая обработка, штамповка	Алюминиевые или стальные трубы	Отдельные стержни, узловые элементы	Для односетчатых оболочек и куполов, стержневых плит
				1 — болт; *2* — торцевые крышки; *3* — рифы на сплющенном конце стержня; *4* — паз с рифлеными стенками										
	2	«Меро»		18	+	+	—	+	+	+	Литье, механическая обработка	Стальные трубы	То же	Возможны различные схемы, в том числе трехсетчатые
				1 — отверстие с резьбой; *2* — муфта с прорезью; *3* — выдвижной болт; *4* — штырь-индикатор на болте										
	3	«Октаплатте»		12	+	+	+	—	—	—	Штамповка	То же	»	Требует высокой точности изготовления стержней по длине
				1 — стержень; *2* — полушарие; *3* — диск жесткости (подкладное кольцо)										
Универсальные узлы	4	«SDC»		9	—	+	+	—	—	—	Штамповка (литье), сварка	Стальные трубы	Отдельные стержни, узловые элементы	Увеличивает допуски на изготовление
				2 — отверстия для раскосов; *3* — одна из половинок узлового элемента; *4* — патрубок для закладки пояса (*1*)										
	5	«Нодус»		8	+	—	—	+	+	—	Литье, механическая обработка	Стальные круглые или квадратные трубы	То же	Использована идея узла SDC, но без сварки
				1 — одна из половинок; *2* — вилка для крепления раскосов; *3* — насечка на закладываемых оконечниках поясов; *4* — лацмен; *5* — насечка на стенках патрубков										

Продолжение табл. 3

Тип конструкции	№ п. п.	Название	Эскиз конструкции	Схема: максимальное к-во стержней в узле	Схема: ячейка: квадратная	Схема: ячейка: треугольная	Узлы: стык на монтаже: сваркой	Узлы: стык на монтаже: зацеплением	Узлы: разборность	Узлы: возможность замены стержней	Узлы: способ изготовления узловых элементов	Стержни (материал, сечение)	Заводские марки	Примечание
Универсальные узлы	6	«IFI»		8	+	—	—	+	+	—	Литье (штамповка), механическая обработка	Стальные трубы горячекатаные, электросварные	Отдельные стержни, узловые элементы	Применяется в системе «Берлин» и сетчатых сводах «Руланд»
				2 — клин, приваренный к расплющенному концу трубы (1); 3 — накладной диск; 4 — стяжной болт										
	7	«Веймар»		18	+	+	—	+	+	+	Литье, механическая обработка	Стальные трубы	То же	Подобен узлу «Меро», применяется в системе «Веймар»
				1 — отверстие с резьбой; 4 — штифт-индикатор на трубе (5); 6 — муфта со штырем (3); 7 — выдвижной болт с пазом (2)										
Конструктивные системы	8	«ЦНИИСК»		9	+	+	+	—	—	—	Сварка	Стальные трубы	Стержни	Соединение в узле ванной сваркой
				1 — клинья из меди; 2 — «ванна»; 3 — раскос; 4 — пояс; 5 — подкладка из меди										
	9	«Юнистрат»		8	+	—	—	+	+	+	Штамповка	Стальные гнутые профили	Узловые элементы, стержни	Все стержни одной длины, крепятся одним болтом
				1 — выступ-упор; 2 — выступ для крепления раскоса; 3 — отверстие для болта; 4 — плоскость для подхода пояса										
	10	«Спейс дек»		8	+	—	—	+	—	—	Сварка, литье, механическая обработка	Стальные угловые профили, трубы, сплошной круглый профиль	Пирамиды с квадратным основанием, стержни	Удобна в складировании и транспортировке при высокой степени заводской готовности
				1 — элемент верхнего пояса; 2 — раскос; 3 — муфта для крепления элементов нижнего пояса; 4 — отверстия для болтов										
	11	«Генк»												Модификация для перекрытий

Продолжение табл. 3

Тип конструкции	№ п. п.	Название	Эскиз конструкции	Схемы: максимальное к-во стержней в узле	Схемы: ячейка: квадратная	Схемы: ячейка: треугольная	Узлы: стык на монтаже: сваркой	Узлы: стык на монтаже: зацеплением	Узлы: разборность	Узлы: возможность замены стержней	Узлы: способ изготовления узловых элементов	Стержни (материал, сечение)	Заводские марки	Примечание
Конструктивные системы	12	«Пирамитек»		12	+	+	—	+	—	—	Сварка, механическая обработка	Стальные прокатные элементы, трубы	Пирамиды с 3-х, 4-х и 6-ти угольным основанием, треугольники (стержни)	Возможны варианты конструкций, в том числе пирамид по типу «Спейс дек»
	13	«Юнибат»		8	+	—	—	+	—	—	Сварка, механическая обработка	Стальные швеллеры, широкополочные двутавры	Пирамиды с квадратным основанием, стержни	Повышенная крутильная жесткость плиты; сжатые элементы короче растяну-
	14	«Тюбаккор»		8	+	—	—	+	—	—	Сварка	Стальные уголковые профили, трубы	Плоские или V-образные пространственные фермы, стержни	Высокая заводская готовность элементов, удобна в складировании и транспортировке
	15	«Берлин»		8	+	—	—	+	+	—	Литье, механическая обработка, сварка	Стальные трубы	Отдельные стержни, узловые элементы	Узел — типа IFI; роль дополнительных стержней могут выполнять прогоны
	16	«Веймар»		8	+	—	—	+	+	+	То же	То же	То же	Используются одноименные узлы; много вариантов компоновки

Конструктивные системы

1 — тетраэдры, стыкуемые в углах; *2* — треугольник нижней поясной сетки; *3* — болт; *4* — узел нижнего пояса; *5* — узловой элемент верхнего пояса

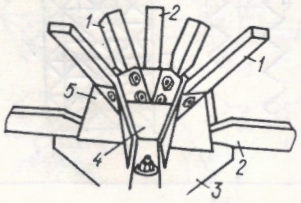
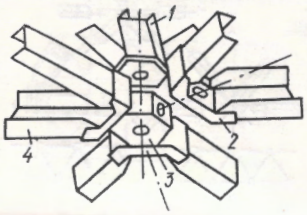
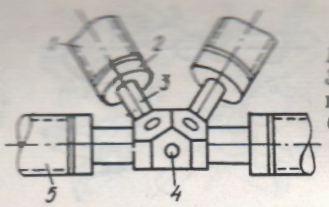
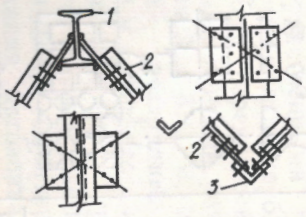
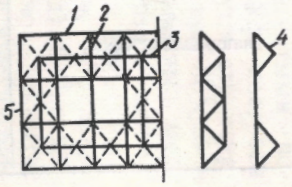
1 — верхний пояс и раскосы (*2*) — элементы пирамид (*4*), располагаемых в шахматном порядке; *3* — нижний пояс, развернутый на 45° и соединяющий вершины пирамид

1, 2 — узлы для варианта *а* пояса соответственно верхнего и нижнего; *3* — узел верхнего пояса для варианта *б*

1 — опоры; *2* — продольные решетчатые складки; *3* — дополнительные стержни, обеспечивающие неизменяемость системы; *4* — торцевая ферма

1 — верхняя поясная сетка плиты; *2* — нижняя поясная сетка; *3* — опоры; *4* — опорная капитель; *5* — раскосы

Продолжение табл. 3

Тип конструкции	№ п. п.	Название	Эскиз конструкции	Схемы: максимальное к-во стержней в узле	Схемы: ячейка: квадратная	Схемы: ячейка: треугольная	Узлы: стык на монтаже: сваркой	Узлы: стык на монтаже: зацеплением	Узлы: разборность	Узлы: возможность замены стержней	Узлы: способ изготовления узловых элементов	Стержни (материал, сечение)	Заводские марки	Примечание
Конструктивные системы	17	«Кипсер»		8	+	—	—	+	—	—	Штамповка	Стальные гнутые трубчатые профили квадратного сечения	Отдельные стержни, узловые элементы	Фасонки соединяются между собой и с решеткой болтами
			1 — раскосы; 2 — пояса; 3 — плоская фасонка; 4 — накладка; 5 — промежуточная фасонка											
	18	«Витковице»		9	—	+	—	+	—	—	Сварка, литье, механическая обработка	Стальные швеллерные профили	Тетраэдры и плоские треугольные элементы	Соединение на винтах
			1 — раскос (боковое ребро тетраэдра); 2 — угловая накладка; 3 — узловой элемент; 4 — нижний пояс, элемент треугольной рамки											
Конструктивные системы	19	«Кисловодск»		8	+	—	—	+	+	+	Литье, механическая обработка	Стальные трубы	Отдельные стержни, узловые элементы	Конструкция узла подобна «Веймар»
			1 — раскос; 2 — фланец трубы; 3 — муфта для вращения выдвижного болта; 4 — отверстие с резьбой; 5 — пояс											
	20	«ЦНИИСК»		8	+	—	—	+	—	—	Сварка	Стальные прокатные профили — двутавр и угольники	Плоские сварные фермы, отдельные стержни	Монтажные соединения — на болтах нормальной точности
			1 — верхний пояс складки, служащий также и прогоном; 2 — раскосы; 3 — нижний пояс складки											
	21	«Москва»		8	+	—	—	+	—	—	То же	То же	То же	Модификация системы «ЦНИИСК» с разреженной решеткой
			1 — длинномерные элементы верхнего пояса; 2 — распорки; 3 — элементы нижнего пояса; 4 — раскосы; 5 — торцевая ферма											

Продолжение табл. 3

Тип конструкции	№ п. п.	Название	Эскиз конструкции	Схемы: максимальное к-во стержней в узле	Схемы: ячейка: квадратная	Схемы: ячейка: треугольная	Схемы: стык на монтаже: сварной	Схемы: стык на монтаже: заштыпенном	Узлы: разборность	Узлы: возможность замены стержней	Узлы: способ изготовления узловых элементов	Стержни (материал, сечение)	Заводские марки	Примечание
	22	«Кросс»		8	+	—	—	+	—	—	Сварка	Стальные спаренные швеллеры, сварное коробчатое сечение	Плоские рамки, отдельные стержни, узловые элементы	Монтажный стык на болтах
	23	«Лиск»		8	+	—	—	+	—	—	Механическая обработка, сварка	Стальные круглые трубы	Плоские рамки, отдельные стержни	Схема — подобно системе «Кросс»
	24	«Кнеп»		4	+	—	+	+	—	—	Сварка	Стальные гнутосварные замкнутые профили	Плоские фермы, съемные элементы	Фермы опираются непосредственно в точке соприкосновения верхних поясов

1 — верхний пояс фермы верхнего уровня перекрестной системы; 2 — ферма нижнего уровня; 3 — съемный пояс; 4 — пилообразная решетка

1, 2 — ячейки пояса верхнего и нижнего; 3 — узловой элемент верхнего пояса (фасонка); 4 — то же, нижнего; 5 — раскос

1 — узлы рамки верхнего пояса; 2 — раскос; 3 — элементы нижнего пояса

в том числе односетчатых. Кроме универсальных узлов, внедрены комплексные конструктивные системы покрытий, унифицирующие набор схем секций, сортамент стержневых и узловых элементов или заводских марок более сложной конфигурации (табл. 3). Среди них значительное место занимают трубчатые системы.

За 1984 г. в СССР выпущено более 1 млн. м² структурных покрытий из труб типа «Кисловодск» («МАрхИ»). Изготовление узла типа «МАрхИ» упрощено по сравнению с изготовлением узлов типа «Меро» и «Веймар». Московский архитектурный институт предложил унифицированный сортамент стержней (длиной 1,5; 2,0 и 3,0 м) и узловых элементов, а также ряд схем на его основе (от 18×18 м до 54×54 м) [9].

Представляют интерес соединение труб на фланцах, разработанное ЦНИИпроектстальконструкция [10], решения узлов с нанизанным на трубу шаром, реализованные в Брно, ЧССР [2].

В ГПИ Укрпроектстальконструкция запроектированы объекты с пространственными решетчатыми покрытиями из труб. В Уфе построен ангар, перекрытый двумя структурными плитами размерами 36×36 м (ячейка 3×3 м; отправочные марки — трехгранные фермы длиной 12 м с бесфасоночными соединениями «труба в трубу», отдельные стержни нижнего пояса). В Ростове-на-Дону смонтировано покрытие здания автовокзала с шестиугольным планом (размеры трех пар сторон 60 и 18 м, стержни длиной 3 м, узлы — по типу «МАрхИ»). Собранное внизу покрытие поднимали

домкратами. В Ворошиловграде сооружен автовокзал с покрытием в виде решетчатой плиты с планом по форме равнобедренного прямоугольного треугольника со сторонами 66 и 93 м и высотой 1,85 м (см. рис. 3). Основной фрагмент плиты весом 120 т поднимали с помощью трех качающихся мачт.

Оболочки и купола из труб применяют реже: система «Руланд», оболочки для Севера (ЛенЗНИИЭП), покрытие производственного здания в Японии, своды для спортивных залов во Франции [6], односетчатые купола для выставочных павильонов в Брно (ЧССР) [5] и в Нью-Йорке (США), двухсетчатый купол стадиона в Куала Лумпур (Малайзия) и др.

Многие авторы уделяют внимание принципам и деталям устройства кровель ПРП [6], разработке специальных панелей для структур [11], беспрогонным решениям блоков [12], вопросам включения в работу профилированного настила и мембранным ограждениям. При этом прослеживается органическая взаимозависимость двух конструктивных частей покрытия — пространственно напряженной и работающей на местную нагрузку.

Анализ отечественных и зарубежных данных позволяет обобщить некоторые технико-экономические показатели ПРП (рис. 5). Материалоемкость криволинейных ПРП (оболочек, куполов) ниже материалоемкости плит. При пролетах до 90 м применяют универсальные узлы и типовые конструктивные системы. Отдельные универсальные узлы (типа «Меро», «ЦНИИСК») можно использовать и для большепролетных сооружений. Основные же

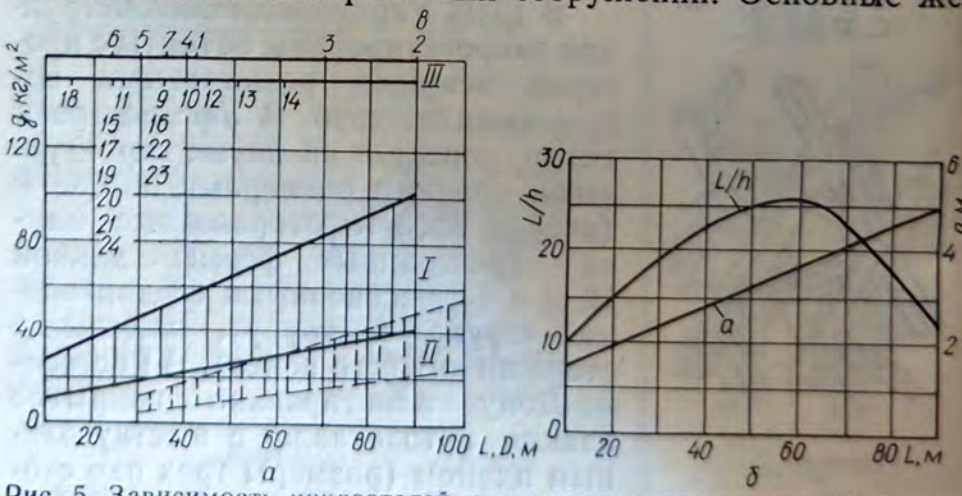


Рис. 5. Зависимость показателей и параметров от пролета ПРП:

а — расход стали в структурных плитах *(I)* и куполах *(II)*; *б* — размеры ячейки *a* и отношение пролета к высоте плиты *L/h*; *III* — характерные (предельные) пролеты конструкций; 1...24 — номера конструкций (узлов и систем) по табл. 3.

системы, максимально унифицирующие и стандартизующие элементы покрытий, предназначенные для поточного изготовления на заводах и прогрессивных методов монтажа,— концентрируются в зонах 18, 24- и 36-метровых пролетов.

В большинстве случаев на узлы ПРП расходуется 15...20 % общего количества металла несущей конструкции. Меньше металла требуют узлы с одной соединительной деталью («Триодетик», «Октаплатте» и др.), больше — с несколькими, относяшимися и к стержням («Меро», «IFI» и др.). На узлы без промежуточных деталей, например, типа «ЦНИИСК» на ванной сварке, расходуется 1,5...2 % металла. Однако из-за значительных объемов монтажной сварки они не получили широкого распространения. Экономично соединение на заводской сварке четырех пар согнутых стержней круглого сплошного сечения, реализованное в Дании. Там же изготовляются структуры из труб прямоугольного сечения, концы которых обрабатываются с помощью компьютерно-контролируемого процесса резки и свариваются в пространственном узле непосредственно друг с другом, без переходных деталей. Соединения замкнутых гнутосварных профилей прямоугольного сечения по типу «труба в трубу» с успехом применяются также в СССР и Финляндии. При этом основные операции выполняются в заводских условиях, монтажные стыки предельно упрощаются.

Структурные конструкции позволяют уменьшить расход металла и стоимость покрытий по сравнению с традиционными плоскостными на 20...30 % [3]. В отечественной практике внедрены решения ферм, которые по металлоемкости могут конкурировать со структурами [13]. Если учитывать кровельные элементы, масса которых для ЛМК превышает 30 % массы покрытия, то преимущество некоторых структур заключается в возможности опирания настила малым пролетом, а также по всем сторонам или углам ячейки и работы его как плиты или мембраны. Аналогичным образом густая ячейка снижает расход металла для путей подвесного транспорта и подвесных потолков. Кроме того, у стержневых плит отношение конструктивной высоты покрытия к пролету h/L составляет 1/10...1/25 (1/6...1/15 у плоских ферм), благодаря чему снижаются на 5...15 % площадь стеновых ограждений и строительный объем зданий [3, 2]. Параметры a и h, судя по изученным источникам, назначаются без достаточного обоснования, исходя из общих

конструктивных соображений. Например, для плит типа «Веймар» рекомендованы соотношения $a=(1/10...1/15)\ L$, что дает ряды: $a=1800$, 2000; 2400 мм и $L=18$; 24; 36 м. Распространены соотношения $h=a\sqrt{2/3}$ — для треугольной ячейки и $h=a/\sqrt{2}$ — для квадратной, при которых обеспечивается максимальная унификация размеров стержней. Сортамент узлов и стержней для разнообразных структурных плит поэлементной сборки может быть сформирован на основе модульной сетки с кубической ячейкой, в которой стержни располагают по диагоналям или по ортогоналям и диагоналям.

Непосредственное влияние на развитие конструктивной формы ПРП оказывают изготовление, транспортирование и монтаж. Можно проследить следующие тенденции (см. табл. 3):

упрощение изготовления и монтажа узловых соединений, в том числе переход от литья и механической обработки к штамповке и сварке (п.п. 3, 4, 8, 9, 14, 17, 20, 24), применение прокатных и гнутых профилей взамен труб (п.п. 9...14, 17, 18, 20, 21), отказ от высокопрочных болтов в пользу болтов нормальной точности (п.п. 20, 21);

упрощение изготовления стержневых элементов, в том числе увеличение допусков на длину (см. табл., п.п. 4, 8, 20, 21), обработка концов с помощью реза и прокола отверстий (п.п. 3, 4, 20, 21, 24);

компактность складирования и эффективность транспортировки, в том числе контейнерная доставка отдельных узловых и стержневых элементов (п.п. 1...9, 15...17, 19), штабели (пакеты) из пирамид (п.п. 10...13, 18) и V-образных или плоских ферм (п.п. 14, 22, 23);

повышение заводской готовности конструкций (п.п. 10...14, 18, 20...24).

Указанные тенденции во многом противоречат друг другу и требованиям экономии металла. Например, повышение заводской готовности, сопровождаемое увеличением габаритов отправочных марок, влечет за собой большие транспортные расходы, усложняет складирование, но упрощает монтаж. С другой стороны, отказ от длинноразмерных элементов позволяет максимально автоматизировать изготовление стержней и узлов, но приводит к перерасходу металла и увеличению трудоемкости монтажа. Применение открытых профилей (прокатных и гнутых) взамен трубчатых замкнутых уменьшает стоимость основных материалов, упрощает узлы, но повышает металлоемкость и уменьшает срок службы покрытия

из-за меньшей устойчивости к коррозии. Интегральным показателем эффективности конструкции является стоимость в деле. Однако наиболее комплексным критерием качества должны служить приведенные затраты, учитывающие единовременные расходы на изготовление, транспортирование и возведение конструкции, а также текущие эксплуатационные издержки.

1.3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПРП И НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОГРАММАХ

Вопросы расчета ПРП, анализа напряженно-деформированного состояния проектировщик должен решать на основе закономерностей формообразования конструкций, т. е. синтеза схем. Выбор метода расчета и средств его автоматизации (программы для ЭВМ) зависит прежде всего от особенностей конструктивной формы, условий эксплуатации, изготовления и монтажа, системы покрытия.

Ранние простейшие формы ПРП (см. табл. 2, п.п. 1, 2, 5, 8, *c*, *d*) не имеют лишних стержней, все связи необходимы для обеспечения геометрической неизменяемости схемы. В этом случае можно применить способ разложения нагрузки на плоские грани и элементарные методы статического расчета ферм («вырезание» узлов, моментные точки и т. п.). При этом инженер должен осознавать и использовать, исходя из конкретных требований и заданных условий, такие объективные свойства статически определимых систем, как независимость распределения усилий от неточностей изготовления и сборки, осадки опор и других дислокаций, от температурных воздействий, материала и сечений элементов. Особенно полезным для оптимизации решений является вытекающее из этих свойств следствие — возможность прямого проектирования, т. е. подбора сечений элементов по однократному расчету системы в целом.

Более поздние и сложные формы ПРП (многорешетчатые системы с избыточными связями), например Шуховские односетчатые покрытия одинарной и двоякой кривизны на основе линейчатых поверхностей и современные структуры, имеющие природные кристаллические прототипы, характеризуются сближением несущих элементов, их однородностью по назначению, унификацией длин и сечений. Для их анализа необходимо привлекать классические методы строительной механики статически (кинематически) неопределимых систем: сил, перемеще-

ний, смешанный. Особенность подобных форм ПРП, учитываемая при проектировании,— повышение надежности за счет лишних связей. Кроме того, регулярность систем и ориентация на поточное производство стержневых и узловых элементов и конвейерно-блочный монтаж снижают влияние неточностей изготовления и сборки на перераспределение усилий.

Естественная расчетная модель ПРП — стержневая система, что приближает условную схему к конструктивной, дает надежные результаты. Расчет универсальный, но трудоемкий, поскольку степень статической (кинематической) неопределимости может быть велика. Его выполняют с помощью ЭВМ, в связи с чем автоматизированные методы широко внедряются в практику проектирования ПРП.

При расчете по методу сил выбирают статически определимую основную систему и вычисляют в ней усилия от основных неизвестных и нагрузок (этот этап расчета в зарубежных разработках не автоматизирован). Если конструкцию можно рассматривать как перекрестную, то выбирают традиционную основную систему в виде двух (трех) направлений ребер. Для структурных схем с треугольной ячейкой используют сочленения тетраэдров, а усилия в стержнях определяют аналитически последовательным «вырезанием» трехстержневых узлов. Во многих случаях применяют приемы назначения групповых неизвестных, локализации усилий в регулярных элементах основной системы по образцу контурных эпюр, разложения нагрузки на симметричную и кососимметричную, заготовки таблиц коэффициентов влияния.

Разработанные в СССР программы серии «Марсс» используют смешанный метод, причем этапы выбора и расчета основной системы (консольного вида) автоматизированы. Программы эффективны для ПРП с неразрезными элементами, т. к. число неизвестных при этом минимально.

Для расчета шарнирно-стержневых ПРП повсеместно применяют метод перемещений. Он лежит в основе многих универсальных и специализированных программ, пригоден и для статически определимых систем. К его преимуществам относят также естественное выявление недеформированного состояния. Большинство программ используют для экономии памяти ЭВМ и ускорения счета свойство ленточности матрицы реакций, что требует специальной нумерации элементов. Некоторые программы перерабатывают также окаймленные матрицы, что соз-

дает удобства для пользователя. Современные версии программ (Лира, Парсек, ДИАРАМА) эффективно учитывают регулярность и симметрию стержневых систем не только в структуре исходных данных, но и в алгоритмах расчета, реализующих свойства блочных матриц в приложении к симметрии любого вида (Парсек) и к технике иерархических суперэлементов (ДИАРАМА). В основе программ лежит метод конечных элементов (МКЭ) в форме перемещений. Они имеют развитые библиотеки КЭ.

На предварительном этапе расчета важно провести кинематический анализ расчетной схемы. Применение нестандартных, малоизученных, например разреженных, схем, или необычных условий опирания может привести к геометрической изменяемости системы относительно второстепенных (например, монтажных) и основных нагрузок. Различают свободные и прикрепленные к «земле» системы. Удобны в монтаже структурные плиты, образующие жесткий диск даже без учета опорных закреплений, так как позволяют упростить схемы постоянных и временных связей каркаса. Есть системы, неизменяемые лишь в проектном положении.

Анализ выполняют с помощью традиционных приемов строительной механики: подсчет по формуле числа лишних связей, формирование системы из заведомо неизменяемых пространственных элементов или присоединением каждого узла тремя стержнями, не лежащими в одной плоскости, способ замены стержней. Изменяемость иногда проверяют пробной постановкой задачи на ЭВМ, которая быстро и надежно анализирует схему, прерывая счет, если на главной диагонали матрицы реакций встречается нуль, и указывая уязвимое место конструкции. Нередко, с целью уменьшения объема вычислений, расчет выполняется для 1/2, 1/4, 1/8... части конструкции. В плоскостях прямой и косой симметрии вводятся связи, символизирующие равенство нулю соответствующих перемещений в действительной системе. Эти связи могут превратить рассматриваемую часть конструкции в неизменяемую, и расчет на ЭВМ даст неверное представление о кинематических свойствах системы в целом.

В другом аспекте анализа схемы выявляют ее статически неопределимые зоны и абсолютно необходимые стержни. В результате инженер получает сведения о том, где можно регулировать усилия перераспределением материала или предварительным напряжением, какие зоны чувствительны к осадке или податливости опор,

к температуре, к неточностям изготовления и монтажа, какова степень «живучести» системы.

Наиболее часто для ПРП принимают шарнирно-стержневую расчетную модель. Однако развитие конструктивных форм и техники расчета приводит к учету жесткости соединения стержней в узлах, эксцентриситетов их примыканий и т. п., приближая идеализированную схему к действительной.

В последнее время все большее внимание уделяют учету работы опорных конструкций покрытий. Установлено, что неоправданное раскрепление решетчатых плит по горизонтали может вызвать распор и исказить усилия в поясах более чем вдвое. Наиболее точный прием — введение в расчетную схему стоек и связей с их собственными жесткостными характеристиками. Возможен и учет упругих деформаций основания. Если характеристики податливости опор заранее неизвестны, то необходимо исследовать граничные случаи опирания, например шарнир и защемление, упор и каток и т. д.

Использование ЭВМ позволяет рациональнее распределять материал в статически неопределимых ПРП путем многократного расчета с корректировкой сечений по универсальным программам, либо с помощью программ, реализующих процесс последовательных приближений. Однако для больших систем такой расчет трудоемок. Известны оценки возможного изменения внутренних усилий при вариации жесткости [14], которые могут упростить процесс распределения материала.

При количестве элементов в ПРП, превышающем ограничения программ, необходимы приближенные способы расчета. Один из них состоит в увеличении размера поясной ячейки с пропорциональной корректировкой исходных жесткостей поясов и раскосов. После окончания расчета на ЭВМ полученные усилия приводятся к действительному размеру ячейки. При опирании плиты по контуру этот прием дает достоверные результаты.

Более общий метод приближенного расчета регулярных ПРП заключается в замене исходной дискретной (стержневой) системы континуальной (пластиной, оболочкой). Он возник на основе работ по дискретизации сплошных систем [2, 3] и реализуется в три этапа: подбор жесткостных характеристик пластины (оболочки); расчет ее с использованием известных решений; обратный переход от распределенных усилий модели к усилиям в стержнях ПРП. Этот метод дает удовлетворительные результаты и применяется на предварительных стадиях

проектирования, для сравнительных оценок вариантов, а также в оптимизационных расчетах.

В качестве расчетной модели стержневой плиты принимается ортотропная или изотропная тонкая пластина с постоянным по всей ее площади значением основной упругой характеристики — цилиндрической жесткости D. Для плит с треугольной ячейкой дополнительно учитывают крутильную жесткость D_{xy}. Формулу для цилиндрической жесткости можно вывести двумя путями. Первым из них определяют момент инерции I поперечных сечений поясных стержней одного из направлений, располагающихся на участке шириной 1 м, относительно нейтральной оси. Так, для структур с треугольной равносторонней ячейкой $I = Ah^2/(a\sqrt{3})$, где A — площадь сечения поясного стержня; h — конструктивная высота плиты; a — сторона ячейки. Полученное значение I подставляют в известное выражение $D = EI/(1-\mu^2)$, где μ — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости материала. Второй путь, более общий и строгий, предполагает анализ упругих деформаций кристаллического элемента плиты при изгибе и распространение эквивалентного напряженно-деформированного состояния на элементарный параллелепипед расчетной модели.

На втором этапе с помощью справочного материала определяют прогибы и погонные усилия в характерных точках пластины: моменты M_x, M_y, M_{xy} и поперечные силы Q_x, Q_y. Исходными данными служат форма и размеры в плане, граничные условия, нагрузки. Прогибы — это уже конечный результат, а усилия M и Q подлежат распределению на стержни конструкции. На этом, третьем, этапе применяют прием, обратный изложенному для первого этапа. Сводка упругих характеристик для семи различных типов решеток, подробные выкладки, анализ точности результатов приведены в работе [2]. Там же рассматриваются модели в виде трехслойных пластин со средним слоем (раскосами) конечной жесткости.

1.4. ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Оптимальное проектирование в современной трактовке представляет собой целенаправленный выбор параметров рассматриваемой конструкции, обеспечивающий наилучший по заданному критерию результат. Такими критериями могут быть экономические: материалоемкость, стоимость в деле, сумма разовых затрат и эксплуа-

тационных расходов, приведенных к единой размерности (приведенные затраты) и др., а также физические — например равнопрочность (равнонапряженность), минимум массы или объема, максимум воспринимаемой нагрузки и т. п., которые тоже косвенно связываются с эффективностью конструкции. Целенаправленность выбора гарантируется формализацией проектной задачи и применением математических методов, аналитических (дифференциальное и вариационное исчисление, теория оптимального управления) и численных (математическое программирование). При постановке и решении задачи должны учитываться исходные проектные данные и ограничения, эксплуатационные требования, пролеты и нагрузки, примыкающие конструктивные элементы, условия прочности и устойчивости и т. д. Важно также изначала установить, какие параметры конструкции считаются неизменными, а какие будут найдены. Так, возможные параметры фермы — схема (структура решетки, ее геометрические размеры), сечения стержней.

В зависимости от выбора критерия, искомых параметров и принятых допущений формулируются различные задачи оптимального проектирования. Наиболее традиционна задача распределения материала в статически неопределимых системах. Сложность ее состоит в том, что даже при постоянной нагрузке и фиксированной схеме усилия в элементах определяются не однозначно, а зависят от их сечений.

Наилучшей можно считать ферму равного сопротивления, во всех стержнях которой напряжения достигают допускаемых, причем во всех растянутых стержнях из одного материала — одинаковое напряжение, а в каждом сжатом — свое, соответствующее его гибкости. Если отбросить фактор устойчивости и разыскивать статически неопределимую ферму с одинаковым по модулю напряжением во всех стержнях, то в одном и том же семействе, т. е. при общей схеме и заданной нагрузке, такая ферма возможна лишь в исключительных случаях. При этом решение, если оно существует, не является единственным, а найденное множество ферм данного семейства характеризуется постоянным суммарным объемом материала и в их числе обязательно имеется статически определимая ферма, т. е. такая, в которой на лишние стержни материал не выделен.

Более результативным может быть метод заданных напряжений. Он позволяет так подобрать сечения стержней, чтобы в них под рассматриваемой нагрузкой возни-

кали заданные напряжения. Если стремиться к нулевым усилиям в лишних стержнях, то из всевозможных полученных таким образом статически определимых ферм данного семейства найдется одна с наименьшим расходом материала.

Критерий наименьшего объема непосредственно ведет к экономии материала, при этом в отдельных стержнях оптимальных ферм с заданной схемой (структурой, очертаниями, длинами элементов, опорами, нагрузкой) предполагают возможным заниженное напряжение. Обобщая, проф. А. И. Виноградов поставил задачу оптимального проектирования стержневых систем как «множества конструкций с заданным очертанием осей». В процессе поиска разрешено устранение любых лишних связей, включая опорные, вплоть до образования статически определимых, а также расчлененных (вырожденных) схем. Именно из этого множества выделяют системы: равного сопротивления (равнонапряженные); с заданными напряжениями; наименьшего объема.

Таким образом, описанные выше задачи относятся к конструкциям с заданными генеральными размерами, конфигурацией (очертания осей, положения узлов), не варьируемыми в процессе оптимизации. В них разыскиваются только сечения стержней. По терминологии И. М. Рабиновича и А. И. Виноградова — это обратная задача теории сооружений, или прямая задача проектирования. В значительно более сложную, так называемую обобщенную задачу включен и поиск конфигурации. Для статически определимых ферм дело упрощается, поскольку распределение материала заключается в подборе минимального сечения стержня по известному усилию. При такой постановке можно искать оптимальную ферму, меняя ее геометрические размеры.

Подобную задачу решает А. Р. Ржаницын. Он минимизирует теоретический вес фермы G, принимая для стержней растянутых и сжатых одно и то же допускаемое напряжение σ'. Конфигурация фермы варьируется при неизменной нагрузке. Для двухстержневой распорной системы и сетчатых оболочек вращения найдены наименьшие значения G и соответствующие оптимальные параметры. Так, для сферической оболочки радиуса R (со схемой по типу купола Шведлера) при равномерной гидростатической нагрузке q, вызывающей только сжимающие усилия, получены выражения $G=\gamma qR^2\omega/\sigma'=\gamma\pi(r^2+f^2)^2/(2\sigma' f)$, где γ — удельный вес материала; ω — телесный угол, ограниченный поверхностью оболочки; f — ее

высота; r — радиус перекрываемого кругового отверстия. Минимум достигается при $f=0{,}577\ r$, при этом центральный угол шарового сектора $\alpha=120°$ и $G_{min}=1{,}54\gamma\pi r^3/\sigma'$.

Аналогично исследуют плоские фермы, изменяя размеры вдоль оси, параллельно которой направлены заданные силы. Например, для стропильных ферм (треугольной, с параллельными поясами, рыбовидной и др.) варьируется высота h при фиксированной структуре решетки и постоянном для всех стержней σ', минимизируется теоретический объем. Однако эти предпосылки не позволяют учесть продольный изгиб сжатых стержней, наличие ненагруженных («нулевых») элементов и т. п. Получаемые размеры, например h, оказываются бо́льшими, чем того требуют сжатые элементы. Кроме того, высота ферм остается независимой от нагрузки (при фиксированном пролете), что также противоречит проектной практике. Такие же неудовлетворительные результаты дают конструктивные коэффициенты, относящиеся к ферме в целом.

Конструктивные коэффициенты представляют собой поправки к теоретическому объему за счет ослабления сечений, их унификации, добавочного материала на узлы ферм, на соединительные детали составных элементов и т. п. На основе предварительного анализа различных типов конструкций возможно определение ориентировочного расхода материала по теоретическим площадям сечений и конструктивному коэффициенту, по сечениям (брутто) основных элементов и строительному коэффициенту, а также по эмпирическим формулам.

Приближенно учитывают факторы устойчивости стержней и нерасчетные элементы введением дифференцированных конструктивных коэффициентов для поясов (значения достигают 2) и решетки (превышают 3). Рекомендуемые значения оптимальных высот ферм (для принятой разбивки на панели) снижаются по сравнению с полученными по критерию минимума теоретического объема, однако все еще не зависят от интенсивности нагрузки. Это вызвано недостаточно точным отражением взаимного влияния силовых и геометрических факторов на уровне подбора сечений. Оптимальная высота ферм снижается также, если учесть стоимость примыкающих участков колонн и стен, расходы на отопление и вентиляцию объема, занимаемого шатром покрытия. При этом важно правильно принять срок подсчета эксплуатационных затрат.

Вопросы подбора сечений в задачах поиска оптималь-

ной конфигурации ферм, в том числе высоты и числа панелей, уточняют на основе реальных способов формообразования сжатых стержней, вводя в рассмотрение коэффициент продольного изгиба φ. При этом удается автоматически сбалансировать в оптимальных размерах силовой фактор и требование устойчивости, «нулевые» стержни обретают конечные сечения, как это и требуется при проектировании. Усложнение постановки задачи за счет указанных уточнений компенсируют снижением ее размерности. Этому служат комплексные конструктивные параметры, использование непрерывных зависимостей для величин, дискретных по существу, и соответственно аналитических методов — вариационного исчисления, теории оптимального управления [15, 16].

Важными в теоретическом плане являются еще более сложные (по сравнению с рассмотренными задачами поиска оптимальных размеров) — задачи синтеза, в которых варьируется и сама структура, топология фермы. В так называемой задаче Максвелла—Мичелла заданными считаются лишь нагрузки и опорные узлы. Ее решению посвящена обширная литература, однако результаты пока не получили большого практического применения, поскольку формы неудовлетворительны по устойчивости и технологичности. Роль подобных задач в поставке эталонов для нижних иерархических уровней оптимизации (поиск конфигурации, распределение материала) — несомненна.

В задачах оптимального проектирования пространственных решетчатых покрытий также применяются некоторые из описанных подходов. Немногочисленные исследования связаны с определением размеров схемы, в частности стандартной ячейки покрытия. Например, в работе [17] рассмотрена решетчатая плита, составленная из двух одинаковых поясных сеток с прямоугольными ячейками и раскосов одной длины. Критерием качества (оптимальности) принят теоретический расход металла, а варьируемыми параметрами — размеры кристалла структуры в плане и по высоте. Нагрузка считается равномерно распределенной, а сечения всех одноименных элементов — одинаковыми, подобранными по максимальным усилиям. Продольный изгиб сжатых стержней учитывается приближенно, при этом зависимость $\varphi(\lambda)$ линеаризуется в диапазоне средних гибкостей, а сечения подбираются из профилей с постоянной толщиной стенки и геометрически подобным контуром. Теоретический расход металла выражается через исходные данные и иско-

мые параметры, полученная непрерывная функция минимизируется классическими методами анализа. Условия равенства нулю частных производных приводят к системе алгебраических уравнений. Однако, по-видимому, из-за линейной аппроксимации φ эта система оказывается несовместной. Пропорциональное увеличение всех варьируемых параметров сопровождается уменьшением расхода материала. Осознавая полученные противоречия, автор предлагает искусственные приемы априорного задания параметров.

Для стержневых плит с квадратной и треугольной ячейкой исследуются размеры типовой фермы заводского изготовления [18]. Генеральные размеры в плане, условия опирания, нагрузка и тип сечений считаются заданными. Сечения определяются по максимальному усилию и принимаются одинаковыми по всему покрытию. Сравниваются критерии минимума массы и приведенных затрат, последние, однако, не включают расходы на примыкающие конструкции (кровельные панели, пути подвесного транспорта, участки стен и др.) и эксплуатационные издержки.

Методика определения оптимальных параметров сферических куполов радиально-концентрической разрезки (Шведлера и звездчатых) предлагается в работе [19]. На первом этапе решения задачи фиксируется стрела подъема покрытия f и выбираются число ребер n и колец m, соответствующие минимуму теоретического объема. Целевая функция сглаживается, ее экстремум находится методом покоординатного спуска. Далее варьируется f при постоянных n и m, причем реализуется прямой перебор. Вопросы унификации размеров, сечений и другие элементы технологичности конструкции автором не рассматриваются.

В работе [20] критерием качества односетчатых металлических куполов считается суммарная стоимость каркаса и ограждающих элементов. Разыскивается оптимальная высота f при неизменном размере треугольной ячейки сетки, в связи с чем стоимость ограждения зависит лишь от площади его поверхности. Как и в предыдущей методике, усилия определяются по безмоментной теории, а общая устойчивость каркаса предполагается обеспеченной. Отмечается существенное влияние на оптимальную высоту соотношения стоимостей материала несущих и ограждающих конструкций, а также принимаемых в расчет значений конструктивных коэффициентов, зависящих от размеров решетки, типа стержней и дета-

лей. Эти коэффициенты рекомендуется уточнять последовательными приближениями.

Большее число исследований ПРП посвящено задаче распределения материала при заданной геометрической схеме. Массу структурной плиты минимизируют регулированием уровня опор при числе их, большем четырех [21]. Подобного же эффекта достигают предварительным напряжением структурных плит, сводов и оболочек с помощью затяжек и других способов — в результате перераспределения усилий в сторону недогруженных унифицированных элементов. Критерием оптимальности структур служит минимум массы. Для решения используют аппарат линейного программирования [22] и приближенные методы [18].

Таким образом, в большинстве решаемых задач оптимального проектирования ПРП принимают простейший критерий качества — расход металла и не исследуют существенные свойства конструкции, например трудоемкость, энергоемкость. Обобщенные задачи, в которых варьируются геометрические параметры схемы и распределяется материал, особенно при усложненном критерии, чаще всего не доводятся до практического результата. Наиболее перспективным представляется подход, при котором из оптимизируемых параметров выделяются главные, используется регулярность структуры ПРП с целью понижения размерности задачи, а расчетная модель учитывает устойчивость, унификацию и другие факторы, важные для реализации в проекте и натуре.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРП

Из предыдущего изложения легко уяснить, сколь разнообразными могут быть подходы к оптимальному проектированию конструкций. Связано это не только с многообразием форм ПРП как объекта оптимизации, но и с теми допущениями, которые принимает проектировщик переходя от сооружения к его условной схеме, с выбором варьируемых параметров, оперируя которыми можно достичь той или иной поставленной цели. Характеристику объекта, набор переменных параметров, функцию цели, а также связывающие их расчетные зависимости целесообразно объединить понятием оптимизационной модели.

В главе описываются некоторые из разработанных моделей применительно к самым распространенным и перспективным типам ПРП.

2.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЪЕКТА ОПТИМИЗАЦИИ И ВАРЬИРУЕМЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Наиболее распространенный и перспективный тип ПРП — двухсетчатые системы с регулярной ячейкой. Принимаем, что ячейки обеих поясных сеток одинаковой формы с близкими или равными размерами, хотя это ограничение не является принципиальным. В системах с плоской срединной поверхностью (стержневые плиты) сетки соединяются между собой по кристаллическому структурному типу, с криволинейной (цилиндрические оболочки и купола) — по перекрестному. Для плит (рис. 6, *а*) самая распространенная — ортогональная (квадратная) ячейка, для оболочек и куполов (рис. 6, *б* и 6, *в*) — треугольная.

По статической схеме двухсетчатые системы с регулярной ячейкой относятся преимущественно к шарнирно-стержневым с включением отдельных изгибаемых элементов, воспринимающих местную нагрузку. Для данного класса ПРП характерен продольный изгиб, обусловленный наличием центрально- и внецентренно-сжатых стержней. Работа конструкции в целом ограничивается упругой стадией. Предполагается, что длины и сечения основных несущих элементов определяются требованиями прочности и устойчивости стержней (коэффициентом продольного изгиба). В связи с повышенной жесткостью двухсетчатых систем ограничение по деформативности удовлетворяется при поверочном расчете, вопросы общей устойчивости для них также не имеют решающего значения.

Поясные сетки стержневых плит воспринимают, в основном, изгибающие моменты в плите от поперечной (вертикальной) нагрузки на покрытие (в конкретном сечении усилия в верхней и нижней сетках разнозначны), раскосы — перерезывающие силы. В оболочках и куполах наиболее характерна почти однозначная работа верхних и нижних поясов сквозных стержней на продольные усилия, действующие по касательной к срединной поверхности, главная функция решетки — уменьшение свободной длины элементов и работа на местные нагрузки.

Регулярность структуры и размеров периодически повторяющейся ячейки дополняется в соответствии с условиями изготовления унификацией поперечных сечений стержней. Образуются зоны одинаковых типоразмеров. Нарушения регулярности схемы и сечений допускаются в отдельных местах покрытия, например на контуре, у

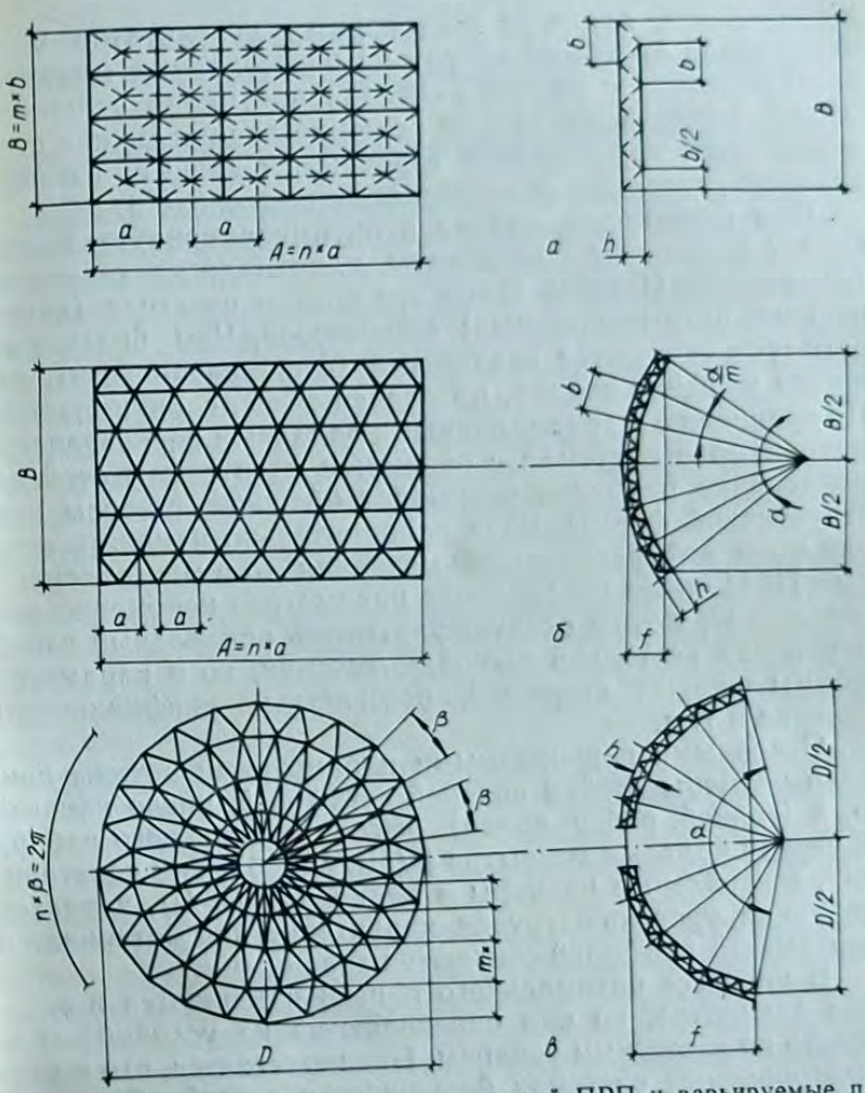


Рис. 6. Схемы характерных представителей ПРП и варьируемые параметры:

а — стержневая плита; *б* — круговая цилиндрическая оболочка; *в* — сферический купол.

опор. Иногда локально вводятся усиляющие или раскрепляющие элементы, не оказывающие заметного влияния на другие зоны конструкции.

Эффективность оптимального проектирования ПРП в значительной мере определяется способами постановки и реализации оптимизационных задач. Выбирая тот или иной из них, с одной стороны, необходимо наиболее полно ставить и решать задачу, максимально учитывать свойства исследуемой конструкции и использовать ее

возможности, достигая достоверных результатов и существенной экономии затрат на изготовление, монтаж и эксплуатацию; с другой — нельзя чрезмерно усложнять модель объекта, поскольку решение задачи может стать нереальным или слишком трудоемким даже при использовании современных вычислительных средств.

При постановке задачи в оптимизационную модель вводят различные компоненты, влияющие на указанные показатели. Прежде всего это состав искомых (варьируемых, оптимизируемых) параметров. Чем больше параметров считаются заданными (фиксированными), тем проще решение задачи, но слабее эффект оптимизации. По сравнению с традиционными задачами распределения материала в системах с заданным очертанием осей варьирование размеров вскрывает бо́льшие резервы конструктивной формы. Если дополнительно изменять сечения стержней, распределяя материал, то в многоэлементных ПРП число неизвестных параметров непомерно возрастает. При этом следует учитывать продольный изгиб, определяя не только площадь сечения, но и параметры формы сжатых стержней, рационально унифицировать сечения и т. д.

Основными варьируемыми параметрами авторы приняли размеры ячейки поясной сетки a, b, число панелей m, n (граней, ребер, колец), высоту стержневого набора h, стрелу подъема покрытия f (см. рис. 6). Тип конструкции, генеральные размеры в плане (A, B, D), характер опирания, уровень нагрузки, характеристики материала и сортамента профилей считаются заданными.

В процессе оптимального поиска изменяются и сечения элементов, но они определяются из условий — равенств по известным усилиям. Предполагается, что в рассматриваемых системах большинство связей абсолютно необходимы и распределение усилий не зависит или почти не зависит от заданных жесткостей стержней. Закон формообразования сечений фиксируется, т. е. проектирование выполняется из серии геометрически подобных профилей, характеризующейся удельным радиусом инерции. Он может быть задан различным по типам элементов (пояса, раскосы) и зонам унификации. Сами зоны разбиваются заранее для каждого из типов стержней в соответствии с особенностями работы конкретной схемы под нагрузкой. Могут быть выделены элементы, подбираемые по предельной гибкости.

Таким образом, выбраны оптимизируемые параметры пространственных решетчатых покрытий.

Конкретизация изложенных допущений для частных случаев, а также некоторые расширения и обобщения в подходе к задачам будут рассмотрены дополнительно.

2.2. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Другим важным компонентом постановки задачи является выбор критерия качества проекта (критерия оптимальности). Обычно это экстремальное значение функции искомых параметров, называемой целевой, или функцией цели. Самый известный критерий качества — минимум массы потребного металла, или металлоемкость. Как показывает анализ тенденций развития конструктивных форм ПРП (см. главу 1), такой критерий не может дать оценки конструкции из разнородных изделий, не характеризует технологичности и эксплуатационных свойств проектного решения, в том числе его энергоемкости.

Оптимизация конструкций представляет собой целенаправленный выбор наилучшего варианта из множества допустимых проектных решений, обусловленных различными значениями переменных параметров. Инструктивные материалы предлагают критерием экономической оценки качества сравниваемых вариантов считать приведенные затраты. Они складываются из единовременных затрат и текущих расходов за нормативный срок окупаемости капитальных вложений. Реальное содержание составных частей приведенных затрат зависит от того, чем разнятся сравниваемые варианты.

В наших задачах варьирование геометрических параметров проводится в рамках заданной конструктивной системы для конкретного объекта, а это определяет однотипность применяемых материалов, способов изготовления и монтажа, почти одинаковую продолжительность строительства по вариантам. Поэтому наиболее приемлемы двучленные формулы, отражающие различия в сметной стоимости и эксплуатационных качествах вариантов. Так, полные приведенные затраты, руб

$$F = t_n E + C, \tag{1}$$

где t_n — нормативный срок учета эксплуатационных расходов, лет; E — эксплуатационные расходы (текущие издержки), руб/год; C — стоимость конструкции в деле, сметная или сметно-расчетная (единовременные затраты), руб.

Удельные приведенные затраты, руб/год

$$\varphi = E + e_n C, \tag{2}$$

где e_n — коэффициент эффективности капитальных вложений, 1/год.

Нормативный срок t_n окупаемости капитальных вложений и обратная ему величина e_n принимаются в соответствии с инструктивными документами.

Методика определения стоимости эксплуатации покрытий как конструктивного элемента зданий конкретизируется с учетом требований «Руководства...» [23] и проектных материалов ЦНИИпроектстальконструкция. В общее значение E включаются существенные расходы, связанные с оптимизируемой конструкцией и зависящие от варьируемых параметров. Например, значительную часть затрат составляют энергетические издержки на отопление и вентиляцию дополнительного объема здания, занятого конструкциями покрытия, зависящие от искомых величин h и f. Несколько сложнее определить влияние вариации параметров на амортизационные отчисления и прочие эксплуатационные расходы. С другой стороны, очевидно, что расходы на электроосвещение, водоснабжение, уборку полов и перегородок, остекленных поверхностей следует исключить из рассмотрения. Как показали расчеты, расходами на уборку участков стен, примыкающих к покрытию, и уборку снега с кровли можно пренебречь в виду их относительной малости.

Таким образом, расчетные годовые эксплуатационные расходы

$$E = E_{am} + E_{cr} + E_{hot} + E_{ven}, \tag{3}$$

где E_{am} — амортизационные отчисления, в том числе на реновацию E_{ren} и частичное восстановление первоначальной стоимости E_{pr}; E_{cr}, E_{hot}, E_{ven} — расходы соответственно на текущие ремонты, отопление и вентиляцию.

Сумма двух первых слагаемых формулы (3) определяется в долях от сметной стоимости покрытия C:

$$E_c = (H^1_{ren} + H^2_{pr} + H^3_{cr})\, C, \tag{4}$$

причем нормативы H^i для капитальных зданий с металлическими покрытиями могут приниматься по [23]. Сумма остальных слагаемых вычисляется в функции объема покрытия V (табл. 4):

$$E_v = (P^1_{hot} + P^2_{ven})\, V, \tag{5}$$

где удельные нормативы P^i в зависимости от параметров помещений, характеристики здания, режима работы и расчетной температуры наружного воздуха задаются в широких пределах.

Таблица 4. **Основные геометрические характеристики покрытий**

Схема ПРП	Параметры: Заданные	Параметры: Искомые	Площадь срединной поверхности S	Объем стержневого набора V	Вспомогательные выражения
Стержневая плита, см. рис. 6, *а*	A, B	h	AB	ABh	—
Круговая цилиндрическая оболочка, см. рис. 6, *б*	A, B	α, h	$A\pi R\frac{\alpha}{180^\circ}$	$A\pi R\frac{\alpha h}{180^\circ}$	$R=\frac{B}{2\sin(\alpha/2)}$
		f	Ak	Akh	$k=\sqrt{B^2+f^2 16/3}$
Сферический купол, см. рис. 6, *в*	D	α, h	$\pi D^2/e$	$\pi D^2 h/e$	$e=2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$
		f	πd	πdh	$d=D^2/4+f^2$

Структура учитываемых разовых затрат, представленных стоимостью в деле C, также во многом обуславливается составом переменных параметров проектирования. При решении частной задачи оптимального распределения материала в системе с заданными размерами может быть уменьшена металлоемкость несущей конструкции. Другие ее показатели (трудоемкость изготовления и монтажа, транспортабельность и т. п.) почти не изменяются. Более универсальным способом экономического анализа ПРП служит оптимизация схемы. В этом случае кроме массы металлоконструкций в рассмотрение вводятся показатели стоимости, зависящие от переменного количества элементов покрытия — узловых деталей, которые для многих типов ПРП требуют механической обработки, стержней в поясных сетках и в соединительной решетке.

Затем учитываются смежные конструкции, вовлекаемые в оптимальный поиск вследствие изменения размеров стержневой решетки. С внешней стороны покрытия располагаются панели или прогоны и настил, поддерживающие кровельный ковер. С увеличением ячейки поясной сетки их пролет и стоимость становятся бо́льшими. То же самое относится к элементам подвесного потолка и балкам подвесного транспорта. Для криволинейных покрытий стоимость кровель, включая утеплитель, изоляционные и защитные слои, зависит от площади поверхности S, а следовательно, и от стрелы подъема покрытия (см. табл. 4). Наконец, в торцах ПРП (кроме куполов)

примыкает стеновое ограждение, площадь которого увеличивается с возрастанием высоты стержневого пояса h.

Полная стоимость покрытия

$$C = C_{ps} + C_{ns},$$

где C_{ps} — стоимость основных несущих конструкций ПРП; C_{ns} — стоимость смежных конструкций, примыкающих к основным.

В свою очередь:

$$C_{ps} = C_м M + C_u U + C_b S_b + C_g S_g,$$

где $C_м$ — единичный показатель части стоимости основных несущих конструкций, пропорциональной их массе M, руб/т; C_u — стоимость одного узлового соединения поясных сеток с учетом изготовления и сборки, руб.; U — число узлов в поясных сетках; C_b — единичный коэффициент стоимости поясных стержней с учетом их изготовления и монтажа в части, пропорциональной их числу S_b, руб. за 1 стержень; C_g, S_g — то же, для соединительной решетки.

Стоимость примыкающих конструкций

$$C_{ns} = (C_l l + C_r) S + C_w h (L + d),$$

где C_l — единичный показатель стоимости конструкций кровли и потолка в части, пропорциональной пролету l, обусловленному размерами ячейки поясных сеток, руб/м³; C_r — стоимость остальной части кровельно-потолочных ограждений, включая «несиловые» слои, руб/м²; C_w — отнесенная к единице площади стены стоимость ограждения, расположенного в пределах высоты h стержневой плиты или оболочки, руб/м²; L — периметр прямолинейных участков стен, приходящихся на исследуемую часть покрытия, м; d — добавка, пропорциональная длине направляющей цилиндрической оболочки, м.

Стоимость стальных конструкций на стадии проектирования, как правило, определяется по прейскуранту оптовых цен франко-вагон станция отправления. При отсутствии оптовых цен на новые типы конструкций стоимость их исчисляется на основе калькуляций, учитывающих расход основных материалов, трудоемкость передела и внезаводские расходы. Стоимость транспортирования до строительной площадки и разгрузки может устанавливаться по ценнику сметных цен на перевозку грузов для строительства, а стоимость сборки, установки, окраски и других работ — по сборнику ЕРЕР.

Принятая в настоящей работе дифференциация единичных показателей (коэффициентов) на «массовый» ($C_м$) и «числовые» (C_u, C_b, C_g) объясняется тем, что единица массы стержневых элементов ПРП в большинстве случаев намного дешевле единицы массы узловых деталей. Кроме того, известно, что трудоемкость изготовления и монтажа зависит не только от массы изделий, но и от их количества. Поэтому в $C_м$ должна быть учтена стоимость основных материалов, а также часть стоимости изготовления, сборки и установки, остальные части — в коэффициентах C_u, C_b, C_g. Разделение на C_b и C_g объясняется тем, что узлы и концы стержней в соединительной решетке перекрестных систем конструктивно значительно проще, чем в поясных сетках.

Показатели стоимости примыкающих конструкций формируются аналогично. Типы кровельных панелей, прогонов, балок, настилов и подвесных потолков разнообразны. Однако почти во всех можно выделить элементы, стоимость которых зависит от размера ячейки. Пролет l в формуле (8) соответствует размерам a, b или в случае опирания по всем сторонам, среднему геометрическому из a и b. Такой приближенный прием позволяет соразмерить взаимодействие смежных конструкций.

Комплексность принятого критерия качества позволяет учесть и сбалансировать в процессе оптимизации влияние многочисленных факторов. Беглый анализ зависимости компонентов целевой функции φ (1)...(8) от искомых параметров a, b, h, f (X_1, X_2, X_3, X_4) свидетельствует о различном и часто противоречивом характере их влияния. Так, увеличение a, b уменьшает число узлов и стержней, снижает стоимость решетчатой конструкции C_{ps} — см. (7), но увеличивает стоимость кровельных панелей — см. первый член в (8). И наоборот, снижение показателей стоимости C_u, C_b, C_g приводит к уменьшению ячейки поясных сеток, так же как и увеличение коэффициента C_l. Уменьшение высоты h утяжеляет несущую конструкцию стержневой плиты, т. е. увеличивает M и, следовательно, C_{ps}, но уменьшает эксплуатационные расходы и стоимость стенового ограждения (см. формулы (5), (7), (8) и табл. 4).

Функциональная связь многих величин пока не раскрыта, например: M, U, S_b, S_g (a, b, h, f). В частных случаях критерий качества будет упрощаться. Так, для неотапливаемых зданий приведенные затраты пропорциональны стоимости C. Можно исследовать системы минимальной массы, приняв все коэффициенты в (7) и (8),

кроме $C_м$, равными нулю. В каждом из подобных случа-
ев для найденных параметров, оптимальных по частном
критерию, может быть определен набор соответствующи
экономических показателей с использованием формул
(1)...(8).

2.3. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

В конструкциях ПРП материал концентрируется
стержнях и узловых деталях. Туда же передаются дей-
ствующие на покрытие нагрузки и возникающее в нем
пространственное силовое поле. Для статического расче-
та естественной моделью служит стержневая система,
представляющая собой сугубо дискретный объект меха-
ники. Эта схема близка к конструктивной, но сложна, что
предопределяет трудоемкий расчет. Значительно проще
континуальные модели — пластины, оболочки, часто при-
меняемые для ускоренного анализа напряженно-дефор-
мированного состояния ПРП. Возможность перехода к
таким моделям обуславливается регулярной структурой
конструкции.

Аналогичный подход применен авторами в настоящей
работе к моделям для оптимизационного расчета. В ис-
ходной (стержневой) модели ПРП такие переменные па-
раметры, как усилия, поперечные сечения и длины эле-
ментов могут изменяться от стержня к стержню скачко-
образно; число ячеек в поясных сетках, определяемое их
размерами, должно быть целым; аппликаты узлов в об-
щем случае задаются конечным набором чисел и т. д.
Ограничения дискретности, накладываемые на перемен-
ные, значительно усложняют решение оптимизационных
задач, поэтому необходима континуализация модели. По-
добному преобразованию способствуют: постоянство
структуры решетчатой системы; ее многоэлементность;
большое число ячеек поясных сеток; плавность изменения
конфигурации (очертаний) стержневого набора; унифи-
кация размеров и сечений; однозначность распределения
внутренних усилий в зависимости от принятых размеров
и нагрузок; определенность способа формообразования
поперечных сечений стержней на основе относительной
полноты реальных сортаментов профилей.

С учетом названных свойств переход к модели с рас-
пределенными параметрами осуществляется по двум на-
правлениям. Во-первых, в конкретной схеме параметры
задачи представляются непрерывными или кусочно-не-

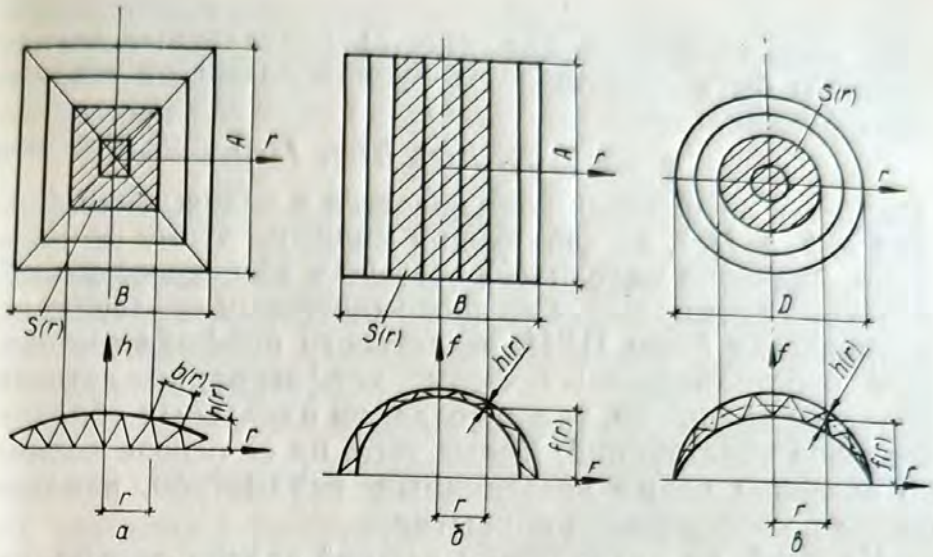


Рис. 7. Двухсетчатые системы ПРП с параметрами, переменными по поверхности покрытия:

а — стержневая плита с криволинейным очертанием верхних поясов; *б* — цилиндрическая оболочка с переменной толщиной стержневого набора; *в* — купольная конструкция, ограниченная соосными поверхностями вращения.

прерывными функциями обобщенной координаты r (рис. 7). Особенно наглядна их геометрическая интерпретация для стержневого набора переменной толщины $h(r)$, а также аппликат $f(r)$, не связанных уравнением кривой — образующей оболочки вращения или направляющей цилиндрической оболочки. Каждой точке r, задающей некоторую линию на срединной поверхности покрытия, соотносятся определенные значения не только основных оптимизируемых параметров a, b, h, f, но и расчетных усилий в стержнях $N_i(r)$ ($i=1, 2, 3, ..., T$, где T — число типов элементов — поясов, раскосов), их сечений $A_i(r)$. В осециклической конструкции (рис. 7, *в*) координата r имеет наиболее простой смысл — это удаление от оси симметрии.

Во-вторых, в процессе оптимизации параметры варьируются свободно, т. е. могут принимать произвольные значения, не всегда сообразующиеся с требованиями целочисленности, модульности. Например, наборы размеров a, $b(r)$ не обязательно должны быть такими, чтобы число поясных ячеек и соединительных раскосов было целым.

Формируемая оптимизационная модель предполагает функциональную связь показателей качества проектных решений и переменных геометрических параметров. В общем случае для конструкций с переменной толщиной

стержневого набора (см. рис. 7) приведенные затраты должны быть представлены функционалом от неизвестных функций:

$$\varphi = \varphi[a(r),\ b(r),\ h(r),\ f(r)]. \qquad (9)$$

Сущность оптимизации заключается в нахождении функций a, b, h, $f(r)$, доставляющих минимум этому функционалу. Значение модели (9) состоит в теоретическом обосновании оптимальных по экономическому критерию геометрических форм ПРП, в частности профиля рыбовидных пространственных ферм, конфигурации сетчатых оболочек вращения, т. е. в создании идеальных образцов-эталонов конструкций. Кроме того, на ее основе возможно введение новых независимых параметров, изменяющихся по поверхности покрытия.

Частной, но практически важной задаче оптимального проектирования систем, показанных на рис. 6 (более простых в изготовлении и потому чаще употребляемых в строительстве), будет отвечать упрощенная оптимизационная модель. Принимаем $a(r) \equiv a$, $b(r) \equiv b$, $h(r) \equiv h$, т. е. постоянные по всему пролету покрытия размеры ячейки поясных сеток и расстояние между ними, а также задаемся формой кривой $f(r)$ (пусть, для определенности, она станет окружностью), так что поверхность определяется лишь стрелой подъема f. Тогда придем к выражению приведенных затрат как функции простых переменных:

$$\varphi = \varphi(a,\ b,\ h,\ f). \qquad (10)$$

Иногда удобнее вместо размеров a, b в качестве основных неизвестных использовать эквивалентные им параметры n и m, представляющие собой число каких-либо фрагментов конструкции. Для плиты (см. рис. 6, *а*) — ячеек (панелей) вдоль пролетов A и B соответственно; для сетчатой цилиндрической оболочки (см. рис. 6, *б*) — плоских граней m и панелей n в каждой из них:

$$n = A/a; \quad m = \alpha \Big/ \left(2 \arcsin\left(\frac{b}{B} \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right), \qquad (11)$$

где α — центральный угол кругового сектора направляющей; B — хорда.

В сферических куполах звездчатой структуры (см. рис. 6, *в*) характерны: n — число меридиональных «граней» цикличности, или число сторон в кольцевых многоугольниках; m — число панелей между кольцами. Обычно разбивку выполняют так, что длина b квазимеридио-

нальных стержней (раскосов) сохраняется постоянной, а кольцевых (поясов) увеличивается по мере удаления от центра конструкции. Поэтому задавшись значением одного из параметров, например n, можно установить связь между b и m, подобную (11):

$$m = \alpha' / \left(2 \arcsin \left(\frac{b}{D'} \sin \frac{\alpha'}{2}\right)\right). \qquad (12)$$

Однако здесь угол α' и хорда D' относятся уже к наклонной образующей сетчатой оболочки вращения.

В аналогичных отношениях взаимозаменяемости находятся параметры f и α:

$$\alpha = 4 \operatorname{arc\,tg} (2f/B) \text{ — (см. рис. 6, б)}$$
$$\alpha = 4 \operatorname{arc\,tg} (2f/D) \text{ — (см. рис. 6, в)} \qquad (13)$$

или, переходя к безразмерному параметру $\bar{f}$:

$$\alpha = 4 \operatorname{arc\,tg} \bar{f}, \quad \bar{f} = 2f/B \quad \text{или} \quad \bar{f} = 2f/D. \qquad (14)$$

При криволинейных поверхностях неизвестные группы a, b, n, m коррелируют с группой h, f и α, см. зависимости (11) и (12). Кроме того, связываются с целью обеспечения общей устойчивости и параметры h и f. Так,

$$h = kR, \quad k \ll 1, \qquad (15)$$

где R — радиус кривизны. Используя известные геометрические соотношения в круговом сегменте, для цилиндрической оболочки с хордой B и купола, перекрывающего отверстие диаметром D, можно получить:

$$h = 1/4k\,(1/\bar{f} + f)\,B; \quad h = 1/4k\,(1/\bar{f} + f)\,D. \qquad (16)^*$$

В отдельных случаях за счет особенностей той или иной конструкции набор свободно варьируемых параметров сокращается. Например, в плитах с квадратной ячейкой ($b=a$). При максимальной унификации размеров не только поясов, но и раскосов, все стержни проектируются одной длины и высота h зависит от a: $h=a/\sqrt{2}$.

Ранее была показана зависимость отдельных частей целевой функции φ от оптимизируемых параметров. С учетом свойств модели (10) принципиально определены непрерывные функции:

$$C_{ns}(a, b, h), \quad C_{ns}(n, m, f); \quad E_V(h), \quad E_V(f). \qquad (17)$$

Для упрощения вместо $\bar{f}$ в смысле (14) использовано f.

---

* Здесь и далее принято, что операции деления (/) и умножения выполняются последовательно, если этот порядок не изменен расстановкой скобок, таким образом «$1/4k$» трактуется как «$\frac{1}{4}k$».

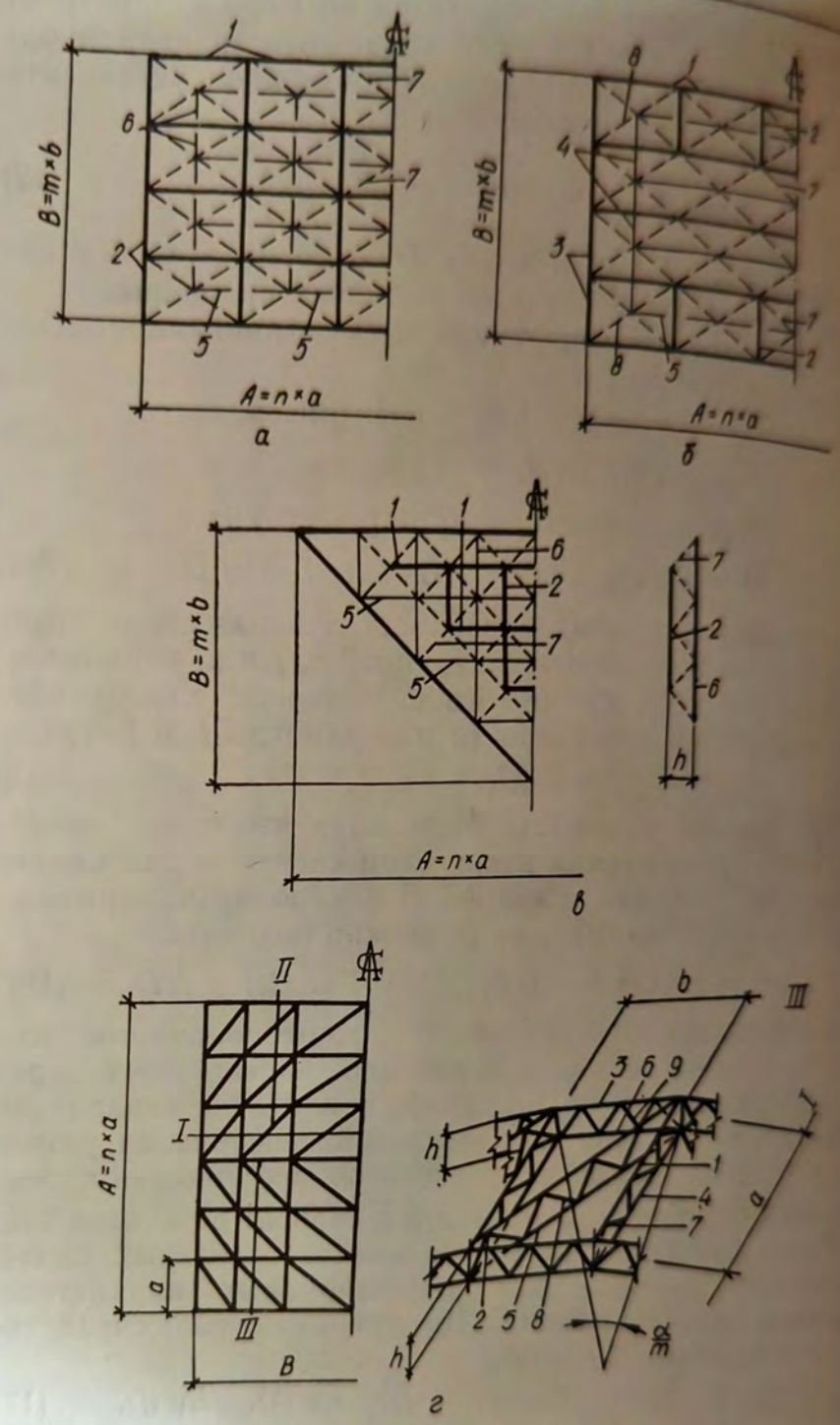
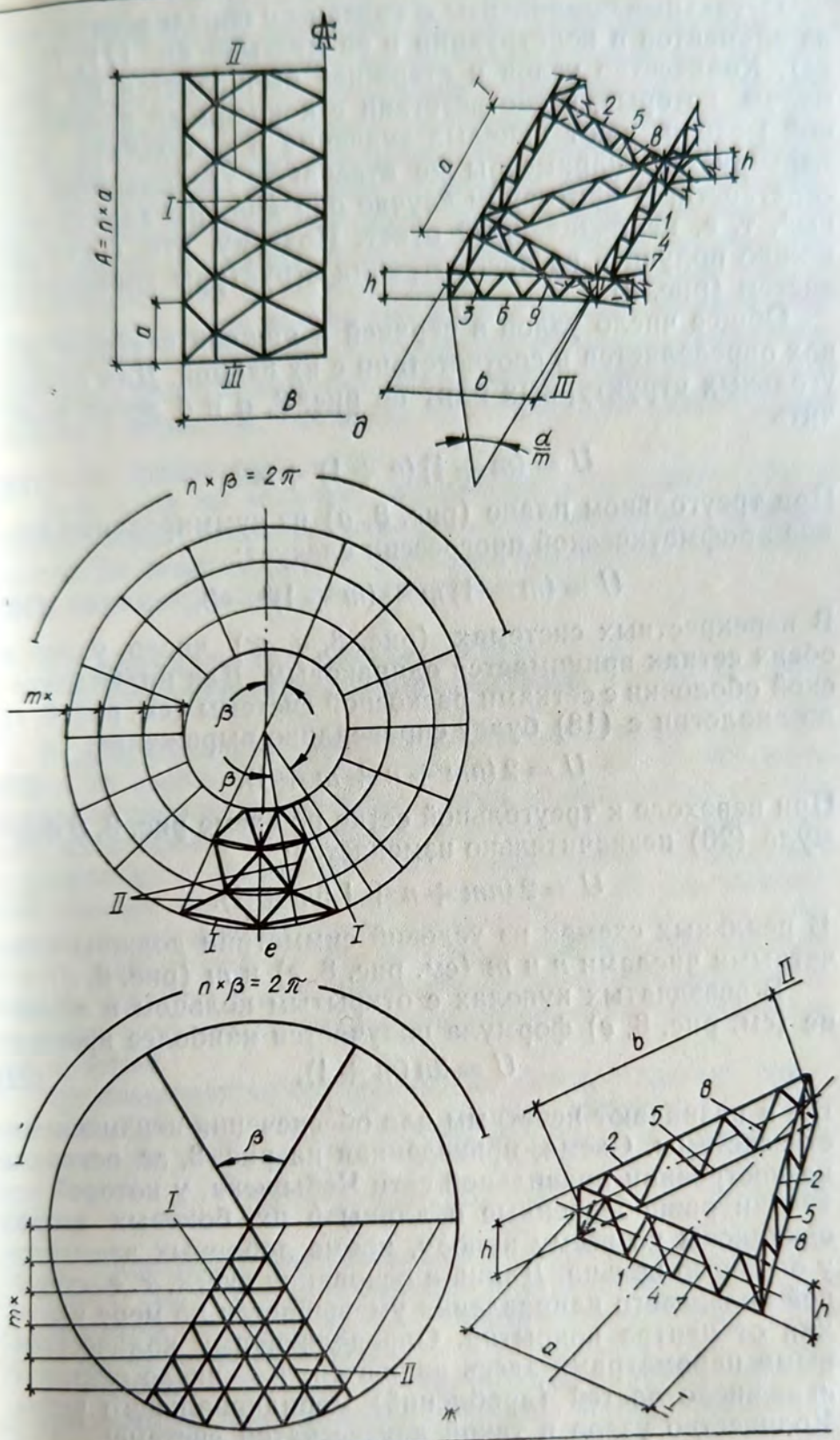


Рис. 8. Схемы и нумерация типов стержней ПРП:

а — структурная плита с прямоугольной ячейкой; *б* — то же, при неполны поясных сетках; *в* — то же, на треугольном плане; *г* — круговая цилиндр ческая оболочка в перекрёстном исполнении с гранями раскосн системы; *д* — то же, с гранями треугольной системы; *е* — перекрестный купо звездчатой разбивки; *ж* — то же, на основе правильной сети Чебышев 1...9 — номера типов стержней; I...III — номера составных элементов.


II
I
III
A = n × a
a
B
д
1
2
5
8
h
a
1
4
7
h
3
6
9
b
III
α/m
n × β = 2π
m×
β
β
II
I
e
I
n × β = 2π
β
I
m×
II
II
b
8
5
2
2
5
8
h
1
4
7
h
a
I
ж

Остальные компоненты φ связаны с определением числа элементов в конструкции и ее массы — см. (7), (6) и (4). Количество узлов и стержней вычисляется по формулам, которые, в соответствии с концепцией непрерывной модели, дают нецелые значения в результате, если варьируемые параметры не отвечают требованиям дискретности. В противном случае они должны давать точный, т. е. целочисленный ответ. Поэтому эти формулы можно получить из рассмотрения структуры конкретных систем (рис. 8).

Общее число узлов в верхней и нижней поясных сетках определяется в соответствии с их схемой. Для прямоугольных структурных плит по рис. 8, *а* и *б* легко получить

$$U = (m + 1)(n + 1) + mn. \tag{18}$$

При треугольном плане (рис. 8, *в*) из суммирования членов арифметической прогрессии следует:

$$U = (m - 1)m + (m + 1)^2 - 3. \tag{19}$$

В перекрестных системах (рис. 8, *г...ж*) число узлов в обеих сетках принимается одинаковым. Для цилиндрической оболочки с сетками раскосной системы (см. рис. 8, *г*) по аналогии с (18) будет справедливо выражение:

$$U = 2(nm + n + m + 1). \tag{20}$$

При переходе к треугольной сетке по схеме рис. 8, *д* формула (20) незначительно изменяется:

$$U = 2(nm + n + 1{,}5m + 1). \tag{21}$$

В реальных схемах из условий симметрии должны быть четными числами n и m (см. рис. 8, *г*) и m (рис. 8, *д*).

В звездчатых куполах с открытым кольцом в вершине (см. рис. 8, *е*) формула получается наиболее простой:

$$U = 2n(m + 1), \tag{22}$$

где n назначают нечетным для обеспечения неизменяемости системы. Схема, приведенная на рис. 8, *ж*, основана на построении правильной сети Чебышева, у которой все ячейки равнобедренные и длины b их боковых сторон одинаковы по всему куполу, кроме доборных элементов у опорного кольца. Длина a основания ячеек, т. е. стержней кольцевого направления уменьшается по мере удаления от центра покрытия. Определяющими количественными параметрами здесь являются: n — число секторов; m — число частей (дроблений) меридионального ребра. Количество узлов в такой двухсетчатой системе:

$$U = 2nm(0{,}5m + 1{,}5) + 2. \qquad (23)$$

Подсчет числа поясных S_b и соединительных S_g стержней целесообразно вести по отдельным их типам t. В поясных сетках различаются элементы по направлениям, длинам и характеру работы, а в соединительной решетке — по принадлежности к составным стержням сеток. Полученные формулы сведены в табл. 5. Они являются точными за исключением двух, отмеченных звездочкой в графе 7. Погрешность последних невелика, так как разбивка по рис. 8, *ж*, как правило, применяется в пологих сегментах, где изменение длины кольцевых стержней незначительно. Наоборот, схема по рис. 8, *е* предпочтительнее в экваториальных зонах купола, имеет открытое кольцо у вершины, где $a \to 0$, что также уменьшает уклонение от среднего значения $\tilde{a}$.

Еще одна из величин, входящих в формулу (7), а именно масса стержней определяется более сложным образом. Ее зависимость от непрерывных, или распределенных, параметров рассматривается ниже.

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССЫ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В традиционном проектировании подсчет расхода металла не является ключевым и трудоемким. Исходными данными служат конкретные длины и количества стержней, их сечения. В процессе оптимизации непрерывное варьирование геометрических параметров порождает бесконечное множество проектных решений, характеризующихся различной металлоемкостью. Не во всех случаях поиск оптимума будет сопровождаться многократным вычислением целевой функции, но всегда желательно иметь прямые расчетные зависимости, по возможности простые.

Предполагается, что каждый из типов стержней t может иметь несколько $(1, 2, ..., z_t)$ зон унификации z, где сечения стержней одинаковы. Поэтому масса стержней

$$M = \sum_t \gamma_t l_t \sum_z S_{tz} A_{tz}, \qquad (24)$$

где γ_t — плотность материала, применяемого для элемента типа t; S_{tz} — число стержней типа t, попавших в заранее известную зону z; A_{tz} — площадь поперечного сечения расчетного элемента.

Количество стержней по зонам подсчитывают исходя из требований, положенных в основу вывода формул

Таблица 5. **Количество S_t и длины l_t стержней в ПРП**

Схема по рис. 8	Обозначения	Поясные сетки $S_b = \sum_{t=1}^{6} S_t$						Соединительная решетка $S_g = \sum_{t=7}^{9} S_t$			Вспомогательные выражения
		верхняя			нижняя						
	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а	S_t	$n(m+1)$	$m(n+1)$	—	—	$(n-1)m$	$(m-1)n$	$4mn$	—	—	$l' = \left(h^2 + \frac{a^2+b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$
	l_t	a	b	—	—	a	b	l'	—	—	
б	S_t	$n(m+1)$	$2(n-1)$	$2m$	$2(m-1)$	$(n-1)m$	—	$4(n-1)m$	$4m$	—	
	l_t	a	b	b	b	b	—	l'	l'	—	
в	S_t	$(m-1)^2$	$(m-1)(m-2)$	—	—	$(m-1)m$	m^2-1	$4(m-1)m$	—	—	$a=b$
	l_t	a	b	—	—	a	b	l'	—	—	
г	S_t	$n(m+1)$	mn	$m(n+1)$	$n(m+1)$	mn	$m(n+1)$	$(m+1)A/h$	mnl''/h	$m(n+1)\frac{b}{h}$	$l'' = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$
	l_t	a	l''	b	a	l''	b	$h\sqrt{2}$	$h\sqrt{2}$	$h\sqrt{2}$	
д	S_t	$mn+\frac{m}{2}+n$	$2mn$	$2m$	$mn+\frac{m}{2}+n$	$2mn$	$2m$	$(m+1)A/h$	$2mnl'''/h$	$2mb/h$	$l''' = \left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)^{\frac{1}{2}}$
	l_t	a	l'''	b	a	l'''	b	$h\sqrt{2}$	$h\sqrt{2}$	$h\sqrt{2}$	
е	S_t	$n(m+1)$	$2mn$	—	$n(m+1)$	$2mn$	—	$n(m+1)\frac{\tilde{a}}{h}$	$2mnb/h$	—	
	l_t	$\tilde{a}$	b	—	$\tilde{a}$	b	—	$h\sqrt{2}$	$h\sqrt{2}$	—	
ж	S_t	$\frac{mn}{2}(m+1)$	$mn(m+2)$	—	$\frac{mn}{2}(m+1)$	$mn(m+2)$	—	$\frac{mn}{2}(m+1)\frac{\tilde{a}}{h}$	$mn(m+2)b/h$	—	
	l_t	$\tilde{a}$	b	—	$\tilde{a}$	b	—	$h\sqrt{2}$	$h\sqrt{2}$	—	

(18...23) и табл. 5. Если контур зоны подобен контуру границ секции, блока ПРП, то S_{tz} может быть вычислено точно. В частном случае, при распространении зоны на всю поверхность покрытия, искомые формулы должны совпадать с выражениями табл. 5. Если же область унификации бесформенна, многосвязна, то результат может быть приближенным. В связи с этим предусматриваются упрощенные способы задания зоны. Они различаются в зависимости от того, являются ли основными параметрами размеры a, b или безразмерные числа n и m.

Для стержневых плит зону удобно характеризовать следующими исходными данными: d^0_{tz} — площадь зоны (области) z; d^i_{tz} ($i=1, 2, 3, 4$) — длины участков сторон i плана покрытия, принадлежащих области z; d^i_{tz} ($i=5, 6, 7, 8$) — признаки (0 или 1) попадания в зону угловых точек i.

Нумерация сторон и угловых точек контура покрытия, а также пример использования этих обозначений показаны на рис. 9, *а*. В зонах, располагающихся полностью

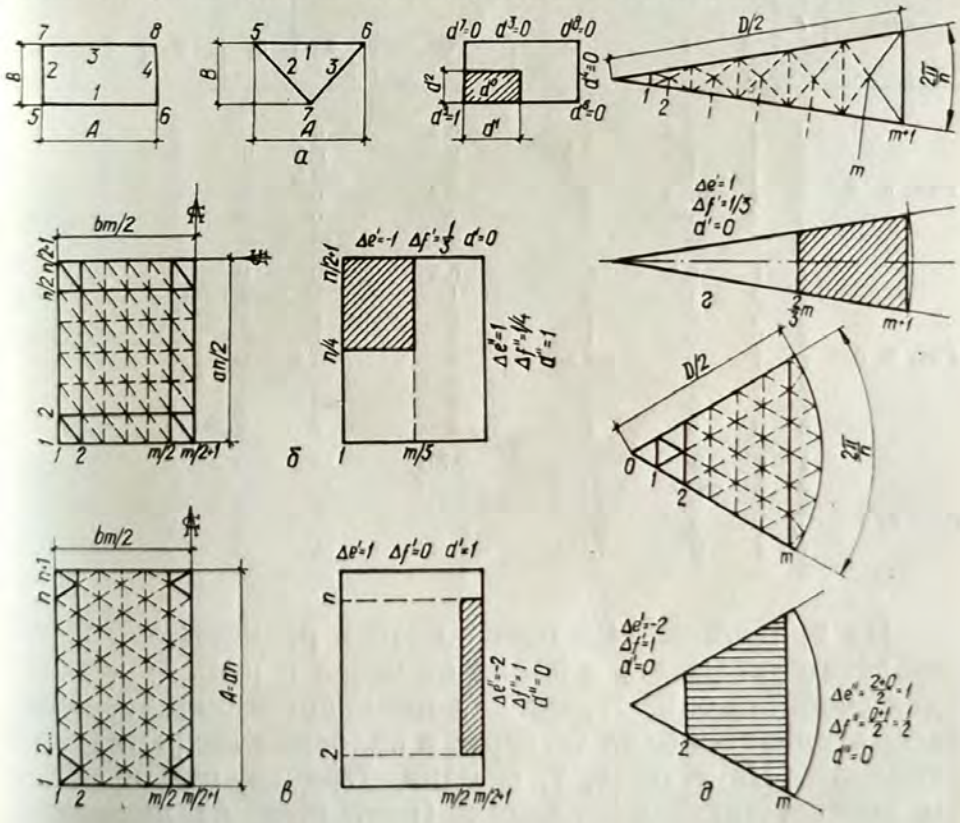


Рис. 9. Нумерация граничных линий и точек для задания зон унификации сечений (примеры):

а — стороны и углы контура плиты; *б* — линии сетки на развертке цилиндрической оболочки с раскосной решеткой; *в* — то же, с треугольной решеткой; *г* — кольца в секторе звездчатого купола; *д* — то же, для сети Чебышева.

внутри контура, $d^i_{tz} \equiv 0$ $(i=1, ..., 8)$. При этом в структурах с прямоугольной ячейкой размерами $a \times b$ число стержней каждого типа пропорционально или равно выражению $d^0/_{tz}(ab)$. Соприкосновение с границами и углами может вносить положительные либо отрицательные поправки. Оценить их значение проще всего из рассмотрения целочисленного случая, т. е. конкретных схем, изображенных на рис. 8, *а...в*. Формула имеет вид:

$$\overline{S}_{tz} = \sum_{i=1}^{8} k_{it} d^{(i)}_{tz} / (a^{\nu} b^{\mu}); \quad \nu = \begin{cases} 0\ (i = 2, 4, 5 \ldots 8), \\ 1\ (i = 0, 1, 3); \end{cases}$$

$$\mu = \begin{cases} 0\ (i = 1, 3, 5 \ldots 8), \\ 1\ (i = 0, 2, 4). \end{cases} \quad (25)$$

При треугольном плане принимают $b=a$. Коэффициенты k_{it} приведены в табл. 6.

Таблица 6. **Коэффициенты k_{it} к формуле (25)**

Схема	t	i = 0	1	2	3	4	5	6	7	8
Рис. 8, *а*	1	1	0,5	0	0,5	0	0	0	0	[illegible]
	2	1	0	0,5	0	0,5	0	0	0	[illegible]
	5	1	0	−0,5	0	−0,5	0	0	0	[illegible]
	6	1	−0,5	0	−0,5	0	0	0	0	[illegible]
	7	4	0	0	0	0	0	—	—	—
	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Рис. 8, *б*	1	1	0,5	0	0,5	0	0	0	0	[illegible]
	2	0	1	0	1	0	−0,5	−0,5	−0,5	[illegible]
	3	0	0	1	0	1	0	0	0	[illegible]
	4	0	0	1	0	1	−0,5	−0,5	−0,5	[illegible]
	5	1	0	−0,5	0	−0,5	0	0	0	[illegible]
	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	7	4	0	−2	0	−2	0	0	0	[illegible]
	8	0	0	2	0	2	0	0	0	[illegible]
Рис. 8, *в*	1	1	0	−0,707	−0,707	—	0	0	1	—
	2	1	−0,5	−0,707	−0,707	—	0,5	0,5	1	—
	5	1	0	−0,354	−0,354	—	0	0	0	—
	6	1	0	0	0	—	0	0	−1	—
	7	4	0	−1,414	−1,414	—	0	0	0	—
	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—

На криволинейных поверхностях размеры зон целесообразно указывать в долях от чисел n и m. Используются свойства симметрии: для цилиндрических оболочек рассматривается одна четверть и половина покрытия, для куполов — $1/n$-я часть, т. е. одна «грань» цикличности. На соответствующих схемах (рис. 9, *б...д*) приведена принятая нумерация линий сетки (ребер, арок, колец), которыми ограничиваются зоны унификации сечений. Необходимый номер линии представляется в виде:

$$e' + f'm \text{ или } e'' + f''n. \tag{26}$$

Например, среднее (коньковое) ребро оболочек (на изображенных развертках оно совпадает с линией симметрии) имеет номер $1+m/2$, т. е. $e'=1$, $f'=1/2$, крайнее ребро № 1 ($e'=1$, $f'=0$), промежуточная арка — $n/4$ $\left(e''=0,\ f''=\frac{1}{4}\right)$ и т. д. Для купола достаточно указывать лишь номера колец. В зонах, расположенных в пределах одного фрагмента конструкции, т. е. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, или $\frac{1}{n}$ частей, число стержней составляет:

$$\bar{S}_{tz} = k_t^0 (\Delta e'_{tz} + \Delta f'_{tz} m + k'_t 2^{-d'_{tz}}) (\Delta e''_{tz} + \Delta f'_{tz} n + \\ + k''_t 2^{-d''_{tz}})^{k'''_t} \left(\frac{l_{t-3}}{h}\right)^{k_t^{IV}}. \tag{27}$$

Здесь исходными величинами, описывающими область унификации стержней, служат: $\Delta e'_{tz}$, $\Delta e''_{tz}$, $\Delta f'_{tz}$, $\Delta f''_{tz}$ — разность составляющих e и f номеров граничных линий зоны в смысле (26); d'_{tz}, d''_{tz} — признаки (0 или 1) принадлежности границ зоны линиям симметрии, показанным на рис. 9, *б, в,* так что для схем рис. 9, *г, д* $d \equiv 0$.

Примеры назначения данных Δe, Δf приведены на рис. 9, *б...д*. Коэффициенты k^0_t, k'_t, k''_t, k'''_t и k^{IV}_t представлены в табл. 7. В случае разбивки сетки по Чебышеву (см. рис. 9, *д*) вместо выражения $\Delta e''_{tz} + \Delta f''_{tz} n$ принимается полусумма номеров граничных для зоны колец в виде:

$$\Sigma e'_{tz}/2 + \Sigma f'_{tz} m/2. \tag{28}$$

Таким образом, определены непрерывные зависимости S_{tz} (m, n, h), т. е. известно количество стержней типа t, имеющих постоянную в данной зоне z площадь поперечного сечения A_{tz}. В соответствии со СНиП II-23-81 для центрально-сжатых элементов она может быть найдена из условия:

$$A \geqslant N/(\varphi R), \tag{29}$$

где N — абсолютная величина расчетного усилия в самом нагруженном стержне зоны; φ — коэффициент продольного изгиба, заданный табл. 72 СНиП II-23-81 в функции наибольшей гибкости $\lambda = l/r$ и расчетного сопротивления стали; l — расчетная длина элемента; r — наименьший радиус инерции сечения; R — расчетное сопротивление стали с учетом коэффициента условия работы. Здесь индексы t и z опущены.

Таблица 7. **Коэффициенты к формуле (27)**

Схема	l	k^0	k'	k''	k'''	k^{IV}
	1, 4	1	1	0	1	0
Рис. 8, *г*	2, 5	1	0	0	1	0
	3, 6	1	0	1	1	0
	7	1	1	0	1	1
Рис. 9, *б*	8	1	0	0	1	1
	9	1	0	1	1	1
	1, 4	1	1	0	1	0
Рис. 8, *д*	2, 5	2	0	0	1	0
	3, 6	2	0	1	0	0
	7	1	1	0	1	1
Рис. 9, *в*	8	2	0	0	1	1
	9	2	0	1	0	1
	1, 4	1	1	0	0	0
Рис. 8, *е*	2, 5	2	0	0	0	0
	7	1	1	0	0	1
Рис. 9, *г*	8	2	0	0	0	1
	1, 4	1	1	0	1	0
Рис. 8, *ж*	2, 5	2	0	0	1	0
	7	1	1	0	1	1
Рис. 9, *д*	8	2	0	0	1	1

Чтобы воспользоваться выражением (29), необходимо предварительно выбрать сечение из сортамента и установить значение r. Такая процедура подбора может повторяться неоднократно для выполнения условия (29), что характерно для традиционно решаемой обратной задачи проектирования в целом. При этом функция $A(N)$ является многозначной не только потому, что нормами допускается неравенство, но и за счет многообразия форм и размеров поперечных сечений стандартных профилей. Для оптимизационной непрерывной модели, как основы решения прямой проектной задачи, предпочтительнее явные аналитические зависимости.

Как показывает анализ широко применяемых конструктивных систем ПРП («ЦНИИСК», «МАрхИ» и др.), можно выделить две группы стержней. Сечения первой из них определяются действующими усилиями сжатия. Гибкости здесь не превышают 100...110. Вторую группу представляют элементы, сечения которых подбираются из условия предельно допускаемой гибкости. Они концентрируются в точках $\lambda = 120$, 150 и более. Статистические данные в виде гистограмм плотности распределения массы стержней по их гибкостям приведены в главе 5.

В связи с изложенным будем ориентироваться на применение двух прямых формул для определения A.

В районе малых гибкостей коэффициент продольного изгиба с достаточной степенью точности аппроксимируется квадратичной зависимостью:

$$\varphi(\lambda) = 1 - k\lambda^2, \tag{30}$$

где k — коэффициент, как и φ, зависящий от марки стали. Он может быть найден из условия минимума средней квадратичной погрешности в вычислении A за счет приближения (30) на основе сведений о наиболее употребительных гибкостях [24]:

$$k = \int_0^{\lambda_1} p(\lambda)(1 - \varphi(\lambda)) / \lambda^2 d\lambda, \tag{31}$$

где $p(\lambda)$ — плотность распределения массы по гибкостям; λ_1 — верхняя граница диапазона λ, такая что $\int_0^{\lambda_1} p(\lambda)d\lambda = 1$.

Полученные значения k, усредненные для различных конструкций ПРП, заключены в пределах от $0{,}4 \cdot 10^{-4}$ до $0{,}75 \cdot 10^{-4}$ (бóльшие значения для более прочных сталей).

Сортаменты профилей, в том числе сокращенные по данным металлургических заводов, предоставляют проектировщику широкие возможности. Располагая двумя параметрами сечения — генеральным размером и толщиной, он может изменять их в различных соотношениях, порознь или вместе. Однако из-за ограничений при прокатке наиболее приемлемо синхронное изменение этих параметров, допускающее естественное продвижение по действующему сортаменту. Принимаем, что при оптимальном поиске сечения подбираются из серии геометрически подобных профилей, например уголков с неизменным отношением ширины полки к ее толщине или труб, одинаково тонкостенных. Такую серию можно сформировать заданным удельным радиусом инерции

$$\rho = r / \sqrt{A}. \tag{32}$$

Его значения характеризуются определенным постоянством. Так, в сокращенном сортаменте горячедеформированных труб ρ находится в пределах 0,6...1,0 (меньшие значения — для толстостенных труб).

Из (29), (30) и (32) следует искомая явная зависимость $A(N)$:

$$A = N/R + kl^2/\rho^2. \tag{33}$$

3 6—1654

Используя (33), нельзя получить очень гибкий стержень даже при $N=0$. Ограничителем служит величина $1/\sqrt{k}$, что при $k=k_{min}$ дает $\lambda_{max}=158$.

Для вычисления A по предельно допускаемой гибкости λ_l предусматривается вторая прямая формула. Подставим в (32) требуемый радиус инерции

$$A = l^2 / (\rho^2 \lambda_l^2). \quad (34)$$

Это выражение справедливо и для растянутых стержней ПРП, которым предписывается: $\lambda_l=200$, 250 и выше. Площадь сечения элементов, определяемая усилием растяжения, измеряется первым членом (33).

Аналогичная (33) двучленная структура принимается и в формуле, предназначенной для сжато-изогнутых стержней:

$$A = [(N/R)^{3/2} + M / (R\omega')]^{2/3} + kl^2/\rho^2. \quad (35)$$

Второй член «отвечает» за устойчивость в плоскости действия момента, а первый найден из условия прочности

$$(N / (AR))^{3/2} + M / (W'R) \leqslant 1, \quad (36)$$

где N, M — абсолютные значения расчетных осевой силы и изгибающего момента, который возникает от местной нагрузки; W' — пластический момент сопротивления.

Выражение (35) означает сохранение закона формообразования из геометрически подобных сечений. Такой ряд имеет еще одну постоянную характеристику — удельный пластический момент сопротивления

$$\omega' = W'/A^{3/2}. \quad (37)$$

Исключая W' из (36) с помощью (37), подобно тому, как это сделано в отношении r, получаем первый член (35). Если его разложить в степенной ряд и оставить только два члена, то выражение значительно упростится:

$$A = N/R + 2M / (3\omega' \sqrt{NR}) + kl^2/\rho^2. \quad (38)$$

С учетом привязки величин к типам стержней t и зонам унификации их сечений z:

$$A_{tz} = N_{tz}/R_{tz} + k_{tz} l_{tz}^2/\rho_{tz}^2; \quad (33')$$

$$A_{tz} = l_{tz}^2/\rho_{tz}^2 / (\lambda_l)_{tz}^2; \quad (34')$$

$$A_{tz} = N_{tz}/R_{tz} + 2M_{tz} / (3\omega'_{tz} \sqrt{N_{tz}R_{tz}}) + k_{tz} l_{tz}^2/\rho_{tz}^2. \quad (38')$$

Использование формул (33′) и (38′) позволяет в результате оптимизации достоверно уравновесить значимость требований устойчивости стержней, с одной стороны,

силовых факторов N_{tz}, M_{tz} — с другой. Рассмотрим зависимость последних от варьируемых параметров.

Известны различные способы определения внутренних усилий в ПРП (см. параграф 1.3). Для целей настоящей работы наиболее пригодны приемы, основанные на континуализации расчетной схемы и выявлении прямой функциональной связи между размерами конструкции и усилиями в ее элементах.

Структурные плиты с ортогональной, в частности квадратной, ячейкой (см. рис. 8, *а...в*) — самый распространенный тип ПРП. Для них всесторонне разработаны модели в виде ортотропной плиты и другие приближенные и точные методики расчета. Анализ литературных и проектных источников применительно к системам, опертым по контуру (см. схемы на рис. 8, *а* и *в*) и в угловых точках (то же, на рис. 8, *б* и *а*), а также статические эксперименты на ЭВМ, связанные с разрежением (сгущением) поясных сеток, изменением высоты покрытия, позволяют сделать два общих вывода.

Во-первых, используемые приближенные методы приводят к усилиям, хорошо согласующимся с точными решениями, так что они часто применяются не только для качественных исследований или эскизного проектирования, но и в рабочих проектах КМ. Во-вторых, осевые силы в стержнях, распределенные на полосу единичной ширины, так же, как и погонные усилия в ортотропной модели (плите), остаются практически постоянными при варьировании размеров a, b и h элементарного кристалла структуры. Изменения таких сил в отдельных сечениях не превышают 3...5 %.

Принимаем непрерывную модель стержневой плиты, напряженное состояние которой в каждой зоне задается расчетными распределенными (погонными) усилиями — изгибающими моментами M'_{tz}, M''_{tz} и перерезывающими силами Q'_{tz}, Q''_{tz} (величины с одним штрихом соответствуют изгибу плиты по пролету A, с двумя — пролету B; индекс t здесь обозначает тип стержня, к которому относится зона унификации z).

Из уравнений равновесия находятся нормальные усилия в основных стержнях поясных сеток ($t=1, 2, 5, 6$):

$$N_{1z} = -M'_{1z}b/h; \quad N_{2z} = -M''_{2z}a/h;$$
$$N_{5z} = M'_{5z}b/h; \quad N_{6z} = M''_{6z}a/h. \tag{39}$$

Аналогично для регулярных раскосов:

$$N_{7z} = 0{,}5\,(Q'_{7z}b + Q''_{7z}a)\,l_p/h. \tag{40}$$

В схеме по рис. 8, *б* вдоль торцов длиной B распо-
гаются наклонные фермы, которые играют роль по-
стропильных конструкций. Принимая в качестве непре-
рывной модели балку пролетом B, найдем усилия в
стержнях:

$$N_{3z} = M^b_{3z}/h; \quad N_{4z} = M^b_{4z}/h;$$
$$N_{8z} = 0{,}5\,(Q'_{8z}b + 2Q^b_{8z})\, l_p/h, \qquad (4$$

где $M^b{}_{tz}$, $Q^b{}_{tz}$ — изгибающий момент и поперечная си-
в торцевой балке, нагруженной реакциями от продо-
ных складок.

Внутренние усилия в непрерывных моделях M', M''
Q', Q'', M^b, Q^b вычисляются по фактическим пролетам и
нагрузкам с помощью имеющихся таблиц для ортотро-
ных плит, систем перекрестных балок и т. п. Возможн
также путем однократного расчета стержневой систем
с фиксированными параметрами a^0, b^0, h^0 перейти к рас-
пределенным усилиям. Например:

$$M'_{tz} = N^0_{tz}h^0/b^0, \quad (t = 1,\ 5); \qquad (40$$
$$M''_{tz} = N^0_{tz}h^0/b^0, \quad (t = 2,\ 6),$$

где $N^0{}_{tz}$ — усилия в схеме с параметрами a^0, b^0, h^0.

Для расчета круговых цилиндрических оболочек (см
рис. 8, *г*, 9, *б*, 8, *д* и 9, *в*) могут использоваться прямы
формулы, выведенные из условий опирания конструкци
по торцам плана длиной B и работы их пролетом A
Подкрепления по сторонам вдоль пролета лишь обеспечи-
вают неизменяемость системы. Основные несущие эле-
менты — ребра (I), расположенные по прямолинейным
образующим цилиндра и включающие в себя пояса со-
седних граневых ферм. Эти плоские фермы имеют раско-
сы (II) в схеме с треугольной решеткой, а при раскосно
решетке также и стойки (III), оси которых являются
хордами (длиной b) круговой арки — направляющей ци-
линдрической оболочки.

Вертикальные узловые нагрузки P_k (k — номер ре-
ра) раскладываются на две смежные грани (k—1) и
по схеме рис. 10, *а*. Рассматривая эти соседние ребра
(k—1), k, (k+1), можно определить граневые составля-
ющие нагрузок:

$$S_{kj} = P_{kj} \cos\left[(m + 7 - 2\,(k + j))\,\beta\right] / \sin(2\beta), \qquad (4$$
$$(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ m;\ j = 1\ \ldots\ 4;\ P_{0j} = P_{1j} = P_{m+1,j} = 0)$$

и суммарные воздействия этих составляющих на грани
k и (k—1):

$$S_k = S_{4k} - S_{2k};$$
$$S_{k-1} = S_{1k} - S_{3k}. \quad (44)$$

Далее из расчета плоских ферм k и $(k-1)$ на нагрузки S находятся усилия в элементах T^{I}_{ki}, T^{II}_{ki}, T^{III}_{ki} (табл. 8). Индексы k обозначают ребра (I) или грани (II, III), а индексы i — арки (III) или панели (I, II). Соответствующие величины, входящие в правые части выражения (43) и формул табл. 8, задаются как «координаты» k_{tz}, i_{tz} определяющего стержня зоны в виде (26). После вычислений получаются значения усилий T^{I}_{tz}, T^{II}_{tz}, T^{III}_{tz}.

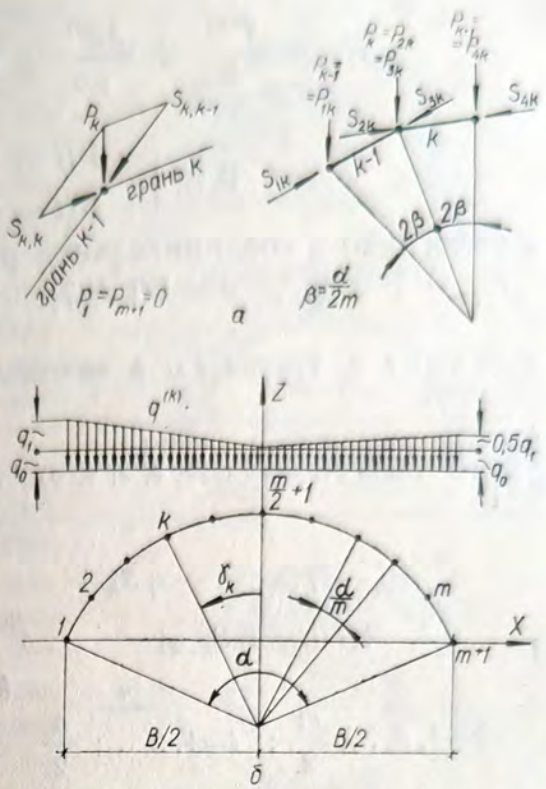


Рис. 10. К определению усилий в круговой цилиндрической оболочке:

а — разложение узловых нагрузок на граневые составляющие; *б* — нумерация ребер и схема загружения.

Сосредоточенные силы P_k находят исходя из конкретной распределенной по поверхности нагрузки q, интенсивность которой принимается постоянной вдоль образующей и переменной вдоль направляющей. Здесь важно учесть несимметричные снеговые загружения (см. рис. 10, *б*). В этом случае узловые нагрузки

$$P_k = 1/2q^{(k)}(x_{k+1} - x_{k-1})\,a, \quad (k = 2, 3, \ldots, m), \quad (45)$$

причем абсциссы ребер как точек кругового сегмента определяются по формуле:

$$x_k = -B/2 \sin\gamma_k / \sin(\alpha/2), \quad (46)$$

где

$$\gamma_k = 1/2\alpha\,[1 - 2(k-1)/m]. \quad (46')$$

Ординаты эпюры нагрузок:

$$q^{(k)} = q_0 - 2q_1 x_k/B, \quad x_k \leqslant 0;$$
$$q^{(k)} = q_0 + q_1 x_k/B, \quad x_k > 0. \quad (47)$$

Переход от усилий в составных (двухветвевых) элементах к нормальным силам в стержнях поясных сеток (t=1...6) осуществляется по формулам:

$$N_{tz} = \frac{T^{(e)}}{2} + \frac{M^{(e)}}{\mu h}, \quad e = \begin{cases} \mathrm{I}\ (t = 1, 4), \\ \mathrm{II}\ (t = 2, 5), \\ \mathrm{III}\ (t = 3, 6), \end{cases}$$

$$\mu = \begin{cases} -1\ (t = 1 \ldots 3), \\ +1\ (t = 4 \ldots 6). \end{cases}$$

Аналогично в соединительной решетке:

$$N_{tz} = \sqrt{2}\, Q_{tz}^{(e)}, \quad e = \mathrm{I}\ (t = 7), \quad \mathrm{II}\ (t = 8), \quad \mathrm{III}\ (t = 9).$$

Таблица 8. **Усилия T_{ki} в элементах I, II и III цилиндрическ оболочек**

№ элемента	Раскосная решетка (рис. 8, *г*; 9, *б*)	Треугольная решетка (рис. 8, *д*;
I	$\frac{a}{2b}\,[(i-1)(n+1-i)\,S_k + i\,(n-i)\,S_{k-1}]$ $k=1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$; $i=1, 2, \ldots; \frac{n}{2}$	$\frac{a}{2b}\left(i-\frac{1}{2}\right)\left(n-i+\frac{1}{2}\right)$ $\times (S_k + S_{k-1})$ $k = 1, 3, \ldots, m+1$, $i = 1, 2, \ldots$
	$\frac{a}{2b}\, i\,(n-i)\,(S_k + S_{k-1})$ $k = \frac{m}{2} + 1$; $i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$	$\frac{a}{2b}\, i\,(n-i)\,(S_k + S_{k-1})$ $k = 2, 4, \ldots, m$; $i = 0, 1, \ldots$
II	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b}\,(n+1-2i)\,S_k$ $k=1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$	$\frac{\sqrt{a^2/4+b^2}}{2b}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)S_k$ $k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots$
III	$\frac{1}{2}\,[(n+1-2i)\,S_{2k} - (n+3-2i)\,S_{4k}$ $k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$; $i = 2, 3, \ldots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)S_{3,k+1}$ $k = 1, 3, \ldots, m+1$; $i = 1, \ldots$
	$\frac{1}{2}\,(n-1)\,S_{4k}$ $k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$; $i = 1$	$\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)S_{2,k-1}$ $k = 2, 4, \ldots, m$; $i = 1, n+$

Здесь усилия M и Q задаются в плоскости наибольшей жесткости сквозных элементов I...III как в разрезных или неразрезных балках от воздействия местной нагрузки за счет внеузлового опирания прогонов, панелей и других кровельных конструкций. В необходимых случаях, особенно для соединительной решетки, применяется формула (34′).

Сетчатые купола с треугольной ячейкой (см. рис. 8, *е* и 8, *ж*) рассчитываются по инженерной методике. Сначала вычисляются погонные усилия в непрерывной модели — сплошной сферической оболочке, опертой по контуру: S' — меридиональное усилие (по направлению меридиана), отнесенное к единице длины кольцевого сечения; S'' — кольцевое усилие (направленное по параллели) на единицу длины меридиана; S''' — сдвигающее усилие.

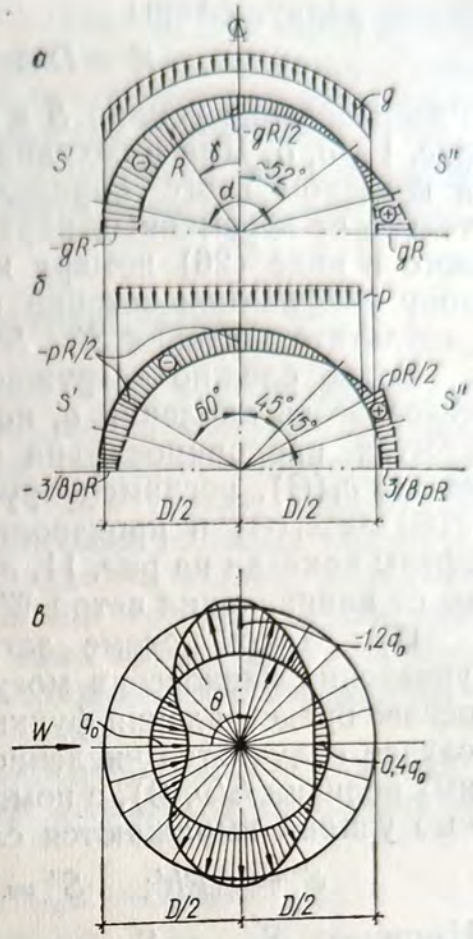


Рис. 11. Загружения сферического купола:

а — собственным весом; *б* — снегом; *в* — ветровой нагрузкой.

Найти их сравнительно нетрудно для осесимметричных загружений вертикальной нагрузкой. Это собственный вес g, распределенный по всей поверхности купола, и снег p, учитываемый на ограниченном участке горизонтальной проекции сферы (рис. 11, *а*, *б*). Из условий равновесия отсеченного шарового сегмента с центральным углом 2γ следует:

см. рис. 11, *а*

$$S' = -gR/(1+\cos\gamma); \qquad (50)$$

$$S'' = gR[1/(1+\cos\gamma) - \cos\gamma]; \quad S''' = 0;$$

см. рис. 11, *б*

$$S' = -pR/2; \quad S'' = -pR/2\cos 2\gamma, \quad \gamma < 60°;$$

$$S' = -3pR/(8\sin^2\gamma); \quad S'' = -S'; \quad \gamma \geqslant 60°; \qquad (51)$$

$$S''' = 0.$$

Здесь радиус сферы

$$R = D/(2sin\,(\alpha/2)).$$

Распределение усилий S в функции угла γ показано рис. 11, *а*, *б*. Для γ сохраняет силу выражение (46′), в конечном итоге определяет зависимость усилий только от переменных параметров α и m, но и от зад ного в виде (26) номера кольца k_{tz}, характеризующ зону унификации сечений (см. рис. 9, *г*, *д*). Это дает результате значения S'_{tz}, S''_{tz}.

Более сложно загружение ветровой нагрузкой. Ин тенсивность давления q, нормального к поверхности кр крытия, пропорциональна аэродинамическим коэффиц ентам $c_1(\Theta)$, регламентируемым нормами. Вид эпюр $q(\Theta) = q_0 c_1(\Theta)$ в произвольном горизонтальном сечен сферы показан на рис. 11, *в*. Угол Θ отсчитывается в пл не от направления ветра W.

При такой схеме загружения дифференциальн уравнения равновесия могут быть проинтегрированы на основе представления функции $q(\Theta)$ рядом Фурье. В этом случае получается численное решение в виде безразмер ных величин $h(\gamma, \Theta)$, с помощью которых искомые погон ные усилий выражаются следующим образом:

$$S' = q_0 R h'; \quad S'' = q_0 R h''; \quad S''' = q_0 R h'''. \qquad (5$$

Например, $S'_{\max\limits_{\gamma \leqslant 90^\circ}} = S'_{\gamma, \theta = 90^\circ} = 1{,}114 q_0 R$; $S'_{\min\limits_{\gamma \leqslant 90^\circ}} = -0{,}429 q_0 R$

На следующем этапе определяются усилия в сквоз ных элементах I, II регулярной решетки, составленн из равнобедренных треугольников с основанием a (I) боковыми сторонами b (II) (см. рис. 8, *е* и *ж*). При этом получаем:

для кольцевых элементов (поясов) —

$$T^{\mathrm{I}} = cS'' - a^2 S' / (4c); \qquad (54$$

для квазимеридиональных элементов (раскосов) —

$$T^{\mathrm{II}} = b\,[aS' / (2c) \pm S'''] \qquad (55$$

$$(56$$

Здесь: $c = \sqrt{b^2 - a^2/4}$.

В схеме по рис. 8, *ж* силы, действующие в ребрах на гра нице секторов, будут:

$$T^{\mathrm{II}} \approx \bar{c} S' - b^2 S'' / (4\bar{c}); \quad \bar{c} = 1/2\sqrt{a^2 + 2ab}. \qquad (57$$

Переход от усилий T к осевым силам N_{tz} в отдельны стержнях поясных сеток ($t = 1, 2, 4, 5$) и соединительны решеток ($t = 7, 8$) выполняется по формулам (48) и (49

Таким образом, имеются все данные для вычисления усилий в стержнях, площади поперечных сечений, количества и длин элементов, а значит и массы конструкции. Рассматривая цепочки зависимостей настоящего и двух предыдущих параграфов, можно уяснить связь целевой функции φ и ее частей с исследуемыми распределенными параметрами.

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ ЗАТРАТ

Введение континуальных моделей предполагает использование в первую очередь аналитических методов оптимизации. Но даже в самых простых задачах оптимального проектирования ПРП при малом количестве неизвестных и прочих благоприятных условиях получить решение в замкнутом виде не удается. Наряду с аналитическими необходимы и численные математические процедуры. Применение тех или иных из них обуславливается особенностями объекта исследования и соответствующей целевой функции $\varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим модель (10) применительно к стержневым плитам (см. рис. 8, *а...в*). Исходя из соотношений (2)...(8), запишем:

$$\varphi = HC + PV + e_n\,(C_м M + C_u U + C_b S_b + C_g S_g + \\ + C_l Sl + C_w Lh). \qquad (58)$$

Здесь большинство функций определяется непосредственно с помощью следующих формул: V, S — табл. 4; U — (18) и (19); S_b, S_g — табл. 5. Выражение для M устанавливается последовательно из (24), (25), (33′), (34′), (39)...(42) и табл. 5 и 6. Например, для схемы по рис. 8, *а*:

$$M = \gamma_1 a \sum_{z=1}^{z_1} \left(\frac{d_{1z}^0}{ab} + \frac{d_{1z}^1 + d_{1z}^3}{2a} \right) \left(\frac{M_{1z}' b}{hR_{1z}} + \frac{2}{3}\, \frac{q_{1z} a^2 \sqrt{bh}}{8\omega_{1z}' \sqrt{M_{1z}' R_{1z}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_{1z} a^2}{\rho_{1z}^2} \right) + \ldots + \gamma_6 b \sum_{z=1}^{z_6} \left(\frac{d_{6z}^0}{ab} - \frac{d_{6z}^1 + d_{6z}^3}{2a} \right) \left(\frac{M_{6z}'' a}{hR_{6z}} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_{6z} b^2}{\rho_{6z}^2} \right) + \gamma_7 l_7 \sum_{z=1}^{z_7} \frac{4 d_{7z}^0}{ab} \left(\frac{Q_{7z}' b + Q_{7z}'' a}{2hR_{7z}}\, l_7 + \frac{k_{7z}\, l_7^2}{\rho_{7z}^2} \right). \qquad (59)$$

(опущены члены для типов $t=2$ и 5, аналогичные $t=1$ и 6 соответственно).

Как можно заметить, для стержней верхней пояс сетки ($t=1$, 2) предусмотрена возможность внеузлов опирания кровельных конструкций, создающих изги щие моменты, как в разрезных балках:

$$q_{1z}a^2b/8; \quad q_{2z}b^2a/8.$$

Стержни нижнего пояса ($t=5$, 6), как правило, раст ты, но использование формулы (33) дает возможност счет исходных данных имитировать не только раст ние, но и подбор сечения по предельной гибкости. То можно отнести и к соединительной решетке, часть сте ней которой работает на сжатие, а часть — на раст ние. Для схем по рис. 8, *б*, *в* формулы конкретизирую аналогично (59).

Разделяя функции варьируемых параметров и по янные коэффициенты, представим (58) в виде:

$$\varphi = PSf_0 + (e_n + H)\left(C_M \sum_{i=1}^{16} k_i f_i + \sum_{i=17}^{21} c_i f_i + C_w L f_{22}\right).$$

Функции f_i ($i=0$, 1, 2, ..., 22) приведены в табл. 9. эффициенты k_i формируются при подобных членах (5 Например:

$$k_1 = \gamma_1 \sum_{z=1}^{z_1} \frac{d_{1z}^0 M_{1z}'}{R_{1z}} + \gamma_2 \sum_{z=1}^{z_2} \frac{d_{2z}^0 M_{2z}''}{R_{2z}} + \gamma_5 \sum_{z=1}^{z_5} \frac{d_{5z}^0 M_{5z}'}{R_{5z}} +$$

$$+ \gamma_6 \sum_{z=1}^{z_6} \frac{d_{6z}^0 M_{6z}''}{R_{6z}}. \quad (6$$

Таблица 9. **Функции f_i — компоненты выражения (61)**

Схема	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Рис. 8, *а*	h	$\frac{1}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{a^2}{bh}$	$\frac{b^2}{ah}$	$\frac{a^2}{b}$
Рис. 8, *б*	h	$\frac{1}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{a^2}{bh}$	$\frac{b^2}{ah}$	$\frac{a^2}{b}$
Рис. 8, *в*	h	$\frac{1}{h}$	$\frac{a}{h}$	—	$\frac{h}{a}$	—	$\frac{a^2}{h}$	—	a

Аналогично величины c_i:

$$c_{17} = 2AB(C_u + 2C_b + 2C_g); \quad c_{18} = AC_u; \quad c_{19} = BC_u; \ldots \quad (63)$$

Итак, получены алгебраические функции (61), непрерывные со своими производными на всей положительной полуоси. В общем случае доказать их выпуклость затруднительно, однако многочисленные примеры показывают унимодальный характер φ в интервале реальных значений параметров a, b, h. При устремлении любого из них к нулю или бесконечности целевая функция неограниченно возрастает, что также свидетельствует о существовании минимума.

При оптимизации сетчатых цилиндрических оболочек используется выражение φ, близкое к (58):

$$\varphi = HC + PV + e_n [C_м M + C_u U + C_b S_b + C_g S_g + (C_l b + C_r) S + C_w h (L + d)]. \quad (64)$$

Однако формулы для многих компонентов, особенно для M, значительно усложняются качественно (за счет трансцендентности) и вширь. Так, руководствуясь (24), (27), (33), (43)...(48) и табл. 8, установим значение фрагмента M, а именно массы стержней первого типа в системе, изображенной на рис. 8, *г*:

$$M = \gamma_1 A/n \sum_{z=1}^{z_1} 4 (\Delta e'_{1z} + \Delta f'_{1z} m + 1)(\Delta e''_{1z} + \Delta f_{1z} n) \times$$

$$\times \left\{ A^2 / \left(16n^2 \sin \frac{\alpha}{2m} \sin \frac{\alpha}{m} \right) \right| (e''_{1z} - 2 + f''_{1z} n)(2 - e''_{1z} +$$

$$+ (1 - f''_{1z}) n) \left[\cos (m - 1 - 2e'_{1z} - 2f'_{1z} m) \frac{\alpha}{2m} \left(q_0 + \right.\right.$$

i												
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a^2	b^2	$\frac{l^3}{ab}$	$\frac{a^2\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$	$\frac{b^2\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$	$a^2\sqrt{bh}$	$b^2\sqrt{ah}$	$\frac{1}{ab}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	1	$\sqrt{ab}$	h
a^2	b^2	$\frac{l^3}{ab}$	$\frac{a^2\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$	$\frac{b^3}{a}$	$a^2\sqrt{bh}$	b^3	$\frac{1}{ab}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	1	b	h
a^2	$\frac{l^3}{a}$	$\frac{l^3}{a^2}$	$a^{\frac{3}{2}}\sqrt{h}$	$a^{\frac{7}{2}}\sqrt{h}$	$a^{\frac{5}{2}}\sqrt{h}$	a^3	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	—	1	a	h

$$+\frac{q_1}{\sin\alpha/2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-(e'_{1z}+f'_{1z}m)\frac{\alpha}{m}\right)\Bigg)\Bigg(\sin\Bigg(\frac{\alpha}{2}-$$

$$-(e'_{1z}+f'_{1z}m-1)\frac{\alpha}{m}\Bigg)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-(e'_{1z}+f'_{1z}m+1)\frac{\alpha}{m}\right)\Bigg)-$$

$$-\cos(m+3-2e'_{1z}-2f'_{1z}m)\frac{\alpha}{2m}\Bigg(q_0+\frac{q_1}{\sin\alpha/2}\sin\Bigg(\frac{\alpha}{2}-$$

$$-(e'_{1z}+f'_{1z}m-1)\frac{\alpha}{m}\Bigg)\Bigg(\sin\Bigg(\frac{\alpha}{2}-(e'_{1z}+f'_{1z}m-2)\frac{\alpha}{m}\Bigg)-$$

$$-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-(e'_{1z}+f'_{1z}m)\frac{\alpha}{m}\right)\Bigg)\Bigg]+(e''_{1z}-1+f'_{1z}n)(1-e'_{1z}+$$

$$+(1-f''_{1z})n)\Bigg[\cos(m+5-2e'_{1z}-2f'_{1z}m)\frac{\alpha}{2m}\Bigg(q_0+$$

$$+\frac{q_1}{\sin\alpha/2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-(e'_{1z}+f'_{1z}m-2)\frac{\alpha}{m}\right)\Bigg)\Bigg(\sin\Bigg(\frac{\alpha}{2}-$$

$$-(e'_{1z}+f'_{1z}m-3)\frac{\alpha}{m}\Bigg)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-(e'_{1z}+f'_{1z}m-1)\frac{\alpha}{m}\right)\Bigg)-$$

$$-\cos(m+1-2e'_{1z}-2f'_{1z}m)\frac{\alpha}{2m}\Bigg(q_0+\frac{q_1}{\sin\alpha/2}\sin\Bigg(\frac{\alpha}{2}-$$

$$-(e'_{1z}+f'_{1z}m-1)\frac{\alpha}{m}\Bigg)\Bigg(\sin\Bigg(\frac{\alpha}{2}-(e'_{1z}+f'_{1z}m-2)\frac{\alpha}{m}\Bigg)-$$

$$-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-(e'_{1z}+f'_{1z}m)\frac{\alpha}{m}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg|\frac{1}{R_{1z}}+$$

$$+\frac{p_{1z}A^2\sin\alpha/(2m)}{4kn^2R_{1z}}+\frac{k_{1z}}{\rho_{1z}^2}\cdot\frac{A^2\mu^2}{n^2}\Bigg\}. \qquad (65)$$

Предпоследний член в фигурных скобах учитывает действие изгибающего момента аналогично (60), но в составном стержне, как указано в (48). Плечо h выражено с помощью (15) и (52), где R — радиус круговой направляющей цилиндрической оболочки. Коэффициент μ в последнем члене (65) задается в долях длины a (например, $\mu=1/2$, $1/3$, $1/4$ и т. д.) в зависимости от развязки стержня типа 1 из плоскости решетчатого элемента I. Остальные обозначения встречались ранее. Если продолжить выкладки для других типов стержней ($t=2...9$), то громоздкость аналитического представления модели (64) станет еще более очевидной.

Аналогичный подход справедлив и для оптимизации параметров сферических куполов. Приведенные затраты выражаются с помощью (64) при $C_w=0$. В качестве примера разберем формулы для подсчета массы кольцевых стержней верхней поясной сетки звездчатой системы в приопорной зоне, для чего поочередно применим зависимости (24), (27), (33′), (50)...(54):

$$M_1 = \gamma_1 \sum_{z=1}^{z_1} \tilde{a}_{1z} n (\Delta e'_{1z} + \Delta f'_{1z} m + 1) \Big\{ B / (2 \sin(\alpha/2)) \times$$

$$\times \max_{\theta} \Big| \left(1/2 \sqrt{b^2 - 0{,}25 \tilde{a}^2_{1z}} \right) (g [1/(1+\cos\gamma_{1z}) - \cos\gamma_{1z}] +$$

$$+ 1/RS''(p, \gamma_{1z}) + q_0 n''(\gamma_{1z}, \theta)) - \tilde{a}^2_{1z} / \left(8 \sqrt{b^2 - 0{,}25 \tilde{a}^2_{1z}} \right) \times$$

$$\times (-g/(1+\cos\gamma_{1z}) + 1/RS'(p, \alpha, \gamma_{1z}) + q_0 n'(\gamma_{1z}, \theta)) \pm$$

$$\pm 1/8 ((g + c_1(\alpha) \cos\gamma_{1z} p(\gamma_{1z})) \cos\gamma_{1z} + q_0 c_1(\theta)) \times$$

$$\times \tilde{a}^2_{1z} \sqrt{b^2 - 0{,}25 \tilde{a}^2_{1z}} / (kR^2) \Big| 1/R_{1z} + k_{1z} \tilde{a}^2_{1z} \mu^2_{1z} / \rho^2_{1z} \Big\}. \quad (66)$$

Величины $\tilde{a}_{1z}$ и m_{1z} находятся из звездчатой разбивки поверхности вращения с помощью алгоритма [25]. Для сферического купола с достаточной точностью можно принимать

$$\tilde{a}_{1z} = R (\sin\gamma'_z + \sin\gamma''_z) \sin(\pi/n); \quad (67)$$

$$m_z = 2 |\gamma'_z - \gamma''_z| / [\arcsin \sqrt{(b/R)^2 - (\sin\gamma'_z \sin(\pi/n))^2} +$$

$$+ \arcsin \sqrt{(b/R)^2 - (\sin\gamma'_z \sin(\pi/n))^2}], \quad (68)$$

где γ'_z, γ''_z — угловые координаты колец — границ зоны z, отсчитываемые, как на рис. 11, *а*; обозначения остальных величин даны ранее.

Таким образом, конкретизируется зависимость минимизируемых затрат от основных варьируемых параметров купола (α, n, b). Нетрудно заметить, что по сравнению с (65) формулы усложнились за счет алгоритмических включений.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРП

Стремясь создать конструкцию наилучшей, оптимальной, мы определяем совокупность средств и действий, необходимых для достижения поставленной цели. В на-

стоящее время сложилось научное направление (теория), называемое исследованием операций, занимающееся поиском путей для достижения заданной цели [26]*.

Одна из характерных особенностей применения исследования операций — системный подход. Группу взаимно влияющих элементов выбирают с учетом их значимости, сохраняя наиболее характерные, выявляя все те, которые сопровождают изучаемую проблему, и все взаимосвязанные задачи.

Основа успеха — построение адекватной математической модели проблемы. В литературе отмечается, что при этом возникают большие трудности, а сама модель может быть весьма сложной математической конструкцией. С одной стороны, модель должна как можно более точно описывать исследуемое явление, с другой — быть как можно более простой и допускать решение имеющимися средствами.

Существенная часть исследования операций — поиск и принятие решения. При выборе оптимального решения теория использует методы поиска оптимума и, в частности, методы математического программирования.

3.1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПРИ ОТСУТСТВИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ИЗМЕНЕНИЕ ОПТИМИЗИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ

В практике оптимального проектирования часто возникают задачи нахождения таких значений оптимизируемых параметров $x_1, \ldots, x_n$, которые минимизируют целевую функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Сокращенно можно записать

$$(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \arg\min \varphi(x_1, \ldots, x_n). \qquad (69)$$

Предположим, что функция, определенная в некоторой области изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$, является гладкой, а искомый минимум существует и достигается во внутренней точке этой области.

В точке минимума гладкой функции должны выполняться необходимые условия ее стационарности:

$$\partial\varphi/\partial x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (70)$$

Достаточное условие относительного минимума — положительная определенность матрицы вторых частных производных $\|a_{ij}\|$, вычисленных в стационарной точке

* Название «исследование операций» неточно отражает существо вопроса и сохранилось традиционно, некоторые авторы предлагают употреблять название «наука об управлении» или «анализ управляющих решений».

$$a_{ij} = \partial^2\varphi / (\partial x_i \partial x_j) \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n). \quad (71)$$

Таким образом, для поиска минимума можно поступить следующим образом. Из системы уравнений (70) найти все стационарные точки и для них проверить выполнение условия (71). Точки, для которых это условие выполняется, называются точками относительного минимума, поскольку в них значение функции φ меньше, чем в соседних точках. Среди точек относительного минимума необходимо найти те, в которых функция достигает наименьшего значения. Координаты этих точек и будут давать решение поставленной задачи.

Применение классического подхода к нахождению минимума достаточно гладкой функции многих переменных весьма ограничено, поскольку он предполагает решение системы в общем случае нелинейных уравнений. Поэтому чаще использовали приближенные методы. В зависимости от максимального порядка производных оптимизируемой функции, используемых в алгоритме, среди приближенных можно выделить методы: нулевого порядка, не использующие производных; первого порядка, использующие значения минимизируемой функции и ее первых частных производных; второго порядка, использующие значения функции, первых и вторых частных производных. Методы выше второго порядка применяются редко. Методы нулевого порядка в процессе итераций используют лишь значения минимизируемой функции и называются поисковыми, простейший из них — случайный поиск. Выбирая наугад точки исследуемой области и вычисляя в них значения функции, находят среди них точку, в которой значение функции минимально. Процесс прекращают, если достаточно много попыток улучшения решения, следующих подряд, не приводят к положительному результату. Недостатком метода является то, что он не использует информацию, полученную на предыдущих шагах поиска. Поэтому применяются модификации его, в которых координаты следующей исследуемой точки выбираются не полностью случайно, а с большей вероятностью соответствующие шагу в сторону предполагаемого минимума. Как правило, длина шага небольшая и поиск локальный. Для того чтобы с бóльшей вероятностью найти глобальный минимум, такого рода поиск начинают от нескольких случайных исходных точек. В случае многоэкстремальной задачи таким образом можно отыскать несколько локальных минимумов и выбрать лучший из них.

Методы случайного поиска трудоемки, однако они обладают рядом преимуществ: с их помощью можно решать многоэкстремальные задачи; для их применения не обязательна гладкость функции; функция может быть задана в виде алгоритма, ее значения можно получить в результате математического либо натурного эксперимента.

Кроме методов случайного поиска применяют методы, в которых координаты точек для вычисления значений функций выбирают по определенному правилу. Наиболее просто двигаться с постоянным шагом вдоль координатных линий. Можно вычислять значения функции в вершинах n-мерного куба. Поиск стараются организовать так, чтобы количество вычислений функции было минимальным. С этой целью используют метод правильных симплексов [27]. В начале поиска вычисляют функции в вершинах правильного симплекса, выбираемого произвольно. Каждый последующий шаг состоит в исключении из имеющегося симплекса вершины с максимальным значением функции и включением в него вершины, зеркально симметричной относительно противоположной грани симплекса. Алгоритм включает в себя мероприятия против зацикливания и по измельчению размеров симплекса в зоне минимума. Ускоренной сходимостью обладает метод, в котором, сообразно поведению минимизируемой функции, симплекс деформируется и изменяет свои размеры.

В методах первого порядка кроме значения функции надо вычислять ее первые частные производные. Информация, полученная при помощи первых производных, позволяет определить направление убывания функции и сделать поиск целенаправленным. Почти все методы первого порядка являются методами спуска, простейший из них координатный спуск. Движение происходит вдоль координатной линии и сопровождается уменьшением целевой функции. Различают методы с длинными и короткими шагами. В первых движение продолжается до тех пор, пока функция не перестает убывать. Затем выбирают следующую координату и по ней происходит движение до тех пор, пока функция уменьшается. Такая процедура повторяется многократно, пока не будет достигнута достаточная точность поиска минимума. В методах с короткими шагами длина шага выбирается заблаговременно и, начиная с исходной точки, выполняется перемещение вдоль координатной линии на длину одного шага с таким расчетом, чтобы минимизируемая функция

убывала. Обычно выбирают координату, вдоль которой функция убывает наиболее интенсивно. Новую точку в дальнейшем считают исходной, и вычисления продолжаются. Наконец наступит момент, когда следующий шаг сделать невозможно, поскольку функция во всех направлениях возрастает. В этом случае длину шага уменьшают (вдвое) и процесс повторяется до тех пор, пока длина шага не станет достаточно малой. Точность, достигнутая при этом, длиной шага не определяется. Истинная точка минимума даже в случаях одноэкстремальной функции может лежать далеко от достигнутой точки, если «овраги» целевой функции неудачно ориентированы относительно координатных осей. Существуют различные модификации методов координатного спуска.

Следующую группу составляют градиентные методы, в которых при выборе направления движения используется градиент минимизируемой функции с компонентами

$$a_i = \partial\varphi/\partial x_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{72}$$

Решая задачу минимизации, движение ведут в направлении, обратном градиенту. Если при этом корректировать траекторию движения непрерывно, то движение точки будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial x_i/\partial t + \partial\varphi/\partial x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{73}$$

где x_i — искомые функции параметра t, определяющие траекторию движения и стремящиеся к координатам точки минимума при $t \to \infty$. Методы, действующие в соответствии с изложенным, называются методами дифференциального спуска. Как правило, система (73) аналитическими методами не решается, что приводит к необходимости ее численного решения. При этом t наращивают небольшими шагами.

Находит применение и градиентный спуск с длинными шагами. В этом методе, исходя из произвольной точки, начинают движение по антиградиенту до тех пор, пока убывает функция. В достигнутой точке определяют новый антиградиент и движутся вдоль него до самой низкой точки. Процесс продолжается, пока длина шага не станет малой.

Методы, в которых движение происходит по градиенту, хороши, если поверхности уровня минимизируемой функции в окрестности минимума близки к гиперсферам. В том случае, когда они представляют собой вытянутые эллипсоиды, методы сходятся плохо, а отклонение от

точки минимума во много раз превосходит размер ш итерации. В этих условиях более эффективен метод пряженных градиентов.

Сопряженными по отношению к матрице A назы ются направления, удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned} (S_j)^{\top} AS_i &= 0, \text{ если } i \neq j; \\ (S_j)^{\top} AS_i &\geqslant 0, \text{ если } i = j. \end{aligned}\right\}$$

В методе сопряженных градиентов спуск начина по антиградиенту и движутся в выбранном направле до достижения минимума. Следующее направление бирают сопряженным к первому и также движутся минимума. Далее выбирают направления, сопряжен ко всем предыдущим до тех пор, пока число направле не достигнет n-мерности пространства. Для квадрат ной функции точное решение достигается за n шаг В случае произвольной функции процесс повторяют сколько раз, принимая в качестве исходной точку, по ченную на предыдущем этапе.

Матрица, используемая для сопряжения направле должна быть составлена из коэффициентов квадрат ной формы, аппроксимирующей целевую функцию. З коэффициенты все одновременно не нужны и по ме необходимости вычисляются в процессе решения чер значения целевой функции и ее производных.

Метод сопряженных градиентов — один из наибол эффективных методов первого порядка, поскольку он о ладает свойством квадратичного окончания. Сходимос таких методов в окрестности точки минимума весь высока. Существует много модификаций методов пер го порядка, использующих сопряженные направ ния [27].

Из методов второго порядка рассмотрим метод Ньютона. Минимизируемая функция в очередной k-й точ итерации аппроксимируется квадратичной функцией коэффициентами, выраженными через частные произво ные первого и второго порядка и значения исследуем функции:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(k)}(x_i - x_i^{(k)})(x_j - x_j^{(k)}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_{(k)}(x_i - x_j^{(k)}) + \varphi|_{(k)}. \quad (75$$

Если матрица с элементами $\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(k)}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ положительно определена, то функция (75) имеет минимум в точке с координатами x_i^1 $(i=1, \ldots, n)$, которые находятся путем решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(k)} (x_j^1 - x_j^{(k)}) + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_{(k)} = 0. \qquad (76)$$

Полученная точка принимается за исходную, и процесс продолжается. Метод обладает квадратичной сходимостью, однако радиус сходимости невелик. Поэтому метод следует применять на завершающей стадии процесса минимизации. За пределами радиуса сходимости метод может расходиться или же сходиться к стационарным точкам, отличным от точки минимума. Существуют приемы улучшения сходимости метода, основанные на искусственной корректировке матрицы системы уравнений (76). Ее корректируют так, чтобы матрица оказалась положительно определенной. Это обеспечивает, во-первых, разрешимость системы уравнений (76), во-вторых, то, что направление из точки k на вновь найденную точку соответствует убыванию целевой функции. Если следить за тем, чтобы в процессе приближений целевая функция все время убывала, то рано или поздно процесс придет в зону сходимости метода Ньютона, обладающего свойством квадратичного окончания. Однако один шаг его достаточно трудоемок, поскольку требует вычисления матрицы вторых частных производных и решения системы линейных алгебраических уравнений. Иногда пользуются модификацией метода Ньютона, предложенной Л. В. Канторовичем. Матрица вторых частных производных вычисляется не в каждой точке, а лишь в исходной, затем она используется на каждом шаге. Если исходная точка выбрана удачно, то метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой значительно меньше единицы.

Имеется ряд методов, являющихся симбиозом поисковых методов с градиентными или с методом Ньютона. Идея их заключается в том, что необходимые значения частных производных вычисляются через значения минимизируемой функции по разностной схеме.

Сравнивать методы безотносительно к решаемым задачам затруднительно. По-видимому, если минимизируе-

мая функция такова, что вычисление ее производных осложнено или невозможно и не требуется большой точности при вычислении положения точки минимума, предпочтение следует отдавать поисковым методам. Эти методы имеют преимущество также в случае многоэкстремальных задач. Методы градиентного типа хороши для функций без оврагов и при выборе начального приближения для методов второго порядка. На завершающем этапе методы градиентного спуска, как правило, медленно сходятся. В этом случае более удобен метод сопряженных градиентов. Методы второго порядка эффективны на конечных этапах минимизации. Если характер минимизируемой функции заранее не известен, задачу рекомендуется разбить на три части: выбор начального приближения, осуществляемый методом случайного поиска; быстрый спуск по градиенту до зоны медленного уменьшения функции; уточнение решения методами второго порядка.

3.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИЗМЕНЕНИЕ ОПТИМИЗИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ

Многие из задач оптимизации ПРП содержат в своих условиях ограничения на изменение оптимизируемых параметров. Самая простая и известная — задача на минимум с ограничениями-равенствами, которая заключается в отыскании координат $x_1^*, \ldots, x_n^*$ точки минимума функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ при дополнительных условиях, выражающих зависимость между переменными в виде уравнений

$$h_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m < n). \tag{77}$$

Эта задача может быть записана сокращенно:

$$(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \arg\min\{(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \mid h_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)\}. \tag{78}$$

Для решения этой задачи используются классические подходы. Первый из них заключается в том, что из уравнений (77) в общем виде выражаются m переменных через остальные $n-m$ переменных. Эти выражения подставляются в минимизируемую функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, после чего эта функция будет зависеть лишь от $n-m$ переменных и на нее не будут наложены никакие ограничения. Таким образом, приходим к задаче на безусловный экстремум для функции с уменьшенным числом пе-

ременных, рассмотренной в предыдущем разделе. Сложность описанного подхода заключается в трудности выразить m переменных из систем уравнений (77). Поскольку в задачах оптимального проектирования металлоконструкций ограничения нелинейны и выражаются достаточно сложными зависимостями, описанный классический подход практически неприменим, за исключением, быть может, простейших случаев.

Другой классический прием — метод множителей Лагранжа, прямое применение которого затруднено ввиду необходимости решения системы нелинейных уравнений. Однако, минимизируя сумму квадратов невязок этих уравнений, задачу приводим к отысканию безусловного минимума. При решении задач оптимизации ПРП метод может успешно применяться.

На практике часто пользуются методом штрафных функций, применяемым непосредственно к задаче (78). В соответствии с этим методом решают последовательность задач безусловной минимизации. Число переменных в каждой из них равно числу переменных исходной задачи. Сущность метода будет описана ниже.

Принципиально новый тип задач составляют задачи минимизации с ограничениями-неравенствами:

$$(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \arg\min\{\varphi(x_1, \ldots, x_n) \mid g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, k)\}. \tag{79}$$

Если область, определяемая неравенствами

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{80}$$

и называемая допустимой, имеет ту же размерность, что и все пространство, т. е., если она содержит внутренние точки, то возможно применение поисковых методов, как и в задачах безусловной оптимизации. Отличие состоит в том, что при выборе каждой следующей пробной точки проверяются условия ее допустимости, на что затрачивается дополнительное время. Характерная особенность задач с ограничениями-неравенствами заключается в том, что минимум функции находится, как правило, на границе области, причем в точке, лежащей на пересечении нескольких граничных гиперповерхностей. В этих условиях на завершающем этапе решения задачи большинство пробных точек будет попадать в недопустимую область, что очень снижает эффективность поиска.

С учетом этого обстоятельства разработан ряд методов, в которых пробные точки выбираются лежащими на

границе области или вблизи нее. Один из них, названный методом скользящего допуска [27], обобщает метод правильных симплексов, описанный в этой же работе. Серия из $n+1$ пробной точки образует симплекс, который в процессе поиска деформируется, сообразуясь с поведением функций. Если минимум лежит на границе области, симплекс строится так, что n точек лежит на границе, а одна — внутри области или за ее пределами. При переходе от одного симплекса к другому заменяется только одна вершина.

В процессе поиска симплекс перемещается, деформируется и уменьшается в размерах, приходя в точку условного минимума целевой функции.

В последнее время появились поисковые методы, в которых вместо случайного перебора используется детерминированное назначение пробных точек. В частности, в работах школы акад. И. И. Артоболевского пробные точки предлагается выбирать так, чтобы они были равномерно распределены внутри исследуемой области. Один из методов такого выбора точек внутри многомерного параллелепипеда предложен И. М. Соболем с целью создания эффективных квадратурных формул. Было установлено, что для поиска эффективных решений в данном случае требуется значительно меньшее количество точек. Как и метод случайного поиска, этот метод эффективен, если объем области с решениями, лучшими, чем достигнутое, составляет не слишком малую часть исходного параллелепипеда. В противном случае метод приводит к большому числу неудачных попыток.

В задачах оптимизации сечений элементов ПРП применимы так называемые методы лучевых проекций, основанные на том, что при пропорциональном изменении жесткостей всех элементов распределение усилий не меняется. При таком подходе удается уменьшить размерность задачи на единицу и получить наглядные и неплохо работающие алгоритмы решения задач нелинейного программирования специального вида.

Методы поискового типа дают достаточно грубое решение задачи условной минимизации. Применительно к оптимальному проектированию металлоконструкций они могут быть использованы для приближенного решения новых, практически неисследованных задач, для которых трудно предсказать область рациональных параметров. Если же на основании значительного опыта проектирования рациональные параметры известны и лишь требуется их уточнить, следует пользоваться «тонкими» методами.

Для задач, содержащих дискретные переменные, может быть применен полный или направленный перебор. Полный перебор вариантов при числе переменных более четырех-пяти вряд ли выполним из-за большого объема вычислений. В данном случае к успеху может привести направленный перебор.

Идея направленного перебора, предложенная Леном и Дойгом в 1960 г., была развита Литтлом и другими учеными в метод, известный под названием метода ветвей и границ. Возможны различные алгоритмические схемы его. В соответствии с одной из них на предварительном этапе расчетов при решении задачи на минимум функции цели вычисляются оценки сверху значений цели для всех вариантов, полученных при изменении только одного из параметров. Их можно назвать оценками на уровне этого параметра. Среди оценок выбирается минимальная, остальные запоминаются. От выбранной оценки начинается ветвление нового уровня, при котором параметр, изменяемый на предыдущем уровне, фиксируется (на величине, дающей оценку, от которой произошло ветвление) и меняется следующий параметр. Затем сравниваются оценки последнего уровня и запомненные оценки предыдущих уровней. Среди них выбирается минимальная и от нее продолжается ветвление, а остальные запоминаются и т. д. На последнем уровне получают вариант с минимальной оценкой. Для метода ветвей и границ необязательно вычисление точного значения целевой функции каждого варианта, достаточно знать только оценки. Однако, чем точнее вычисляются оценки, тем меньше вариантов рассматривается в процессе перебора, а с другой стороны, более точное вычисление оценки требует больших затрат времени. Поэтому при реализации метода добиваются возможно более эффективных оценок минимальными средствами.

При оптимальном проектировании ПРП требование дискретности искомых параметров может встречаться достаточно часто. Наиболее характерными примерами являются выбор элементов проектируемой конструкции по данному сортаменту, а также задачи оптимальной унификации и типизации конструкций. При практическом решении задач методом полного перебора рекомендуется максимально сужать область, в которой выполняется перебор. Применяя метод ветвей и границ, надо рационально упорядочивать искомые параметры и создавать наиболее эффективные оценки целевой функции для серий вариантов оптимизируемых конструкций.

Поисковые методы наряду с простотой реализующ их алгоритма обладают и другими преимуществами. С свободны от ошибок, которые могут накопиться во пр счета, с их помощью возможно получение глобальн минимума, они применимы для задач, в которых не можно или затруднено построение алгоритмических ражений производных от функций по искомым парам. Последнее свойство полезно при решении практ ских задач, в которых целевая функция и ограничен задаются в виде алгоритма.

Для решения задач, записываемых в форме (7 возможно применение точных и приближенных мето математического программирования. В этих методах щественное значение имеют необходимые условия тремума, или условия Куна-Таккера.

Эти условия для задачи в формулировке (79) зак чаются в существовании k множителей Лагранжа λ_1, λ_k, таких, что

$$\lambda_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, k),$$

$$\lambda_i g_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k),$$

$$\partial\varphi/\partial x_p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \partial g_i/\partial x_p = 0 \quad (p = 1, \ldots, n).$$

Если к этим условиям присовокупить ограничения исхо ной задачи

$$g_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{8}$$

то получится система уравнений и неравенств для опре деления совокупностей чисел $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Сред них найдется и такая совокупность, что $x_1, \ldots, x_n$ буду координатами минимума функции φ при ограничения (84), если этот минимум существует. Функции φ и g $\ldots, g_k$ должны быть дифференцируемыми.

Условия (83) являются необходимыми, но не доста точными условиями экстремума. Они выполняются не только для точек минимума, но и для других стационар ных точек. Для выпуклых задач, в которых функция φ — выпукла, а функции g_i $(i=1, \ldots, k)$ вогнуты, эти услови одновременно являются и достаточными условиями ми нимума.

Точные методы известны лишь применительно к част ным видам задач: линейным и квадратичным. Линейно задача оказывается в том случае, когда целевая функция и функции-ограничения линейны. Общая постановк задачи линейного программирования и способ ее реше-

ния посредством разрешающих множителей впервые даны Л. В. Канторовичем. В современной практике для решения задач линейного программирования применяется разработанный Данцигом симплекс-метод. Линейные ограничения выделяют в пространстве искомых параметров допустимую область, являющуюся многогранником с конечным числом вершин. Известно, что решение задачи линейного программирования, если оно существует, достигается в одной из вершин многогранника. Симплекс-метод предварительно определяет одну из вершин многогранника (опорное решение), а затем обеспечивает переход в соседнюю вершину с меньшим значением целевой функции. За конечное число шагов он приводит к решению или дает сведения о неограниченности снизу целевой функции в допустимой области. Существует много модификаций симплекс-метода.

Задачей квадратичного программирования принято называть задачу вида (79), если целевая функция — квадратична, а ограничения — линейны. В зависимости от выпуклости или невыпуклости целевой функции задачи делят на выпуклые и невыпуклые. Для решения выпуклых задач существует ряд конечных методов. Наиболее характерный из них — метод Била, в определенном смысле обобщающий симплекс-метод. В методе Била поиск начинается от исходной допустимой точки. Если в ней не удовлетворяются условия оптимальности, происходит движение вдоль одной из координат в направлении убывания целевой функции до тех пор, пока функция достигнет минимума либо будет достигнута граница области. Затем направление движения изменяется с привлечением достаточно сложного правила и шаг минимизации повторяется. В результате конечного числа аналогичных шагов алгоритм приводит к оптимальному решению.

Интересен также алгоритм Вулфа для решения задачи квадратичного программирования. В этом алгоритме используется с небольшими изменениями симплекс-метод. К ограничениям исходной задачи добавляются ограничения, соответствующие необходимым условиям минимума. Дальнейшее решение выполняется симплекс-методом при соблюдении некоторых дополнительных условий.

Для невыпуклых задач квадратичного программирования характерно наличие нескольких или многих локальных минимумов, что превращает задачу в комбинаторную. Эффективных методов решения таких задач нет. Путем совершенствования выпуклых методов, как

правило, удается разыскать один из локальных минимумов. Для нахождения глобального минимума эти методы непригодны.

Использование линейного и квадратичного программирования для решения задач оптимизации ПРП весьма ограничено. При математической формулировке задач оптимизации обойтись только линейными ограничениями практически никогда не удается. Линейные и квадратичные функции стоимости также редки, что сдерживает прямое применение методов линейного и квадратичного программирования. Однако, ввиду конечности, они могут быть эффективны как вспомогательные при построении приближенных методов.

Для решения задач математического программирования общего вида (79) применим ряд приближенных методов, один из них как обобщение методов спуска на задачи с ограничениями предложен Розеном. В этом методе спуск начинается из допустимой точки в направлении антиградиента функции и продолжается до тех пор, пока будет достигнут минимум целевой функции либо граница области. В первом случае — решение задачи получено, во втором — следует анализ, сколько из ограничений оказались в исследуемой точке активными, и определяется многообразие, являющееся пересечением активных ограничений. Градиент целевой функции проектируется на это многообразие, и движение продолжается внутри этого многообразия в направлении проекции антиградиента. Необходимо сделать остановку в случаях: а) когда будет достигнут минимум, т. е. когда градиент целевой функции будет ортогонален многообразию; б) когда изменится состав активных ограничений. В случае «а» — задача решена. В случае «б» определяется новый состав активных ограничений, новое многообразие, и процесс движения вдоль проекции градиента продолжается. Если целевая функция в допустимой области ограничена снизу, обязательно произойдет случай «а» и процесс минимизации завершится.

Метод проектируемых градиентов Розена эффективен в случае линейных ограничений, когда многообразия, по которых надо двигаться, линейны. При нелинейных ограничениях движения вдоль проекции антиградиента выводят из многообразия и требуются специальные меры для возвращения траектории движения в рассматриваемое многообразие. Это последнее обстоятельство, а также то, что методы градиентного спуска, к числу которых относится метод Розена, плохо работают в случае функций

овражного типа, делают этот метод недостаточно эффективным при решении задач оптимального проектирования металлоконструкций.

Большая группа практически применяемых методов последовательной безусловной минимизации [28] превращает задачу условной минимизации в последовательность задач безусловной минимизации. Такое превращение выполняют, базируясь на идее штрафных функций. В зависимости от видов штрафа различают методы внешней и внутренней точки. В первом случае целевую функцию модифицируют таким образом, что она сильно возрастает, если испытуемая точка переходит через границу допустимой области и движется в сторону все большего нарушения ограничений. Во втором случае назначают штраф за приближение к границе области с таким расчетом, чтобы при стремлении точки изнутри области к границе целевая функция стремилась бы к бесконечности. Далее рассматривают последовательность задач с модифицированной целевой функцией, но уже без ограничений. Последовательность строят так, чтобы решения модифицированных задач сходились к решению исходной задачи. Для возможности применения эффективных методов безусловной минимизации модифицированная функция должна быть гладкой.

Рассмотрим более подробно методы внешней точки. Наиболее употребительной в методах внешней точки является модифицированная целевая функция с квадратичной функцией штрафа, применительно к задаче (79) имеющая следующий вид:

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \sum_{i=1}^{k} [\min(0,\ g_i)]^2 / (2r). \qquad (85)$$

Ненарушенные ограничения, для которых $g_i \geqslant 0$, штрафа не увеличивают, и для допустимых точек модифицированная функция совпадает с исходной. Модифицированная функция — гладкая, однако в точках, лежащих на границе области, вторые частные производные терпят разрыв. Параметр $r > 0$ используется для образования последовательности задач безусловной оптимизации с функцией (85), причем при $r \to 0$ решение модифицированной задачи стремится к решению исходной задачи (79). Если решение исходной задачи находится на границе области, то решение модифицированной находится за ее пределами. Решения последовательности модифицированных задач стремятся к решению исходной

задачи извне области, что и обуславливает названи методов.

В методах внешней точки исходная точка может л жать как внутри, так и за пределами допустимой облас задачи (79), что является их неоспоримым преимуще вом; недостаток их — разрывность вторых частных пр изводных, что требует осторожности в применении м тодов второго порядка для решения задач безусловн минимизации.

В методах внутренней точки штраф берется за при ближение к границе области. Модифицированную функ цию можно строить различно. При одном из способов:

$$\tilde{\varphi} = \varphi + r^2 \sum_{i=1}^{k} 1/g_i, \qquad (86)$$

где $r > 0$.

Таким образом, модифицированная целевая функция $\tilde{\varphi}$ стремится к бесконечности, если испытуемая точка стр мится к границе области. При $r \to 0$ разница между $\tilde{\varphi}$ и уменьшается и решение модифицированной задачи стр мится к решению исходной.

Второй из способов модификации функции основ на логарифмическом штрафе и приводит к следующем выражению:

$$\tilde{\varphi} = \varphi - r \sum_{i=1}^{k} \ln g_i. \qquad (87)$$

Функция (87) обладает теми же свойствами, что (86).

Методы внутренней точки применимы к задачам т па (79), причем лишь к таким, допустимая область к торых содержит внутренние точки. В этом существенны недостаток методов. Он усиливается еще и тем, что пр цесс решения задачи надо начинать с допустимой точк задачи (79), что иногда также вызывает затруднени Однако существенное преимущество заключается в то что модифицированная целевая функция обладает т же степенью гладкости, что и исходная. Это позволя применять любые методы безусловной минимизации, том числе и эффективные второго порядка.

Методы последовательной безусловной оптимизаци не накладывают на задачи никаких требований, кро требований гладкости функций, и могут успешно прим няться при оптимальном проектировании ПРП.

Заслуживает особого внимания один из методов бе

условной последовательной оптимизации, известный под названием метода центров [28], пригодный для решения задач, записанных в форме (79). К ограничениям задачи

$$g_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{88}$$

добавляется еще одно

$$\varphi \leqslant \varphi_0, \tag{89}$$

где φ_0 — верхняя оценка значения целевой функции, и строится вспомогательная функция

$$P = (\varphi_0 - \varphi)\, g_1 g_2 \cdots g_k. \tag{90}$$

Эта функция внутри допустимой области, определяемой неравенствами (88) и (89), положительна, а на ее границе равна нулю, поскольку равен нулю хотя бы один сомножитель в произведении (90). Функция P гладкая и достигает максимума в одной из внутренних точек области. Положение точки максимума определяется методами безусловной оптимизации. В этой точке значение целевой функции

$$\varphi = \varphi_1 < \varphi_0. \tag{91}$$

Заменяя ограничение (89) на ограничение

$$\varphi \leqslant \varphi_1, \tag{92}$$

снова решаем задачу на безусловный максимум и добиваемся нового уменьшения значения целевой функции

$$\varphi = \varphi_2 < \varphi_1. \tag{93}$$

Повторяя описанную процедуру многократно, будем получать точки, все более близкие к точке максимума исходной задачи.

Идея этого метода была предложена Розенброком и позднее обоснована Хьюардом [28]. На первый взгляд этот метод отличен от методов штрафных функций, однако, прологарифмировав функцию P (90):

$$L = \ln P = \ln(\varphi_0 - \varphi) + \sum_{i=1}^{k} \ln g_i, \tag{94}$$

замечаем, что в выражении присутствует та же сумма логарифмов, что и в модифицированной функции (87), и что функция L стремится к бесконечности при приближении испытуемой точки к границе области.

Метод центров имеет одну весьма полезную особенность. В нем существенным образом используются ограничения (88) и (89), определяющие область допустимых решений, близких к оптимальному. Это дает возмож-

ность воспользоваться подобными результатами метода и не доводить в ряде случаев решение задачи до конца. Метод применим при оптимальном проектировании ПРП и заслуживает дальнейшего совершенствования.

3.3. ОСНОВЫ МЕТОДА РАВНОМЕРНЫХ ЗАПАСОВ

Рассмотрим задачу типа (79), изменив обозначения для компактности записи последующих формул,

$$(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \arg\min\{\varphi_0(x_1, \ldots, x_n) \mid R_j - \varphi_j(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m)\}. \tag{95}$$

Причем будем пользоваться также обозначениями

$$f_j(x_1, \ldots, x_m) = R_j - \varphi_j(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0 \ (j = 1, \ldots, m), \tag{96}$$

где $x_1, \ldots, x_m$ — оптимизируемые параметры; $x_1^*, \ldots, x_m^*$ — их оптимальные значения; $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ — целевая функция; $R_1, \ldots, R_m$ — заданные константы; $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ — заданные функции.

Предполагается, что целевая функция φ_0 и функции-ограничения гладкие, а допустимая область задачи содержит внутренние точки. Будем считать, что функции $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ — выпуклы, хотя, в большинстве случаев, результаты, полученные ниже, будут справедливы в зонах локальных оптимумов и для невыпуклых функций.

Введем в рассмотрение еще одно неравенство

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \tag{97}$$

где $f_0(x_1, \ldots, x_n) = R_0 - \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$, причем константа R_0 выбрана с таким расчетом, чтобы она превосходила минимальное значение целевой функции в допустимой области φ_0^*:

$$R_0 > \varphi_0^* = \varphi_0(x_1^*, \ldots, x_n^*). \tag{98}$$

Присоединение неравенства (97) не влияет на решение задачи. Область Ω, определяемая неравенствами (96) и (97), остается выпуклой в силу выпуклости φ_0 и содержит внутренние точки, так как неравенство (98) — строгое.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$P = f_0 f_1 \cdots f_m. \tag{99}$$

Эта функция гладкая (как произведение гладких функций) и принимает положительные значения во всех внутренних точках области Ω, а на ее границе обращается в нуль, поскольку хотя бы одна из функций f_j ($j=0$,

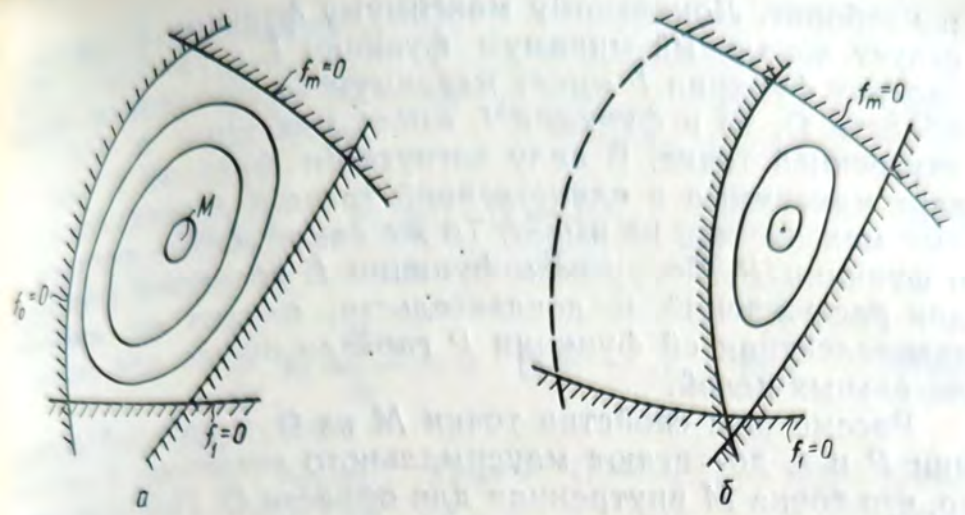


Рис. 12. Область Ω и линии уровня функции P:
а — в исходном состоянии; б — в процессе решения.

1, ..., m) на границе равна нулю. Следовательно, гладкая функция P достигает своего максимального значения во внутренней точке области Ω (рис. 12, а).

Покажем, что функция P внутри Ω имеет один локальный максимум, совпадающий с глобальным, и что этот максимум достигается в единственной точке. Для этого прологарифмируем равенство (99)

$$L = \ln P = \sum_{j=1}^{m} \ln f_j. \tag{100}$$

Вновь полученная функция L определена и вогнута внутри области Ω. В этом можно убедиться, вычислив вторые частные производные функции L

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{f_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k} -$$

$$- \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{f_j^2} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \quad (i,\ k = 1, \ldots, n) \tag{101}$$

и проанализировав матрицу, составленную из вторых частных производных, на отрицательную определенность [29].

Ввиду того что логарифмическая и обратная ей показательная функция монотонно возрастающие, внутри множества соблюдается следующее. Большим значениям функции P соответствуют большие значения функции L

и наоборот. Локальному максимуму функции P соответствует локальный минимум функции L и наоборот. Поскольку функция P имеет максимум во внутренней точке области Ω, то и функция L имеет максимум в той же внутренней точке. В силу вогнутости функция L достигает максимума в единственной точке и других локальных максимумов не имеет. То же самое можно сказать и о функции P. Вогнутость функции L делает ее удобной для рассуждений и доказательств, однако во многом эквивалентная ей функция P гораздо проще для вычислительных целей.

Рассмотрим свойства точки M из Ω, в которой функции P и L достигают максимального значения. Главное то, что точка M внутренняя для области Ω. Поэтому значение целевой функции, вычисленное в этой точке, будет меньше значения R_0 в силу строгого выполнения неравенства (97). На этом свойстве базируется метод центров [28], в соответствии с которым вначале находятся координаты безусловного максимума функции P (центр области). Затем вычисляется в этой точке значение функции φ_0 и ограничение (97) заменяется новым с $R_0 = \varphi_0(M)$ (см. рис. 12, *б*). Эти операции повторяются многократно до тех пор, пока уменьшение φ_0 за одну итерацию не станет пренебрежимо малым. Процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии, однако при большом числе активных ограничений знаменатель этой прогрессии близок к единице и фактическая скорость сходимости очень небольшая.

Продолжим изучение свойств точки M с целью рационализации итерационного процесса. Поскольку точка M — точка безусловного максимума функции L, в ней должны выполняться условия стационарности

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{102}$$

при этом

$$f_j > 0 \quad (j = 0, \ldots, m). \tag{103}$$

Дальнейшие свойства точки M связаны с задачей, двойственной по отношению к (95), и с соответствующей обобщенной задачей Лагранжа.

Двойственная задача

$$\text{Максимизировать} \quad R_0 - \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j \tag{104}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n); \tag{105}$$

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{106}$$

Обобщенная задача Лагранжа

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n); \tag{107}$$

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_j \geqslant 0; \quad f_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m); \tag{108}$$

$$\lambda_j f_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{109}$$

Если в точке M вычислить значения f_j $(j=0, \ldots, m)$ и положить значения переменных двойственной задачи

$$\lambda_j = f_0/f_j \quad (j = 0, \ldots, m), \tag{110}$$

то можно заметить, что набор переменных $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ удовлетворяет:

ограничениям прямой задачи и двойственной [ограничениям (105) — в силу (102), а ограничениям (106) — в силу 103)];

уравнениям и неравенствам обобщенной задачи Лагранжа, за исключением условий дополняющей нежесткости (109). Невязка каждого из условий дополняющей нежесткости равна f_0.

Зная координаты точки M, легко получить двустороннюю оценку экстремального значения целевой функции φ^*, которое лежит между значениями целевой функции прямой и двойственной задач, вычисленными для произвольных допустимых точек. Основываясь на приведенных выше свойствах точки M и используя формулы (97), (104), (110), приходим к неравенствам

$$\varphi_0 - m f_0 \leqslant \varphi_0^* \leqslant \varphi_0. \tag{111}$$

Здесь m — число ограничений задачи. Функции φ_0 и f_0 вычислены в точке M.

Поскольку в приведенных выше рассуждениях по отношению к R_0 требовалось лишь выполнение неравенства $R_0 > \varphi_0^*$, все соотношения выполняются для любого значения R_0, удовлетворяющего этому неравенству.

Рассмотрим, как изменяются координаты точки M в зависимости от изменения значения параметра R_0. Пусть при некотором значении параметра R_0 координаты

точки M были равны x_i $(i=1, ..., n)$. Тогда при значении параметра R_0+dR_0 эти координаты можно представить в виде:

$$x_i + \frac{dx_i}{dR_0} dR_0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Систему уравнений для определения значений dx_i/dR_0 можно получить дифференцированием равенств (102), которые удовлетворяются в точке M, соответствующих произвольным значениям R_0. При дифференцировании надо учитывать, что функция f_0 зависит от параметра R_0 не только через координаты точек, но и непосредственно. Эта система такова:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dR_0} = \frac{1}{f_0^2} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \quad (112)$$

Соотношения (112) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения координат x_i $(i=1, ..., n)$ точки M при различных значениях R_0. Интегральная кривая этой системы, проходящая через точку M, соответствующую некоторому значению R_0, содержит и остальные точки максимума, соответствующие другим значениям R_0. Эта кривая единственная, поскольку каждому значению R_0 соответствует единственная точка M.

Таким образом, возможен следующий путь решения задачи (95).

1. Назначается оценочное значение целевой функции R_0.

2. Разыскивается точка M безусловного экстремума функции (99) или (100), для чего пригодны, например, методы спуска или метод Ньютона.

3. Численными методами типа метода Эйлера или Рунге-Кутта выполняется построение интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (112) для постепенно уменьшающихся значений параметра R_0. Процесс интегрирования заканчивается, когда будет достигнута заданная точность ε вычисления целевой функции. Как следует из формулы (111), это требование выполняется при

$$f_0 \leqslant \varepsilon/m. \quad (113)$$

В процессе интегрирования это неравенство непременно выполнится. На основании очевидного неравенства $\varphi^* \leqslant \varphi \leqslant R_0$ можно заключить, что $f_0 \leqslant R_0 - \varphi^*$. Таким об-

разом, уменьшая R_0, можно сделать f_0 сколь угодно малым.

Координаты последней точки интегральной кривой приближенно представляют собой решение задачи, а значение φ_0 в этой точке — экстремальное значение целевой функции.

На первый взгляд может показаться, что в процессе решения задачи возможно «заедание», т. е. вдали от точки решения задачи f_0 может неограниченно уменьшаться, препятствуя продолжению процесса. Неравенство (111), однако, показывает, что с уменьшением f_0 вилка, в которой находится оптимальное значение целевой функции, сужается и приближение f_0 к нулю свидетельствует о том, что значение φ_0, вычисленное в точке M, приближается к φ^*.

Система дифференциальных уравнений, записанная в виде (112), характерна тем, что приближение к решению ($f_0 \to 0$) приводит к неограниченному увеличению абсолютных значений коэффициентов этой системы. При численной реализации решения системы следует умножить левую и правую ее части на f_0^2 и избавиться таким образом от этого.

В этом случае, когда решение задачи достигается при обращении в равенство менее n ограничений, обусловленность системы (112) вблизи точки решения ухудшается. Поэтому при решении таких задач не рекомендуется назначать неоправданно высокую точность ε. Опыт численной реализации метода при решении ряда задач минимизации массы строительных конструкций показывает, что ухудшение обусловленности не является препятствием к получению решения с инженерной точностью. Если все же требуется достичь высокой точности, рекомендуется на конечном этапе решения задачи перейти к новой системе координат, включив в состав координатных векторов градиенты активных функций-ограничений, вычисленные для точки, находящейся вблизи решения. Можно использовать и другие приемы улучшения обусловленности. На завершающем этапе решения задачи экстраполяционные формулы позволяют предсказывать минимальное значение целевой функции, оптимальные значения параметров проектирования, множество активных ограничений.

В первую очередь необходимо определить конечное значение K_0. Воспользуемся тем, что конечная точка интегральной кривой соответствует области Ω, стянувшейся в точку. При этом $f_0=0$. На любом этапе решения

$$\frac{df_0}{dR_0} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dR_0}, \tag{114}$$

и, следовательно,

$$f_0^* \approx f_0 + \frac{df_0}{dR_0} \cdot \Delta R_0 = 0. \tag{115}$$

Откуда

$$\Delta R_0 = -f_0 / \frac{df_0}{dR_0}. \tag{116}$$

Здесь через ΔR_0 обозначено приращение параметра R_0 при переходе его от текущего значения к конечному. Частные производные $\partial f_0/\partial x_i$ $(i=1, ..., n)$ вычисляются в точке M, $\frac{dx_i}{dR_0}$ $(i=1, ..., n)$ — из системы уравнений (112).

Таким образом,

$$\varphi_0^* = R_0^* \approx R_0 + \Delta R_0; \tag{117}$$

$$x_i^* \approx x_i + \frac{dx_i}{dR_0} \Delta R_0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{118}$$

При активных ограничениях, как и для f_0, должно соблюдаться соотношение

$$f_j^* \approx f_j + \frac{df_j}{dR_0} \Delta R_0 = 0, \tag{119}$$

из которого с учетом (116) следует:

$$\frac{f_0}{f_j} \cdot \frac{df_j}{dR_0} \Big/ \frac{df_0}{dR_0} \approx 1. \tag{120}$$

Выполнение условия (120) на завершающем этапе решения задачи — признак того, что ограничение с номером j активно. Для неактивных ограничений левая часть соотношения (120) стремится к нулю, ввиду того, что f_0 становится бесконечно малым, а f_j — конечным. Производные функции f_j можно определить по формуле

$$\frac{df_j}{dR_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dR_0} \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{121}$$

Таким образом, левые части соотношений (120) для различных j группируются в районе нуля — значения для неактивных ограничений и в районе единицы — для активных.

Рассмотрим вопрос о предсказании числа активных ограничений в процессе решения задачи. Как следует из сказанного выше, такую оценку можно сделать по формуле:

$$k \approx \sum_{j=1}^{m} \frac{f_0}{f_j} \cdot \frac{df_j}{dR_0} \Big/ \frac{df_0}{dR_0}. \qquad (122)$$

Эту формулу можно упростить, если учесть, что в центре области M соблюдаются условия (102), а также зависимости (114) и (121). После несложных преобразований

$$k \approx \left(\frac{df_0}{dR_0} \right)^{-1} - 1 \qquad (123)$$

или, переходя к ΔR_0 в соответствии с формулой (116):

$$k \approx -(\Delta R_0 / f_0 + 1). \qquad (124)$$

Основа физического смысла метода — центральное решение, соответствующее точке M, расположенной по возможности далеко от границ допустимой области. Поскольку в задачах оптимального проектирования ПРП в качестве ограничений выступают преимущественно условия прочности, устойчивости, деформативности, то уклонения f_j от ограничений внутрь области естественно трактовать как запасы. Кроме этих ограничений метод вводит в задачу дополнительное ограничение (97) экономического характера, уклонение f_0 от которого можно трактовать как экономический эффект по отношению к допустимому уровню расходов R_0 на конструкцию. Решение, соответствующее точке M, характеризуется сбалансированными или равномерными запасами в том смысле, что произведение их с учетом экономического эффекта f_0 максимально. Точку M будем называть иногда точкой равномерных запасов.

В процессе решения последовательно уменьшается допустимый уровень расходов R_0, что вынуждает переходить к новым решениям с уменьшенным уровнем запасов. Процесс продолжается до тех пор, пока нельзя будет получить экономический эффект, не нарушая ограничений. Метод работает подобно осторожному проектировщику, стремящемуся к получению экономии и одновременно желающему оставить в конструкции некоторые запасы.

3.4. МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ, БЛИЗКИХ К ОПТИМАЛЬНОМУ, И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ПРП

Во многих случаях затруднительно сформулировать единый критерий, единую цель, к которой надо стремиться, выбирая параметры конструктивного решения. Проектировщик ставит ряд целей, однако, применяя формальные приемы решения задачи, получить удовлетворительный ответ, как правило, не удается. Так, если расположить критерии в порядке их значимости, первый из них почти всегда препятствует учету остальных. Тем не менее понятно, что незначительное ухудшение основного критерия вполне допустимо, если за счет этого можно улучшить качественные показатели принятого решения по другим критериям. Часто речь идет о столь незначительных отклонениях от основных целей, что они находятся за пределами точности не только расчета, но и исходных данных. Бывают случаи, что одному из решений машина отдает предпочтение лишь потому, что оно оказалось более дешевым на долю копейки.

Таким образом, оптимальному решению, полученному машиной, слепо доверять не следует. Какой бы совершенной ни была целевая функция, она лишь приближенно характеризует качество того или иного решения и чрезмерная точность при ее минимизации не нужна. Необходимо среди решений, близких к оптимальному, выбрать лучшее по другим, часто не формализуемым признакам.

Для оптимального проектирования металлических ПРП характерные целевые функции (масса металла, стоимость в деле, приведенная стоимость и т. д.) — приближенные не только потому, что они не учитывают отдельных факторов, но и потому, что на стадии проектирования принципиально невозможно учесть множество случайных факторов, влияющих на действительную стоимость конструкции. Более того, две одинаковые конструкции, изготовленные на разных заводах и даже на одном и том же, но в разное время, различаются по стоимости. Это подтверждает ту мысль, что значение целевой функции, характеризующее то или иное решение, надо рассматривать лишь как оценку его эффективности, а решения с незначительно отличающимися значениями целевой функции — как фактически равноценные. Диапазон значений целевой функции, в котором решения можно считать равноценными, зависит от качества самой

функции. Например, при сравнении конструкций по массе этот диапазон может быть выбран более широким, чем при сравнении их по стоимости. Принято считать, что можно допустить 5 %-ное утяжеление конструкции в пользу значительного увеличения ее серийности, а конструкции, отличающиеся по массе или по стоимости не более, чем на 2 %,— практически неразличимы с позиций рассматриваемой целевой функции [30].

Если известно множество решений с близкими значениями целевой функции, то выбор решения для практического использования должен выполнять специалист, руководствуясь требованиями унификации, типизации, конструктивными, конъюнктурными, эстетическими и др.

Опыт оптимального проектирования ПРП показывает, что специалисты, ответственные за принятие решений, редко выбирают для внедрения оптимальное решение, полученное машиной, руководствуясь требованиями унификации, поскольку одновременно проектируется не отдельный конструктивный элемент, а их серия. При таком подходе специалиста интересует набор решений, близких к оптимальному, для возможности выбора, но такие данные программами оптимального проектирования обычно не выдаются. Особенно остро этот вопрос стоит при автоматизации типового проектирования, тем более, что существующие математические методы оптимальной унификации в данном случае неприменимы.

Существует мнение, что в районе оптимума даже значительные изменения искомых параметров незначительно сказываются на показателе эффективности конструкций. Это верно, если оптимум достигается вдали от ограничений. Если же ограничения, наложенные на параметры оптимальной конструкции, активные, то число параметров, слабо влияющих на целевую функцию, уменьшается. А в случае, если активными становятся столько ограничений, сколько есть искомых параметров, то отклонение каждого из параметров от оптимального значения вызывает существенные изменения целевой функции.

Для того чтобы получить количественную характеристику неоптимального решения, удобно использовать функцию потерь. Функцией абсолютных потерь называется величина, зависящая от принятого решения, и выражаемая формулой

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_0(x_1^*, \ldots, x_n^*), \quad (125)$$

где φ_0 — целевая функция; $x_1, \ldots, x_n$ — параметры, опре-

деляющие принятое решение; $x_1^*, \ldots, x_n^*$ — оптимальные параметры. Функция абсолютных потерь выражается в единицах той же размерности, что и целевая функция.

Функцией относительных потерь называется безразмерная величина

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\varphi_0(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_0(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\varphi_0(x_1^*, \ldots, x_n^*)}. \quad (126)$$

Функция относительных потерь часто выражается в процентах и дает наглядное представление о близости рассматриваемого решения к оптимальному. Множество решений, близких к оптимальному, может быть полезным и как промежуточный результат при автоматизированном проектировании. Можно, например, сформулировать упрощенную задачу и в условиях принятых упрощений получить множество почти оптимальных конструкций. Затем, поставив задачу более строго, осуществлять поиск уже не по всей области, а лишь в полученном достаточно узком множестве. Это особенно полезно, если применяется метод перебора или близкие к нему методы. На практике такая необходимость возникает достаточно часто, поскольку в силу дискретности сортаментов и требований модульности искомые параметры могут принимать лишь дискретные значения. Для методов перебора важно, чтобы область пространства искомых параметров, в которой выполняется перебор, была по возможности простой. Легче всего перебирать точки, лежащие внутри параллелепипеда, ориентированного по координатным осям, несложно выполняется перебор внутри эллипсоида. Сложнее обстоит дело, если область является многогранником произвольного вида.

Если множество дискретных решений оказывается слишком большим, можно сузить область поиска или загрубить дискретную сетку для параметров задачи.

При разработке типовых проектов задача о нахождении почти оптимальных конструкций решается многократно при различных данных о нагрузке. Множества решений, полученных в каждом случае, пересекаются, и такое положение желательно, поскольку позволяет унифицировать решения без снижения экономических показателей серии конструкций.

Таким образом, для практических целей актуальны методы автоматизированного проектирования, позволяющие получать не единственное оптимальное решение, а множество решений, близких к оптимальному.

Задачи дискретного программирования, в которых оптимизируемые параметры $x_1, \ldots, x_n$ могут принимать лишь дискретные значения, характерны для оптимизации ПРП. Строгое решение таких задач сопряжено с большими трудностями. Поэтому задачу решают в два этапа. На первом игнорируют требование дискретности, задачу формулируют в виде (95) и находят ее оптимальное решение. Затем выбирают одну из ближайших к нему дискретных точек и принимают ее в качестве решения задачи дискретного программирования.

Подход с позиций решений, близких к оптимальному, позволяет более обоснованно выбирать дискретные решения и, кроме того, учитывать при этом факторы, не присутствующие в условии задачи (95).

Область решений Ω, близких к оптимальному, для задачи (95) определим как множество точек в пространстве оптимизируемых параметров, удовлетворяющих ограничениям

$$f_j \geqslant 0 \quad (j = 0, \ldots, m). \tag{127}$$

Значение R_0 в ограничении с номером 0 означает максимально допустимое значение целевой функции для рассматриваемого множества решений. Предполагается, что это значение близко к $\varphi_0(x_1^*, \ldots, x_n^*)$, причем

$$f_0(x_1^*, \ldots, x_n^*) = R_0 - \varphi_0(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \Delta_0. \tag{128}$$

Точки с дискретными значениями параметров надо выбирать из этой области. Оценку числа точек, попавших в область Ω, можно сделать, зная объем области

$$V = \int \cdots \int_{\Omega} dx \cdots dx_n. \tag{129}$$

Тогда оценка

$$N = V / (\Delta x_1 \cdots \Delta x_n), \tag{130}$$

где Δx_i $(i=1, \ldots, n)$ — шаг изменения параметра x_i.

Ввиду того, что область Ω предполагается малой и лежащей в окрестности оптимального решения, будем считать, что она определяется лишь поверхностью $f_0=0$ и активными ограничениями. Поскольку нумерация ограничений произвольна, не снижая общности, будем полагать, что активными оказались ограничения с номерами $1, \ldots, k$, так что область допустимых решений, близких к оптимальному, определяется системой неравенств:

$$f_i = R_i - \varphi_i \geqslant 0 \quad (i = 0, \ldots, k). \tag{131}$$

Введем в рассмотрение множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ перейдем к новой системе координат $\xi_1, \ldots, \xi_n, u_1, \ldots, u_k$, воспользовавшись зависимостями:

$$\xi_i = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n; \ \lambda_0 = 1); \tag{132}$$

$$u_p = f_p \quad (p = 1, \ldots, k). \tag{133}$$

Заметим, что начало новой системы координат находится в точке минимума $x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$, поскольку при нулевых значениях ξ и u зависимости (132) и (133) превращаются в условия минимума функции φ_0 при ограничениях

$$f_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{134}$$

В новой системе координат ограничения

$$f_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{135}$$

превращаются в условия неотрицательности координат:

$$u_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{136}$$

Дифференциалы новой и старой систем координат связаны $n+k$ линейными зависимостями, получающимися при дифференцировании равенств (132) и (133):

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & dx_1 \ldots dx_r \ldots dx_n & d\lambda_1 \ldots d\lambda_j \ldots d\lambda_k \\
\hline
\begin{array}{c} d\xi_1 = \\ \ldots \\ d\xi_i = \\ \ldots \\ d\xi_n = \end{array} & \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_r} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \\
\hline
\begin{array}{c} du_1 = \\ \ldots \\ du_p = \\ \ldots \\ du_k = \end{array} & -\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_r} & 0 \\
\hline
\end{array} \tag{137}$$

Обращая эти зависимости, получаем:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & d\xi_1 \ldots d\xi_r \ldots d\xi_n & du_1 \ldots du_q \ldots du_k \\
\hline
\begin{array}{c} dx_1 = \\ \ldots \\ dx_r = \\ \ldots \\ dx_n = \end{array} & \frac{\partial x_r}{\partial \xi_l} & \frac{\partial x_r}{\partial u_q} \\
\hline
\begin{array}{c} d\lambda_1 = \\ \ldots \\ d\lambda_j = \\ \ldots \\ d\lambda_k = \end{array} & \frac{\partial \lambda_j}{\partial \xi_l} & \frac{\partial \lambda_j}{\partial u_q} \\
\hline
\end{array} \tag{138}$$

Приближая функцию f_0 рядом Тэйлора, получаем выражение для ограничения $f_0 \geqslant 0$ в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* u_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial \xi_i} \xi_i \xi_r \leqslant \Delta_0, \qquad (139)$$

где Δ_0 определяется формулой (128), а $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ — значения множителей Лагранжа для точки оптимума задачи (95).

Как следует из формулы (139), элементами матрицы квадратичной формы, определяющей ограничения, служат частные производные

$$\partial x_r / \partial \xi_i \quad (r,\ i = 1, \ldots, n), \qquad (140)$$

находящиеся в верхней левой клетке матрицы (138). Эта матрица обратна (137) и ранг интересующей нас клетки равен $n-k$. Это позволяет представить ее в виде:

$$\frac{\partial x_r}{\partial \xi_i} = \sum_{l=1}^{n-k} v_{lr} v_{li} \quad (r,\ i = 1, \ldots, n). \qquad (141)$$

Элементы v_{lr} можно получить, например, выполняя над матрицей $\left[\frac{\partial x_r}{\partial \xi_i}\right]$ $n-k$ шагов прямого хода по методу квадратного корня так, как это делается при разложении квадратной матрицы в произведение двух треугольных.

Тогда неравенство (139) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* u_j + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-k} \eta_l^2 \leqslant \Delta_0, \qquad (142)$$

где

$$\eta_l = \sum_{i=1}^{n} v_{li} \xi_i \quad (l = 1, \ldots, n-k). \qquad (143)$$

Будем считать, что $u_1, \ldots, u_k, \eta_1, \ldots, \eta_{n-k}$ — новые координаты в количестве n штук, к которым мы перешли от координат $x_1, \ldots, x_n$.

$$\frac{\partial u_p}{\partial x_r} = -\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_r} \quad (p = 1, \ldots, k;\ r = 1, \ldots, n); \qquad (144)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r} = \sum_{i=1}^{r} v_{li} \sum_{j=0}^{r} \lambda_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_r \partial x_i}$$

$$(l = 1, \ldots, n-k;\ r = 1, \ldots, n). \qquad (145)$$

Таким образом, связь между дифференциалами обеих систем координат может быть выражена следующим образом:

$$
\begin{array}{r|c|}
 & dx_1 \ldots dx_r \ldots dx_n \\
\hline
du_1 = & \\
\ldots & \\
du_p = & -\dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_r} \\
\ldots & \\
du_k = & \\
\hline
d\eta_1 = & \\
\ldots & \\
d\eta_l = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_{li} \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_r \partial x_l} \\
\ldots & \\
d\eta_{n-k} = & \\
\hline
\end{array}
\qquad (146)
$$

Объем области допустимых решений, близких к оптимальному, в новых координатах может быть выражен интегралом

$$V = \int\limits_{u_1, \ldots, u_k \geqslant 0;} \ldots \int du_1 \ldots du_k d\eta_1 \ldots d\eta_{n-k} / |D|, \qquad (147)$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* u_j + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-k} \eta_l^2 \leqslant \Delta_0,$$

где $|D|$ — абсолютная величина детерминанта матрицы (146).

Принимая приближенно, что детерминант D постоянен в окрестности оптимума и переходя к безразмерным координатам

$$y_j = \frac{\lambda_j^* u_j}{\Delta_0} \; (j = 1, \ldots, k); \; z_l = \eta_l \sqrt{1/(2\Delta_0)} \; (l = 1, \ldots, n-k), \qquad (148)$$

получим следующее представление формулы (147)

$$V = \frac{\Delta_0^k (2\Delta_0)^{(n-k)/2} I}{|D| \lambda_1^* \ldots \lambda_k^*}, \qquad (149)$$

где $$I = \int\limits_{y_1, \ldots, y_k \geqslant 0,} \ldots \int dy_1 \ldots dy_k dz_1 \ldots dz_{n-k}. \qquad (150)$$

$$y_1 + \ldots + y_k + z_1^2 + \ldots + z_{n-k}^2 \leqslant 1.$$

Интеграл I не зависит от решаемой задачи и может быть вычислен заблаговременно. Он является функцией числа оптимизируемых параметров n и числа активных ограничений k и выражается формулой:

$$I = \pi^{\alpha} / (k + \alpha)!, \qquad (151)$$

$$\alpha = (n-k)/2. \tag{152}$$

где

Таким образом, формула (149) для объема области допустимых решений, близких к оптимальному, принимает вид:

$$V = \frac{(2\pi)^{\alpha}\Delta_0^{(k+\alpha)}}{|D|\lambda_1^{*}\ldots\lambda_k(k+\alpha)!}. \tag{153}$$

В формулах (151) и (153) встречается факториальная функция от полуцелого аргумента. Ее вычисление облегчается с использованием зависимостей

$$\alpha! = \alpha(\alpha-1)!; \qquad \frac{1}{2}! = \sqrt{\pi}/2. \tag{154}$$

Рассмотрим более подробно форму области допустимых решений, близких к оптимальному, воспользовавшись безразмерными координатами $y_1, \ldots, y_k$; $z_1, \ldots, z_{n-k}$. Эта область ограничена $k+1$ поверхностью:

$$y_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, k); \tag{155}$$

$$\sum_{j=1}^{k} y_j + \sum_{p=1}^{n-k} z_p^2 \leqslant 1. \tag{156}$$

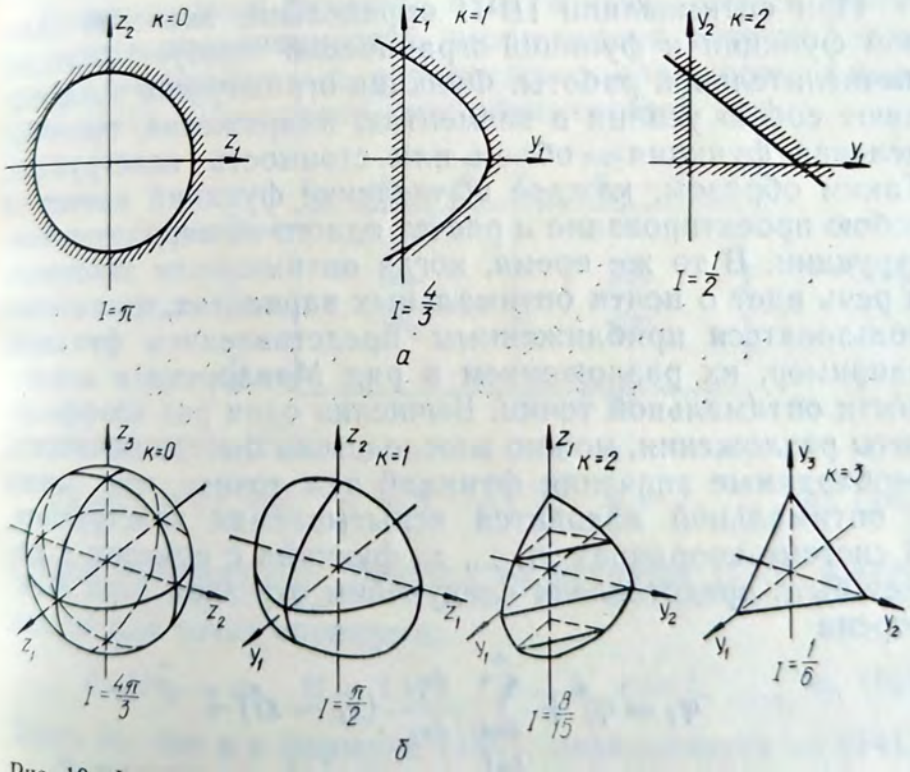


Рис. 13. Формы области допустимых решений, близких к оптимальному (оптимальное решение находится в начале координат) для пространства:

а — двумерного; б — трехмерного.

При изменении числа активных ограничений k она приобретает различные формы — от n-мерного шара при $k=0$ до n-мерного симплекса при $k=n$. Для $n=2$ формы области показаны на рис. 13, *а*, для $n=3$ — на рис. 13, *б*. Рядом с каждым из чертежей указан объем области в безразмерных координатах I, вычисленный по формуле (151).

Представляет интерес зависимость объема области допустимых решений, близких к оптимальному, от уровня потерь Δ_0. Как видно из основной формулы (151), этот объем быстро возрастает при увеличении Δ_0. Так, при $k=0$ (безусловный минимум) он возрастает пропорционально $\sqrt{\Delta^n{}_0}$, при $k=n$ (минимум в вершине допустимой области) — пропорционально $\Delta^n{}_0$.

Зная объем V, можно приближенно определить число дискретных решений, близких к оптимальному, по формуле (130).

3.5. АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ, БЛИЗКИХ К ОПТИМАЛЬНОМУ

При оптимизации ПРП определение значений целевой функции и функций-ограничений требует большой вычислительной работы. Функции-ограничения представляют собою усилия в элементах, напряжения, прогибы; целевая функция — объем или стоимость конструкции. Таким образом, каждое вычисление функций влечет за собою проектирование и расчет одного из вариантов конструкции. В то же время, когда оптимизация закончена и речь идет о почти оптимальных вариантах, достаточно пользоваться приближенным представлением функций, например, их разложением в ряд Маклорена в окрестности оптимальной точки. Вычислив один раз коэффициенты разложения, можно впоследствии быстро вычислять необходимые значения функций тем точнее, чем ближе к оптимальной находится испытываемая конструкция. В системе координат $x_1, \ldots, x_n$ функция с номером j может быть представлена следующим отрезком ряда Маклорена

$$\varphi_j = \varphi_j^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_i - x_i^*) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_p}(x_i - x_i^*)(x_p - x_p^*) \quad (j = 0, \ldots, k). \quad (157)$$

Здесь постоянными коэффициентами являются значения φ^*_j; $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$; $\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_p}$ $(i, p = 1, \ldots, n)$, вычисленные в точке оптимума.

Более компактно можно представить приближенные выражения для функций в другой системе координат, которая определяется следующими линейными зависимостями:

$$\begin{array}{r|c|}
 & (x_1 - x_1^*) \ldots (x_r - x_r^*) \ldots (x_n - x_n^*) \\
\hline
\bar{u}_1 = & \\
\cdots & \\
\bar{u}_p = & -\dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_r} \\
\cdots & \\
\bar{u}_k = & \\
\hline
\bar{\eta}_1 = & \\
\cdots & \\
\bar{\eta}_l = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_{li} \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_p \partial x_i} \\
\cdots & \\
\bar{\eta}_{n-k} = & \\
\hline
\end{array} \qquad (158)$$

Производные и функции, являющиеся коэффициентами линейных зависимостей, вычисляются в точке оптимума. Коэффициенты v_{li} определяются на основании формулы (141). Обращение этих зависимостей дает:

$$\begin{array}{r|c|c|}
 & \bar{u}_1 \ldots \bar{u}_p \ldots \bar{u}_k & \bar{\eta}_1 \ldots \bar{\eta}_l \ldots \bar{\eta}_{n-k} \\
\hline
(x_1 - x_1^*) = & & \\
\cdots & & \\
(x_r - x_r^*) = & \dfrac{\partial x_r}{\partial \bar{u}_p} & \dfrac{\partial x_r}{\partial \bar{\eta}_l} \\
\cdots & & \\
(x_n - x_n^*) = & & \\
\hline
\end{array} \qquad (159)$$

В зависимостях (159)

$$\partial x_r / \partial \bar{u}_p = \partial x_r / \partial u_p \quad (r = 1, \ldots, n; \quad p = 1, \ldots, k), \qquad (160)$$

причем значения $\frac{\partial x_r}{\partial u_p}$ берутся из матрицы (138), вычисленной для точки оптимума;

$$\partial x_r / \partial \bar{\eta}_l = v_{lr} \quad (l = 1, \ldots, n - k; \; r = 1, \ldots, n). \qquad (161)$$

Здесь v_{lr}, как и в формуле (158), определяется из (141).

Выполняя необходимые преобразования и допустимые пренебрежения, получаем приближенные формулы для функций из неравенств (131):

$$f_0 = \Delta_0 - \sum_{p=1}^{k} \lambda_p^* \bar{u}_p - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{s=1}^{n-k} g_{ls}^0 \bar{\eta}_l \bar{\eta}_s; \qquad (162)$$

$$\bar{f}_j = \bar{u}_j - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{s=1}^{n-k} g_{ls}^j \bar{\eta}_l \bar{\eta}_s \quad (j = 1, \ldots, k). \qquad (163)$$

В формулах (162) и (163) коэффициенты g^j_{ls} вычисляются следующим образом:

$$g_{ls}^j = \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{s=1}^{n-k} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_r} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \bar{\eta}_l} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial \bar{\eta}_s} (j=0, \ldots, k;\ l, s=1, \ldots, k) \qquad (164)$$

Рассмотрим некоторые свойства области решений, близких к оптимальному, в данном приближении. Эта область определяется системой неравенств:

$$\bar{f}_j \geqslant 0 \quad (j = 0, \ldots, k). \qquad (165)$$

В k-мерном подпространстве, находящемся на пересечении гиперплоскостей

$$\bar{\eta}_l = 0 \quad (l = 1, \ldots, n-k), \qquad (166)$$

эти ограничения выделяют симплекс

$$\bar{u}_j \geqslant 0 \ (j = 1, \ldots, k), \qquad (167)$$

$$\Delta_0 - \sum_{p=1}^{k} \lambda_p^* \bar{u}_p \geqslant 0. \qquad (168)$$

Координаты $u_1, \ldots, u_k$ вершин этого симплекса выражаются формулой:

$$u_{pj} = \delta_{pj} \Delta_0 / \lambda_j^* \quad (p = 0, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, k), \qquad (169)$$

где p — номер вершины; j — номер координаты. Как следует из формулы (169), при увеличении Δ_0 все координаты пропорционально увеличиваются.

Исследования показывают, что область решений, близких к оптимальному, (165) проектируется на подпространство $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{n-k}$ в шар радиуса $\sqrt{2\Delta_0}$ с центром в точке оптимума.

Аппроксимационные формулы (162) и (163) оказываются эффективными, если требуется проверить на принадлежность области много точек. Тогда дополнительная предварительная работа по построению и обращению матрицы (158), а также вычислению коэффициентов

g^j_{ls} ($j=0, ..., k$; $l, s=1, ..., k$) окупается за счет использования более простых аппроксимационных формул. Эффект оказывается тем больше, чем больше в точке оптимума активных ограничений. При $k=n$ формулы (162) и (163) содержат лишь линейные члены, коэффициенты которых известны заранее.

При использовании методов перебора дискретных вариантов, когда число испытываемых точек огромно и подавляющее большинство этих точек надо отбраковать, имеет смысл пользоваться двухступенчатым методом отбраковки. На первой ступени производится проверка по грубой, но простой формуле, и только те точки, которые успешно прошли первую проверку, исследуются более тщательно.

В качестве единого ограничения, которое приближенно аппроксимирует область допустимых решений, близких к оптимальному, выберем эллипсоид, который в сечении $\bar{\eta}_l=0$ ($l=1, ..., n-k$) давал бы эллипсоид минимального объема, охватывающий симплекс, определяемый вершинами (169), а на подпространство $\bar{\eta}_1, ..., \bar{\eta}_{n-k}$ проектировался бы в шар радиуса $\sqrt{2\Delta_0}$ с центром в точке оптимума. Выбор эллипсоида привлекателен, поскольку, во-первых, при линейных преобразованиях системы координат он остается эллипсоидом, а во-вторых,— устраняет комбинаторный характер задачи, возникающий при работе с областями, ограниченными несколькими участками поверхностей.

Уравнение эллипсоида представим в таком виде:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{p=1}^{k} a_{jp}(\bar{u}_j-\bar{u}_j^0)(\bar{u}_p-\bar{u}_p^0)+\frac{1}{2\Delta_0}\sum_{l=1}^{n-k}\bar{\eta}_l^{-2}=1. \quad (170)$$

Здесь a_{jp} ($j, p=1, ..., k$) — искомые коэффициенты квадратичной формы, $\bar{u}^0_j$ ($j=1, ..., k$) — искомые координаты центра эллипсоида в подпространстве $\bar{u}_1, ..., \bar{u}_k$. Зависимость левой части уравнения от $\bar{\eta}_1, ..., \bar{\eta}_{n-k}$ выбрана такой, чтобы эллипсоид проектировался на подпространство с координатами $\bar{\eta}_1, ..., \bar{\eta}_{n-k}$ должным образом.

Решение задачи производится по формулам:

$$a_{jp}=\frac{k+1}{k}\cdot\frac{\lambda_j^*\lambda_p^*}{\Delta_0^2}(\delta_{jp}+1 \quad (j, p=1, \ldots, k); \quad (171)$$

$$\bar{u}_j^0=\Delta_0/((k+1)\lambda_j^*) \quad (j=1, \ldots, k), \quad (172)$$

где δ_{jp} — символ Кронеккера.

Учитывая то, что детерминант матрицы с элементами a_{jp} $(j, p=1, ..., k)$ выражается формулой

$$|a_{jp}| = (k+1)^{k+1} (\lambda_1^* \cdot \cdot \lambda_k^*)^2 / (k\Delta_0^2)^k, \tag{173}$$

определим объем пространства $x_1, ..., x_n$, ограниченный эллипсоидом (170)

$$V_0 = (2^{n-k} \pi^n k^k \Delta_0^{n+k} (k+1)^{-k-1})^{\frac{1}{2}} / (|D| \lambda_1^* \cdot \cdot \cdot \lambda_k^*). \tag{174}$$

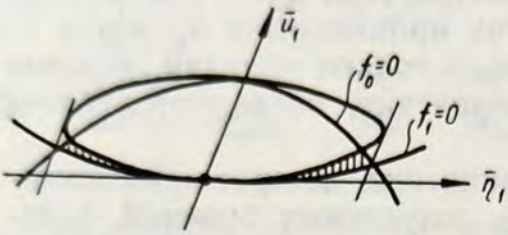


Рис. 14. Область допустимых решений, близких к оптимальному, и аппроксимирующий эллипс (зоны области, не попавшие внутрь эллипса, заштрихованы).

В этой формуле $|D|$ — абсолютная величина детерминанта матрицы (158) перехода от старой к новой системе координат.

Эллипсоид (170) не всегда охватывает полностью область допустимых решений, близких к оптимальному. В ряде случаев участки области, удаленные от точки оптимума, не попадают внутрь эллипсоида. Однако, учитывая приближенность аппроксимации, на наш взгляд, с таким положением можно мириться. Пример ситуации такого рода для $n=2$; $k=1$ показан на рис. 14.

3.6. МЕТОД РАВНОМЕРНЫХ ЗАПАСОВ И ОБЛАСТЬ РЕШЕНИЙ, БЛИЗКИХ К ОПТИМАЛЬНОМУ

Благодаря тому, что в методе равномерных запасов вводится дополнительное ограничение (97), мы постоянно имеем дело с областью допустимых решений, в той или иной степени близких к оптимальному. Верхняя граница целевой функции R_0 в процессе решения постоянно уменьшается, одновременно сужая эту область. Исследуем характеристики области решений, близких к оптимальному, полученной на промежуточном этапе.

Наиболее важной характеристикой области является допустимый уровень потерь

$$\Delta_0 \approx R_0 - \varphi^*. \tag{175}$$

Исходя из зависимости (117),

$$\Delta_0 \approx -\Delta R_0, \tag{176}$$

где ΔR_0 определяется по формуле (116).

Относительные потери могут быть получены по формуле

$$\delta_0 \approx -\Delta R_0 / (R_0 + \Delta R_0). \qquad (177)$$

Вычисляя постоянно оценку для абсолютных или относительных потерь, можно остановить процесс приближений на том этапе, когда будет достигнут требуемый уровень потерь.

Второй характеристикой области является ее объем, позволяющий оценить число дискретных решений, близких к оптимальному. Для вычисления объема удобно пользоваться эквивалентом уравнений (112)·

$$\sum_{r'=1}^{n}\left(f_0 \sum_{j=0}^{m} \frac{f_0}{f_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_r \partial x_{r'}} + \sum_{j=0}^{m} \frac{f_0^2}{f_j^2} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{r'}}\right) \frac{dx_{r'}}{\partial R_0} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_r}$$

$$(r = 0, \ldots, n). \qquad (178)$$

Уравнения (178) получены путем перехода к функциям φ_j $(j=0, \ldots, m)$ и умножения уравнений (112) на $-f^2_0$. Уравнениями (178) удобно пользоваться и в остальных случаях. Заметим, что в процессе решения задачи

$$f_0 \to 0; \quad f_0/f_j \to \lambda_j^{\bullet}. \qquad (179)$$

Как было показано выше, объем области решений, близких к оптимальному, вычисляется по формуле (153), где используется модуль детерминанта матрицы D, фигурирующей в формулах (146).

Минуя выкладки, запишем формулу для этого детерминанта

$$|D| = \sqrt{|C|}\,(k+1)^{\alpha - \frac{1}{2}} / (\Delta_0^{\alpha} \lambda_1^{\bullet} \cdot \cdot \cdot \lambda_k^{\bullet}), \qquad (180)$$

где C — матрица системы уравнений (178).

С учетом того, что $\Delta R_0 \approx -\Delta_0$, а также на основании (124) и (180) формула для объема области решений, близких к оптимальному, принимает вид:

$$V = (2\pi)^{\alpha} f_0^n (k+1)^{k+\alpha+1/2} / (\sqrt{|C|}\,(k+\alpha)!), \qquad (181)$$

причем $\alpha = (n-k)/2$, k можно вычислить по формуле (123).

Таким образом, на любом этапе решения задачи по методу равномерных запасов можно получать оценку (181) объема области решений, близких к оптимальному, и пользоваться ею для остановки процесса приближений.

Матрицу системы уравнений (178) можно использовать также для описания эллипсоида, аппроксимирующего область решений, близких к оптимальному. В данном случае уравнение эллипсоида будет иметь вид:

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{r'=1}^{n}\bar{c}_{rr'}(x_r-\dot{x}_r)(x_{r'}-\dot{x}_{r'})\leqslant U, \tag{182}$$

где x^*_r $(r=1, ..., n)$ — координаты точки равномерных запасов;

$$\bar{c}_{rr'}=f_0\sum_{j=0}^{m}\frac{f_0}{f_j}\cdot\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_r\partial x_{r'}}+\sum_{j=0}^{m}\frac{f_0^2}{f_j^2}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_{r'}}$$

$$(r,\ r'=1,\ \ldots,\ n); \tag{183}$$

$$U=\begin{cases}2f_0^2 — \text{для } k\leqslant 1;\\ k(k+1)f_0^2 — \text{для } k>1.\end{cases} \tag{184}$$

Значения U выбраны так, чтобы в случае задачи безусловной минимизации с квадратичной целевой функцией эллипсоид (182) точно описывал область решений, близких к оптимальному, а в случае задачи линейного программирования, когда n ограничений активны, проходил бы через все вершины полученного симплекса, имея при этом минимальный объем.

Формула для объема эллипсоида (182) аналогична (152) и имеет вид

$$V_0=(\pi U)^{n/2}/(\sqrt{|C|}(n/2)!). \tag{185}$$

Приведенная аппроксимация дает несколько худшие результаты, чем аппроксимация (153), однако она использует промежуточные данные метода равномерных запасов, почти не требуя дополнительных вычислений.

4. ЧИСЛЕННАЯ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ПРП

Реализация методов, описанных в предыдущей главе, практически осуществима только с помощью ЭВМ. Однако непосредственное программирование формул большей частью невозможно, а во многих случаях нерационально. Поэтому в данной главе описанию программных средств предшествует освещение узловых моментов в части дискретизации методов и алгоритмизации отдельных этапов расчета.

4.1. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Формулы приведенных методов, кроме значений функций содержат также их производные первого и второго порядков. Путь реализации этих методов, заключающийся в программировании выписанных заранее выражений для упомянутых производных, обладает рядом недостатков. Так, требуется выполнить большую ручную работу по дифференцированию функций и программированию каждого из полученных выражений. Этот путь оказывается нереализуемым, если аналитическое выражение для рассматриваемой функции неизвестно, а известен лишь алгоритм вычисления. Поэтому такой подход применим лишь в случае простейших функций.

Чаще применяется численное дифференцирование с использованием различных конечно-разностных схем [31]. В данном разделе предлагается конечно-разностная схема, точки которой расположены в вершинах и на серединах ребер симплекса (рис. 15).

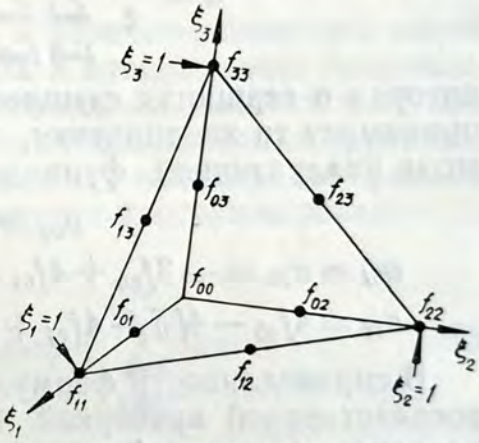


Рис. 15. Расположение точек разностной схемы в трехмерном случае.

В n-мерном пространстве симплекс имеет $n+1$ вершину и $n(n+1)/2$ ребер. Таким образом, общее число точек, в которых вычисляется функция, будет $(n+1)(n+2)/2$. Понятно, что такое количество точек минимально необходимо для вычисления значений функции, ее первых и вторых частных производных, поскольку суммарное количество этих в общем случае различных значений у дважды дифференцируемой функции также равно $(n+1)(n+2)/2$.

Рассмотрим симплекс, построенный в пространстве переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, на единичных векторах координатной системы (см. рис. 15). Пронумеруем его вершины целыми числами $0, \ldots, n$ так, чтобы вершина с номером 0 находилась в начале координат, а вершина с номером $i \neq 0$ на конце единичного вектора того же номера. Тогда координаты вершин симплекса выразятся формулой

$$\xi_k^i = \delta_{ik} \quad (i = 0, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n), \tag{186}$$

где i — номер вершины; k — номер координаты; δ_{ik} — символ Кронеккера.

Ребра симплекса будем обозначать парами номеров соответственно номерам тех вершин, которые соединяют данное ребро. Координаты середин ребер

$$\xi_k^{ij} = (\delta_{ik} + \delta_{jk})/2 \quad (i, j = 0, \ldots, n;\ i \neq j;\ k = 1, \ldots, n), \tag{187}$$

где ij — пара номеров, идентифицирующих ребро.

Пусть исследуется функция $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Обозначим значения этой функции в вершинах симплекса через f_{ii} $(i=0, \ldots, n)$, а в серединах ребер через f_{ij} $(i, j=0, \ldots, n;\ i \neq j)$. Существует единственная квадратичная функция

$$k = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \quad (\xi_0 = 1), \tag{188}$$

которая в вершинах симплекса и в серединах его ребер принимает те же значения, что и функция f. Коэффициенты квадратичной функции выражаются формулами:

$$a_{00} = 2f_{00};$$

$$\left.\begin{aligned} a_{0i} = a_{i0} &= -3f_{00} + 4f_{0i} - f_{ii} \quad (i = 1, \ldots, n); \\ a_{ij} &= 4f_{00} - 4f_{0i} - 4f_{0j} + 4f_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{189}$$

В справедливости формул (189) можно убедиться непосредственной проверкой. В качестве разностных производных функции f примем соответствующие значения производных квадратичной функции k. Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_p} \approx \sum_{i=0}^{n} a_{pi} \xi_i \quad (p = 1, \ldots, n;\ \xi_0 = 1);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \approx a_{pq} = 4(f_{00} - f_{0p} - f_{0q} + f_{pq}) \quad (p, q = 1, \ldots, n). \tag{190}$$

При таком подходе вторые частные производные не зависят от координат ξ, а первые частные производные являются их линейными функциями. Запишем значения первых производных в начале координат ($\xi_i=0$; $i=1, \ldots, n$):

$$\partial f/\partial \xi_p \approx -3f_{00} + 4f_{0p} - f_{pp} \quad (p = 1, \ldots, n); \tag{191}$$

и в центре симплекса ($\xi_i=1/(n+1)$; $i=1, \ldots, n$):

$$\partial f/\partial \xi_p \approx \frac{4}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (f_{pi} - f_{0i}) - (f_{pp} - f_{00}) \quad (p = 1, \ldots, n). \quad (192)$$

Переход к симплексу произвольного вида и ориентации выполняется по обычным формулам линейного преобразования координат.

Приведенная разностная схема основывается на хорошо упорядоченной системе точек, имеющей смысл в произвольной косоугольной системе координат, и для функций до второго порядка включительно дает точные значения производных. Целесообразно пользоваться ею для работы с точками, лежащими внутри симплекса.

4.2. ПРОСТЫЕ АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ НА СИМПЛЕКСЕ

Симплекс, используемый в конечно-разностной схеме для определения производных и квадратичной аппроксимации, полезен также как вспомогательный объект при решении более сложных задач минимизации функций. При этом возникает необходимость многократно решать следующую задачу квадратичного программирования.

Минимизировать

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \quad (193)$$

на симплексе, определяемом ограничениями:

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n); \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1, \quad (194)$$

где a_{ij} — элементы симметричной положительно определенной матрицы.

Вместо этой задачи удобно решать эквивалентную задачу Лагранжа:

$$x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad (195)$$

$$z_i = z_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, \ldots, n); \quad (196)$$

$$x_i \geqslant 0; \quad z_i \geqslant 0 \quad (i = 0, \ldots, n); \quad (197)$$

$$x_i z_i = 0 \quad (i = 0, \ldots, n) \quad (198)$$

с использованием симплексной таблицы:

$$
\begin{array}{c|c|ccc|c|}
 & z_0 & x_1 & \dots & x_n & 1 \\
\hline
x_0 = & 0 & -1 & \dots & -1 & 1 \\
\hline
z_1 = & 1 & a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
z_n = & 1 & a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\
\hline
\end{array}
\qquad (199)
$$

Если над этой таблицей удается выполнить серию шагов жордановых исключений с разрешающими элементами на главной диагонали так, чтобы все свободные члены оказались неотрицательными, то поставленная задача будет решена. Переменные x_i и z_i, оказавшиеся над таблицей, следует принять равными нулю, а остальные переменные, расположенные слева,— равными соответствующим свободным членам. В этом случае условия (195)...(198) выполняются.

Как доказано в работе [32], добиться неотрицательности свободных членов можно, выбирая в качестве разрешающей строку с минимальным номером из множества строк с отрицательными свободными членами, а в качестве разрешающего — диагональный элемент этой строки. Это и есть основное правило, позволяющее решить задачу (193) и (194), причем доказано, что каждый шаг жордановых исключений при таком выборе разрешающего элемента выполним, а зацикливание невозможно.

Рассмотренный алгоритм эффективно работает в случае минимизации выпуклых функций. На практике же часто встречаются задачи с невыпуклыми целевыми функциями. Ниже приводятся два алгоритма для решения таких задач. Поскольку при переходе от симплекса к многограннику произвольного вида алгоритмы осложняются незначительно, рассматривается задача о минимизации квадратичной функции произвольного вида на многограннике.

Рассмотрим знаконеопределенную квадратичную функцию

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x_i x_j, \qquad (200)$$

а также ограничения

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m); \tag{201}$$

$$\sum_{j=0}^{m} a_{kj} x_j \geqslant 0 \quad (k = m+1, \ldots, n). \tag{202}$$

Здесь и далее для краткости записи формул принято $x_0 = 1$.

Задача состоит в нахождении одного из локальных минимумов функции (200) при ограничениях (201) и (202). Подобные задачи рассматривались и в других работах, однако в предложенных алгоритмах не использовались свойства симметрии матрицы (200), что приводило к нерациональному расходованию оперативной памяти машины.

Введем новые переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$, а также лагранжевы множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и запишем условия Куна-Таккера для рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x_j - \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k a_{ki} \quad (i = 1, \ldots, m); \tag{203}$$

$$x_k = \sum_{j=0}^{m} a_{kj} x_j \quad (k = m+1, \ldots, n); \tag{204}$$

$$x_i \geqslant 0; \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n); \tag{205}$$

$$x_i \lambda_i = 0 \, (i = 1, \ldots, n). \tag{206}$$

Решения системы (203)...(206), если они существуют, определяют точки Куна-Таккера для задачи (200)...(202). Среди этих точек содержатся все точки локального минимума, но кроме них могут встретиться и другие точки типа седловых и локального максимума.

Построим симплексную таблицу, выражающую линейные зависимости (203), (204):

$$\begin{array}{c|c|ccc|ccc|}
 & x_0 = 1 & x_1 & \ldots & x_m & \lambda_{m+1} & \ldots & \lambda_n \\
\hline
\lambda_0 = & a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0m} & -a_{m+1,0} & \ldots & -a_{n0} \\
\hline
\lambda_1 = & a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1m} & -a_{m+1,1} & \ldots & -a_{n1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\lambda_m = & a_{m0} & a_{m1} & \ldots & a_{mm} & -a_{m+1,1} & \ldots & -a_{nm} \\
\hline
x_{m+1} = & a_{m+1,0} & a_{m+1,1} & \ldots & a_{m+1,n} & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_n = & a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nm} & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
\end{array} \tag{207}$$

дополнив ее строкой λ_0.

Преобразуя эту таблицу при помощи одиночных или групповых шагов жордановых исключений с разрешающими элементами или клетками, находящимися на главной диагонали, так, чтобы строка λ_0 не была разрешающей, будем приходить к таблицам вида:

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & x_0 = 1 & \dots & x_i & \dots & \lambda_j & \dots \\
\hline
\lambda_0 = & b_{00} & \dots & b_{0i} & \dots & b_{0j} & \dots \\
\hline
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda_i = & b_{i0} & \dots & b_{ii} & \dots & b_{ij} & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_j = & b_{j0} & \dots & b_{ji} & \dots & b_{jj} & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
\end{array}
\qquad (208)
$$

В этих таблицах будут встречаться строки x и λ, столбцы x и λ, причем, если в строке с номером i будет находиться x_i, то в столбце с номером i — λ_i и наоборот. Пары переменных x_i и λ_i будем называть дополнительными. Множество номеров строк λ, не включающее λ_0, назовем L, множество номеров строк x — X.

Таблица (208), как и таблица (207), обладают следующими свойствами симметрии:

$$
b_{ij} = b_{ji} \quad (i,\ j \in L); \quad b_{ij} = b_{ji} \quad (i,\ j \in X);
$$
$$
b_{ij} = -b_{ji} \quad (i \in L,\ j \in X). \qquad (209)
$$

Любую из таблиц вида (208) можно использовать для вычисления целевой функции F при любых значениях переменных, находящихся наверху таблицы. Для этого достаточно вычислить значение квадратичной функции:

$$
F = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_{ij} y_i y_j, \qquad (210)
$$

где

$$
y_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0; \\ x_i & \text{при } i \in L; \\ \lambda_i & \text{при } i \in X. \end{cases}
$$

Справедливость этого утверждения для таблицы (207) очевидна. Учитывая то, что как для таблицы (207), так и для любой из таблиц (208)

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}y_iy_j = \sum_{i=0}^{n} x_i\lambda_i, \qquad (211)$$

убеждаемся в справедливости формулы (210) во всех случаях.

Если таблице типа (208) сопоставить набор переменных $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ таким образом, что базисные переменные (соответствующие строкам) принять равными свободным членам (b_{i0}) из той же строки, а небазисные переменные (соответствующие столбцам) положить равными нулю, то такой набор удовлетворяет уравнениям (203), (204), поскольку жордановы исключения сохраняют первоначальные линейные зависимости (207) и уравнения (206) — по построению таблицы (208). Решения уравнений (203), (204), (206), полученные указанным способом, будем называть базисными.

Из формулы (210) в случае базисного решения следует:

$$F = b_{00}/2. \qquad (212)$$

Если в решении уравнений (203), (204), (206) переменные $x_1, \ldots, x_n$ неотрицательны, то такое решение будем называть допустимым. Понятно, что для допустимости базисного решения достаточно неотрицательности свободных членов, находящихся в строках x таблицы (208).

Если в решении переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ неотрицательны, то такое решение будем называть стационарным. Для стационарности базисного решения достаточно неотрицательности свободных членов в строках λ.

Стационарные допустимые базисные решения удовлетворяют всем условиям (203)...(206) и называются базисными решениями системы Куна-Таккера. В работе [33] показано, что искомое локальное решение задачи (200)...(202) содержится среди этих решений. Существуют необходимые и достаточные условия того, что найденное базисное решение системы (203)...(206) является точкой локального минимума [28]. Эти условия не конструктивны и плохо поддаются проверке при численной реализации задач общего вида.

Однако все осложнения в формулировке условий относятся к случаям вырождения, т. е. к случаям, когда в базисном решении присутствует хотя бы одна пара взаимно дополнительных переменных, одновременно равных нулю. В невырожденных случаях можно пользоваться следующим критерием [34].

Невырожденное стационарное допустимое базисное решение уравнений Куна-Таккера (203)...(206) является локальным минимумом задачи (200)...(202) тогда и только тогда, когда подматрица, выделяемая в симплексной таблице вида (208) строками x и столбцами λ с номерами, не превышающими m, положительно полуопределена.

Таким образом, если в симплексной таблице вида (208) все свободные члены оказались положительными, а подматрица положительно полуопределенной, то полученное решение — локальный минимум задачи (200)...(202).

Если среди свободных членов таблицы (208) оказались нули, проверка такой точки на локальную минимальность существенно осложняется. Однако в большинстве случаев столь тонкий анализ не требуется, так как при вырождении, о котором идет речь, задача может становиться некорректной в том смысле, что бесконечно малые изменения исходных свободных членов в таблице (207) могут привести к конечным изменениям координат точки локального минимума или к ее исчезновению. Следовательно, если речь идет о задачах, где исходные данные — приближенные величины, такой анализ не может дать гарантии, что в случае вырождения в физической задаче локальный минимум в действительности не наблюдается. Если бы нулевые свободные члены в таблице (208) были сколь угодно малыми положительными величинами, то был бы зафиксирован локальный минимум.

Оставаясь на этих позициях, будем довольствоваться при решении задачи (200)...(202) не только точками локального минимума, но и точками, которые могут стать таковыми при бесконечно малых изменениях в исходных данных задачи. Критерием нахождения такой точки будет неотрицательность свободных членов в таблице (201) и положительная полуопределенность подматрицы.

Поиск локального минимума целевой функции (200) на многограннике, являющемся пересечением полупространств (201), (202), может быть выполнен в два этапа. На первом ищется базисное решение задачи, т. е. одна из вершин многогранника. Первый этап не зависит от целевой функции и может быть выполнен так же, как это делается при решении задачи линейного программирования. Поэтому, не останавливаясь на нем, будем считать, что исходная таблица (207) уже соответствует базисному решению, т. е. в этой таблице свободные члены в строках x неотрицательны. Заметим также, что на пе-

ресечении строк x и столбцов λ находится нулевая подматрица.

Второй и основной этап решения задачи заключается в поиске локального минимума или допустимого направления неограниченного убывания функции (200) без нарушения ограничений (201), (202). Предлагаемый алгоритм построен так, что все вычисления ведутся на участке памяти, отведенном под таблицу вида (208). Исходное состояние этой таблицы — таблица (207), полученная после первого этапа решения задачи. Основной вычислительной процедурой служит шаг жорданова исключения с разрешающим элементом на главной диагонали. Разрешающие элементы выбираются с таким расчетом, чтобы после выполнения шага:

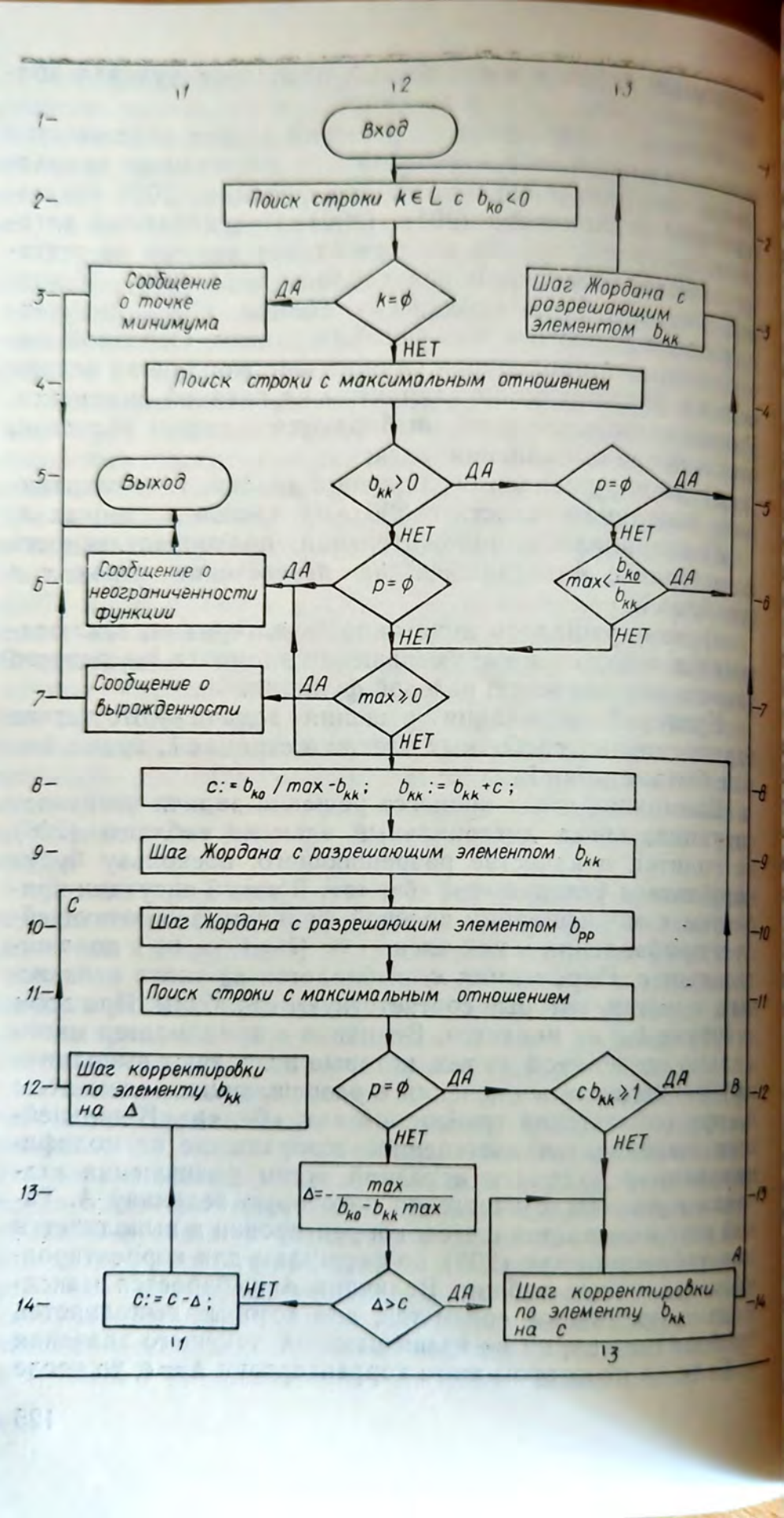
а) не нарушались ограничения задачи, т. е. сохранялась неотрицательность свободных членов в строках x;

б) сохранялась положительная полуопределенность подматрицы, находящейся на пересечении строк x и столбцов λ;

в) не нарушалась монотонность алгоритма, заключающаяся в постепенном уменьшении элемента b_{00}, равного удвоенному значению целевой функции.

Критерий окончания решения задачи — отсутствие отрицательных свободных членов в строках λ, кроме, может быть, строки λ_0.

Возможно, что в процессе решения задачи возникает ситуация, когда диагональный элемент таблицы (208) не годится в качестве разрешающего, поскольку будут нарушаться условия «а», «б», «в». В такой ситуации прибегнем к модификации целевой функции, заключающейся в прибавлении к ней члена cx^2_i $(i=1, ..., n)$ с положительным c. Переменная x_i выбирается из числа небазисных, т. е. тех, которые соответствуют столбцам. При этом значение b_{00} не меняется. Величина c принимается минимально возможной из тех, которые позволяют выполнить шаг жорданова исключения с разрешающим элементом b_{ii} при соблюдении требований «а», «б», «в». В дальнейшем выполняется постепенное возвращение от модифицированной задачи к исходной путем уменьшения значения c на каждом шаге на некоторую величину Δ. Такой шаг называется шагом корректировки и выполняется над таблицей вида (208) по формулам для корректировки жордановых таблиц. Величина Δ выбирается максимально возможной среди тех, для которых выполняется требование «а», но не превышающей текущего значения c. Если на некотором шаге корректировки $\Delta=c$, то после


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
Вход
Поиск строки $k \in L$ с $b_{k0} < 0$
$k = \phi$
ДА
НЕТ
Сообщение о точке минимума
Шаг Жордана с разрешающим элементом b_{kk}
Поиск строки с максимальным отношением
$b_{kk} > 0$
$p = \phi$
Выход
Сообщение о неограниченности функции
$\max < \frac{b_{k0}}{b_{kk}}$
Сообщение о вырожденности
$\max \geqslant 0$
$c := b_{k0} / \max - b_{kk}$; $b_{kk} := b_{kk} + c$;
Шаг Жордана с разрешающим элементом b_{kk}
Шаг Жордана с разрешающим элементом b_{pp}
Поиск строки с максимальным отношением
Шаг корректировки по элементу b_{kk} на Δ
$c b_{kk} \geqslant 1$
$\Delta = -\frac{\max}{b_{k0} - b_{kk} \max}$
$c := c - \Delta$;
$\Delta > c$
Шаг корректировки по элементу b_{kk} на c
A
B
C

этого шага возвратимся к немодифицированной задаче, т. е. процесс корректировки закончен.

Алгоритм работает с двумерным массивом $b[0:n, 0:n]$, в котором размещается таблица вида (208), с одномерным массивом признаков (например, булевым) из n элементов, индицирующим разбиение множества всех строк на множества L и X, с переменными k, p, max, c, Δ. Перед началом работы алгоритма определены массивы b и массив признаков. В массиве b находится таблица (207). К множеству L относятся номера 1, ..., m; к множеству X — номера $m+1$, ..., n.

Алгоритм разработан в двух вариантах. Первый из них (рис. 16) непосредственно реализует идею модификации целевой функции, более прост в понимании и в выполнении. Однако он не срабатывает в случае вырождения, приводящем к необходимости модифицировать целевую функцию на неограниченно большую величину, и выходит на специальный останов. Некоторые операторы алгоритма имеют описательное наименование.

1. Поиск строки $k \in L$ с $b_{k0} < 0$. Среди строк из множества L разыскивается любая строка с отрицательным свободным членом и ее номер присваивается переменной k. Если таких строк нет, переменной k присваивается признак $\varnothing$ (пусто).

2. Поиск строки p с максимальным отношением. Среди строк из множества X, у которых элемент k-го столбца $b_{pk} < 0$, разыскивается строка с максимальным отношением b_{p0}/b_{pk}. Это отношение присваивается переменной max, а номер строки — переменной p. Если такой строки нет, переменной p присваивается признак $\varnothing$.

3. Шаг Жордана с разрешающим элементом b_{pp}. Оператор перерабатывает массив b по следующим формулам и в такой последовательности:

$$b_{pp} := 1/b_{pp}; \quad b_{pj} := -b_{pj}b_{pp} \quad (j \neq p);$$
$$b_{ij} := b_{ij} + b_{ip}b_p \quad (i \neq p,\ j \neq p); \quad b_{ip} := b_{ip}b_{pp}\ (i = p). \tag{213}$$

Индексы i и j пробегают значения 0, ..., n, за исключением оговоренных в скобках. Кроме этого, оператор переводит номер p из множества X в множество L или наоборот.

4. Шаг корректировки по элементу b_{kk} на Δ. Оператор перерабатывает массив b по следующим формулам в приведенной последовательности:

Рис. 16. Блок-схема алгоритма минимизации квадратичной функции на симплексе. Первый вариант.

$$r := 1/(1-\Delta b_{kk});\ b_{ij} := b_{ij} + b_{ik}\Delta r b_{kj}\ \ (i \neq k;\ j \neq k);$$
$$b_{ik} := r b_{ik}\ \ (i \neq k);\ \ b_{kj} := r b_{kj}\ \ (j \neq k);\ \ b_{kk} := r b_{kk}. \quad (214)$$

Индексы i и j пробегают значения 0, ..., n, за исключением оговоренных в скобках.

5. Сообщение о точке минимума. Выводятся значение целевой функции и координаты точки, в которой достигнут локальный минимум.

6. Сообщение о неограниченности функции. Выводится сообщение о факте неограниченности функции F.

7. Сообщение о вырожденности. Выводится сообщение либо о самом факте вырожденности задачи, либо указываются также значения k, p, конкретизирующие вырожденность.

Коротко прокомментируем первый вариант алгоритма. Поиск начинается из какой-либо вершины многогранника. Основной цикл алгоритма содержит, помимо прочих, операторы 2.2, 5.2, 3.3. Оператор 3.2 этого цикла проверяет наличие отрицательных свободных членов в таблице (208) и в случае их отсутствия обеспечивает выход из алгоритма. При выполнении оператора 3.3 точка покидает k-ю гиперплоскость, ограничивающую многогранник, и, находясь в остальных гиперплоскостях с номерами из множества L, переходит в положение с минимальным значением целевой функции. Условные операторы цикла приводят к выполнению оператора 3.3 только тогда, когда минимум не лежит на гиперплоскостях с номерами из множества X. В противном случае осуществляются выход из этого цикла через оператор 6.3 и переход к проверке вырожденности задачи, непреодолимой этим вариантом алгоритма (оператор 7.2). Оператор 6.2 проверяет, возможно ли неограниченное убывание функции, и, если да, обеспечивает выход из алгоритма.

Если при попытке покинуть k-ю гиперплоскость и перейти в точку минимума, лежащую в остальных гиперплоскостях с номерами из множества L, оказывается, что эта точка принадлежит гиперплоскости с номером из множества X, происходит переход к модификации целевой функции. Эта модификация осуществляется оператором 8.2. После этого выполняется два шага жорданова исключения, в результате чего точка покидает гиперплоскость с номером k и попадает в гиперплоскость с номером p. Далее вычислительный процесс переходит к циклу возврата к исходной задаче. В этом цикле присутствуют операторы 11.2, 14.2, 12.1. При каждом выполнении оператора 12.1 разница в целевых функциях

модифицированной и исходной задач уменьшается или остается без изменения. Окончательный возврат к исходной задаче выполняется после выхода из цикла оператором 14.3. Возможно также обнаружение неограниченности функции в операторе 12.3 и переход к оператору 6.1.

В результате процедуры модификации задачи точка покидает гиперплоскость k и попадает на одну или несколько гиперплоскостей с номерами из множества X. Далее проверяется, не закончено ли решение задачи.

После выхода из алгоритма массив b, массив признаков и переменная k содержат всю информацию о решении задачи. В случае, если найден локальный минимум, его удвоенное значение равно элементу b_{00}, а координаты таковы:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{для } i \in L \\ b_{i0} & \text{для } i \in X \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, m). \qquad (215)$$

Второй вариант алгоритма является модификацией первого. Изменению подвергнута вторая часть алгоритма, находящаяся в строках 7...14 на рис. 16. Эта часть алгоритма в первом варианте осуществляет включение в базис переменной x_k и исключение из базиса одной или нескольких переменных. Переменная x_k включается в базис в первую очередь, а затем выполняется серия исключений. Во втором варианте алгоритма выполняется такая же операция с той лишь разницей, что вначале исключаются переменные из базиса, а в конце переменная x_k включается в него. Переменные из базиса исключаются в той же последовательности, что и в первом варианте алгоритма. Целевая функция не модифицируется. Для возможности реализации второго варианта алгоритма предусмотрен двойной шаг жорданова исключения, который выполняется в последнюю очередь, исключает из базиса одну из переменных и включает в него переменную x_k. В блок-схеме второго варианта алгоритма (рис. 17) присутствуют некоторые новые операторы с описательным наименованием и вводятся переменные q, d, D.

8. Поиск строки q с максимальным отношением после мысленного шага по b_{pp}. Оператор прогнозирует состояние симплексной таблицы после шага жорданова исключения с разрешающим элементом b_{pp} и в прогнозируемой таблице определяет номер q строки из множества X, в которой отношение свободного члена к отрицательному

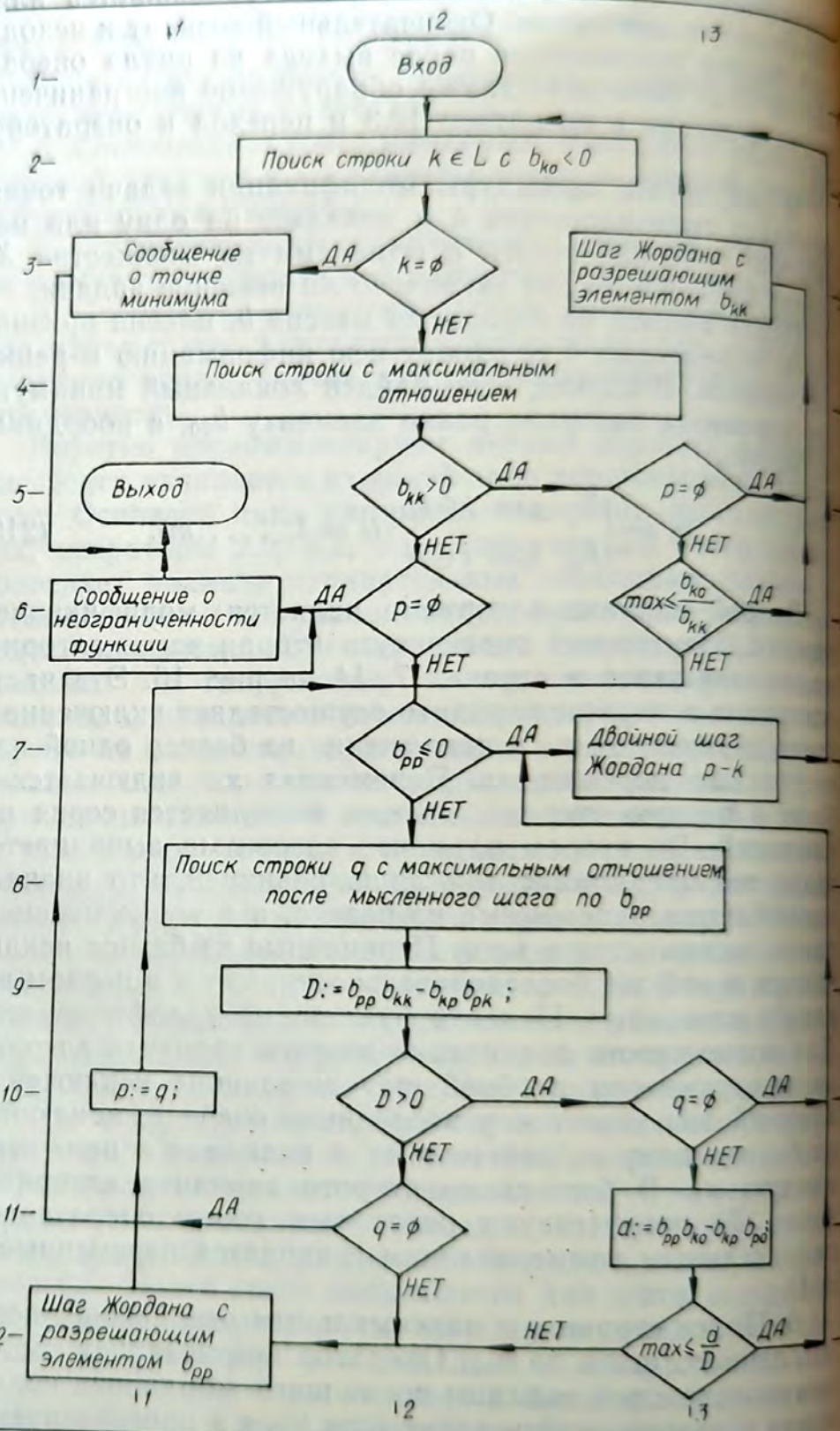


Рис. 17. Блок-схема алгоритма минимизации квадратичной функции на симплексе. Второй вариант.

элементу столбца k максимально. Это отношение присваивается переменной max

$$\max = (b_{q0}b_{pp} - b_{qp}b_{p0}) / (b_{qk}b_{pp} - b_{qp}b_{pk}). \qquad (216)$$

Если такой строки не существует, переменной q присваивается признак $\varnothing$.

9. Двойной шаг Жордана pk. Выполняется групповой шаг жорданова исключения с разрешающей клеткой второго порядка, находящейся на пересечении строк с номерами p и k с одноименными столбцами. Оператор переводит, кроме того, номер p из множества X во множество L, а номер k — из множества L во множество X.

Второй вариант алгоритма привлекателен тем, что он преодолевает случаи вырождения.

Таким образом, при минимизации квадратичной функции произвольного вида на симплексе может применяться любой из приведенных алгоритмов. Поиск допустимого решения в данном случае не представляет труда, поскольку точка с координатами $x_i=0$ $(i=1, ..., n)$ в случае ограничений типа (194) всегда допустима.

4.3. МЕТОД СИМПЛЕКСНЫХ ПОДОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧЕ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ

При оптимальном проектировании ПРП задача безусловной минимизации функций возникает в двух случаях. В первом из них оптимизационная задача не имеет ограничений и непосредственно приводит к рассматриваемой формулировке. Во втором она возникает как вспомогательная при решении задач с ограничениями-неравенствами. В обоих случаях минимизируемые функции меняются в разных направлениях с различной скоростью, содержат овраги различной мерности, в связи с чем становятся эффективными методы второго порядка, например метод Ньютона. Основной недостаток методов второго порядка — малый радиус сходимости и необходимость вычисления производных минимизируемой функции до второго порядка включительно [28]. На основании приведенных результатов разработан метод преодоления этих двух недостатков с использованием симплексных подобластей.

Идея метода заключается в том, что в пространстве оптимизируемых параметров выбирается симплекс достаточно крупных размеров. По значениям функции в вершинах и на серединах сторон симплекса строится аппроксимирующая квадратичная функция, как указано в

параграфе 4.1. Эта функция минимизируется на симплексе. Возможны два случая: минимум функции находится на границе симплекса или в его внутренней точке. Если минимум находится на границе, например, на k-мерной грани симплекса, то строится новый симплекс так, чтобы эта грань принадлежала также и ему, а тело симплекса, отраженное специальным образом относительно этой грани, было обращено в сторону минимума функции. В новом симплексе значения функции в вершинах и на серединах ребер k-мерной грани известны, что приводит к экономии вычислений.

Если минимум достигается во внутренней точке симплекса, то строится новый симплекс уменьшенных размеров с центром в точке минимума квадратичной функции и процесс продолжается. Аналогично поступают, если минимумы функций двух смежных симплексов находятся на их общей грани.

На заключительной стадии, когда минимумы функций находятся внутри симплекса, метод обладает квадратичной сходимостью, а на начальной стадии, когда область сходимости метода еще не достигнута, границы симплекса препятствуют неоправданно большим шагам итерации.

Рассмотрим более подробно метод отражения симплекса от k-мерной грани, на которой оказался условный минимум квадратичной функции. Предположим для определенности, что эта грань содержит вершины 0, ..., k и симплексная таблица, приведшая к решению, в обозначениях параграфа 4.2 имеет вид:

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
 & z_0 & \dots & z_k & x_{k+1} & \dots & x_n & 1 \\
\hline
x_0 = & a_{00} & \dots & a_{0k} & a_{0,k+1} & \dots & a_{0n} & b_0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_k = & a_{k0} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} & b_k \\
\hline
z_{k+1} = & a_{k+1,0} & \dots & a_{n+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} & b_{k+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
z_n = & a_{n0} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array}
\qquad (217)
$$

Надо построить отраженный симплекс, у которого вершины 0, ..., k сохраняются, а вершины $k+1$, ..., n изменяют свое положение. Потребуем, чтобы объем отраженного симплекса был равен объему исходного, что

предотвратит его вырождение, и, кроме того, чтобы новые вершины симплекса принадлежали линейному многообразию, на котором находятся условные минимумы исследуемой на предыдущем этапе квадратичной функции. Условия, при которых минимизируется функция, таковы:

$$x_i + d_i = 0 \quad (i = k + 1, \ldots, n). \tag{218}$$

При $d_i=0$ $(i=k+1, \ldots, n)$ приходим к решению исходной задачи (217). Другие значения d_i определяют $n-k$-мерное многообразие, которому должны принадлежать новые вершины симплекса. Приведем готовое решение, не останавливаясь на подробностях его нахождения. Координаты вершин нового симплекса в системе $x_1, \ldots, x_n$ таковы:

$$x_i^p = \begin{cases} \delta_{ip} & (i = 0, \ldots, n;\ p = 0, \ldots, k); \\ b_i - a_{pi} & (i = 0, \ldots, k;\ p = k + 1, \ldots, n); \\ -\delta_{ip} & (i = k + 1, \ldots, n;\ p = k + 1, \ldots, n), \end{cases} \tag{219}$$

Здесь i — номер координаты, p — номер вершины симплекса. Без труда убеждаемся, что вершина с номером $p>k$ принадлежит требуемому многообразию, причем,

$$d_i = \delta_{ip} \quad (i = k + 1, \ldots, n). \tag{220}$$

Объемы вновь построенного и старого симплекса равны между собой:

$$V_0 = V = 1/n! \tag{221}$$

Новый симплекс в общем случае оказывается сдеформированным по отношению к старому и стремится вытягиваться по направлению к минимуму оптимизируемой функции.

В том случае, если минимум квадратичной функции оказался внутри симплекса, его надо уменьшить. Координаты вершин нового симплекса можно вычислить по формулам:

$$x_i^p = x_i^* + \nu(\delta_{ip} - 1/(n + 1)) \quad (i = 1, \ldots, n;\ p = 0, \ldots, n) \tag{222}$$

где x^*_i — координаты точки минимума; $\nu<1$ — коэффициент сокращения линейных размеров.

Коэффициент ν ориентировочно можно принять равным 0,5, но более целесообразно его определять в процессе адаптации программы к конкретной задаче. Если после уменьшения размеров симплекса точка минимума

все же остается внутри него, коэффициент ν можно уменьшать. Если потребуется одно отражение — коэффициент ν принят удачно. Если для попадания точки минимума внутрь симплекса требуется более одного отражения, коэффициент ν надо увеличивать.

Процесс поиска минимума заканчивается, если линейные размеры симплекса уменьшились в 100...10 000 раз.

4.4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РАВНОМЕРНЫХ ЗАПАСОВ И СИМПЛЕКСНЫХ ПОДОБЛАСТЕЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В параграфе 3.3 описан метод и получены формулы, применяемые при решении задач математического программирования. Формулы содержат значения первых и вторых частных производных, которые можно вычислять либо непосредственно, либо по разностной схеме (см. 4.1). Для применения методов симплексных подобластей более удобно пользоваться функцией P (99), что, не меняя идеи метода, приведет к некоторой модификации расчетных формул.

Схема метода равномерных запасов в сочетании с методом симплексных подобластей выглядит следующим образом:

а) назначается оценочное значение целевой функции R_0 и в области, определяемой системой неравенств (96), (97), строится симплекс по возможности крупного размера;

б) начиная с этого симплекса, по методу симплексных подобластей находится безусловный максимум функции P. Высокая точность при этом не нужна. Поэтому, как правило, бывает достаточно ограничиться сокращением размеров симплекса в 2...10 раз;

в) выполняется движение к минимуму по интегральной кривой системы дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial R_0} = \frac{P}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (223)$$

являющейся аналогом системы (112) и использующей функцию P, определяемую формулой (99);

г) процесс заканчивается при достижении области почти оптимальных решений с заданным уровнем потерь или с заданным числом дискретных решений.

Укрупненная блок-схема алгоритма приведена на рис.

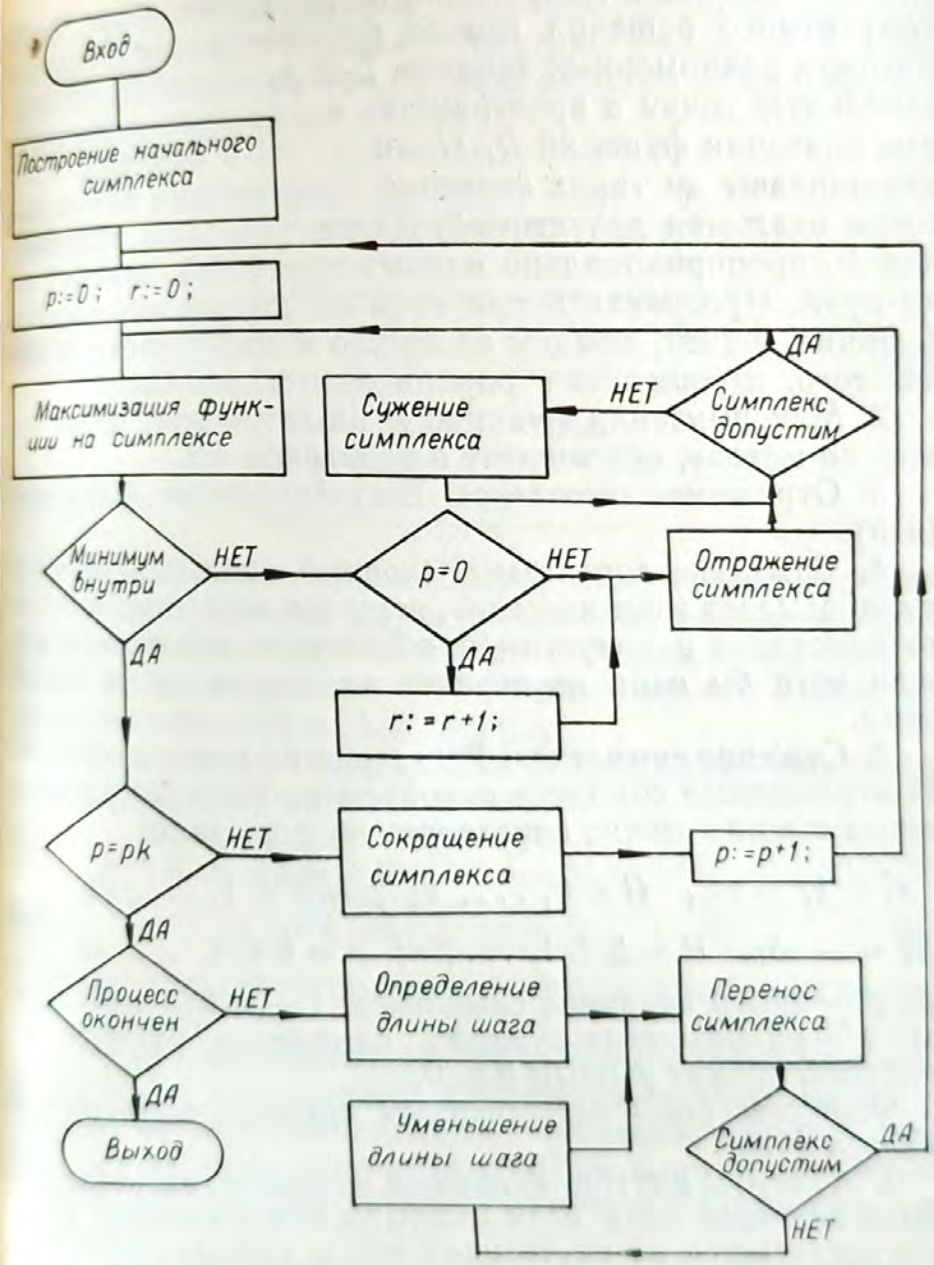


Рис. 18. Блок-схема алгоритма условной минимизации с применением методов равномерных запасов и симплексных подобластей.

18. Большинство операторов этой схемы имеют описательное наименование.

1. Построение начального симплекса. Оператор реализует п. «а» алгоритма. Допустимое решение задачи известно из интуитивных соображений. Тогда соответствующую точку принимают за одну из вершин симплекса, ребра его направляют вдоль координатных осей, а остальные вершины выбирают с таким расчетом, чтобы

они находились в допустимой области. Для нахождения допустимого решения можно воспользоваться также и методом равномерных запасов. Для этого выбирают произвольную точку в пространстве параметров, а предельные значения функций R_j ($j=0, ..., m$) в формулах (96) наращивают до таких значений, при которых избранная точка окажется допустимой. Далее, уменьшая приращения R_j пропорционально одному параметру, доводят их до нуля. Продвигаясь при этом по кривой максимумов функции P (99), придем не просто к допустимому, а более того, к решению с равномерными запасами.

2. Максимизация функции P на симплексе. Выполняется по методу, описанному в параграфе 4.2.

3. Отражение симплекса. Выполняется по формулам (219).

4. Симплекс допустим. Условный оператор, который вырабатывает значение «да», если все вершины симплекса находятся в допустимой области, и значение «нет», если хотя бы одна из вершин находится за ее пределами.

5. Сужение симплекса. Выполняется в том случае, если отраженный симплекс недопустим. Тогда координаты новых вершин можно определять по формулам:

$$x_i^p = b_i - \nu a_{pi} \quad (i = 0, \ldots, k;\ p = k+1, \ldots, n);$$
$$x_i^p = -\nu \delta_{ip} \quad (i = k+1, \ldots, n;\ p = k+1, \ldots, n), \qquad (224)$$

где p — номер вершины симплекса; i — номер координаты; ν — коэффициент сужения симплекса, который может быть принят равным 0,5...0,8.

Формулы (224) естественным образом вытекают из формул (219).

6. Минимум внутри. Условный оператор, вырабатывающий значение «да», если минимум квадратичной функции достигается во внутренней точке симплекса, и значение «нет», если минимум находится на его границе.

7. Сокращение симплекса. Выполняется с целью более точной интерполяции минимизируемой функции. Один из вариантов сокращения размера симплекса дается формулами (222). В задачах условной минимизации на форму симплекса накладываются дополнительные требования, в частности, требование о его допустимости. С этой точки зрения преимущества имеют симплексы, все вершины которых находятся на эллипсоиде уровня интерполированной функции P, поскольку эти эллипсоиды принадлежат допустимой области.

Пусть при минимизации интерполированной функции $-P$ минимум был достигнут внутри симплекса и в результате применения метода, описанного в параграфе 4.2, составлена таблица

$$
\begin{array}{c|c|ccc|c|}
 & z_0 & z_1 & \dots & z_n & 1 \\
\hline
x_0 = & c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0n} & d_0 \\
\hline
x_1 = & c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1n} & d_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n = & c_{n0} & c_{n1} & \dots & c_{nn} & d_n \\
\hline
F = & -d_0 & -d_1 & \dots & -d_n & d \\
\hline
\end{array}
\qquad (225)
$$

Пусть, далее, требуется построить симплекс, вершины которого лежали бы на эллипсоиде уровня интерполированной функции $-P$. Пусть этот эллипсоид соответствует уровню функции $-P$, превышающему минимальное ее значение $d/2$ на величину Δ.

В этом случае координаты p-й вершины симплекса выразятся формулами:

$$x_i^p = d_i + k_p c_{ip} \quad (i = 1, \dots, n; \ p = 0, \dots, n), \qquad (226)$$

где

$$k_p = \sqrt{2\Delta/c_{pp}} \quad (p = 0, \dots, n). \qquad (227)$$

В справедливости формул можно убедиться прямой подстановкой.

При пропорциональном уменьшении коэффициентов k_p симплекс уменьшается в размерах, а вершины его переходят на эллипсоид с другим значением целевой функции. Сравнивая объемы исходного и результирующего симплексов, можно добиться желаемого уменьшения его размеров.

8. Процесс окончен. Условный оператор, вырабатывающий значение «да», если получена область почти оптимальных решений с заданным уровнем потерь или с заданным числом дискретных решений.

9. Определение длины шага. Длину шага движения по кривой равномерных запасов рекомендуется определять в процессе адаптации, используя значение параметра p. Если $p=0$, шаг можно увеличить, если $p=1$ — шаг следует оставить без изменения, если $p>1$, шаг надо уменьшить. Начинать процесс можно, задавшись шагом, при котором значение ΔR_0, определяемое формулой (116), уменьшается вдвое.

10. Перенос симплекса. Этот оператор смещает симплекс на вектор шага вдоль кривой равномерных запасов.

11. Уменьшение длины шага. Оператор работает, если смещенный симплекс выходит за пределы допустимой области. Он уменьшает назначенную ранее длину шага путем умножения ее на коэффициент, принимаемый 0,5...0,8.

Рекомендации по построению алгоритма и назначению численных параметров получены в процессе экспериментов на ЭВМ.

4.5. ПЕРЕБОР РЕШЕНИЙ, БЛИЗКИХ К ОПТИМАЛЬНОМУ, ПРИ ДИСКРЕТНОМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Во многих случаях параметры проектирования не могут изменяться непрерывно, а принимают лишь некоторые фиксированные значения. Причина этого заключается в необходимости пользоваться сортаментами, соблюдать требования модульности, унификации и другие требования. Строгое решение задач такого рода сопряжено со значительными трудностями, и эффективных алгоритмов для этого не существует. Поэтому в практических случаях имеет смысл на начальном этапе считать, что параметры проектирования могут изменяться непрерывно, решить задачу оптимизации и выделить в пространстве искомых параметров область решений, близких к оптимальному. Перебор дискретных точек, попадающих в эту область, также затруднителен, поскольку трудно предугадать заранее, какое сочетание дискретных значений параметров окажется допустимым. В данной ситуации полезной оказывается полученная в параграфе 3.5. аппроксимация области почти оптимальных решений эллипсоидом, дающая возможность вести направленный перебор.

Опишем эллипсоид, аппроксимирующий область допустимых решений, близких к оптимальному, в пространстве параметров $x_1, \ldots, x_n$ следующим неравенством

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j \leqslant 0 \quad (x_0 = 1). \tag{228}$$

Заметим, что для того, чтобы неравенство (228) описывало эллипсоид, необходимо, чтобы подматрица $[a_{ij}]_1^n$ была положительно определенной.

Алгоритм перебора построим следующим образом. Определим минимальное и максимальное значения координаты x_1 для точек, принадлежащих эллипсоиду, установив тем самым пределы изменения параметра x_1. Назначим минимальное дискретное значение x_1 из найденного интервала. При зафиксированном значении x_1 неравенство (228) в пространстве параметров $x_2, \ldots, x_n$ также определит эллипсоид, поскольку подматрица $[a_{ij}]^n_2$ будет положительно определенной. Для этого эллипсоида определим пределы изменения x_2 и назначим этой переменной минимальное дискретное значение. Затем рассмотрим эллипсоид в пространстве параметров $x_3, \ldots, x_n$ при зафиксированных значениях x_1, x_2. Продолжая этот процесс, получим, наконец, первую дискретную точку, лежащую внутри эллипсоида. Затем, наращивая x_n в найденных для него пределах, будем получать следующие дискретные точки. Затем нарастим x_{n-1} и повторим процесс перебора параметра x_n. Продолжая в том же духе, получим последовательно координаты всех дискретных точек внутри эллипсоида, не делая ни одной ненужной попытки.

Как видно из краткого описания алгоритма, часто повторяющейся процедурой является установление пределов изменения одного из параметров при фиксированных значениях части из них. Пусть параметры $x_1, \ldots, x_{l-1}$ зафиксированы, а требуется установить пределы изменения x_l. Для определения нижнего предела x'_l в пространстве параметров $x_l, \ldots, x_n$ минимизируем x_l при ограничении (228).

Условия Куна-Таккера для этой задачи таковы:

$$\delta_{lp} + 2\mu \sum_{j=0}^{n} a_{pj} x_j = 0 \quad (p = l, \ldots, n), \tag{229}$$

$$\mu \geqslant 0; \quad \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j \leqslant 0; \quad \mu \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0; \quad x_0 = 1. \tag{230}$$

Введя обозначения

$$y_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 0, \ldots, n; \ x_0 = 1), \tag{231}$$

из (229) и (230) получим:

$$\delta_{lp} + 2\mu y_p = 0 \quad (p = l, \ldots, n); \tag{232}$$

$$\mu \geqslant 0; \quad \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \leqslant 0; \quad \mu \sum_{i=0}^{n} x_i y_i = 0; \quad x_0 = 1. \tag{233}$$

Для того чтобы представить решение задачи в компактном виде, выразим линейные зависимости (231) таблицей

$$
\begin{array}{c|c|ccc|ccc|}
 & 1 & x_1 & \dots & x_l & x_{l+1} & \dots & x_n \\
\hline
y_0 = & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0l} & a_{0,l+1} & \dots & a_{0n} \\
\hline
y_1 = & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1l} & a_{1,l+1} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y_l = & a_{l0} & a_{l1} & \dots & a_{ll} & a_{l,l+1} & \dots & a_{ln} \\
\hline
y_{l+1} = & a_{l+1,0} & a_{l+1,1} & \dots & a_{l+1,l} & a_{l+1,l+1} & \dots & a_{l+1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y_n = & a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nl} & a_{n,l+1} & \dots & a_{nn} \\
\hline
\end{array}
\qquad (234)
$$

и выполним над этой таблицей $n-1$ шагов жордановых исключений с разрешающими элементами $a_{l+1,\,l+1}, \dots, a_{nn}$, что возможно ввиду положительной определенной матрицы $[a_{ij}]^n{}_1$. Получим таблицу следующего вида

$$
\begin{array}{c|c|ccc|ccc|}
 & 1 & x_1 & \dots & x_l & y_{l+1} & \dots & y_n \\
\hline
y_0 = & a^l_{00} & a^l_{01} & \dots & a^l_{0l} & a^l_{0,l+1} & \dots & a^l_{0n} \\
\hline
y_1 = & a^l_{10} & a^l_{11} & \dots & a^l_{1l} & a^l_{1,l+1} & \dots & a^l_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y_l = & a^l_{l0} & a^l_{l1} & \dots & a^l_{ll} & a^l_{l,l+1} & \dots & a^l_{ln} \\
\hline
x_{l+1} = & a^l_{l+1,0} & a^l_{l+1,1} & \dots & a^l_{l+1,l} & a^l_{l+1,l+1} & \dots & a^l_{l+1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n = & a^l_{n0} & a^l_{nl} & \dots & a^l_{nl} & a^l_{n,l+1} & \dots & a^l_{nn} \\
\hline
\end{array}
\qquad (235)
$$

Верхний индекс l при обозначениях элементов этой таблицы указывает на то, что аргументы $x_0, \dots, x_l$ остались наверху таблицы. При этих обозначениях $a_{ij} = a^n{}_{ij}$ $(i, j=0, \dots, n)$; элементы матрицы, обратной $[a_{ij}]^n{}_1$,— $a^0{}_{ij}$ $(i, j=1, \dots, n)$; элементы матрицы, обратной $[a_{ij}]^n{}_0$,— $a^{-1}{}_{ij}$ $(i, j=0, \dots, n)$. В этих обозначениях легко записываются также элементы матрицы, преобра-

зованной по Гауссу, если исключения ведутся снизу вверх:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
a_{00}^{0} & & & & & & \\
\hline
a_{10}^{1} & a_{11}^{1} & & & & & \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
\hline
a_{l0}^{l} & a_{l1}^{l} & \ldots & a_{ll}^{l} & & & \\
\hline
a_{l+1,0}^{l+1} & a_{l+1,1}^{l+1} & \ldots & a_{l+1,l}^{l+1} & a_{l+1,l+1}^{l+1} & & \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\hline
a_{n0}^{n} & a_{n1}^{n} & \ldots & a_{nl}^{n} & a_{n,l+1}^{n} & \ldots & a_{nn}^{n} \\
\hline
\end{array}
\qquad (236)
$$

Решение системы уравнений и неравенств (232), (233), выраженное через элементы таблицы (235):

$$x_l = -\frac{c_l}{a_{ll}^{l}} - \sqrt{\left(\frac{c_l}{a_{ll}^{l}}\right)^2 - \frac{M_l}{a_{ll}^{l}}}\ ; \qquad (237)$$

$$x_i = \sum_{j=0}^{l} a_{ij}^{l} x_j \quad (i = l+1, \ldots, n); \qquad (238)$$

$$\mu = 1 \Big/ \left(2\sqrt{c_l^2 - M_l a_{ll}^{l}}\right), \qquad (239)$$

причем,

$$M_l = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij}^{l} x_i x_j; \qquad (240)$$

$$c_l = \sum_{j=0}^{l-1} a_{lj} x_j. \qquad (241)$$

Учитывая то, что в соответствии с алгоритмом исключения Гаусса

$$a_{ij}^{l-1} = a_{ij}^{l} - a_{il}^{l} a_{lj}^{l} / a_{ll}^{l} \quad (i,\ j = 1, \ldots, l-1), \qquad (242)$$

формулу (240) можно переписать так:

$$M_l = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij}^{l-1} x_i x_j + c_l^2 / a_{ll}^{l} \qquad (243)$$

или, обозначив

$$K_{l-1} = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij}^{l-1} x_i x_j, \qquad (244)$$

прийти к следующей формуле:

$$M_l = K_{l-1} + c_l^2/a_{ll}^l. \tag{245}$$

Тогда формула (237) приобретает вид:

$$x_l^l = -c_l/a_{ll}^l - \sqrt{-K_{l-1}/a_{ll}^l}\,. \tag{246}$$

Нетрудно видеть, что

$$K_0 = a_{00}^0, \tag{247}$$

и для вычисления произвольного K_l $(l=1, \ldots, n)$ можно воспользоваться рекуррентной формулой

$$K_l = K_{l-1} + c_l^2/a_{ll}^l + 2c_l x_l + a_{ll}^l x_l^2 \quad (l = 1, \ldots, n). \tag{248}$$

Таким образом, пришли к системе формул (246)...(248), в которых используются лишь те элементы, которые хранятся в Гауссовской таблице (236). Следовательно, можно заблаговременно вычислить таблицу (236), а затем пользоваться ею в процессе всего перебора дискретных точек, что приводит к существенной экономии вычислительной работы.

По информации, заключенной в таблице (236), можно вычислить объем эллипсоида

$$V_0 = (-\pi a_{00}^0)^{n/2} (a_{11}^1 \cdot \cdot \cdot a_{nn}^n)^{-1/2} / \left(\frac{n}{2}\right)! \tag{249}$$

Решая задачу максимизации x_l при ограничении (228), аналогичным образом приходим к результату:

$$x_l^t = -c_l/a_{ll}^l + \sqrt{-K_{l-1}/a_{ll}^l}\,. \tag{250}$$

Поскольку в задачах перебора очень важны временны́е показатели программы, приведем два варианта эффективного алгоритма перебора дискретных точек, попадающих внутрь эллипсоида. Первый из них (рис. 19) решает задачу для случая, когда дискретные точки имеют координаты $x_1, \ldots, x_n$, кратные соответственно $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, т. е. каждая координата изменяется со своим шагом. Исходные данные к этому алгоритму:

n — число переменных; a^t_{ij} $(i=0, \ldots, n;\ j=0, \ldots, i)$ — элементы таблицы (236), описывающей эллипсоид; Δx_i $(i=1, \ldots, n)$ — шаги изменения параметров.

При работе алгоритма потребуется место для хранения промежуточных данных:

i, j — индексов; x^c, x^t — значений переменных; K_i $(i=0, \ldots, n-1)$ — значений квадратичной функции (248); c_i $(i=1, \ldots, n)$ — коэффициентов (241); x^t_i $(i=1, \ldots, n)$ —

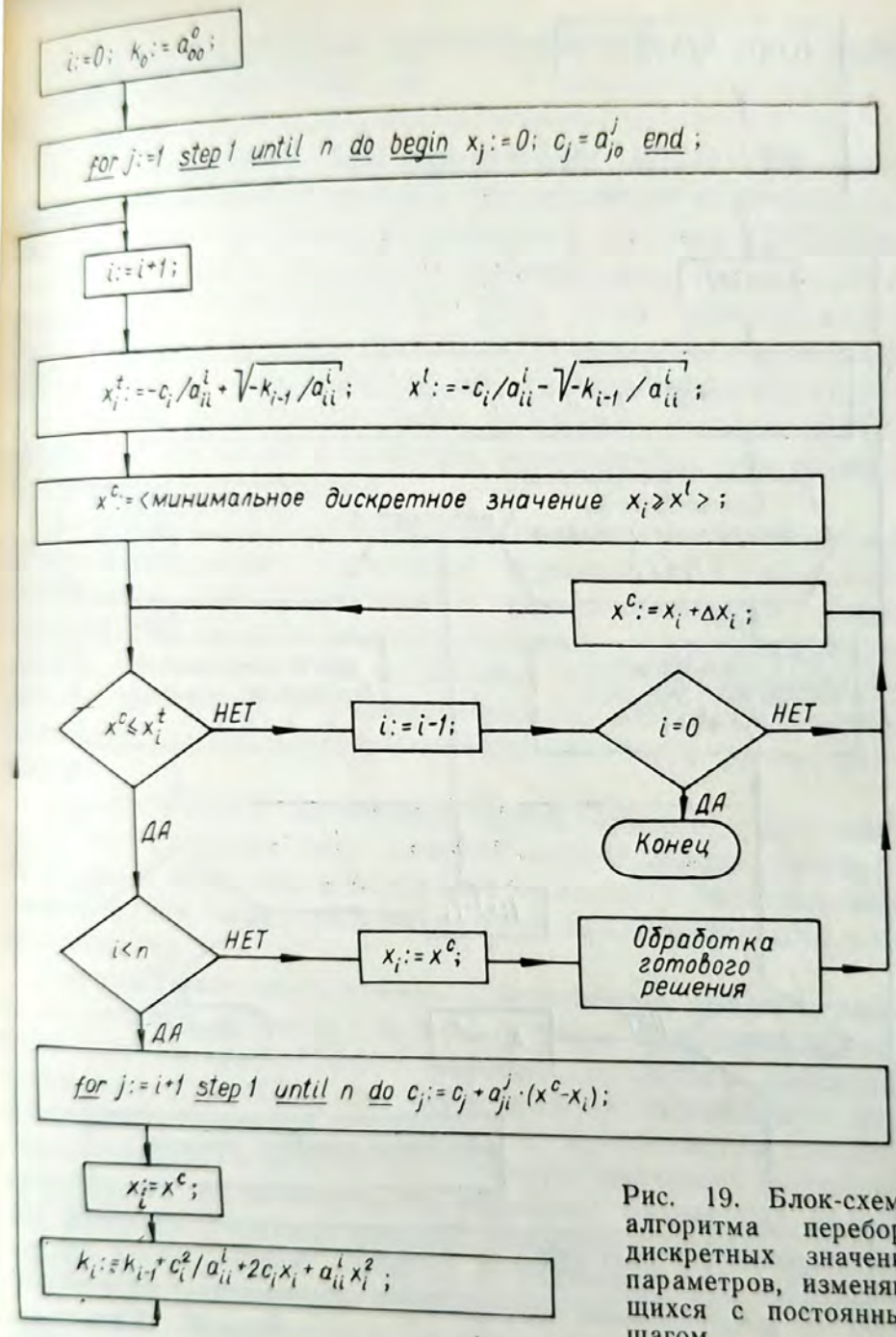


Рис. 19. Блок-схема алгоритма перебора дискретных значений параметров, изменяющихся с постоянным шагом.

верхних пределов изменения переменных. Окончательными результатами являются координаты дискретных точек, последовательно засылаемые в массив x_i ($i=1, ..., n$).

Второй вариант (рис. 20) алгоритма предназначен для случая, когда каждый из параметров характеризуется списком дискретных значений, расположенных в порядке возрастания. В алгоритме не предполагается ни-

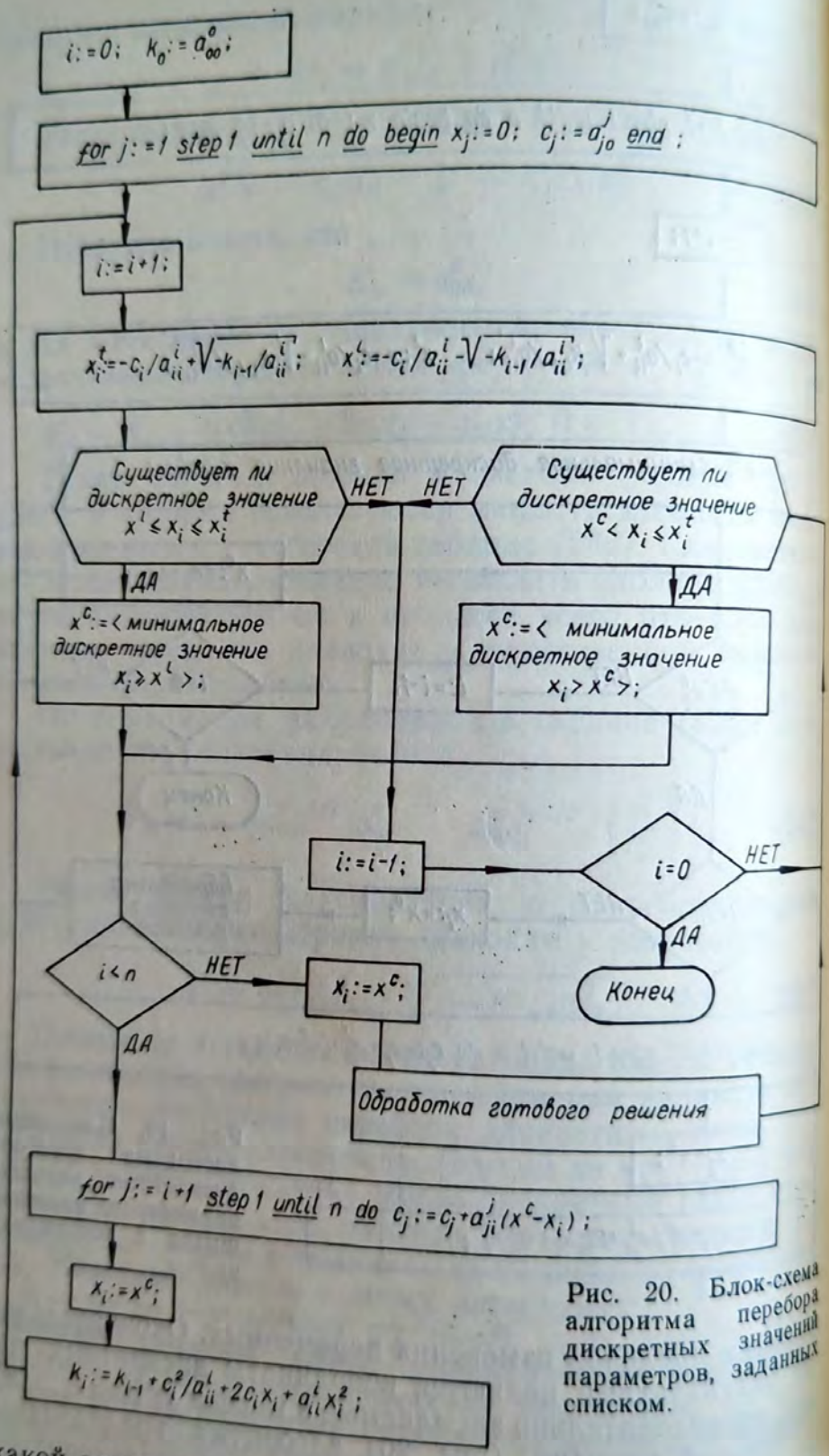


Рис. 20. Блок-схема алгоритма перебора дискретных значений параметров, заданных списком.

какой конкретизации хранения этих списков и все операции с ними приводятся в описательной форме. В исходные данные вместо массива Δx_i ($i=1, ..., n$) должны быть включены списки дискретных значений параметров.

4.6. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ОПТИМИЗИРУЮЩИЙ КОМПЛЕКС СИСТЕМЫ САПР-ЦНИИПСК

Общая характеристика и решаемые задачи. В течение последних лет во Всесоюзном объединении «Союзметаллостройниипроект» была разработана система автоматизированного проектирования строительных металлоконструкций САПР-ЦНИИПСК [35]. Она представляет собой комплекс средств автоматизированного проектирования, предназначенный для повышения производительности труда проектировщиков, снижения сроков проектирования, улучшения качества, экономичности и надежности проектных решений.

В составе САПР-ЦНИИПСК содержится подсистема оптимального проектирования строительных металлоконструкций, предназначенная для нахождения оптимальных параметров индивидуальных и типовых конструкций. Она состоит из отдельных объектно ориентированных программ и универсального оптимизирующего комплекса, работающего со специалистами в диалоговом режиме.

Универсальный оптимизирующий комплекс предназначен для решения двух классов задач: поиска минимума целевой функции в заданной области и оптимальной унификации и типизации металлических конструкций или их элементов.

Программное обеспечение для решения задач первого из классов включает в себя методы безусловной оптимизации и нелинейного программирования. Имеется также ряд программ для исследования окрестности оптимального решения. В частности, определяется множество активных ограничений, степень влияния активных ограничений на оптимальное решение; множество решений, близких к оптимальному, пределы изменения параметров конструкций, близких к оптимальным, функция потерь при отклонении параметров конструкции от оптимальных. Выполняется перебор дискретных значений параметров внутри допустимой области.

Работа с универсальным комплексом проводится в интерактивном режиме с использованием двух дисплеев. Один из них предназначен для просмотра информации, связанной с решением задачи, и для внесения в нее дополнений и изменений. Второй дисплей — управляющий. На его экране демонстрируется перечень программ, которыми можно воспользоваться в данный момент; с его помощью можно приостановить работу машины, продол-

жить ее или перейти к выполнению другой программы. На этом же дисплее появляются сообщения об ошибках, недопустимых ситуациях и указания о необходимости тех или иных действий. В интерактивном режиме можно запретить изменение тех или иных параметров конструкции в процессе решения задачи, избрать в качестве целевой одну из функций, фигурирующих в задаче, игнорировать некоторые из ограничений и т. д.

Универсальный оптимизирующий комплекс подразделяется на четыре задачи.

Задача поиска экстремума методами математического программирования (ЭКСТРЕМУМ) предназначена для определения оптимальных параметров металлических конструкций на основе заданных унифицированных решений.

На первом этапе проектирования в производственном отделе разрабатываются чертежи унифицированного решения проекта конструкции с точностью до конечного числа неопределенных параметров. На основе унифицированного решения составляется математическая модель объекта в форме задачи математического программирования. Может быть подготовлено несколько вариантов целевой функции и несколько вариантов функций-ограничений. Аргументами функций служат неопределенные параметры унифицированного решения.

Задача ЭКСТРЕМУМ содержит две подзадачи:

Подзадача 1. Безусловная минимизация функции:

$$\arg\min \varphi_0(x_1, \ldots, x_n). \tag{251}$$

Подзадача 2. Условная минимизация функции

$$\arg\min \varphi_0(x_1, \ldots, x_n) \tag{252}$$

при ограничениях-неравенствах

$$0 \leqslant x_i \leqslant b_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{253}$$

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) \leqslant R_j \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{254}$$

Условия (253) и (254) содержат константы b_i, R_j, являющиеся входными параметрами, которые можно менять с экрана дисплея.

Задачи могут содержать несколько функций цели. При этом с экрана дисплея нужно указать, какая из них рассматривается на определенном этапе оптимизации конструкции в качестве критерия. Часть ограничений по

желанию проектировщика при решении задачи может не учитываться, часть переменных может быть фиксирована на уровне текущих значений.

При решении задач безусловной оптимизации применяется последовательность трех методов. На начальном этапе используется случайный поиск на заданном прямоугольнике, затем метод спуска с использованием «катящегося симплекса» [27], и на завершающем этапе — метод симплексных подобластей, описанный в параграфе 4.3.

При решении задач условной оптимизации применена комбинация методов равномерных запасов и симплексных подобластей, описанная в параграфе 4.4.

Задача нахождения множества решений, близких к оптимальному (ОКРЕСТНОСТЬ), предназначена для облегчения принятия решения специалистом-проектировщиком по результатам оптимизационных расчетов. Она полезна также для двухстадийного проектирования. Так, исследовав окрестность решения задачи, описанной упрощенной моделью, можно поставить оптимизационную задачу более строго и в дальнейшем вести поиск в узкой области. Перебор дискретных точек на заданном исследователем небольшом участке допустимой области вблизи оптимального решения полезен для проектирования металлоконструкций, у которых к оптимизируемым параметрам предъявляются требования дискретности, естественно возникающие из условий дискретности сортаментов и модульности.

Задача ОКРЕСТНОСТЬ решается после нахождения оптимального решения в задаче ЭКСТРЕМУМ. Для решения обеих задач используется одна и та же управляющая программа, позволяющая вызывать различные процедуры в интерактивном режиме.

Задача ОКРЕСТНОСТЬ состоит из нескольких подзадач.

Подзадача 1. Нахождение множества активных ограничений.

Подзадача заключается в нахождении относительных уклонений точки оптимума от ограничений и вывода их на экран дисплея. Оценивая относительные уклонения, специалист, работающий у экрана, определяет множество активных ограничений.

Подзадача 2. Исследование влияния вариаций ограничений на минимум целевой функции.

Подзадача заключается в определении скоростей изменения минимального значения целевой функции при

изменении правых частей неравенств (253) и (254), т. е. в определении частных производных

$$\partial\varphi_0^*/\partial b_i \quad (i = 1, \ldots, n); \qquad \partial\varphi_0^*/\partial R_j \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{255}$$

Она решается путем нахождения множителей Лагранжа $\mu_1, \ldots, \mu_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, которые выводятся на экран дисплея. Искомые величины выражаются через них следующим образом:

$$\partial\varphi_0^*/\partial b_i = -\mu_i \quad (i = 1, \ldots, n);$$

$$\partial\varphi_0^*/\partial R_j = -\lambda_j \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{256}$$

Подзадача 3. Выделение области решений, близких к оптимальному, и аппроксимация ее эллипсоидом.

По заданному с экрана дисплея значению R_0 выделяется область, ограниченная неравенствами (253), (254) и дополнительным неравенством

$$\varphi_0 (x_1, \ldots, x_n) \leqslant R_0. \tag{257}$$

и аппроксимируется эллипсоидом в соответствии с методом, описанным в параграфе 3.5. Сведения об аппроксимирующем эллипсоиде хранятся в памяти машины для дальнейшего использования.

Подзадача 4. Оценка числа дискретных точек, попадающих в область решений, близких к оптимальному.

Рассматриваемые дискретные точки характеризуются координатами, кратными заданным шагам $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. Для искомой оценки вычисляется отношение объема аппроксимированной области к объему единичного параллелепипеда со сторонами $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. Это отношение приближенно равно числу дискретных точек, попадающих в исследуемую область.

Шаги изменения координат задаются с экрана дисплея. Реализован метод, описанный в параграфе 3.5.

Подзадача 5. Перебор дискретных решений и выбор из их числа группы решений с наилучшими показателями.

Перебираются все дискретные точки, попавшие внутрь аппроксимирующего эллипсоида, отбраковываются недопустимые (не удовлетворяющие системе неравенств (253), (254), (257), а среди допустимых выбирается 10 точек, для которых целевая функция принимает меньшие значения по отношению к остальным перебранным допустимым точкам.

Координаты выбранных точек и значения функций выводятся на экран дисплея. Реализован метод, описанный в параграфе 4.5.

Подзадача 6. Установление минимальных и максимальных значений параметров проектирования для области решений, близких к оптимальному.

Для каждого из исследуемых параметров $x_1, \ldots, x_n$ решаются задачи минимизации и максимизации параметра при ограничениях (253), (254), (257). При этом используются директивы и методы задачи ЭКСТРЕМУМ. Выбор параметра и указание о его минимизации или максимизации задается с экрана при помощи системы признаков.

Второй класс задач универсального оптимизирующего комплекса содержит в себе задачу оптимальной унификации однотипных конструкций в пределах проектируемого объекта (УНИФИКАЦИЯ) и задачу создания оптимального сортамента конструкций (СОРТАМЕНТ). Для каждой из задач необходимо задать неунифицированный набор элементов или сортамент, упорядоченный таким образом, что изделие со старшим номером заменяет любое из изделий с младшим. Кроме того, для каждого изделия должна быть задана функция, определяющая стоимость партии изделий в зависимости от числа изделий в партии. Эта функция должна быть вогнутой.

Для задачи УНИФИКАЦИЯ задается потребность в каждом изделии, а для задачи СОРТАМЕНТ — их общая потребность в единицу времени (обычно, в год) и данные о повторяемости каждого изделия. Решение задачи определяет, какие изделия следует изготавливать и в каких количествах, исходя из минимума суммарной стоимости (для задачи УНИФИКАЦИЯ) или математического ожидания годовой стоимости реализации сортамента (для задачи СОРТАМЕНТ).

Технология решения задачи унификации включает этапы программирования функции стоимости партии изделий, включение этой программы в универсальный оптимизирующий комплекс и превращение его в специализированную задачу, работающую в интерактивном режиме.

При помощи дисплея можно по желанию проектировщика включить то или иное изделие в окончательный сортамент, исключить его из сортамента, изменить сведения о потребности в изделиях.

Задачи УНИФИКАЦИЯ и СОРТАМЕНТ разработаны на базе методов, изложенных в работе [36].

Работа с дисплеями. Универсальный оптимизирующий комплекс подсистемы использует в качестве устройств ввода-вывода информации в интерактивном режиме два буквенно-цифровых дисплея из комплекта ЕС-7906. Один из них предназначен для работы с информационным массивом ТАБЛО (ИНФОРМАЦИОННЫЙ ДИСПЛЕЙ), второй — обеспечивает возможность активного вмешательства человека в работу программы (УПРАВЛЯЮЩИЙ ДИСПЛЕЙ).

Массив ТАБЛО содержит информацию, необходимую для оценки текущего состояния процесса оптимального проектирования. Он представляет собой таблицу с заголовками и пояснениями и содержит графы для входной, результирующей и дополнительной информации. ТАБЛО объявляется использующими его процедурами как одномерный массив текстовых строк по 80 символов в каждой. Все изменения, происшедшие во время работы системы с элементами информации, входящими в ТАБЛО, немедленно переносятся в графы, отведенные для результирующей информации. Текущее состояние ТАБЛО постоянно высвечивается на информационном дисплее (рис. 21).

На экран УПРАВЛЯЮЩЕГО ДИСПЛЕЯ система выводит сообщения о ходе решения задачи, а также список основных процедур универсального комплекса. Этот список представляет собой таблицу, состоящую из текстовых строк по 80 символов в каждой, содержащую номера, имена точек входов и смысловые наименования основных проблемных и вспомогательных процедур, а также заголовки (рис. 22).

Человек может вносить изменения в информационный массив и управлять работой программ универсального комплекса. Эти операции выполняются посредством директив. *Директива* — слово или группа слов, находящихся в определенных позициях первой строки дисплея. Нажатие клавиши ВВОД инициализирует выполнение директивы. После выполнения директивы содержимое первой строки дисплея автоматически меняется, в частности, в позициях, отведенных для директивы, подготавливается директива-преемник. Директива может быть также занесена с помощью клавиши дисплея. Она занимает первые 20 позиций строки. В следующих 20 позициях первой строки УПРАВЛЯЮЩЕГО ДИСПЛЕЯ высвечивается слово ПОДГОТОВЛЕНА или слово ОТСУТСТВУЕТ, определяющее наличие в системе процедуры, имя которой содержится в позициях 1...20. В позициях 41...50

```
ВВЕРХ . . . . . .ПАРАМЕТРЫ.ПРОЕКТИРОВАНИЯ . . . . . .
+НОМ..ТЕК.ЗН.ВЕРХ.ГР.ОТКЛОН . . . . . .А — РАЗМЕР.ЯЧЕЙКИ, . . . . . М
...1.   +2605+1.+4000+1.+3488+2 . . . . . .Н — ВЫСОТА.ПОКРЫТИЯ, . . . . . М
...2.   +1558+1.+2000+1.+2208+2 . . . . . .ФУНКЦИИ . . . . . .
+НОМ..ТЕК.ЗН.ВЕРХ.ГР.ОТКЛОН . . . . . .ПРИВЕДЕННЫЕ. ЗАТРАТЫ, . . . . . РУБ/ГОД/М2
М..1.   +2511+1.+1000+2.+7489+2 . . . . . .СТОИМОСТЬ.В.ДЕЛЕ, . . . . . РУБ/М2
И..2.   +1317+2.+4000+2.+6708+2 . . . . . .ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ.ИЗДЕРЖКИ, . . . . РУБ/ГОД/М2
И..3.   +9306+0.+8000+1.+8837+2 . . . . . .РАСХОДЫ.НА.ОТОПЛ.,ВЕНТИЛ.,. . . . . .»...».».
И..4.   +3117+0.+7000+1.+9555+2 . . . . . .СТОИМОСТЬ.НЕСУЩ.КОНСТРУКЦИЙ, . . . . . РУБ/М2
И..5.   +1013+2.+3500+2.+7106+2 . . . . . .РАСХОД.МЕТАЛЛА, . . . . . Т/М2
И..6.   +2483—1.+5000—1.+5035+2 . . . . . .СТОИМОСТЬ.ОГРАЖДЕНИЙ, . . . . . РУБ/М2
И..7.   +3038+1.+2000+2.+8481+2 . . . . . .
```

Рис. 21. Одно из состояний экрана ИНФОРМАЦИОННОГО ДИСПЛЕЯ.

```
ОСТАНОВИТЬ . . . . . ПОДГОТОВЛЕНА . . . . . ПРОЦЕДУРА.BENDER . . ВЫПОЛНЯЕТСЯ . .
+.НОМ...ИМЯ . . . . . ПРОЦЕДУРЫ.ОПТИМИЗАЦИИ . . . . . .
.1.01..BEZMEN...ЛОГИЧЕСКИЙ.КОНТРОЛЬ.ФОРМИРОВАНИЕ.МАССИВОВ.И.ПРИЗНАКОВ . . . . . .
.1.02..BENTOD...ПРОВЕРКА.ДОПУСТИМОСТИ . . . . . .
.1.03..BEBOFA...БЕЗУСЛОВНАЯ...ОПТИМИЗАЦИЯ . . . . . .
.1.04.BENDER...ОПТИМИЗАЦИЯ.С.ОГРАНИЧЕНИЯМИ — НЕРАВЕНСТВАМИ . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
+.НОМ...ИМЯ . . . . . ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ . . . . . .
.2.01..BEDA . СНЯТЬ.ЗАДАЧУ . . . . . .
.2.02..BEND . ЗАВЕРШИТЬ ЗАДАЧУ . . . . . .
.2.03..BENTAB ПЕЧАТЬ.TABLO.НА.АЦПУ . . . . . .
```

Рис. 22. Одно из состояний экрана УПРАВЛЯЮЩЕГО ДИСПЛЕЯ.

постоянно высвечивается слово ПРОЦЕДУРА, а в позициях 51...60 — имя основной процедуры, которая в данный момент введена в машину. В оставшейся части строки УПРАВЛЯЮЩЕГО ДИСПЛЕЯ помещается одно из определяющих слов: ВЫПОЛНЯЕТСЯ, ЗАВЕРШЕНА, ОСТАНОВЛЕНА, ПРЕРВАНА.

Директивы приведены в табл. 10.

Для автоматического перенесения программами универсального комплекса на экраны дисплеев изменений, происшедших с высвечиваемыми массивами в процессе выполнения задачи, а также для перенесения на экран УПРАВЛЯЮЩЕГО ДИСПЛЕЯ некоторых сообщений о ходе выполнения задачи разработаны специальные процедуры обращения к дисплеям изнутри программ универсального комплекса.

Набор процедур для работы с дисплеями позволяет выполнять практически все операции, необходимые для работы в режиме «человек-машина». Он предоставляет удобства как для программиста-разработчика САПР, так и для человека, работающего с системой в интерактивном режиме.

Технология решения задач. Решение оптимизационных задач при помощи ЭВМ предполагает выполнение следующих этапов работ:

1. Содержательная формулировка задачи в проектном отделе, вписывающаяся в рамки задачи математического программирования.

2. Математическая запись задачи в виде формул, выполняемая совместно проектным отделом и отделом автоматизации проектирования, эксплуатирующим подсистему.

3. Программирование и отладка процедуры для вычисления функций в соответствии с формулами, подготовленными при выполнении п. 2, и включение этой процедуры в библиотеку подсистемы.

4. Подготовка исходных данных для решения конкретной задачи в проектном отделе.

5. Перфорация исходных данных с проверкой.

6. Решение задачи в интерактивном режиме на ЭВМ. Решение выполняется совместно двумя специалистами: высококвалифицированным проектного отдела, имеющим право принимать решения (проблемным специалистом), отдела автоматизации проектирования, эксплуатирующего подсистему (системным специалистом). Каждый из специалистов работает за экраном дисплея.

В распоряжении проблемного специалиста находится

Таблица 10. **Директивы для работы с дисплеями**

Директива	Выполняемые действия
ИНФОРМАЦИОННЫЙ ДИСПЛЕЙ	
ВВЕРХ	Строки ТАБЛО, содержащиеся в 3...12 строках дисплея, сдвигаются вверх на одну позицию. Во второй строке дисплея сохраняется заголовок, относящийся к тексту, содержащемуся в строке 3. В первой строке дисплея остается директива ВВЕРХ
ВВЕРХ ДО ЗАГОЛОВКА	Строки ТАБЛО сдвигаются вверх до появления во второй строке дисплея следующего заголовка. В первой строке остается директива ВВЕРХ ДО ЗАГОЛОВКА
ВНИЗ	Строки ТАБЛО сдвигаются вниз на одну позицию. В строке 2 сохраняется необходимый заголовок. В первой строке остается директива ВНИЗ
ВНИЗ ДО ЗАГОЛОВКА	Строки ТАБЛО сдвигаются вниз до появления во второй строке дисплея предыдущего заголовка. В первой строке остается директива ВНИЗ ДО ЗАГОЛОВКА
ВНЕСТИ	Содержимое строк 3...12 дисплея заносится в массив ТАБЛО на свое место. В первой строке дисплея подготавливается директива ВВЕРХ
УПРАВЛЯЮЩИЙ ДИСПЛЕЙ	
ВВЕРХ	Выполняются действия с массивом МЕНЮ, аналогичные действиям, выполняемым одноименной директивой для работы с ИНФОРМАЦИОННЫМ ДИСПЛЕЕМ
ВВЕРХ ДО ЗАГОЛОВКА	То же
ВНИЗ	»
ВНИЗ ДО ЗАГОЛОВКА	»
ОСТ	Директива приостанавливает вычисления и меняет содержимое первой строки. Вместо директивы ОСТ подготавливается директива ПРОДОЛЖИТЬ, определяющее слово в правой половине строки заменяется словом ОСТАНОВЛЕНА
ПРОДОЛЖИТЬ	Директива возобновляет вычисления, прерванные директивой ОСТ. Вместо директивы ПРОДОЛЖИТЬ подготавливается директива ОСТ. Высвечивается определяющее слово ВЫПОЛНЯЕТСЯ

Директива	Выполняемые действия
<Имя точки входа>	Директива передает управление процедуре, имя которой или ее номер содержится в первых шести позициях первой строки УПРАВЛЯЮЩЕГО ДИСПЛЕЯ. Содержание первой строки после обращения к процедуре с именем ВВВВВВ: ОСТ ПОДГОТОВЛЕНА ВВВВВВ ВЫПОЛНЯЕТСЯ
ВОССТАНОВИТЬ МЕНЮ	Директива вызывает появление на экране УПРАВЛЯЮЩЕГО ДИСПЛЕЯ предыдущего содержания его 2...12-й строк. Вычисления приостанавливаются. Состояние первой строки после выполнения директивы: ВВЕРХ ПОДГОТОВЛЕНА ВВВВВВ ПРЕРВАНА

ИНФОРМАЦИОННЫЙ ДИСПЛЕЙ, с помощью которого можно просматривать обрабатываемую информацию с целью изучения и проверки, а при необходимости и корректировки ее. Управление дисплеем предусмотрено предельно простым.

В распоряжении системного специалиста находится УПРАВЛЯЮЩИЙ ДИСПЛЕЙ, через который происходит управление ходом решения задачи. На этот же дисплей выводятся диагностические сообщения подсистемы. Управление решением задачи с помощью дисплея требует знания структуры универсального комплекса подсистемы.

Оба дисплея должны находиться в одном помещении с тем, чтобы специалисты могли общаться друг с другом и принимать согласованные решения. Кроме того, проблемный специалист, менее опытный в части работы с ЭВМ и системой, сможет получить необходимые консультации у системного специалиста.

7. В интерактивном режиме рассматривается необходимое с точки зрения проблемного специалиста число вариантов. Варианты, принятые для проекта, должны быть решены повторно в другое время. Критерием правильности решения задачи является совпадение результатов, полученных при различных ее постановках на ЭВМ.

Предлагаемый порядок расчетов может корректироваться в соответствии с технологией, установленной в вычислительном центре.

4.7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ СИСТЕМЫ ДИАРАМА

Система ДИАРАМА разработана институтами Всесоюзного объединения «Союзметаллостройниипроект» и представляет собой комплекс программных средств для расчета строительных металлоконструкций в диалоговом режиме. Система предусматривает оптимизацию жесткостей элементов проектируемой конструкции при ее неизменной геометрической схеме. Ориентация на расчет пространственных шарнирно-стержневых и рамных систем делает ее пригодной для решения задач оптимального распределения жесткостей элементов статически неопределимых ПРП.

Рассматриваются стержневые системы с заданным расположением осей элементов. Элементы разбиваются на несколько групп таким образом, чтобы поперечные сечения элементов одной группы были одинаковы. В качестве основных неизвестных принимаются площади сечения стержней. Число этих неизвестных равно числу групп стержней. В качестве целевой минимизируемой функции принимается теоретический объем материала конструкции

$$V = \sum_{i=1}^{k} l_i A_i \,, \tag{258}$$

где A_i — площадь поперечного сечения стержней i-й группы; l_i — суммарная длина стержней i-й группы; k — число групп стержней.

Поскольку $l_1, \ldots, l_k$ — константы задачи, целевая функция линейна.

Для конструкции устанавливается система ограничений в виде неравенств

$$\varphi_j(A_1, \ldots, A_k) \leqslant R_j \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{259}$$

в число которых входят все условия, необходимые для обеспечения прочности, устойчивости и деформативности системы. Число этих ограничений достаточно велико. В состав ограничений входят условия прочности материала стержней в различных точках, условия устойчивости стержней, ограничения на прогибы при различных сочетаниях нагрузок, ограничения на площади стержней и т. п.

Ограничения (259) сложным образом зависят от площадей сечений элементов и, как правило, нелинейны. Таким образом, речь идет о решении задачи нелинейного программирования с линейной целевой функцией.

В системе ДИАРАМА организуется итерационный процесс решения задачи, причем, на каждом шаге ее решения ограничения (259) линеаризуются. Основой для такой линеаризации служит серия из $k+1$ расчета оптимизируемой системы на все необходимые сочетания нагрузок при различных наборах площадей сечений элементов. В пространстве основных неизвестных $A_1, \ldots, A_k$ набор площадей сечений для одного расчета соответствует точке. Наборы A^i_j $(i=0, \ldots, k;\ j=1, \ldots, k)$, где i — номер набора, j — номер неизвестного, должны выбираться так, чтобы точки, соответствующие серии расчетов, не лежали бы в одной гиперплоскости. Принято набор $A^0_1, \ldots, A^0_k$ назначать при задании исходных данных, остальные k наборов получать по формуле:

$$A^i_j = A^0_j\,(1 + \mu\delta_{ij}), \tag{260}$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера; μ — коэффициент аппроксимации (обычно $\mu=1...10$).

В этом случае ограничения (259) можно представить в линеаризованном виде

$$\overline{\varphi}_j = \varphi_j(A^0_1, \ldots, A^0_k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi_j(A^i_1, \ldots, A^i_k) - \varphi_j(A^0_1, \ldots, A^0_k)}{\mu A^0_i} \times$$

$$\times (A_i - A^0_i) \leqslant R_j \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{261}$$

и решать задачу линейного программирования с целевой функцией (258) и ограничениями (261). Площади стержней, найденные в результате решения этой задачи, принимаются в качестве $A^0_1, \ldots, A^0_k$ и выполняется следующий шаг оптимизации жесткостей элементов. Процесс повторяется несколько раз. Чтобы процесс не расходился, желательно в состав ограничений (259) включить ограничения на площади сечений элементов снизу:

$$A_i \geqslant A^{\min}_i \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{262}$$

Остальные ограничения из множества (259) представляют собой условия прочности материала стержней в различных точках, условия устойчивости стержней и ограничения на прогибы. Для определения соответствующих функций φ_j требуются не только площади сечений стержней, но и другие характеристики: моменты и радиусы инерции, моменты сопротивления сечений. Требуется знать зависимость этих характеристик от площадей сечений стержней. Режим оптимизации жесткостей систе-

Таблица 11. **Законы формообразования в системе ДИАРАМА**

Закон изменения сечений		Коэффициенты пропорциональности при изменении			
				моментов	
Тип сечений	Изменяются пропорционально μ	радиуса инерции	площади сечения	сопротивления	инерции
1. Геометрически подобные	Все размеры сечения	μ	μ^2	μ^3	μ^4
2. Тонкостенные с геометрически подобным контуром и фиксированной толщиной стенки	Размеры контура	μ	μ	μ^2	μ^3
3. Тонкостенные с фиксированным контуром	Толщина стенки	1	μ	μ	μ

мы ДИАРАМА предполагает три основных закона изменения сечения (табл. 11).

Первый закон принимается в программе по умолчанию, а второй и третий должны быть указаны в исходных данных. Ввиду того, что функции из условий (259) линеаризуются, нет необходимости знать всю функциональную зависимость. Достаточно вычислить значения этих функций при известных $A_1, \ldots, A_k$, что используется в программе, которая подсчитывает лишь значения функций φ_j для каждого из $k+1$ статических расчетов системы с различными площадями сечений стержней.

Режим оптимизации жесткостей системы ДИАРАМА может быть с успехом использован при проектировании ПРП для случая, когда положение узлов и осей стержней заданы, и необходимо найти оптимальное распределение материала.

5. ВЛИЯНИЕ ПРОЕКТНЫХ ФАКТОРОВ НА ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПОКРЫТИЙ

В предыдущих главах описаны адекватные натуре математические модели, методы и средства автоматизированного поиска оптимальных параметров ПРП и соответствующих показателей качества. На этой основе с помощью ЭВМ решены отдельные задачи оптимизации прикладного характера и серии задач, связанные с изменением тех или иных факторов проектирования (уро-

вень нагрузки, прочностные свойства стали, характеристики сортамента, условия изготовления, единичные показатели стоимости конструкций и их эксплуатации).

5.1. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ПРП

В качестве объектов численного анализа рассмотрим по одному представителю от стержневых плит, сетчатых оболочек и куполов для отработки особенностей задачи по каждому подклассу ПРП. Поскольку оптимизация проводится в рамках конкретной конструктивной системы, здесь, как и далее, важным моментом является подбор проекта-аналога (прототипа), который поставляет значительную часть исходной информации.

Для первой из задач прототипом приняты несущие конструкции покрытия Дворца спорта в Иркутске, выполненные по схеме рис. 6, *а* при $A=B=42$ м, $a^0=b^0=3$ м ($n^0=m^0=14$). Высота плиты $h^0=2{,}12$ м, опирание — по контуру, расчетная нагрузка $q=2{,}7$ кПа, расход стали обычной прочности $\bar{g}=37$ кг/м². Стержни поясных сеток и решетки — из труб, узлы — на ванной сварке. Для кровли предусмотрены мембранные алюминиевые панели размером «на ячейку» из листа толщиной 1,5 мм, обрамленные уголками. Они крепятся непосредственно к элементам верхних поясов. На узлы нижней поясной сетки установлены стойки, которые упираются снизу в центр панели и с помощью вывинчивающихся болтов создают в мембране предварительное напряжение [2].

Минимизируются приведенные затраты в виде (58), отнесенные к единице площади перекрываемого плана. Основные варьируемые параметры — размеры a, b и h. Масса определяется по формуле (59), при этом покрытие разбито на три зоны, общие для всех типов стержней: центральную (I) размером 21×21 м, боковую (II) из четырех прямоугольников 10,5×21 м и угловую (III) из четырех квадратов 10,5×10,5 м. По мере удаления от центра пояса проектируются из более тонкостенных труб, поэтому $\rho_1=0{,}6$; $\rho_2=0{,}75$; $\rho_3=1$ — см. формулу (32). Для верхних поясов учитывается местный изгиб: $\omega'_1=0{,}45$; $\omega'_2=0{,}6$; $\omega'_3=0{,}9$ — см. (37). Вызывающая его нагрузка q' от кровли берется исходя из опирания панелей по четырем сторонам и может быть сведена практически к нулю увеличением распора в упомянутых выше стойках. В связи с этим рассматриваются два граничных случая: а) $q'_{1z}=q'_{2z}=q'=1{,}6$ кПа и б)

$q'=0$. Все стержни выполняются из стали обычной прочности.

Единичные показатели стоимости основных несущих конструкций приняты по проектным данным:

$$C_м = 300 \text{ руб/т}; \quad C_u = 10 \text{ руб.}; \quad C_b = C_g = 1{,}5 \text{ руб.}$$

В кровельных панелях стоимость определяется, в основном, стоимостью алюминиевого листа — 1000 руб. за 1 т [8], так что $C_l=1{,}7$ руб/м^3, для стеновых ограждений: $C_ш=10$ руб/м^2. Остальные исходные константы стоимости: $H=0{,}05$ год$^{-1}$, $P=0{,}1$ руб/(м$^3\cdot$год).

На ЭВМ получены следующие результаты:

а) $a^* = b^* = 2{,}99$ м; $h^* = 2{,}08$ м; $\bar{g}^* = 36{,}5$ кг/м^2;

б) $a^* = b^* = 3{,}21$ м; $h^* = 2{,}18$ м; $\bar{g}^* = 32{,}9$ кг/м^2.

Таким образом, параметры прототипа достаточно близки к оптимальным, а передачей нагрузки от кровельных панелей в узлы нижнего пояса можно достичь заметной экономии стали. Точность расчетной зависимости (59) удовлетворительна.

Во второй задаче рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с сеткой по схеме раскосной решетки как на рис. 8, *г*. Основные размеры и конструктивные решения аналогичны таковым в пространственной решетчатой системе «Руланд» [37]. Перекрывается план со сторонами $A=24$ м, $B=18$ м, опирание — по торцам, нагрузки: $q_0=0{,}5$ кПа, $q_1=3{,}5$ кПа (см. параграф 2.4, рис. 10, *б*). Стержневые элементы выполняются из стальных труб, соединения — на механических деталях типа «IFI». Нагрузки от кровли передаются в узлы с помощью прогонов и профилированной обшивки или специальных криволинейных панелей, различных для отапливаемых и неотапливаемых зданий, причем прогоны — из стальных швеллеров, а ограждение — из стальных или алюминиевых листов.

Используется целевая функция типа (64). Разыскиваются параметры α, m, n (центральный угол, число граней, число панелей), обеспечивающие минимум приведенных затрат на 1 м^2 пола, т. е. $\min \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi}=\varphi/(AB)$. Масса стержней вычисляется по формулам, подобным (65), исходя из пяти типоразмеров. Удельный радиус инерции колеблется в пределах 0,65...1,0; расчетное сопротивление стали 210 МПа.

По сравнению с предыдущей задачей некоторые удельные показатели стоимости изменились: для узлов и

стержней — в бо́льшую сторону, до 15 и 5 руб. соответственно, а для кровли — в меньшую, до 0,8 руб/м³.

Полученные результаты:

$\alpha^*=95°$; $m^*=8$; $n^*=6$; $\overline{g}^*=24{,}2$ кг/м²; $\overline{\varphi}^*=2{,}93$ руб/м²/год. Найдены также оптимальные параметры и соответствующие показатели для конструкции минимальной массы:

$\alpha^*=160°$; $m^*=12$; $n^*=10$; $\overline{g}^*=16{,}6$ кг/м²; $\overline{\varphi}^*=4{,}66$ руб/м²/год. Изменение критерия качества привело к существенно иному ответу. Экономия стали сопровождается перерасходом приведенных затрат в 1,5 раза за счет увеличения количества элементов, в частности, дорогостоящих узловых деталей, роста строительного объема здания, а, значит, и эксплуатационных расходов. Представляет интерес сравнение с наиболее близким вариантом покрытия «Руланд» (радиус дуги 10,5 м; $A=24$ м; $B\approx19{,}2$ м), в котором $\alpha^0\approx130°$, $m^0=n^0=10$. Этим параметрам в нашем случае соответствуют показатели $\overline{g}^p=17{,}8$ кг/м², $\overline{\varphi}^p=3{,}66$ руб/м²/год, т. е. «золотая середина». Можно говорить об инженерной интуиции, о многокритериальной постановке задачи, о конъюнктурных преимуществах упрощенного критерия (минимума массы) в условиях нехватки металла,— но во всех случаях оптимизационный анализ дает количественную оценку конкретной ситуации.

Третья из задач численных исследований ПРП касается оптимизации сферического купола в виде двухсетчатой системы с треугольной ячейкой. Высота двухветвевых стержней 2,5 м, их пояса выполняются из спаренных неравнобоких уголков, а решетка — из электросварных труб. К верхним поясам приваривается стальная мембрана из листа толщиной 1...1,5 мм, которая развязывает их из плоскости наибольшей жесткости сквозных элементов. Нижние пояса также раскреплены с помощью гибких полосовых связей или панелей подвесного потолка. Для взаимного предварительного напряжения полос и мембраны между ними могут быть установлены трубчатые распорки, как стойки в покрытии Дворца спорта. Однако в этом случае разгрузить составные стержни от местной изгибающей нагрузки не удается.

Характерная особенность схемы — наличие двух участков разбивки сетки. Объясняется это стремлением максимально унифицировать размеры элементов. Звездчатая система из равнобедренных треугольных ячеек (см. рис. 8, *е*), у которой все квазимеридиональные стержни II

одинаковой длины b, особенно эффективна в экваториальной зоне, где кольцевые стержни I соседних ярусов также почти однотипны. По мере приближения к вершине ячейки сужаются, что приводит к излишнему увеличению числа элементов, усложняет узлы. Поэтому в центральной части купола с углом раскрыва приблизительно 30° целесообразно разбивку изменить. Для этой зоны можно применить, например, схему по рис. 8, *ж*, которая в этих условиях дает малый разброс длин a кольцевых стержней, и при этом выдержать равенство боковых сторон b равнобедренных треугольников по всей поверхности купола как в центральной, так и в периферийной частях.

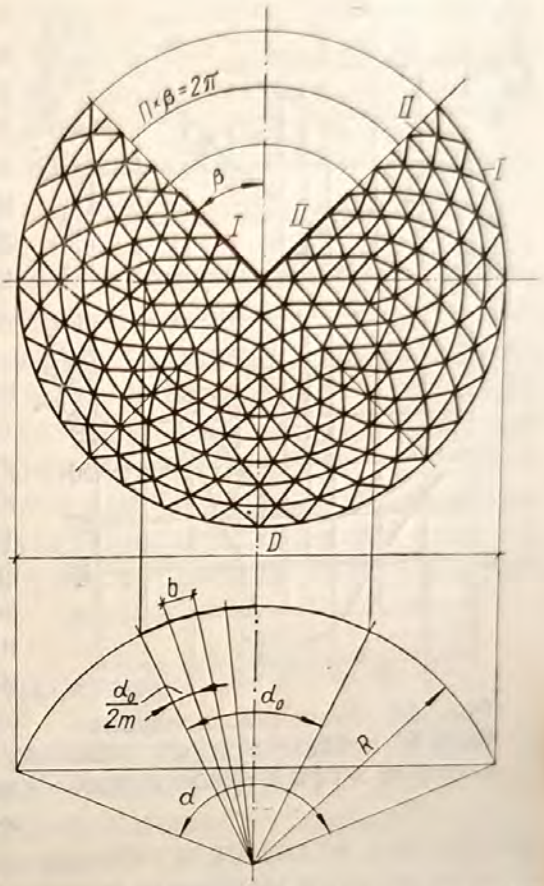


Рис. 23. Схема и основные параметры сетчатой поверхности.

Таким образом, общая схема разбивки сетки может выглядеть как на рис. 23. Устанавливается число секторов n, затем число дроблений m меридионального ребра-границы секторов в центральной части купола. Если известны угол раскрыва последней (α_0) и радиус сферы (R), то несложно определить единую длину стержней II

$$b = 2R \sin(\alpha_0 / (4m)). \qquad (263)$$

Зная, что число кольцевых стержней в одном ярусе периферийной части равно nm, а также b из (263), реализуем звездчатую разбивку с помощью формул (67) и (68), где вместо n следует подставить nm. Подобный подход позволяет варьировать геометрические параметры в достаточно широких пределах. Составленная программа исследует как пологие, так и подъемистые купола, перекрывающие отверстие с заданным диаметром D. Случаи вырожденной разбивки практически не

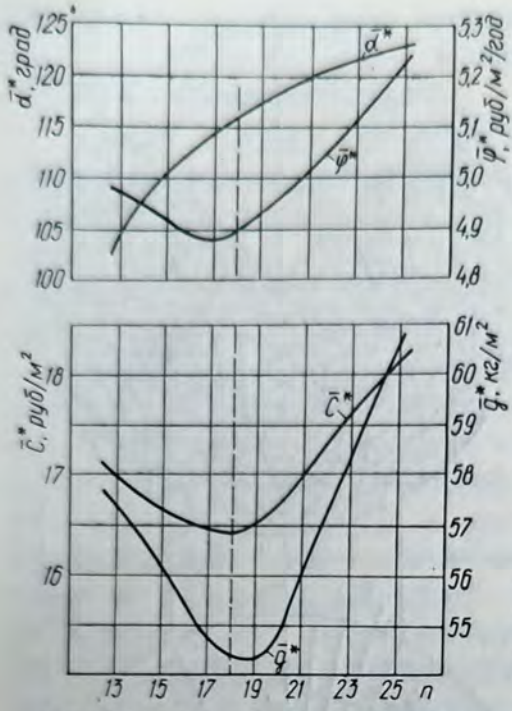


Рис. 24. Зависимость параметров и показателей от числа секторов в сферическом куполе.

встречаются. Основные неизвестные: центральный угол α и число дроблений m. Относительно числа n известны некоторые рекомендации. Так, n растет вместе с пролетом. В нашем аналоге при $D=230$ м $n^0=21$.

Как и ранее, минимизируются приведенные затраты на 1 м² перекрываемой площади. Используются выражения типа (64), (66). Сечения унифицируются по кольцевым зонам, в которых удельные характеристики одинаковы и составляют: для спаренных неравнобоких уголков $\rho_x=0{,}71$, $\rho_y=0{,}55$ (предполагается, что уголки ориентированы бо́льшими полками к оси двухветвевого стержня, а ось x параллельна меньшим полкам), для труб $\rho=0{,}8$. Нижние пояса раскреплены связями посередине. Коэффициент k в смысле (15) принят равным 0,022. Материал конструкций — сталь обычной прочности. Нагрузки (см. рис. 11, *а...в*), КПа: $g=3$; $p=1{,}4$; $q_0=0{,}35$.

Единичные показатели стоимости приняты следующими: $C_м=230$ руб/т, $C_u=7$ руб., $C_b=0{,}7$ руб., $C_g=0{,}4$ руб., $C_l=0{,}3$ руб/м³, $C_r=6$ руб/м² [20]. Нормативные коэффициенты по эксплуатационным расходам: $H=0{,}05$ год$^{-1}$, $P=0{,}2$ руб/(м³·год).

С целью оценки рекомендаций по выбору числа центральных секторов задача решена в нескольких вариантах. Результаты представлены на рис. 24 в виде зависимостей $\bar{\alpha}^*$, $\bar{\varphi}^*$, $\bar{C}^*$, $\bar{g}^*$ (n). Из их рассмотрения заключаем, что квазиоптимальными параметрами $\bar{n}^*$ и $\bar{\alpha}^{**}$ можно считать $\bar{n}^*=18$ и $\bar{\alpha}^*(18)=116°$, поскольку минимум приведенных затрат достигается при $n=17$, минимум стоимости металлоконструкций $\bar{C}^*$ — при $n=18$, а минимум массы $\bar{g}^*$ — при $n=19$. Эти значения n несколько меньше числа n^0, принятого в аналоге ($n^0=21$). Дополнительная оценка оптимального значения n^* будет дана в пара-

графе 5.5. Здесь же отметим, что число дроблений оказалось практически инвариантным, а именно: $\overline{m}(n)=4$, что совпадает с соответствующим параметром аналога.

Описанные задачи позволили проверить точность и реальность оптимизационных моделей, изыскать варианты возможных решений, наметить некоторые аспекты дальнейшего анализа. Переходя к сериям задач, добавим, что выбор пары «объект исследования — фактор влияния» определяется также назначением конструкции, освоенностью ее на специализированном производстве, доступностью информации, уровнем ранних исследований и т. п. Например, учет диапазона нагрузок целесообразно выполнить для стандартной конструктивной системы, а не для уникального сооружения; влияние степени механизации и автоматизации производства возможно изучать при наличии унифицированного сортамента изделий.

5.2. УЧЕТ ДИАПАЗОНА НАГРУЗОК

Применение легких металлоконструкций (ЛМК) в различных условиях эксплуатации вызвало к жизни широкую номенклатуру стандартизованных изделий, в частности, для ПРП. В этом случае решение отдельных оптимизационных задач недостаточно, так как необходимо оценивать качество типовой серии в целом.

Рассматривается конструктивная система типа «ЦНИИСК», включающая структурные блоки покрытия размерами в плане 18×12 и 24×12 м под расчетные нагрузки $q=2{,}4...6{,}3$ и $1{,}75...4{,}45$ кПа соответственно. Все марки блоков серии 1.460-6 имеют одинаковые размеры ячейки $a^0=b^0=3$ м и высоту $h^0=1{,}5$ м.

Рассмотрим изменение оптимальных по приведенным затратам параметров и соответствующих экономических показателей по всему диапазону нагрузок.

Схема — по рис. 8, *б*, опирание — в угловых точках. Стержни верхнего пояса, ориентированные вдоль пролета *A*,— из двутавров, остальные элементы — из одиночных уголков. Узлы торцевых (вдоль пролета $B=12$ м) наклонных ферм решены на заводской сварке, а примыкания раскосов к продольным (неразрезным) поясам и стыки поясов выполняются на монтаже с помощью болтов нормальной точности. Кровельная конструкция — стальной профилированный настил, опирающийся непосредственно на двутавры и раскрепляющий их от потери устойчивости в плоскости наименьшей жесткости.

Решается оптимизационная задача (58) с неизвестными параметрами a, b и h. Программа, формирующая коэффициенты системы уравнений и осуществляющая ее решение, разработана в двух вариантах: для прямоугольных ячеек ($a \neq b$) и квадратных ячеек ($b = a$). При определении массы использовано выражение, близкое к (59),— добавлены члены, соответствующие стержням типа 3, 4, 8, исключены стержни типа 6, скорректированы остальные фрагменты.

На уровне подготовки исходных данных подобрана расчетная модель, экономичная по затратам на численные эксперименты. В частности, изучены распределение усилий в прототипе и принцип унификации сечений. Последнему отвечает разбивка на зоны по рис. 25, *а*, характеризующаяся постоянством сечений поясов ($t = 1,3...5$) и дифференциацией раскосов ($t = 7,8$). По расходу металла ей практически эквивалентна упрощенная схема — рис. 25, *б*, особенно в сочетании со статическим анализом прототипа как системы с фиксированными параметрами a^0, b^0, h^0 и последующим переходом к распределенным усилиям по формулам типа (42). Показаны размеры зон для блока пролетом $A = 24$ м; при $A = 18$ м разбивка выполнена аналогично.

Вычисленные таким образом распределенные усилия имеют следующий порядок величин:

$M'_{11} = 97{,}2 \ldots 256$ кН · м/м, $M'_{12} = 72{,}9 \ldots 192$ кН · м/м,

$Q'_{71} = 10{,}8 \ldots 28{,}4$ кН/м, $Q'_{72} = 21{,}6 \ldots 56{,}8$ кН/м;

$A = 18$ м.

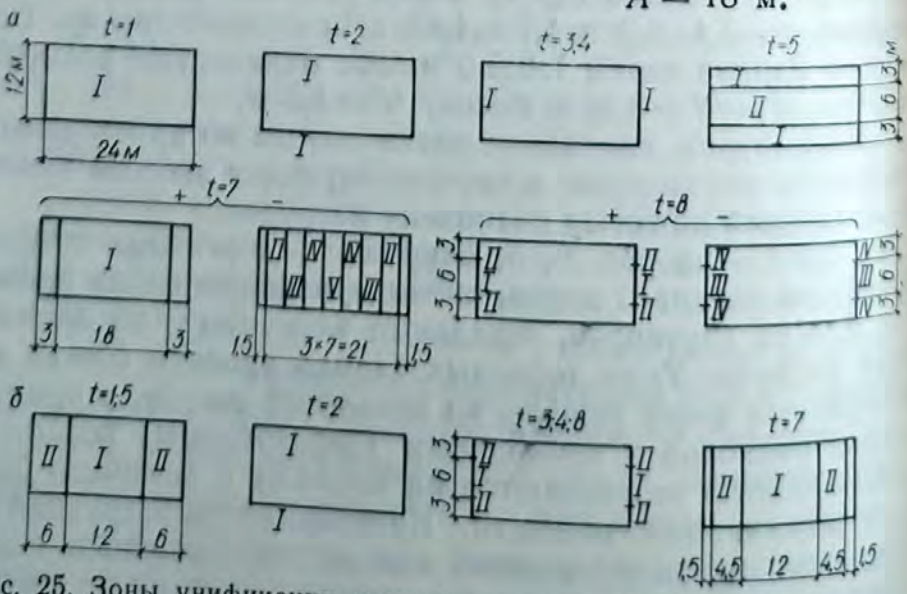


Рис. 25. Зоны унификации сечений в структурной плите: *а* — по прототипу; *б* — в оптимизационной модели.

$M'_{11} = 126 \ldots 320$ кН · м/м, $M_{12} = 94{,}5 \ldots 240$ кН · м/м;

$Q'_{71} = 10{,}5 \ldots 26{,}7$ кН/м, $Q'_{72} = 21{,}0 \ldots 53{,}4$ кН/м;

$A = 24$ м.

Меньшие значения соответствуют нижней границе диапазона расчетных нагрузок, бо́льшие — верхней границе. В этих же пределах определяется интенсивность местных нагрузок на верхний пояс ($t=1$) от внеузлового опирания настила, работающего пролетом b:

$$q_{1z} = 1{,}32 \ldots 4{,}4 \text{ кПа}, \quad A = 18 \text{ м};$$

$$q_{1z} = 1{,}02 \ldots 2{,}7 \text{ кПа}, \quad A = 24 \text{ м}.$$

Обозначение q_{1z} имеет такой же смысл, как и в (59), (60), а значения, с целью учета неразрезности поясов из двутавров, взяты с коэффициентом 0,67 (8/12).

Усредненные характеристики применяемых сортаментов: двутавров по ГОСТ 8239—72 * для №№ 10...24 — удельный радиус инерции $\rho_x = 1{,}5$, удельный пластический момент сопротивления $\omega' = 1{,}4$; уголков равнобоких по ГОСТ 8509—72 * при $\frac{d}{b} = \frac{1}{12} \ldots \frac{1}{16}$ — $\rho_{min} = 0{,}5 \ldots 0{,}55$. Материал всех элементов — малоуглеродистая сталь с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа.

Показатели стоимости конструкций из прокатных профилей ниже, чем у трубчатых, дешевле и узловые соединения на болтах нормальной точности, поскольку отсутствуют сложные механические детали. Коэффициенты $C_м$, $C_и$, C_b и C_g в данном случае определяются на основе методик технико-экономического анализа [38, 39, 40], исходя из следующих предпосылок.

Большинство элементов структурных блоков (90 % по количеству и 70 по массе) проходят на заводе только операции по обработке (резка и образование отверстий) [12], поэтому часть стоимости изготовления, зависящую от трудоемкости, можно считать пропорциональной числу стержней. На монтаже доли стоимости сборки и подъема составляют примерно 60 % и 40 от стоимости монтажа. Часть стоимости, зависящую от трудоемкости сборки, будем считать пропорциональной числу узлов, а остальную — пропорциональной массе.

Учитывая сказанное, в $C_м$ включаем: стоимость основных материалов стержней, условно-постоянную часть стоимости изготовления, стоимость транспортировки, стоимость подъема блока. К $C_и$ относим: стоимость основных материалов по узловым фасонкам и болтовым соединениям, стоимость сборки блока. Коэффициенты C_b,

C_g находим из расчета части стоимости изготовления, которая на поточных линиях может быть уменьшена до 0,13 чел.-ч/м². Для нашей серии задач приняты $C_м = 150$ руб/т, $C_u = 5{,}1$ руб., $C_b = C_g = 0{,}7$ руб.

По ограждающим конструкциям: кровля из стального профилированного настила стоимостью 290 руб. за 1 т, $C_l = 1{,}3$ руб/м³; стеновые легкобетонные панели $C_w = 10$ руб/м². Участки стен, приходящиеся на один блок, устанавливаются из количества блоков в одноэтажном производственном здании размерами в плане 144×144 м и составляют $L = 6$ м при сетке колонн 18×12 м и $L = 8$ м — при сетке 24×12 м.

Доля амортизационных отчислений и текущих ремонтов от первоначальной стоимости по нормативам [23], как в одноэтажном каркасном здании с площадью пола свыше 5000 м², $H = 0{,}047$ год⁻¹; прочие эксплуатационные расходы: $P = 0{,}1$ руб/м³/год.

Результаты оптимизационных расчетов на ЭВМ показаны на рис. 26. По сравнению с предыдущим обозначе-

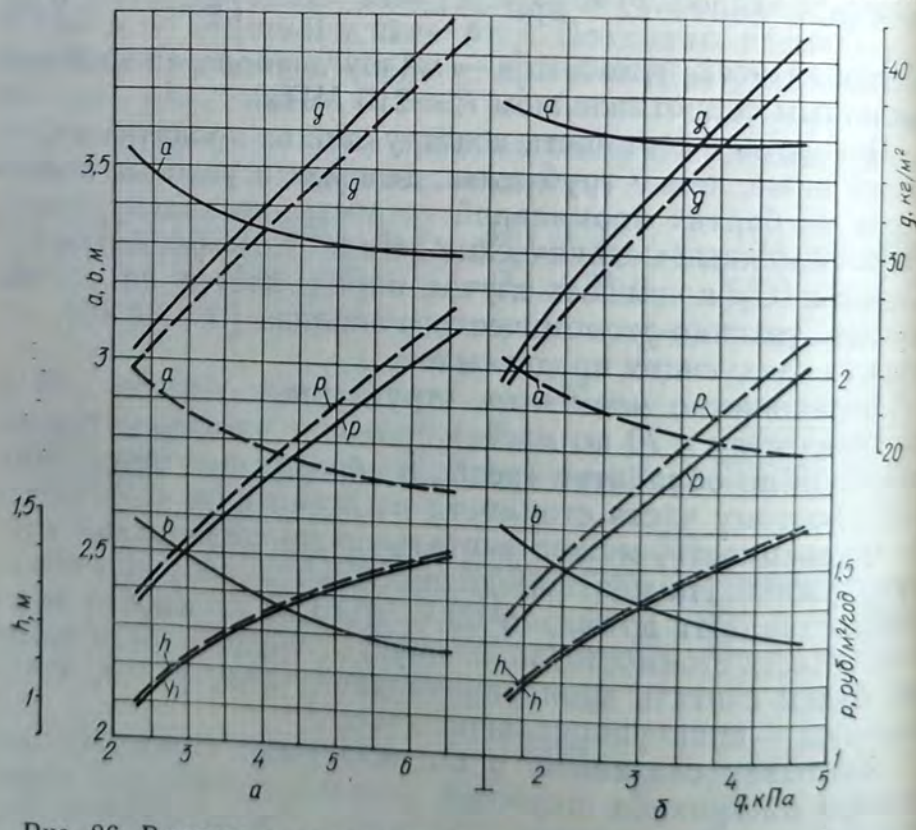


Рис. 26. Влияние нагрузки на параметры и показатели покрытия типа «ЦНИИСК» при прямоугольных (сплошная линия) и квадратных (пунктирная линия) ячейках:
а — блок 18×12 м; *б* — блок 24×12 м.

ния несколько упрощены. Отброшены звездочки, отмечающие точки оптимума, и черточки над буквами, отличающие удельные затраты от полных. Вместо буквы φ для приведенных затрат использована p.

С увеличением нагрузки для рассмотренных случаев размеры ячейки в плане монотонно убывают, высота — возрастает. Кривые постепенно выполаживаются, асимптотически приближаясь к некоторым предельным уровням. Поскольку нагрузка в первую очередь влияет на усилия в стержнях, в том числе сжатых и сжато-изогнутых, реакцию оптимальных параметров на возрастание q удобно трактовать с позиций взаимодействия силовых и геометрических факторов, с учетом обеспечения устойчивости элементов.

Так, уменьшение размеров a и b компенсирует рост погонных усилий в стержневой плите за счет некоторого сгущения обеих поясных сеток, т. е. непосредственного уменьшения расчетных длин верхних поясов. Также укорачиваются пролеты, чем облегчается работа двутавров на местный изгиб от настила. Раскосы располагаются под бо́льшим углом к горизонту, лучше воспринимая возросшие поперечные силы в плите. Этому же способствует утолщение последней. Однако, главное следствие увеличения h — сброс усилий в поясах.

Чрезмерное измельчение сетки сдерживается ростом числа элементов, а, значит, удорожанием конструкции. Действительно, увеличению нагрузки примерно в 2,5 раза соответствует стягивание ячейки не более чем на 10 % по стороне a и 15 — по стороне b, причем для блока 18×12 м оно в целом заметнее, чем для блока 24×12 м. Параметр h намного чувствительнее, его увеличение на том же диапазоне нагрузок достигает 35—40 % (верхняя граница при $A=24$, нижняя — $A=18$ м). Бо́льшему утолщению плиты препятствуют: перерасход металла на соединительную решетку, особенно на сжатые раскосы; уширение полосы стенового ограждения; повышенные эксплуатационные расходы.

Представляют интерес оценка отношения сторон прямоугольной ячейки и размещение оптимального решения при переходе на квадрат. С возрастанием нагрузки прямоугольник становится более вытянутым, так же, как и с удлинением пролета A: $a/b=1{,}36...1{,}45$, $A=18$ м; $a/b=1{,}43...1{,}54$, $A=24$ м. При одной и той же нагрузке с увеличением отношения A/B размеры a и h растут, размер b уменьшается, что по-видимому, объясняется характером работы исследуемой конструкции, включающей

продольные «стропильные» складки, поперечные «подстропильные» фермы и настил, гофры которого ориентированы вдоль последних.

Программа, оптимизирующая структуры с квадратной ячейкой, позволяет приблизиться к прототипу. Сравнение с данными предыдущего варианта показывает, что размер стороны квадрата лежит между размерами сторон прямоугольника a и b, тяготея к меньшей стороне b, а высота плиты остается прежней. Отметим, что $a^{\square} \approx \approx \sqrt{ab}$ (с точностью до 2...3 %) по всему диапазону q. Пределы изменения величин:

$$a^{\square} = 2{,}95 \ldots 2{,}68 \text{ м}, \quad h = 1{,}04 \ldots 1{,}42 \text{ м}, \quad A = 18 \text{ м};$$

$$a^{\square} = 3{,}01 \ldots 2{,}80 \text{ м}, \quad h = 1{,}08 \ldots 1{,}49 \text{ м}, \quad A = 24 \text{ м}.$$

Можно заключить, что параметры структурных конструкций типа «ЦНИИСК» в целом близки к оптимальным.

Рассмотрим зависимости для экономических показателей (см. рис. 26). Приведенные затраты на блоки под максимальную расчетную нагрузку увеличиваются до 1,5 раз, а расход стали — на 60...65 % по сравнению с легконагруженными:

$$\left.\begin{array}{l} p = 1{,}38 \ldots 2{,}06 \ \dfrac{\text{руб.}}{\text{м}^2 \cdot \text{год}}, \\ g = 25{,}2 \ldots 41{,}3 \ \text{кг/м}^2 \\ p^{\square} = 1{,}41 \ldots 2{,}12 \ \dfrac{\text{руб.}}{\text{м}^2 \cdot \text{год}}, \\ g^{\square} = 24{,}3 \ldots 39{,}6 \ \text{кг/м}^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} A = 18 \text{ м}, \\ \\ q = 2{,}4 \ldots 6{,}3 \text{ кПа}; \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} p = 1{,}37 \ldots 1{,}97 \ \dfrac{\text{руб.}}{\text{м}^2 \cdot \text{год}}, \\ g = 25{,}3 \ldots 40{,}3 \ \text{кг/м}^2 \\ p^{\square} = 1{,}41 \ldots 2{,}03 \ \dfrac{\text{руб.}}{\text{м}^2 \cdot \text{год}}, \\ g^{\square} = 24{,}4 \ldots 38{,}8 \ \text{кг/м}^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} A = 24 \text{ м}, \\ \\ q = 1{,}75 \ldots 4{,}45 \text{ кПа}. \end{array}$$

Блоки с квадратной ячейкой дороже, чем с прямоугольной, если судить по приведенным затратам (в среднем на 2,5...3 %), но менее металлоемкости (~ на 3,5...4 %).

Можно заметить, что расход металла в них выше, чем у прототипа по серии 1.460-6, где для поясов и сильно нагруженных раскосов применена низколегированная сталь.

5.3. ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА И СОРТАМЕНТА

Применением сталей повышенной и высокой прочности можно достичь снижения массы металлоконструкций. Однако стоимость основных материалов на 1 т конструкций при этом увеличивается. Повышается также удельная трудоемкость изготовления и монтажа. Поэтому экономия металла должна быть достаточной для нейтрализации указанного удорожания в перерасчете на изделие в целом. Существующие методики технико-экономического анализа рекомендуют использовать коэффициент α снижения массы, определяемый либо поэлементно в зависимости от вида напряженного состояния, либо укрупненно [38]. Имеются сведения о суммарном уменьшении расхода материала при переходе к более прочной стали в каркасах зданий промышленных предприятий, классифицируемых как тяжелые, средние и легкие [41]. Данные по ЛМК, в том числе пространственным решетчатым покрытиям, практически отсутствуют.

В традиционном вариантном проектировании замена стали сопровождается изменением сечений элементов и соответствующих технико-экономических показателей. Перерасчет конструкции, а тем более пересмотр геометрических параметров, как правило, не выполняется. Оптимизационные расчеты позволяют уточнять величину α и получать непосредственный ответ на вопрос об эффективности применения сталей повышенной и высокой прочности для конкретного ПРП. Это реализуется сравнением вариантов, каждый из которых оптимален по приведенным затратам.

В работе [38] указывается, что коэффициент α зависит от соотношения в конструкции массы основных деталей (стержней) и вспомогательных деталей (фасонок, болтов и т. п.), т. е. от строительного коэффициента. Более подробные исследования показывают также существенную роль количественного распределения среди основных деталей сжатых и растянутых, сильно- и слабонагруженных элементов, т. е. на коэффициент α влияет продольный изгиб, проявляющийся сильнее для более прочных сталей. Объективной характеристикой опреде-

ленного класса конструкций в этом смысле могут служить данные по гибкостям.

Нами проведен статистический анализ ПРП, различных по назначению и конструктивным решениям. Стандартные, унифицированные системы приняты базой исследования. Результаты в виде гистограмм плотности распределения $p(\lambda)$ массы стержней по их гибкостям λ в конструкциях типа «ЦНИИСК» и «МАрхИ» показаны на рис. 27, *а*. На их основе с помощью конечномерного

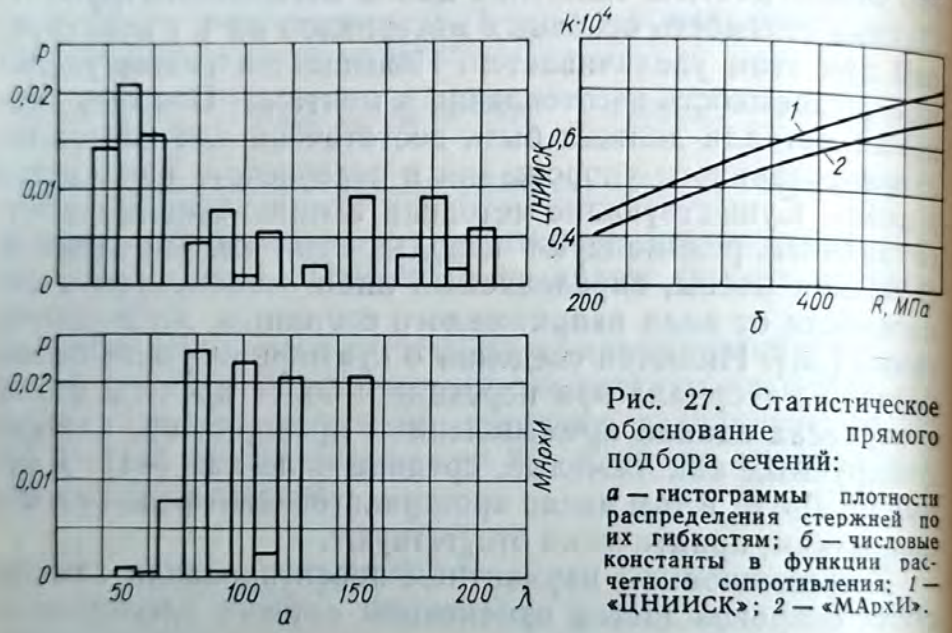


Рис. 27. Статистическое обоснование прямого подбора сечений:

а — гистограммы плотности распределения стержней по их гибкостям; *б* — числовые константы в функции расчетного сопротивления; *1* — «ЦНИИСК»; *2* — «МАрхИ».

аналога формулы (31) вычислен коэффициент k в зависимости от прочности стали (рис. 27, *б*) — один из главных параметров, изменяющихся при переходе к более высоким прочностным характеристикам материала. Он влияет на затраты металла для обеспечения устойчивости стержней.

Сравнивая данные, полученные для двух конструктивных систем, можно отметить некоторые особенности. В структурах из прокатных профилей примерно половина материала сосредоточена в зоне гибкостей 40...60 (верхние пояса из двутавров, сечения которых развиты для восприятия местного изгиба). Гибкость более четверти стержней (по массе) 150...200, их несущая способность не используется полностью, а сечение определено по предельной гибкости; остальные — сильно нагруженные пояса и раскосы из одиночных уголков, сечения которых зависят, в первую очередь, от силовых факторов.

В унифицированном сортаменте трубчатых стержней системы «МАрхИ» масса распределена на меньшем участке оси λ, причем несколько больше половины — это элементы, подбираемые по усилиям ($\lambda \leqslant 110$), а остальные — по предельной гибкости 120 и 150. Отсутствие более гибких стержней можно считать недостатком сортамента, вызывающим перерасход металла, особенно в соединительной решетке. Коэффициент k, как интегральная характеристика наиболее употребительных гибкостей, меньше чем у системы «ЦНИИСК» в среднем на 8,5 %, и растет несколько медленнее с повышением прочности стали.

В связи с изложенным целесообразно проверить эффект применения более прочных сталей на структурах из прокатных профилей, где потери металла за счет продольного изгиба относительно выше, чем в трубчатых конструкциях. Особенности прототипа и постановки оптимизационной задачи, основные исходные данные,— описаны в предыдущем параграфе. Укажем лишь на некоторые отличия.

Для каждого из блоков покрытия рассмотрено по два варианта расчетных нагрузок: минимальная q_1 и максимальная q_2. Сталь повышенной и высокой прочности применяется для поясов и сильно нагруженных раскосов, выделенных в зоне торцевых ферм. Для остальных раскосов (типа 7) и связей ($t=2$) во всех экспериментах принята сталь обычной прочности. Коэффициенты взяты по кривой *1* (см. рис. 27, *б*). Единичные экономические показатели определены с учетом увеличения стоимости стали, изготовления и монтажа. Соответствующие относительные коэффициенты k_1, k_2 и k_3, полученные усреднением и экстраполяцией данных [38, 42], представлены в табл. 12. Результаты вычислений по блокам с квадратной ячейкой показаны на рис. 28 как функции a, h, g, p (R). С увеличением расчетного сопротивления размеры ребер кристалла структуры уменьшаются, чем компенсируется падение коэффициента продольного изгиба. При этом изменение стороны квадрата менее значительно, чем понижение высоты плиты: $a_{R=210}/a_{R=530}=0{,}93...0{,}95$; $h_{R=210}/h_{R=530}=0{,}75...0{,}78$. Меньшие значения относятся к минимальной нагрузке на блок, бóльшие — к максимальной и почти одинаковы для пролетов 18 и 24 м. При большей нагрузке оптимальные параметры несколько стабильнее относительно R. Они наиболее близки к прототипу ($R=290$ МПа) по a — при q_1, и по h — при q_2. Дополнительные оценки будут даны в главе 6.

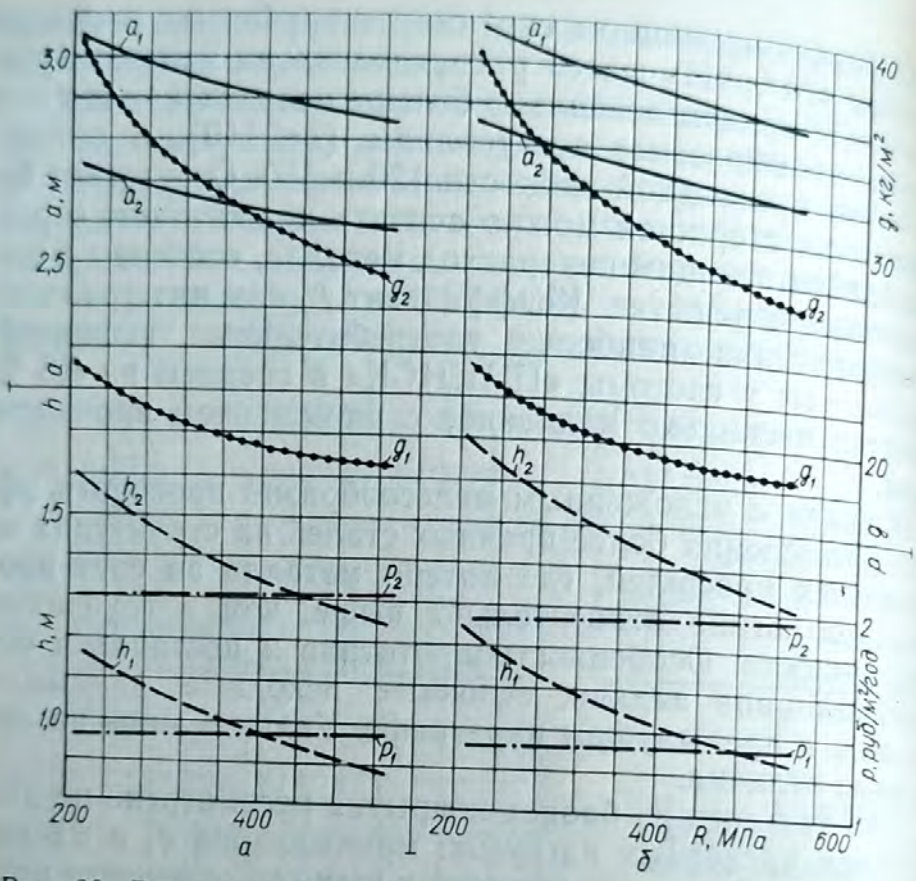


Рис. 28. Влияние прочности стали на параметры и показатели структурной плиты при минимальной и максимальной нагрузке (соответственно индексы *1* и *2* при величинах):
а — блок 18×12 м (q_1=2,4 кПа; q_2=6,3 кПа); *б* — блок 24×12 м (q_1=1,75 кПа; q_2=4,45 кПа).

Таблица 12. **Относительная стоимость материала, изготовления и монтажа конструкций при применении сталей повышенной и высокой прочности**

Коэффициенты	Расчетное сопротивление, МПа						
	210	260	290	340	380	440	530
k_1 (материал)	1,00	1,15	1,33	1,50	1,67	1,90	2,23
k_2 (изготовление)	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
k_3 (монтаж)	1,00	1,02	1,03	1,05	1,06	1,09	1,11

Примечание. Для изготовления и монтажа даны части стоимости, пропорциональные их трудоемкости.

За счет применения более прочных сталей в данном случае можно достичь существенной экономии материала (20...29 %) при практически неизменном уровне приведенных затрат. Бóльшая экономия соответствует максимальным нагрузкам. Дифференцированные по маркам стали коэффициенты α снижения массы сведены в табл. 13. Расход стали при R=290 МПа совпадает с соответ-

Таблица 13. **Коэффициенты снижения массы при применении сталей повышенной и высокой прочности**

Источник данных		Расчетное сопротивление, МПа						
		210	260	290	340	380	440	530
Рис. 28, *а*	q_1	1,00	0,93	0,91	0,87	0,85	0,83	0,80
	q_2	1,00	0,91	0,87	0,82	0,79	0,75	0,71
Рис. 28, *б*	q_1	1,00	0,94	0,90	0,86	0,84	0,82	0,79
	q_2	1,00	0,91	0,87	0,82	0,78	0,75	0,71
По М. М. Жербину		1,00	—	0,90	—	0,82	—	—
По Д. Н. Стрелецкому		1,00	0,89	0,83	0,83	0,72	0,69	—

Примечание. В последней строке коэффициенты относятся к массе основных деталей, в остальных — ко всей конструкции.

ствующими показателями прототипа во всех четырех случаях (два блока по две нагрузки) — с точностью до 5 %.

Сравнивая относительные величины табл. 12 и 13, можно заключить, что стоимость основных материалов растет быстрее с увеличением R, чем снижается масса. Положительный эффект достигается варьированием геометрических параметров. Приведенные затраты изменяются незначительно в связи с тем, что уменьшается стоимость смежных ограждающих конструкций, падают энергетические расходы, что свидетельствует о преимуществах оптимизационного анализа по комплексному экономическому критерию. Результаты исследования блоков с прямоугольными ячейками (табл. 14) подтверждают приведенные закономерности.

Можно ожидать, что применение более прочных сталей в системах ПРП из труб будет еще более эффективно. Переход к профилям с замкнутым сечением с повышенным удельным радиусом инерции и более выгодным при работе на сжатие имеет самостоятельное значение. В работе [38] отмечается, что на экономию существенно влияет степень нагруженности элементов, причем более дорогие тонкостенные трубчатые профили наиболее экономичны при малой нагруженности, а в случае незначительных гибкостей возможен даже перерасход по стоимости. В этой связи представляет интерес аналогичное изменение характеристик сортамента в рамках заданной конструктивной формы и оценка суммарного эффекта.

Рассмотрим влияние этого фактора на примере большепролетной решетчатой плиты покрытия автовокзала в

Таблица 14. **Результаты оптимизации структурных блоков с ортогональной ячейкой для различных классов стали**

Размеры блока, м	Нагрузка, кПа	Расчетное сопротивление стали, МПа	Оптимальные параметры, м			Расход стали, кг/м²	Приведенные затраты, руб/(м²×год)
			a	b	h		
18×12	2,4	210	3,81	2,57	1,16	24,4	1,27
		260	3,73	2,55	1,09	22,8	1,28
		290	3,68	2,54	1,06	22,0	1,30
		340	3,63	2,52	1,01	21,0	1,30
		380	3,58	2,51	0,98	20,5	1,30
		440	3,52	2,49	0,93	20,0	1,31
		530	3,44	2,46	0,87	19,4	1,31
	6,3	210	3,55	2,25	1,60	40,7	1,93
		260	3,51	2,23	1,51	37,0	1,92
		290	3,46	2,23	1,47	35,2	1,96
		340	3,43	2,21	1,41	33,0	1,95
		380	3,39	2,20	1,36	31,7	1,95
		440	3,35	2,18	1,30	30,2	1,96
		530	3,27	2,17	1,24	28,5	2,00
24×12	1,75	210	3,94	2,55	1,21	24,6	1,27
		260	3,85	2,54	1,14	22,9	1,28
		290	3,79	2,54	1,11	22,1	1,30
		340	3,73	2,52	1,06	21,1	1,29
		380	3,68	2,51	1,02	20,5	1,29
		440	3,61	2,50	0,98	19,9	1,29
		530	3,52	2,48	0,92	19,2	1,29
	4,45	210	3,83	2,28	1,69	39,9	1,85
		260	3,77	2,27	1,59	36,2	1,84
		290	3,71	2,27	1,55	34,5	1,88
		340	3,66	2,26	1,48	32,3	1,87
		380	3,61	2,25	1,44	31,0	1,87
		440	3,55	2,24	1,37	29,6	1,87
		530	3,45	2,23	1,31	27,9	1,91

Ворошиловграде, выполненной по схеме рис. 8, *в* при $A=93{,}3$ м, катетах — по 66 м, $a^0=b^0=2{,}12$ м ($n^0=44$, $m^0=22$). Высота плиты $h^0=1{,}85$ м, опирание — по контуру, расчетная нагрузка — 2,7 кПа (расход стали обычной прочности — 63 кг/м²). Все стержни — из труб; пояса, перпендикулярные стороне A,— непрерывные, их заводские и монтажные соединения — на сварке встык с подкладными кольцами; пояса другого направления — из отдельных элементов со сплющенными концами, которые крепятся на болтах с последующей обваркой к фасонкам, врезанным в непрерывные пояса; раскосы с полусплющенными концами непосредственно привариваются к поясам. Панели настила опираются в узлах верхней поясной сетки. Каркас панелей из гнутых швеллеров, обшивка — из просечно-вытяжного листа.

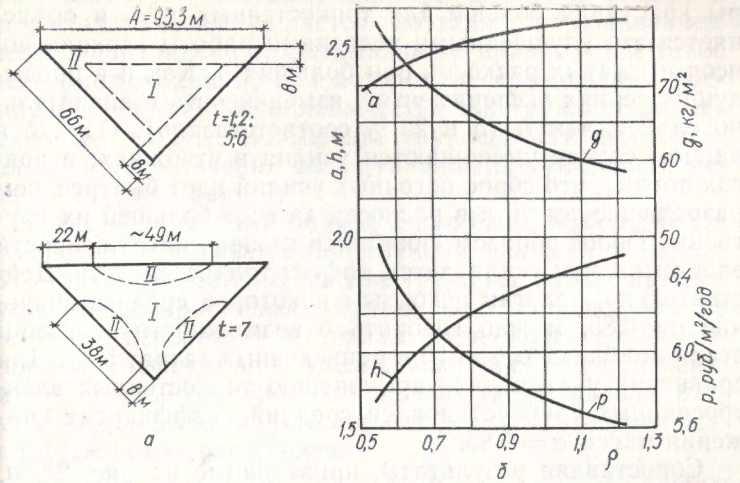


Рис. 29. К оптимизации параметров решетчатой плиты покрытия 93,3×66×66 м:

а — зоны унификации сечений I, II; *б* — влияние удельного радиуса инерции сечений.

Разыскиваются параметры a и h, оптимальные по приведенным затратам (58). Модификация программы определяет массу по формуле типа (59) с учетом $b=a$ и числа элементов в соответствии с табл. 6 (третья часть). Отсутствие местной нагрузки на поясах учитывается на уровне исходных данных. Разбивка на зоны унификации принята по рис. 29, *а*. Погонные усилия в плите получены из машинного расчета прототипа переходом по формулам (42) и аналогичным. Расчетное сопротивление и коэффициент k — соответственно стали обычной прочности. Единичные показатели стоимости определены из калькуляций: $C_м=300...350$ руб/т (бо́льшие значения для тонкостенных профилей), $C_и=7$ руб., $C_b\approx C_g=1$ руб., $C_l=3$ руб/м³. Данные по стеновым ограждениям, амортизационным отчислениям взяты по предыдущим задачам. Прочие исходные величины: $L=225$ м, $P=0{,}35$ руб/(м³×год).

Пределы изменения удельных характеристик сортамента выявлены на основе данных о поставках металлургических заводов СССР. Обработка их показывает, что используя электросварные трубы по ГОСТ 10704—76 * и горячедеформированные трубы по ГОСТ 8732—78 * диаметрами 57...426 мм, можно принимать $\rho=1{,}2...0{,}55$. Полученные в этом диапазоне результаты оптими-

зации (см. рис. 29, *б*) свидетельствуют о том, что размеры кристалла больше для тонкостенных труб и объясняется это улучшенными условиями работы верхних поясов и сжатых раскосов при больших ρ. Как и в предыдущих сериях экспериментов, изменчивость a значительно слабее, чем h (6 и 22 % соответственно). Однако в данном случае уменьшаются усилия в стержнях: в поясах потому, что сброс погонных усилий идет быстрее, чем разрежение сетки, а в раскосах за счет большей их крутизны. Таким образом снижается степень нагруженности элементов, чем усиливается эффект тонкостенности. Действительно, полагая исходным некоторое среднее значение $\rho=0{,}85$, можно говорить о возможности экономии стали приблизительно 10 и приведенных затрат 5 %. Для сравнения укажем, что применению тонкостенных электросварных труб установлен средний коэффициент снижения массы $\alpha=0{,}85$.

Сопоставляя результаты, приведенные на рис. 28, *а*, с данными рис. 29, *б*, можно предположить, что одновременное улучшение характеристик материала и сортамента в одной конструкции даст, на фоне вероятной стабильности геометрических параметров, традиционно известный суммарный эффект. Поэтому при одновременном применении эффективных марок стали и экономичных профилей рекомендуется соответствующие коэффициенты α перемножить.

Снижение массы может сопровождаться ухудшением технологичности конструкции: детали из высокопрочной стали сложнее обрабатывать, тонкостенный профиль труднее прокатать. О взаимной увязке показателей металлоемкости и трудоемкости важно помнить при назначении сечений элементов, их унификации.

5.4. РАЦИОНАЛЬНАЯ УНИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Пространственные решетчатые покрытия по своей природе вполне отвечают требованиям современного индустриального производства. Хорошие показатели технологичности ПРП обусловливаются регулярностью структуры, однотипностью элементов (поясных сеток и соединительной решетки), отсутствием связей, постоянством длин стержней. Важным моментом является и унификация поперечных сечений последних, т. е. задача выбора числа типоразмеров в конструкции.

Вопросы оптимальной унификации ПРП рассматриваются в работах [43, 44]. При этом считаются известными геометрия системы, включая длину, и усилия в элементах. Задача решается поэтапно, наращиванием числа типоразмеров τ. Оптимальным принимается такое число унификации τ_0, при котором по сравнению с предыдущим (τ_0—1) металлоемкость конструкции падает менее чем на 2 %. Повышение трудоемкости изготовления за счет увеличения числа унификации указанная методика не учитывает.

Более комплексный подход к проблеме выбора числа типоразмеров стальных конструкций изложен в работе [38], где оценивается снижение трудовых затрат при выпуске унифицированных изделий. Оно компенсирует по стоимости перерасход материала, неизбежно возникающий при унификации и увеличивающийся с уменьшением τ. С другой стороны, чем меньше τ, тем больше размер S серии (партии) однотипных деталей, что уменьшает трудоемкость изготовления:

$$T_s = T_p + T_a/S, \tag{264}$$

где T_s — трудозатраты на один элемент (конструкцию или деталь); T_p — основное технологическое (машинное) время на изготовление одного элемента; T_a — вспомогательное (и подготовительно-заключительное) время на всю партию из S элементов. Введено понятие коэффициента серийности:

$$k(S) = T_s/T_{sn}, \tag{265}$$

где T_{sn} — трудоемкость изготовления одного элемента в средней, или нормальной серии S_n. Приводятся соотношения между основным и вспомогательным временем в существующем мелкосерийном производстве и соответствующие коэффициенты серийности при $S_n=11$. Отмечается тенденция к повышению доли T_p и снижению T_a при улучшении организации изготовления, в связи с чем $k(S)$ становятся ближе к единице по всей оси S. Аналогичная тенденция прогнозируется для поточных линий при значительно бо́льших размерах партий.

Ниже исследуется влияние числа типоразмеров на оптимальные параметры и технико-экономические показатели ПРП. Рациональное число унификации τ_0 определяется на основе механизма коэффициента серийности, но в условиях поточного производства. Введем безразмерные параметры, характеризующие условия изготовления:

отношение трудозатрат

$$\eta = T_a/(T_p S_n); \tag{266}$$

относительный размер серии

$$\bar{S} = S/S_n. \qquad (267)$$

Тогда выражение (265) с помощью (264) можно представить следующим образом:

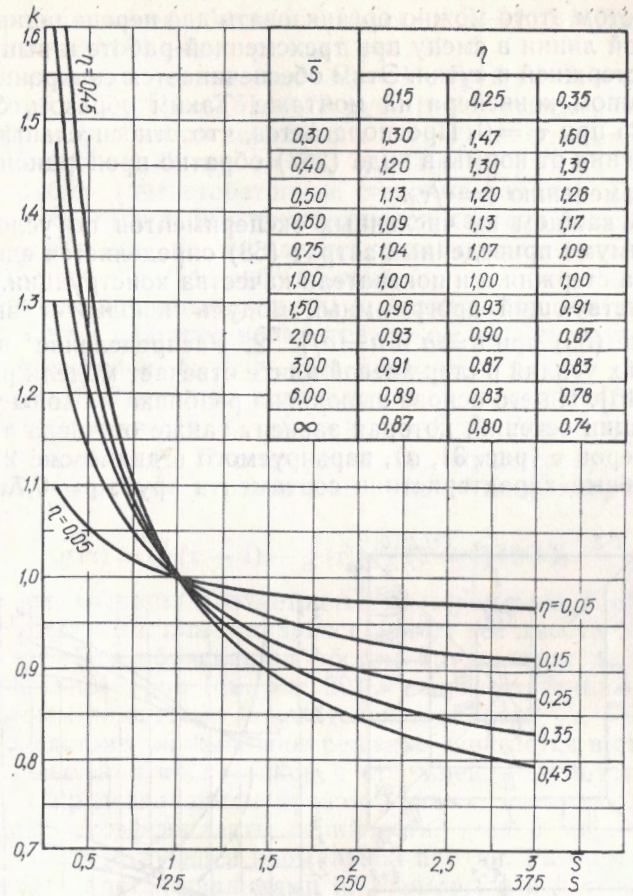
$$k(S) = (1 + \eta/\bar{S}) / (1 + \eta). \qquad (268)$$

В идеальном случае при $\eta=0$ отклонение от нормальной серии не влияет на трудоемкость изготовления, так как $k(\bar{S}) \equiv 1$. В заводском производстве по данным 1962—1968 гг. $\eta=0{,}35$, и 1974—1979 гг. $\eta=0{,}30...0{,}25$ [38]. Есть основания полагать, что на автоматизированных линиях достижимо $\eta=0{,}15$ и менее.

При значительном увеличении серии коэффициент $k(\bar{S})$ асимптотически приближается к значению $1/(1+\eta)$, а при $S \to 0$ $k(\bar{S}) \to \infty$. Реально обозримый диапазон $\bar{S}=0{,}25...4$. В указанных пределах η и $\bar{S}$ вычислены значения k. Они представлены на рис. 30 — в виде семейства кривых $k(\eta, \bar{S})$, используемых в дальнейшем с дополнительной шкалой S.

Выбор размера нормальной серии S_n привязывается уже к определенному типу конструкций. Ближе всего к технологии заводов металлоконструкций приспособлены структурные покрытия, собираемые из длинномерных отправочных марок [2]. Системы ПРП, компонуемые из отдельных стержней, лучше отвечают возможностям крупносерийного производства. Различны для этих двух типов принципы унификации сечений. В первом случае элементы в пределах заводской марки непрерывны, сами марки также унифицируются в пределах конструктивной системы, включающей конкретные схемы покрытия. Во втором случае возможно создание унифицированного сортамента отдельных стержневых и узловых деталей, из которых можно собирать не всегда заранее определенные схемы.

Рассматривается задача выбора числа типоразмеров стержней в конкретном объекте. В качестве прототипа принимаем покрытие главного корпуса комбината индустриальных конструкций в Красноярске, одноэтажного здания с сеткой колонн 18×18 м, размерами в плане 360×144 м. Каждый блок выполнен по схеме рис. 8, *а* при опирании в угловых точках; $A=B=18$ м; $a^0=b^0=3{,}0$ м; $h^0=a^0/\sqrt{2}=2{,}12$ м. Расчетная нагрузка — 3,75 кПа, расход стали — 22,3 кг/м². Стержни одной длины l^0, равной 3,0 м,— из горячедеформированных и электросварных труб; узловые соединения — типа «МАрхИ», сборка осуществляется на монтажной конвейерной линии из отдельных стержневых и узловых деталей. Кровельная конструкция — стальной профилированный настил по прогонам из швеллеров, опирающихся в узлах верхней поясной сетки. Производительность конвейера — 2,5 блока в сутки; мощность поточной линии на Черногорском заводе — 250 стержней в смену [45].



$\bar{S}$	η		
	0,15	0,25	0,35
0,30	1,30	1,47	1,60
0,40	1,20	1,30	1,39
0,50	1,13	1,20	1,26
0,60	1,09	1,13	1,17
0,75	1,04	1,07	1,09
1,00	1,00	1,00	1,00
1,50	0,96	0,93	0,91
2,00	0,93	0,90	0,87
3,00	0,91	0,87	0,83
6,00	0,89	0,83	0,78
∞	0,87	0,80	0,74

Рис. 30. Зависимость коэффициентов серийности от условий изготовления.

С учетом этого можно организовать две переналадки поточной линии в смену при трехсменной работе и выпуске 750 стержней в сутки. Этим обеспечивается синхронность с темпом конвейера на монтаже. Таким образом, $S_n = 125$ при $\tau_n = 6$. Предполагается, что относительные отклонения от нормы в виде (267) обратно пропорциональны изменению $\bar{\tau} = \tau/\tau_n$.

В каждом из численных экспериментов по условию минимума приведенных затрат (58) определяется единая длина стержня a и показатели качества конструкции. Соответствующий программный модуль использует выражение (59) при $b = a$ и $h = a/\sqrt{2}$. Распределение внутренних усилий в стержневой плите отвечает модели работы [46]. На его основе выполнена разбивка на зоны унификации сечений, которая зависит также от числа типоразмеров τ (рис. 31, *а*), варьируемого в диапазоне 2...17. Удельные характеристики сортамента труб: $\rho = 0{,}7...0{,}9$;

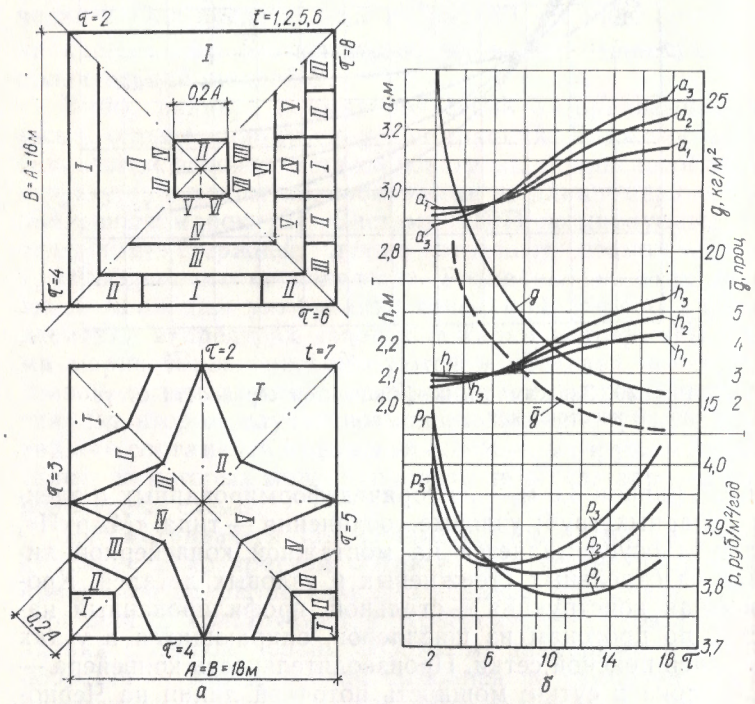


Рис. 31. К оптимизации параметров блока покрытия 18×18 м:
а — зоны унификации сечений I...VIII; *б* — влияние числа типоразмеров стержней при $\eta_1 = 0{,}15$; $\eta_2 = 0{,}25$; $\eta_3 = 0{,}35$.

материал — сталь обычной прочности, $R = 210$ МПа, коэффициент $k(R)$ — по кривой 2 рис. 27, *б*.

Показатели стоимости: $C_м = 300$ руб/т, $C_u = 12{,}6...21{,}2$ руб., $C_b \approx C_g = 2{,}51...4{,}23$ руб. (подсчитаны с помощью коэффициентов серийности рис. 30 по кривым $\eta = 0{,}15$; 0,25; 0,35 при $\tau = 2...17$); $C_l = 1{,}7$ руб/м³; $C_w = 15$ руб/м² (ячеистобетонные стеновые панели). Длина стенового ограждения, приходящаяся на один блок: $L = 3$ м. Данные по эксплуатационным расходам: $H = 0{,}05$ год⁻¹, $p = 0{,}43$ руб/(м³·год).

Оптимизационные расчеты выполнены на указанном диапазоне τ для трех вариантов η_1, η_2, η_3. Результаты в виде функций a, h, g, $\bar{g}$, $p(\tau)$ приведены на рис. 31, *б*. Индексы *1*, *2* и *3* при величинах a, h, p соответствуют значениям $\eta_1 = 0{,}15$, $\eta_2 = 0{,}25$ и $\eta_3 = 0{,}35$. Величины g и $\bar{g}$ от η не зависят. Последняя из них характеризует снижение массы при наращивании числа типоразмеров на единицу:

$$\bar{g}(\tau) = (g(\tau - 1) - g(\tau)) / g(\tau - 1)\, 100\ \%. \qquad (269)$$

С увеличением τ геометрические параметры, т. е. сторона ячейки a и линейно зависящая от нее высота h возрастают. Это объясняется ростом трудозатрат за счет измельчения серии (см. рис. 30) и соответствующим повышением единичных показателей стоимости C_u, C_b, C_g. Как следствие, оптимальное решение сдвигается в сторону уменьшения числа узлов и стержней. Результаты a, h, $p(\tau)$ представляются пучком кривых, имеющим, так же как и коэффициенты серийности, узел в точке $\tau = \tau_n$, соответствующей нормальной партии. Разброс пучков определяется границами η. Размеры a и h стабильнее и ближе к a, $h(\tau_n)$ при меньших η, где эффект серийности выражен слабее:

$$\frac{a_{\tau=2}}{a_{\tau=17}} = \frac{h_{\tau=2}}{h_{\tau=17}} = \begin{cases} 0{,}94 \text{ при } \eta = \eta_1 = 0{,}15; \\ 0{,}88 \text{ при } \eta = \eta_3 = 0{,}35. \end{cases}$$

Функции $p(\tau)$ имеют в изученном диапазоне τ минимум, который указывает рациональное, при определенных условиях изготовления, число типоразмеров τ^*. Интересно отметить, что величина $\tau^*(\eta)$ увеличивается при уменьшении η, а приведенные затраты $p^*(\eta)$ — снижаются. Таким образом, в условиях более совершенного производства, в том числе и на основе поточных линий, где прогнозируется значительное возрастание доли машинного времени,— можно назначать большее число

типоразмеров. Так, если при $\eta=0{,}35$ рекомендуется принимать 5...6 типоразмеров, то при $\eta=0{,}25$ рациональное число унификации составит уже 8...9, а при $\eta=0{,}15$ — может быть увеличено до 10...11. При этом приведенные затраты уменьшаются на 1...2 %.

Особенно важно то, что объективная тенденция развития производства металлоконструкций работает в данном случае на снижение металлоемкости ПРП не в ущерб технологичности. Из рассмотрения кривых $p(\eta, \tau)$ и $g(\tau)$ можно заключить, что, предполагая современные способы изготовления и монтажа, следует рекомендовать увеличенное число типоразмеров, так как при этом экономия стали составляет приблизительно 15 %.

Дополнительные данные $\overline{g}(\tau)$ иллюстрируют применение 2 %-ного критерия выбора τ_0, основанного на стремлении $g(\tau)$ к некоторому пределу при увеличении τ. Использование этого критерия, инвариантного относительно условий изготовления, может привести к необоснованному превышению трудозатрат в среднем на 10 %.

5.5. ВЛИЯНИЕ КОМПОНЕНТОВ ЗАТРАТ И МОДИФИКАЦИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Уровень нагрузки, характеристики материала и сортамента, степень унификации элементов непосредственно воздействуют на массу ПРП и косвенно на другие показатели, среди которых немаловажную роль играют количественные (число узлов, стержней в поясных сетках и соединительной решетке) и то, с каким стоимостным значением они входят в общее выражение для приведенных затрат, т. е. коэффициенты C_u, C_b, C_g. Применение высокопроизводительного оборудования и конвейерных линий приводит к снижению стоимости узловых и стержневых деталей, что затрагивает оптимальные параметры конструкции. Существенное значение имеют также затраты по ограждающим конструкциям, во многом определяемые единичными показателями C_l, C_r, C_w. Важным компонентом являются и нормативы эксплуатационных расходов.

Рассмотренные решения задач оптимизации и другие исследования стержневых плит [47] позволяют дать оценки для конкретных случаев. Так, при анализе результатов, приведенных на рис. 31, *б*, отмечен рост стороны квадратной ячейки a (на 7...15 %) за счет увеличения C_u, C_b, C_g (на 30...70 %). Этот эффект получен при одновременном уменьшении массы, что усиливает влияние количественных факторов, а также при «связанной» высоте $h=a\sqrt{2}$, что ослабляет его. Достоверность вывода подтверждается специальными экспериментами для структур с прямоугольными ячейками при независимых параметрах a, b и h. В этом случае при удешевлении вчетверо узловых элементов размеры a и b уменьшаются на 25 %, а высота не изменяется. Наоборот, применение более дорогого стенового ограждения (возрастание C_w в 3 раза) уменьшает высоту h на 30...35 % при практически неизменных a и b.

Представляет интерес поведение оптимальных параметров и экономических показателей при варьировании единичных коэффициентов стоимости для ПРП с криволинейной поверхностью, в частности, двухсетчатой цилиндрической оболочки по схеме рис. 8, *д*. Перекрывается план со сторонами $A=80$ м, $B=60$ м, опирание — по торцам; нагрузки: от веса покрытия — 2 кН на 1 м² ограждающей поверхности, от снега — по I снеговому району. Конструктивное решение основных несущих и кровельных элементов такое же, как у описанного купола (см. параграф 5.1). Сохранены удельные характеристики для поясных сеток из спаренных уголков и трубчатой соединительной решетки, коэффициент k, определяющий высоту двухветвевых стержней, система их развязки из плоскости наибольшей жесткости, данные по материалу.

Особенность схемы разбивки треугольной сетки — выравнивание длин всех ее стержней (ребер I и раскосов II). Независимым параметром принимается n — число панелей в грани. Тогда единая длина стержней: $a=A/n$; число граней m определяется формулой (11), где $b=a\sqrt{3}/2$ и центральный угол α — второй независимый параметр. Таким образом решается оптимизационная задача (64) с основными неизвестными α и n. В соответствующей программе реализованы формулы типа (65), где m зависит от α и n, как указано ранее.

Предусмотрено два варианта работы программы. Первый из них отвечает минимизации приведенных затрат на единицу площади перекрываемого плана. Такой критерий применялся во всех задачах, приведенных в данной главе:

$$\min \overline{\varphi}, \quad \overline{\varphi}=\varphi/(AB), \ \overline{\varphi}=\varphi/(0{,}25\pi D^2). \qquad (270)$$

Для стержневых плит он естественен и ревизии не подлежит. В случае ПРП с криволинейной поверхностью возможна альтернатива. Известно много конструкций с

большой стрелой подъема, в которых часть поверхности используется как стеновое ограждение. Технологическая оснастка существенно заполняет пространство, ограниченное криволинейной поверхностью. В этом случае более приемлемой является оценка затрат на 1 м² ограждения. Эта модификация критерия качества учтена вторым вариантом программы. Разыскивается

$$\min \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = \varphi/S, \tag{271}$$

где S — площадь срединной поверхности.

Поскольку здесь, в отличие от (270), делитель есть функция оптимизируемого параметра α, то характер влияния многих компонентов существенно изменяется. Например, стоимость ограждающего ковра (утеплитель, изоляция и пр.), на важную роль которой указано в работе [20], при таком подходе совсем исключается из участия в оптимизационном балансе, решение оказывается инвариантным относительно коэффициента C_r. В целом следует ожидать: $\tilde{\alpha} > \bar{\alpha}$, т. е. более подъемистых покрытий.

Дополним сведения об исходных данных по цилиндрической оболочке с сетками, ячейки которых в схеме представляют собой равносторонние треугольники со стороной a и высотой b. Предварительный статический анализ с помощью ЭВМ позволил выявить характерные зоны распределения усилий по граням, в том числе и от неравномерной вдоль круговой направляющей нагрузки. Полученные зоны унификации показаны на рис. 32,*а*, где границы даны в виде (26) и в соответствии с рис. 9, *в*, но для одной четверти покрытия с условно нанесенной сеткой стержней.

В первой серии задач «числовые» единичные показатели (см. параграф 2.2) варьируются в широких пределах: C_u=0...300 руб., C_b=0...30 руб., C_g=0...15 руб. Остальные — фиксированы: $C_м$=180 руб/т, C_l=1,2 руб/м³, C_r=3 руб/м², C_w=15 руб/м², H=0,05 год⁻¹, P=0,5 руб/(м³·год).

На рис. 33, *а* приведены решения этих задач в двух вариантах, отмеченных индексами 1 и 2 в обозначениях величин a, α, p, $g(C)$, причем 1 — соответствует критерию (270), а 2 — критерию (271). Для каждой из величин применен отдельный тип линий.

С удорожанием узловых и стержневых деталей сторона ячейки поясных сеток a увеличивается, т. е. наблюдается стремление к уменьшению числа элементов, как

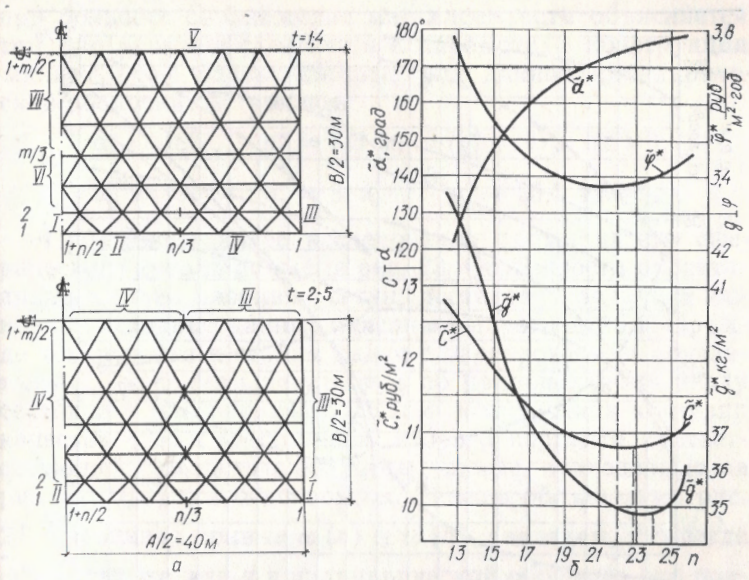
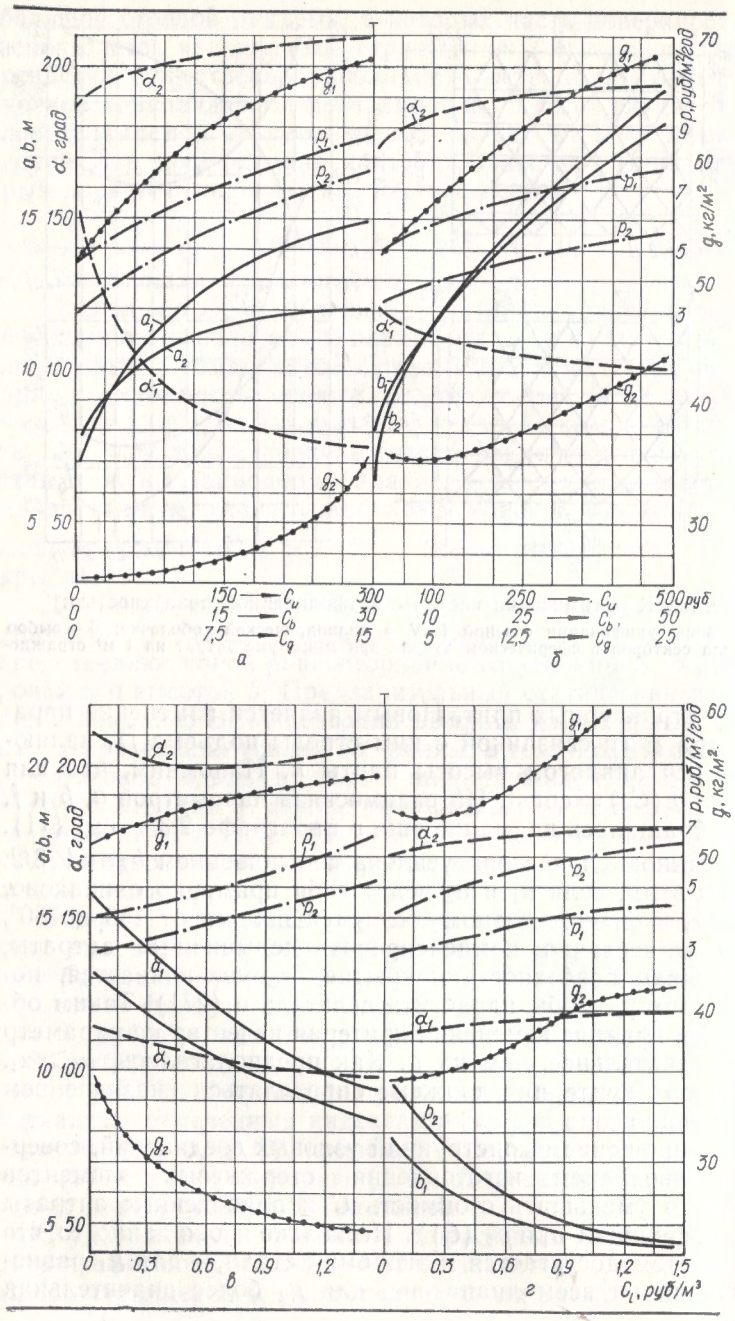


Рис. 32. К оптимизации систем с криволинейной поверхностью:

а — зоны унификации сечений I...V в цилиндрической оболочке; *б* — выбор числа секторов в сферическом куполе при минимуме затрат на 1 м² ограждения.

и у структурных плит. Новым является изменение параметра α (и связанной с ним стрелы подъема f), являющегося аналогом высоты плиты h. Напомним, что для плит $h(C_u)$=const. На взаимосвязь параметров a, b и f, α обращалось внимание еще в параграфе 2.3 — см. (11). В данном случае она усилена соотношением $b = a\sqrt{3}/2$. При этом, если a_1 и a_2 ведут себя примерно одинаково, то α_1 и α_2 — по-разному: α_1 уменьшается от 150 до 80°, чтобы частично компенсировать повышенные затраты, стягивая поверхность покрытия; α_2 увеличивается, по-видимому, чтобы нарастить делитель в (271). Таким образом влияние изменения критерия качества на параметр α значительнее, чем на a. Как предполагалось, $\alpha_2 > \alpha_1$. Выбор критерия должен определяться назначением здания.

Упрощением конструкций узловых соединений, совершенствованием изготовления стержневых элементов можно уменьшить стоимость C и приведенные затраты (см. функции p_1 и p_2 (C)). Несколько неожиданно то, что при этом достигается и экономия стали,— для g_1 равномерная на всем диапазоне, для g_2 более значительная



при бо́льших C. Снижение металлоемкости объясняется тем, что решение сдвигается к параметрам конструкции минимальной массы, которые для данной цилиндрической оболочки составляют:

$$\alpha_1^* = 180°, \quad a_1^* = 7{,}3 \text{ м}, \quad (g_1^* = 41{,}2 \text{ кг/м}^2);$$

$$\alpha_2^* = 190°, \quad a_2^* = 8 \text{ м}, \quad (g_2^* = 25{,}5 \text{ кг/м}^2).$$

Продолжим далее исследования двухсетчатого сферического купола по схеме рис. 23. Особенности проекта-аналога, идея разбивки сетки, постановка задачи и основные исходные данные описаны в параграфе 5.1. Прежде чем перейти к сериям задач с варьированием показателей C, дополним результаты по рациональному числу секторов n (см. рис. 24) с учетом модификации критерия качества (271). С помощью второго варианта соответствующей программы получены данные, приведенные на рис. 32, *б*, где, в основном, сохранены обозначения рис. 24. Сравнивая кривые $\bar{\alpha}(n)$ и $\tilde{\alpha}(n)$, замечаем, что везде $\tilde{\alpha} > \bar{\alpha}$, так же, как и у цилиндрической оболочки, что подтверждает общий прогноз о роли критерия (271). Другой вывод касается оптимального значения n^*. Он следует из сопоставления кривых $\bar{\varphi}$, $\bar{C}$, $\bar{g}(n)$ и $\tilde{\varphi}$, $\tilde{C}$, $\tilde{g}(n)$ и заключается в том, что минимум сместился в зону $\tilde{n} = 21...25$, т. е. правее на несколько единиц ($\bar{n} = 16...19$). Имея в виду среднее значение, можно заключить, что число секторов аналога $n^0 = 21$ близко к оптимальному. Число дроблений $\tilde{m}(n) = 4$ как и ранее, причем $\bar{m} = \tilde{m} = m^0$.

Оценим также единую длину меридиональных и квазимеридиональных стержней b, используя формулы (263) и (52). В диапазоне $\alpha = 100...180°$ имеем $b \approx 9{,}8...7{,}5$ м. Соответствующий проектный размер аналога $b^0 = 9$ м. Длина кольцевого стержня в основании купола $a = a^0 = \frac{\pi D}{mn} = \frac{\pi 230}{4 \cdot 21} = 8{,}6$ м, что достаточно близко к значениям b, а треугольник ячейки здесь почти равно-

Рис. 33. Зависимость параметров и показателей криволинейных покрытий при минимизации приведенных затрат на 1 м² пола (*1*) и 1 м² ограждения (*2*):

а — от стоимости узлов и стержней, в цилиндрической оболочке; *б* — то же, в сферическом куполе; *в* — от стоимости кровельно-потолочных конструкций в оболочке; *г* — то же, в куполе.

сторонний. Это упрощает конструкцию узлов на значительной части поверхности. Таким образом, основные геометрические параметры проекта несущего каркаса купола близки к оптимальным.

В дальнейшем принимаем $n=21$. Другая исходная информация оставлена без изменений. Влияние единичных показателей стоимости деталей изучается на диапазоне: $C_u=0...500$ руб., $C_b=0...50$ руб., $C_g=0...25$ руб. Результаты численных исследований приведены на рис. 33, *б* в составе и обозначениях, принятых на рис. 33, *а*, за исключением того, что вместо единой длины a стержней оболочки представлена единая длина b всех стержней купола, кроме кольцевых.

Отмеченные ранее для оболочки закономерности, в основном, подтвердились и для купола. Несколько ближе друг к другу b_1 и b_2 по сравнению с a_1 и a_2. Выравнялись также пределы изменения α_1 и α_2. Из условия минимума массы стержней получены решения менее подъемнистые: $\alpha^*_1=125°$, $b^*_1=9{,}7$ м ($g^*_1=52{,}4$ кг/м²); $\alpha^*_2=152°$, $b^*_2=9{,}4$ м ($g^*_2=34{,}9$ кг/м²).

Вторая серия задач оптимизации связана с варьированием стоимости несущих элементов кровли и подвесного потолка. Коэффициент C_l изменяется от 0 до 1,5 руб/м³. Используются те же, что и ранее, программные модули. Исходная информация по оболочке отличается от предыдущей следующим: $C_r=2$ руб/м², $C_u=40$ руб., $C_b=9$ руб., $C_g=6$ руб.; для купола эти и другие данные взяты по параграфу 5.1.

Результаты численных экспериментов помещены на рис. 33, *в*, *г* в таком же виде, как на рис. 33, *а* и *б*. Зависимости параметров от C_l свидетельствуют о том, что при увеличении материалоемкости и усложнении кровельно-потолочных конструкций, а, значит, их удорожании,— в первую очередь изменяются длина стержней a и b. При этом сокращается примерно вдвое пролет l, что в какой-то мере компенсирует негативное влияние роста C_l — см. (8). Изменчивость стрелы подъема на изученном диапазоне незначительна. Измельчение ячейки в трех случаях из четырех совпадает с бóльшим расходом стали, кроме g_2 в оболочке. Приведенные затраты везде монотонно возрастают.

Исследовано также влияние стоимости несиловых слоев кровли, стеновых ограждений, нормативов по отоплению и вентиляции. В соответствующих сериях варьировались: $C_r=0...6$ руб/м², $C_w=0...15$ руб/м², $P=0...0{,}6$ руб/(м³·год). При этом оптимальные решения характеризовались стабильностью по размерам ячейки и слабой изменчивостью по стреле подъема. Например, для серии C_r в куполе получено: $m_1=4$, $\alpha_1=120...100°$, $m_2=4$, $\alpha_2=174°$, причем постоянство m_2 и α_2 было предсказано при введении критерия (271).

В работах [47, 48] отмечено существенное влияние стоимости примыкающих участков стен и энергетических затрат на высоту покрытия из ферм и структурных блоков. В отапливаемых зданиях высота должна быть меньше на 30...50 %. В случае криволинейных поверхностей значение этих факторов проявляется лишь для пологих ПРП при $\bar{f}<0{,}5$ ($\alpha<100°$). Это подтверждается анализом зависимостей (16) и данных серий C_w и P.

Для удобства сравнения результатов по обеим конструкциям при различных критериях качества некоторые значения параметров и показателей сведены в табл. 15. Использованы задачи первой серии при $C_u=150$ руб., $C_b=15$ руб., $C_g=7{,}5$ руб. Относительная стрела подъема $\bar{f}$ вычислена по формулам (14). Для купола размер a взят средним по звездчатой разбивке (см. зависимость (67)).

Оптимальные решения в значительной мере изменяются с модификацией критерия качества. Это относится и к замене измерителя площади (1 м² перекрываемого плана на 1 м² поверхности ограждения) и к исключению компонентов затрат, т. е. при переходе $\varphi \to C \to M$. Конструкции минимальной стоимости меньше отличаются от базовых (по min φ), чем конструкции минимальной массы, характеризуемые укороченными стержнями. Аналогичные тенденции наблюдались и в структурных плитах [47], однако, для них влияние энергетических расходов и стеновых ограждений существеннее. Анализ представленных показателей показывает, что использование критерия минимума массы в отдельных случаях приводит к завышению затрат до 40 % (для структурных плит 50...100 %). В целом для ПРП можно считать, что отклонения в показателях по различным критериям несколько сглаживаются при переходе к более эффективным в статическом отношении схемам (плита →оболочка→купол). Особенность оценки расходов на 1 м² ограждающей поверхности состоит в том, что, минимизируя металлоемкость $\tilde{M}$, можно получить снижение $\bar{\varphi}$, $\bar{C}$, но перерасход $\tilde{\varphi}$, $\tilde{C}$ до 15 % (см. например, три последние строки табл. 15). Этот факт подтверждает необходимость обоснова-

Таблица 15. Оптимальные параметры и показатели ПРП при различных критериях качества

Тип покрытия	Критерий качества	Параметры: α, град	$\bar{f}$	f, м	a, м	b, м	Показатели: $\bar{M}$, кг/м²	$\bar{C}$, руб/м²	$\bar{\varphi}$ руб/(м²×год)	$\tilde{M}$, кг/м²	$\tilde{C}$, руб/м²	$\tilde{\varphi}$ руб/(м²×год)
Цилиндрическая оболочка	$\bar{M}$	180	1,00	30,0	7,30	6,30	41,2*	52,5	10,3	26,2	33,4	6,56
	$\bar{C}$	90	0,41	12,4	11,4	9,90	58,8	34,7*	7,20	52,9	31,2	6,48
	$\bar{\varphi}$	85	0,39	11,7	13,3	11,5	75,0	37,5	7,07*	68,3	34,2	6,44
	$\tilde{M}$	190	1,09	32,7	8,00	6,93	42,4	52,1	10,4	25,5*	31,3	6,22
	$\tilde{C}$	200	1,19	35,8	10,0	8,70	53,3	51,6	10,5	30,1	29,1*	5,92
	$\tilde{\varphi}$	205	1,25	37,4	11,4	9,90	63,0	54,8	10,7	34,4	29,9	5,86*
Сферический купол	$\bar{M}$	125	0,61	69,8	6,35	9,70	52,4*	28,5	7,01	38,3	20,8	5,12
	$\bar{C}$	115	0,55	63,1	7,75	12,3	57,0	24,7*	6,32	43,8	19,0	4,86
	$\bar{\varphi}$	110	0,52	59,9	7,80	12,7	58,8	25,2	6,29*	46,3	19,8	4,95
	$\tilde{M}$	152	0,78	89,8	6,60	9,40	56,2	30,9	7,73	34,9*	19,2	4,80
	$\tilde{C}$	175	0,96	110	8,33	11,6	68,4	31,6	8,32	35,7	16,5*	4,34
	$\tilde{\varphi}$	187	1,06	122	8,66	12,1	76,5	36,0	9,20	35,9	16,9	4,32*

Примечания: 1 φ — приведенные затраты; C — стоимость металлокон струкций; M — масса стержней.
2. Шляпки над буквами в соответствии с (270) и (271);
3. Звездочкой выделен ведущий показатель.

ния проектных решений с помощью всестороннего оптимизационного анализа.

Таким образом, используя отдельные активные факторы, можно управлять оптимальными параметрами и экономическими показателями конструкций ПРП в соответствии с конкретными условиями их проектирования, реализации в металле и эксплуатации.

6. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРП В ПРАКТИКЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Главные геометрические параметры ПРП — размеры ячейки поясных сеток, высота стержневого набора, стрела подъема — существенно влияют на экономичность проектного решения. Поэтому, назначая указанные параметры, инженер не может ограничиваться интуицией или рассмотрением нескольких вариантов конструкций, особенно для повторного применения или серийного производства. Наряду с прочностными расчетами становятся необходимыми оптимизационные. Приведенная технология оптимального проектирования отработана в Укрниипроектстальконструкция.

6.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОГО РАСЧЕТА

Технология оптимизационного расчета в значительной мере зависит от исходных данных, искомых результатов, а также от последовательности отдельных этапов работ и элементарных операций. Исходные данные для оптимизационного расчета определяются типом конструктивной системы и условиями проектирования.

Конструктивная система характеризуется: макрогеометрией и принципом статической работы (стержневая плита, оболочка, купол); формой ячейки поясных сеток (ортогональная, треугольная) и способом их объединения решеткой (по кристаллическому или перекрестному образцу); видом применяемых профилей (прокат, трубы); конструкцией узлов и членением на отправочные марки; способом опирания и типом кровельно-потолочных

конструкций (узловое, внеузловое; прогоны, настил, плиты, мембрана).

Заданные условия проектирования должны включать: генеральные размеры покрытия (секции, блока) в плане; схему опирания (по контуру, в отдельных точках); расчетные нагрузки; характеристики материала и сортамента профилей для стержневых элементов; данные по удельной стоимости кровельных и стеновых ограждений; параметры перекрываемых помещений, определяющие эксплуатационные расходы.

Результаты оптимизационного расчета: размеры ячейки поясных сеток, высота стержневого набора, стрела подъема, обеспечивающие минимум приведенных затрат на ПРП; экономические показатели конструкции, соответствующие оптимуму; оценки потерь затрат, возникающих в проекте при отклонении от оптимальных размеров.

Собственно расчет состоит из нескольких этапов. На первых этапах выполняется статический и технико-экономический анализ конструкции-прототипа с фиксированными значениями искомых параметров. При этом используются справочные данные и проекты-аналоги. Определяются внутренние погонные усилия M, Q, S в эквивалентной континуальной модели (плите, оболочке) или осевые силы T^0, N^0 в стержневой системе. Уточняются разбивка на зоны унификации сечений, характеристики применяемых сортаментов (ρ, ω) и материала. С помощью прейскурантов, ценников, а также специальных калькуляций по имеющимся методикам — выявляются показатели качества и соответствующие коэффициенты $C_м$, $C_и$ и др.

Далее применяются разработанные оптимизирующие программы. Они автоматизируют вычисления констант типа (62) и (63) в выражениях приведенных затрат (58) и (64), значений самих целевых функций и др. Из условия минимума φ находят геометрические параметры, наилучшие по формальному критерию качества, и отвечающие им экономические показатели. Включают также процедуры, описывающие окрестность минимума в виде координат граничных точек эллипсоида потерь и т. п.

В нестандартных случаях, на основе моделей, рассмотренных в гл. 2, составляются на алгоритмическом языке аналогичные оптимизирующие фрагменты, которые могут работать автономно либо совместно с проблемно-ориентированными задачами «Экстремум» и «Окрестность» подсистемы оптимального проектирования САПР-ЦНИИПСК. Минимизация подготовленной целевой функции может быть выполнена также с помощью универсальных программных и технических средств, имеющихся в вычислительном центре.

6.2. СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОТОТИПА

На первом этапе оптимизационного расчета выполняется статический анализ конструкции-прототипа с фиксированными значениями искомых параметров. Исходные данные этапа представляют собой прежде всего схему покрытия, включающую как характеристики конструктивной системы (форму ПРП в целом, тип поясных сеток и решетки, способ соединения стержней в узлах и опирания кровли), так и конкретные условия проектирования (размеры, опорные закрепления, нагрузки, сортамент профилей). В результате выявляется картина напряженного состояния в виде внутренних усилий — распределенных (погонных) в континуальной модели плиты, оболочки или сил в стержнях для дискретной системы. На основе этих данных определяются зоны унификации сечений и соответствующие им расчетные усилия, удельные характеристики сортамента стержней, в том числе подбираемых по гибкости.

Для хорошо изученных, регулярных систем можно найти готовое решение в таблицах по расчету пластинок, перекрестных балок и т. п. или применить приближенную методику расчета. В нестандартных ситуациях выполняют машинный расчет многоэлементных стержневых систем.

Технологию этапа статического анализа можно проследить на примере покрытия здания в Красноярске (см. параграф 5.4).

Характеристика конструктивной системы: стержневая плита (см. рис. 8, *а*) с ортогональной (квадратной) ячейкой в поясных сетках, объединенных по структурному (кристаллическому) типу, причем стержневой набор составлен полуоктаэдрами и тетраэдрами, все ребра которых проектируются одной длины; стержневые элементы плиты из горячедеформированных и электросварных труб соединяются узловыми деталями типа «МАрхИ» (узлы семейства «Меро», «Веймар», «Кисловодск» — см. табл. 3), сборка осуществляется на монтажной площадке из отдельных стержневых и узловых деталей, доставляемых в плотно упакованных контейнерах; кровля — из

стального профилированного настила по прогонам из швеллеров, опирающихся в узлах.

Заданные условия проектирования: блоки размерами $A=B=18$ м опираются на колонны в угловых точках, расчетная равномерно распределенная нагрузка $q=3{,}75$ кПа; пояса и раскосы — из малоуглеродистой стали с расчетным сопротивлением $R=210$ МПа, унифицированный (сокращенный) сортамент труб с удельным радиусом инерции $\rho=0{,}6...1{,}0$.

Фиксированные параметры: $a^0=b^0=3{,}0$ м, $h^0=a^0/\sqrt{2}=2{,}12$ м.

Остальные данные, необходимые для технико-экономического анализа, будут приведены в параграфе 6.3.

Статический расчет проводим с помощью методики, предложенной в работе [46]. Изменение продольных усилий в верхних ($t=1, 2$) и нижних ($t=5, 6$) поясах предполагается линейным по направлению от центра к стороне блока и косинусоидальным вдоль стороны, а в раскосах ($t=7$) линейным по направлению от центра к углам блока и вдоль сторон (рис. 34, *а*). Соответственно этому приняты зоны унификации сечений стержней (рис. 34, *б*), для каждой из которых вычисляются расчетные усилия N^0_{tz}, характеристики d^i_{tz} и др.

Расчетные усилия по типам стержней:

$t=1, 2$ (верхние пояса, $z_1=z_2=3$)

$$N^0_{1,1}=N^0_{2,1}=N^b=\frac{qA^3}{24h^0k_n}=\frac{3{,}75\cdot 18^3}{24\cdot 2{,}12\cdot 1{,}1}=391 \text{ кН};$$

$$N^0_{1,2}=N^0_{2,2}=\max\left\{\begin{array}{l} N^b y_2/y_1=391\cdot 4{,}2/7{,}2=228 \\ N^b\cos\dfrac{\pi x}{l}=391\cdot\cos\dfrac{\pi 5{,}4}{18}=230\end{array}\right\}=230 \text{ кН};$$

$$N^0_{1,3}=N^0_{2,3}=0.$$

$t=5, 6$ (нижние пояса, $z_5=z_6=3$)

$$N^0_{5,1}=N^0_{6,1}=1{,}2N^b=1{,}2\cdot 391=469 \text{ кН};$$

$$N^0_{5,2}=N^0_{6,2}=1{,}2\cdot 230=276 \text{ кН};\quad N^0_{5,3}=N^0_{6,3}=0.$$

$t=7$ (раскосы, $z_7=5$)

$$N^0_{7,1}=1/4qA^2/\sin\alpha=0{,}25\cdot 3{,}75\cdot 18^2\cdot\sqrt{2}=430 \text{ кН};$$

$$N^0_{7,2}=N_{p2}=0{,}33/4\cdot qA^2/\sin\alpha=0{,}33\cdot 430=142 \text{ кН};$$

$$N^0_{7,3}=N^0_{7,4}=0{,}5N_{p2}=0{,}5\cdot 142=71 \text{ кН},$$

где α — угол наклона раскоса к горизонту.

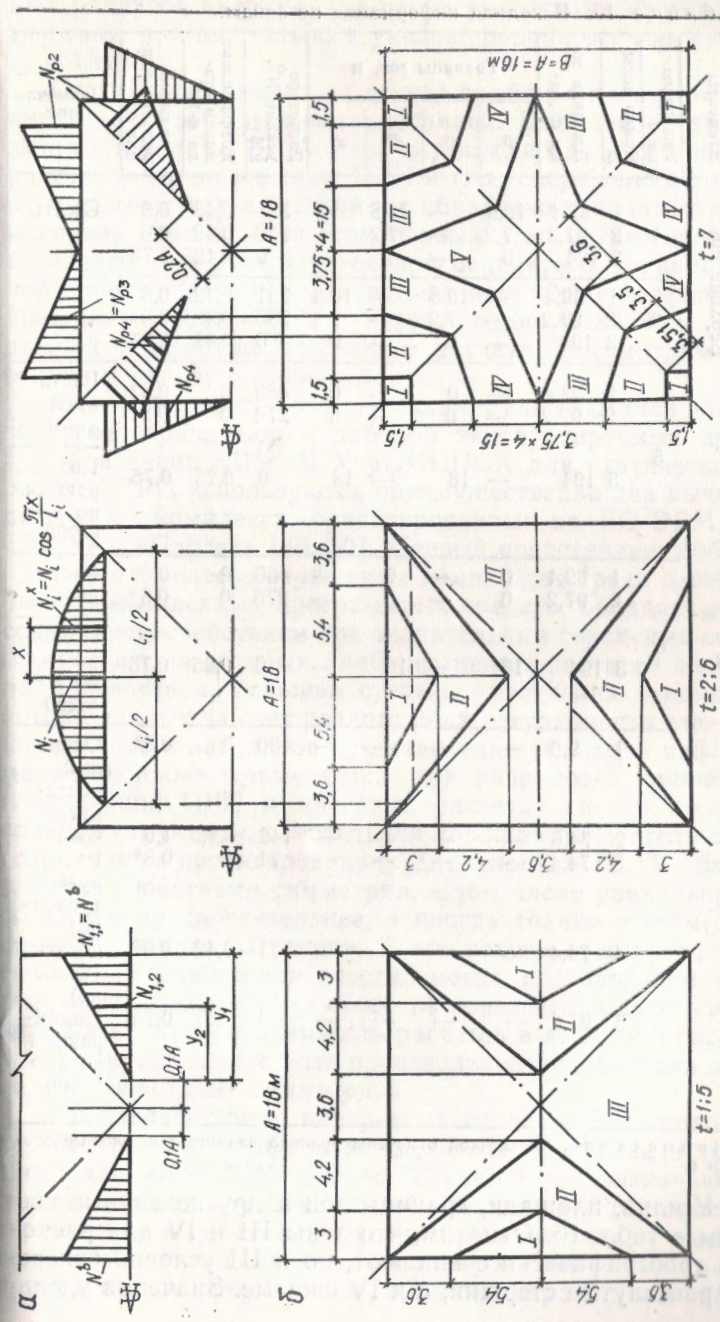


Рис. 34. К статическому анализу стержневой плиты:
а — распределение усилий; *б* — зоны унификации сечений I...V.

Таблица 16. **Исходная информация по зонам**

Элементы	Тип стержня, t	Номер зоны Z	Площадь зоны d^0, м²	Границы зон, м				Расчетное усилие N^0, кН	Коэффициент марки стали $k \cdot 10^4$	Удельный радиус инерции ρ	Примечание
				d^1	d^2	d^3	d^4				
Верхние пояса	1	1	32,4	10,8	—	10,8	—	391	0,42	0,8	Сжаты
		2	97,2	7,2	—	7,2	—	230	0,42	0,8	
		3	194	0	—	4	—	0	0,42	0,75	
	2	1	32,4	—	10,8	—	10,8	391	0,42	0,8	
		2	97,2	—	7,2	—	7,2	230	0,42	0,8	
		3	194	—	0	—	0	0	0,42	0,75	
	5	1	32,4	—	0	—	0	469	0	0,8*	Растянуты $\rho \neq 0$
		2	97,2	—	0	—	0	276	0	0,8*	
		3	194	—	18	—	18	0	0,25	0,75	Подбираются по $\lambda_l = 200$
Нижние пояса	6	1	32,4	0	—	0	—	469	0	0,8*	Растянуты
		2	97,2	0	—	0	—	276	0	0,8*	
		3	194	18	—	18	—	0	0,25	0,75	Подбираются по $\lambda_l = 200$
Раскосы	7	1	9,0	—	—	—	—	430	0	0,8*	Опорный растянут
		2	74,6	—	—	—	—	142	0,42	1,0	Сжаты
		3	74,4	—	—	—	—	71	0	0,8*	Растянуты (условно)
		4	74,4	—	—	—	—	71	0,42	0,9	Сжаты (условно)
		5	91,6	—	—	—	—	0	0,25	0,75	Подбираются по $\lambda_l = 200$

Примечание. Звездочкой отмечены условно заданные ненулевые значения ρ.

Усилия, площади, границы зон и другие данные сведены в табл. 16. Отметим, что зоны III и IV для раскосов топографически совпадают, но к III условно отнесены растянутые стержни, а к IV сжатые. Значения удельных радиусов инерции для трубчатых стержней конкретизованы применительно к унифицированному сортаменту «МАрхИ».

Статический анализ на основе приближенной методики не трудоемок и весьма нагляден. Выполнение этого этапа с помощью ЭВМ в тех случаях, когда необходимо рассчитывать новые типы ПРП и т. п., сопряжено с большим количеством операций и с обработкой значительных массивов данных. При этом первый этап оптимизационного расчета рекомендуется присоединять к традиционной проектной процедуре анализа напряженно-деформированного состояния на основе рациональной и надежной технологии машинного расчета. Рассмотрим ее основные стадии и операции.

1. Выбор средств автоматизации. Рекомендуется пользоваться ограниченным набором эксплуатируемых программ и типов ЭВМ. В УкрНИИПСК для статического расчета ПРП используются преимущественно два вычислительных комплекса, ориентированные на ЕС ЭВМ,— «Лира» и «Парсек» [49, 50]. Первый представляет собой один из наиболее совершенных комплексов среди известных промышленных программных средств, обладает высоким быстродействием при значительных сервисных возможностях, из которых наиболее ценны развитая система диагностики, большая степень уплотнения входного потока данных за счет разного рода регулярности схемы, компактное и наглядное представление выходной информации. Широко применяется при разработке типовых конструкций ПРП и массовых расчетах систем произвольной структуры, обеспечивая хорошие показатели автоматизации проектирования. Для анализа ПРП, обладающих свойствами симметрии, в том числе уникальных объектов, предпочтительнее, а иногда только и возможно, использовать «Парсек». В его основе лежит эффективный численно-аналитический метод, позволяющий путем учета симметрии (любого из известных типов) снизить вычислительную емкость расчетов в десятки и сотни раз. Нагрузка может быть произвольной и не обязана обладать свойствами симметрии.

В последнее время внедряются средства диалогового расчета на базе алфавитно-цифровых дисплеев, в том числе для мини-ЭВМ «Искра-226». Они предназначаются для автоматизированных рабочих мест (АРМ) проектировщиков и рекомендуются для решения малых задач особенно при вариантном проектировании. Работая в интерактивном режиме за пультом экрана, инженер

может в течение часа просмотреть значительный диапазон различных размеров, жесткостных характеристик, нагрузок.

2. Отладка задачи. Эта стадия выполняется только для сложных задач и предусматривает решение пробных примеров, обладающих особенностями исходной системы, которые вызывают сомнение. Чаще всего это относится к малоизученным схемам ПРП, предположительно геометрически изменяемым, при неполной информации по опорным закреплениям, при необходимости проверить те или иные расчетные допущения. Иногда исследуются предельные возможности программы, ее новой версии, или применение не по прямому назначению. Рассмотрение упрощенных, например, разреженных схем, служит также цели облегчения последующей оценки результатов. Расчет подобных схем и их фрагментов удобно осуществлять средствами АРМ.

3. Подготовка и проверка исходных данных. Главное — составление и вычерчивание расчетной схемы покрытия. В соответствии с методом конечных элементов в форме перемещений она представляется набором точечных абсолютно жестких узлов, имеющих до шести степеней свободы, и упругих элементов, присоединяемых к узлам жестко, шарнирно, либо смешанным образом (цилиндрические шарниры и т. п.). Основными неизвестными принимаются перемещения узлов, линейные и угловые. Конечными элементами в моделях ПРП являются стержни, иногда пластины, если в работу включается настил и т. д.

Должны быть указаны все размеры, необходимые для подсчета координат узлов (сами оси координат тоже наносят на чертеж), а также справочные размеры, дающие оценочное представление о конструкции, например, пролеты. При этом здесь и далее важно проследить, чтобы избыточная информация не оказалась противоречивой. Приводятся продольные жесткости стержней, а при необходимости — изгибные, сдвиговые и крутильная, причем требуется графически отобразить проектную ориентацию поперечных сечений (например, двутавровых поясов) в пространстве, т. е. привязать местную систему координат конечного элемента. Узловые и местные нагрузки даются в общепринятых обозначениях.

Числовую информацию по координатам, жесткостям и вариантам загружений желательно разместить на чертеже в табличной форме, привязываясь к нумерации узлов, стержней, типов сечений и др. Самой нумерации следует уделять большое внимание, сохраняя и подчеркивая регулярности схемы, что позволит представить входную информацию в компактном виде. Необходимо также минимизировать разницу номеров узлов, соединенных упругими элементами, что уменьшит ширину ленты матрицы разрешающей системы уравнений и сократит потребляемые вычислительные ресурсы. В разработках программных комплексов эту операцию предполагается автоматизировать. Табличные данные не следует давать с излишней точностью. Так, для жесткостных характеристик и нагрузок достаточно трех значащих цифр.

Графическую информацию размещают компактно, желательно на одном чертеже, с тем, чтобы она была легко обозримой, и в то же время содержала все необходимые виды, разрезы, вычерченные в масштабе. Она должна не только однозначно и полно обеспечить входную стадию расчета, но и служить основой для последующего наглядного представления результатов.

Необходимо тщательно проверять исходные данные, соблюдая, как и в дальнейшем, принцип «в две руки». Внедрение средств автоматизации в процесс проектирования должно сопровождаться реализацией технологической системы с многократными и многоступенчатыми проверками, с тем чтобы выявлять и исправлять ошибки на ранних стадиях, поскольку стоимость ошибки по сравнению со стоимостью ошибки при ручных методах проектирования резко возрастает. Причина этого заключается в малой наглядности перерабатываемой информации и ограниченных возможностях вмешательства инженера в автоматические этапы расчета.

На рассматриваемой стадии рекомендуется предусматривать меры, повышающие надежность результатов. В частности не следует чрезмерно усложнять схему даже в том случае, когда возможности программного комплекса далеко не исчерпаны. Желательно не включать в расчет вспомогательные конструкции с известным напряженным состоянием, например, шпренгельные и «нулевые» стержни. С другой стороны, некоторые излишки в схеме могут быть полезны на стадии оценки результатов. С этой целью часто используют укрупненные элементарные ячейки симметрии, например, для квадратного плана вместо 1/8 берут 1/4 часть покрытия. При этом нужно позаботиться, чтобы среди заданных было хотя бы одно симметричное загружение, пусть простейшее.

Следует правильно закрепить узлы. Попытка перемещения узла по любому оставшемуся свободным направ-

лению должна встречать отпор со стороны упругих элементов, прикрепленных к узлу заданным образом. В этом случае система будет геометрически неизменяема. С другой стороны, избыточные закрепления приводят к искажению действительной работы конструкции. Рекомендуется истинные прикрепления к «земле» моделировать стержнями для облегчения последующей проверки равновесия системы в целом. Широко применяется внешне статически определимое прикрепление. Оно, как правило, исключает разгружающий (не в запас) распор.

4. Заполнение и проверка входных документов. На этой стадии исходные данные представляются в виде, пригодном для нанесения на машинные носители. Чаще всего заполняются специальные бланки с заготовленными комментариями, поясняющими смысл данных. Документы разделяют по определенным видам информации: общая (шифр, признак системы, управление вычислением усилий и печатью и т. п.); «элементы» (тип конечного элемента, жесткости, номера узлов примыкания); «шарниры» (номер элемента, номер узла, удаляемая связь); «жесткости» (тип жесткости, набор жесткостных характеристик); «координаты»; «связи» (номер узла, накладываемая связь); «типы нагрузок» (вид, направление, ссылка на значение, номер загружения); «значения нагрузок». Используется принцип умолчания, т. е. автоматическое задание наиболее часто встречающихся параметров, признаков, а также приемы сокращения информации за счет регулярностей рассчитываемого объекта, различные языковые структуры, позволяющие записывать данные в естественном виде. Реже применяются универсальные бланки, включающие макеты перфокарт для записи данных и свободные поля для записи комментариев.

Суммарный объем и плотность входной информации на бумажных и магнитных носителях зависят от качества программы и специализации исполнителей. Современная технология машинного расчета предполагает занесение исходных данных в архив вычислительной системы для хранения и повторного использования при возможности оперативного просмотра и корректировки. Значительные объемы вводят с помощью перфокарт, перфолент, магнитных лент, а малые — с помощью алфавитно-цифрового дисплея.

Внедрение диалоговых средств АРМ облегчает непосредственный доступ к ЭВМ инженера-проектировщика. Как показал опыт, и в этом случае целесообразно иметь

специальный документ-бланк, в котором заготовлены поля для расчетной схемы и таблиц числовых данных (в том виде, в каком таблицы высвечиваются на экране дисплея), а также приведены краткие правила и инструкции пользователю. Подобный бланк дисциплинирует инженера, упорядочивает варьирование части данных, а при переходе к большим задачам позволяет организовать операторный счет. Проверка входных документов — это ответственная операция. Рекомендуется отдельно проверять кодированную (структурную) информацию, сверяясь с общими параметрами задачи — количеством элементов, узлов и др. В числовых (размерных) величинах часто подводят знаки (мантиссы и порядка), положение десятичной запятой. Ошибка на порядок очень распространена. Особо следует контролировать сокращенную запись, разворачивая повторители в выборочном порядке.

Тщательно подготовленные и оформленные документы передаются вычислительным службам для перевода информации на машинные носители и последующего счета.

5. Пробная постановка задачи на ЭВМ. Эта стадия обычно выполняется только для сложных и средних задач и ограничивается анализом диагностических и служебных сообщений вычислительного комплекса, исходных данных и (при необходимости промежуточных результатов), выведенных в наглядном виде. Проектировщик имеет возможность осуществить формальный и логический контроль данных на основе отредактированных таблиц с полностью развернутой информацией, сверить их с первичными документами и схемой. Современные версии программ предусматривают вывод на графопостроитель и корректировку расчетных схем с графического дисплея.

6. Счет на ЭВМ. Предполагается, что предварительно был выполнен контроль исходной информации на машинных носителях по одной из принятых систем. Возможны: двойная перфорация с механической сверкой двух экземпляров перфокарт или перфолент между собой, распечатка и сверка с входными документами, визуальный контроль с помощью дисплея и др. Важна также правильная комплектация материалов, включая карты управления заданиями и план использования вычислительной системы. Счет в автоматическом режиме выполняется оператором ЭВМ. Протокол решения задачи в нестандартных случаях дополняется записями в сменном

журнале. Счет в диалоговом режиме целесообразно организовать так, чтобы оператор управлял действиями системы, а пользователь, имея в своем распоряжении экран, мог сосредоточить свое внимание на инженерной стороне дела, т. е. оперативно оценить промежуточные результаты, внести необходимые коррективы в данные и т. п.

По окончании счета все материалы маркируются, проверяется их комплектность, качество машинной печати и вычерчивания. При необходимости выходные документы, все или часть, могут быть выведены повторно.

7. Оценка результатов. Если есть уверенность в том, что исходная информация не была искажена на какой-либо из операций по переработке, т. е. после сверки выходных таблиц с первичными данными, можно приступить к выборочному качественному и количественному анализу результатов. Это одна из важнейших стадий расчета, обязательная при проектировании надежных и экономичных конструкций.

Вначале рекомендуется проверить равновесие системы в целом. Сумма внутренних усилий в опорах сравнивается с суммой внешних сил, показанных на расчетной схеме. Эта простая и эффективная операция позволяет выявить ошибки в записи нагрузок, ориентации опорных стержней и их сечений. Будучи повторенной для различных частей системы и даже отдельных узлов, она локализует зону контроля. Отрицательный результат проверки равновесия может означать также недостаточную точность расчета из-за плохой обусловленности исходных данных, например, при слишком большой разнице в жесткостях, наличие случайных закреплений, которые не были запланированы и т. п.

Далее следует проанализировать общую картину и детали напряженно-деформированного состояния системы. Для этого лучше всего использовать полученные или подготовленные графические материалы — схемы с нанесенными продольными усилиями, эпюры изгибающих моментов, изолинии прогибов и т. д. Значения величин и ординаты эпюр должны быть нанесены на схемы формально (автоматически) в соответствии с принятым правилом знаков и в определенном масштабе. При ручном построении эпюр можно выдать желаемое за действительное, последующая оценка теряет смысл. Именно поэтому необходим автоматизм, строгое следование формальным правилам построения.

Приемы инженерной оценки разнообразны. Отметим

сравнение фактически полученных знаков осевых усилий в стержнях с ожидаемыми зонами растяжения (например, нижние поясные сетки в пролете стержневых плит) и сжатия (верхние пояса). Аналогично этому можно предвидеть расположение растянутого волокна в изгибаемых элементах, например неразрезных поясах, на которые непосредственно укладывают настил. Сопоставление распределения продольных усилий и нагрузок с эпюрами изгибающих моментов дает существенную информацию о правильности решения задачи или выявляет аномалии. Так, размещение пика или скачка на эпюре может указать на ошибочный сдвиг нагрузки (или распорки шпренгеля), который не был замечен при проверке равновесия. Нарушение прямолинейности эпюры на участке постоянства поперечной силы сигнализирует об ошибках в координатах промежуточных точек (при условии нанесения их в масштабе) и т. д. Очень строгий контроль обеспечивают симметричные или кососимметричные результаты (см. также стадию 3), весьма полезно рассмотрение изолиний напряжений в пластинах, прогибов конструкции и т. п.

Только после всесторонней оценки перемещений узлов и усилий (напряжений) в элементах машинный расчет можно считать завершенным. Выбором зон унификации сечений и соответствующих расчетных усилий, заканчивается этап статического анализа прототипа.

6.3. ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОТОТИПА

На втором этапе оптимизационного расчета также рассматривается конструкция с фиксированными геометрическими параметрами, и для нее определяются показатели стоимости, трудоемкости и др. Исходные данные этапа дополнительно к предыдущим включают характеристики по массе, материалам, способам обработки деталей и их количеству дифференцированно по поясам и решетке, характеристики ограждающих конструкций, параметры перекрываемого здания и условия его эксплуатации. Результатами работы этого этапа являются технико-экономические показатели покрытия и соответствующие единичные коэффициенты, используемые при формировании целевой функции.

Во многих случаях можно применить известные методики анализа, ориентированные на вычисление показателей с помощью простых формул и заготовленных табличных значений содержащихся в них констант [38...40,

51]. Иногда целесообразно прямое калькулирование трудовых и стоимостных затрат на изготовление и монтаж по отдельным технологическим операциям на основе укрупненных нормативов времени, заводских норм и пр.

Рассмотрим упомянутые формулы. Стоимость изготовленной конструкции, руб/т, включая расходы по доставке ее на стройплощадку:

$$C_{ps} = 1{,}15\,(C_{pm} + 3{,}65T_p + 3{,}54) + C_t, \qquad (272)$$

где C_t — стоимость транспортировки, руб/т, в зависимости от территориального расположения строек и вида конструкции; определяется по таблицам и данным о средней стоимости перевозок [38] или вычисляется приближенно [52]; T_p — трудоемкость изготовления, чел.-ч/т, определяется по заводским калькуляциям или на основе членения на основные и дополнительные детали в зависимости от их массы, количества и т. п.; для стандартных типов конструкций — по данным работ [12, 51, 52]; C_{pm} — стоимость основных материалов, т. е. проката, сварочных и окрасочных материалов, метизов, руб/т, определяется по таблицам работ [40, 42] или при наличии спецификации металла и оптовых цен по действующим прейскурантам вычисляется по формуле:

$$C_{pm} = 1{,}035\,(C_{ri}k_{wp}k_{ap} + 1{,}5) \qquad (273)$$

где C_{ri} — базовая цена набора профилей проката в конструкции (по прейскуранту, руб/т); k_{wp} — коэффициент, учитывающий отходы металла при изготовлении, принимаемый по табл. 2 работы [40]; k_{ap} — коэффициент приплат к оптовой цене за качество и условия поставок проката, принимаемый по табл. 3 работы [40].

Стоимость монтажа, исходя из среднечасовой заработной платы монтажников в 0,9 руб/ч при 80 % накладных расходов, можно оценить следующим образом:

$$C_{aw} = 1{,}62T_{aw} + C_{am}, \qquad (274)$$

где T_{aw} — трудоемкость монтажа, чел.-ч/т, как сумма трудоемкости основных операций (укрупнительной сборки, подъема, временного закрепления и выверки, выполнения монтажных соединений) и вспомогательных работ на складе, по доставке конструкций к месту сборки и устройству подмостей; C_{am} — стоимость эксплуатации монтажных механизмов, зависящая от типа и набора механизмов, коэффициента их использования, состава монтажных звеньев и т. п.; оценивается в 5...15 руб/т и может уточняться по формулам из работы [52].

Стоимость покрытия в деле, руб/т с учетом заготовительно-складских расходов завода-изготовителя (~1 %), накладных расходов и плановых накоплений монтажной организации (~15...18 %) определяется из выражения

$$C_{es} = 1{,}18\,(1{,}01C_{ps} + C_{aw}). \qquad (275)$$

Принципиальный подход к распределению стоимости по коэффициентам $C_м$, C_u, C_b, C_g и формулы для подсчета эксплуатационных расходов приведены в параграфе 2.2. Технологию этапа технико-экономического анализа проиллюстрируем на примере.

Продолжим оптимизационный расчет покрытия, начатый в предыдущем параграфе, для чего пополним список исходных данных.

Показатели стоимости кровельных и стеновых конструкций, руб.

Стальной профилированный настил за 1 т	300
Прогоны за 1 т	200
Стеновые ячеистобетонные панели за 1 м²	15

Параметры перекрываемого одноэтажного здания размером в плане 360×144 м, определяющие эксплуатационные издержки

Периметр стеновых ограждений	504 м
Высота помещений до низа структурных блоков	7,2 м
Стоимость тепловой энергии, за 1 ГДж	4 руб
Расчетная температура наружного воздуха	—45 °С

Фонари — световые (зенитные); производство сопровождается выделением незначительных избытков явного тепла; режим работы — двухсменный; условия внутренней среды по агрессивности — нормальные

Характеристики по анализируемому прототипу

Площадь блока покрытия	324 м²
Расход стали	22,3 кг/м²
Общая масса блока	0,0223×324=7,23 т
в том числе стержней из труб (~80 %)	0,8×7,23=5,78 т
деталей с механической обработкой	0,2×7,23=1,45 т
Масса основных механических деталей:	
узловые элементы (85 шт.)	0,0045×85=0,38 т
высокопрочные болты (576 шт.)	0,00089×576=0,51 т
шайбы, муфты и прочее	0,56 т
Число узлов	85
Число стержней	288

Показатели стоимости элементов, руб/т

Стоимость основных материалов для трубчатых стержней из стали марки Вст3пс6 (или Ст20) по табл. 1 [40]	170
Стоимость горячештампованных заготовок узловых деталей из стали 45, принимаемая по прейскуранту № 25-01 усредненно в качестве C_{pm}	260

Стоимость высокопрочных термически обработанных болтов из стали 40Х, принятая аналогично предыдущему, но по прейскуранту № 01-05, ч. 3 500

Оптовая цена C_{rl} набора профилей проката, требующегося для изготовления шестигранных муфт из стали 35 и плоских шайб из стали Вст3пс2, по прейскуранту № 01-02, ч. 1 и 2 в среднем (при $k_{wp}=1{,}08$ и $k_{ap}=1$) 105

Трудоемкость изготовления стержневых элементов определяется операциями обработки (резки), сборки и сварки и может быть оценена с помощью номограммы (рис. 4.9 из работы [52]) при усредненных входных параметрах (диаметр трубы $d=90$ мм, масса одного стержня $g_s=5780:288=20$ кг) — 0,35 чел.-ч.

Трудоемкость изготовления узловых соединений определяется операциями механической обработки деталей (собственно узлового элемента, муфт, шайб и болтов)

$$T_{mn}=0{,}341\sqrt[3]{(g_u)^2},$$

где g_u — средняя масса мехдеталей в узле, кг;

$$0{,}341\sqrt[3]{(1450:85)^2}=2{,}26 \text{ чел.-ч.}$$

Общая трудоемкость монтажа конструкций типа «Кисловодск», аналогичных рассматриваемым, по данным [45] составляет 0,47 чел.-ч/м². Трудоемкость укрупнительной сборки блока типа «МАрхИ», зависящую от количества стержней при фиксированных размерах в плане, оценивается в 0,2 чел.-ч/м². Для сборки практически не требуется механизмов. Часть стоимости монтажа, относящуюся к подъему блока в проектное положение, считаем пропорциональной его массе. При этом стоимость эксплуатации монтажных механизмов $C_{am}\approx 10$ руб./т, трудоемкость подъема

$$(0{,}47-0{,}2)\times 324:7{,}23=12{,}1 \text{ чел.-ч /т.}$$

Учитывая приведенные данные, распределяем стоимость конструкций «в деле» между коэффициентами $C_м$, C_u и $C_b\approx C_g$ следующим образом.

В коэффициент $C_м$ входит стоимость:

основных материалов стержней по формулам (275) и (272)

$$1{,}18\times 1{,}01\times 1{,}15\times 170=233;$$

(условно-постоянная часть) изготовления по (275) и (272)

$$1{,}18\times 1{,}01\times 1{,}15\times 3{,}54=5;$$

транспортировки из расчета 5 руб. за 1 т по (275) и (272)

$$1{,}18\times 1{,}01\times 5=6;$$

подъем блока по (275) и (274)

$$1{,}18\times(1{,}62\times 12{,}1+10)=35.$$

Итого $C_м=279$ руб/т

В коэффициент C_u включаем стоимость:

заготовки узлового элемента по (275) и (272)

$$1{,}18\times 1{,}01\times 1{,}15\times 260\times 0{,}0045=1{,}6;$$

изготовления узлового соединения по (275) и (272)

$$1{,}18\times 1{,}01\times 1{,}15\times 3{,}65\times 2{,}26=11{,}3.$$

Итого $C_u=12{,}9$ руб/ узел.

К коэффициенту C_b относим стоимость:

высокопрочных болтов по (275) и (272)

$$1{,}18\times 1{,}01\times 1{,}15\times 500\times 0{,}00089\times 2=1{,}22;$$

материалов для муфт и шайб по (275), (272) и (273)

$$1{,}18\times 1{,}01\times 1{,}15\times(0{,}56:288)\times$$
$$\times 1{,}035\times(105\times 1{,}08\times 1+1{,}5)=0{,}32;$$

изготовления стержневых элементов по (275) и (272)

$$1{,}18\times 1{,}01\times 1{,}15\times 3{,}65\times 0{,}35=1{,}75;$$

сборки по (275) и (274)

$$1{,}18\times 1{,}62\times 0{,}2\times(324:288)=0{,}43$$

Итого $C_b=3{,}72$ руб/стержень.

Удельные коэффициенты стоимости смежных конструкций составляются в соответствии с выражением (8) и исходными данными:

для кровли при массе настила 13,5 и прогонов 3,5 кг/м²

$$C_l=(0{,}0135\times 300+0{,}0035\times 200):3{,}0=1{,}58 \text{ руб/м}^3,$$

для стеновых панелей

$$C_w=15 \text{ руб/м}^2.$$

Длина стенового ограждения, приходящаяся на один блок, исходя из заданного периметра и площади здания

$$L=(504\times 324)/(360\times 144)=3{,}15 \text{ м.}$$

Используя данные для расчета эксплуатационных расходов, определяем коэффициенты H, P. По нормативам

табл. 1 [23] для одноэтажного каркасного здания с площадью пола свыше 5000 м² находим:

$$H = 0{,}01 \times (1{,}0 + 1{,}4 + 2{,}3) = 0{,}047 \text{ год}^{-1}.$$

По табл. 5, 6, 15, 16 и 17 [23] определяем удельные расходы на отопление и вентиляцию в бесфонарном здании со строительным объемом более 200 тыс. м³ при незначительных избытках явного тепла и двухсменной работе с учетом поправки на изменение стоимости тепловой энергии:

$$P = 0{,}1 \times (2{,}42 + 3{,}49 + 1{,}26 + 1{,}53) \times 0{,}5 \times 0{,}93 = \\ = 0{,}405 \text{ руб/м}^3\text{/год}.$$

Таким образом операции подсчета удельных показателей завершают этап технико-экономического анализа прототипа.

6.4. МИНИМИЗАЦИЯ ПРИВЕДЕННЫХ ЗАТРАТ И ОЦЕНКА ПОТЕРЬ ПРИ ОТКЛОНЕНИИ ОТ ОПТИМУМА

Выражения для целевых функций, составленные и проанализированные в параграфе 2.5, дают основания к выбору тех или иных методов и средств, изложенных в гл. 3 и 4. Многие из них применены в практике оптимального проектирования ПРП. Так, минимум приведенных затрат, представленных в виде алгебраических функций вида [61], разыскивался с помощью условий стационарности по всем переменным

$$\partial\varphi/\partial a = 0; \quad \partial\varphi/\partial b = 0; \quad \partial\varphi/\partial h = 0; \tag{276}$$

$$\partial\varphi/\partial a_k = PS\partial f_0/\partial a_k + (e_n + H)\left(C_м \sum_{i=1}^{16} k_i \partial f_i/\partial a_k + \right. \\ \left. + \sum_{i=17}^{21} c_i \partial f_i/\partial a_k + C_w L \partial f_{22}/\partial a_k\right) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \tag{277}$$

где $P = \sum_{j=1}^{2} P^j$; $H = \sum_{j=1}^{3} H^j$, S, c, k, L, C — константы задачи; $a_1 = a$; $a_2 = b$; $a_3 = h$ — переменные параметры. Значения $\partial f_i/\partial a_k$ ($i = 0, 1, 2, ..., 22$; $k = 1, 2, 3$) для системы покрытия по рис. 8, *а* приведены в табл. 17, из которой можно заключить, что выражение (277) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно a_k.

Оптимальные параметры a^*_k, доставляющие минимум φ^* целевой функции (61), как решение системы (277)

определяются численно — итерационным методом Ньютона. На каждом $(i+1)$-ом приближении находятся

$$a_k^{i+1} = a_k^i + \Delta a_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{278}$$

При этом приращения Δa_k удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{3} \partial^2\varphi / (\partial a_j \partial a_k)\, \Delta a_k + \partial\varphi/\partial a_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{279}$$

Коэффициенты и свободные члены этой системы, т. е. частные производные целевой функции вычисляются при значениях параметров a^i_k. Для этого используются выражения из табл. 17 и соответствующей ей табл. 18, где даны элементы одного из треугольников симметричных матриц $\|\partial^2 f_i/(\partial a_j \partial a_k)\|$ ($i = 1, 2, ..., 22$; $k, j = 1, 2, 3$). Начальное приближение a^0_k назначается исходя из опыта конструирования.

Таким образом, при оптимизации покрытий типа стержневых плит использовались аналитические процедуры, связанные с формулировкой выражений целевой функции и ее частных производных, что достаточно трудоемко. Как было показано, для покрытий с криволинейной срединной поверхностью выражения типа (65) значительно усложняются по сравнению с (61) за счет трансцендентности, алгоритмических включений и т. п. При этом еще более целесообразно сократить аналитические процедуры и перейти к численным на более ранней стадии подготовки задачи.

Для решения нелинейных задач оптимизации без ограничений документация к системе САПР-ЦНИИПСК рекомендует комбинацию нескольких методов. Беглое изучение целевой функции φ на области определения выполняется случайным поиском. В результате находится точка начального приближения к решению a^0_k ($k = 1, 2, ..., N$). Для его уточнения применяется поиск по симплексному $(N+1)$-граннику, как бы перекатывающемуся по уклону к минимуму путем последовательного отражения вершины с наибольшим значением целевой функции в сторону наискорейшего улучшения решения. Первая вершина начального симплекса располагается в точке a^0_k, заданной в относительных координатах:

$$\bar{a}_k^0 = a_k^0 / a_k^{max}. \tag{280}$$

Процесс повторяется до тех пор, пока в отраженной точке значение φ не превзойдет значения функции в осталь-

Таблица 17. **Функции $\partial f_i/\partial a_k$ для схемы по рис. 8, а**

k	a_k	0	1	2	4	6	8	10
1	a	0	0	$\frac{1}{h}$	$\frac{-h}{a^2}$	$\frac{2a}{bh}$	$\frac{2a}{b}$	$2a$
2	b	0	0	0	0	$\frac{-a^2}{b^2h}$	$\frac{-a^2}{b^2}$	0
3	h	1	$\frac{-1}{h^2}$	$\frac{-a}{h^2}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{-a^2}{bh^2}$	0	0

Примечание. Опущенные графы 3, 5, 7, ... симметричны с предыду-

Таблица 18. **Функции $\frac{\partial^2 f_i}{\partial a_l \partial a_k}$ для схемы по рис. 8, *а***

k	l	0	1	2	4	6	8	10	12
1	1	0	0	0	$\frac{2h}{a^3}$	$\frac{2}{bh}$	$\frac{2}{b}$	2	$\frac{3a}{16bl} - \frac{3l}{4ab} + \frac{2l^3}{a^3b}$
1	2	0	0	0	0	$\frac{-2a}{b^2h}$	$\frac{-2a}{b^2}$	0	$\frac{3}{16l} - \frac{3l}{4b^2} - \frac{3l}{4a^2} + \frac{l^3}{a^2b^2}$
1	3	0	0	$\frac{-1}{h^2}$	$\frac{-1}{a^2}$	$\frac{-2a}{bh^2}$	0	0	$\frac{3h}{4bl} - \frac{3lh}{a^2b}$
2	2	0	0	0	0	$\frac{2a^2}{b^3h}$	$\frac{2a^2}{b^3}$	0	$\frac{3b}{16al} - \frac{3l}{4ab} + \frac{2l^3}{ab^3}$
2	3	0	0	0	0	$\frac{a^2}{b^2h^2}$	0	0	$\frac{3h}{4al} - \frac{3lh}{ab^2}$
3	3	0	$\frac{2}{h^3}$	$\frac{2a}{h^3}$	0	$\frac{2a^2}{bh^3}$	0	0	$\frac{3l}{ab} + \frac{3h^2}{abl}$

ных N вершинах. На заключительном этапе может работать метод, использующий квадратичную аппроксимацию целевой функции на симплексе.

Указанные алгоритмы из-за многократного вычисления целевой функции требуют тщательного программирования соответствующих процедур. Однако общее время подготовки задачи значительно сокращается, так как нет надобности в производных $\partial\varphi/\partial a_k$ и $\partial^2\varphi/(\partial a_l\,\partial a_k)$,

i	12	13	15	17	18	20	21	22
	$\frac{l}{b}\left(\frac{3}{4} - \frac{l^2}{a^2}\right)$	$\frac{2a\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$	$2a\sqrt{bh}$	$\frac{-1}{a^2b}$	$\frac{-1}{a^2}$	0	$\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}$	0
	$\frac{l}{a}\left(\frac{3}{4} - \frac{l^2}{b^2}\right)$	$\frac{-a^2\sqrt{h}}{2b\sqrt{b}}$	$\frac{a^2\sqrt{h}}{2\sqrt{b}}$	$\frac{-1}{ab^2}$	0	0	$\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}$	0
	$\frac{3lh}{ab}$	$\frac{a^2}{2\sqrt{bh}}$	$\frac{a^2\sqrt{b}}{2\sqrt{h}}$	0	0	0	0	1

$l = \sqrt{(a^2+b^2)/4+h^2}$

щими относительно a и b.

i	13	15	17	18	20	21	22
	$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$	$2\sqrt{bh}$	$\frac{2}{a^3b}$	$\frac{2}{a^3}$	0	$\frac{-\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}}$	0
	$\frac{-a\sqrt{h}}{b\sqrt{b}}$	$\frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$	$\frac{1}{a^2b^2}$	0	0	$\frac{1}{4\sqrt{ab}}$	0
	$\frac{a}{\sqrt{hb}}$	$\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{h}}$	0	0	0	0	0
	$\frac{3a^2\sqrt{h}}{4b^2\sqrt{b}}$	$\frac{-a^2\sqrt{h}}{4b\sqrt{b}}$	$\frac{2}{ab^3}$	0	0	$\frac{-\sqrt{a}}{4b\sqrt{b}}$	0
	$\frac{-a^2}{4b\sqrt{bh}}$	$\frac{a^2}{4\sqrt{bh}}$	0	0	0	0	0
	$\frac{-a^2}{4h\sqrt{bh}}$	$\frac{-a^2\sqrt{b}}{4h\sqrt{h}}$	0	0	0	0	0

Для многих модификаций задач эффективны методы прямого поиска. В отдельных случаях машинное время, расходуемое на спуск по координатной сетке как при анализе функции цели, так и при оптимизации, оказывается соизмеримым с затратами на случайный поиск и последующие вычислительные процедуры.

Значения геометрических параметров, как результат минимизации приведенных затрат с помощью автома-

тизированных процедур, не всегда удается воплотить в реальном проекте без каких-либо изменений. Корректировка может быть вызвана рядом причин. В первую очередь следует заботиться о том, чтобы число панелей, граней и других фрагментов конструкции было целым. Это достигается отклонением размеров a_k от оптимальных значений a^*_k на величину $d_k = a_k - a^*_k$. Для плит достаточно оперировать длинами стержней a и b, для оболочек и куполов иногда подключается и стрела подъема f.

Важно соблюдать также требование модульности, что затрагивает, в частности, высоту стержневого набора h. Изменения возникают и за счет унификации размеров в пределах конструктивной системы ПРП, предназначенной для различных условий применения и имеющей несколько марок изделий. Далее проектировщик может учитывать дополнительные ограничения — технологические, конструктивные, эстетические, конъюнктурные, которые не были введены заранее в формальный критерий качества. Кроме того, известна тенденция следовать минимуму стоимостных показателей с оглядкой на расход металла. Поэтому специалиста желательно снабдить информацией о том, ценой каких потерь по формальному критерию можно допустить уклонение от оптимальных параметров.

В связи с этим наиболее общий подход заключается в исследовании множества конструкций, близких к оптимальной. Подсистема оптимального проектирования САПР — ЦНИИПСК включает задачу «Окрестность», с помощью которой изучается поведение целевой функции в районе минимума.

Рассмотрим некоторые оценки для задачи (58)...(63) и (276), (277) с позиций параграфа 3.5. Функцию приведенных затрат $\varphi(a_k)$ в окрестности точки оптимума a^*_k представим в виде ряда Тэйлора с членами не выше второй степени:

$$\varphi(a_k) \approx \varphi(a_k^*) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi(a_k^*)}{\partial a_k} d_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi(a_k^*)}{\partial a_k \partial a_j} d_k d_j. \qquad (281)$$

Используя условия (276), получаем потери приведенных затрат, соответствующие отклонениям d:

$$U = \varphi(a_k) - \varphi(a_k^*) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \Phi_{kj} d_k d_j, \qquad (282)$$

где Φ — матрица вторых частных производных целевой функции, вычисленных в точке a^*_k. Выражение (282) удобно трактовать как уравнение эллипсоида с центром в точке $d_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. Его поверхность ограничивает такие отклонения параметров от оптимальных, при которых потери не превышают U. Задаваясь допустимым уровнем потерь, можно находить максимальные отклонения.

Наиболее наглядна геометрическая интерпретация в двухмерном случае, например, при $a_1 = a$, $a_2 = h$ (рис. 35, *а*). Здесь изолиния уровня потерь представляется эллипсом с граничными точками (d_{11}, d_{12}) и (d_{21}, d_{22}). Ее уравнение — частный случай (282):

$$\Phi_{11} d_1^2 + (\Phi_{12} + \Phi_{21}) d_1 d_2 + \Phi_{22} d_2^2 = 2U. \qquad (283)$$

Исследуя кривую (283) на экстремум, выразим в явном виде максимальные отклонения параметров через допустимые потери. Так, по оси d_1

$$d_{11} = \pm (2U\Phi_{22} / (\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}\Phi_{21}))^{1/2}. \qquad (284)$$

Вообще, все координаты граничных точек вычисляются по формуле:

$$d_{kj} = \pm \xi_{kj} (2U/\xi_{kk})^{1/2}, \qquad (285)$$

где ξ — элементы матрицы, обратной Φ. Они имеются при решении системы (279) на последней итерации. Поэтому (285) реализована во всех программах, где φ минимизируется по Ньютону.

В численных процедурах, не требующих подготовки производных целевой функции и не конструирующих ее квадратичную аппроксимацию автоматически, степень пологости φ в окрестности оптимума целесообразно изучать с помощью покоординатных разрезов по сгущенной сетке.

В большинстве оптимизационных экспериментов, описанных в гл. 5, выполнены и оценки потерь приведенных затрат при $d_k \neq 0$. Остановимся на нескольких примерах.

Из серии задач оптимизации структурных блоков 18×12 м и 24×12 м, связанной с варьированием расчетного сопротивления стали (параграф 5.3), отберем четыре случая, соответствующих минимальным и максимальным

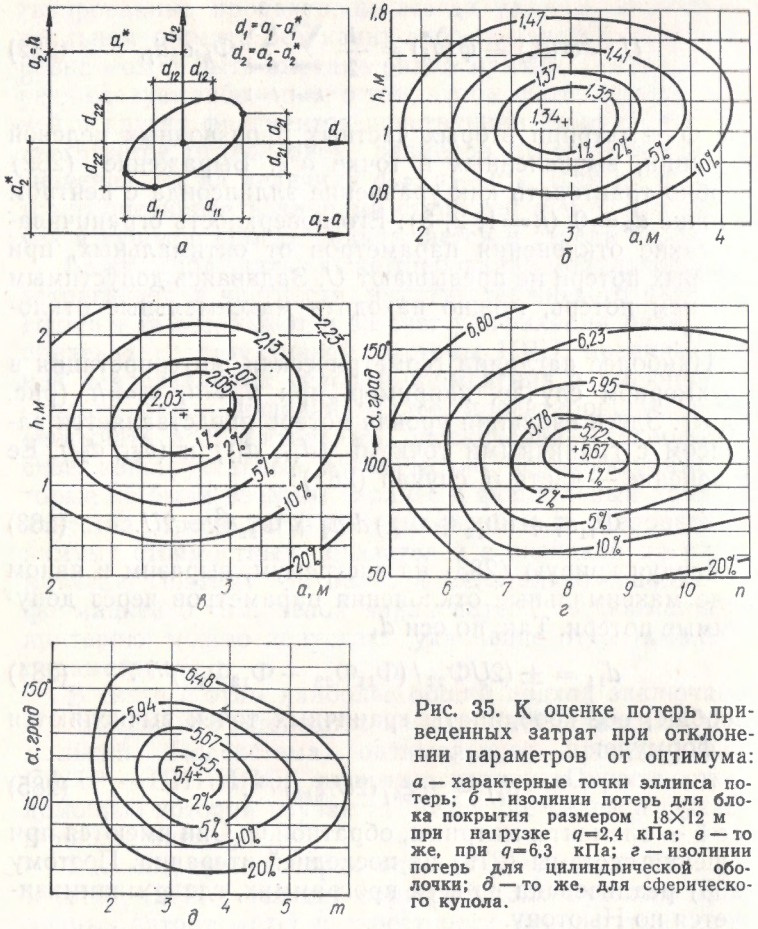


Рис. 35. К оценке потерь приведенных затрат при отклонении параметров от оптимума:

а — характерные точки эллипса потерь; *б* — изолинии потерь для блока покрытия размером 18×12 м при нагрузке $q=2{,}4$ кПа; *в* — то же, при $q=6{,}3$ кПа; *г* — изолинии потерь для цилиндрической оболочки; *д* — то же, для сферического купола.

нагрузкам и маркам стали, принятым в типовой серии. Оптимальные решения при $R=290$ МПа, приведены в табл. 19. Там же даны отклонения d_{kj}, или координаты характерных точек эллипса потерь. Они получены по формуле (285) исходя из однопроцентного уровня относительных потерь, т. е. $\overline{U}=100U/\varphi^*=1$ %. Семейства таких концентрических эллипсов для нескольких уровней (до 20 %) изображены на рис. 35, *б*, *в*. На изолиниях показаны и абсолютные значения приведенных затрат. Крестиком отмечены точки оптимума, кружком на пересечении пунктирных линий — решения, реализованные в проекте.

Таблица 19. **Результаты оптимального проектирования структурных блоков покрытия**

Расчетные характеристики	Обозначения	Размеры блока, м: 18×12, нагрузка, кПа: 2,4	18×12, 6,3	24×12, 1,75	24×12, 4,45
Оптимальные размеры, м	a^*	2,98	2,70	3,01	2,80
	h^*	1,07	1,47	1,12	1,56
Приведенные затраты, руб/(м²·год)	φ	1,34	2,03	1,34	1,96
Отклонения размеров, м (при уровне потерь 1 %)	d_{11}	0,343	0,337	0,352	0,357
	d_{12}	0,035	0,066	0,036	0,070
	d_{21}	0,053	0,082	0,055	0,090
	d_{22}	0,223	0,269	0,229	0,276
Элементы матрицы Φ (при $d_1=d_2=0$)	Φ_{11}	50,4	82,2	64,0	94,3
	Φ_{12}	—12,0	—25,2	—15,3	—30,7
	Φ_{22}	119	129	150	158
Отклонения d, м и потери $\overline{U}$, % (при $a=3$ м, $h=1{,}5$ м)	d_1	0,02	0,30	—0,01	0,20
	d_2	0,43	0,03	0,38	—0,06
	$\overline{U}$	3,8	0,8	2,8	0,4

Максимальное отклонение по a ($d_1=0{,}3$ м) наблюдается при больших нагрузках и сопровождается потерями до 1 %, а по h ($d_2=0{,}43$ м) — при малых нагрузках и $\overline{U}<5$ %. Для всех четырех случаев значения d_1, d_2 и соответствующих суммарных потерь $\overline{U}$, вычисленных по (282), помещены в табл. 19. В среднем по всей серии переход к единым размерам достигается ценой незначительных потерь затрат — порядка 2,5 %.

Аналогичные оценки выполнены для покрытий с криволинейной поверхностью, описанных в параграфах 5.1 и 5.5. Некоторые результаты представлены на рис. 35, *г*, *д* в виде изолиний приведенных затрат в функции параметров α, n и α, m. Точки минимума приняты по значениям α^*_1, a^*_1 и α^*_1, b^*_1 из рис. 33, *а*, *б* соответственно, при $C_u=50$ руб. Переход от длин стержней a, b к целочисленным характеристикам n, m осуществлен с целью упрощения выбора реальных проектных параметров,— по формулам (11) в случае цилиндрической оболочки и с помощью (263) — для сферического купола.

Для реализации в проекте цилиндрической оболочки первым приближением примем ближайшие к оптимуму «круглые» значения параметров: число панелей $n=8$ и центральный угол $\alpha=110°$. Учитывая то, что для решетки треугольной системы (см. рис. 8, *д*) ячейки сетчатой оболочки решены равносторонними (см. параграф 5.5) с единой длиной стержня a, получаем исходя из (11) число граней $m=8$, 1. Таким образом, чтобы число m было целым, необходимо скорректировать угол α, уменьшив стрелу подъема. Окончательно можно принять $\alpha=106°$, так как при этом $m=8$, а потери приведенных затрат не превышают 1 %.

Целевая функция в окрестности оптимума для сферического купола оказывается менее пологой. Так, если отклонения в оболочке по параметру α на ±15 % сопровождаются потерями 1...1,5 %, то здесь они более 2 %. Уточнить число m разбиений меридионального ребра в центральной части купола, или число кольцевых стержней одного уровня в секторе периферийной части, можно ценой до 3 % потерь.

В целом для ПРП приемлемым является 2...3 %-ный уровень, который соответствует практическим потребностям корректировки основных геометрических параметров и обеспечивает представительное множество конструкций, близких к оптимальной.

Продолжим рассмотрение примера оптимизации блока покрытия, начатое в параграфе 6.2. Стоимость покрытия как функция искомого параметра a определяется выражением в круглых скобках формулы (58), где $h=a/\sqrt{2}$, $l=a$, U — по (18) и (19), а S_b, S_g — по табл. 5. Выражение для M следует из (59), если принять $b=a$ и исключить члены, учитывающие местную нагрузку на стержни:

$$\frac{M}{\gamma a}=\sum_{t}\sum_{z=1}^{z_t}\left(\frac{d_{tz}^0}{a^2}+\frac{d_{tz}^i+d_{tz}^{i+2}}{\mu a}\right)\left(\frac{N_{tz}^0}{R_{tz}}+\frac{k_{tz}a^2}{\rho_{tz}^2}\right)+$$

$$+\sum_{z=1}^{z_7}\frac{4d_{7z}^0}{a^2}\left(\frac{N_{7z}^0 a}{R_{7z}a^0}+\frac{k_{7z}a^2}{\rho_{7z}^2}\right)\quad (t=1,\ 2,\ 5,\ 6);$$

$$i=1\ (t=1,\ 6);\quad i=2\ (t=2,\ 5);\quad \mu=2\ (t=1,\ 2),$$

$$\mu=-2\ (t=5,\ 6). \qquad (286)$$

Здесь вместо распределенных усилий в плите использованы усилия в стержнях на основе (42), а константы d, N^0, k, ρ приведены в табл. 16.

С учетом (286) функция $\varphi(a)$ имеет вид (61) с компонентами f_i по табл. 9 при $b=a$, $h=a/\sqrt{2}$. Вычисление коэффициентов по (62) и (63) и минимизация приведенных затрат в соответствии с (276)...(279) запрограммированы.

Результат: $a^*=2{,}98$ м, $h^*=2{,}11$ м. Соответствующие оптимуму показатели: приведенные затраты $\varphi^*=3{,}71$ руб/(м²·год), масса стержней $m^*=19$ кг/м², стоимость металлоконструкций $C^*_{ps}=12{,}1$ руб/м².

В соответствии с (285) также вычислено максимальное уклонение d_{11} от размера a^*, при котором потери $\overline{U}$ не превышают 1 % от φ^*: $d_{11}=0{,}31$ м. Поэтому для проекта можно принять размер стержня из унифицированного сортамента $a=3$ м.

Таким образом на заключительном этапе оптимизационного расчета назначаются скорректированные длины стержней, стрела подъема покрытия, обеспечивающие целое число панелей, граней (ребер, колец) в заданных пролетах ПРП и удовлетворяющие требованиям модульности, унификации и другим ограничениям. Определяемая этими величинами точка в пространстве варьируемых параметров должна лежать вблизи оптимума, точнее внутри эллипсоида потерь, соответствующего их 2-3 %-ному уровню.

6.5. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ПРП НА ОСНОВЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Управляя отдельными проектными и технологическими факторами под контролем оптимизационного расчета, можно уверенно достичь экономии 8...12 % затрат. С учетом планируемых объемов применения легких металлоконструкций в строительстве можно сделать вывод, что оптимизация ПРП обеспечивает существенный народнохозяйственный эффект.

Особенно эффективны оптимизационные методы и средства на ранних стадиях разработки новых типов конструкций, например покрытий производственных зданий с квадратной сеткой колонн 18×18 м и 24×24 м (УкрНИИпроектстальконструкция). Подобная компоновка здания с крупной сеткой колонн обладает определенными преимуществами по сравнению с традиционными

решениями при шаге колонн 6 и 12 м. Прежде всего она позволяет в процессе эксплуатации неоднократно изменять технологию производства. Особенно эффективны решения с крупной сеткой колонн для цехов легкого и среднего машиностроения, автомобильной и автотранспортной промышленности и других цехов, оборудованных подвесными кранами.

При квадратном плане преимущества пространственных покрытий проявляются полнее. Как показали предварительные исследования наиболее эффективны в данном случае перекрестные системы ферм. Хорошо перераспределяя нагрузку по двум направлениям, они могут быть значительно технологичнее других типов ПРП, например, структурных. Это объясняется относительной простотой узлов и формообразующих элементов, аналогичных традиционным плоскостным решениям. В сочетании с профилями из прямоугольных гнутосварных труб, позволяющими упростить бесфасоночное соединение в узлах и применить тонколистовую сталь повышенной прочности, разработанные системы перспективны для поточного изготовления. С целью укрупнения заводских марок, упрощения монтажа, а также снижения материалоемкости и трудоемкости предложено при поэтажном расположении поясов ферм двух направлений, нижние пояса вышележащих ферм выполнять съемными *. Раскосы треугольной решетки в узлах смещены от оси на ширину верхнего пояса, а фермы соединены непосредственно через верхние пояса (см. табл. 3, п. 24).

Для описанной конструкции выполнены подробные оптимизационные исследования. Вначале с помощью ЭВМ был проведен численный анализ распределения усилий в перекрестных системах с различными пролетами, размерами ячейки поясных сеток. Варьировалось также соотношение площадей поперечного сечения поясов контурных и внутренних ферм A_c/A_i. Предполагалось, что в целях унификации элементов, уменьшения числа марок ферм и типоразмеров стержней целесообразно выровнять сечения нижних и верхних поясов между собой и для всех внутренних ферм. Вопрос состоял в том, насколько этому выравниванию будут следовать продольные усилия N в поясах внутренних ферм, по разному удаленных от контура. Графическая обработка результатов показа-

* А. с. 964083 СССР, МКИ³ Е 04 В 5/14, Е 04 С 3/08. Пространственная решетчатая несущая конструкция / В. А. Аденский, М. Л. Гринберг, А. Я. Прицкер, В. Н. Шимановский, В. И. Трофимов, Б. А. Штепа — Опубл. 07.10.82, Бюл. № 37.

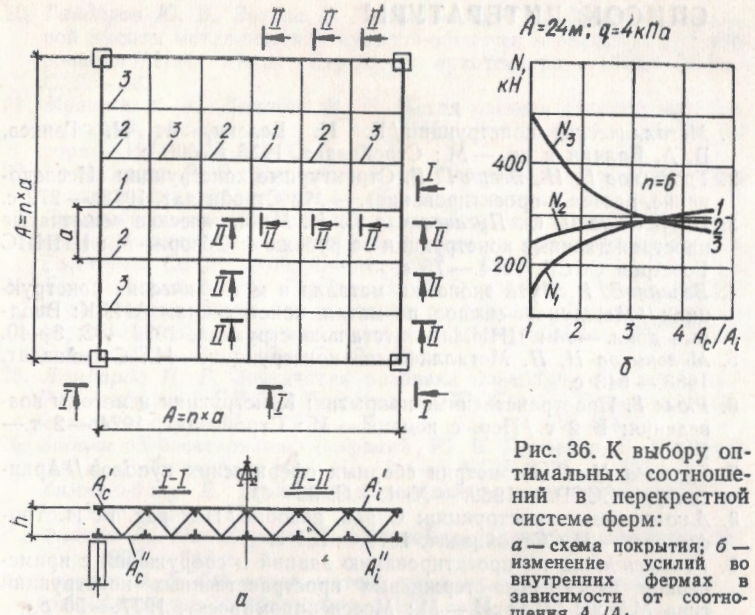


Рис. 36. К выбору оптимальных соотношений в перекрестной системе ферм:

а — схема покрытия; *б* — изменение усилий во внутренних фермах в зависимости от соотношения A_c/A_i.

ла, что кривые N (A_c/A_i) образуют пучки с узлом в точке наилучшего соотношения $A_c/A_i = 0{,}5\ (n+1)$, где n — число ячеек по каждой из сторон плана покрытия (рис. 36).

Дальнейший анализ подтвердил общий характер полученного результата, позволил установить границы рациональных соотношений и предложить их для перекрестных систем из равновысоких контурных и внутренних элементов с равновеликими сечениями поясов *. Получаемая равномерность распределения усилий по внутренним фермам позволяет снизить расход металла на унификацию изделий более чем в 3 раза по сравнению с известными конструкциями.

Для проекта покрытия в виде секций из перекрестных ферм размерами 18×18 м и 24×24 м были выполнены соответствующие оптимизационные расчеты геометрических параметров и разработаны чертежи КМ.

* А. с. 992689 СССР, МКИ³ Е 04 В 7/14. Пространственное покрытие / В. А. Аденский, М. Л. Гринберг, А. Я. Прицкер, В. Н. Шимановский, В. И. Трофимов, Б. А. Штепа, И. Л. Пименов, В. К. Чаадаев. — Опубл. 30.01.83, Бюл. № 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Металлические* конструкции / Е. И. Беленя, А. Н. Гениев, В. А. Балдин и др. — М.: Стройиздат, 1976. — 600 с.
2. *Трофимов В. И., Бегун Г. Б.* Структурные конструкции (Исследование, расчет и проектирование). — М.: Стройиздат, 1972. — 272 с.
3. *Песчанский П. С., Пугачевская Л. М.* Металлические решетчатые пространственные конструкции за рубежом: Обзор.— М.: ЦИНИС Госстроя СССР, 1974.— 75 с.
4. *Беленя Е. И.* Пути экономии металла в металлических конструкциях // Междунар. симпоз. по метал. конструкциям АИПК: Вводные докл. — М.: ЦНИИпроектстальконструкция, 1978.— С. 3—40.
5. *Мельников Н. П.* Металлические конструкции.— М.: Стройиздат, 1983.— 543 с.
6. *Рюле Г.* Пространственные покрытия: Конструкции и методы возведения: В 2 т. / Пер. с немецк.— М.: Стройиздат, 1974.— 2 т.— 247 с.
7. *Туполев М. С.* Геометрия сборных сферических куполов // Архитектура СССР. — 1969. — № 1.— С. 35—41.
8. *Алюминиевые* конструкции: Справ. пособие / Под ред. В. И. Трофимова. — М.: Стройиздат, 1978.— 151 с.
9. *Рекомендации* по проектированию зданий и сооружений с применением перекрестно-стержневых пространственных конструкций типа МАрхИ / МАрхИ.— М.: Моспецпромпроект, 1977.— 56 с.
10. *Легкие* металлические конструкции промышленных зданий: Сб. ст. / ЦНИИПСК.— М.: Стройиздат, 1975.— 193 с.
11. *Прицкер А. Я.* Мембранные конструкции в общественных и промышленных зданиях // Изв. вузов. Стр-во и архитектура.— 1983.— № 8. — С. 16—23.
12. *Трофимов В. И., Чернов Ю. А.* Технико-экономические показатели структурных конструкций системы «ЦНИИСК» // Пром. стр-во. — 1977.— № 8.— С. 6—8.
13. *Отраслевой* каталог легких несущих и ограждающих металлических конструкций и комплектующих металлоизделий для промышленных зданий / ВГПКТИ Гипроспецлегконструкция. — М.: ЦБНТИ Минмонтажспецстроя СССР, 1983.— 225 с.
14. *Перельмутер А. В.* О влиянии изменения жесткостей на перераспределение усилий в статически неопределимой системе // Строит. механика и расчет сооружений.— 1974.— № 5.— С. 64—67.
15. *Гордеев В. Н., Гринберг М. Л., Кондра М. П.* О выборе оптимальных очертаний башни // Строит. механика и расчет сооружений.— 1969.— № 6.— С. 59—61.
16. *Гринберг М. Л., Коробец Л. В.* Проектирующий комплекс «Башня» // Автоматизированная система проектирования объектов строительства: Тез. сообщений Всесоюз. научн. конференции / ЦНИПИАСС Госстроя СССР.— 1973.— Вып. 3.— С. 306—312.
17. *Пушкин Б. А.* Оптимальные геометрические параметры решетчатых плит // Исследования строит. конструкций: Сб. тр. / Ростовский ПСП.— Ростов н/Д, 1968.— С. 3—19.
18. *Хисамов Р. И.* Конструирование и расчет структурных покрытий.— Казань: КИСИ, 1977.— 78 с.
19. *Молев И. В.* Определение оптимальной геометрической схемы сетчатых куполов. Некоторые закономерности веса металлических сетчатых куполов // Исследования в области строительства: Сб. тр. / ГИСИ им. Чкалова.— Горький, 1973.— Вып. 63.— С. 85—96.

20. *Гайдаров Ю. В., Зотова Н. Г., Козьмина В. К.* Выбор оптимальной высоты металлических куполов-оболочек в реальном проектировании // Изв. вузов. Стр-во и архитектура.— 1979.— № 9.— С. 23—28.
21. *Муханов К. К., Демидов Н. Н.* Метод расчета структурных конструкций, рациональных по весу // Изв. вузов. Стр-во и архитектура.— 1975.— № 3..— С. 3—7.
22. *Трофимович В. В., Пермяков В. А.* Оптимальное проектирование металлических конструкций.— К.: Будівельник, 1981.— 135 с.
23. *Руководство* по определению стоимости эксплуатации промышленных зданий и сооружений на стадии их проектирования: Утв. Госстроем СССР 10.09.76.— М., 1977.— 65 с.
24. *Бердичевский М. М., Гордеев В. Н.* О подборе сечений сжатых и растянутых элементов в задаче оптимального проектирования ферм // Материалы по металлическим конструкциям.— М.: Стройиздат, 1972.— Вып. 16.— С. 47—52.
25. *Ломбардо И. В.* Звездчатая разбивка поверхностей вращения // Реф. информ. / ЦИНИС Госстроя СССР. Сер. 7, Проектирование метал. конструкций.— 1976.— Вып. 1 (62).— С. 30—34.
26. *Задачи* по исследованию операций / Ю. Б. Гермейер, В. В. Морозов, А. Г. Сухарев и др.— М.: Изд-во МГУ, 1979.— 168 с.
27. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.— М.: Мир, 1975.— 534 с.
28. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование.— М.: Мир, 1972.— 240 с.
29. *Гордеев В. Н.* Об одном методе решения задачи выпуклого программирования // Кибернетика.— 1971.— № 3.— С. 70—73.
30. *Павлов Б. Г.* Допустимое увеличение веса стальных конструкций при типизации и методика его определения // Реф. информ. / ЦИНИС Госстроя СССР. Сер. 7, Проектирование металлических конструкций,— 1969.— Вып. 11 (19).— С. 2—21.
31. *Краковский М. Б.* Об оптимальном проектировании конструкций на основе метода крутого восхождения // Строит. механика и расчет сооружений.— 1973.— № 1.— С. 8—10.
32. *Гордеев В. Н.* О конечности методов решения одной задачи квадратичного программирования // Кибернетика.— 1971.— № 1.— С. 85—88.
33. *Ritter K. A.* Method for Solving Maximum-Problems With a Nonconcave Quadratic Objective Function // Z. Wahrschein-lichkeitstheorie verw.— 1966.— N 4.— P. 340—351.
34. *Majthay A.* Local optimization for nonconvex quadratic programming // Nav. Res. Log. Quart.— 1974.— N 3.— P. 465—490.
35. *Основные* цели создания и задачи САПР-ЦНИИПСК / *Н. П. Мельников, Г. А. Геммерлинг, М. Г. Дмитриев и др.* // Исследования по автоматизации проектирования строительных металлических конструкций: Тр. ин-та / ЦНИИпроектстальконструкция. — 1978. — Вып. 25. — С. 18—25.
36. *Барский В. Б.* Математические методы унификации строительных металлических конструкций // Обзоры по вопросам проектирования металлических конструкций / ЦИНИС Госстроя СССР. — 1969.— № 2.— С. 1—88.
37. *Патцельт О.* Стальные решетчатые пространственные конструкции. Пер. с немецк.— М.: ЦИНИС Госстроя СССР, 1970.— 95 с.
38. *Лихтарников Я. М.* Вариантное проектирование и оптимизация стальных конструкций.— М.: Стройиздат, 1979.— 319 с.
39. *Рекомендации* по определению технико-экономических показателей при сравнении вариантов стальных конструкций промышлен-

ных зданий в процессе проектирования / ЦНИИпроектстальконструкция. — М., 1973.— 40 с.
40. *Руководство* по определению эффективности капитальных вложений в производство строительных металлических конструкций / ЦНИИпроектстальконструкция.— М., 1977.— 32 с.
41. *Жербин М. М.* Высокопрочные строительные стали.— К.: Будівельник, 1974. — 160 с.
42. *Сахновский М. М.* Технологичность строительных сварных конструкций.— К.: Будівельник, 1980.— 263 с.
43. *Беккер Г. Н.* Оптимальная унификация элементов стержневых пространственных конструкций // Реф. инф. / ЦИНИС Госстроя СССР. Сер. 8, Строит. конструкции и строит. физика.— 1976.— Вып. 4. — С. 56—60.
44. *Никифоров В. Г.* Оптимизация многостержневых систем по наименьшему весу // Строит. механика, расчет и конструирование сооружений: Тр. МАрхИ.— 1976.— Вып. 5.— С. 44—52.
45. *Пространственные* конструкции в Красноярском крае: Межвузовский сб. научн. работ.— Красноярск, 1976.— Вып. 9.— 286 с.
46. *Диденко В. Н.* Приближенный метод расчета решетчатых пространственных плит на вертикальную равномерно-распределенную нагрузку // Реф. инф. / ЦИНИС Госстроя СССР. Сер. 8, Строит. конструкции и строит. физика.— 1976.— Вып. 12.— С. 20—24.
47. *Гордеев В. Н., Гринберг М. Л.* Выбор оптимальных параметров структурных покрытий // Строит. механика и расчет сооружений. — 1977.— № 6.— С. 12—18.
48. *Бирюлев В. В., Щербаков Ю. М.* О выборе высоты металлических ферм // Изв. вузов. Стр-во и архитектура.— 1974.— № 3. — С. 16—20.
49. *Городецкий А. С., Винницкий М. Е.* Вычислительный комплекс «Лира».— К.: Реклама, 1984.— 20 с.
50. *Бурышкин М. Л., Гордеев В. Н.* Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций.— К.: Будівельник, 1984.— 120 с.
51. *Рекомендации* по проектированию структурных конструкций / ЦНИИСК.— М.: Стройиздат, 1984.— 303 с.
52. *Хисамов Р. И., Исаева Л. А.* Определение технико-экономических показателей структурных покрытий.— Казань, 1979.— 79 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

1. Проектирование пространственных решетчатых покрытий (ПРП) 6
1.1. Геометрия и основы формообразования 6
1.2. Конструкции элементов и узлов 18
1.3. Методы расчета ПРП и некоторые сведения о программах 33
1.4. Тенденции развития задач оптимального проектирования 37

2. Постановка задач оптимизации ПРП 43
2.1. Характеристика объекта оптимизации и варьируемые параметры 44
2.2. Критерий качества проектных решений 47
2.3. Расчетные модели и основные зависимости 52
2.4. Определение массы систем с распределенными параметрами 59
2.5. Определение приведенных затрат 73

3. Методы решения задач оптимизации ПРП 77
3.1. Методы решения оптимизационных задач при отсутствии ограничений на изменение оптимизируемых параметров . . 78
3.2. Методы решения оптимизационных задач с ограничениями на изменение оптимизируемых параметров 84
3.3. Основы метода равномерных запасов 94
3.4. Множество решений, близких к оптимальному, и его использование при определении параметров ПРП 102
3.5. Аппроксимация границ области допустимых решений, близких к оптимальному 110
3.6. Метод равномерных запасов и область решений, близких к оптимальному 114

4. Численная и программная реализация методов оптимизации ПРП 116
4.1. Разностная схема для вычисления производных первого и второго порядков 117
4.2. Простые алгоритмы минимизации квадратичной функции на симплексе 119
4.3. Метод симплексных подобластей в задаче безусловной минимизации функций 131
4.4. Применение методов равномерных запасов и симплексных подобластей к решению задач условной оптимизации . . 134
4.5. Перебор решений, близких к оптимальному, при дискретном изменении параметров проектирования 138
4.6. Универсальный оптимизирующий комплекс системы САПР-ЦНИИПСК 145
4.7. Использование средств системы ДИАРАМА 155

5. Влияние проектных факторов на оптимальные параметры и экономические показатели покрытий 157
5.1. Особенности задач оптимизации различных систем ПРП 158
5.2. Учет диапазона нагрузок 163

5.3. Изменение характеристик материала и сортамента . . 169
5.4. Рациональная унификация элементов 176
5.5. Влияние компонентов затрат и модификация критерия качества 182

6. Оптимизация ПРП в практике проектирования 190

6.1. Основные положения оптимизационного расчета . . . 191
6.2. Статический анализ прототипа 193
6.3. Технико-экономический анализ прототипа 203
6.4. Минимизация приведенных затрат и оценка потерь при отклонении от оптимума 208
6.5. Совершенствование конструкций ПРП на основе оптимального проектирования 217

Список литературы 220

Шимановский В. Н. и др.

Ш61 Оптимальное проектирование пространственных решетчатых покрытий / В. Н. Шимановский, В. Н. Гордеев, М. Л. Гринберг.— К.: Будівельник, 1987.— 224 с.:— (Ученые Украины — нар. хоз-ву).— Библиогр.: с. 220—222.

В книге изложена методика оптимизации типовых и уникальных стержневых плит, оболочек и куполов по комплексному экономическому критерию — приведенным затратам. Значительное внимание уделено оценке металлоемкости, трудоемкости изготовления и монтажа, энергоемкости конструктивной формы. Рекомендована эффективная технология машинного расчета и оптимального проектирования в режиме диалога. Рассчитана на инженерно-технических работников проектных и научно-исследовательских организаций.

Ш $\frac{3202000000-046}{М203(04)-87}$ 38.87 38.44—02