

**А.В. Шимановский,
В.В. Шалинский, Н.А. Чабан**

МЕХАНИКА ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

*Под общей редакцией
заслуженного деятеля науки и техники Украины,
доктора технических наук, профессора
А.В. Шимановского*

**Киев
Издательство «Сталь»
2010**

УДК 624.071.074:539.3
ББК 38.5+22.251

Ш 61 Шимановский А.В., Шалинский В.В., Чабан Н.А.

Механика висячих систем / Под общей редакцией Шимановского А.В. –
К.: Изд-во «Сталь», 2010. – 399 с., рис. 184, табл. 12.

В книге изложены нелинейная теория, построение основных разрешающих соотношений, методы и алгоритмы численного исследования, а также анализ прочности, жесткости и устойчивости висячих систем. Приведены уточненные результаты исследований реальных большепролетных пространственных комбинированных висячих систем с учетом больших перемещений и деформаций, конструктивной анизотропии, пластических свойств материалов, потери устойчивости плоской формы деформирования и местной устойчивости тонколистовых оболочек.

Для научных работников, инженеров, преподавателей, аспирантов, магистров и студентов технических вузов.

ISBN 978-966-1555-53-1

УДК 624.071.074:539.3

Ш 61 Шимановський О.В., Шалінський В.В., Чабан Н.О.

Механіка висячих систем / Під загальною редакцією Шимановського О.В. –
К.: Вид-во «Сталь», 2010. – 399 с., рис. 184, табл. 12.

У книзі викладено нелінійну теорію, побудову основних розв'язних співвідношень, методи й алгоритми числового дослідження, а також аналіз міцності, жорсткості та стійкості висячих систем. Наведено уточнені результати досліджень реальних великопролетних просторових комбінованих висячих систем із урахуванням великих переміщень і деформацій, конструктивної анізотропії, пластичних властивостей матеріалів, втрати стійкості плоскої форми деформування і місцевої стійкості тонколистових оболонок.

Для науковців, інженерів, викладачів, аспірантів, магистрів і студентів технічних вузів.

Рецензенты: Л.М. Лобанов, академик Национальной академии наук Украины, доктор технических наук, профессор
В.Т. Трощенко, академик Национальной академии наук Украины, доктор технических наук, профессор

Рекомендовано к изданию Научно-техническими советами: Министерства регионального развития и строительства Украины, Украинской государственной корпорации «Укрмонтажспецстрой», Института геотехнической механики имени Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины, Института электросварки имени Е.О. Патона Национальной академии наук Украины, ОАО «Украинский научно-исследовательский и проектный институт стальных конструкций имени В.Н. Шимановского».

ISBN 978-966-1555-53-1

**© А.В. Шимановский,
В.В. Шалинский, Н.А.Чабан, 2010
© Издательство «Сталь», 2010**

ВВЕДЕНИЕ

Большепролетные пространственные висячие системы различного назначения и типа находят все более широкое применение в строительстве и различных отраслях современной техники. Это обусловлено не только их техническими особенностями, но также и значительной экономической эффективностью по сравнению с обычными конструкциями. Большепролетные висячие конструкции, запроектированные с учетом их пространственной работы, являются более легкими, прочными и надежными, чем плоскостные системы. Такими свойствами в полной мере обладают висячие и мембранные системы, все шире используемые в гражданских и промышленных зданиях и инженерных сооружениях, а также при их реконструкции. Кроме того, применение указанных конструкций позволяет перекрывать большие площади без промежуточных опор, создавать легкие и выразительные архитектурные формы, рационально использовать прочностные свойства материала (за счет его работы преимущественно на растяжение), они малочувствительны для различного рода перегрузок, сейсмических воздействий, осадок и неравномерного смещения опор. Поэтому большепролетные пространственные висячие системы часто бывают незаменимыми при строительстве не только названных, но и многих других уникальных сооружений.

Необходимо, однако, отметить, что большепролетные пространственные висячие системы наряду с преимуществами имеют и некоторые недостатки. Поэтому они постоянно развиваются – совершенствуются конструктивные формы, уточняются методы расчета, применяются эффективные материалы для несущих элементов, создаются новые типы соединений, внедряются прогрессивные способы изготовления и монтажа.

Иллюстрацией к сказанному может служить разработка методов стабилизации формы висячих систем, поскольку известно, что они имеют повышенную деформативность при воздействии сосредоточенных и особенно несимметричных нагрузок. Методы уменьшения деформативности висячих

систем во многом зависят от их функционального назначения. Например, если стабилизация покрытий зданий и сооружений достигается в основном предварительным напряжением, то повышение жесткости пролетного строения мостов, путе- и трубопроводных переходов – за счет конструктивных мероприятий. В последнее время для этих целей все больше применяют висячие системы повышенной жесткости, расчетной моделью несущих элементов которых являются нити конечной жесткости.

Можно также отметить целый ряд факторов, связанных с расчетом большепролетных пространственных висячих систем. Это и сильная нелинейность рассматриваемых конструкций, и наличие зон одноосного напряженного состояния, и адекватная формулировка интегрального закона состояния материала на основе различных реологических моделей, и многое другое. Между тем совершенно очевидно, что без правильного представления о работе большепролетных пространственных висячих систем под нагрузкой невозможно не только создать новые рациональные формы, но даже обеспечить достаточную прочность и надежность применяемых систем. Поэтому развитию теории расчета большепролетных пространственных висячих систем необходимо уделять повышенное внимание.

Научно-техническая проблема, решаемая в данной работе, связана с разработкой теории расчета большепролетных пространственных комбинированных висячих систем, а также комплексным исследованием процессов их формообразования, конструирования и деформирования с учетом значительной геометрической, физической и конструктивной нелинейностей. При этом геометрическая нелинейность характеризуется большими перемещениями, физическая – неупругими деформациями, а конструктивная – изменением параметров расчетной модели в процессе работы конструкции. Кроме того, значительное внимание в работе уделяется вопросам разработки и совершенствования новых конструктивных решений большепролетных пространственных комбинированных висячих систем при компоновке их схем, рационализации соотношений геометрических размеров, уменьшения параметров состояния и обеспечения, по возможности, равнопрочной работы несущих элементов и т.п.

В качестве объектов исследования рассматриваются различные большепролетные пространственные комбинированные конструкции, а именно: висячие (вантовые, повышенной жесткости на основе нитей конечной жесткости, мембранные) и оболочечные системы. С использованием нелинейной теории упругости и пластичности разработана теория расчета прочности и устойчивости указанных сильнонелинейных систем на произвольные нагрузки и воздействия в пределах и за пределами упругости, сформулирована концепция ее конечноэлементного представления и получены основные соотношения метода конечных элементов.

Настоящее издание состоит из девяти глав. В первых двух главах приведен обзор теоретических и экспериментальных исследований несущих элементов висячих систем, а также описаны основные конструктивные решения,

вопросы проектирования, изготовления и монтажа большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Главы с третьей по шестую посвящены описанию теории расчета нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе на прочность и устойчивость. Причем в третьей и четвертой главах рассмотрена работа висячих систем в пределах упругой работы материала, а в пятой и шестой – за пределами упругости. Седьмая глава посвящена вопросам численной реализации предлагаемых теоретических положений и метода конечных элементов для расчета большепролетных пространственных комбинированных висячих систем, причем особое внимание обращено на алгоритмы решения больших систем нелинейных разрешающих уравнений. В последних двух главах изложены результаты численного исследования нитей конечной жесткости и большепролетных пространственных комбинированных висячих систем ряда реальных гражданских и промышленных зданий и инженерных сооружений на прочность и устойчивость в пределах и за пределами упругости и предложения по совершенствованию и разработке их новых конструктивных решений.

В первой главе дается обзор некоторых конструктивных решений большепролетных пространственных висячих систем и приводится классификация методов стабилизации их формы под нагрузкой. Особое внимание обращено на висячие системы повышенной жесткости, несущие элементы которых выполнены из нитей конечной жесткости. Приведен обзор теоретических и экспериментальных исследований таких нитей и систем на их основе. Отмечено, что методы расчета в упругой стадии не позволяют выявить истинные запасы прочности конструкции, поскольку в большинстве случаев пластические деформации приводят к перераспределению и выравниванию напряжений, а следовательно, и к повышению несущей способности сооружения. При этом указано, что учет пластических деформаций может дать особенно большой эффект при расчете таких в значительной степени нелинейно работающих систем, как висячие.

С учетом анализа тенденций совершенствования прочностных характеристик конструкционных материалов сделан вывод, что их повышение обусловило широкое применение в строительстве экономичных и изящных тонкостенных и висячих систем. Отмечено, что для таких систем роль расчетов на устойчивость существенно возросла, так как их разрушение чаще всего связано с потерей или общей устойчивости, или устойчивости составляющих конструкцию отдельных элементов. Относительно развитых в вертикальной плоскости висячих систем указано, что такой расчет часто дает значение нагрузки, при которой происходит потеря эксплуатационных свойств висячей системы и даже ее разрушение, существенно меньшее, чем полученное по обычному расчету на прочность.

На основании анализа результатов выполненного обзора теоретических и экспериментальных исследований и развития теории конструктивных форм висячих систем сформулированы цель и направления исследований.

Во второй главе сосредоточены общие сведения о гражданских и промышленных зданиях и инженерных сооружениях с применением большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Рассмотрены покрытия в виде вантовых и комбинированных систем и оболочек, а также мембранные конструкции. Приведены конструктивные и расчетные схемы, оценена пространственность работы сооружений. Рассмотрены вопросы проектирования, расчета, изготовления и монтажа. Представлены требования, предъявляемые к таким сооружениям, рекомендуемые конструктивные материалы, нагрузки и воздействия. Указаны некоторые перспективные тенденции развития конструктивных форм. Особое внимание обращено на конструктивные решения мостов, путе- и трубопроводных переходов через естественные и искусственные препятствия: выполнена классификация схем мостов и переходов, а также приведена характеристика их несущих конструкций. Рассмотрены требования, предъявляемые к таким сооружениям, типы конструктивных решений и узлов пролетных строений. Значительное внимание уделено висячим и вантовым мостам, особенностям реализации их основных конструктивных элементов – балок жесткости, пилонов, узлов крепления вант, подвесок и кабелей.

В третьей главе описана уточненная теория расчета нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе на произвольные (в том числе специального вида) вертикальные и горизонтальные нагрузки, построенная с использованием принципа возможных перемещений. Сформулированы разрешающие уравнения нелинейной задачи, а также получено ее общее решение, обладающее высокой степенью точности. Рассмотрены практически важные случаи расчета висячих систем, в т.ч. учет влияния изменения температуры окружающей среды, смещения и неравномерной осадки опор, расчета многопролетной нити конечной жесткости на упруго-податливых опорах и двухполюсных висячих систем, пояса которых выполнены из нитей конечной жесткости. Показано, что частными случаями полученного общего решения задачи являются известные решения для гибкой однопролетной нити, а также для гибкой многопролетной нити на упруго-податливых опорах.

Исследована точность как исходных предпосылок теории, так и полученных решений. Показано, что представленная уточненная теория расчета позволяет более точно определять параметры напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе по сравнению с существующими методами расчета.

Наряду с уточненной теорией расчета нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе изложены приближенные методы расчета, основанные на применении метода рядов Фурье, позволившие не только существенно упростить расчетные зависимости, но и свести методику расчета к решениям, простым и удобным для практического применения.

Четвертая глава посвящена описанию общего метода расчета устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе на симметричные и несимметричные нагружения (в том числе специального вида) с использованием принципа возможных перемещений и энергетического критерия устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле. Представлены общие разрешающие уравнения задачи, а также зависимости для определения критического распора и критической дополнительной нагрузки при различных сочетаниях нагрузок, произвольных условиях закрепления на опорах, эксцентриситете приложения нагрузки и пр. Полученные решения распространены на случай нитей конечной жесткости, раскрепленных связями в горизонтальной плоскости.

Определены пределы применения предложенных решений. При этом особо подчеркнуто, что полученные расчетные зависимости дают общее решение рассматриваемой задачи, частные случаи которого описывают потерю устойчивости плоской формы изгиба, с одной стороны, гибких нитей, а с другой – балок.

В пятой главе рассматриваются вопросы расчета висячих систем с учетом пластических свойств материала. Представлено два варианта идеализации работы реального материала: упруго-пластический материал и упруго-пластический материал с линейным упрочнением. Установлены зависимости между распором, изгибающим моментом и кривизной во всех фазах работы поперечного сечения нити конечной жесткости.

Представленная в третьей главе уточненная теория и метод расчета распространены на случай работы нитей конечной жесткости за пределом упругости. Описаны разрешающие уравнения геометрически и физически нелинейной задачи при активном нагружении и разгрузке. Приведены уравнения, определяющие параметры напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах деформирования, координаты границы между упругим и пластическими участками по ее длине, а также условия смены фаз работы нити, которые обобщены на все виды нагружений и воздействий. Учтено влияние на напряженно-деформированное состояние нити образующихся в процессе нагружения в ее пролете пластических шарниров. Показано, что вытекающие из разработанной теории частные случаи представляют собой известные решения для гибкой нити.

Шестая глава посвящена общему методу расчета устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе за пределом упругости на симметричные и несимметричные нагружения (в том числе специального вида), который, как и метод расчета устойчивости упругих нитей, основан на принципе возможных перемещений с использованием энергетического критерия устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле. Рассмотрены вопросы устойчивости плоской формы изгиба висячих систем за пределом упругости и отмечены особенности их поведения при значениях внешних нагрузок, близких или равных критическим. С привлечением теории пластического течения уточнено выражение потенциальной энергии дефор-

мации применительно к случаю потери устойчивости упруго-пластических нитей конечной жесткости. Описано поведение поперечного сечения нити конечной жесткости с зонами односторонней и двусторонней пластичности при ее выпучивании в горизонтальной плоскости. Выполнен анализ взаимовлияния зон нагружения и разгрузки в поперечном сечении при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба. Определены соотношения, характеризующие положение границы раздела между этими зонами для возможных случаев работы нити и характерных форм поперечных сечений. Рассмотрены возможные случаи прохождения границы раздела по поперечному сечению при различной толщине пластичных областей.

Установлены зависимости для определения приведенной жесткости поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при различных типах профиля и вариантах распространения зон пластической деформации по сечению нити. Представлены уравнения устойчивости для всех фаз работы упруго-пластической нити конечной жесткости, а также зависимости для определения критического распора и критической дополнительной нагрузки при различных сочетаниях нагрузок, граничных условиях и форме поперечного сечения, а также эксцентриситета приложения нагрузки, раскрепления нити связями в горизонтальной плоскости и пр.

В седьмой главе изложена концепция применения метода конечных элементов к расчету большепролетных пространственных комбинированных висячих систем, состоящих из фрагментов различной структуры, мерности и жесткости. Представлена постановка и реализация конечноэлементной методики расчета, основанной на специально построенных для рассматриваемых систем нелинейных соотношениях метода конечных элементов в вариационной формулировке. Отмечены возникающие при этом трудности, связанные с большой кинематической подвижностью и высокой деформативностью висячих систем в процессе нагружения. Описана аппроксимация функций перемещений, деформаций и напряжений в пространстве базисных функций дискретной модели комбинированной континуальной области.

Особое внимание обращено на алгоритмы решения больших систем нелинейных разрешающих уравнений. Описаны некоторые специальные эффективные алгоритмы решения задач нелинейного деформирования большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Выполнено обоснование разработанных теоретических положений путем сопоставления решений тестовых задач с имеющимися в литературных источниках. Определены пределы применения предложенных расчетных моделей. Изложена программная реализация методики исследования напряженно-деформированного состояния большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Приведено описание принципов и функциональной схемы комплекса программ. Указаны возможные режимы работы комплекса, форма представления исходных данных и результатов расчета, а также другие присущие ему особенности.

Восьмая глава содержит результаты обширных численных исследований нитей конечной жесткости и висячих систем, состоящих из гибких нитей и нитей конечной жесткости, на прочность и устойчивость в пределах и за пределами упругости. Рассмотрено влияние различных факторов на напряженно-деформированное состояние, несущую способность и устойчивость нитей. Проведен анализ и выявлены закономерности поведения нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе, дана оценка достоверности предложенной теории расчета путем сравнения полученных результатов с известными аналитическими решениями и данными экспериментальных исследований.

Особое внимание уделено предложениям по совершенствованию и разработке новых конструктивных решений большепролетных пространственных комбинированных висячих систем, основанных на найденных закономерностях поведения нитей конечной жесткости и включающих вопросы компоновки сооружения, выбора рациональных соотношений геометрических параметров, уменьшения напряжений в конструктивных элементах и пр. Указаны возможные направления применения висячих систем в конструкциях, где ранее такие системы обычно не использовались, рассмотрены новые решения несущих элементов висячих систем и методы искусственного регулирования усилий в этих элементах.

В девятой главе изложены результаты численного исследования напряженно-деформированного состояния большепролетных пространственных комбинированных висячих систем ряда реальных гражданских и промышленных зданий и инженерных сооружений. Представлен анализ закономерностей их работы при различных схемах загрузки, а также отмечены выявленные особенности в части образования опасных зон в конструкциях, где напряжения в составляющих их элементах близки или даже превышают расчетное сопротивление материала. Описаны выработанные с учетом анализа результатов проведенных исследований рекомендации по совершенствованию или изменению первоначально принятых проектных решений, а также обозначены некоторые пути совершенствования конструктивных решений рассматриваемых систем.

Авторы надеются, что данная книга заинтересует и будет полезна специалистам, причастным к созданию (расчету, конструированию, проектированию) разнообразных большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. В книге методично изложен теоретический и практический материал, представлены все использованные соотношения нелинейной теории упругости и пластичности, а также описаны различные алгоритмы решения больших систем нелинейных уравнений, к которым сводятся рассматриваемые в данном издании задачи деформирования большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Книга снабжена не только тестовыми примерами, позволяющими вникнуть в детали алгоритмов, но и реальными задачами, содержащими дальнейшее развитие идей, лишь слегка затронутых в тексте. Все это делает книгу доступной для самостоятельного изучения сту-

дентами, бакалаврами, магистрами, аспирантами, научными работниками, инженерами и всеми, кому представленные задачи интересны с практической точки зрения.

При написании книги авторы старались придерживаться устоявшегося стиля, терминологии и обозначений, принятых в большинстве работ отечественных ученых данного научного направления. При этом в случае наличия нескольких вариантов изложения авторы отдавали предпочтение своим работам, в первую очередь [180 – 197], чтобы сохранить его целостность и последовательность.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность академику Национальной академии наук Украины, доктору технических наук, профессору А.Н. Гузю, которым была сформулирована основная идея книги, определена структура и форма подачи материала.

Улучшению содержания рукописи в значительной мере способствовали замечания и советы рецензентов – академика Национальной академии наук Украины, доктора технических наук, профессора Л.М. Лобанова и академика Национальной академии наук Украины, доктора технических наук, профессора В.Т. Трощенко, большая часть которых была учтена при подготовке окончательного варианта рукописи. Им авторы приносят свою искреннюю признательность.

ГЛАВА 1

СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

§ 1.1. Некоторые тенденции совершенствования висячих систем

В практику строительства внедряются новые типы промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений, в которых традиционные конструктивные решения заменяются новыми, отвечающими современным направлениям в проектировании. Наметившаяся в последние десятилетия как у нас в стране, так и за рубежом тенденция к увеличению пролетов зданий и сооружений в настоящее время становится закономерностью. В связи с этим особый интерес проявляется к висячим системам, получившим распространение в различных отраслях народного хозяйства. Это покрытия промышленных зданий и сооружений – заводов по сборке самолетов и ангаров для их содержания, универсальных цехов по выпуску крупногабаритной продукции, судостроительных эллингов, складов, гаражей и др.; спортивных сооружений – стадионов, плавательных бассейнов; цирков и киноконцертных залов, вокзалов и рынков, различного рода павильонов и др., а также инженерные сооружения – мосты, трубопроводные переходы, канатные дороги, кабель-краны, линии связи и электропередачи и др.

По сравнению с традиционными конструкциями висячие системы имеют ряд преимуществ, заключающихся в рациональном использовании прочностных свойств материала, относительной простоте изготовления, индустриальности монтажа, небольшой трудоемкости и стоимости строительства, возможности создания легких и выразительных с эстетической точки зрения архитектурных форм. Кроме того, такие системы малочувствительны к различного рода специфическим воздействиям, в том числе к сейсмическим нагрузкам, осадкам и неравномерному смещению опор и т.п.

Основным несущим элементом большинства висячих систем является трос, расчетной моделью которого служит гибкая нить. Нити являются идеальными несущими конструкциями, обладающими всеми ранее перечисленными преимуществами висячих систем, что позволяет значительно снизить материалоемкость сооружений, особенно при средних и больших пролетах. Однако при всех очевидных и неоспоримых преимуществах нитям присущи и весьма существенные недостатки – повышенная деформативность при действии несимметричных, особенно сосредоточенных нагрузок. Это обстоятельство потребовало разработки специальных конструктивных решений, снижающих величину прогибов и обеспечивающих стабильность формы нитей под нагрузкой. Поиск этих решений применительно к висячим системам велся в основном в двух направлениях: увеличение жесткости и совершенствование конструкции пролетной части.

Увеличение жесткости привело к созданию предварительно напряженных висячих систем и применению нитей конечной жесткости, т.е. нитей, у которых под действием произвольной поперечной нагрузки возникают напряжения растяжения и изгиба [62, 91, 103].

В результате совершенствования конструкций висячих систем появились двухпоясные системы [65, 67], системы Жискаляра [116], С.А. Цаплина [176, 177], в виде жесткой решетчатой цепи или арки [63, 67, 141], радиально-вантовых [64] и др.

Впервые висячие системы получили применение при строительстве мостов. Первые висячие мосты строились по схеме «цепь – балка», а увеличение их жесткости шло в основном за счет усиления балки и обеспечения её неразрезности в многопролетных мостах [116]. В дальнейшем для увеличения жесткости и надежности пролетного строения начали использовать нисходящие ванты. Примером такой конструкции может служить построенный в 1867 году через реку Огайо в г. Цинциннати трехпролетный железнодорожный висячий мост пролетом 322 м и общей длиной 687 м (рис. 1.1, а) [67, 176]. Мосты подобной конструкции были также построены во Франции через реки Сону в г. Лионе пролетом 110 м и Сену около г. Гавра пролетом 160 м [67]. В этих мостах крайние панели пролета у пилонов не имели вертикальных подвесок, в связи с чем нагрузка от них передавалась с помощью наклонных вант непосредственно на пилоны (рис. 1.1, б).

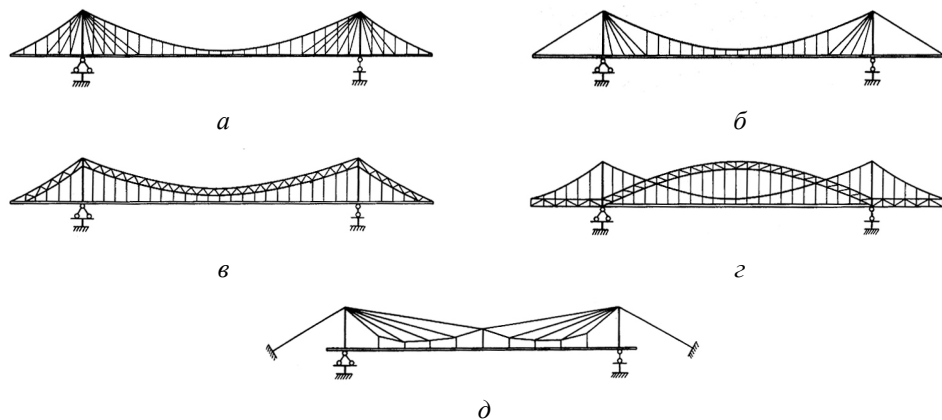


Рис. 1.1. Висячие мосты через реки:
а – Огайо; б – Сону и Сену; в – Аллегейни; г – Рейн; д – Нарын

Иной подход к увеличению жесткости висячих мостов заключается в применении в качестве растянутых несущих элементов моста жестких ферм. Именно такое решение было использовано при строительстве в 1884 году моста через реку Аллегейни в г. Питтсбурге, когда были соединены раскосной решеткой параллельные цепи, расположенные в одной вертикальной плоскости (рис. 1.1, в). Наряду с этим способом для увеличения жесткости висячих

мостов используют арки в качестве элемента жесткости, что получило применение в ряде случаев и, в частности, в проекте моста через реку Рейн пролетом 203 м (рис. 1.1, *з*) [116, 176]. Несмотря на преимущества подобных систем относительно жесткости по сравнению с цепной и кабельной схемами, они не получили широкого распространения в связи с большим весом, сложностью изготовления и монтажа, а также громоздкостью расположенных на большой высоте элементов конструкции.

Интересным решением в практике строительства висячих мостов является система, состоящая из прямолинейных вант и не имеющая параболически очерченной цепи, так называемая система Жискаляра [116, 176]. Примером подобной конструкции может служить висячий мост, построенный через реку Нарын в 1935 году (рис. 1.1, *д*) [63].

Увеличить жесткость пролетного строения висячего моста можно также путем включения обратного троса, создающего предварительное напряжение конструкции. Это решение было реализовано во Франции для моста пролетом 198 м. Обратные тросы имели стрелу провисания $1/25$ пролета и были наклонены внутрь проезжей части (рис. 1.2, *а*). При этом, как отмечается в [67], прогибы в середине моста уменьшились в 5 раз, а прогибы в четвертях пролета – незначительно. Данная конструкция по характеру своей работы полностью соответствует применяемым в настоящее время в строительстве двухпоясным системам.

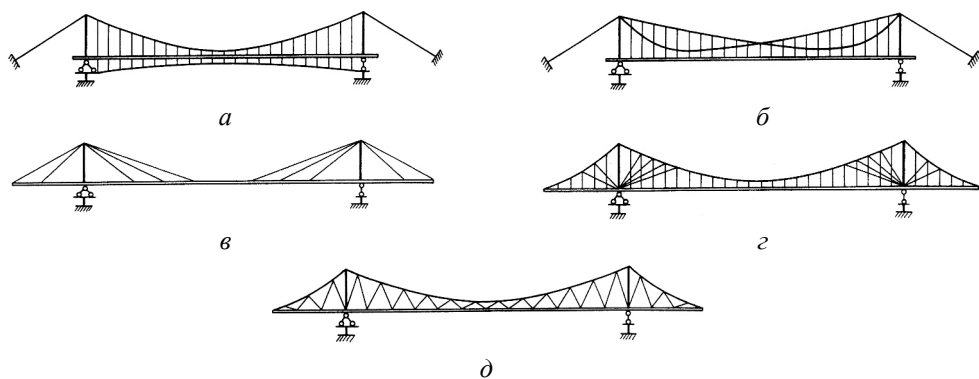


Рис. 1.2. Схемы висячих мостов:

а – через р. Луару; *б* – через водохранилище около г. Кривого Рога;
в – через р. Днепр; *г* – через Мессинский пролив; *д* – через р. Северн

Широкое распространение как у нас в стране, так и за рубежом получили висячие системы С.А. Цаплина и радиально-вантовые системы [64, 176, 177]. Примерами данных конструктивных решений могут служить построенные в 1960 году висячий мост пролетом 130 м через водохранилище около г. Кривого Рога (рис. 1.2, *б*) и трехпролетный мост с центральным пролетом 144 м и общей длиной 276 м через реку Днепр в г. Киеве (рис. 1.2, *в*).

Повысить жесткость висячей системы, наряду с приведенными выше способами, можно путем включения в схему восходящих вант. Самым ярким представителем среди мостов, где было использовано подобное предложение, является запроектированный висячий мост через Мессинский пролив (рис. 1.2, *з*), главный пролет которого имеет длину 1524 м [62, 149].

Следует также отметить применение висячих систем с перекрестной вантовой решеткой и с наклонными вантами. Примером такого решения может служить построенный в 1967 году трехпролетный мост с центральным пролетом 988 м и общей длиной 1598 м (рис. 1.2, *д*) через реку Северн вблизи г. Глостера [149].

Таким образом, изучив историю строительства висячих мостов, можно сделать вывод о том, что во второй половине XX века их пролеты имели размеры, намного превышающие километр, а сама конструкция отличалась совершенством и изяществом [63, 65, 149].

В последнее время все чаще стали строиться висячие трубопроводные переходы больших пролетов. По характеру статической работы их можно разделить на три группы. К первой группе относятся переходы, в которых трубопровод работает как балка на упруго-податливых опорах с пролетами, равными расстоянию между подвесками несущего каната или точками крепления радиальных вант (рис. 1.3, *а, б, в*). В переходах этой группы, как и в висячих мостах, всю нагрузку воспринимают провисающие канаты или радиальные ванты, например:

- переход газопровода диаметром 520 мм и пролетом 130 м. Трубопровод поддерживается двумя канатами диаметром 59 мм. Боковая жесткость пролетного строения обеспечивается горизонтальными оттяжками из канатов диаметром 30 мм. Труба крепится к несущим канатам с помощью подвесок, расположенных с шагом 6,5 м [118, 160];

- переход газопровода через реку Дунай пролетом 320 м. Отличительной особенностью его являются V-образные пилоны, превращающие пролетное строение в пространственную конструкцию, не требующую каких-либо дополнительных устройств для восприятия ветровых нагрузок [64].

Ко второй группе относятся переходы, в которых трубопровод является единственным несущим элементом, воспринимающим всю нагрузку (рис. 1.3, *г*). Одним из первых был построен двухниточный переход газопровода через реку Ухту. Пролет перехода 400 м, диаметр труб 114 мм, стрела провисания 18 м [118]. В 1963 году через реку Ию был построен однониточный переход нефтепровода диаметром 720 мм с пролетами 340 и 88,4 м. Так как один берег был высоким, то потребовалась установка всего одного пилонна [64]. Несколько позже был построен двухниточный переход газопровода через реку Кубань пролетом 350 м и диаметром труб 273 мм. Трубы расположены на расстоянии 1,2 м одна от другой и соединены через 40 м распорками. Стрела провисания трубопровода 10,5 м [118, 160].

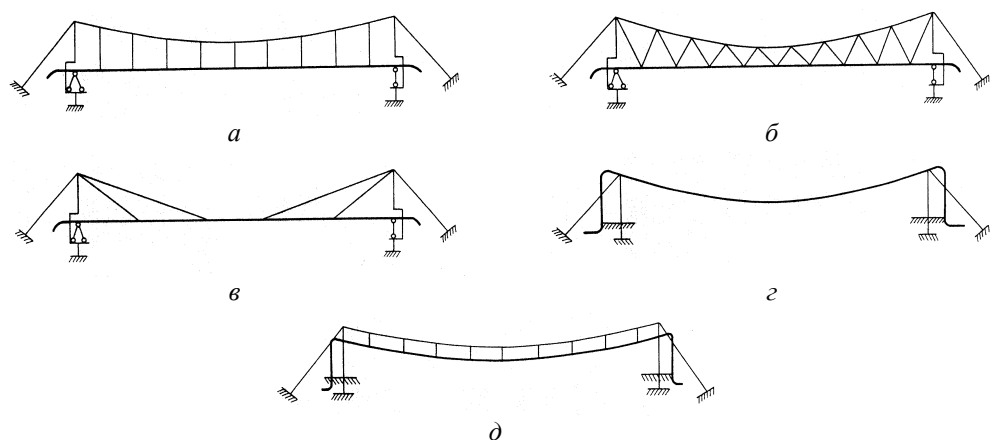


Рис. 1.3. Схемы висячих трубопроводных переходов:
а – с одноцепными фермами; б – с решетчатыми фермами;
в – с радиально-вантовыми фермами; г – в виде провисающей нити;
д – в виде провисающей нити с поддерживающими канатами

К третьей группе относятся переходы, являющиеся модификацией двух типов переходов: одноцепных из первой группы и в виде провисающей нити из второй группы (рис. 1.3, д). Примером перехода этой группы может служить запроектированный двухниточный переход газопровода через реку Сырдарью пролетом 800 м и диаметром труб 426 мм. Стрела провисания трубопровода равна 57,4 м [203].

Из перечисленных систем висячих переходов наиболее экономичными являются переходы в виде провисающей нити [32, 64]. Однако они не получили массового применения, поскольку в таких переходах при определенных соотношениях геометрических и физических параметров труб могут возникать высокие напряжения от растяжения и изгиба [64, 199].

Более рациональны переходы третьей группы – в виде провисающей нити с поддерживающими канатами. Конструкция переходов такой системы свободна от недостатков как первой группы переходов (позволяет использовать несущую способность трубопровода на растяжение и изгиб), так и второй (имеет повышенную надежность и позволяет производить замену звеньев труб в пролете).

Несмотря на большой опыт, накопленный при проектировании и строительстве висячих мостов и трубопроводных переходов, нить как элемент покрытия, применяется сравнительно недавно [66, 90, 103, 206]. Первые вантовые покрытия были сооружены в 1896 году на Всероссийской выставке в г. Нижнем Новгороде выдающимся русским инженером В.Г. Шуховым (рис. 1.4) [41, 91, 103]. Висячие покрытия широко применяются начиная с 1953 года, когда в г. Рэлей в США было построено покрытие спортивного зала (рис. 1.5). Конструкция покрытия размером в плане 92×97 м образована

седловидной ортогональной вантовой сетью отрицательной гауссовой кривизны. Сеть подвешена к опорному контуру, выполненному из двух пересекающихся параболических железобетонных арок, наклоненных под углом 22° к горизонту и опирающихся по периметру на стальные колонны. Вантовая сеть выполнена из несущих и стабилизирующих канатов, имеющих диаметр соответственно 19–32 и 12–19 мм. Предварительное натяжение стабилизирующих канатов повышает жесткость всей конструкции покрытия и одновременно снижает его деформативность под действием различного рода временных нагрузок [41, 84, 103, 113].



Рис. 1.4. Павильон с висячим покрытием
в г. Нижнем Новгороде



Рис. 1.5. Рэлей-арена

Примером использования висячих конструкций для промышленного строительства может служить покрытие пролетом 163 м бумажной фабрики в г. Мантуя, где основные конструкции выполнены в виде висячего моста с вертикальными подвесками и балками жесткости высотой 1,5 м, на которые уложены поперечные балки (рис. 1.6) [66, 84]. В этом плане представляет также интерес построенный в 1971 году в г. Лос-Анджелесе ангар для самолетов [65, 166]. Конструкция принята консольного типа с несущими элементами-вантами, омоноличенными металлическим настилом (рис. 1.7). Вылет консолей ангара 69 м, длина здания составляет 135 м, а ширина – 168 м.

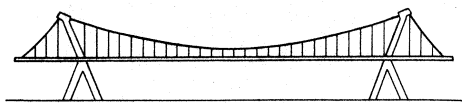


Рис. 1.6. Схема висячего покрытия
бумажной фабрики в г. Мантуя

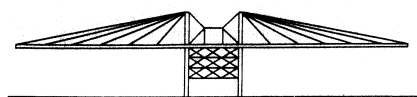


Рис. 1.7. Схема висячего покрытия
ангара для самолетов в г. Лос-Анджелесе

Весьма интересными и перспективными являются здания с шатровым покрытием. В последние годы построены два крупных сооружения с таким покрытием – закрытая стоянка диаметром 160 м на 400 автобусов в г. Киеве и резервуар для хранения воды диаметром 167 м в г. Дурбан, ЮАР. Схема этих сооружений представлена на рис. 1.8.

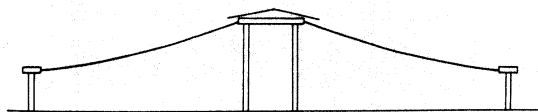


Рис. 1.8. Схема висячего покрытия закрытой стоянки в г. Киеве и резервуара для хранения воды в г. Дурбан

Основной несущей конструкцией покрытия закрытой стоянки служит система в виде 84 радиальных вант из стальных канатов диаметром 65 мм. Распор вант воспринимается сжатым наружным и растянутым внутренним опорными контурами. Внутренний опорный контур диаметром 8 м выполнен из двух металлических колец прямоугольного поперечного сечения, связанных по высоте ребрами жесткости. Верхнее кольцо опирается на внутреннюю опору, выполненную в виде цилиндрической оболочки диаметром 8 м и высотой 18 м. Помимо основного назначения – передачи нагрузки от покрытия на фундамент, опора также является вентиляционной шахтой. Наружный сборно-монолитный железобетонный опорный контур прямоугольного поперечного сечения опирается на 84 железобетонные колонны таврового сечения высотой 8 м. На ванты уложены сборные ребристые железобетонные плиты, швы между которыми замоноличены расширяющимся бетоном, что позволило обжать плиты [65, 103, 198].

Основная несущая конструкция резервуара состоит из 120 радиальных вант, изготовленных из 41 проволоки диаметром 7 мм каждая. Верхний железобетонный опорный контур прямоугольного поперечного сечения предварительно напряжен 16 канатами. Нижний железобетонный опорный контур двутаврового сечения опирается на контрфорсы, расположенные через каждые 33°. Внутренняя опора выполнена в виде полый цилиндрической оболочки диаметром 12 м и высотой 50 м. По вантам уложены сборные железобетонные ребристые плиты трапецевидной формы. При этом с целью предварительного напряжения покрытия, как и в предыдущем случае, швы между плитами были замоноличены расширяющимся бетоном.

Примером повышения жесткости системы покрытия может также служить применение двухпоясных висячих систем, у которых предварительное напряжение поясов осуществляется путем раздвижки распорок по длине вантовой фермы или барабана в центре покрытия, а также стягиванием подвесок (рис. 1.9, а – д). Предварительное натяжение повышает жесткость системы и дает возможность гибким элементам воспринимать сжатие [41, 65, 66, 91, 114].

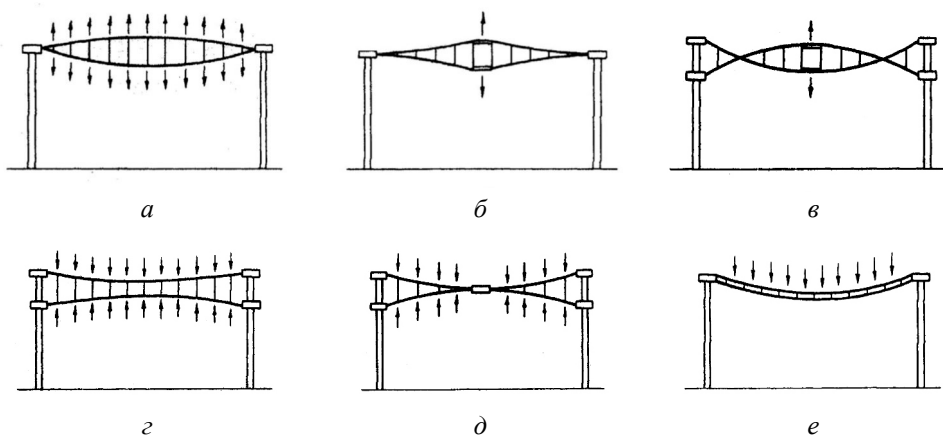


Рис. 1.9. Способы предварительного напряжения висячих покрытий:
a – раздвижкой распорок; *б, в* – раздвижкой центрального барабана;
г, д – стягиванием подвесок; *е* – увеличением собственного веса

Повысить жесткость висячей системы можно также путем увеличения собственного веса покрытия (рис. 1.9, *е*). При этом вес покрытия должен быть таким, чтобы любая временная несимметричная нагрузка не вызывала значительных перемещений и быть больше величины нагрузки, вызываемой отрицательным давлением ветра [84, 113, 152].

Широкое распространение получили висячие конструкции при сооружении спортивных арен. Например, покрытие Олимпийского плавательного бассейна в г. Токио (рис. 1.10), построенного по проекту архитектора К. Танге в 1964 году [83]. Овальной формы сооружение имеет в плане размеры 126×120 м. Покрытие состоит из подвешенных к пилонам двух главных вант, распор от которых через оттяжки передается на специальные фундаменты, а также несущих вант, опирающихся одним концом на главные ванты, а другим – на опорное кольцо. Несущие ванты выполнены из стальных двутавров, а стабилизирующие – из тросов. Кровлей служат стальные листы, уложенные по прогонам.

Ярким примером возможностей висячих систем является «Купол тысячелетия» (рис. 1.11), возведенный в 2000 году в г. Гринвиче (Великобритания). Диаметр купола равен 320 м, а высота в центре – 48 м. Купол накрывает площадь 80000 м^2 . Оболочка купола опирается на вантовую сеть, которая удерживается радиальными вантами, закрепленными на 12 решетчатых мачтах. Высота каждой из мачт составляет 100 м, а общая длина вантовых элементов – около 70 км.



Рис. 1.10. Олимпийский плавательный бассейн в г. Токио



Рис. 1.11. «Купол тысячелетия» в г. Гринвиче

Все чаще в строительстве, в частности при возведении спортивных сооружений, применяются мембранные висячие покрытия. В качестве примера рассмотрим двускатное висячее покрытие Олимпийского велотрека в г. Москве (рис. 1.12). Конструкцию покрытия образуют два «крыла» – мембраны. Каждое «крыло» представляет собой седловидную мембрану на опорном контуре из двух стальных арок, расположенных под разным углом к горизонту. Оба опорных контура «крыльев» пролетом 168 м объединены друг с другом раскосной конструкцией. Внутри каждого опорного контура «крыла» выполнена седловидная постель из взаимно перпендикулярных направляющих – стальных полос и швеллеров с устройством по ней мембранного покрытия.



Рис. 1.12. Олимпийский велотрек в г. Москве

В последнее время наряду с известными решениями для уменьшения деформативности покрытий зданий и сооружений стали применять висячие системы, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости [62, 67, 90, 103, 167, 198]. Примером такого конструктивного решения может служить покрытие Дворца спорта в г. Вильнюсе, пролет которого равен 70 м. Висячие фермы высотой 2,2 м имеют трубчатое сечение и располагаются с шагом 3 м. Нижний пояс усилен тросом диаметром 63 мм, который благодаря предварительному натяжению сжимает ферму. По фермам уложены утепленные армоцементные плиты. Второй пример – покрытие плавательного бас-

сейна в г. Москве для Олимпийских игр (рис. 1.13). Здесь висячие фермы конечной жесткости имеют пролет 104 м и высоту 2,5 м. Сечение верхнего пояса состоит из швеллера № 40, уложенного плашмя, а нижнего пояса – из швеллера № 20, работающего в вертикальной плоскости. Решетка фермы состоит из уголков. Шаг ферм – 4,5 м. По ним, непосредственно по криволинейному верхнему поясу, уложен оцинкованный профилированный настил [65, 103]. Несмотря на большой пролет здания, распор в висячей ферме при полной снеговой нагрузке не превышает 1200 кН. Этого удалось достичь благодаря достаточно большой стреле провисания фермы, достигающей 18 м. Данное решение позволило облегчить не только сами висячие фермы, но и опорный контур, состоящий из железобетонных арок [103, 167].

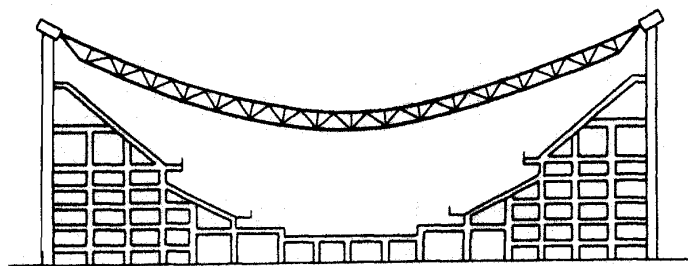


Рис. 1.13. Схема висячего покрытия
Олимпийского плавательного бассейна в г. Москве

Интересными примерами зданий с покрытиями в виде висячих систем повышенной жесткости являются Олимпийский гимнастический зал диаметром 67 м и здание общественных собраний на эллиптическом плане с размерами 110,7×82,9 м в г. Токио, павильон аттракционов размером 240×67 м в г. Сент-Хелнер на острове Джерси (Великобритания), а также возведенный в 2006 году в г. Москве Ледовый дворец спорта (рис. 1.14), провисающее покрытие которого имеет диаметр 100 м и состоит из наружного опорного контура, внутреннего кольца и радиальной системы нитей конечной жесткости.



Рис. 1.14. Ледовый дворец спорта в г. Москве

В последние годы находят также применение в качестве покрытий зданий и сооружений тонколистовые полые мембранные оболочки. В частности можно указать на покрытие Большой арены в г. Санкт-Петербурге, представляющее собой цельную стальную мембрану диаметром 160 м и толщиной 6 мм, подкрепленную радиально направленными ребрами из балок. Интенсивно исследуются, проектируются и строятся мембранные покрытия не только на круглом, но и на прямоугольном плане. Примерами разработок такого типа мембранных оболочек являются покрытия над реконструируемыми главными корпусами московских заводов «Компрессор», «АЗЛК» и «Фрезер» [90, 92].

Следует также отметить интересное направление в исследовании новых конструктивных решений для сооружений различного назначения с использованием составных элементов висячих систем – вант и стержней, представляющее собой разработку трансформирующихся металлических покрытий, в том числе вантово-стержневых оболочек. Как показано в работах [28, 154], применение указанных конструкций позволяет существенно сократить трудозатраты при монтаже и перенести в заводские условия не только изготовление, но и сборку каркаса здания.

Перечисленные тенденции по совершенствованию конструктивных решений и увеличению жесткости висячих систем значительно повышают их эксплуатационные свойства и по этому признаку ставят висячие системы в один ряд с другими современными типами конструкций. Принимая во внимание другие указанные выше достоинства висячих систем, учитывая постоянное увеличение прочностных характеристик выпускаемой стали [9, 103, 198], а также то, что прочность стали растет быстрее ее стоимости [4, 99], можно утверждать, что висячие системы в недалеком будущем получат массовое применение в практике строительства [66, 90, 99, 168, 198], что значительно расширит возможности возведения экономичных, эффективных и изящных большепролетных промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений.

§ 1.2. Обзор теоретических и экспериментальных исследований

История расчета гибкой нити начинается с работ французского инженера Навье, который еще в 30-х годах прошлого века решил уравнение кривой нерастяжимой нити, находящейся под действием вертикальной нагрузки. Впоследствии ученые многих стран посвящали свои работы различным вопросам, связанным с расчетом гибких нитей. Вначале теория гибкой нити развивалась как составная часть теории расчета висячих мостов. Значительный научный вклад внесен в эту теорию Г.П. Передерием, Н.С. Стрелецким, С.А. Цаплиным, С.А. Ильясевичем и другими.

В трудах Г.П. Передерия [116] и Н.С. Стрелецкого [158] были разработаны основы современного мостостроения. Кроме того, Г.П. Передерий собрал и систематизировал весь материал по расчету висячих систем, до этого разобренный и разбросанный по отдельным изданиям и характеризующийся решением тех или иных частных задач при отдельных видах нагружения.

Первый шаг в направлении обобщения решения гибкой нерастяжимой нити был сделан С.А. Цаплиным [176, 177], который предложил использовать для ее расчета принцип Лагранжа. Применяя этот принцип к конечным перемещениям, ему удалось получить только приближенные решения для полных нитей при непрерывной функции нагрузки. Отметим, что поскольку нить является нелинейной системой, то указанное использование принципа возможных перемещений нельзя признать вполне строгим.

С.А. Ильясевич [55] впервые предложил учитывать переменность распора при расчете колебаний мостов. Вклад зарубежных исследователей в решение этой проблемы подробно описан в уже упоминавшейся работе Г.П. Передерия [116] и в монографии В.А. Смирнова [149].

Несколько позже появились работы Р.Н. Мацелинского [95 – 97] и В.К. Качурина [61 – 63]. Р.Н. Мацелинский дал более точное аналитическое решение для гибкой нерастяжимой нити при действии произвольной вертикальной нагрузки, чем полученное С.А. Цаплиным, применив к расчету нити принцип Лагранжа в строгой интерпретации, т.е. к перемещениям бесконечно малым, а не конечным. Показан путь учета упругих деформаций, разработан уточненный метод расчета гибких упругих нитей и дана оценка принятых допущений на точность расчета. Конечное уравнение, описывающее напряженно-деформированное состояние нити, было представлено в виде

$$H^3 + \frac{8EF}{3n^2m^3}H^2 = \frac{DEF}{2lm^3}, \quad (1.1)$$

где EF – жесткость нити на растяжение; H – распор, l – пролет; $n = l/f$; L – длина нити; f – начальная стрела провисания; D – характеристика нагрузки, вычисляемая по формуле

$$D = \int_0^l qMdx = \int_0^l Q^2dx, \quad (1.2)$$

причем M и Q – соответственно изгибающий момент и поперечная сила от заданной нагрузки q в условной прямолинейной балке, которая по всем остальным параметрам аналогична гибкой нити.

Другой метод расчета гибкой упругой нити изложен в монографиях В.К. Качурина [61 – 63]. Исходя из уравнений длин нити, находящейся под

действием начальной и дополнительной нагрузок*, и используя для связи между ними условие неразрывности деформаций, было получено следующее выражение для определения величины распора в нити:

$$H_1^3 + \left(\frac{EF}{2lH_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx - H_0 \right) H_1^2 - \frac{EF}{2l} \int_0^l Q_1^2 dx = 0, \quad (1.3)$$

где H_0 и Q_0 – распор и перерезывающая сила в нити, находящейся под действием начальной нагрузки; H_1 и Q_1 – то же при действии дополнительной нагрузки.

В работах [61–63] рассмотрено влияние на напряженно-деформированное состояние нити смещения опор и изменения температуры, а также разработан метод расчета нити на нагрузку, действующую перпендикулярно плоскости первоначального провисания.

В статье [132] приведены более точные по сравнению с полученными В.К. Качуриным формулы статического расчета гибкой нити.

Отдельным вопросам расчета гибкой упругой нити посвящены работы Л.Г. Дмитриева [40], А.Я. Дривинга [42], А.Ф. Лилеева и Е.Н. Селезневой [88], Г.В. Рекача [130], Е.М. Сидоровича [144], В.А. Смирнова [149], А.Г. Соколова [153], В.С. Щедрова [206], Х.К. Банделя [208], Ф. Бауэра [209], И.И. Енсена [211], З. Соботки [152], Ф. Отто и Ф.К. Шлейера [113, 114] и др. Анализ перечисленных работ показывает, что теория расчета гибкой нити в настоящее время разработана достаточно полно.

Гибкая нить является основным элементом большого класса плоских и пространственных висячих систем.

Вопросы расчета указанных систем на статические нагрузки нашли отражение в трудах А.И. Битюцкого [10], Л.Г. Дмитриева и А.В. Касилова [40, 41], В.К. Качурина [61–63], Э.И. Кузнецова [85], В.Р. Кульбаха [86], А.Ф. Лилеева и Е.Н. Селезневой [88], А.В. Перельмутера [117], И.М. Рабиновича [126], В.В. Трофимовича [169], В.Н. Шимановского [198], Ф.К. Шлейера [217] и др.

Исследованию напряженно-деформированного состояния висячих систем при сейсмических и ветровых воздействиях посвящены работы [11, 12, 30–32, 41, 52, 70, 80, 83, 98, 110, 119, 124, 125, 128, 132, 133, 144, 149, 150, 160] и др.

* Под начальной подразумевается нагрузка, при которой нить провисает с заданной стрелой; под дополнительной – любая другая нагрузка, прикладываемая к нити после приложения начальной нагрузки. Одним из примеров начальной нагрузки может служить собственный вес нити.

Основы теории нитей конечной изгибной жесткости были заложены в трудах К.С. Завриева [46], разработавшего методику расчета стержней, подверженных совместному действию поперечной нагрузки и осевой силы. Значителен также вклад И.Г. Бубнова [17], рассмотревшего задачу продольно-поперечного изгиба стержней, у которых продольное усилие зависит от прогиба стержня. С.П. Тимошенко [161, 163] развил расчет растянуто-изогнутых стержней энергетическим методом, а также дал предложения по приближенному определению величины распора. Следует отметить также труды А.С. Вольмира [24], Н.В. Корноухова [82], Н.К. Снитко [151], а также ряда других авторов.

Дальнейшее развитие теория нитей с изгибной жесткостью получила в трудах В.К. Качурина, Н.М. Кирсанова, Н.С. Москалева, В.Н. Шимановского, Ю.В. Смирнова, Р.Б. Харченко, Г.А. Тартаковского и К.Н. Илленко.

В монографии В.К. Качурина [62] приведено решение для нити конечной жесткости, находящейся под действием произвольной вертикальной нагрузки. В зависимости от способа монтажа висячей системы им получено два вида дифференциальных уравнений изгиба нити:

- для нити, работающей с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{q}{EI} = 0, \quad (1.4)$$

- и для нити, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузки,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{8Hf}{EI^2} + \frac{q}{EI} = 0, \quad (1.5)$$

где EI – жесткость нити на изгиб.

Поскольку при решении уравнений (1.4) и (1.5) не удастся получить распор в явном виде, для его определения предлагается использовать метод последовательных приближений, задаваясь вначале каким-либо значением распора. Это решение весьма трудоемко, потому что приходится делать по 3–5 и более попыток.

В работах Н.М. Кирсанова [67, 68] показана возможность применения для расчета нитей конечной жесткости хорошо разработанной методики расчета висячих мостов. Методика основана на использовании ступенчатой линеаризации исходных нелинейных уравнений, при выводе которых применяются специально построенные с учетом прогибов функции влияния. Выражения последних получены Н.М. Кирсановым для различных случаев расчета висячих систем повышенной жесткости, а для решения нелинейных уравнений предлагается использовать метод последовательных приближений.

Н.С. Москалевым [103] разработан и систематизирован расчет нитей конечной жесткости по методу предельных состояний, причем, расчет на прочность здесь отделен от расчета на деформативность. Принятое исходным для расчета на прочность состояние полного расчетного нагружения позволяет при таком подходе для заданной нагрузки получить непосредственно из условий равновесия предельную геометрию и расчетные усилия в нитях, а также определить действительный запас несущей способности висячей конструкции с учетом геометрической и физической нелинейностей. Деформационный расчет в свою очередь также разделен на расчет упругих и кинематических перемещений, что позволяет по отдельности определить эти два вида деформации. Для нахождения величины распора при действии произвольной вертикальной нагрузки автор использует метод последовательных приближений, принимая в первом приближении распор как для гибкой нити. Уточнение величины распора производится с одновременной корректировкой прогиба нити. Выведен ряд универсальных расчетных зависимостей и произведен анализ влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние нити. Полученные формулы можно эффективно использовать при назначении первоначальных параметров нити – жесткости на растяжение и изгиб, высоты сечения и других.

В.Н. Шимановский, Ю.В. Смирнов и Р.Б. Харченко [64, 198, 199, 202] разработали общую методику расчета нитей конечной жесткости при действии любой поперечной нагрузки произвольного направления и вывели универсальные формулы для определения прогибов и изгибающих моментов в сечениях нити. Предложенная ими методика основана на использовании принятого для гибких упругих нитей [61 – 63] способа раскрытия статической неопределимости системы путем применения условия неразрывности деформаций. Неизвестным в полученных уравнениях выступает безразмерный параметр $u = 0,5l(H/EI)^{1/2}$, учитывающий геометрические, статические и физико-механические характеристики нити. Нахождение параметра u производится из трансцендентного уравнения вида

$$\alpha_1\varphi_1(u) + \alpha_2\varphi_2(u) + \alpha_3\varphi_3(u) + \dots + \alpha_i\varphi_i(u) + \dots + \alpha_n\varphi_n(u) = 0, \quad (1.6)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ – коэффициенты, зависящие от физических и геометрических характеристик нити; $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u), \dots, \varphi_i(u), \dots, \varphi_n(u)$ – трансцендентные функции, аргументом которых является параметр u . При расчете нити учитывается влияние на ее напряженно-деформированное состояние различных воздействий: изменения температуры, смещения и неравномерной осадки опор.

Разработанная Г.А. Тартаковским [160], применительно к трубопроводным переходам, методика расчета нитей конечной жесткости основана на известных дифференциальных зависимостях для растянуто-изогнутых стержней. При определении величины распора жесткость нити на изгиб не учиты-

вается. Изгибающие моменты, действующие в поперечных сечениях нити, вычисляются независимо от распора как вторые производные от уравнения упругой линии нити. Такой подход является не совсем строгим и дает удовлетворительные результаты для ограниченного круга задач.

Иной метод расчета предложил К.Н. Илленко [53]. Он условно расчленил нить конечной жесткости на два компонента: абсолютно гибкую нить и изгибаемый элемент. При этом нагрузка распределяется между нитью и изгибаемым элементом из условия равенства прогибов между ними по всей длине пролета. Напряжения в нити конечной жесткости определяются путем суммирования напряжений в гибкой нити и изгибаемом элементе. Полученные таким путем формулы представляют собой сложные трансцендентные выражения. Следует отметить, что указанная методика, как и методика Г.А. Тартаковского, дает удовлетворительные результаты лишь для ограниченного круга задач.

Некоторым вопросам развития теории расчета нитей конечной жесткости посвящены также работы [51, 106, 146] и других ученых.

Известно, что методы расчета в упругой стадии работы материала не позволяют выявить истинных запасов прочности конструкции. В большинстве случаев пластические деформации приводят к перераспределению и выравниванию напряжений, а следовательно, и к повышению несущей способности сооружения. Указанное обстоятельство может дать особенно значительный эффект при расчете таких нелинейно деформируемых систем, как висячие.

Основы теории пластичности были заложены Сен-Венаном и М. Леви, которые создали один из вариантов теории и вывод основных уравнений плоской деформации, а также А. Хааром, Т. Карманом, Г. Генки, Л. Прандтлем и Р. Мизесом, которые получили важные результаты по основным уравнениям теории пластичности и методам решения плоской задачи.

Значительный вклад в развитие теории пластичности внесен Н.И. Безуховым [6], Дж.Н. Гудьером [35], А.А. Ильюшиным [54], Л.М. Качановым [59], В.В. Новожиловым [111], В.Т. Койтером [79], В. Прагером [123], Л.И. Седовым [141], В.В. Соколовским [155], Ф.Г. Ходжем [35] и др. Ими разработаны новые теории, выполнены их анализ и экспериментальная проверка, развиты приближенные методы расчета и решены отдельные задачи.

Одной из первых работ, посвященных упруго-пластическому расчету пластинок, можно считать монографию И.Г. Бубнова [17], в которой изучалось их деформирование при шарнирном и жестком закреплении концов. Было показано, что появление пластических деформаций в пластинке не исчерпывает ее несущей способности. Кроме того, экспериментально установлено, что жесткое закрепление концов на опорах заметно сказывается на характере деформирования пластинки только в упругой стадии, а за пределом упругости благодаря появлению вблизи опорных сечений пластического шарнира – приближается к работе пластинки с шарнирным закреплением.

Первые работы по исследованию упруго-пластического изгиба балок также базировались на гипотезе пластического шарнира. Эту гипотезу широко использовали Л.М. Беленький [8], И.Л. Дикович [38], Н.Ф. Ершов [43–45], А.Р. Ржаницын [131], Я.Ф. Шаров [179], Б.Г. Нил [109], Ф.Г. Ходж [175], А.Г. Янг [222] и др., применяя два подхода к решению задачи. В первом подходе полагается, что балка работает упруго вплоть до момента образования пластических шарниров. Текучесть же возникает лишь в местах их появления и не распространяется по длине балки. Предельная нагрузка определяется при этом из условия образования пластических шарниров в середине пролета и жестких опорных закреплениях. Второй подход заключается в рассмотрении изгиба жесткопластических балок без учета образования упруго-пластических зон и упругих деформаций материала. Указанные подходы дают возможность определить только предельные нагрузки и прогибы балки в области больших пластических деформаций и не позволяют оценить перемещения, а также характер и величину пластических деформаций балки.

В работах Н.И. Безухова и О.В. Лужина [7], А.С. Борейко [15], Л.А. Галина [26], А.В. Геммерлинга [29], И.Л. Диковича [38], Н.Ф. Ершова [43 – 45], В.А. Постнова [120], В.Н. Серова [142], Н.Н. Складнева [147], В.В. Сорокина [156], В.Е. Спиро [157], А.И. Стрельбицкой [159], Г.В. Тютюнина [170] и др. для исследования напряженно-деформированного состояния балок за пределом упругости используются дифференциальные уравнения упруго-пластического равновесия при изгибе. При такой постановке задачи считается, что по длине балки одновременно существуют участки, находящиеся в различных фазах деформирования – упругой, упруго-пластической с односторонней текучестью и упруго-пластической с двусторонней текучестью. Для каждого из этих участков записываются отдельные дифференциальные уравнения. Поскольку границы упруго-пластических зон, как по длине балки, так и в пределах поперечных сечений, изменяются в процессе нагружения, то их положение определяется из условий равенства внутренних и внешних усилий в сечениях с текучестью.

И.Л. Диковичем [38] указанная задача решена в замкнутом виде. Им получены соотношения между кривизной оси балки и изгибающим моментом для наиболее распространенных типов профилей, а также рассмотрено большое количество частных примеров. Расчетные зависимости получены для балок из идеального упруго-пластического материала и для материала с линейным упрочнением.

В работе [44] для упрощения интегрирования системы уравнений предлагается задавать функцию прогиба. Кроме того, исследование упруго-пластических балок проводилось также энергетическим методом, основанным на использовании обобщенной теоремы Кастильяно [43, 45].

В.Н. Серов [142] решает задачу вариационным методом Лагранжа-Ритца. Функция прогиба балки задается им в виде ряда Фурье. Такой подход приводит к очень громоздкой и сложной системе трансцендентных уравнений. Указывая на данный факт, автор предлагает ограничить количество чле-

нов ряда функции прогибов двумя.

Другой путь приближенного решения задачи избрал В.В. Сорокин [156]. Он использует для определения параметров напряженно-деформированного состояния упруго-пластической балки метод последовательных приближений, задавая в качестве исходного приближения упругое решение. Такой способ достаточно трудоемок и, как отмечает сам автор, не всегда может быть достигнута быстрая сходимость вычислительного процесса, например, для балок с небольшой жесткостью на изгиб.

Различные численные методы для исследования работы балок за пределом упругости использовались в работах [15, 165, 205] и др. При этом в большинстве перечисленных работ на зависимость напряжения – деформация не накладываются какие-либо ограничения и интегралы, входящие в уравнения, могут быть также вычислены численно.

Исследованию нитей конечной жесткости за пределом упругости сравнительно небольшое количество работ. К ним можно отнести И.Г. Людковского и А.Д. Федорова [93], В.Н. Шимановского и А.А. [202] и некоторые другие.

Б.К. Немчинов при расчете нитей конечной жесткости за пределом упругости использует диаграмму напряжение–деформация жесткопластического материала. Как указывалось выше, такой подход дает хорошие результаты только в том случае, если возможно пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими.

И.Г. Людковский и А.Д. Федоров путем экспериментальных исследований установили, что разрушение висячих конструкций чаще всего происходит вследствие образования больших пластических деформаций вблизи опорных закреплений в случае их жесткого опирания. Аналогичное явление в висячих конструкциях может также происходить в местах приложения сосредоточенных нагрузок, как показано в работе [85].

В.Н. Шимановским и А.А. Соколовым разработан численный метод расчета упруго-пластических нитей конечной жесткости, основанный на решении нелинейной системы уравнений методом итераций. Благодаря использованию дискретной математической модели нити удалось отказаться от необходимости определения границ зон текучести и приведенных жесткостных характеристик. Авторами выполнены исследования нитей и показано влияние различных параметров на их напряженно-деформированное состояние.

Для определения истинного характера деформирования конструкции за пределом упругости необходимо знать не только величину действующей нагрузки, но и закон ее изменения, т.е. учитывать историю нагружения. Обычно вследствие разных законов нагружения и разгрузки конструкция после снятия внешних сил не возвращается в исходное состояние и в ней появляются остаточные деформации. Этому вопросу применительно к работе балок и нитей конечной жесткости посвящено небольшое количество работ [38, 44, 45, 129, 202].

И.Л. Дикович [38] решение задачи получил путем составления и решения дифференциального уравнения изгиба, откорректированного для случая разгрузки. Установлены также зависимости между изгибающим моментом и кривизной при разгрузке упруго-пластических балок. Причем при выводе расчетных зависимостей полагалось, что в балке не возникают вторичные пластические деформации. Полученные соотношения были применены автором для определения остаточных прогибов упруго-пластической балки идеального профиля при действии равномерно распределенной нагрузки.

Указанная задача решена Н.Ф. Ершовым [44, 45] в той же постановке, только для балки прямоугольного поперечного сечения. В работе [129] определение остаточных прогибов при разгрузке сводится к численному решению системы линейных уравнений, а у В.Н. Шимановского и А.А. Соколова [202] – к решению системы нелинейных уравнений. При таком подходе круг задач, решение которых может быть получено сравнительно с небольшими затратами машинного времени, расширяется. Но даже здесь возникают свои трудности, основные из которых заключаются в способах линеаризации задачи и обеспечении сходимости итерационных решений.

Как уже отмечалось, повышение прочностных характеристик материалов обусловило широкое применение в строительстве экономических и изящных тонкостенных традиционных и висячих конструкций. Для таких конструкций роль расчетов на устойчивость существенно возрастает, так как их разрушение чаще всего связано с потерей или общей устойчивости, или устойчивости составляющих конструкцию отдельных элементов.

Первые исследования устойчивости балок выполнены Л. Прандтлем и А. Митчеллом, которые рассматривали упругую балку-полоску при действии сосредоточенных сил. Одной из первых публикаций, посвященных вопросам устойчивости, является работа С.П. Тимошенко [163], в которой он с помощью энергетического метода исследует устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки силами, действующими в плоскости ее наибольшей жесткости.

Позднее появляются работы Г. Вагнера [220], К. Вебера [221], П.М. Знаменского [49], Р. Каппуса [212], посвященные отдельным задачам устойчивости тонкостенных стержней. При этом, как указывалось В.З. Власовым [23], для достижения цели использовались далеко не равноценные расчетные предпосылки, приемы и методы решения. В результате были допущены ошибки при выводе уравнений, описывающих процесс потери устойчивости стержней, подверженных действию поперечных нагрузок.

В 30-х годах XX века начинается интенсивная разработка теории устойчивости тонкостенных стержней отечественными учеными. Наиболее общая, глубоко обоснованная теория тонкостенных стержней открытого профиля была разработана В.З. Власовым [23]. Введя гипотезы об отсутствии сдвигов в срединной поверхности и о недеформируемости контура поперечного сечения стержня в своей плоскости, В.З. Власов значительно упростил уравнения теории цилиндрических оболочек, установил общий закон распределения

нормальных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня при совместном изгибе и кручении. Он разработал общий метод определения координат центра изгиба и выявил новые геометрические характеристики сечения. Наряду с вопросами прочности В.З. Власовым была рассмотрена и устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля произвольного поперечного сечения.

Исследования В.З. Власова были положены в основу многих работ, посвященных вопросам прочности и устойчивости тонкостенных стержней. При этом большое внимание уделялось исследованию влияния на устойчивость места расположения нагрузок по высоте сечения балки, характера опорных закреплений и других факторов [16, 20, 24, 39, 58, 151, 207].

Получение точного решения задач устойчивости путем интегрирования дифференциальных уравнений представляет собой довольно трудную проблему. В некоторых простых случаях точное решение удается получить с помощью функций Бесселя, значительная часть которых табулирована. В отдельных случаях решение соответствующих уравнений устойчивости удается получить в бесконечных рядах. Поэтому при рассмотрении описанных выше задач достаточно большое внимание уделяется методам их решения. Эти вопросы нашли отражение в трудах Н.А. Алфутова [2], В.В. Болотина [12], В.М. Броуде [16], Д.В. Бычкова [20], В.З. Власова [23], А.С. Вольмира [24], А.Н. Динника [39], Н.И. Карякина [58], Н.В. Корноухова [82], Р.Р. Матевосяна [94], Я.Г. Пановко и И.И. Губановой [115], И.М. Рабиновича [127], А.Р. Ржаницына [134], А.Ф. Смирнова [148], Н.К. Снитко [151], С.П. Тимошенко [163], Ю.И. Ягна [207] и др.

Задачи определения критического параметра нагрузки для балок, reinforced связями из плоскости изгиба, имеют важное практическое значение. Достаточно отметить, что в современных конструкциях отдельно стоящие балки почти не встречаются. Обычно они связаны между собой системой связей в виде прогонов или плит.

Первая попытка решения указанной задачи принадлежит С.П. Тимошенко [163], который считал, что связи влияют на упругое сопротивление закручиванию поперечных сечений. В дальнейшем эту же задачу рассматривали В.В. Болотин [12], Г.П. Бурчак [19] и А.Р. Ржаницын [134], включившие в расчет угол поворота поперечного сечения как жесткого целого без учета деформаций контура. Как правило, в указанных публикациях оговаривалась постановка задачи, рассматривались простейшие частные случаи работы reinforced балок и только указывались пути получения общего решения.

В последнее время в связи с применением в покрытиях зданий и сооружений висячих ферм с развитым в вертикальной плоскости поперечным сечением, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости, возникла необходимость их расчета на устойчивость плоской формы изгиба. Этой проблеме посвящено незначительное количество работ [50, 174].

Ю.Г. Фридман, используя полученные В.З. Власовым общие дифференциальные уравнения устойчивости тонкостенных стержней, рассмотрел несколько частных случаев загрузки нитей конечной жесткости при различных граничных условиях. С учетом весьма приближенных исходных предположений ему удалось получить расчетные зависимости, связывающие внешнюю нагрузку с жесткостными и геометрическими параметрами поперечного сечения нити, а также с действующим в ней в критическом состоянии распором.

И.М. Зотова, рассматривая равновесие отклоненного состояния бесконечно малого элемента нити, получила систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих устойчивость плоской формы изгиба нитей конечной жесткости. Поскольку точное решение полученной системы уравнений получить не представлялось возможным, она нашла приближенное решение, используя для этого вариационный метод Бубнова-Галеркина. В результате удалось получить весьма сложное нелинейное алгебраическое уравнение пятой степени относительно критического прогиба нити, т.е. прогиба, при котором плоская форма деформации перестает быть устойчивой. Зная значение критического прогиба, без труда можно определить величину внешней нагрузки, вызвавшей этот прогиб.

Как было отмечено выше, в современных конструкциях часто допускаются пластические деформации, а расчет нередко ведется по предельным нагрузкам. Так как в раскрепленных связях в горизонтальной плоскости балках и нитях можно ожидать достижения внешней нагрузкой критического значения ранее предельного, то вопрос об устойчивости плоской формы изгиба в упруго-пластической области приобретает важное значение. Задачи пластического выпучивания не только нитей конечной жесткости, но и балок в наиболее общем виде до настоящего времени точно не решены. В литературе имеются только отдельные работы, в которых рассматриваются решения задач устойчивости плоской формы изгиба балок в пластической области. Например, в работах Л.М. Качанова [59, 60] и Б.Г. Нила [109] задача устойчивости упруго-пластической балки сводится к задаче устойчивости упругой балки с соответствующими приведенными жесткостными характеристиками поперечного сечения. При этом материал балки считается идеальным упруго-пластическим, а поперечное сечение – прямоугольным. Некоторые частные вопросы устойчивости плоской формы изгиба балок за пределом упругости нашли отражение в статьях [13, 210, 214].

В последнее время наряду с классическими аналитическими методами стали широко применять численные методы, ориентированные на максимальное использование вычислительной техники [3, 14, 22]. Вопросам внедрения вычислительных машин в практику исследования, расчета и проектирования строительных конструкций посвящено довольно много работ. В ряде публикаций приведены обзоры исследований, намечаются перспективы дальнейшего развития применения вычислительной техники. К ним относятся труды А.В. Александрова, Б.Я. Лашеникова, Н.Н. Шапошникова и В.А. Смирнова [1], Дж. Аргириса [3], А.Ф. Смирнова [148], А.П. Филина [173] и др.

Численные методы нашли широкое применение в исследованиях таких сильнонелинейных систем, как висячие. В работах [10, 40, 61, 62, 88, 103] определение усилий и перемещений предлагается производить методом последовательных приближений. Л.Г. Дмитриевым [41] был разработан метод многоступенчатого нагружения, идея которого принадлежит В.З. Власову [23]. Суть метода сводится к получению решения системы нелинейных уравнений путем решения рекуррентных систем линейных уравнений при условии, что на каждом шаге расчета нагрузка прикладывается к конструкции достаточно малыми порциями и каждое предыдущее состояние принимается при этом за исходное. При таком подходе к решению задачи одновременно обеспечивается справедливость применяемых общих принципов линейной строительной механики и теории упругости.

К числу методов, нашедших за последние годы применение в инженерной практике, следует отнести метод сеток (метод конечных разностей), вариационно-разностный метод и метод конечных элементов. Все эти методы, используя те или иные приемы, сводят решение континуальной задачи к решению систем уравнений высокого порядка. Из перечисленных методов особенно широкое применение нашел отличающийся своей универсальностью, физической наглядностью и высокой алгоритмичностью метод конечных элементов (МКЭ). Как уже отмечалось, метод основан на идее кусочной аппроксимации непрерывных полей, в результате чего среда представляется дискретной моделью с конечным числом степеней свободы [27, 112]. Идея дискретизации конструкции возникла сначала на основе общих дискретных методов строительной механики, а позднее на основе метода Ритца с использованием принципа минимума потенциальной энергии. Широкие возможности использования методов дискретизации открылись с появлением быстродействующих ЭВМ. В шестидесятые и начале семидесятых годов прошлого века многие ученые посвятили свои труды распространению МКЭ, его развитию и теоретическому обоснованию расчетов конструкций сложных конфигураций. К ним относятся А.В. Александров [1, 148], З.И. Бурман [18], П.М. Варвак [100], В.Н. Гордеев [33], А.С. Городецкий [21], В.Н. Кислокий [70, 73, 75, 139], В.Г. Корнеев [81], Б.Я. Лашеников [1], Ю.И. Немчинов [108], А.В. Перельмутер [33, 117], В.А. Постнов [121, 122], Л.А. Розин [135, 136], А.С. Сахаров [21, 73, 138, 139], А.Г. Угодчиков [101], И.Я. Хархурим [122], Н.И. Шапошников [1, 148], Дж. Аргирис [3], Р. Галлагер [27], Ж. Деклу [36], О. Зенкевич [47], Дж. Оден [112] и др. В эти и последующие годы появился ряд работ по расчету строительных конструкций [3, 18, 21, 148], были выпущены монографии [27, 36, 47, 81, 108, 112, 121, 136, 139], специальные сборники [100, 101] и библиографические справочники [5, 102].

Несмотря на то, что за последние годы появилось довольно много публикаций, посвященных МКЭ и его применению к решению задач механики, в них не нашли отражения все многочисленные аспекты, связанные с быстро развивающимся методом конечных элементов [5, 27, 102, 139]. Например, при применении МКЭ в геометрически нелинейной постановке к расчету ви-

сячих систем несущие элементы последних аппроксимируются, как правило, стержнями, работающими на растяжение-сжатие [48, 112, 136, 139]. При этом жесткостью элементов на изгиб пренебрегают. Вместе с тем, как показано в [61, 62, 67, 103, 199], именно изгибная жесткость элементов может оказать существенное влияние на работу конструкции под нагрузкой. Сведений же о расчете с помощью МКЭ в геометрически нелинейной постановке висячих систем повышенной жесткости, расчетной моделью которых служит нить конечной жесткости, в литературе практически не имеется.

Экспериментальные исследования висячих систем повышенной жесткости весьма малочисленны. Можно указать лишь на исследования нитей конечной жесткости [107, 118, 199 – 201], а также на исследования висячих ферм конечной жесткости [50].

Б.К. Немчиновым [107] были проведены испытания нитей конечной жесткости в виде стальных стержней круглого и квадратного поперечных сечений. При испытаниях варьировалась стрела провисания нитей. Для испытаний, выполненных И.П. Петровым и В.В. Спиридоновым [118], в качестве опытных образцов нитей были приняты трубы. При этом, так же как и ранее, варьировалась стрела провисания нити. Особенностью испытаний было то, что здесь наряду со статическими нагрузками учитывалось влияние внутреннего давления на общее напряженно-деформированное состояние трубы. Наиболее полные испытания нитей конечной жесткости были проведены В.Н. Шимановским, Ю.В. Смирновым и Р.Б. Харченко [199–201]. В качестве образцов нитей применяли трубы, а варьируемыми параметрами были приняты площадь сечения нити и стрела ее провисания. Трубы испытывали на вертикальные и горизонтальные симметричные и несимметричные загрузки при шарнирном и жестком закреплении концов. В результате испытаний получены зависимости прогибов, углов поворота поперечных сечений и действующих в нити изгибающих моментов при различных схемах загрузки и условиях закрепления на опорах, а также оценено влияние различных факторов (жесткость на изгиб, стрела провисания, граничные условия) на напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости.

В работе [50] приведены результаты испытаний фермы конечной жесткости, представляющей собой двухпоясную висячую систему с параллельными поясами. В качестве верхнего пояса фермы использовался стальной канат, а нижний пояс был выполнен из двух уголков, образующих тавровое сечение. Ферма испытывалась на действие различных вертикальных нагрузок при шарнирном и жестком закреплении опорных сечений. В результате испытаний получены зависимости прогибов и усилий в поясах фермы при различных схемах нагружения.

Анализ результатов исследований, проведенный авторами указанных выше работ, в целом показал удовлетворительное совпадение теоретических решений с данными экспериментов. Однако если при действии распределенных симметричных нагрузок погрешность в определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости обычно до-

статочна мала, то при действии сосредоточенных и в особенности несимметричных нагрузок она несколько возрастает. На величине погрешности сказываются и некоторые другие факторы. Например, уменьшение жесткости нити или увеличение стрелы ее провисания также приводит к относительному возрастанию величины погрешности существующих теоретических решений.

§ 1.3. Задачи исследований

Как следует из приведенного обзора, висячие системы повышенной получили достаточно широкое применение при строительстве промышленных и гражданских зданий, а также инженерных сооружений. При этом в зависимости от функционального назначения сооружения основное внимание уделяется той части расчета висячей системы, которая обеспечивает выполнение предъявляемых к конструкции эксплуатационных требований. Например, если при расчете висячего трубопроводного перехода основное внимание уделяется обеспечению несущей способности и жесткости пролетного строения, то при исследовании применяемых в покрытиях зданий и сооружений висячих ферм повышенной жесткости необходимо выполнить расчет и на устойчивость плоской формы изгиба, поскольку потеря устойчивости хотя бы одной фермой может привести к потере эксплуатационных свойств и даже разрушению всего сооружения. Причем соответствующая этому критическая нагрузка может быть существенно меньше предельной, полученной по обычному расчету на прочность для первоначальной формы равновесия.

Работы, посвященные исследованиям прочности и деформативности нитей конечной жесткости, появились в основном в последние четыре десятилетия. В этих работах для определения параметров напряженно-деформированного состояния нити используется метод последовательных приближений, с помощью которого решается или дифференциальное уравнение изгиба, или уравнение неразрывности деформаций, связывающее длины нити в исходном и деформированном состояниях. Вследствие значительной нелинейности задачи расчетные зависимости имеют довольно громоздкий вид, а их решение представляет собой трудоемкий процесс.

Очень мало работ посвящено расчету висячих конструкций повышенной жесткости на устойчивость плоской формы изгиба и еще меньшее – расчету с учетом пластических свойств материала.

Недостаток теоретических разработок и приближенность существующих методов расчета указанных систем сказываются не только при исследовании напряженно-деформированного состояния реальных конструкций, но и при их проектировании. Все это привело к тому, что в процессе эксплуатации в несущих конструкциях ряда сооружений возникли чрезвычайно большие напряжения. Некоторые сооружения, в том числе и ряд уникальных, обрушились [64, 118, 198].

С другой стороны, ошибки проектировщиков даже в таком на первый взгляд достаточно простом вопросе, как отнесение нити к категории абсолютно гибких или конечной жесткости приводят к не меньшим последствиям. Ориентация только на одну величину жесткости нити на изгиб не позволяет решить, по какой из теорий необходимо вести расчет. Как указывается в [62], в подобных случаях к расчету нити следует подходить комплексно.

Проведенный анализ построенных и запроектированных зданий и инженерных сооружений с применением висячих систем показал, что во многих из них были приняты не лучшие конструктивные решения. При реализации проектов не использовалась, к сожалению, большая часть присущих висячим конструкциям потенциальных возможностей, что привело к чрезмерному усложнению схемы сооружения, увеличению его материалоемкости, стоимости и сроков строительства.

Таким образом, актуальным является:

1. Создание уточненной теории расчета прочности и устойчивости несущих элементов висячих систем повышенной жесткости в упругой и пластической стадиях работы материала на произвольные нагрузки и воздействия, а также разработка простых и удобных для практического использования инженерных методов расчета.

2. Совершенствование некоторых висячих систем в области конструктивных форм, способов и приемов монтажа для более полного использования присущих им преимуществ при проектировании и возведении зданий и сооружений.

ГЛАВА 2

ВИСЯЧИЕ СИСТЕМЫ. ТИПЫ И ОСОБЕННОСТИ

История развития большепролетных пространственных висячих систем свидетельствует, что именно русский ученый В.Г. Шухов не только впервые в мировой практике выдвинул идею висячих систем с эффективным использованием работы материала на растяжение, но и успешно ее реализовал при строительстве покрытий многих зданий и сооружений. В последующие годы конструктивные решения и принципы расчета висячих систем постоянно совершенствовались; был накоплен определенный теоретический и практический опыт, разработаны оригинальные проекты их применения при возведении многих промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений. В последнее время в практике отечественного строительства указанные системы не находят должного применения. Этому есть много объективных причин как экономического, так и практического характера. В частности, можно указать на отсутствие надежных методик расчета и достоверных данных о поведении большепролетных пространственных висячих систем с учетом новых, выдвигаемых жизнью, требований к объемно-планировочным решениям, архитектурным формам, технологиям возведения и эксплуатации и т.п.

Однако только с использованием большепролетных пространственных висячих систем удастся создать при минимальном расходе материалов прочные, достаточно жесткие и надежные в эксплуатации системы [41, 65, 91, 113, 188, 193, 198, 215]. Поэтому рассматриваемые системы безоговорочно являются наиболее прогрессивными не только в техническом отношении, но и с экономической точки зрения, поскольку часто позволяют снизить расход материалов на 1 м² площади по сравнению с широко применяемыми в строительстве плоскостными системами [66, 103, 167, 188, 198].

Используемые в практике строительства большепролетные пространственные висячие системы весьма разнообразны по своему назначению, структуре, форме, применяемым материалам, принципам конструирования, технологии изготовления, условиям эксплуатации. Поэтому в данной работе внимание уделено лишь некоторым основным типам большепролетных пространственных висячих систем (как правило, являющихся по характеру своей работы сильнонелинейными системами), нашедшим применение в настоящее время или заслуживающим, по мнению авторов, внимания специалистов.

§ 2.1. Покрытия зданий и сооружений

Развитие производств с гибкой технологией, совершенствование промышленного оборудования, появление агрегатов большой единичной мощности, укрупнение общественных центров и сооружений спортивного назначения, защищенных от атмосферных воздействий, требуют зданий со значи-

тельными объемами, свободными от несущих конструкций, и соответственно эффективных большепролетных покрытий. Такие покрытия должны быть легкими, технологичными в изготовлении и монтаже, допускать применение эффективных типов кровли, подвесных крановых путей, отвечать архитектурно-композиционному замыслу и иметь высокие эксплуатационные качества. Поэтому в строительстве промышленных и гражданских зданий наметилась тенденция к замене традиционных конструктивных решений новыми, отвечающими современным требованиям проектирования. Особый интерес вызывают большепролетные пространственные конструкции, в том числе и висячие покрытия, широко применяемые в различных областях народного хозяйства. Их характерной особенностью является то, что пролетные конструкции работают в основном на растяжение, что позволяет использовать самые прочные стали и перекрывать практически неограниченные пролеты при сравнительно небольшом расходе материала на несущие и ограждающие конструкции.

Висячие покрытия представляют собой пространственные системы, образованные пролетными несущими и ограждающими конструкциями, воспринимающими внешние нагрузки, и опорными конструкциями, работающими во взаимодействии с пролетными и воспринимающими их реакции. Как правило, опорные конструкции являются элементами несущего каркаса здания.

В практике строительства применяются вантовые системы, мембранные покрытия, висячие оболочки и комбинированные системы. В вантовых системах, в отличие от оболочек, не обеспечивается совместная работа ограждающих конструкций с опорным контуром. В комбинированных системах характер работы ограждающих конструкций может быть различным.

Опыт строительства показывает, что наиболее экономичными являются висячие покрытия, опорные конструкции которых работают в основном на сжатие. Естественной формой таких покрытий в плане является круг или правильный многоугольник. Такое очертание обеспечивает также наибольшую несущую способность пролетных конструкций при прочих равных условиях, поэтому покрытия рассматриваемого типа в общем объеме возведенных зданий и сооружений с висячими покрытиями составляют значительно большую часть по сравнению с другими типами покрытий. Однако даже в круглых в плане зданиях на опорные конструкции уходит около 50 % от расхода материала на покрытие. Поэтому снижение материалоемкости опорных конструкций в зданиях с висячими покрытиями является одной из важных задач.

Отказ от круглого плана и переход к строительству зданий с традиционным прямоугольным планом связан, как правило, с дополнительным расходом материала. При выборе рациональной конструкции покрытия с прямоугольным планом дополнительный расход материала можно свести к минимуму.

При проектировании висячих покрытий очень важен выбор геометрии поверхности покрытия. Получили распространение покрытия с положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизной. Наряду с простыми поверхностями, описываемыми элементарными функциями, применяются также различного рода составные поверхности, имеющие переломы по линиям сопряжения простых поверхностей. Характер поверхности покрытия в значительной степени определяет его деформативность, применение того или иного метода напряжения вантовой сети и пр.

Не менее важен также выбор схемы и структуры вантовой сети. Применяются регулярные (закон образования структуры, сети которой одинаковы по всей поверхности) и нерегулярные вантовые сети, образованные одним или несколькими семействами несущих элементов (гибких нитей, нитей конечной жесткости и т.п.). Однослойные сети из одного семейства вант (параллельных в прямоугольных в плане зданиях и радиальных в круглых) вследствие большой кинематической податливости применяются, как правило, в виде арматуры висячих оболочек. Двухслойные сети, образованные пересечением двух семейств кривых, применяются в основном для вантовых систем. Наибольшее распространение получили сети из одного и двух семейств вант. Сети из трех и более семейств вант встречаются реже.

Пролетная конструкция висячих покрытий выполняется, за редким исключением, предварительно напряженной. Усилия предварительного напряжения могут передаваться на опорный контур, а также на конструкции ограждения.

Вантовые сети проектируют из стальных канатов, пучков высокопрочной проволоки, арматурных стержней, а также из листового и профильного металла.

Одним из условий, оказывающих определяющее влияние на выбор типа конструкций покрытий, является удовлетворение функциональных особенностей зданий. Если для гражданских зданий этим требованиям соответствуют многие типы висячих покрытий, то для промышленных зданий средних и больших пролетов – в основном покрытия с разомкнутым опорным контуром (цилиндрические оболочки, подвесные и комбинированные). Для зданий пролетом 24...48 м и более конкурентоспособными являются покрытия с замкнутым опорным контуром, не работающим на изгиб, а также покрытия с внешне безраспорной пролетной частью.

В зависимости от назначения здания с вантовыми покрытиями могут иметь самые разнообразные очертания в плане: прямоугольное, квадратное, овальное, многоугольное, круглое, комбинированное (состоящее из прямолинейных и криволинейных участков) и др. В большом диапазоне могут изменяться пролеты и высота отдельных частей зданий, радиусы кривизны поверхности и другие параметры.

Ниже приведены некоторые данные, которыми руководствуются при выборе отдельных параметров зданий с вантовыми покрытиями [41, 103].

Размер пролета. В отличие от балочных конструкций в несущих элементах вантовых систем усилие (распор) увеличивается пропорционально величине пролета. Однако если не ограничивать высоту опорных конструкций и соответствующим образом подбирать стрелу провисания несущих элементов, можно добиться того, что распор в них не будет расти с увеличением пролета. Поэтому в зданиях с вантовыми покрытиями величина пролета не сказывается так существенно на материалоемкости пролетных конструкций, как в балочных системах.

Расположение опор. В прямоугольных однопролетных зданиях опоры, как правило, располагаются по периметру здания, а в многопролетных – линейно (строчечно) и в шахматном порядке (в зависимости от типа вантовой сети). В овальных, многоугольных и круглых зданиях опоры могут располагаться как по периметру зданий, так и в центре. Покрытия с одной центральной опорой (шатрового типа) позволяют вдвое уменьшить пролет и заметно снизить расход материалов как на ванты, так и на внутренний и наружный опорные контуры. Особенно целесообразно применять такие решения при строительстве зданий в районах с просадочными грунтами, поскольку можно всю нагрузку от покрытия передать на центральную опору и не бояться просадок опор, поддерживающих наружный опорный контур.

Встречаются покрытия с овальным, многоугольным и круглым планами с опорой не в центре покрытия, с двумя и большим числом опор, расположенных внутри здания. Однако такие решения, как правило, менее эффективны, особенно в части трудоемкости работ.

Форма и число опорных контуров. Прямоугольные однопролетные здания выполняются в основном с замкнутым опорным контуром. Реже встречаются здания с разомкнутым опорным контуром. В последнее время применяются также решения с внутренними распорками, расположенными по диагоналям здания. В вертикальной плоскости замкнутый опорный контур выполняется прямолинейным, многоугольным или криволинейным. В последних двух случаях очертание опорного контура принимается в соответствии с кривой провисания несущей пролетной конструкции. В однопролетных зданиях с разомкнутым опорным контуром последний выполняется прямолинейным или с небольшим уклоном, обеспечивающим при одной и той же стреле провисания несущих элементов сток воды с покрытия.

Прямоугольные многопролетные, особенно промышленные, здания чаще всего проектируются с разомкнутым опорным контуром. Реже применяются решения с замкнутым опорным контуром, расположенным по периметру отдельных ячеек – в зданиях с крупной сеткой колонн: 24×24 , 24×36 , 36×36 и более.

В овальных покрытиях опорный контур может быть из одного или нескольких аркообразных элементов различного очертания в плане и профиле. При увеличении числа аркообразных элементов они в пределе образуют замкнутый кольцевой опорный контур.

Одно- и многопролетные прямоугольные и круглые здания с жесткими висячими оболочками, как правило, устраиваются с одним опорным контуром. В легких предварительно напряженных вантовых системах эффективными могут оказаться решения с двумя опорными контурами. В ряде случаев находят применение многокольцевые системы, в которых каждое последующее за наружным опорным контуром кольцо в виде циклической рамы опирается на нижний ярус вант и воспринимает распор от их верхнего яруса.

Рассмотрим некоторые типы поверхностей вантовых покрытий, образованных из одного или нескольких семейств несущих элементов, для зданий с прямоугольным планом.

Одной из наиболее распространенных форм поверхностей является поверхность, образованная кривой провисания несущих элементов. Покрытия с такой поверхностью называются цилиндрическими. Эти покрытия образуются системой параллельных в плане вант.

В вантово-балочных системах (рис. 2.1, *а, б, в*) по вантам укладывают прямолинейные, двухскатные и криволинейные балки, а по ним – легкие ограждающие конструкции. Поскольку при больших пролетах отвод воды с кровли вдоль пролета затруднен, применяются в основном решения с двухскатными или криволинейными балками.

Покрытия в виде оболочек состоят из параллельных вант (встречаются также системы, в которых ванты расходятся под некоторым углом) и омоноличенных с ними железобетонных плит (рис. 2.1, *г*). Для повышения трещиностойкости оболочки выполняют предварительно напряженными. В таких покрытиях можно несколько уменьшить расход металла на ванты (на 10...15 %), если изготавливать плиты с выпущенной за пределы поперечных ребер, расположенных параллельно вантам, арматурой, а затем сварить выпуски из смежных плит между собой, а выпуски из крайних приварить к опорному контуру.

С целью уменьшения деформативности пролетную конструкцию в покрытиях цилиндрического типа выполняют в виде висячих ферм конечной жесткости, как, например, покрытие Олимпийского плавательного бассейна в г. Москве (рис. 2.1, *е*) [103, 167].

В многопролетных зданиях с вантовыми покрытиями, особенно с легким кровельным ограждением, применяются различного рода двухпоясные системы с решеткой в виде вертикальных растяжек или стоек, а также фермы с треугольной решеткой (рис. 2.1, *ж, з, и, к*). При сравнительно небольших пролетах целесообразно применять конструкции со сжатыми стойками (в виде рыбок), при средних и больших пролетах – решетку, состоящую из сжатых стоек и растяжек, и для всего диапазона пролетов – треугольную решетку.

Многие здания с прямоугольным планом строятся с так называемыми подвесными покрытиями, несущие элементы которых находятся над поверхностью кровли. В качестве несущей системы в подвесных покрытиях применяются радиально-вантовые системы, одно- и двухцепные системы с различной решеткой, расположенные вдоль или поперек пролета здания, и др. (рис. 2.1, *л, м*) Поверхность кровли в таких покрытиях может быть плоской, одно-, двух- или четырехскатной.

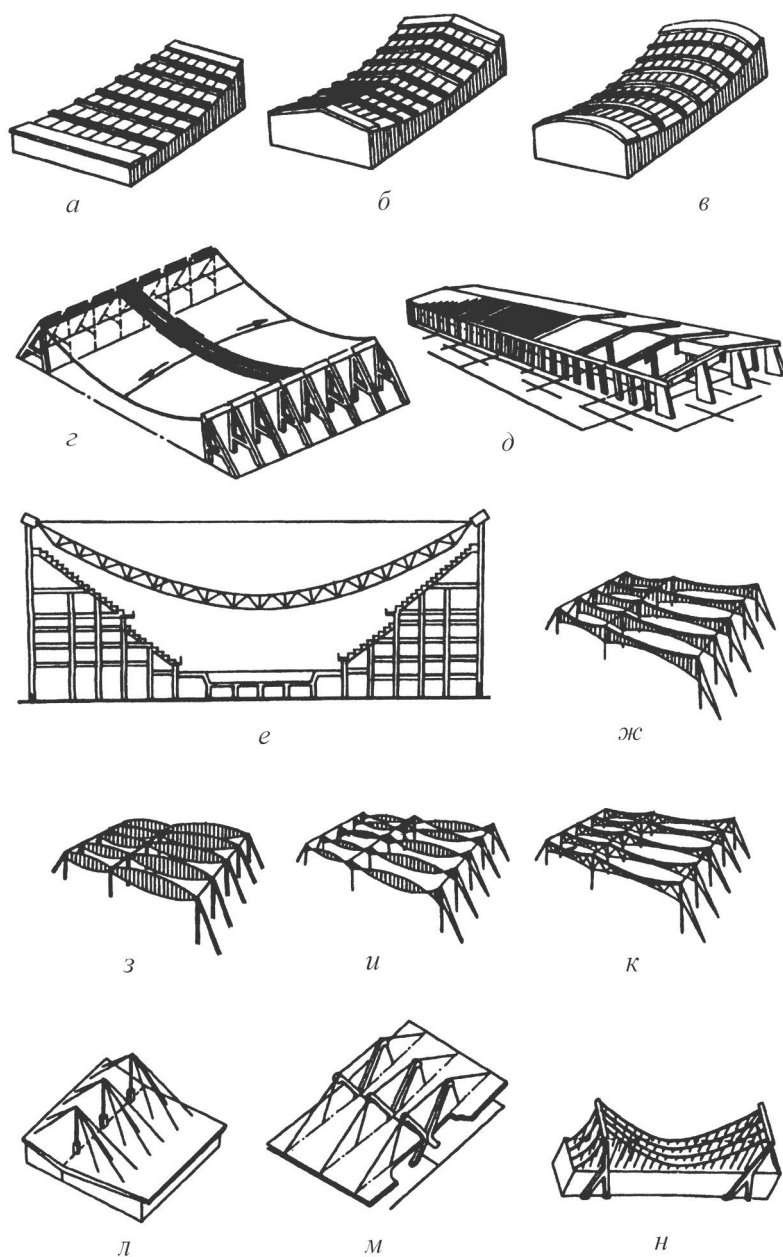


Рис. 2.1. Схемы висячих покрытий на прямоугольном плане:
 а–в – из свободно провисающих вант и балок; г, д – из свободно провисающих и предварительно напряженных вант; е – с висячими фермами конечной жесткости; ж–к – с двухпоясными вантовыми фермами; л, м, н – с подвесными кровлями

Представляется перспективной конструкция покрытия, показанная на рис. 2.2, *ж*. Здесь вантовая сеть выполняется из параллельных и радиальных вант. Параллельные ванты крепятся к затяжкам, которые поддерживаются в проектном положении выходящими из углов опорного контура радиальными вантами. Такая вантовая сеть целесообразна и для многопролетных зданий с разомкнутым опорным контуром, так как она позволяет увеличить расстояние между анкерными опорами и при установке на промежуточные колонны ферм пролетом, равным расстоянию между анкерными опорами, дает возможность образовать крупную сетку колонн. В промышленных зданиях благодаря этому можно более рационально разместить производственное оборудование и на 6...15 % увеличить мощность предприятий без повышения стоимости строительства [66].

С точки зрения удовлетворения требований, предъявляемых к покрытиям промышленных зданий, достаточно эффективно решение, приведенное на рис. 2.2, *з*. Пролетная конструкция такого покрытия выполняется из параллельных сторон опорного контура ферм, объединяемых на монтаже в замкнутые прямоугольники. Фермы поддерживаются в проектном положении диагональными вантами. На верхний пояс ферм укладываются плиты покрытия, образующие жесткий диск, препятствующий потере устойчивости опорного контура в горизонтальной плоскости. Такие покрытия допускают устройство малоуклонной кровли и подвесного транспорта. Их можно возводить при строительстве как однопролетных, так и многопролетных зданий.

Положив в основу описанную выше конструкцию покрытия, можно, удлинив фермы, образующие внутренний опорный контур, до наружного контура и установив на них дополнительные фермы, получить другое решение пролетной части (рис. 2.2, *и*). Если при этом до прикрепления концов ферм к наружному опорному контуру пригрузить последние, то можно существенно облегчить как фермы, так и наружный опорный контур путем перераспределения усилий. Наружный опорный контур в таких покрытиях будет работать как балка на упруго-податливых опорах, причем от действия реактивных усилий концов ферм он будет приподниматься вверх.

Во многих зданиях с замкнутым опорным контуром, как и в большепролетных многопролетных зданиях с разомкнутым опорным контуром, целесообразно применять покрытия с легкими ограждающими конструкциями [194]. Для уменьшения деформаций от временных нагрузок такие покрытия необходимо проектировать со стабилизированной формой поверхности. Наиболее просто вопросы стабилизации поверхности покрытий решаются при применении двухпоясных вантовых систем. Одна из таких систем покрытия показана рис. 2.2, *к*. Верхний и нижний пояса ферм покрытия крепятся к распорке в пределах опорного контура. Распорку одним концом присоединяют к канату-подбору, закрепленному в углах опорного контура, а другим опирают на опорный контур через катки или прокладки из антифрикционного материала (например, фторопласта). При этом обеспечивается отдельная передача составляющих опорной реакции вантовой фермы: вертикальной – на колонны,

поддерживающие опорный контур, горизонтальной – на канат-подбор. Благодаря этому на контур не передается поперечная нагрузка и он работает в основном на сжатие.

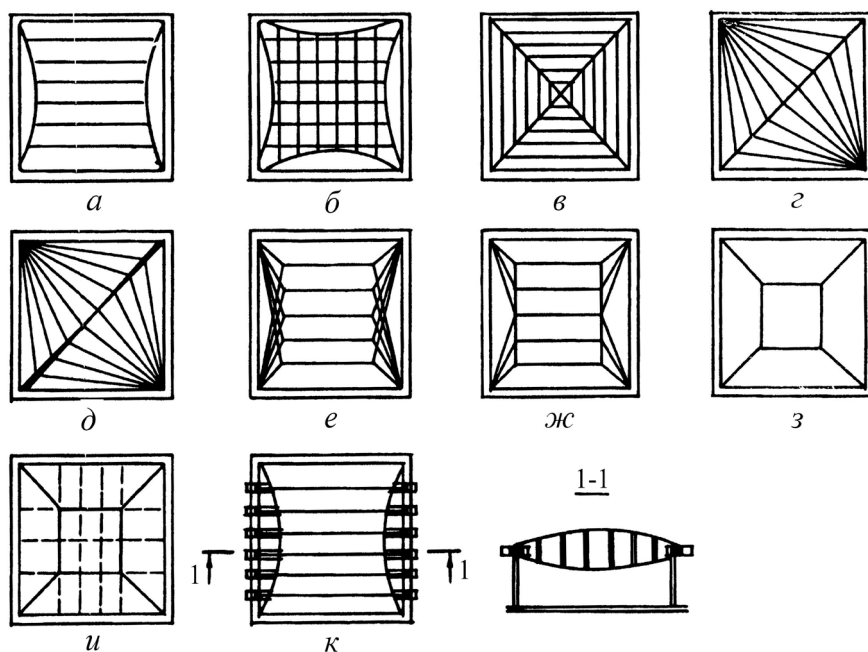


Рис. 2.2. Схемы вантовых сетей в прямоугольных зданиях с замкнутым опорным контуром:

а, б – с канатами-подборами; *в* – с двумя диагональными элементами; *г* – с одним диагональным элементом; *д* – с одним диагональным элементом переменного сечения по длине; *е* – с оттяжками; *ж* – с затяжками; *з* – с дополнительным внутренним опорным контуром; *и* – с дополнительным внутренним опорным контуром и фермами; *к* – с распорками и канатами и канатами-подборами

Рассмотрим некоторые типы поверхностей вантовых покрытий зданий криволинейного очертания в плане [113, 152]. Покрытия таких зданий чаще всего имеют сложную поверхность, образованную двумя и более семействами вант (рис. 2.3). Обычно поверхности таких покрытий не являются кусочно-гладкими. В основе отдельных элементарных ячеек, составляющих поверхность покрытия, лежит, как правило, поверхность гиперболического параболоида. В таких покрытиях вантовая сеть выполняется предварительно напряженной. В качестве ограждающих конструкций применяется профилированный настил, металлические или алюминиевые панели с минераловатным утеплителем.

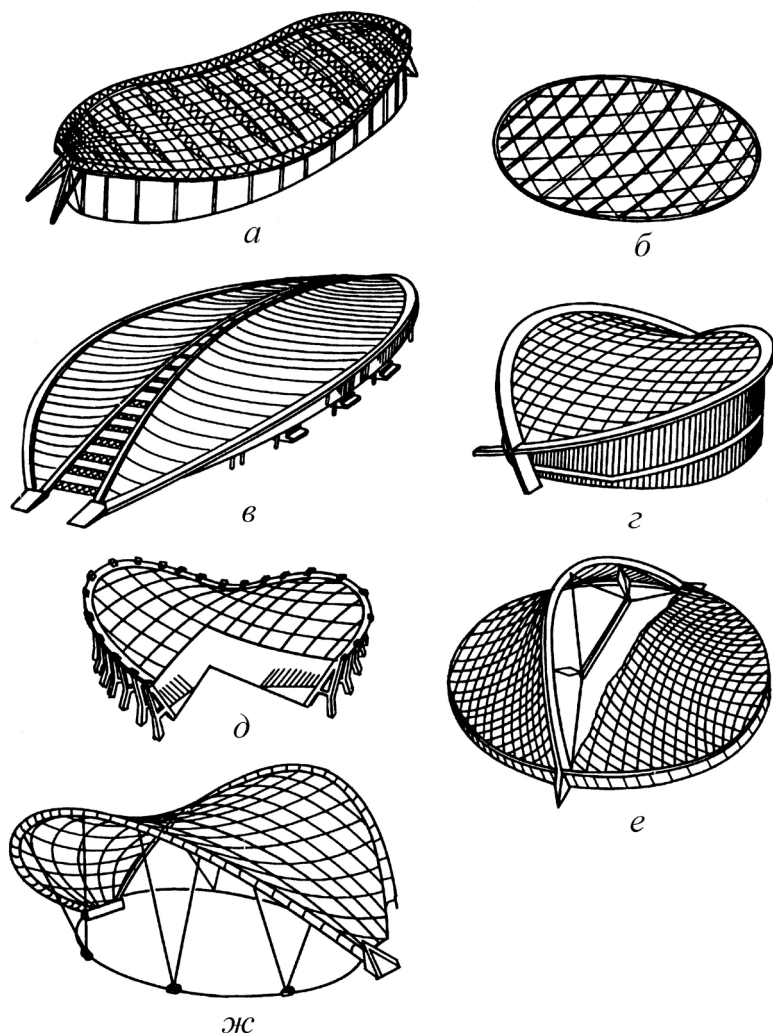


Рис. 2.3. Схемы висячих покрытий зданий криволинейного очертания в плане: *а, б* – с жесткими поперечными элементами и балками; *в–жс* – то же, седловидные

Из всех видов висячих покрытий наибольшее распространение получили покрытия с круглым планом, особенно шатрового типа [65, 84].

В построенных покрытиях вантовая сеть принята одно- или двухслойной, как правило, радиальной и радиально-кольцевой систем (рис. 2.4). В последние годы нашли применение также мембранные покрытия, в том числе из алюминиевых переплетенных лент (рис. 2.4, в). Ортогональная и особенно косоугольная вантовые сети не получили широкого распространения. Объясняется это тем, что при одних и тех же исходных данных расход материала на

ванты на единицу площади горизонтальной проекции покрытия с радиальной сетью в 1,5 раза меньше, чем с ортогональной. Косоугольная сеть по эффективности несколько уступает ортогональной.

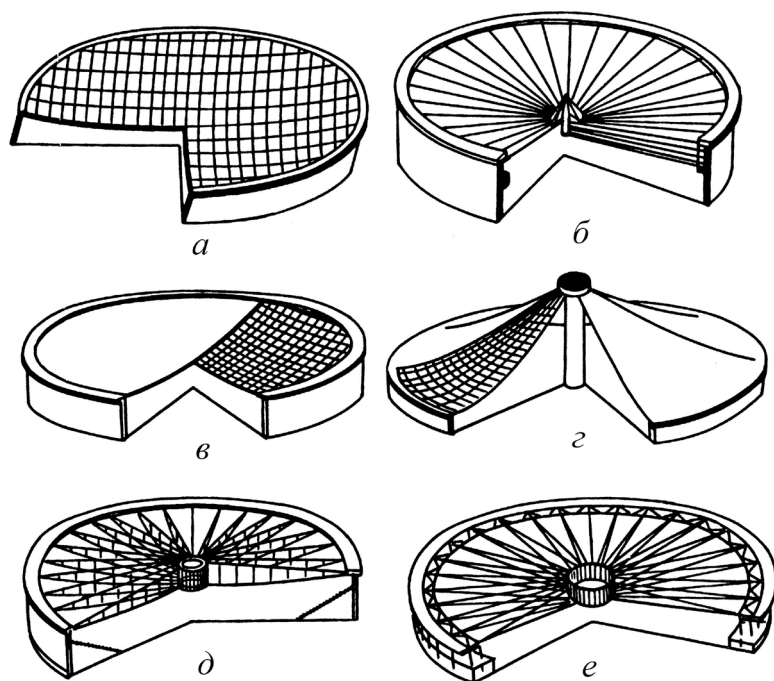


Рис. 2.4. Схемы висячих покрытий на круглом плане:
а–г – однослойные; д, е – двухслойные

С целью уменьшения числа типоразмеров ограждающих конструкций была предложена радиально-вантовая система с дополнительными параллельными вантами, расположенными на одинаковом расстоянии (рис. 2.5, а). В таких покрытиях стрелы провисания дополнительных вант подбираются так, чтобы поверхность покрытия опиралась по кривой провисания основных вант [198].

Уменьшить число типоразмеров плит можно также установив через каждую пару радиальных вант в середине пролета распорки длиной, равной шагу вант у наружного опорного контура (рис. 2.5, б).

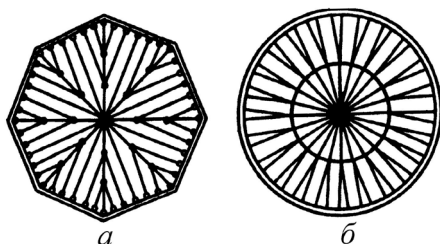


Рис. 2.5. Схемы радиально-вантовых сетей
с уменьшенным числом типоразмеров ограждающих конструкций:
а – с дополнительными параллельными вантами;
б – с дополнительными распорками в середине пролета

В большинстве выполненных покрытий шатрового типа угол наклона вант к горизонтальной плоскости в месте примыкания их к наружному опорному контуру принят равным нулю. При таком примыкании вант к опорному контуру вертикальная нагрузка от покрытия передается только на внутреннюю опору. Для передачи части вертикальной нагрузки на наружные колонны, а также для уменьшения высоты внутренней опоры геометрию покрытия принимают такой, чтобы ванты примыкали к наружному опорному контуру под углом к горизонту, меньшим нуля.

Анализ работы рассмотренных выше вантовых сетей как для круглых покрытий, так и для покрытий с другими планами показал, что при нагружении покрытия произвольной вертикальной нагрузкой усилия в вантах неодинаковы, что приводит к снижению технико-экономических показателей не только для собственно вантовых сетей, но и конструкций, воспринимающих распор вант. В этой связи представляются перспективными равнопрочные сети, в основу которых положено примыкание к узлу трех вант под углом 120° . На этой основе уже разработаны шестиугольные и другие структуры вантовых сетей.

Как известно, многие вантовые системы обладают большой кинематической податливостью. Стабилизация поверхности таких систем заключается в сведении кинематических перемещений до минимума. Для очень легких вантовых покрытий эта, казалось бы, простая задача перерастает в проблему первостепенной важности. Пока не существует решений, обеспечивающих возможность применения ограждающих конструкций массой 5...10 кг и удовлетворяющих требованиям, предъявляемым к покрытиям в части деформативности, возможности подвески различного рода оборудования и т.п. Сравнительно тяжелые комбинированные, подвесные и другие типы покрытий, состоящих из балок, ферм и железобетонных плит, как правило, не нуждаются в стабилизации поверхности. Она обеспечивается массой настила и его омоноличивания. Стабилизация легких покрытий обеспечивается предварительным напряжением несущих элементов – вант, ферм и т.п. последовательно или одновременно.

В зависимости от конструкции пролетной части покрытия применяются различные методы напряжения несущих элементов. Предварительное напряжение однопоясных радиально-вантовых покрытий на круглом плане, цилиндрических покрытий на прямоугольном плане и некоторых других типов покрытий в виде железобетонных оболочек может осуществляться: монтажной пригрузкой, укладываемой непосредственно на плиты покрытия или подвешиваемой к вантам; с помощью различного рода оттяжек, прикрепленных к вантам и полу или фундаментам здания; установкой временных натягающих вант с раздвижными распорками (по типу двухпоясных систем); натяжением домкратов и другими способами.

Достаточно просто осуществляется напряжение несущих элементов в однопоясных покрытиях с ортогональной сетью вант на поверхности гиперболоидического параболоида, наиболее часто – домкратами, реже – поворотом с небольшим опусканием (вращательно-поступательным движением) опорных конструкций (арок, распорок и т.п.). В последнем случае необходимо очень точно определить геометрию всех элементов вантовой сети, иначе одни ванты могут оказаться ненапряженными, а другие – перенапряженными, что существенно скажется на работе опорных конструкций. Натяжение вант домкратами не требует столь высокой точности определения их геометрии, хотя оно и не очень индустриально, особенно когда выполняется ступенями путем последовательного обхода диаметрально противоположных вант (во избежание появления больших изгибающих моментов в опорном контуре).

Натяжение двухпоясных покрытий из вантовых ферм выполняется путем стягивания поясов вертикальными или наклонными тросами решетки или раздвижки поясов сжатыми стойками. Процесс натяжения не вызывает каких-либо затруднений, так как для обеспечения необходимых усилий в поясах ферм достаточно создать сравнительно небольшие усилия в элементах решетки. Предварительное напряжение придает поясам ферм форму, подобную форме веревочного многоугольника от равномерно распределенной нагрузки.

В двухпоясных радиально-вантовых покрытиях предварительное напряжение поясов ферм может осуществляться путем раздвижки колец центрального барабана. При этом, как указывалось выше, к исходной геометрии вантовых ферм должны предъявляться более жесткие требования.

Предварительное напряжение вантовых сетей зависит от конструкции пролетной части, характера и интенсивности временной нагрузки, требований к деформативности покрытия и других факторов и определяется технико-экономическими расчетами.

В зависимости от усилия натяжение вант может осуществляться динамометрическими ключами, различного рода натяжными устройствами, вантовыми и гидравлическими домкратами. Для контроля усилий натяжения могут применяться приборы, основанные на динамическом, а также статическом методах контроля.

§ 2.2. Мембранные конструкции

Мембранная система представляет собой пространственную конструкцию из тонкого металлического листа, закрепленного на контуре. Пролетная конструкция (мембрана) может быть подкреплена системой элементов, используемых для монтажа оболочки, ее стабилизации и т.п. Цепные усилия с пролетной конструкции воспринимаются опорным контуром.

Мембранные системы имеют некоторые преимущества, поскольку именно в них возможно наиболее полное использование несущей способности материала. Мембрана имеет минимальную толщину так как работает в основном на растяжение в двух направлениях без опасности потери устойчивости. Цепные усилия с пролетной конструкции воспринимаются одним элементом – опорным контуром, работающим совместно с мембраной, которая в большинстве случаев обеспечивает его устойчивость. Мембрана совмещает одновременно несущие и ограждающие функции. Даже в том случае, когда применяется обычная кровля, не требуются панели и другие промежуточные элементы, не участвующие в пространственной работе системы. Все это обеспечивает минимальный расход материалов на мембранные конструкции [103].

Существенное уменьшение металлоемкости мембранных систем, относительная простота их монтажа, применение большеразмерных рулонных полотнищ заводского изготовления предопределяют снижение трудоемкости и стоимости их возведения, сокращение сроков строительства.

Тонколистовыми конструкциями можно перекрыть без промежуточных опор практически любые требуемые пролеты, причем с увеличением пролета экономическая целесообразность применения таких конструкций все более возрастает.

Мембранные покрытия, как правило, имеют минимальную строительную высоту, что уменьшает расход материалов на стеновое ограждение и снижает эксплуатационные расходы на отопление и вентиляцию здания.

Мембранные системы благодаря их малой массе, транспортабельности и технологичности монтажа имеют преимущества при строительстве в труднодоступных и северных районах, а также в районах с повышенной сейсмичностью. Они обладают также большим разнообразием форм и предоставляют широкие возможности для практического воплощения интересных архитектурных замыслов.

В то же время при проектировании конструкций мембранных покрытий возникает необходимость в комплексном решении многих сложных проблем, в том числе правильного выбора формы поверхности мембраны с учетом очертания конструкции в плане и способа стабилизации деформативной пролетной конструкции; рационального конструирования опорного контура, воспринимающего значительные цепные усилия; гидро- и теплоизоляции и водоотвода; противокоррозионной защиты мембраны и т.п.

С использованием мембранных покрытий построены различные здания, в том числе крупнейшие в Европе крытый стадион «Олимпийский», универсальный спортивный зал в г. Санкт-Петербурге, велотрек «Крылатское» и дворец спорта «Измайлово» в г. Москве. С применением тонкого металлического листа выполнены покрытия некоторых зданий меньших пролетов [92, 167, 168, 190].

Мембранные конструкции применяют не только в уникальных сооружениях, но и в зданиях массового строительства, таких как киноконцертные и спортивные залы универсального назначения, магазины, крытые рынки и т.п. Мембранные системы могут быть использованы в покрытиях промышленных зданий с укрупненной сеткой колонн, складских помещений, гаражей, ангаров. Применение тонколистовых покрытий больших пролетов позволяет создавать принципиально новые типы промышленных зданий, в том числе оборудованных напольным транспортом, обладающих высокой планировочно-конструктивной универсальностью. Мембранные системы широко применяются в реконструируемых промышленных зданиях, когда требуется замена покрытий, исчерпавших свой амортизационный срок. Рационально применение тонколистовых конструкций в покрытиях резервуаров, отстойников, шламбассейнов и сгустителей [67, 188, 193].

Мембранные покрытия по конструктивным особенностям разделяются на мембранные сплошные оболочки, ленточные покрытия и двухъярусные комбинированные тонколистовые покрытия.

Мембранные оболочки выполняют из отдельных тонколистовых полотен, объединяемых на монтаже в сплошную пространственную систему. Ими можно перекрывать здания с разнообразными очертаниями в плане – треугольник, прямоугольник, многоугольник, круг, овал, эллипс, а также с более сложным комбинированным очертанием. Мембранные оболочки могут иметь различную форму поверхности: цилиндрические и конические с поверхностью нулевой гауссовой кривизны; сферические, в виде эллиптического параболоида или поверхности вращения с вертикальной осью – с поверхностью положительной гауссовой кривизны; седловидные, в том числе в виде гиперболического параболоида, шатровые – с поверхностью отрицательной гауссовой кривизны; составные поверхности в виде комбинаций оболочек с одинаковыми или различными геометрическими свойствами поверхности.

Ленточные покрытия (из переплетенных лент, двухслойные седловидные) монтируют из отдельных, не соединяемых одна с другой лент. По статической схеме они приближаются к работающим дискретно вантовым системам. Покрытия из переплетенных лент имеют провисающую поверхность положительной гауссовой кривизны и предназначены для зданий с круговым или овальным планом. Такие же покрытия с подкрепляющей системой имеют провисающую составную поверхность и предназначены для зданий, многоугольных в плане (треугольник, прямоугольник и т.д.). Двухслойные ленточные покрытия имеют седловидную форму поверхности и предназначены для зданий с прямоугольным, овальным или более сложным (составным) планом.

К двухпоясным покрытиям относятся комбинированные системы, у которых один или два пояса пролетной конструкции выполнены в виде мембраны. Пояса объединяют один с другим распорками или решеткой. Поверхность мембран может быть выпуклой или вогнутой.

Мембранные системы на прямоугольном плане могут быть применены в реконструируемых промышленных сооружениях при замене конструкций покрытий над зданием.

Материалы для мембранных конструкций. Для изготовления пролетной конструкции мембранных систем применяют углеродистые, низколегированные, в особых случаях нержавеющие стали и алюминиевые сплавы, выпускаемые в виде листов или рулонов. Выбор материала определяется конкретными условиями эксплуатации мембранных конструкций, их изготовления, монтажа, экономической целесообразностью. Поверхности металлических мембран должны быть защищены от атмосферной и контактной коррозии с учетом противокоррозионной защиты поверхности мембран со стороны кровли.

Для пролетной конструкции мембранных систем используются полотна, сворачиваемые в рулоны. Длина полотна принимается равной всему пролету или для оболочек с круглым и овальным планом, имеющим кольцо, – половине пролета. Ширина полотна принимается равной 6...18 м и ограничивается габаритными размерами и массой рулона, производственными возможностями завода-изготовителя.

Рулонные полотна толщиной 3 мм и выше изготавливают из отдельных листов размерами 6,0×1,5 м, свариваемых встык на специальных высококомеханизированных установках. Стыковые сварные швы должны обладать той же прочностью, что и основной металл.

Полотна толщиной менее 3 мм следует изготавливать из рулонных лент, соединяемых сваркой. Ленточные покрытия выполняют из рулонных лент, поставляемых металлургической промышленностью, с обрезными кромками без какой-либо заводской переделки.

Опорный контур мембранных покрытий проектируют из сборного, сборно-монолитного или монолитного железобетона, в том числе из трубобетона. В отдельных случаях (сложная геометрия опорного контура, сжатые сроки возведения и т.п.) в качестве материала опорного контура мембранных покрытий применяется металл.

Стальные мембраны допускаются к эксплуатации без специальных мероприятий по огнезащите.

Пролетная конструкция. По способу формообразования мембранные оболочки делятся на покрытия с первоначально заданной стрелой провисания и первоначально плоские покрытия. Покрытия с заданной стрелой провисания монтируют навесным способом укладкой на монтажные элементы («постель») отдельных полотен с последующим объединением их в пространственную мембрану. Геометрия элементов «постели» определяет начальную форму поверхности мембранной оболочки и должна соответствовать проектной, что достигается регулировкой длины элементов «постели».

Первоначально плоские мембранные покрытия, собираемые на спланированной площадке или подмостях, после подъема или раскруживания провисают под действием собственного веса. Форма образующейся при этом поверхности и стрела провисания покрытия зависят от избыточной площади мембраны, возникающей из-за сварочных деформаций; начальных погибей, оставшихся после правки листов или рулонов; остаточных деформаций, появляющихся в результате сворачивания и разворачивания рулона и т.п.; податливости опорного контура; упругих деформаций мембраны. Начальная стрела провисания принимается не менее $1/60$ меньшей стороны или диаметра покрытия.

Пролетная конструкция мембранных покрытий выполняется из полотнищ максимальной площади (с учетом условий изготовления, перевозки и монтажа), поставляемых на монтажную площадку в рулонах.

В случае существенной неравномерности распределения цепных усилий в пролетной конструкции с целью снижения расхода материала и обеспечения равнопрочности мембраны возможно местное усиление пролетной конструкции применением листов разной толщины (с учетом технологии изготовления и монтажа тонколистовых полотнищ) или постановкой дополнительных листов, крепящихся к основному полотнищу.

В пролетную конструкцию мембранных покрытий в большинстве случаев включаются элементы «постели», состоящие из направляющих и поперечных элементов. Направляющие располагают вдоль мембранных полотнищ с шагом, равным их ширине, а при ширине полотнищ более 6 м – с шагом, равным половине ширины полотнища. Шаг направляющих увязывают с шагом колонн и с длиной сборных элементов опорного контура.

Поперечные элементы «постели», объединяющие отдельные направляющие в пространственную систему, устанавливают с шагом 3...6 м. При монтаже покрытия на подмостях или внизу на спланированной площадке элементы «постели» не требуются.

Направляющие выполняют длиной на пролет из стальной полосы, гнутых, прокатных или сварных элементов (тавр, двутавр, два швеллера), легких висячих ферм с верхней горизонтальной полкой шириной 300...500 мм. Поперечные элементы выполняют из гнутых или прокатных профилей, подбираемых расчетом на нагрузку от собственного веса полотнища мембраны. Допускается поперечные элементы с мембраной не соединять.

Сечение направляющих обычно включают в работу пролетной конструкции при расчетах на эксплуатационные нагрузки. Для этого обеспечивают совместность работы мембраны и направляющих путем надлежащего их соединения между собой и с опорным контуром внахлестку сваркой или высокопрочными болтами. При выполнении стыков односторонним сварным угловым швом обязательна конструктивная постановка сварных точек проплавлением или высокопрочных болтов. При наличии монтажной «постели» соединение отдельных полотнищ обычно осуществляется на направляющих с нахлесткой кромок полотнищ.

Конструктивное решение узла присоединения мембраны к контуру должно обеспечивать надежную передачу значительных нормальных и касательных усилий с пролетной конструкции на опорный контур. Присоединение мембраны к бортовому элементу контура выполняется с использованием опорного столика.

В связи с незначительной изгибной жесткостью мембранных оболочек необходима их стабилизация, предотвращающая потерю общей устойчивости покрытия (его «выхлоп» в сторону, противоположную провисанию); уменьшающая повышенную деформативность мембранных систем от неравномерных нагрузок, которая может привести к расстройству кровли и невозможности нормальной эксплуатации здания; обеспечивающая нормальную работу покрытий на динамические воздействия, в частности ветровые. В некоторых случаях стабилизация необходима для предотвращения местной потери устойчивости тонкого листа.

Стабилизация тонколистовых покрытий осуществляется одним из следующих способов: увеличением массы покрытия; введением в конструкцию элементов, обладающих изгибной жесткостью; предварительным напряжением (растяжением). Стабилизация покрытия путем увеличения массы достигается применением утеплителей с повышенной плотностью, укладкой цементной или бетонной стяжки, использованием специальных балластных пригрузов, подвеской постоянного технологического оборудования (рис. 2.6, а).

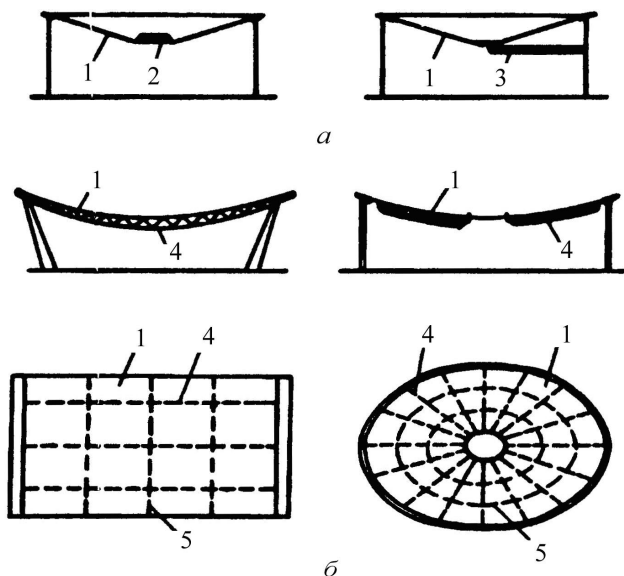


Рис. 2.6. Стабилизация мембранных покрытий:

- а – пригрузом; б – с использованием изгибно-жестких элементов; 1 – мембрана;
2 – пригруз; 3 – кольцевой кран; 4 – основные (продольные или радиальные) ребра;
5 – вспомогательные (поперечные или кольцевые) ребра

Такой прием обеспечивает растягивающие напряжения в мембране даже при ветровом отсосе и уменьшает долю неравномерных временных нагрузок. В большинстве случаев оказывается, что применяемая в настоящее время традиционная кровля совместно с мембранной обеспечивают требуемую для стабилизации массу покрытия.

Стабилизирующие изгибно-жесткие элементы располагают вдоль линий главной кривизны поверхности оболочки и выполняют металлическими из сплошных прокатных или сварных элементов или в виде висячих ферм (рис. 2.6, б). Стабилизирующие элементы обычно используют в качестве монтажной «постели».

Предварительное напряжение мембран осуществляется различными способами в зависимости от формы поверхности покрытия (рис. 2.7): прикреплением мембраны к контуру с помощью натяжных устройств или изменением положения опорного контура (оболочки отрицательной гауссовой кривизны); натяжением нижнего пояса, элементов решетки или оттяжек вантовых ферм, включенных в пролетную конструкцию (оболочки нулевой и положительной гауссовой кривизны); притягиванием концов поперечных элементов «постели» к основанию (цилиндрические оболочки).

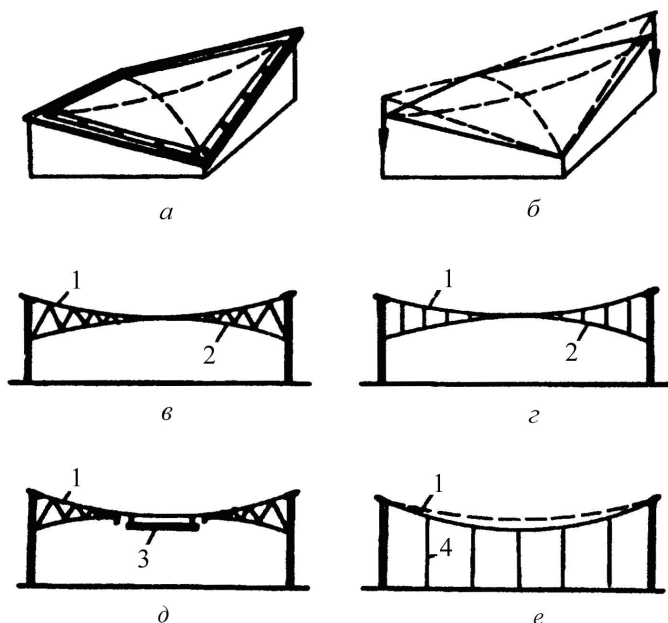


Рис. 2.7. Стабилизация мембранных покрытий предварительным напряжением: а – притягиванием мембраны к контуру; б – изменением геометрии покрытия; в–д – с помощью натяжения вантовых ферм; е – притягиванием поперечных балок к основанию; 1 – мембрана; 2 – стабилизирующие ванты; 3 – центральный пригруз; 4 – оттяжки

Необходимая для стабилизации масса покрытия, изгибная жесткость ребер, предварительное напряжение определяются расчетом на нормативные временные нагрузки. Способ стабилизации выбирается на основе технико-экономических расчетов с учетом архитектурно-технологических требований, возможности упрощения изготовления и монтажа. В пролетной конструкции мембранных систем можно устраивать проемы для установки зенитных фонарей, пропуска коммуникаций и т.п. Проемы обрамляют листом, расположенным в плоскости мембраны и имеющим площадь поперечного сечения не менее половины площади ослабления мембраны. Проемы проектируют круглыми, овальными или многоугольными с радиусом закругления углов не менее 200 мм.

Технологическое оборудование к мембранному покрытию крепят на гибких подвесках. При наличии элементов «постели» подвески крепят к этим элементам. Возможно крепление подвесок выполнять непосредственно к мембране с использованием распределительных шайб.

Опорный контур воспринимает цепные усилия, передающиеся с пролетной части покрытия. Различают замкнутый контур, который воспринимает все горизонтальные составляющие цепных усилий в уровне покрытия и на лежащие ниже конструкции передает в основном вертикальные усилия, и разомкнутый опорный контур, в котором усилия с пролетной части покрытия передаются непосредственно на лежащие ниже конструкции (колонны, рамы, пилоны, конструкции трибун, боковых приставок). Из-за пологости пролетной конструкции распор весьма существен, поэтому большое значение имеет рациональное конструирование опорного контура, материалоемкость и трудоемкость изготовления которого составляют значительную часть в общих показателях, влияющих на экономичность покрытия.

Рекомендуется применять замкнутый опорный контур. Разомкнутый контур может быть оправдан лишь при наличии конструкций трибун, боковых пристроек и т.п., способных без существенных дополнительных затрат воспринимать значительные распоры. Если опорный контур выполнен в виде нескольких наклонных плоских арок или ломаных балок, не лежащих в одной плоскости, он оказывается внешне распорным. Распоры эти воспринимаются затяжками или контрфорсами.

Форма опорного контура определяется линией пересечения поверхности покрытия с поверхностью стенового ограждения. Его ось может быть очерчена плоской или пространственной кривой или состоять из отрезков прямых, плоских и пространственных кривых. Криволинейный опорный контур может быть заменен полигональным для упрощения изготовления его элементов.

Наружный опорный контур может лежать на сплошном основании, образованном стенами, или на отдельных колоннах, в том числе расположенных только по углам покрытия. В общем случае опорный контур воспринимает сжатие с изгибом в одной или двух плоскостях. Кроме того, в нем могут возникать крутящие моменты. При проектировании необходимо стремиться к тому, чтобы опорный контур был внешне безраспорным и малоизгибным.

§ 2.3. Мосты и путепроводы

В практике строительства широкое распространение получили мосты и путепроводы с применением вантовых (с различной вантовой системой, а также с одной или двумя плоскостями вант) и висячих (внешнераспорных или с воспринятым распором) систем, пролетные строения которых обладают рядом конструктивных особенностей (рис. 2.8). Общими конструктивными элементами и до некоторой степени общими узлами пролетных строений обеих систем являются балки жесткости, пилоны и узлы крепления к ним вант или подвесок и кабелей растянутых поясов [176, 177].

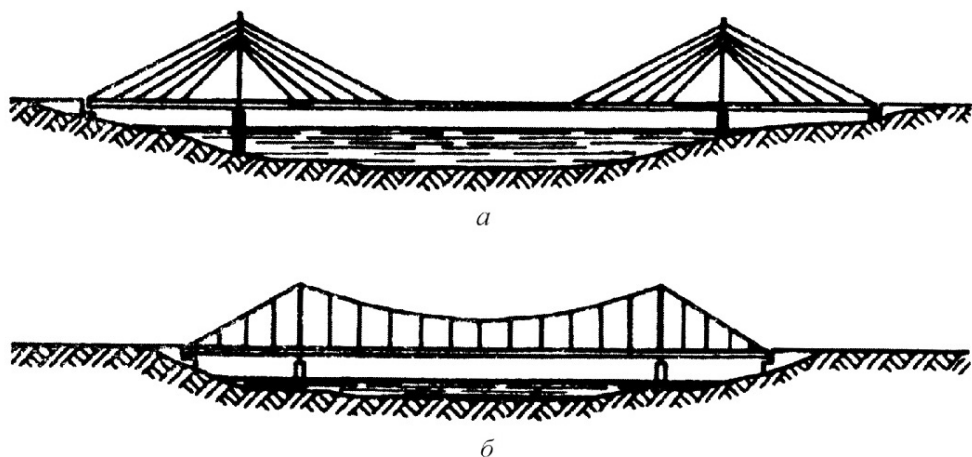


Рис. 2.8. Мосты и путепроводы с применением вантовых (а) и висячих (б) систем

Балка жесткости – основной элемент рассматриваемых пролетных строений. Конструктивные решения балки жесткости принимаются практически аналогичными конструкции пролетных строений балочных мостов, причем с точки зрения снижения постоянной нагрузки и трудоемкости монтажа наиболее целесообразны балки жесткости со стальной ортотропной плитой проезжей части.

Для висячих и вантовых мостов с пролетами свыше 300 м, а тем более превышающих 1 км, критическими становятся аэродинамические воздействия ветрового потока, которые могут вызвать аэроупругую неустойчивость типа галопирования или флаттера. В этом случае применимы только коробчатые сечения, обладающие большой жесткостью на кручение, которым для снижения воздействий ветрового потока придают обтекаемую форму.

Пилоны в висячих и вантовых мостах сооружаются из металла или железобетона. Рассмотрим металлические пилоны, наиболее характерные конструкции которых в виде поперечных рам, жестко или шарнирно опертых на опоры, или в виде одиночных стоек, жестко закрепленных к опорам, показаны на рис. 2.9.

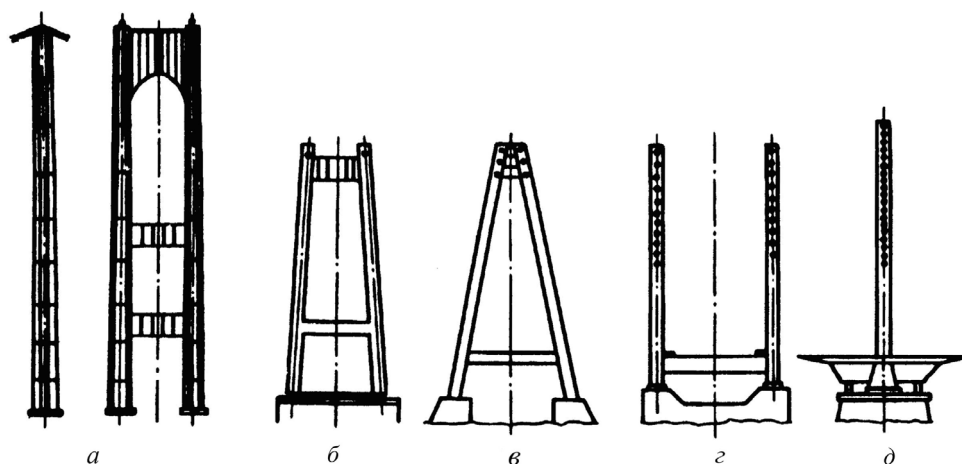


Рис. 2.9. Конструкции металлических пилонов:
а – висячий мост в Ньюпорте; б, в – вантовые мосты;
г, д – многовантовые мосты

Пилоны висячих мостов и вантовых с радиально расположенными ван-тами, закрепленными на вершине пилон, работают в одинаковых условиях, воспринимая вертикальную составляющую усилий опирающихся на них канатов или цепи, и усилия, вызываемые смещением точки закрепления последних. Чем меньше изгибная жесткость пилон в плоскости несущей системы, тем меньше изгибающие моменты, вызываемые деформацией пилон. Поэтому пилоны висячих и вантовых мостов целесообразно принимать предельно гибкими в плоскости моста с шарнирным опиранием. Пилоны висячих мостов с большими пролетами, в частности превышающими 1 км, из соображений общей устойчивости принимаются с развитым сечением стоек.

Пилоны вантовых мостов с многорядным расположением вант, в том числе пилоны многовантовых мостов, кроме вертикальной составляющей усилий в канатах и усилий от деформаций пилон, нагружены также усилиями, связанными с перераспределением горизонтальных составляющих распора канатов различных ярусов, но и в этом случае принцип уменьшения гибкости пилон в плоскости моста остается в силе.

В поперечном направлении пилоны висячих и вантовых мостов выполняются в виде П- или А-образных, а также в виде отдельно стоящих стоек. Последнее решение наиболее характерно для вантовых пролетных строений, пилоны которых работают в более благоприятных условиях, создаваемых следящим эффектом силовых воздействий вант. В противовес этому в вантовых мостах, в которых неуравновешенный распор вант передается на пилоны, последние должны быть возможно более жесткими. Обычно такие пилоны решаются в виде пространственной рамы, развитой как в плоскости моста, так и в поперечном направлении.

Поперечные сечения стоек пилонов принимаются коробчатыми с одной или несколькими ячейками, сваренными из листов большой толщины. Стенки коробчатого сечения стоек пилонов усилены продольными ребрами жесткости и поперечными диафрагмами. Продольные ребра пропускают через вырезы в стенках поперечных диафрагм.

Стойки пилонов делятся по длине на монтажные блоки, размеры которых определяются грузоподъемностью монтажных механизмов и транспортными габаритами. Поперечные стыки блоков, передающие большие нагрузки, являются ответственными конструктивными деталями. Непосредственная передача усилий через торцы с фрезерованием контактных поверхностей связана с определенными технологическими трудностями обработки с заданными допусками поперечных сечений большой площади. Возможно продольное членение на блоки с меньшими площадями, подлежащими фрезерованию, но при этом из-за увеличения длины швов увеличивается трудоемкость монтажа.

§ 2.4. Трубопроводные переходы

Основное количество трубопроводов прокладывается под землей, но часто более экономичной, а иногда и единственно возможной является надземная прокладка (например, в северных и горных районах, через реки, овраги, ущелья, болота, дороги и т.п.). При надземной прокладке трубопроводов из-за естественных и искусственных препятствий в большинстве случаев применяют балочные, реже арочные, а в последнее время все чаще – висячие системы.

В практике строительства получили распространение следующие типы висячих переходов [64, 198]: одно- и двухцепные с вертикальными подвесками (рис. 2.10, *а – в*), радиально-вантовые (рис. 2.10, *г – е*), с решетчатыми вантовыми фермами (рис. 2.10, *ж, з*), в виде провисающей нити (рис. 2.10, *и, м*), с фермами повышенной жесткости (рис. 2.10, *н, о*). Перечисленные типы переходов могут быть как одно-, так и многопролетными. По характеру статической работы их можно разделить на две группы. К первой относятся переходы, в которых труба работает как балка на упруго-податливых опорах с пролетами, равными расстоянию между подвесками несущего каната или точками крепления наклонных вант, воспринимающих нагрузку от веса трубы, изоляции, продукта, снега, гололеда и т.п. Ко второй группе относятся

переходы, в которых труба является единственным несущим элементом, воспринимающим всю нагрузку (в виде провисающей нити).

При пролетах до 100 м целесообразно применять простейшие радиально-вантовые системы. При пролетах 100...300 м достаточно эффективны однопцепные системы с вертикальными подвесками, при больших пролетах – системы в виде вантовых ферм. Почти для всего диапазона пролетов можно применять системы в виде провисающей нити.

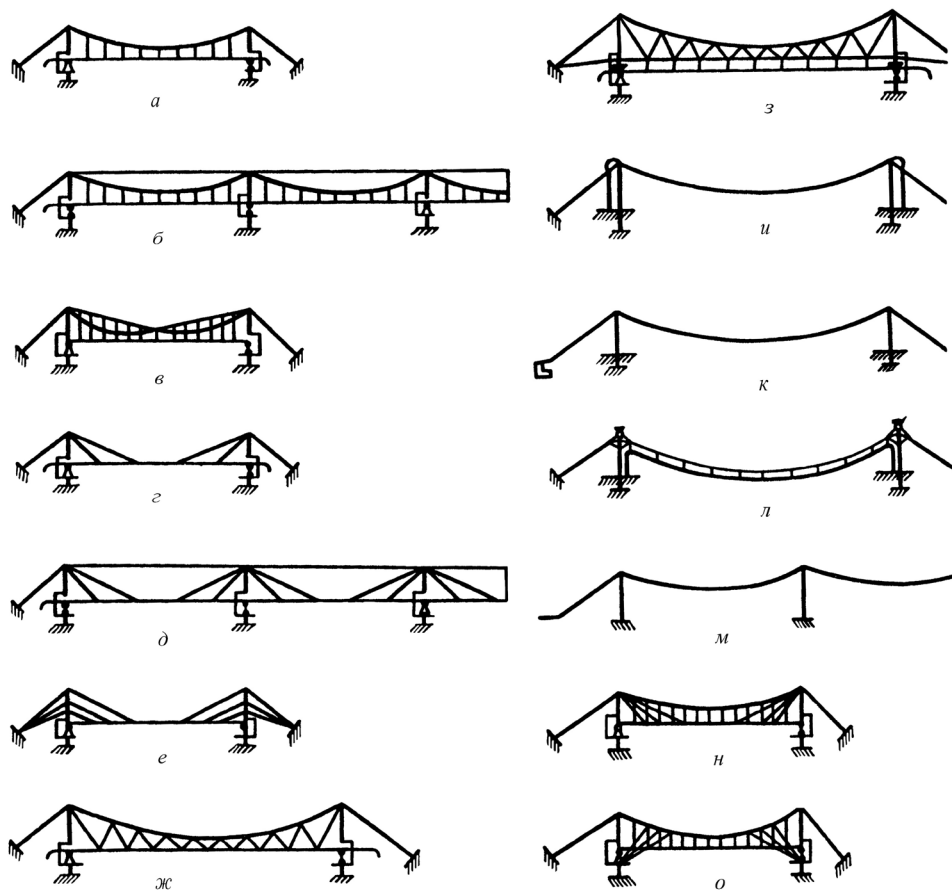


Рис. 2.10. Висячие переходы трубопроводов:

а–в – одно- и двухцепные с вертикальными подвесками; *г–е* – радиально-вантовые; *ж, з* – с решетчатыми вантовыми фермами; *и–м* – в виде провисающей нити (*л* – с поддерживающими канатами); *н, о* – с фермами повышенной жесткости

Вантовые фермы, применяемые для трубопроводных переходов, имеют ряд характерных особенностей, определяемых их совместной работой с трубами, которые включаются в состав фермы и работают на местный изгиб между ее узлами. С точки зрения суммирования напряжений в трубе как элементе фермы и конструкции, воспринимающей внутреннее давление, целесообразно применять системы с воспринятым распором. Однако по технологическим соображениям и по условиям монтажа более эффективны решения, при которых канаты крепятся к анкерным опорам. При этом возможен навесной монтаж трубопровода без промежуточных опор.

При расчете труб, работающих под высоким давлением, приходится учитывать собственные кольцевые и меридиональные растягивающие напряжения и напряжения, создаваемые реактивным воздействием компенсаторов. Кроме того, при транспортировании жидкостей необходимо также дополнительно учитывать динамические удары, возникающие в момент включения трубопровода в сеть или выключения его из сети.

Деформативность несущих трубопроводов вантовых ферм должна соответствовать условиям нормальной эксплуатации (предупреждение расстроя стыков, вывод конденсата и пр.).

С целью уменьшения деформаций пролетной конструкции в многопролетных системах необходимо устройство затяжек – горизонтальных (с малой стрелой провисания) канатов, соединяющих верхушки пилонов, предназначенных для ограничения перемещений последних при несимметричном нагружении перехода.

Сравнительно небольшая поперечная жесткость пролетных строений в переходах требует специальных устройств для восприятия ветровых усилий и ограничения и предупреждения аэродинамических колебаний.

Специфику работы трубопроводных переходов надо учитывать при выборе типа фермы, конструкций крепления стальных канатов к трубам, устройств для восприятия ветровых усилий, конструкций компенсаторов и, наконец, устройств для обеспечения нормальной эксплуатации трубопроводов.

Из перечисленных систем переходов наиболее экономичны переходы в виде провисающей нити. В последние годы опыт проектирования и строительства таких переходов значительно обогатился: был выполнен ряд экспериментально-теоретических исследований, завершено строительство десятков переходов, получены новые технико-экономические данные [190, 199].

Несмотря на ряд преимуществ, переходы в виде провисающей нити не получили массового применения. До сих пор некоторые специалисты считают, что такие переходы менее надежны и их следует строить только на отводах и линиях местного значения. Такое мнение сложилось, по-видимому, из-за аварий нескольких сооружений. Они явились следствием ошибок, допущенных при проектировании и строительстве переходов, объективных же причин для разрушения переходов в виде провисающей нити не больше, чем любой другой системы.

Одноцепные переходы состоят из цепи (стального каната или пучка канатов), перекинутой через пилоны, к которой с помощью подвесок прикрепляют трубопровод. Последний играет роль балки жесткости, работающей на изгиб от равномерно распределенных по длине пролета постоянной и временной нагрузок.

Кроме того, при несимметричном нагружении трубопровод работает в составе фермы, в результате чего заметно снижается деформативность последней. Канаты цепи передают на пилоны вертикальную составляющую распора, а на анкерные опоры – горизонтальную.

Оптимальное значение стрелы провисания цепи находится в пределах $1/8 \dots 1/12$ пролета. Расстояние между подвесками определяется возможностями использования трубы при работе ее на изгиб, а также конструктивными соображениями: выбором сечения подвесок, типа натяжных устройств и др.

Трубопровод подвешивают как прямолинейно, так и с небольшим подъемом к середине пролета, величина которого определяется возможными изменениями длины цепи от нагрузок, влиянием температуры и другими воздействиями.

Рекомендуется применение цельных на весь переход канатов, закрепляемых на опорных частях пилон на накладках на болтах. При этом не требуется сложного стыкования канатов; закрепление их на пилонах несложно, так как обычно сил трения достаточно для сопротивления возможным горизонтальным усилиям. Закрепление болтами выполняется только для восприятия монтажных нагрузок. Если длина канатов меньше длины перехода, то стыки канатов целесообразно размещать на вершинах пилонов в специально запроектированных конструкциях оголовка.

Опорные части на вершинах пилонов рекомендуется выполнять сварными из толстолистовой стали. Они значительно проще в изготовлении и дешевле литых. Размеры опорных частей зависят от радиуса изгиба опорной поверхности и соответствующей ей длины провисания канатов. Выбор этих параметров существенно влияет на условия работы стальных канатов. На участках перегибов канаты находятся в менее благоприятных условиях, чем на свободных участках, так как подвергаются воздействию дополнительных силовых факторов: изгибу и поперечному обжатию. При этом напряжения от изгиба проволок каната могут достигать значений, не только соизмеримых с напряжениями от осевой нагрузки, но и превосходящих их.

Примером целесообразной конструкции опорной части может служить решение, принятое в проектах висячих переходов трубопроводов, разработанных институтом «УкрНИИпроектстальконструкция им. В.Н. Шимановского». Опорная часть сваривается из стальных листов, в которых желоба для канатов образуются строжкой. После строжки листы изгибаются по требуемому радиусу. Благодаря этому исключается обработка опорных частей на карусельных станках. Для создания плотного опирания по всей длине и исключения шлифовки желобов предусмотрена обертка канатов листом из деформируемого алюминиевого сплава АД-1.

В проектах газопроводов, разработанных институтом «Укрگیпрогаз», для крепления труб приняты поперечные траверсы с седлами. Вертикальные подвески запроектированы без талрепов. Вертикальное положение труб регулируется подтяжкой гаек крепления подвесок к траверсам. Эта конструкция более трудоемка в изготовлении и требует большего расхода металла.

В качестве смотровых устройств применяются мостики и тележки. По расходу металла, стоимости и трудоемкости предпочтительнее решение со смотровой тележкой. Однако в эксплуатации более удобны решения со смотровым мостиком. В зависимости от конструкции перехода, количества труб и т.п. смотровой мостик может устраиваться сверху и снизу трубопровода.

В практике строительства иногда вместо смотрового мостика устраивают проезд для автомашин. В этом случае конструкция перехода значительно утяжеляется и приближается к конструкции автодорожных мостов. Для восприятия подвижной нагрузки приходится проектировать балочную клетку, состоящую из продольных и поперечных балок. При двух и более трубах большого диаметра в качестве продольных балок могут использоваться и сами трубы.

Наибольшее распространение в практике строительства получили переходы, схемы которых приведены на рис. 2.11. В переходах, приведенных на рис. 2.11, *а, б, д*, участок трубопровода, расположенный между вантами, подвергается дополнительному растяжению под действием горизонтальной составляющей усилий в вантах. Однако поскольку площадь поперечного сечения трубы сравнительно большая, то растягивающие напряжения в ней, как правило, не являются определяющими. На газопроводах диаметром 529...1020 мм расстояние между точками крепления радиальных вант колеблется от 18 до 40 м, а на нефтепроводах – от 12 до 30 м.

С целью уменьшения расхода материала на опоры при сравнительно небольших пролетах целесообразно применять решения, приведенные на рис. 2.11, *е*. В этом случае участок трубопровода, расположенный между смежными вантами, сжат. В таких переходах длина пролета несколько меньше, чем в переходах с растянутым участком трубопровода (рис. 2.11, *а – в*). Ее следует определять с учетом продольного изгиба трубы.

С увеличением высоты пилонов заметно уменьшаются усилия в несущих (наклонных) вантах и их сечение, но возрастает расход металла на пилоны. Оптимальную высоту пилонов определяют на основании технико-экономических расчетов.

В радиально-вантовых переходах трубопроводов диаметром 529...1020 мм при пролетах соответственно 60...100 м горизонтальное раскрепление трубопровода не проводится. При больших пролетах, особенно в районах со значительными ветровыми нагрузками, устраиваются оттяжки.

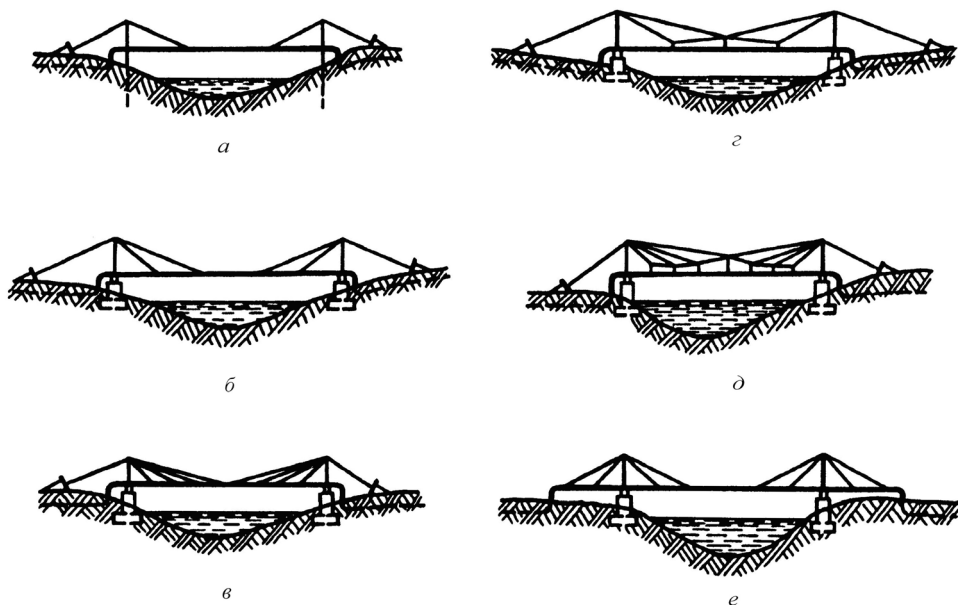


Рис. 2.11. Радиально-вантовые трубопроводные переходы с передачей распора:
a–d – на анкерные опоры; *e* – на трубопровод

В простейших радиально-вантовых фермах небольших пролетов (до 70 м) целесообразно применение вант из круглой стали, сваренных из отдельных стержней в монтажные элементы удобной для транспортирования длины. Заводские соединения осуществляются контактной сваркой, а монтажные – обычной сваркой с накладками. На концах тяг привариваются фансонки из листовой стали для крепления к пилонам и трубопроводу.

При больших пролетах следует применять ванты из стальных канатов. Последние необходимо переводить через пилон и обжимать на опорной части накладками с болтами точно так же, как и в одноцепных фермах.

Рассматриваемые конструкции во многом аналогичны одно- и двухцепным переходам: по конструкции пилонов, опиранию на них канатов и труб, по деталям крепления канатов, натяжным устройствам и т.п. Поэтому ниже рассмотрены лишь особенности конструкции и отдельные узлы, характерные для таких ферм.

Наибольшее распространение получили вантовые системы с треугольной решеткой как с восходящими, так и с нисходящими опорными раскосами.

По характеру взаимодействия ферм с трубопроводом различают системы, в которых трубопровод подвешивается к двухпоясной вантовой ферме с гибкими верхним и нижним поясами, и системы с гибким верхним и жестким (в виде трубы) нижним поясами.

Решающее значение для уменьшения кинематических перемещений и, как следствие, прогибов вантовой системы имеет положение связей, препятствующих перемещению несущего элемента вдоль пролета. Этот принцип положен в основу разработки вантовых ферм повышенной жесткости. Схемы некоторых из таких ферм приведены на рис. 2.10, *н, о*. При проектировании таких ферм следует иметь в виду, что решающее значение в уменьшении кинематических перемещений имеют одна или две связи. При дальнейшем увеличении числа связей кинематические перемещения уменьшаются незначительно.

ГЛАВА 3

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 3.1. Предварительные замечания. Предпосылки расчета

В предлагаемой теории расчета рассматриваются нити, удовлетворяющие следующим требованиям:

1. Отношение пролета нити к стреле ее провисания должно находиться в пределах $8 \leq l/f < \infty$, то есть нить принимается полой. При этом если опоры нити расположены на разных уровнях, то угол наклона к горизонту линии, соединяющей точки ее подвеса, не должен превышать 20° .

2. Отношение напряжений от изгиба к напряжениям от растяжения должно находиться в пределах $0,05 < \sigma_{\text{и}}/\sigma_{\text{р}} < \infty$, т.е. нить принимается конечной изгибной жесткости.

3. Материал нити считается однородным, изотропным и абсолютно упругим.

Согласно литературным источникам, подавляющее большинство (около 95 %) нитей конечной жесткости, применяемых в висячих конструкциях, отвечают данным требованиям.

При расчете нитей используются следующие положения:

1. Гипотеза плоских сечений, предполагающая, что плоские до изгиба поперечные сечения, нормальные к оси нити, после изгиба остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси. Использование этого допущения позволяет свести исследование деформированного состояния нити к рассмотрению изгиба ее оси.

2. Допущение о том, что продольные волокна нити не давят одно на другое, т.е. находятся в одноосном напряженном состоянии – позволяет считать нормальное напряжение в поперечных сечениях нити функцией только относительного удлинения волокна.

3. Допущение о том, что кривизна изогнутой оси нити в любой точке зависит только от величины изгибающего момента в этой точке позволяет пренебречь влиянием перерезывающей силы на кривизну оси нити вследствие ее незначительности.

4. Так как перемещения нити считаются не малыми и соизмеримыми со стрелой ее провисания, то расчет является нелинейным и ведется по деформированной схеме.

5. Статическая неопределимость относительно распора раскрывается с помощью принципа возможных перемещений. При этом принцип Лагранжа используется в своей строгой постановке, т.е. к перемещениям бесконечно малым, а не конечным. Это приводит задачу к дифференциальным зависи-

мостям, которые, в отличие от имеющихся решений, дают более точные результаты при определении параметров напряженно-деформированного состояния нити и позволяют представить решение в замкнутом виде.

Первые три положения являются общепринятыми и составляют основу технической теории изгиба, успешно применяемой при рассмотрении деформирования балок и нитей конечной жесткости. Степень их точности хорошо изучена: обычно при расчете балок, у которых отношение пролета к высоте поперечного сечения более пяти, погрешность не превышает нескольких процентов. При расчете же нитей конечной жесткости величина погрешности гораздо меньше, поскольку в данных системах отношение пролета к высоте поперечного сечения во много раз более пяти.

§ 3.2. Общий случай деформации нити.

Основные дифференциальные уравнения задачи

Рассмотрим расчет нитей конечной жесткости на произвольную вертикальную и горизонтальную поперечные нагрузки, т.е. общий случай расчета несущих элементов висячих систем [182].

Предположим, что работающая с изгибом от начальной и дополнительной нагрузки нить конечной жесткости с поперечным сечением площадью F , моментом инерции I и модулем упругости E нагружена произвольной вертикальной $q(x)$ и горизонтальной $p(x)$ нагрузками* и находится в состоянии равновесия. Выберем при выводе разрешающих уравнений в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Если площадь поперечного сечения нити F получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δF , то изменятся величины действующих в нити внутренних усилий и ее геометрия. В вертикальной плоскости изгибающий момент M_z получит некоторое приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения на величину δu . Аналогично в горизонтальной плоскости изгибающий момент M_y получит приращение δM_y , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити ψ – приращение $\delta\psi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δz (рис. 3.1).

* Под $q(x)$ подразумевается сумма всех нагрузок, действующих на нить в вертикальной плоскости, а под $p(x)$ – сумма всех нагрузок, действующих на нить в горизонтальной плоскости.

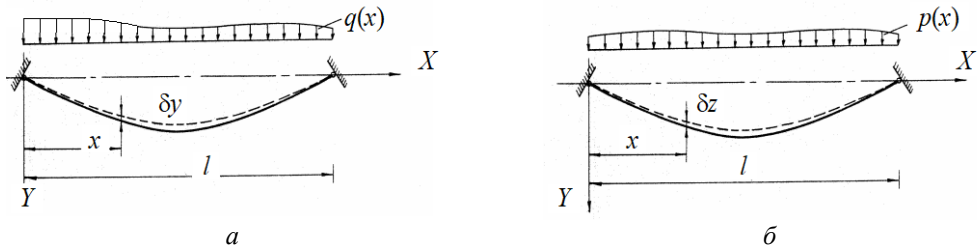


Рис. 3.1. К выводу дифференциального уравнения:
 а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

Кроме того, распор H получит некоторое приращение своей величины, равное δH . Выразим эти величины через балочный изгибающий момент M_z^δ и M_y^δ , балочный прогиб y^δ и z^δ и искомый распор H . Для этого воспользуемся известными зависимостями [62]

$$H = \frac{M^\delta - M}{f}; \quad (3.1)$$

$$M = M^\delta \frac{f}{f^\delta}. \quad (3.2)$$

Здесь необходимо отметить, что формула (3.1) абсолютно точна, поскольку отражает условия равновесия нити. Формула (3.2) – приближенна, так как она получена на базе предпосылки о пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке. Однако точность данной формулы достаточно высока, а ее использование вносит в расчет погрешность, сопоставимую с погрешностью допущения о пологости нити.

С учетом (3.1) и (3.2) выражения для прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости можно записать в следующем виде:

$$y = \frac{M_z^\delta y^\delta}{Hy^\delta + M_z^\delta}; \quad (3.3)$$

$$z = \frac{M_y^\delta z^\delta}{Hz^\delta + M_y^\delta}; \quad (3.4)$$

$$M_z = \frac{(M_z^\delta)^2}{Hy^\delta + M_z^\delta}; \quad (3.5)$$

$$M_y = \frac{(M_y^6)^2}{Hz^6 + M_y^6}, \quad (3.6)$$

а приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити определяются по формулам:

$$\delta y = -\frac{M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (3.7)$$

$$\delta z = -\frac{M_y^6 (z^6)^2 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)}; \quad (3.8)$$

$$\delta M_z = -\frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (3.9)$$

$$\delta M_y = -\frac{(M_y^6)^2 z^6 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)}; \quad (3.10)$$

$$\delta dx = \frac{EF\delta H - HE\delta F}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (3.11)$$

$$\delta d\varphi = -\frac{(M_z^6)^2 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (3.12)$$

$$\delta d\psi = -\frac{(M_y^6)^2 (z^6 \delta HEI + z^6 HE\delta I + z^6 \delta HE\delta I + M_y^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx. \quad (3.13)$$

Работа внешних сил вычисляется как интеграл из произведения функции нагрузки $q(x)$ и $p(x)$ на выражение (3.7) и (3.8) соответственно, распространенный на всю длину пролета l

$$U_1^1 = -\int_0^l \frac{q(x) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (3.14)$$

$$U_1^2 = -\int_0^l \frac{p(x) M_y^6 (z^6)^2 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx. \quad (3.15)$$

Работа внутренних сил состоит из работы усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx и работы изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ соответственно

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (3.16)$$

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad (3.17)$$

$$U_2^3 = \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 (z^6 \delta HEI + z^6 HE\delta I + z^6 \delta HE\delta I + M_y^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)^2} dx. \quad (3.18)$$

Согласно принципу Лагранжа сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю

$$U_1 + U_2 = 0. \quad (3.19)$$

Тогда, подставляя (3.14) – (3.18) в соотношение (3.19), получим:

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_0^l \frac{p(x)M_y^6 (z^6)^2 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx - \\ & - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\ & + \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \\ & + \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 (z^6 \delta HEI + z^6 HE\delta I + z^6 \delta HE\delta I + M_y^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)^2} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Представим y^6 и z^6 следующим образом:

$$y^6 = \frac{1}{EI} (y^6 EI) = \frac{m}{EI}; \quad (3.21)$$

$$z^6 = \frac{1}{EI} (z^6 EI) = \frac{n}{EI}. \quad (3.22)$$

Разделив уравнение (3.20) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$ с учетом (3.21) и (3.22), получим следующее общее дифференциальное уравнение для определения величины распора в упругой нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{p(x)M_y^6 n^2}{(Hn + EIM_y^6)^2} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 n}{(Hn + EIM_y^6)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Интегралы, входящие в уравнение (3.23), зависят от вида приложенной к нити нагрузки и условий закрепления ее концов. Их значения могут быть определены в каждом конкретном случае либо непосредственным интегрированием, либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса [56, 57].

Если в уравнении (3.23) положить $p(x) = 0$, то придем к случаю изгиба нити конечной жесткости только в вертикальной плоскости. Тогда уравнение (3.23) преобразуется к виду

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx = 0. \quad (3.24)$$

Если допустить, что действующая на нить нагрузка является равномерно распределенной, а концы нити закреплены шарнирно, то после некоторых преобразований получим уравнение:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{25q^2 l^6 EF^2}{12H^2 (5l^2 H + 48EI)^2} + \frac{120q^2 l^6 E^2 F^2 I}{H^2 (5l^2 H + 48EI)^3} = 0. \quad (3.25)$$

Наконец, если в этом уравнении положить $I = 0$, то придем к решению, полученному Р.Н. Мацелинским [95, 97] для гибкой упругой нити,

$$\frac{d\omega}{dH} - \frac{\omega}{H} - \frac{q^2 l^2 \omega^2}{12H^4} = 0, \quad (3.26)$$

где $\omega = EF$ – жесткость нити на растяжение.

Таким образом, задача расчета гибких упругих нитей представляет собой частный случай рассматриваемой здесь теории расчета нитей конечной жесткости.

В случае нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузки, исходные соотношения (3.1) и (3.2) могут быть представлены в виде

$$H = \frac{M^6 - M}{f + f_0}; \quad (3.27)$$

$$M = M^6 \frac{f}{f^6}, \quad (3.28)$$

где f_0 – стрела провисания нити при действии начальной нагрузки.

С учетом последних выражений соотношения для y , z , M_z и M_y можно записать в следующем виде:

$$y = \frac{(M_z^6 - Hy_0)y^6}{Hy^6 + M_z^6}; \quad (3.29)$$

$$z = \frac{(M_y^6 - Hz_0)z^6}{Hz^6 + M_y^6}; \quad (3.30)$$

$$M_z = \frac{(M_z^6 - Hy_0)M_z^6}{Hy^6 + M_z^6}; \quad (3.31)$$

$$M_y = \frac{(M_y^6 - Hz_0)M_y^6}{Hz^6 + M_y^6}. \quad (3.32)$$

Выполнив соответствующие преобразования, получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m(m + El y_0)}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{p(x)M_y^6 n(n + El z_0)}{(Hn + EIM_y^6)^2} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0)(m + El y_0)}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_y^6)^3 (M_y^6 - Hz_0)(n + El z_0)}{(Hn + EIM_y^6)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Отметим, что если в этом уравнении положить $y_0 = z_0 = 0$, то придем к ранее полученному выражению (3.23).

§ 3.3. Действие дополнительных нагружений специального вида

Рассмотрим нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной равномерно распределенной на всем пролете нагрузки q_1 и дополнительной равномерно распределенной на части пролета нагрузки q_2 , площадью F , моментом инерции I и модулем упругости E (рис. 3.2). При выводе расчетных зависимостей в качестве независимой переменной, как и ранее, примем площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

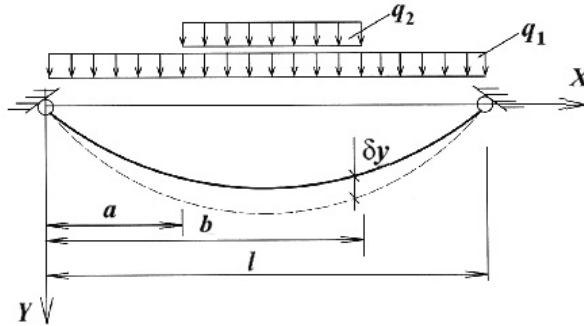


Рис. 3.2. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной на всем пролете нагрузки q_1 и дополнительной равномерно распределенной нагрузки на части пролета нагрузки q_2

В данном случае выражения для прогибов, изгибающих моментов и приращений параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости определяются по формулам (3.3) – (3.13), в которых значения y^6 и M^6 имеют вид:

- при $0 \leq x \leq a$

$$y_1^6 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x}{24} (x^3 + l^3) + \frac{q_2 x(b-a)^3}{24} + \right. \\ \left. + \frac{q_2 x(b^2 - a^2)}{48l} (6l(a+b) - 2(a^2 + b^2) - 8l^2) \right];$$

$$M_1^6 = - \left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) x + \frac{q_1 x^2}{2},$$

- при $a \leq x \leq b$

$$y_2^6 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x}{24} (x^3 + l^3) + \frac{q_2 x(b-a)^3}{24} + \right. \\ \left. + \frac{q_2 x(b^2 - a^2)}{48l} (6l(a+b) - 2(a^2 + b^2) - 8l^2) - \frac{q_2(x-a)^4}{24} \right];$$

$$M_2^6 = - \left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) x + \frac{q_1 x^2}{2} + \frac{q_2(x-a)^2}{2},$$

- а при $b \leq x \leq l$

$$y_3^6 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x}{24} (x^3 + l^3) + \frac{q_2(b-a)(b+a)}{48} + \right. \\ \left. + \frac{q_2(b^2 - a^2)}{48l} (6l(a+b) - 2(a^2 + b^2) - 8l^2) - \frac{q_2(b-a)}{48} (2x - (b+a))^3 \right];$$

$$M_3^6 = - \left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) x + \frac{q_1 x^2}{2} + \frac{q_2(b-a)}{2} (2x - (b+a)).$$

Работу внешних сил представим как

$$U_1 = - \int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2 \delta H}{(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + M_1^6)} dx - \\ - \int_a^b \frac{(q_1 + q_2) M_2^6 (y_2^6)^2 \delta H}{(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + M_2^6)} dx - \\ - \int_b^l \frac{q_1 M_3^6 (y_3^6)^2 \delta H}{(Hy_3^6 + \delta Hy_3^6 + M_3^6)(Hy_3^6 + M_3^6)} dx. \quad (3.34)$$

Работу внутренних сил запишем следующим образом: $U_2 = U_2^1 + U_2^2$,
где

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{(EF \delta H - HE \delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E \delta F)} dx; \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
U_2^2 = & \int_0^a \frac{(M_1^6)^4 (y_1^6 \delta H E I + y_1^6 H E \delta I + y_1^6 \delta H E \delta I + M_1^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \\
& + \int_a^b \frac{(M_2^6)^4 (y_2^6 \delta H E I + y_2^6 H E \delta I + y_2^6 \delta H E \delta I + M_2^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx + \\
& + \int_b^l \frac{(M_3^6)^4 (y_3^6 \delta H E I + y_3^6 H E \delta I + y_3^6 \delta H E \delta I + M_3^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_3^6 + M_3^6)(Hy_3^6 + \delta Hy_3^6 + M_3^6)^2} dx. \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, согласно принципу Лагранжа сумма работ всех внутренних и внешних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю; тогда, подставляя соотношения (3.34) – (3.36) в (3.19), получим:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2 \delta H}{(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + M_1^6)} dx - \\
& - \int_a^b \frac{(q_1 + q_2) M_2^6 (y_2^6)^2 \delta H}{(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + M_2^6)} dx - \\
& - \int_b^l \frac{q_1 M_3^6 (y_3^6)^2 \delta H}{(Hy_3^6 + \delta Hy_3^6 + M_3^6)(Hy_3^6 + M_3^6)} dx - \int_0^l \frac{(EF \delta H - HE \delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E \delta F)} dx + \\
& + \int_0^a \frac{(M_1^6)^4 (y_1^6 \delta H E I + y_1^6 H E \delta I + y_1^6 \delta H E \delta I + M_1^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \\
& + \int_a^b \frac{(M_2^6)^4 (y_2^6 \delta H E I + y_2^6 H E \delta I + y_2^6 \delta H E \delta I + M_2^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx + \\
& + \int_b^l \frac{(M_3^6)^4 (y_3^6 \delta H E I + y_3^6 H E \delta I + y_3^6 \delta H E \delta I + M_3^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_3^6 + M_3^6)(Hy_3^6 + \delta Hy_3^6 + M_3^6)^2} dx. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Разделив уравнение (3.37) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для определения величины распора в упругой нити конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки на части пролета:

$$\begin{aligned}
& \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2}{(Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \int_a^b \frac{(q_1 + q_2) M_2^6 (y_2^6)^2}{(Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx + \right. \\
& \left. + \int_b^l \frac{q_1 M_3^6 (y_3^6)^2}{(Hy_3^6 + M_3^6)^2} dx \right] + \frac{F^2}{lH^2 I} \left[\int_0^a \frac{(M_1^6)^4 y_1^6}{(Hy_1^6 + M_1^6)^3} dx + \right. \\
& \left. + \int_a^b \frac{(M_2^6)^4 y_2^6}{(Hy_2^6 + M_2^6)^3} dx + \int_b^l \frac{(M_3^6)^4 y_3^6}{(Hy_3^6 + M_3^6)^3} dx \right] = 0. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 и дополнительной сосредоточенной нагрузки P (рис. 3.3). Примем, что нить имеет поперечное сечение площадью F и моментом инерции I , а также модуль упругости E . Как и ранее, в качестве независимой переменной примем площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

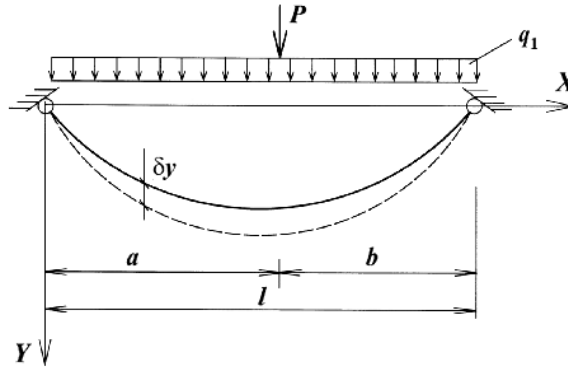


Рис. 3.3. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 и дополнительной сосредоточенной нагрузки P

Выражения для прогибов, изгибающих моментов и приращений параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости в данном случае также определяются по формулам (3.3) – (3.13), в которых значения y^6 и M^6 имеют вид:

- при $0 \leq x \leq a$

$$y_1^6 = \frac{Pbx}{6EI}(l^2 - b^2 - x^2) + \frac{q_1x}{24}(x^3 - 2lx^2 + l^3);$$

$$M_1^6 = \frac{Pbx}{l} + \frac{q_1x}{2}(l - x),$$

- а при $a \leq x \leq l$

$$y_2^6 = \frac{Pbx}{6EI}(l^2 - b^2 - x^2) + \frac{P}{6EI}(x - a)^3 + \frac{q_1x}{24}(x^3 - 2lx^2 + l^3);$$

$$M_2^6 = \frac{Pbx}{l} - P(x - a) + \frac{q_1x}{2}(l - x).$$

Работу внешних сил запишем как $U_1 = U_1^1 + U_1^2$, где

$$\begin{aligned} U_1^1 = & - \int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2 \delta H}{(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + M_1^6)} dx - \\ & - \int_a^l \frac{q_1 M_2^6 (y_2^6)^2 \delta H}{(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + M_2^6)} dx; \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$U_1^2 = - \frac{PM_a^6 (y_a^6)^2 \delta H}{(Hy_a^6 + \delta Hy_a^6 + M_a^6)(Hy_a^6 + M_a^6)}, \quad (3.40)$$

а M_a^6 , y_a^6 – значения изгибающего момента и прогиба в шарнирно опертой балке пролетом l при действии сосредоточенной нагрузки P в точке $x = a$.

Работу внутренних сил запишем следующим образом: $U_2 = U_2^1 + U_2^2$, где

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} U_2^2 = & \int_0^a \frac{(M_1^6)^4 (y_1^6 \delta HEI + y_1^6 HE\delta I + y_1^6 \delta HE\delta I + M_1^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \\ & + \int_a^l \frac{(M_2^6)^4 (y_2^6 \delta HEI + y_2^6 HE\delta I + y_2^6 \delta HE\delta I + M_2^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Поскольку, в соответствии с принципом Лагранжа, сумма работ всех внутренних и внешних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, то подставляя соотношения (3.39) – (3.42) в (3.19), получим:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^a \frac{gM_1^6 (y_1^6)^2 \delta H}{(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + M_1^6)} dx - \int_a^l \frac{gM_2^6 (y_2^6)^2 \delta H}{(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + M_2^6)} dx - \\
 & - \frac{PM_a^6 (y_a^6)^2 \delta H}{(Hy_a^6 + \delta Hy_a^6 + M_a^6)(Hy_a^6 + M_a^6)} - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\
 & + \int_0^a \frac{(M_1^6)^4 (y_1^6 \delta HEI + y_1^6 HE\delta I + y_1^6 \delta HE\delta I + M_1^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \\
 & + \int_a^l \frac{(M_2^6)^4 (y_2^6 \delta HEI + y_2^6 HE\delta I + y_2^6 \delta HE\delta I + M_2^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx = 0. \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Разделив уравнение (3.43) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для определения величины распора в упругой нити конечной жесткости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \times \left[\frac{PM_a^6 (y_a^6)^2}{(Hy_a^6 + M_a^6)^2} + \int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2}{(Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \int_a^l \frac{q_1 M_2^6 (y_2^6)^2}{(Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx \right] + \\
 & + \frac{F^2}{lH^2 I} \left[\int_0^a \frac{(M_1^6)^4 y_1^6}{(Hy_1^6 + M_1^6)^3} dx + \int_a^l \frac{(M_2^6)^4 y_2^6}{(Hy_2^6 + M_2^6)^3} dx \right] = 0. \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

3.3.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета. Допустим, что начальная равномерно распределенная нагрузка q_1 действует на всем пролете нити, а дополнительная равномерно распределенная нагрузка q_2 – на половине пролета (рис. 3.4). Тогда уравнение (3.38) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\int_0^{l/2} \frac{(q_1 + q_2)M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx + \int_{l/2}^l \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx \right] + \\
 & + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \left[\int_0^{l/2} \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx + \int_{l/2}^l \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx \right] = 0. \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

В этом случае выражения для M^6 и y^6 можно записать таким образом:

- при $0 \leq x \leq l/2$

$$M^6 = \frac{(q_1 + q_2)x}{2}(l - x);$$

$$y^6 = \frac{(q_1 + q_2)x}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

- при $l/2 \leq x \leq l$

$$M^6 = \frac{q_1 x}{2}(l - x),$$

$$y^6 = \frac{q_1 x}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3).$$

Подставляя последние выражения в (3.45), производя интегрирование и некоторые преобразования, приходим к дифференциальному уравнению для определения распора в упругой нити конечной жесткости

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{[q_1^2 + (q_1 + q_2)^2]l^6 EF^2}{32H^2} \times \\ & \times \left[361(19Hl^2 + 192EI)^{-2} + \frac{25}{3}(5Hl^2 + 48EI)^{-2} \right] + \frac{[q_1^2 + (q_1 + q_2)^2]l^6 E^2 F^2 I}{H^2} \times \\ & \times [2052(19Hl^2 + 192EI)^{-3} + 15(5Hl^2 + 48EI)^{-3}] = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

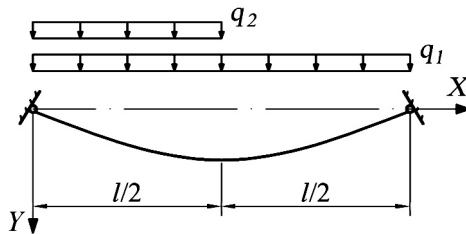


Рис. 3.4. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 на всем пролете и дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 на половине пролета

3.3.2. Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета. Рассмотрим случай нагружения нити конечной жесткости начальной равномерно распределенной нагрузкой q_1 на всем пролете и сосредоточенной дополнительной нагрузкой P в середине пролета (рис. 3.5).

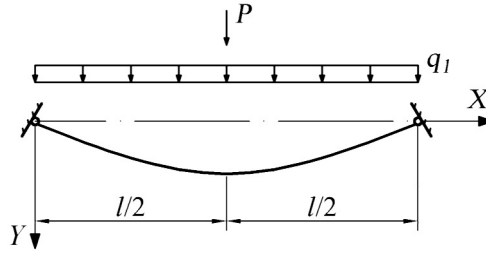


Рис. 3.5. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 на всем пролете и дополнительной сосредоточенной нагрузки P в середине пролета

В этом случае дифференциальное уравнение (3.44) можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\frac{PM_p^6 (y_p^6)^2}{(Hz_p^6 + M_p^6)^2} + \right. \\ & + \int_0^{l/2} \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx + \int_{l/2}^l \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx \left. + \right. \\ & \left. + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \left[\int_0^{l/2} \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx + \int_{l/2}^l \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx \right] \right] = 0. \quad (3.47) \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае соотношения для изгибающих моментов M^6 и прогибов y^6 будут иметь вид:

- при $0 \leq x \leq l/2$

$$\begin{aligned} M^6 &= \frac{Px}{2} + \frac{q_1 x}{2} (l - x); \\ y^6 &= \frac{Px}{12EI} \left(\frac{3}{4} l^2 - x^2 \right) + \frac{q_1 x}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3), \end{aligned}$$

- при $l/2 \leq x \leq l$

$$M^6 = \frac{Px}{2} - P\left(x - \frac{l}{2}\right) + \frac{q_1 x}{2}(l - x);$$

$$y^6 = \frac{Px}{12EI}\left(\frac{3}{4}l^2 - x^2\right) + \frac{P}{6EI}\left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + \frac{q_1 x}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

а для изгибающих моментов M_p^6 и прогибов y_p^6 запишутся так:

$$M_p^6 = \frac{q_1 l^2}{8} + \frac{Pl}{4};$$

$$y_p^6 = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_1 l^4}{EI} + \frac{Pl^3}{48EI}.$$

После подстановки указанных выражений в уравнение (3.47), проведения интегрирования и некоторых преобразований, получим дифференциальное уравнение для определения распора в упругой нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{1}{48} \cdot \frac{k_1 k_2 l^4 EF^2}{H^2 (k_2 H l^2 + 48 k_1 EI)^2} \left[k_6 - 144 \cdot \frac{k_1^2 k_3 EI}{k_2 H l^2 + 48 k_1 EI} \right] - \\ - \frac{1}{48} \cdot \frac{k_4 k_5 l^4 EF^2}{H^2 (k_5 H l^2 + 192 k_4 EI)^2} \left[k_5 q_1 l - 576 \cdot \frac{k_3 k_4^3 EI}{k_5 H l^2 + 192 k_4 EI} \right] = 0, \quad (3.48) \end{aligned}$$

где $k_1 = q_1 l + 2P$; $k_2 = 5q_1 l + 8P$; $k_3 = 1 + q_1$;

$k_4 = 3q_1 l + 4P$; $k_5 = 57q_1 l + 88P$; $k_6 = q_1 l + 6P$.

3.3.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета. В случае нагружения нити конечной жесткости начальной равномерно распределенной нагрузкой q_1 на всем пролете и сосредоточенной дополнительной нагрузкой P в четверти пролета (рис. 3.6) дифференциальное уравнение (3.44) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\frac{PM_p^6 (y_p^6)^2}{(Hz_p^6 + M_p^6)^2} + \int_0^{l/4} \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx + \int_{l/4}^l \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx \right] + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \left[\int_0^{l/4} \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx + \int_{l/4}^l \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx \right] = 0. \quad (3.49) \end{aligned}$$

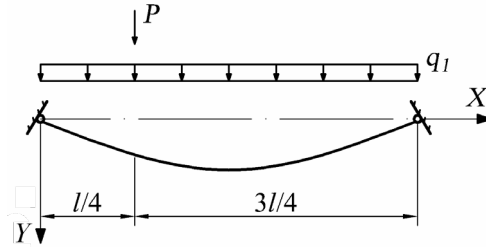


Рис.3.6. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 на всем пролете и дополнительной сосредоточенной нагрузки P в четверти пролета

Выражения для M^6 и y^6 примут вид:

- при $0 \leq x \leq l/4$

$$M^6 = \frac{3}{4}Px + \frac{q_1x}{2}(l-x);$$

$$y^6 = \frac{Px}{8EI} \left(\frac{7}{16}l^2 - x^2 \right) + \frac{q_1x}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

- при $l/4 \leq x \leq l$

$$M^6 = \frac{3}{4}Px - P \left(x - \frac{l}{4} \right) + \frac{q_1x}{2}(l-x);$$

$$y^6 = \frac{Px}{8EI} \left(\frac{7}{16}l^2 - x^2 \right) + \frac{P}{6EI} \left(x - \frac{l}{4} \right)^3 + \frac{q_1x}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

а для M_p^6 и y_p^6 запишутся так:

$$M_p^6 = \frac{3}{32}q_1l^2 + \frac{3}{16}Pl,$$

$$y_p^6 = \frac{19}{2048} \cdot \frac{q_1l^4}{EI} + \frac{3}{256} \cdot \frac{Pl^3}{EI}.$$

Подставляя указанные выражения в (3.49) и выполняя далее интегрирование и некоторые преобразования, получим дифференциальное уравнение для определения распора в упругой нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned}
& \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{1}{64} \cdot \frac{k_1 k_7 l^4 E F^2}{H^2 (k_7 H l^2 + 192 k_1 E I)^2} \left[k_6 k_7 - 564 \cdot \frac{k_1^3 E I}{k_7 H l^2 + 192 k_1 E I} \right] - \\
& - \frac{1}{768} \cdot \frac{k_8 k_9 l^4 E F^2}{H^2 (k_9 H l^2 + 768 k_8 E I)^2} \left[k_9 q_1 l - 4068 \cdot \frac{k_8^3 E I}{k_9 H l^2 + 768 k_8 E I} \right] - \\
& - \frac{3}{256} \cdot \frac{k_{10} k_{11} l^4 E F^2}{H^2 (k_{11} H l^2 + 768 k_{10} E I)^2} \left[k_{11} q_1 l - 13824 \cdot \frac{k_{10}^3 E I}{k_{11} H l^2 + 768 k_{10} E I} \right] + \\
& + \frac{441}{2} \cdot \frac{k_{12}^4 k_{13} l^4 E^2 F^2 I}{H^2 (k_{13} H l^2 + 768 k_{12} E I)^2} = 0, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

где $k_7 = 19q_1 l + 24P$; $k_8 = 7q_1 l + 12P$; $k_9 = 497q_1 l + 648P$; $k_{10} = 5q_1 l + 4P$; $k_{11} = 395q_1 l + 408P$; $k_{12} = q_1 l + 4P$; $k_{13} = 71q_1 l + 88P$.

§ 3.4. Решение дифференциальных уравнений

Решение дифференциальных уравнений (3.23), (3.33), (3.38), (3.44), (3.46), (3.48) и (3.50) можно получить, воспользовавшись разложением искомой функции в ряд Тейлора

$$H = H_0 + H'_0(F - F_0) + \frac{1}{2!} H''_0(F - F_0)^2 + \dots, \tag{3.51}$$

где H_0 и F_0 – начальные условия.

Коэффициенты ряда Тейлора легко находятся путем последовательного дифференцирования уравнений (3.23), (3.33), (3.38), (3.44), (3.46), (3.48) и (3.50)

$$H'_0 = \frac{dH}{dF}; \tag{3.52}$$

$$H''_0 = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{dH}{dF} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{dH}{dF} \right) \frac{dH}{dF}. \tag{3.53}$$

За H_0 можно принять значение распора, возникающего в недеформируемой нити под действием начальной и дополнительной нагрузок, за F_0 – площадь поперечного сечения нити, в которой при распоре H_0 напряжения от изгиба минимальны.

Методику определения F_0 покажем на примере нити конечной жесткости, находящейся под действием вертикальной нагрузки. Рассмотрим нить кольцевого сечения (в виде трубы) с толщиной стенки t и средним радиусом r_0 ($r_0 = \frac{R+r}{2}$, где R – наружный, а r – внутренний радиусы трубы). Для такого поперечного сечения имеем:

$$I = \frac{F^3}{8\pi^2 t^2}; \quad (3.54)$$

$$W = \frac{F^2}{4\pi t}, \quad (3.55)$$

где $F = 2\pi r_0 t$ – площадь поперечного сечения; W – момент сопротивления поперечного сечения трубы.

Напряжения от изгиба в нити конечной жесткости вычисляются по формуле

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{M_z}{W}, \quad (3.56)$$

которая с учетом (3.5), (3.54) и (3.55) приводится к виду

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{4\pi t M_z^6 F}{8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3}, \quad (3.57)$$

где $\alpha = I \frac{y^6}{M_z^6}$.

После дифференцирования (3.57) по F находим:

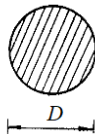
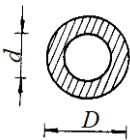
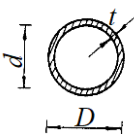
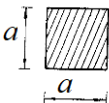
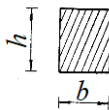
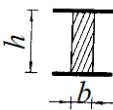
$$\frac{d\sigma_{\text{и}}}{dF} = \frac{4\pi t M_z^6 (8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3) - 12\pi t M_z^6 F^3}{(8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3)^2}. \quad (3.58)$$

Приравнивая правую часть этого равенства к нулю, после некоторых преобразований, получим соотношение для F_0 :

$$F_0 = \sqrt[3]{4\pi^2 t^2 \alpha H_0}. \quad (3.59)$$

Геометрические характеристики и начальное значение площади поперечного сечения F_0 для некоторых других характерных поперечных сечений приведены в табл. 3.1. При составлении табл. 3.1 толщина полок двутавра полагалась малой по сравнению с прочими размерами сечения.

Таблица 3.1

Тип поперечного сечения	Эскиз поперечного сечения	Геометрические характеристики			Начальное значение площади F_0
		площадь F	момент инерции I	момент сопротивления W	
Круг		$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{F^2}{4\pi}$	$\frac{F}{4} \sqrt{\frac{F}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{4}{3}} \pi \alpha H_0$
Толстостенное кольцо		$\frac{\pi D^2}{4} (1 - \gamma^2)$ $\gamma = \frac{d}{D}$	$\frac{F^2}{4\pi} \cdot \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2}$	$\frac{F(1 + \gamma^2)}{4} \sqrt{\frac{F}{\pi(1 - \gamma^2)}}$	$\sqrt{\frac{4\pi(1 - \gamma^2)}{3(1 + \gamma^2)}} \alpha H_0$
Тонкостенное кольцо (труба)		$\pi d_0 t$ $d_0 = \frac{D + d}{2}$	$\frac{F^3}{8\pi^2 t^2}$	$\frac{F^2}{4\pi t}$	$\sqrt[3]{4\pi^2 t^2} \alpha H_0$
Квадрат		a^2	$\frac{F^2}{12}$	$\frac{F}{6}$	$\sqrt{12\alpha H_0}$
Прямоугольник		bh	$\frac{F^3}{12b^2}$	$\frac{F^2}{6b}$	$\sqrt[3]{6b^2} \alpha H_0$
Двутавр		$bh + 2f$	$\frac{F^3 + 6F^2 f}{12b^2}$ $F = bh$	$\frac{F^2 + 6Ff}{6b}$	$\sqrt[3]{\beta + \sqrt{\beta^2 - f^6}} + \sqrt[3]{\beta - \sqrt{\beta^2 - f^6}} - f$ $\beta = 3b^2 \alpha H_0 - f^3$
Примечание. Здесь приняты следующие обозначения: H_0 – начальное значение распора в нити; f – площадь полки двутавра; $\alpha = (I_y^6) / M_z^6$.					

Применение предлагаемой методики покажем на примере расчета нити конечной жесткости, представляющей собой круглую стальную трубу наружным диаметром $D = 720$ мм с толщиной стенки $t = 10$ мм. Труба шарнирно подвешена к двум опорам, расположенным на одном уровне (рис. 3.7).

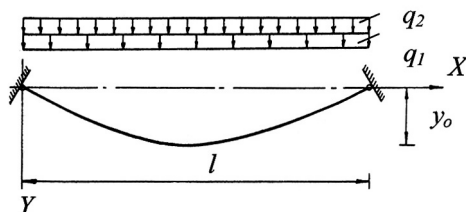


Рис. 3.7. К примеру расчета

Пролет трубы $l = 150$ м. Начальная равномерно распределенная нагрузка (собственный вес трубы) $q_1 = 1,716$ кН/м, дополнительная равномерно распределенная нагрузка $q_2 = 1,961$ кН/м расположена на всем пролете. Стрела провисания нити при начальной нагрузке $y_0 = 6$ м. Модуль упругости материала стенок трубы $E = 20,59 \cdot 10^7$ кН/м². Нить работает с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок.

Определяем H_0 , считая нить недеформируемой,

$$H_0 = \frac{M_{z,x=l/2}^6 (y_{x=l/2}^6 - y_0)}{y_{x=l/2}^6 y_0} = \frac{10350 \cdot (83,71 - 6)}{83,71 \cdot 6} = 1600,05 \text{ кН.}$$

Вычисляем значение F_0 по формуле (3.59)

$$F_0 = \sqrt[3]{4\pi^2 t^2 \alpha H_0} = \sqrt[3]{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,01^2 \cdot 11,383 \cdot 10^{-6} \cdot 1600,05} = 0,0416 \text{ м}^2$$

и значение I_0 по формуле (3.54)

$$I_0 = \frac{F_0^3}{8\pi^2 t^2} = \frac{0,0416^3}{8 \cdot 3,14^2 \cdot 0,01^2} = 90,935 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

Из уравнения (3.25) определяем величину производной от H по F

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dF} &= \left[\frac{F_0}{H_0} + \frac{25(q_1 + q_2)^2 l^6 E F_0^2}{12 H_0^2 (5 l^2 H_0 + 48 E I_0)^2} - \frac{120(q_1 + q_2)^2 l^6 E^2 F^2 I_0}{H_0^2 (5 l^2 H_0 + 48 E I_0)^3} \right]^{-1} = \\ &= \left[\frac{0,0416}{1600,05} + \frac{25 \cdot (1,716 + 1,961)^2 \cdot 150^6 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 0,0416^2}{12 \cdot 1600,05^2 (5 \cdot 150^2 \cdot 1600,05 + 48 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4})^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{120 \cdot (1,716 + 1,961)^2 \cdot 150^6 \cdot (20,59 \cdot 10^7)^2 \cdot 0,0416^2 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4}}{1600,05^2 \cdot (5 \cdot 150^2 \cdot 1600,05 + 48 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4})^3} \right]^{-1} = \\ &= 2527,359 \text{ кН/м}^2. \end{aligned}$$

По формуле (3.51) находим распор в нити

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H'_0(F - F_0) = \\ &= 1600,05 + 2527,359 \cdot (0,02231 - 0,0416) = 1551,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

При трех членах ряда величина распора равна $H = 1583,28$ кН. С увеличением числа членов ряда точность решения практически не изменяется, т.е. уже при трех членах ряда получаем достаточно точный результат.

Изгибающий момент и стрелу провисания в середине пролета нити конечной жесткости определяем по формулам (3.3) и (3.5) соответственно

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{(M_z^6)^2}{H y^6 + M_z^6} = \frac{10350^2}{1583,28 \cdot 83,71 + 10350} = 748,64 \text{ кНм}; \\ y &= \frac{M_z^6 y^6}{H y^6 + M_z^6} = \frac{10350 \cdot 83,71}{1583,28 \cdot 83,71 + 10350} = 6,06 \text{ м}. \end{aligned}$$

Напряжения в середине пролета нити находим по известной формуле

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{H}{F} \pm \frac{M_z}{W} = \frac{1583,28}{0,02231 \cdot 10} \pm \frac{748,64}{0,003905 \cdot 10} = \\ &= 7096,73 \pm 19171,32 = \begin{cases} +26268,05 & \text{Н/см}^2 \\ -12074,59 & \text{Н/см}^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

§ 3.5. Учет влияния температурных воздействий

При эксплуатации висячих систем большое влияние на их напряженно-деформированное состояние оказывают температурные воздействия [186]. Изменение температуры на Δt° вызывает изменение длины нити, что, в свою очередь, вызывает изменения стрелы провисания и, следовательно, внутренних усилий (рис. 3.8).

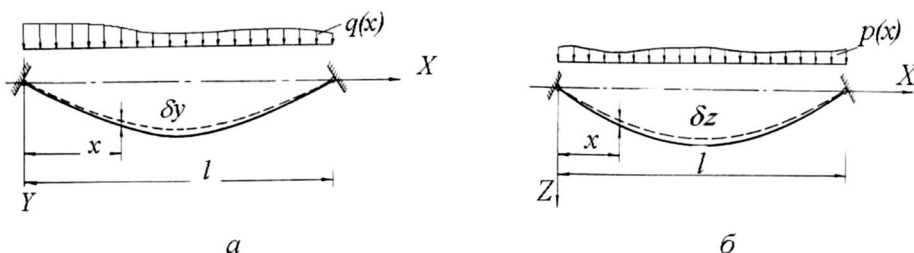


Рис. 3.8. Деформация нити при изменении температуры:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

Определим эти величины, для чего воспользуемся описанным ранее методом расчета. Только в данном случае вместо независимой переменной F примем значение приращения температуры Δ_t .

Как уже отмечалось выше, если температура получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное $\delta\Delta_t$, то изменится напряженно-деформированное состояние нити. Распор H получит некоторое приращение δH . В вертикальной плоскости изгибающий момент M_z получит приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения на величину δy . Соответственно, в горизонтальной плоскости изгибающий момент M_y получит приращение δM_y , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити ψ – приращение $\delta\psi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δz .

Заметим, что выражения для приращений δy , δz , δM_z и δM_y по-прежнему будут равны (3.7) – (3.10), а соотношения для приращений δdx , $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ можно записать в виде

$$\delta dx = \frac{\delta H}{EF} dx + \alpha_t \delta\Delta_t dx; \quad (3.60)$$

$$\delta d\varphi = -\frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{EI(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (3.61)$$

$$\delta d\psi = -\frac{(M_y^6)^2 z^6 \delta H}{EI(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx, \quad (3.62)$$

где α_t – коэффициент линейного температурного расширения материала нити.

Запишем соотношения, описывающие работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузок $q(x)$ и $p(x)$ на перемещениях δy и δz соответственно и находятся по формулам (3.14) и (3.15). Работа внутренних сил состоит из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx

$$U_2^1 = -\int_0^l \left(\frac{\delta H}{EF} + \alpha_t \delta \Delta_t \right) (H + \delta H) dx \quad (3.63)$$

и работы изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ соответственно

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{EI(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (3.64)$$

$$U_2^3 = \int_0^l \frac{(M_y^6)^2 z^6 \delta H}{EI(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx. \quad (3.65)$$

Подставляя (3.14), (3.15) и (3.63) – (3.65) в (3.19), деля полученное выражение почленно на δH и переходя к пределу при $\delta \Delta_t \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, приходим к дифференциальному уравнению, связывающему распор в нити конечной жесткости с изменением температуры

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_t}{dH} + \frac{1}{\alpha_t EF} + \frac{1}{\alpha_t lH} \int_0^l \frac{q(x) M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \frac{1}{\alpha_t lH} \int_0^l \frac{p(x) M_y^6 n^2}{(Hn + EIM_y^6)^2} dx - \\ - \frac{EI}{\alpha_t lH} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx - \frac{EI}{\alpha_t lH} \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 n}{(Hn + EIM_y^6)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

При этом, как указывалось выше, интегралы, входящие в последнее

уравнение, зависят от вида приложенной к нити нагрузки и условий закрепления ее концов. Их значения по-прежнему можно вычислять либо непосредственным интегрированием, либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса.

Для решения дифференциального уравнения (3.66) можно воспользоваться двумя способами. При сложных нагружениях (например, равномерно распределенная и несколько сосредоточенных или участковых нагрузок) решение полученного уравнения удобно получить, используя разложение искомой функции в ряд Маклорена

$$H = H_1 + H'_1 \Delta_t + \frac{1}{2!} H''_1 \Delta_t^2 + \dots, \quad (3.67)$$

где H_1 – распор в нити при действии начальной и дополнительной нагрузок. Коэффициенты ряда Маклорена получаются путем последовательного дифференцирования уравнения (3.66)

$$H'_1 = \frac{dH}{d\Delta_t}; \quad (3.68)$$

$$H''_1 = \frac{\partial}{\partial \Delta_t} \left(\frac{dH}{d\Delta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{dH}{d\Delta_t} \right) \frac{dH}{d\Delta_t}. \quad (3.69)$$

При простых нагружениях решение рассматриваемого уравнения можно получить в общем виде. Например, для случая вертикальной равномерно распределенной нагрузки и шарнирного закрепления концов нити уравнение (3.66) примет вид

$$\frac{d\Delta_t}{dH} + \frac{1}{\alpha_t EF} + \frac{25q^2 l^6}{12\alpha_t H(5l^2 H + 48EI)^2} - \frac{120q^2 l^6 EI}{\alpha_t H(5l^2 H + 48EI)^3} = 0. \quad (3.70)$$

Общий интеграл уравнения (3.70) равен

$$\begin{aligned} \alpha_t \Delta_t = & \frac{\omega}{(48EI)^2} \ln \frac{5l^2 H}{5l^2 H + 48EI} + \\ & + \frac{\omega}{48EI} \cdot \frac{5l^2 H + 192EI}{(5l^2 H + 48EI)^2} - \frac{5l^2 H + 48EI}{5l^2 EF} + C, \end{aligned} \quad (3.71)$$

где $\omega = \frac{5}{12} q^2 l^6$.

Значение произвольной постоянной интегрирования можно получить, исходя из условия, что при $\Delta_t = 0$ распор $H = H_1$. Подставляя затем значение C в выражение (3.71), придем к искомому решению, описывающему напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости при изменении температуры.

Следует отметить, что полученные выше решения для нитей конечной жесткости в равной мере описывают поведение и гибкой упругой нити. При этом следует иметь в виду, что зависимости для гибкой нити получаются из соответствующих зависимостей для нити конечной жесткости путем учета условия $I = 0$. Например, для гибкой упругой нити вместо уравнения (3.66) в случае вертикальной нагрузки будем иметь:

$$\frac{d\Delta_t}{dH} = -\frac{D}{\alpha_t l H^3} - \frac{1}{\alpha_t EF}. \quad (3.72)$$

Здесь $D = \int_0^l q(x) M_z^0 dx$ – интегральная характеристика нагрузки.

Зависимость (3.72) – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Общий интеграл (3.72) примет вид

$$\Delta_t = \frac{D}{2\alpha_t l H^2} - \frac{H}{\alpha_t EF} - C. \quad (3.73)$$

Произвольную постоянную интегрирования C , как и в случае нити конечной жесткости, определим из условия, что при $\Delta_t = 0$ распор $H = H_1$. Подставляя значение C в выражение (3.73), получим решение рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$H^3 + \left(\frac{8y_0^2}{3l^2} EF + \alpha_t \Delta_t EF \right) H^2 = \frac{DEF}{2l}. \quad (3.74)$$

Если здесь принять $\Delta_t = 0$, то уравнение (3.74) преобразуется к известному соотношению, полученному в работе [97] для гибкой упругой нити.

§ 3.6. Учет влияния деформации основания

Большое влияние на напряженно-деформированное состояние висячих систем повышенной жесткости, кроме изменения температуры окружающей среды, может оказать также деформация основания [186]. Допустим, что в результате такой деформации одна из опор нити сместилась по оси X на величину u , по оси Y – на величину v и по оси Z – на величину w (рис. 3.9).

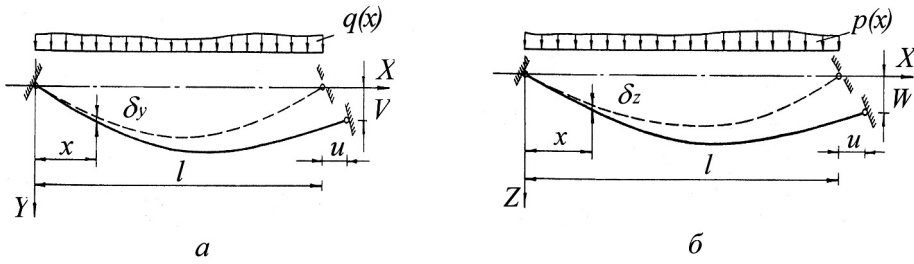


Рис. 3.9. Деформация нити при смещении и осадке опоры:
 а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

Суммарное изменение пролета нити составит

$$\Delta_l = u + \frac{v^2}{l} + \frac{w^2}{l}, \quad (3.75)$$

а длина пролета будет равна $l + \Delta_l$. В связи с этим интегрирование при определении работ внешних и внутренних сил в данном случае должно быть распространено не на длину l , а на новую длину $l + \Delta_l$. Но, как отмечено в [62], величина изменения пролета Δ_l очень мала по сравнению с l и интегрировать можно по длине l .

Определим приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости, возникающие в результате увеличения пролета нити на очень малую, но конечную величину $\delta\Delta_l$. Как и в случае с изменившейся температурой, соотношения для приращений δu , δz , δM_z , δM_y , $\delta d\varphi$, $\delta d\psi$ примем в виде (3.7) – (3.10), (3.61), (3.62). Упругое удлинение бесконечно малого элемента нити вычисляется по формуле

$$\delta dx = \frac{\delta H}{EF} dx. \quad (3.76)$$

Работу внешней нагрузки запишем в виде (3.14) и (3.15), а для работы распора $H + \delta H$ на пролете Δ_l будем иметь

$$U_1^3 = (H + \delta H)\delta\Delta_l. \quad (3.77)$$

Работу действующих в элементе dx изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ запишем в виде (3.64) и (3.65), а работу усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx выразим следующим образом:

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{\delta H}{EF} (H + \delta H) dx. \quad (3.78)$$

Подставляя полученные выражения для работ внешних и внутренних сил в уравнение (3.19), получим:

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \frac{q(x) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_0^l \frac{p(x) M_y^6 (z^6)^2 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx + \\ & + (H + \delta H) \delta \Delta_l - \int_0^l \frac{\delta H}{EF} (H + \delta H) dx + \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 y^6 \delta H}{EI (Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \\ & + \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 z^6 \delta H}{EI (Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)^2} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Разделив уравнение (3.79) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta \Delta_l \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, получим следующую дифференциальную зависимость между величинами распора и приращения пролета упругой нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned} & \frac{d\Delta_l}{dH} - \frac{l}{EF} - \frac{1}{H} \int_0^l \frac{q(x) M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx - \frac{1}{H} \int_0^l \frac{p(x) M_y^6 n^2}{(Hn + EIM_y^6)^2} dx - \\ & - \frac{EI}{H} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx - \frac{EI}{H} \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 n}{(Hn + EIM_y^6)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Решение уравнения (3.80), как и в предыдущем случае, можно выполнить двумя способами: либо численным (разложением искомой функции в ряд Маклорена), либо аналитическим.

Если в полученном уравнении принять $p(x) = 0$ и $I = 0$, то придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Delta_l}{dH} = \frac{D}{H^3} + \frac{l}{EF}. \quad (3.81)$$

Полученная зависимость является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, общий интеграл которого имеет вид

$$\Delta_l = -\frac{D}{2H^2} + \frac{Hl}{EF} + C. \quad (3.82)$$

Произвольную постоянную интегрирования в решении (3.82) определим из условия, что при Δ_l распор $H = H_1$. Подставляя затем значение произвольной постоянной интегрирования в выражение (3.82), получим решение в следующем виде:

$$H^3 + EF \left(\frac{8y_0^2}{3l^2} - \frac{\Delta_l}{l} \right) H^2 = \frac{DEF}{2l}. \quad (3.83)$$

Отметим, что здесь, как и в случае с изменяющейся температурой, при $\Delta_l = 0$ уравнение (3.83) преобразуется к известному соотношению [97] для гибкой упругой нити, нагруженной произвольной вертикальной нагрузкой.

§ 3.7. Расчет многопролетной нити на упруго-податливых опорах

Задачи, связанные с расчетом многопролетных нитей, часто возникают при проектировании покрытий линейно-протяженных промышленных зданий и инженерных сооружений типа трубопроводных переходов, висячих мостов и т.п. Рассмотрим решение указанной задачи.

Предположим, что многопролетная нить конечной жесткости с поперечным сечением F , моментом инерции I , модулем упругости E , пролетами $l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_n$ подвешена к упруго-податливым опорам с коэффициентами жесткости $k_0, k_1, \dots, k_i, \dots, k_n$ и работает с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Пусть также известно, что нить нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия. Выберем, как и ранее, в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Если площадь поперечного сечения увеличится на бесконечно малую величину δF , то изменится напряженное состояние нити и ее геометрия. Тогда в i -м пролете распор H_i получит некоторое приращение δH_i , изгибающий момент M_{zi} – приращение δM_{zi} , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ_i – приращение $\delta \varphi_i$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δu_i (рис. 3.10). При этом опоры получают некоторые перемещения $\delta \Delta_{i-1}$ и $\delta \Delta_i$. Последние хотя и будут небольшими, но могут оказать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние нити, в частности, на перераспределение усилий в смежных пролетах.

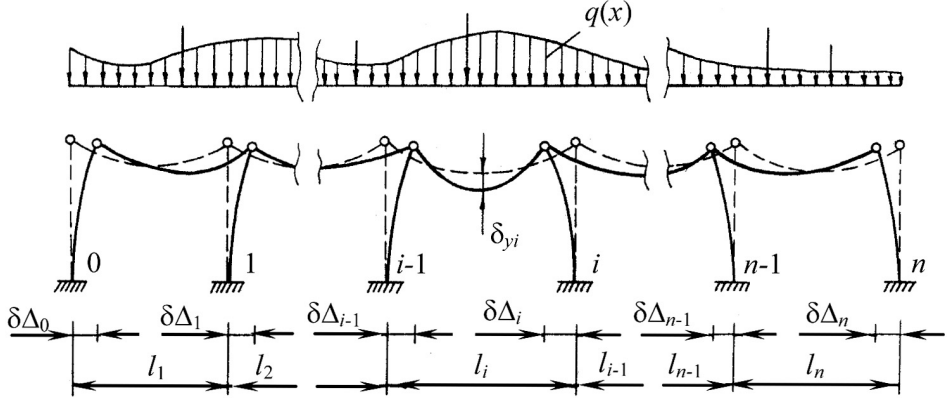


Рис. 3.10. К расчету многопролетной нити на упруго-податливых опорах

Представим приращения усилий и ординат провисания нити в виде

$$\delta y_i = - \frac{M_{zi}^6 (y_i^6)^2 \delta H_i}{(H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)(H_i y_i^6 + M_{zi}^6)}; \quad (3.84)$$

$$\delta M_{zi} = - \frac{(M_{zi}^6)^2 y_i^6 \delta H_i}{(H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)(H_i y_i^6 + M_{zi}^6)}; \quad (3.85)$$

$$\delta dx_i = \frac{E_i F_i \delta H_i - H_i E_i \delta F_i}{E_i F_i (E_i F_i + E_i \delta F_i)} dx; \quad (3.86)$$

$$\delta d\varphi_i = - \frac{(M_{zi}^6)^2 (y_i^6 \delta H_i E_i I_i + y_i^6 H_i E_i \delta I_i + y_i^6 \delta H_i E_i \delta I_i + M_{zi}^6 E_i \delta I_i)}{E_i I_i (E_i I_i + E_i \delta I_i)(H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)(H_i y_i^6 + M_{zi}^6)} dx. \quad (3.87)$$

Виртуальные перемещения опор могут быть записаны следующим образом:

$$\delta \Delta_{i-1} = \pm k_{i-1}^{-1} (\delta H_{i-1} - \delta H_i), \quad (3.88)$$

$$\delta \Delta_i = \pm k_i^{-1} (\delta H_i - \delta H_{i+1}), \quad (3.89)$$

при этом знак «плюс» соответствует перемещению опоры наружу, а знак «минус» – внутрь пролета.

Определим работу внешних сил, т.е. нагрузки $q_i(x)$, на перемещениях δy_i

$$U_{li}^1 = - \int_0^{li} \frac{q_i(x) M_{zi}^6 (y_i^6)^2 \delta H_i}{(H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)(H_i y_i^6 + M_{zi}^6)} dx \quad (3.90)$$

и возникающих в упруго-податливых опорах реакций на виртуальных перемещениях опор по направлению этих реакций

$$U_{li}^2 = \pm k_{i-1}^{-1} (\delta H_{i-1} - \delta H_i) (H_{i-1} + \delta H_{i-1} - H_i - \delta H_i) \pm \\ \pm k_i^{-1} (\delta H_i - \delta H_{i+1}) (H_i + \delta H_i - H_{i+1} - \delta H_{i+1}). \quad (3.91)$$

Для работы внутренних сил имеем

$$U_{2i}^1 = - \int_0^{li} \frac{(E_i F_i \delta H_i - H_i E_i \delta F_i)(H_i + \delta H_i)}{E_i F_i (E_i F_i + E_i \delta F_i)} dx; \quad (3.92)$$

$$U_{2i}^2 = \int_0^l \frac{(M_{zi}^6)^4 (y_i^6 \delta H_i E_i I_i + y_i^6 H_i E_i \delta I_i + y_i^6 \delta H_i E_i \delta I_i + M_{zi}^6 E_i \delta I_i)}{E_i I_i (E_i I_i + E_i \delta I_i) (H_i y_i^6 + M_{zi}^6) (H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)^2} dx. \quad (3.93)$$

Применим для решения задачи принцип Лагранжа. Подставляя (3.90) – (3.93) в (3.19) и переходя в полученном выражении к пределу при $\delta F_i \rightarrow 0$ и $\delta H_i \rightarrow 0$, после некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению, описывающему напряженно-деформированное состояние многопролетной нити конечной жесткости на упруго-податливых опорах

$$\frac{dF_i}{dH_i} - \frac{F_i}{H_i} + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i} (\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}) + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}) - \\ - \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} \int_0^{li} \frac{q_i(x) M_{zi}^6 m_i^2}{(H_i m_i + E_i I_i M_{zi}^6)^2} dx + \frac{E_i^2 F_i^2 I_i}{l_i H_i^2} \int_0^{li} \frac{(M_{zi}^6)^4 m_i}{(H_i m_i + E_i I_i M_{zi}^6)^3} dx = 0, \quad (3.94)$$

где, как и прежде, $m_i = E_i I_i y_i^6$.

Записав выражение (3.94) для каждого пролета, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений. В результате решения данной системы, например, одним из численных методов [171], найдем искомые значения распоров $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$. Ординаты провисания и изгибающие моменты в пролетах нити определяются из зависимостей (3.3) и (3.5).

Отметим, что по аналогии с уравнением трех моментов соотношение (3.94) может быть названо уравнением трех распоров.

Решение задачи для нити конечной жесткости, подвешенной на упруго-податливых опорах, можно получить из (3.94), если принять количество пролетов равным $i = 1$. Таким образом, в данном случае будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} + \frac{EF^2}{lH} (\pm k_0^{-1} \pm k_1^{-1}) - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

В свою очередь, если в уравнении (3.94) положить $I_i = 0$, то придем к решению для многопролетной гибкой нити на упруго-податливых опорах

$$\begin{aligned} \frac{dF_i}{dH_i} - \frac{F_i}{H_i} + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i} (\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}) + \\ + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}) - \frac{D_i E_i F_i^2}{l_i H_i^4} = 0, \end{aligned} \quad (3.96)$$

где по-прежнему D_i – интегральная характеристика нагрузки. Эта зависимость является одним из частных случаев дифференциального уравнения Бернулли. Общий интеграл уравнения (3.96) будет:

$$\frac{1}{E_i F_i} = \frac{C}{H_i} + \frac{D_i}{2l_i H_i^3} + \frac{\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}}{l_i} + \frac{\ln H_i}{l_i H_i} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}). \quad (3.97)$$

Значение произвольной постоянной интегрирования C найдем из условия, что при $E_i F_i = \infty$ и $k_{i-1} = k_i = \infty$ величина распора в нити определяется по известной формуле

$$H_i = \frac{\sqrt{3l_i D_i}}{4f_i}, \quad (3.98)$$

где f_i – стрела провисания нерастяжимой гибкой нити в середине пролета при равномерно распределенной нагрузке.

Подставив (3.98) в (3.97), определим значение C . Затем, в свою очередь, подставив найденное значение произвольной постоянной в выражение (3.97), получим:

$$\begin{aligned} H_i^3 + \frac{8E_i F_i l_i + 3n_i^2 (\pm k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \pm k_i^{-1} H_{i+1}) \ln H_i}{3n_i^2 [l_i + E_i F_i (\mp k_{i-1}^{-1} \mp k_i^{-1})]} H_i^2 = \\ = \frac{D_i E_i F_i}{2[l_i + E_i F_i (\mp k_{i-1}^{-1} \mp k_i^{-1})]}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Здесь принято, что $n_i = l_i / f_i$ – коэффициент, который вычисляется без учета упругих деформаций нити, т.е. по ее исходным геометрическим размерам до нагружения.

Если в полученном уравнении положить $i = 1$, то придем к случаю гибкой нити на упруго-податливых опорах, для которого выражение (3.99) запишется в виде

$$H^3 + \frac{8EF l}{3n^2[l + EF(\mp k_0^{-1} \mp k_1^{-1})]} H^2 = \frac{DEF}{2[l + EF(\mp k_0^{-1} \mp k_1^{-1})]}. \quad (3.100)$$

Заметим, что данный результат был получен впервые Е.М. Сидоровичем [144].

§ 3.8. Расчет двухпоясной висячей системы

Висячие системы с развитым в вертикальной плоскости поперечным сечением (висячие фермы), сохраняя все традиционные преимущества висячих конструкций в части рационального использования прочностных свойств материалов, способности перекрывать практически неограниченные пролеты, архитектурной выразительности сооружений в целом и пр., вместе с тем обладают повышенной жесткостью на изгиб в плоскости провисания. Последнее позволяет значительно уменьшить кинематические перемещения при действии сосредоточенных и несимметричных нагрузок. Висячие фермы обычно различают по виду воспринимаемых поясами усилий (гибкие или конечной жесткости) и по типу решетки (соединительных элементов). Если различие вида соединительных элементов практически не сказывается на методах расчета висячих ферм, поскольку распорки или подвески принимают обычно абсолютно жесткими, то различие типов поясов предопределяет и различные методы статического расчета рассматриваемых конструкций [41]. Расчет висячих ферм с гибкими поясами достаточно полно представлен в работах [85, 88, 117]. Однако расчет ферм с одним или двумя поясами, выполненными из нитей конечной жесткости, еще не получил должного развития.

Рассмотрим висячую ферму, пояса которой выполнены из нитей конечной жесткости и связаны между собой по длине посредством подвесок или распорок (рис. 3.11). При рассмотрении напряженно-деформированного состояния такой системы примем, в дополнение к предпосылкам расчета нитей конечной жесткости, следующие допущения:

- соединительные элементы являются абсолютно жесткими, что исключает взаимное смещение поясов фермы в горизонтальной плоскости;
- связи между поясами расположены непрерывно по длине фермы, что позволяет использовать дифференциальную, а не дискретную форму записи уравнений равновесия.

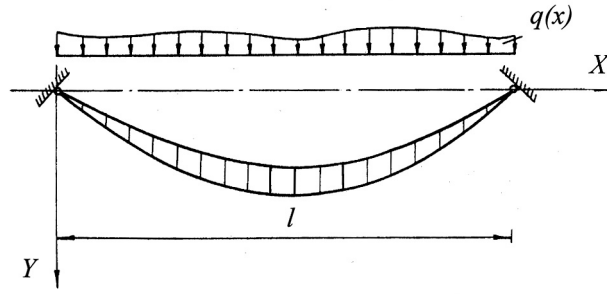


Рис. 3.11. К расчету двухпоясной висячей системы

Геометрию висячей фермы определяет расстояние между ее поясами $h = f(x)$, например, при $h = \text{const}$ имеем систему с параллельными поясами, в противном случае – с непараллельными поясами. Некоторая линия $y = f(x)$ является осью фермы, если для нее соблюдается условие

$$F_1 h_1 - F_2 h_2 = 0, \quad (3.101)$$

где F_1 и F_2 – площади поперечных сечений соответственно нижнего и верхнего поясов; h_1 и h_2 – расстояния от нейтральной оси до осей соответствующих поясов.

Расчетную схему висячей фермы примем в виде нити конечной жесткости с приведенными характеристиками поперечного сечения. В общем случае приведенная изгибная жесткость фермы с непараллельными поясами будет величиной переменной

$$EI(x) = E_1 I_1 + E_1 F_1 h_1^2 + E_2 I_2 + E_2 F_2 h_2^2, \quad (3.102)$$

а приведенная жесткость на растяжение – величиной постоянной

$$EF = E_1 F_1 + E_2 F_2, \quad (3.103)$$

где $E_1 I_1$ и $E_2 I_2$ – жесткость на изгиб соответственно нижнего и верхнего поясов фермы; E_1 и E_2 – модули упругости материала поясов.

Применяя в дальнейшем к расчету висячей фермы, работающей с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, изложенный ранее подход, получим для определения распора в системе дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x) M_z^6 m^2}{[Hm + EI(x) M_z^6]^2} dx + \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{EI(x) (M_z^6)^4 m}{[Hm + EI(x) M_z^6]^3} dx = 0. \quad (3.104)$$

В случае работы фермы без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной вертикальных нагрузок уравнение для определения распора имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m[m + EI(x)y_0]}{[Hm + EI(x)M_z^6]^2} dx + \\ + \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{EI(x)(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0)[m + EI(x)y_0]}{[Hm + EI(x)M_z^6]^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Методика решения дифференциальных уравнений (3.104) и (3.105) аналогична приведенной ранее методике решения дифференциальных уравнений для нитей конечной жесткости.

Прогибы и изгибающие моменты в расчетной нити определяются из выражений, получаемых на основе статических соотношений (3.3), (3.5) или (3.29), (3.31) в зависимости от условий работы нити.

Перейдем к определению усилий в поясах фермы. Запишем выражения для распора и изгибающего момента, действующих в системе (рис. 3.12), в виде

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2. \\ M_z &= M_{z1} + H_1 h_1 + M_{z2} - H_2 h_2. \end{aligned} \quad (3.106)$$

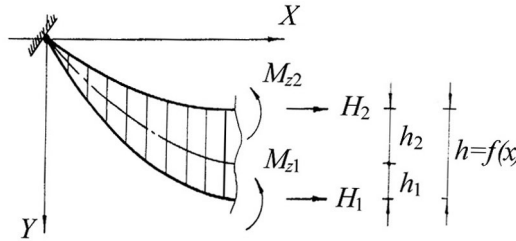


Рис. 3.12. Схема усилий, действующих в висячей системе

В уравнение для M_z входят неизвестные изгибающие моменты, действующие в поясах фермы. Для их определения воспользуемся условием совместности деформаций для поясов в отдельности и фермы в целом

$$y(x) = y_1(x) = y_2(x). \quad (3.107)$$

Пользуясь соотношением (3.2) с учетом условия (3.107) для висячей фермы, работающей с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, получим:

$$M_{z1} = M_{z1}^6 \frac{y}{y_1^6}, \quad M_{z2} = M_{z2}^6 \frac{y}{y_2^6}. \quad (3.108)$$

Далее, подставляя выражения (3.108) в (3.106) и приводя подобные члены, получаем для определения распоров в поясах висячей фермы следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H \frac{h_2}{h} + \frac{M_z}{h} - \frac{yM_{z1}^6}{hy_1^6} - \frac{yM_{z2}^6}{hy_2^6}, \\ H_2 &= H \frac{h_1}{h} - \frac{M_z}{h} + \frac{yM_{z1}^6}{hy_1^6} + \frac{yM_{z2}^6}{hy_2^6}. \end{aligned} \right\}. \quad (3.109)$$

Из анализа полученных соотношений видно, что применение нитей конечной жесткости в висячих фермах приводит к уменьшению распора в нижнем и увеличению его в верхнем поясе.

Аналогично можно получить расчетные зависимости и для висячей фермы, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной вертикальных нагрузок. При этом следует отметить, что напряженно-деформированное состояние висячих ферм с одним или двумя гибкими поясами также описывается уравнениями (3.108) и (3.109). Только в этом случае необходимо учесть, что изгибающий момент, определяемый по формулам (3.108), для соответствующего пояса равен нулю. В частном случае висячей фермы с двумя гибкими поясами из уравнений (3.109) получается известное решение, приведенное в работе [41].

При действии на висячую ферму горизонтальной нагрузки рассмотрим два основных случая граничных условий:

- шарнирное опирание на опорах (при свободном повороте системы от вертикальной и горизонтальной нагрузок);
- жесткое защемление на опорах.

В первом случае граничных условий ферма при действии горизонтальной нагрузки повернется относительно вертикальной оси на угол η (рис. 3.13, а), величину которого можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{p}{q_1 + q_2}, \quad (3.110)$$

при этом равнодействующая нагрузок по-прежнему будет действовать в плоскости провисания системы, которая, однако, уже не будет вертикальной. Ее величина определяется по формуле (рис. 3.13, б)

$$R = \sqrt{(q_1 + q_2)^2 + p^2}. \quad (3.111)$$

В данном случае определение усилий в ферме производится аналогично случаю, когда на нее действует начальная и дополнительная вертикальные нагрузки. Только теперь за начальную надо взять сумму начальной и дополнительной вертикальных нагрузок $q_1 + q_2$, а за дополнительную – разность между равнодействующей и начальной нагрузкой $R - (q_1 + q_2)$.

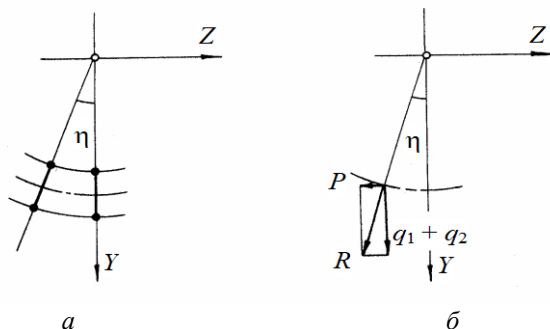


Рис. 3.13. К расчету системы на горизонтальную нагрузку при шарнирном закреплении ее концов:
 а – схема деформирования системы; б – схема нагрузок на систему

Во втором случае граничных условий висячая ферма под действием горизонтальной нагрузки искривляется в пространстве и задача резко усложняется. Помимо изменения усилий в системе, меняется ее изгибная жесткость как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях, являясь функцией угла отклонения системы от вертикальной плоскости. В этом случае для определения усилий в ферме приходится использовать либо метод последовательных приближений [37, 171], либо какой-нибудь численный метод, например, метод конечных элементов [27, 139].

§ 3.9. Оценка предпосылок расчета и полученных решений.

Пределы применимости

Как уже отмечалось выше, положенные в основу настоящей теории исходные положения можно условно разделить на три группы:

- допущения, связанные с условиями работы рассматриваемых конструкций (пологость нити, упругая работа материала, ограничение пределов отношения напряжений изгиба к напряжениям растяжения);
- предпосылки, связанные с характером деформирования поперечных сечений нити (гипотеза плоских сечений, одноосное напряженное состояние продольных волокон нити);

- допущения, отражающие характерные особенности работы нитей конечной жесткости (пропорциональная зависимость между прогибами и изгибающими моментами в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке).

Первые две группы предпосылок являются общепринятыми и широко используются при построении различных теорий расчета балок, гибких нитей и нитей конечной жесткости. В связи с этим их область применения и вносимая в результаты расчетов величина погрешности достаточно подробно исследована многими авторами в большом количестве публикаций [23, 62, 84, 103, 132, 162, 172]. В этих работах показано, что использование указанных допущений обеспечивает для параметров напряженно-деформированного состояния рассчитываемых конструкций весьма точные результаты. Поэтому в настоящей работе оценка погрешности данных предпосылок не производилась.

Что касается третьей группы допущений, то следует отметить, что применительно к висячим системам повышенной жесткости какие-либо исследования погрешности ранее практически не выполнялись. Между тем этот вопрос сам по себе представляет значительный интерес.

Оценка погрешности допущения о пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке была проведена путем сравнения с результатами, полученными точным способом для различных случаев нагружения нитей конечной жесткости. В первую очередь были выбраны варианты действия равномерно распределенной нагрузки, приложенной по всему пролету, и сосредоточенной силы, приложенной посередине пролета, т.е. самая благоприятная и самая неблагоприятная схемы нагружения. Кроме того, дополнительно были рассмотрены два других варианта нагружения, а именно: равномерно распределенной нагрузкой, приложенной на половине пролета и сосредоточенной нагрузкой, приложенной в четверти пролета.

В работе [162] С.П. Тимошенко для разных нагрузок вывел соотношения, характеризующие отличие параметров напряженно-деформированного состояния растянуто-изгибаемого стержня от аналогичных параметров балки без осевой силы. Для середины пролета эти соотношения имеют вид:

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по всему пролету,

$$\varphi_1 = \frac{y}{y^6} = \frac{\frac{1}{chu} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4}, \quad (3.112)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной посередине пролета,

$$\varphi_2 = \frac{y}{y^6} = \frac{u - thu}{\frac{1}{3}u^3}, \quad (3.113)$$

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на половине пролета,

$$\varphi_3 = \frac{y}{y^6} = \frac{\frac{1}{chu} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4}, \quad (3.114)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной в четверти пролета,

$$\varphi_4 = \frac{y}{y^6} = \frac{24}{11u^2} \left[1 - 2 \frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{\frac{3}{2}u}}{u(e^{2u} + 1)} \right], \quad (3.115)$$

где $u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}}$.

В соответствии с предложенным подходом эти же зависимости для координаты $x = l/2$ с учетом формул (3.1) и (3.2), в которые вместо f^6 и M^6 подставляются их значения, после некоторых преобразований можно представить так:

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по всему пролету,

$$\varphi'_1 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{5}{12}u^2}, \quad (3.116)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной посередине пролета,

$$\varphi'_2 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}u^2}, \quad (3.117)$$

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на половине пролета,

$$\varphi'_3 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{5}{12}u^2}, \quad (3.118)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной в четверти пролета,

$$\varphi'_4 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{11}{24}u^2}. \quad (3.119)$$

Аналогично для координаты $x = l/4$ вместо формул (3.112) – (3.115) имеем:

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по всему пролету,

$$\varphi_5 = \frac{y}{y^6} = \frac{16}{19u^2} \left[3 - \frac{8}{u^2} \left(1 - \frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{\frac{3}{2}u}}{e^{2u} + 1} \right) \right], \quad (3.120)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной посередине пролета,

$$\varphi_6 = \frac{y}{y^6} = \frac{24}{11u^2} \left[1 - 2 \frac{e^{\frac{u}{2}}(e^u - 1)}{u(e^{2u} + 1)} \right], \quad (3.121)$$

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на половине пролета,

$$\varphi_7 = \frac{y}{y^6} = \frac{96}{31u^2} \left[1 - \frac{2}{u^2} \left(\frac{2}{e^{2u} + 1} \left(1 + \frac{e^{3u} - e^{\frac{3}{2}u} - 1}{e^u + 1} \right) + \frac{2 - 3e^{\frac{u}{2}}}{e^u + 1} \right) \right], \quad (3.122)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной в четверти пролета,

$$\varphi_8 = \frac{y}{y^6} = \frac{4}{u^2} \left[1 + \frac{4(1 - e^{3u})}{3u(1 + e^u + e^{2u} + e^{3u})} \right]. \quad (3.123)$$

С использованием предложенного подхода зависимости (3.120) – (3.123) для координаты $x = l/4$ с учетом формул (3.1) и (3.2), в которые вместо f^6 и M^6 подставляются их значения, после некоторых преобразований представим так:

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по всему пролету,

$$\varphi'_5 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{19}{48}u^2}, \quad (3.124)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной посредине пролета,

$$\varphi'_6 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{11}{24}u^2}, \quad (3.125)$$

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на половине пролета,

$$\varphi'_7 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{31}{96}u^2}, \quad (3.126)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной в четверти пролета,

$$\varphi'_8 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}u^2}. \quad (3.127)$$

С помощью представленных выше формул вычислены параметры φ_1 ; φ'_1 ; φ_2 ; φ'_2 ... φ_8 ; φ'_8 для ряда значений u , которые приведены в таблицах 3.2 – 3.5. Кроме этого, в таблицах даны величины погрешности определения параметров напряженно-деформированного состояния нити $\Delta\varphi_1$; $\Delta\varphi_2$... $\Delta\varphi_8$. Эти же решения иллюстрируются рисунками 3.14 и 3.15.

Таблица 3.2

u	φ_1	φ'_1	$\Delta\varphi_1 = \frac{\varphi'_1 - \varphi_1}{\varphi_1} \cdot 100\%$	φ_2	φ'_2	$\Delta\varphi_2 = \frac{\varphi'_2 - \varphi_2}{\varphi_2} \cdot 100\%$
0	1	1	0	1	1	0
1	0,7107	0,7059	– 0,67	0,7152	0,7500	4,86
2	0,3797	0,3750	– 1,25	0,3885	0,4286	10,32
3	0,2133	0,2105	– 1,29	0,2228	0,2500	12,21
4	0,1319	0,1304	– 1,14	0,1407	0,1579	12,22
5	0,0884	0,0876	– 0,94	0,0960	0,1071	11,56
6	0,0629	0,0625	– 0,75	0,0695	0,0769	10,64
7	0,0469	0,0467	– 0,61	0,0525	0,0577	9,91
8	0,0363	0,0362	– 0,48	0,0411	0,0447	9,02
9	0,0289	0,0288	– 0,41	0,0329	0,0357	8,51
10	0,0235	0,0234	– 0,33	0,0269	0,0291	8,12

Таблица 3.3

u	φ_3	φ'_3	$\Delta\varphi_3 = \frac{\varphi'_3 - \varphi_3}{\varphi_3} \cdot 100\%$	φ_4	φ'_4	$\Delta\varphi_4 = \frac{\varphi'_4 - \varphi_4}{\varphi_4} \cdot 100\%$
0	1	1	0	1	1	0
1	0,7107	0,7059	- 0,67	0,7082	0,6857	- 3,18
2	0,3797	0,3750	- 1,25	0,3751	0,3529	- 5,92
3	0,2133	0,2105	- 1,29	0,2082	0,1951	- 6,29
4	0,1319	0,1304	- 1,14	0,1273	0,1200	- 5,73
5	0,0884	0,0876	- 0,94	0,0844	0,0803	- 4,86
6	0,0629	0,0625	- 0,75	0,0596	0,0571	- 4,19
7	0,0469	0,0467	- 0,61	0,0441	0,0426	- 3,40
8	0,0363	0,0362	- 0,48	0,0339	0,0330	- 2,65
9	0,0289	0,0288	- 0,41	0,0269	0,0262	- 2,20
10	0,0235	0,0234	- 0,33	0,0218	0,0214	- 1,83

Таблица 3.4

u	φ_5	φ'_5	$\Delta\varphi_5 = \frac{\varphi'_5 - \varphi_5}{\varphi_5} \cdot 100\%$	φ_6	φ'_6	$\Delta\varphi_6 = \frac{\varphi'_6 - \varphi_6}{\varphi_6} \cdot 100\%$
0	1	1	0	1	1	0
1	0,7125	0,7164	0,55	0,7082	0,6857	- 3,18
2	0,3832	0,3871	1,02	0,3751	0,3529	- 5,92
3	0,2170	0,2192	1,01	0,2082	0,1951	- 6,29
4	0,1352	0,1364	0,89	0,1273	0,1200	- 5,73
5	0,0912	0,0918	0,66	0,0844	0,0803	- 4,86
6	0,0652	0,0656	0,61	0,0596	0,0571	- 4,19
7	0,0488	0,0490	0,41	0,0441	0,0426	- 3,40
8	0,0379	0,0380	0,26	0,0339	0,0330	- 2,65
9	0,0302	0,0302	0	0,0269	0,0262	- 2,10
10	0,0246	0,0246	0	0,0218	0,0214	- 1,83

Таблица 3.5

u	φ_7	φ'_7	$\Delta\varphi_7 = \frac{\varphi'_7 - \varphi_7}{\varphi_7} \cdot 100\%$	φ_8	φ'_8	$\Delta\varphi_8 = \frac{\varphi'_8 - \varphi_8}{\varphi_8} \cdot 100\%$
0	1	1	0	1	1	0
1	0,7282	0,7559	3,80	0,7368	0,8000	8,58
2	0,4096	0,4364	6,54	0,4248	0,5000	17,70
3	0,2415	0,2560	6,00	0,2568	0,3077	19,82
4	0,1549	0,1622	4,71	0,1682	0,2000	18,91
5	0,1065	0,1102	3,47	0,1176	0,1379	17,26
6	0,0772	0,0792	2,59	0,0865	0,1000	15,61
7	0,0583	0,0594	1,89	0,0661	0,0755	14,22
8	0,0455	0,0462	1,54	0,0521	0,0588	12,86
9	0,0364	0,0368	1,10	0,0421	0,0471	11,88
10	0,0297	0,0300	1,01	0,0347	0,0385	10,95

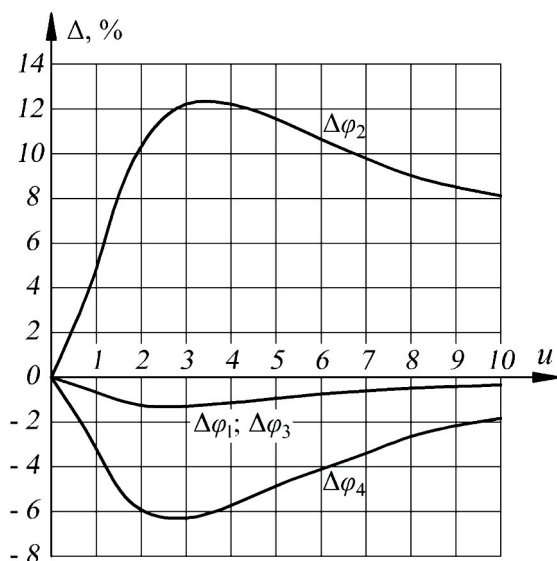


Рис. 3.14. Зависимость между погрешностью исходных предпосылок и параметром u для координаты $x = l/2$ при различных видах нагрузки:

$\Delta\varphi_1$ – распределенная по всему пролету; $\Delta\varphi_2$ – сосредоточенная посередине пролета;
 $\Delta\varphi_3$ – распределенная на половине пролета; $\Delta\varphi_4$ – сосредоточенная в четверти пролета

Как видно из представленных на рис. 3.14 графиков, кривые $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, $\Delta\varphi_3$ и $\Delta\varphi_4$ с увеличением параметра u асимптотически стремятся к нулю. Из анализа полученных результатов также видно, что максимальная погрешность при вычислении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости для $x = l/2$ с использованием формул (3.1) и (3.2) наблюдается, как этого и следовало ожидать, при действии сосредоточенной силы посередине пролета и составляет 12,22 % в сторону преувеличения. Причем отрезок, на котором погрешность превышает 10 %, представляет собой достаточно узкий интервал изменения параметра u – от 2 до 6,5.

В случае приложения сосредоточенной нагрузки в четверти пролета погрешность для $x = l/2$ составляет только 6,29 % в сторону преуменьшения, а отрезок, на котором погрешность превышает 4 %, соответствует незначительному интервалу изменения параметра u – от 1,2 до 6.

При действии же равномерно распределенной нагрузки по всему или половине пролета наибольшая возможная погрешность равняется 1,29 %. Следует иметь в виду, что ошибка при этом происходит в сторону преуменьшения результатов.

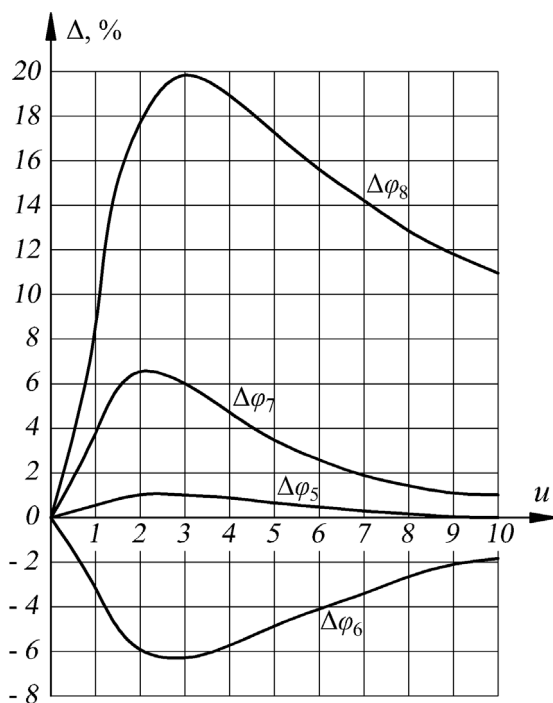


Рис.3.15. Зависимость между погрешностью исходных предпосылок и параметром u для координаты $x = l/4$ при различных видах нагрузки:

$\Delta\varphi_5$ – распределенная по всему пролету; $\Delta\varphi_6$ – сосредоточенная посередине пролета; $\Delta\varphi_7$ – распределенная на половине пролета; $\Delta\varphi_8$ – сосредоточенная в четверти пролета

При рассмотрении графиков на рис. 3.15 видно, что представленные на нем кривые $\Delta\varphi_5$, $\Delta\varphi_6$, $\Delta\varphi_7$ и $\Delta\varphi_8$ с увеличением параметра u также асимптотически стремятся к нулю. Здесь наибольшая погрешность при определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости для $x = l/4$ наблюдается при нагружении нити сосредоточенной нагрузкой в четверти пролета и достигает значения 19,82 % в сторону преувеличения. С возрастанием параметра u погрешность уменьшается до 10,95 % при $u = 10$.

При других видах нагружений погрешность в четверти пролета значительно уменьшается. В частности, при нагружении нити сосредоточенной нагрузкой в середине пролета, погрешность $\Delta\varphi_6$ достигает максимального значения 6,29 % в сторону преуменьшения результатов. А при параметре $u > 6$, что соответствует реальным висячим системам [62, 63, 103, 199], погрешность становится даже меньше 4,19 %.

Также следует отметить, что если в случаях нагружения нити равномерно распределенными нагрузками по всему и половине пролета для $x = l/2$ их погрешности идентичны, то для $x = l/4$ – они уже существенно отличаются, а их максимальные значения составляют 1,02 % и 6,54 % соответственно. Кроме того заметим, что в обоих случаях ошибка происходит в сторону преувеличения результатов. С увеличением же параметра u погрешности $\Delta\varphi_5$ и $\Delta\varphi_7$ также уменьшаются и при $u > 6$ уже не превышают 0,61 % и 2,59 % для равномерно распределенной нагрузки по всему и половине пролета соответственно.

В связи с тем, что в практических задачах по расчету висячих конструкций схема нагружения нити представляет собой сочетание разнотипных нагрузок (как правило, три–пять распределенных и несколько относительно не очень больших сосредоточенных), то реальная величина погрешности в результате их взаимоналожения всегда будет на много меньше максимальной. Кроме того, у реальных висячих систем параметр u в большинстве случаев изменяется в пределах $6 \leq u \leq 14$ [62, 63, 103, 199]. Таким образом, как это видно из таблиц 3.2 – 3.5, при указанных значениях u даже максимальная ошибка в определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости весьма мала. Последнее свидетельствует не только о высокой степени точности исходных предпосылок (3.1) и (3.2), но и о точности полученного решения в целом.

Заметим также следующее. В большинстве существующих методов расчета как гибких нитей, так и нитей конечной жесткости для определения величины распора применяется уравнение неразрывности деформаций, связывающее длины нити до и после приложения дополнительной нагрузки с упругим удлинением ее, вызванным этой нагрузкой [62, 104, 139]. При этом кроме принятых нами исходных предпосылок используют еще два допущения: вместо точных выражений длины и упругого удлинения нити принимаются приближенные значения, полученные разложением их в ряд Тейлора с удержанием только двух первых членов этого ряда. Вносимая этими допуще-

ниями погрешность хотя и невелика, но, как показано в работах [62, 96, 206], составляет при действии равномерно распределенной нагрузки от 8,3 % при $l/y_0 = 8$ до, например, 2,1 % при $l/y_0 = 16$ в сторону преувеличения. Поэтому общая погрешность еще несколько увеличивается.

В предлагаемой теории эти два допущения не применяются, поскольку статическая неопределимость относительно распора раскрывается с помощью принципа возможных перемещений. При этом, как уже отмечалось выше, принцип Лагранжа используется в своей строгой постановке, что приводит задачу не к алгебраическим уравнениям, а к дифференциальным зависимостям. Последние, в отличие от имеющихся решений, дают более точные результаты при определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости.

§ 3.10. Расчет нитей конечной жесткости с помощью рядов Фурье

При рассмотрении деформирования нитей конечной жесткости иногда очень удобно представить кривую провисания нити в виде ряда Фурье. Использование такого подхода имеет то преимущество, что позволяет накладывать минимальные ограничения на гладкость разрешающих функций и приводит к единому для всего пролета математическому выражению изогнутой оси нити. Последнее позволяет свести решение к простым расчетным зависимостям, весьма удобным для практического применения [25, 183].

3.10.1. Точное решение задачи. Случай нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной нагрузки. Будем считать, что задана нить конечной жесткости с поперечным сечением F , моментом инерции I , модулем упругости E и шарнирным закреплением на опорах. Пусть, кроме того, известно, что пролет нити l , начальная длина L_0 , уравнение кривой провисания в исходном состоянии $y_0(x)$, а нить работает с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, являющихся произвольными непрерывными или прерывными функциями координаты x .

В соответствии с принципом возможных перемещений равновесное состояние нити конечной жесткости описывается уравнением (3.19), которое может быть также записано в виде

$$\delta\mathcal{E} = \delta W - \delta A = 0, \quad (3.128)$$

где $\delta\mathcal{E}$ – вариация полной энергии нити, состоящая из двух слагаемых: δW – вариации потенциальной энергии упругой деформации при каком-либо возможном перемещении нити конечной жесткости из положения равновесия и δA – виртуальной работы внешних сил на этом же перемещении. Здесь было учтено, что работа внутренних сил на возможном перемещении равна взятой со знаком минус вариации потенциальной энергии упругой деформации.

На основании [24, 163] для потенциальной энергии деформации нити имеем выражение

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2\beta \right]^2 + \\ + \int_0^l M_{z0} \frac{d^2(y-y_0)}{dx^2} dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\frac{d^2(y-y_0)}{dx^2} \right]^2 dx, \quad (3.129)$$

где H_0 и M_{z0} – распор и изгибающий момент в нити, находящейся под действием начальной нагрузки; $y(x)$ – уравнение кривой провисания в деформированном состоянии; EF и EI – жесткость нити на растяжение и изгиб; $\beta = L_0 - l$. Первый и третий члены в правой части уравнения (3.129) представляют собой приращение потенциальной энергии от усилий в начальном состоянии на соответствующих перемещениях, вызванных дополнительной нагрузкой, а второй и четвертый – увеличение потенциальной энергии нити при растяжении и изгибе.

Работу внешних сил определим из соотношения

$$A = \int_0^l q(x)[y(x) - y_0(x)] dx, \quad (3.130)$$

где $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ – сумма начальной и дополнительной нагрузок.

Решение поставленной вариационной задачи о минимуме функционала полной энергии нити конечной жесткости выполним так называемым прямым методом [176]. Для этого представим функцию кривой провисания нити в исходном и деформированном состояниях в виде рядов Фурье по синусам

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad (3.131)$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.132)$$

Такое представление отличается тем, что входящие в него функции непосредственно удовлетворяют граничным условиям задачи, т.е. при $x = 0$ и $x = l$ величины $y(x)$ и $d^2y(x)/dx^2$ обращаются в нуль и при надлежащем выборе коэффициентов a_i ($i = 1, \infty$) позволяют представить деформированную ось нити при любой нагрузке. После подстановки соотношений (3.131) и (3.132) в функционал полной энергии $\mathcal{E}[y(x)]$ последний преобразуется в функцию неизвестных коэффициентов разложения a_i ($i = 1, \infty$), слагаемые которого будут выглядеть следующим образом:

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right]^2 + \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 [a_n^2 - (a_n^0)^2]; \quad (3.133)$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} h_n (a_n - a_n^0), \quad (3.134)$$

где $\frac{2}{l} h_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ – коэффициенты разложения внешней нагрузки в ряд Фурье по синусам.

Заметим, что при выводе соотношения (3.133) вместо M_0 было принято его представление через вторую производную функции прогиба нити конечной жесткости в начальном состоянии.

Поскольку в данном случае полная энергия нити оказывается зависящей от параметров прогиба a_n , то вариацию $\delta\mathfrak{E}$ можно при этом представить как сумму вариаций, соответствующих возможным изменениям параметров a_n ,

$$\delta\mathfrak{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial a_n} \delta a_n. \quad (3.135)$$

Так как рассматриваемые нами деформированные состояния являются равновесными, то вариация $\delta\mathfrak{E}$ в соответствии с (3.128) должна быть равна нулю

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial a_n} \delta a_n = 0. \quad (3.136)$$

Но вариации δa_n можно считать независимыми друг от друга, поэтому равенство (3.136) будет иметь место, если каждый из множителей при δa_n будет равен нулю

$$\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial a_n} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.137)$$

Другими словами, отыскание коэффициентов a_i производится из условий минимизации функции $\mathfrak{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \frac{i\pi x}{l} \right]$, представленной в виде (3.128).

Указанные условия выражаются соотношением (3.137) и представляют собой бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений вида

$$a_n = \frac{2lh_n}{n^2 \pi^2 (H_0 + S + n^2 P_{\text{кр}})} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.138)$$

где $S = \frac{\pi^2 EF}{4lL_0} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 - \frac{EF\beta}{L_0}$ – приращение распора в нити конечной жесткости от дополнительной нагрузки; $P_{\text{кр}} = \pi^2 EI/l^2$ – эйлерова сила для балки с шарнирно опертыми концами.

Введем следующие обозначения:

$$u^2 = \frac{H}{P_{\text{кр}}}, \quad \alpha^2 = \frac{\pi^8 r^2 E^2 I^2 L_0}{l^7}, \quad (3.139)$$

где $H = H_0 + S$ – распор; r – радиус инерции поперечного сечения нити.

Учитывая при преобразовании выражения (3.138) введенные обозначения (3.139), получим уравнение для определения параметра u :

$$\alpha^2 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \alpha^2 \frac{EF\beta}{P_{\text{кр}} L_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^2 (u^2 + n^2)^2}. \quad (3.140)$$

Перепишем уравнение (3.140) в несколько ином виде

$$\alpha^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \alpha^2 \frac{EF\beta}{P_{\text{кр}} L_0} u^4 = R - G(u) + \frac{u}{2} G'(u). \quad (3.141)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2}; \quad (3.142)$$

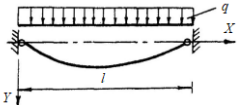
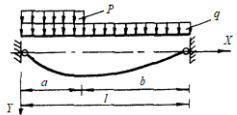
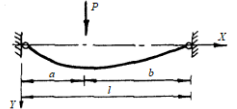
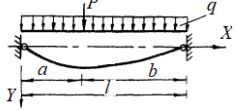
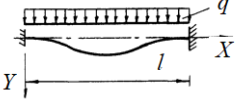
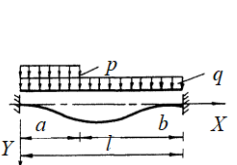
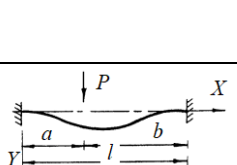
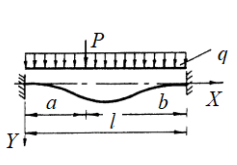
$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n^2, \quad (3.143)$$

причем под функцией R , по аналогии с [62, 103], понимается характерная функция нагрузки.

3.10.2. О характерной R -функции нагрузки. Здесь необходимо отметить, что если функция внешней нагрузки $q(x)$ не является непрерывной на всем пролете, то интегралы, определяющие коэффициенты разложения в выражении для R , вычисляются отдельно на каждом интервале, где функция нагрузки непрерывна, а результаты суммируются. Если нагрузка представлена в виде сосредоточенных сил, то интегралы заменяются суммами из произ-

ведений этих сил на соответствующие значения тригонометрических функций. Значения R при шарнирном и жестком закреплении концов нити на опорах и наиболее распространенных типах нагружения приведены в табл. 3.6

Таблица 3.6

Схема нагружения	$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n^2$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24}$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a^2}{12l} (l+2b) + \frac{\pi^2 P^2 a^3}{24l^2} (l+3b)$
	$\frac{\pi^2 P^2 ab}{2l^2}$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P ab}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 ab}{2l^2}$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24}$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a^2}{12l} (l+2b) + \frac{\pi^2 P^2 a^3}{12l}, \left(a \leq \frac{l}{2} \right)$ $\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a^2}{12l} (l+2b) + \frac{\pi^2 P^2}{24l} (l^3 - 6ab^2), \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$
	$\frac{\pi^2 P^2 a}{4l}, \left(a \leq \frac{l}{2} \right); \frac{\pi^2 P^2 b}{4l}, \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P ab}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 a}{4l}, \left(a \leq \frac{l}{2} \right)$ $\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P ab}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 b}{4l}, \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$

Для решения уравнения (3.141) необходимо просуммировать входящие в него ряды. Для этого предварительно докажем следующее утверждение.

3.10.3. Лемма о сумме ряда $G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2}$. Сумма ряда (3.142)

однозначно определяется интегральным выражением вида

$$G(u) = \frac{l}{2} \int_0^l q(x) \varphi(x) dx, \quad (3.144)$$

где функция $\varphi(x)$ является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{\pi^2}{l^2} u^2 \varphi + \frac{\pi^2}{l^2} q = 0 \quad (3.145)$$

с граничными условиями, соответствующими условию задачи.

Для доказательства данного утверждения разложим функцию нагрузки в ряд Фурье по синусам

$$q(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.146)$$

Подставляя выражение (3.146) в (3.144), будем иметь

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.147)$$

Интеграл, входящий в соотношение (3.147), после интегрирования по частям с учетом граничных условий для функции $\varphi(x)$ примет вид

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l^2}{n^2 \pi^2} \int_0^l \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (3.148)$$

или, используя уравнение (3.145), получим:

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{h_n}{n^2} - \frac{u^2}{n^2} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (3.149)$$

откуда, в свою очередь, следует:

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{h_n}{n^2 + u^2}. \quad (3.150)$$

В результате, после подстановки (3.150) в (3.147), окончательно имеем

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2},$$

что и доказывает наше утверждение. Полученный результат позволяет просуммировать ряды в уравнении (3.141), тем самым существенно упростив процедуру его решения.

Общий интеграл дифференциального уравнения (3.145):

$$\varphi(x) = C_1 sh \frac{\pi ux}{l} + C_2 ch \frac{\pi ux}{l} - \frac{\pi}{ul} f_1 sh \frac{\pi ux}{l} + \frac{\pi}{ul} f_2 ch \frac{\pi ux}{l}, \quad (3.151)$$

где $f_1 = \int q(x) ch \frac{\pi ux}{l} dx$; $f_2 = \int q(x) sh \frac{\pi ux}{l} dx$.

Произвольные постоянные интегрирования при шарнирном закреплении концов нити на опорах определяются из выражений

$$C_2 = -\frac{\pi}{ul} f_2(0),$$

$$C_1 = \frac{\pi}{ul} \{f_1(l) - [f_2(l) - f_2(0)]cth\pi u\}. \quad (3.152)$$

В случае действия на нить равномерно распределенных начальной и дополнительной вертикальных нагрузок интенсивности q_1 и q_2 , уравнение (3.151) с учетом (3.152) примет вид

$$\varphi(x) = \frac{q_1 + q_2}{u^2} \left(1 - ch \frac{\pi ux}{l} + \frac{ch\pi u - 1}{sh\pi u} sh \frac{\pi ux}{l} \right). \quad (3.153)$$

Подставляя (3.153) в (3.144) и интегрируя полученное выражение, придем к соотношению

$$G(u) = \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{u^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - ch\pi u}{\pi u sh\pi u} \right). \quad (3.154)$$

В результате уравнение (3.141) для данного типа нагружения и граничных условий запишется так:

$$\begin{aligned} & \alpha^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{кр}} \right) + \alpha^2 \frac{EF\beta}{P_{кр} L_0} u^4 + \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{2u^2} \times \\ & \times \left[3 - \frac{ch\pi u - 1}{\pi u sh\pi u} (5 + \pi u cth\pi u) \right] = \frac{\pi^2 (q_1 + q_2)^2 l^2}{24}. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Полученное уравнение можно решить с помощью известных численных методов [37, 176]. Имея значение параметра u по первой из формул (3.139), определяем величину распора H , а по зависимости (3.138) – выражение для любого коэффициента a_n ряда (3.132)

$$a_n = \frac{2lh_n}{\pi^2 n^2 P_{\text{кр}}(u^2 + n^2)}. \quad (3.156)$$

Подставляя это значение в (3.132), придадим уравнению кривой провисания нити конечной жесткости следующий вид:

$$y(x) = \frac{2l}{\pi^2 P_{\text{кр}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^2 (u^2 + n^2)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.157)$$

Величину изгибающего момента в нити можно определить путем двукратного дифференцирования выражения (3.157)

$$M_z(x) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^2 u^2 + n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.158)$$

Необходимо отметить, что полученный ряд Фурье, описывающий изгибающие моменты в нити конечной жесткости, сходится несколько медленнее ряда (3.157). Поэтому для определения значений изгибающих моментов в некоторых расчетных случаях удобно применять выражение (3.5).

Предлагаемая методика применима и при других условиях опирания нитей конечной жесткости. Необходимо только в каждом конкретном случае задаваться соответствующими аппроксимационными формулами для представления оси нити в начальном и деформированном состояниях.

3.10.4. Точное решение задачи. Случай нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной нагрузки. Данный случай отличается от рассмотренного выше тем, что при действии начальной нагрузки в поперечных сечениях нити не возникают напряжения от изгиба, а кривая ее провисания приобретает вид квадратной параболы. Учитывая сказанное, вместо уравнения (3.129) для потенциальной энергии упругой деформации нити будем иметь

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right]^2 + \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (3.159)$$

при этом работа внешних сил по-прежнему определяется формулой (3.130).

Считая концы нити опертыми шарнирно и принимая для аппроксимации ее кривой провисания в исходном и деформированном состояниях ряды Фурье в форме (3.131) и (3.132), для W находим выражение

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right]^2 + \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n - a_n^0)^2, \quad (3.160)$$

а для A остается справедливой зависимость (3.134).

Применяя далее изложенную выше методику поиска неизвестных значений коэффициентов a_n разложения (3.132), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$a_n = \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0}{n^2 (H_0 + S + n^2 P_{\text{кр}})}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.161)$$

Заметим, что в отличие от (3.138) второй член числителя учитывает форму провисания нити при действии начальной нагрузки.

Принимая обозначения

$$u^2 = \frac{H}{P_{\text{кр}}}, \quad \gamma^2 = \frac{4\pi^4 r^2 E^2 I^2 L_0}{l^5} \quad (3.162)$$

и учитывая их при преобразовании выражения (3.161), получим уравнение для определения параметра u :

$$\gamma^2 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \gamma^2 \frac{EF\beta}{P_{\text{кр}} L_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (u^2 + n^2)^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0 \right)^2 \quad (3.163)$$

или, что то же самое,

$$\gamma^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \gamma^2 \frac{EF\beta}{P_{\text{кр}} L_0} u^4 = R - G(u) + \frac{u}{2} G'(u). \quad (3.164)$$

Причем здесь, в отличие от (3.142) и (3.143), значения функций G и R равны

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u^2 + n^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0 \right)^2; \quad (3.165)$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0 \right)^2. \quad (3.166)$$

Для решения уравнения (3.164) необходимо просуммировать входящие в него ряды. По аналогии с предыдущим и в этом случае можно показать, что сумма ряда (3.165) однозначно определяется интегральным выражением вида

$$G(u) = \frac{l}{2} \int_0^l \Phi(x) \varphi(x) dx, \quad (3.167)$$

где $\Phi(x) = \frac{2l}{\pi^2} [q(x) + EIy_0^{IV}(x)]$ – функция, характеризующая начальное состояние нити (именуемая в дальнейшем функцией начального состояния), а функция $\varphi(x)$ является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{\pi^2}{l^2} u \varphi + \frac{\pi^2}{l^2} \Phi = 0 \quad (3.168)$$

с соответствующими граничными условиями [190].

Общий интеграл этого уравнения

$$\varphi(x) = C_1 sh \frac{\pi u x}{l} + C_2 ch \frac{\pi u x}{l} - \frac{\pi}{ul} f_1 sh \frac{\pi u x}{l} + \frac{\pi}{ul} f_2 ch \frac{\pi u x}{l}, \quad (3.169)$$

где $f_1 = \int \Phi(x) ch \frac{\pi u x}{l} dx$; $f_2 = \int \Phi(x) sh \frac{\pi u x}{l} dx$.

Произвольные постоянные интегрирования, а также значения функций $\varphi(x)$ и $G(u)$ в случае нагружения нити конечной жесткости равномерно распределенными начальной и дополнительной нагрузками, как и ранее, найдем по формулам (3.152) – (3.154). Тогда уравнение для определения параметра u принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{кр}} \right) + \gamma^2 \frac{EF\beta}{P_{кр} L_0} u^4 + \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{2u^2} \times \\ & \times \left[3 - \frac{ch \pi u - 1}{\pi u sh \pi u} (5 + \pi u th \pi u) \right] = \frac{\pi^2 (q_1 + q_2)^2 l^2}{24}. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Зная величину параметра u , по первому из соотношений (3.162) можно найти значение распора в нити H , а по формуле (3.161) – выражение для любого коэффициента a_n ряда (3.132)

$$a_n = \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{кр} a_n^0}{n^2 P_{кр} (u^2 + n^2)}. \quad (3.171)$$

Таким образом, подставляя (3.171) в разложение (3.132), получим следующее выражение оси нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной нагрузки в деформированном состоянии:

$$y(x) = \frac{1}{P_{\text{кр}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0}{n^2 (u^2 + n^2)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.172)$$

Соответственно для изгибающего момента путем двукратного дифференцирования последнего выражения находим

$$M_z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0}{u^2 + n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.173)$$

Из анализа последних выражений видно, что они отличаются от соответствующих соотношений для работающей с изгибом от начальной нагрузки нити конечной жесткости тем, что в числителе (3.172), (3.173) появляется новый член, учитывающий состояние безмоментности нити при действии начальной нагрузки и соответствующую данному состоянию форму ее кривой провисания.

Приведем здесь без вывода еще одно интересное следствие применения метода рядов Фурье. Если принять $I = 0$, т.е. рассмотреть случай гибких нитей, то вместо (3.171) и (3.172) будем соответственно иметь [189]:

$$a_n = \frac{2lL_0 h_n}{\pi^2 n^2 tEF}; \quad (3.174)$$

$$y(x) = \frac{2lL_0}{\pi^2 tEF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.175)$$

Входящий в эти соотношения параметр $t = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - \beta$ определяется из следующего кубического уравнения:

$$t + \beta = \frac{lL_0^2 R}{\pi^2 E^2 F^2 t^2}. \quad (3.176)$$

Неизвестное значение распора в нити можно определить из уравнения

$$H^3 + \frac{\beta EF}{L_0} H^2 = \frac{REFl}{\pi^2 L_0}, \quad (3.177)$$

структура которого практически идентична известным решениям [62, 95].

3.10.5. Приближенное решение задачи. Известно, что кривую изгиба балки с шарнирным закреплением на опорах также можно представить в виде ряда Фурье по синусам (3.132), который после нахождения с помощью предложенного С.П. Тимошенко энергетического метода [161] неизвестных значений коэффициентов разложения a_n , преобразуется следующим образом:

$$y^6 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.178)$$

С другой стороны, прогиб нити конечной жесткости определяется известным выражением [17, 163, 199]

$$y = ky^6, \quad (3.179)$$

где y^6 – прогиб балки, имеющей такие же граничные условия и несущей такую же нагрузку, как и нить; k – коэффициент.

Для нахождения значения коэффициента k воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси нити [67, 104]

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_z^6 + Hy. \quad (3.180)$$

Подстановка (3.178) и (3.179) в уравнение (3.180) дает:

$$\begin{aligned} \frac{4ql^2}{\pi^3} k \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{4ql^4}{EI\pi^5} Hk \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (3.181)$$

откуда, обозначая $u = 0,5l(H/EI)^{1/2}$ и производя некоторые преобразования, получаем:

$$k = \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2}}. \quad (3.182)$$

Воспользуемся полученным результатом при рассмотрении напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости.

3.10.5.1. Действие начальной нагрузки. Примем, что нить работает с изгибом от начальной равномерно распределенной нагрузки (собственного веса), а ее концы закреплены шарнирно (рис. 3.16).

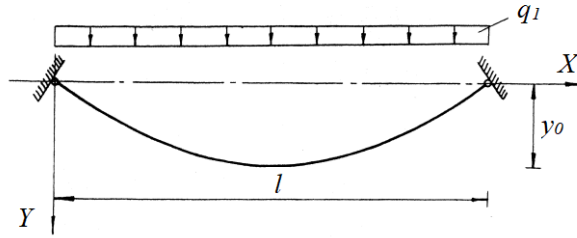


Рис. 3.16. К расчету нити на начальную нагрузку при шарнирном закреплении концов

В этом случае расчетные формулы для определения ординат упругой линии y , углов поворота $tg\alpha$, изгибающих моментов M_z и поперечных сил Q_z с учетом (3.182) будут:

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (3.183)$$

$$tg\alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (3.184)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (3.185)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (3.186)$$

В формулы (3.183) – (3.186) входит неизвестный параметр u_0 . Его значение можно определить из соотношения

$$y_0 = \frac{y_0^6}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}, \quad (3.187)$$

где y_0 – заданный прогиб нити конечной жесткости; y_0^6 – прогиб балки под действием начальной нагрузки.

В последних формулах вместо ряда $\sum_{n=1,3,5,\dots} n^{-2}$ учтен только его первый член. Такое допущение вполне приемлемо, так как по данным численных исследований установлено, что точность результата при использовании двух членов ряда повышается на 0,5 %, а при 10 членах – на 0,7 % по сравнению с использованием одного члена.

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах (рис. 3.17) расчетные формулы примут следующий вид:

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (3.188)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (3.189)$$

$$M_z = \frac{q_1}{24} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (3.190)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (3.191)$$

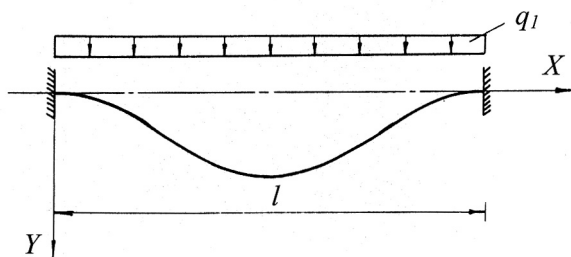


Рис. 3.17. К расчету нити на начальную нагрузку при жестком закреплении концов

Значение входящего в эти зависимости параметра u_0 вычисляется по формуле

$$y_0 = \frac{y_0^6}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (3.192)$$

Если в поперечных сечениях нити при начальной нагрузке не возникают напряжения от изгиба, то нить работает как абсолютно гибкая. В этом случае уравнение оси нити приобретает вид квадратной параболы с ординатами [96, 103]

$$y = \frac{4y_0x(l-x)}{l^2}.$$

В соответствии с теорией гибких нитей величина начального распора равна

$$H_0 = \frac{M_z^6}{y} = \frac{q_1 l^2}{8y_0},$$

а начальная длина находится из выражения

$$L_0 = l \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

Приложение к нити конечной жесткости дополнительной нагрузки вызывает изменение параметров ее напряженно-деформированного состояния, методика определения которых приведена ниже.

3.10.5.2. Действие дополнительной нагрузки. В случае шарнирного закрепления концов нити конечной жесткости на опорах и действия дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис.3.18), при условии работы нити с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, расчетные зависимости можно записать в виде:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.193)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.194)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.195)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}. \quad (3.196)$$

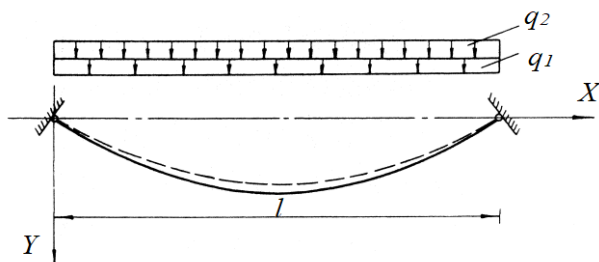


Рис. 3.18. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную по всему пролету, при шарнирном закреплении концов

В соотношения (3.193) – (3.196) входит неизвестный параметр u . Его значение определяется из уравнения

$$\frac{\beta}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \frac{\beta_0}{(\pi^2 + 4u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (3.197)$$

где

$$\beta_0 = \frac{1632\pi^4}{2625} \left(\frac{y_0^6}{r} \right)^2; \quad \beta = \frac{1632\pi^4}{2625} \left(\frac{y^6}{r} \right)^2.$$

Напомним, что r – радиус инерции поперечного сечения нити.

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах (рис.3.19) для расчетных формул имеем:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.198)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.199)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.200)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}, \quad (3.201)$$

а значение параметра u находится из соотношения

$$\frac{\gamma}{(\pi^2 + u^2)^2} - u^2 = \frac{\gamma_0}{(\pi^2 + u_0^2)^2} - u_0^2. \quad (3.202)$$

Здесь принято, что $\gamma_0 = \frac{64\pi^4}{105} \left(\frac{y_0^6}{r} \right)^2$; $\gamma = \frac{64\pi^4}{105} \left(\frac{y^6}{r} \right)^2$.

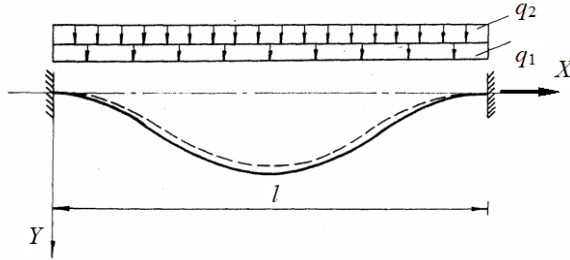


Рис. 3.19. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную по всему пролету, при жестком закреплении концов

При действии дополнительной нагрузки в виде сосредоточенной силы и при шарнирном закреплении концов нити конечной жесткости на опорах (рис. 3.20) расчетные формулы можно записать в следующем виде:

- на участке $0 \leq x \leq a$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{x^4 - 2lx^3 + l^3x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.203)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{4x^3 - 6lx^2 + l^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.204)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.205)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (3.206)$$

- на участке $a \leq x \leq l$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{x^4 - 2lx^3 + l^3x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{6EI} \cdot \frac{(x-a)^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (3.207)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{4x^3 - 6lx^2 + l^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{2EI} \cdot \frac{(x-a)^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (3.208)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{P(x-a)}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (3.209)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{P}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}. \quad (3.210)$$

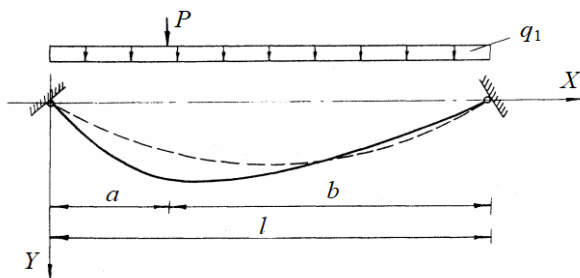


Рис. 3.20. К расчету нити на начальную и дополнительную сосредоточенную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при шарнирном закреплении концов

Неизвестный параметр u , входящий в формулы (3.203) – (3.210), вычисляется из уравнения

$$\frac{\beta_0 + \mu}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \frac{\beta_0}{(\pi^2 + 4u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (3.211)$$

где

$$\mu = \left(\frac{\pi^2}{24rEI} \right)^2 \left[\frac{q_1 Plb}{5} (3l^5 - 5l^3b^2 + 3lb^4 - b^5) + \frac{P^2b^2}{5} (8l^4 - 40l^2b^2 + 66lb^3 - 16b^4) \right].$$

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах (рис. 3.21) для расчетных зависимостей имеем:

- на участке $0 \leq x \leq a$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{x^4 - 2lx^3 + l^2x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pabx}{6l^3EI} \cdot \frac{3lbx - x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (3.212)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = & \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{4x^3 - 6lx^2 + 2l^2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \\ & + \frac{Pab}{6l^3EI} \cdot \frac{6lbx - 3x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \end{aligned} \quad (3.213)$$

$$M_z = \frac{q_1}{24} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \cdot \frac{lb - x(b-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (3.214)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \cdot \frac{a - b}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (3.215)$$

- на участке $a \leq x \leq l$

$$\begin{aligned} y = & \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{x^4 - 2lx^3 + l^2x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pabx}{6l^3EI} \times \\ & \times \frac{3lbx - x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{6EI} \cdot \frac{(x-a)^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \end{aligned} \quad (3.216)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = & \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{4x^3 - 6lx^2 + 2l^2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pab}{6l^3EI} \times \\ & \times \frac{6lbx - 3x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{2EI} \cdot \frac{(x-a)^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \end{aligned} \quad (3.217)$$

$$\begin{aligned} M_z = & \frac{q_1}{24} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \\ & - \frac{Pab}{l^3} \cdot \frac{lb - x(b-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{P(x-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \end{aligned} \quad (3.218)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \cdot \frac{a - b}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{P}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}. \quad (3.219)$$

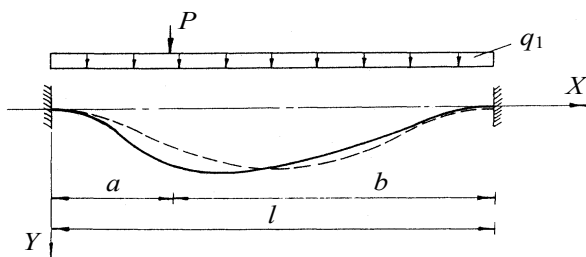


Рис. 3.21. К расчету нити на начальную и дополнительную сосредоточенную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при жестком закреплении концов

Уравнение для определения значения неизвестного параметра u , входящего в зависимости (3.212) – (3.219), имеет следующий вид:

$$\frac{\gamma_0 + \eta}{(\pi^2 + u^2)^2} - u^2 = \frac{\gamma_0}{(\pi^2 + u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (3.220)$$

где

$$\eta = \left(\frac{\pi^2}{24rEI} \right)^2 \left[\frac{q_1 Pl^3 b}{10} (l^5 - l^4 a - 5l^2 b^3 + 6lb^4 l - 2b^5) + \frac{P^2 b^2}{10} \times \right. \\ \left. \times (4l^6 - 8l^4 a^2 - 7l^4 ab - 20l^4 b^2 + 24l^3 b^3 + 4l^2 a^4 + 7l^2 a^3 b + \right. \\ \left. + 24l^2 a^2 b^2 + 10l^2 ab^3 - 8l^2 b^4 - 15la^2 b^3 + 3a^2 b^4 - 3ab^5) \right].$$

Для нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузки, в случае шарнирного закрепления концов на опорах и действии равномерно распределенной дополнительной нагрузки (см. рис. 3.18) параметры напряженно-деформированного состояния вычисляются по формулам:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{4y_0 x(l-x)}{l^2 \left[1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2 \right]}; \quad (3.221)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} + \frac{4y_0(l-2x)}{l^2 \left[1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2 \right]}; \quad (3.222)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} - \frac{16EIu^2 y_0 x(l-x)}{l^4 \left[1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2 \right]}; \quad (3.223)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} - \frac{16EIu^2 y_0(l-2x)}{l^4 \left[1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2 \right]}. \quad (3.224)$$

Для определения входящего в зависимости (3.221) – (3.224) неизвестного параметра u имеем уравнение

$$\frac{\beta_2}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \beta_1 - u_0^2, \quad (3.225)$$

где

$$\beta_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{y_0}{r} \right)^2, \quad \beta_2 = \left(\frac{l\pi^2}{2r} \right)^2 \left[\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6}{40320 \cdot (EI)^2} + \frac{(q_1 + q_2)y_0 l^2}{15EI} + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах (см. рис. 3.19) расчетные соотношения приобретают следующий вид:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0 x(l-x)}{l^2 \left[1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (3.226)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0(l-2x)}{l^2 \left[1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (3.227)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{24} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{16Elu^2 y_0 x(l-x)}{l^4 \left[1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right]}; \quad (3.228)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l-2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{16Elu^2 y_0(l-2x)}{l^4 \left[1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right]}. \quad (3.229)$$

Уравнение для нахождения неизвестного параметра u приводится к виду

$$\frac{\gamma_2}{(\pi^2 + u^2)} - u^2 = \gamma_1 - u_0^2, \quad (3.230)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{y_0}{r} \right)^2;$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{l\pi^2}{2r} \right)^2 \left[\frac{(q_1 + q_2)^2 l^6}{60480 \cdot (EI)^2} + \frac{(q_1 + q_2)y_0 l^2}{90EI} + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

Расчетные зависимости для других схем нагружения при работе нити без изгиба от начальной нагрузки не приводятся. Методика их получения аналогична рассмотренной.

ГЛАВА 4

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 4.1. Вводные замечания. Принятые допущения

При рассмотрении плоской формы изгиба в качестве исходного принимаем деформированное состояние нити конечной жесткости, нагруженной начальной и дополнительной вертикальными нагрузками. Кроме того, считаем, что ось нити до потери устойчивости – плоская кривая.

Пусть X, Y, Z являются неподвижными координатными осями, а x, y, z – подвижными координатными осями для искривленного (выпученного) состояния нити, причем оси y, z направлены по главным центральным осям инерции поперечного сечения, а ось x – по касательной к осевой линии нити.

Допустим, что под действием возрастающей дополнительной нагрузки нить теряет устойчивость. При этом ее поперечные сечения получают поступательные смещения v в горизонтальной плоскости XOY и поворачиваются на угол θ в плоскости сечения (рис. 4.1). Отметим, что в бесконечно близком выпученном состоянии нити данные перемещения считаются бесконечно малыми величинами и рассматриваются как «возмущения».

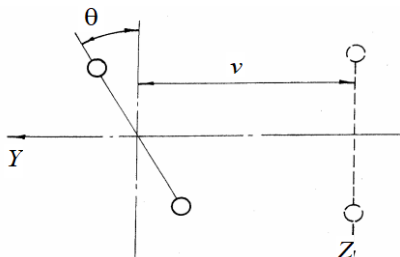


Рис. 4.1. Деформирование поперечного сечения нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба

При таком искривлении оси нити на повернутые поперечные сечения будут действовать начальные напряжения, т.е. напряжения, возникающие в нити в момент потери устойчивости от начальной и дополнительной нагрузок. Составляющие начальных напряжений принимают следующий вид: продольные $\sigma_N = \frac{N}{F}$, нормальные $\sigma_M = \frac{M_y z}{I_y}$ и касательные $\tau = \frac{Q_z S_y}{I_y \delta}$.

Здесь принято, что Q_z – поперечная сила в сечении; M_y – изгибающий момент, действующий в нити в плоскости XOZ ; I_y и S_y – момент инерции и статический момент поперечного сечения в плоскости XOZ . Очевидно, σ_N постоянны, а σ_M и τ переменны по длине нити.

§ 4.2. Определение дополнительных погонных нагрузок

При потере нитью конечной жесткости плоской формы деформирования, действующие в ее поперечных сечениях начальные напряжения дадут горизонтальные составляющие в плоскости XOY и крутящие моменты относительно оси X . Для определения дополнительной погонной поперечной нагрузки и дополнительного погонного крутящего момента воспользуемся методикой, предложенной А.Р. Ржаницыным [134] при рассмотрении им изгибно-крутильных деформаций двутавровых балок.

Рассмотрим смещение нити в плоскости XOY . Проектируя продольное усилие N на неподвижную ось OY , получим величину поперечной составляющей $dN_y^{(1)}$ (рис. 4.2):

$$dN_y^{(1)} = -\sigma_N \sin \varphi_z dF + \sigma_N \sin(\varphi_z + d\varphi_z) dF \approx \sigma_N d\varphi_z dF.$$

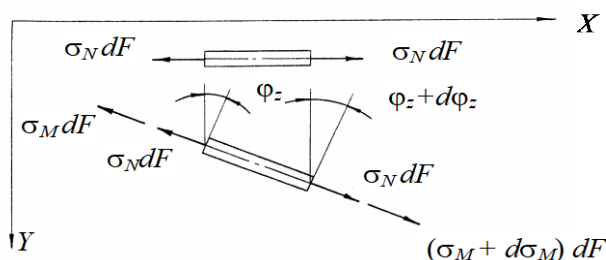


Рис. 4.2. Усилия в элементе нити

Здесь принято, что $\sin(\varphi_z + d\varphi_z) - \sin \varphi_z = d\varphi_z$. Величина погонной поперечной нагрузки от $dN_y^{(1)}$ равна

$$dq_y^{(1)} = \frac{dN_y^{(1)}}{dx} = \sigma_N dF \frac{d\varphi_z}{dx} = \sigma_N dF v''.$$
(4.1)

Нормальные напряжения σ_M при проектировании их на ось OY дадут поперечную составляющую (см. рис. 4.2)

$$\begin{aligned} dN_y^{(2)} &= -\sigma_M \sin \varphi_z dF + (\sigma_M + d\sigma_M) \sin(\varphi_z + d\varphi_z) dF = \\ &= \sigma_M d\varphi_z dF + d\sigma_M \varphi_z dF + d\sigma_M d\varphi_z dF \end{aligned}$$

или, пренебрегая $d\sigma_M d\varphi_z dF$ как величиной высшего порядка малости по сравнению с оставшимися членами, придадим поперечной составляющей следующий вид:

$$dN_y^{(2)} = \sigma_M d\varphi_z dF + d\sigma_M \varphi_z dF = \frac{M_y z}{I_y} d\varphi_z dF + \frac{dM_y z}{I_y} \varphi_z dF ,$$

где $\sigma_M = \frac{M_y z}{I_y}$; $d\sigma_M = \frac{dM_y z}{I_y}$.

Погонная поперечная нагрузка от $dN_y^{(2)}$ вычисляется по формуле

$$dq_y^{(2)} = \frac{dN_y^{(2)}}{dx} = \frac{M_y z}{I_y} \frac{d\varphi_z}{dx} dF + \frac{dM_y}{dx} \frac{z}{I_y} \varphi_z dF = \frac{M_y z}{I_y} v'' dF + \frac{M'_y z}{I_y} v' dF . \quad (4.2)$$

Складывая поперечные нагрузки (4.1) и (4.2) и интегрируя найденное выражение по площади поперечного сечения нити F , получаем суммарную погонную поперечную нагрузку от перемещения v :

$$q_y^v = \int_F \left(\sigma_N v'' + \frac{M_y z}{I_y} v'' + \frac{M'_y z}{I_y} v' \right) dF = N v'' . \quad (4.3)$$

В соотношении (4.3) было учтено, что $\int_F z dF = 0$, поскольку y и z – центральные оси поперечного сечения нити.

Поперечные нагрузки $dq_y^{(1)}$ и $dq_y^{(2)}$ создают в нити крутящий момент (рис. 4.3), формула для определения которого имеет вид

$$dm_x = -(dq_y^{(1)} + dq_y^{(2)}) z . \quad (4.4)$$

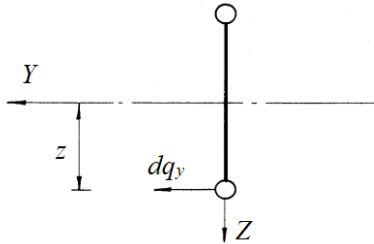


Рис.4.3. Создание крутящего момента в сечении нити

Подставляя (4.1) и (4.2) в (4.4) и интегрируя по площади поперечного сечения нити F , для m_x^v находим

$$m_x^v = - \int_F \left(\sigma_N v'' + \frac{M_y z}{I_y} v'' + \frac{M_y' z}{I_y} v' \right) z dF = -M_y v'' - M_y' v', \quad (4.5)$$

причем здесь учтено, что $\int_F z^2 dF = I_y$.

Касательные напряжения, действующие в сечениях нити, дают вертикальную равнодействующую Q_z (рис. 4.4), которая, в свою очередь, создает дополнительный крутящий момент

$$m_x^v dx = (Q_z + dQ_z) v' dx \approx Q_z v' dx,$$

откуда имеем:

$$m_x^v = \frac{Q_z v' dx}{dx} = M_y' v'. \quad (4.6)$$

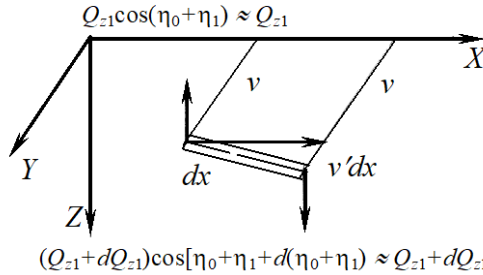


Рис. 4.4. Равнодействующие касательные напряжения при смещении нити в горизонтальной плоскости

Рассмотрим влияние поворота сечения нити на угол θ (см. рис. 4.1). В этом случае волокна нити смещаются в горизонтальной плоскости на величину $-z \sin \theta \approx -z\theta$. В результате такого смещения напряжения σ_N и σ_M дадут дополнительные поперечные нагрузки $dq_\theta^{(1)}$ и $dq_\theta^{(2)}$. Их значение можно найти по формулам (4.1) и (4.2), заменив в них параметр v на $-z\theta$. Тогда получим:

$$dq_\theta^{(1)} = -\sigma_N z \theta'' dF; \quad (4.7)$$

$$dq_\theta^{(2)} = \frac{M_y z^2}{I_y} \theta'' dF - \frac{M_y' z^2}{I_y} \theta' dF. \quad (4.8)$$

Касательные напряжения τ дают при повороте поперечного сечения нити на угол θ дополнительную погонную поперечную нагрузку (рис. 4.5), значение которой определяется из следующего соотношения:

$$dq_0^{(3)} = \frac{-(Q_z + dQ_z)(\theta + d\theta) + Q_z\theta}{dx} = -Q_z\theta' - Q_z'\theta. \quad (4.9)$$

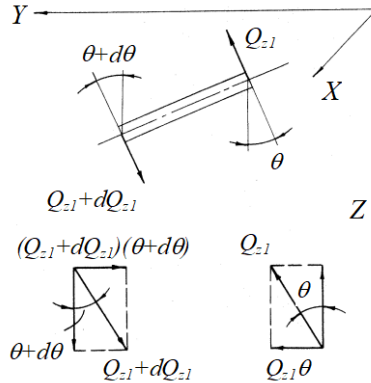


Рис. 4.5. Равнодействующие касательные напряжения при повороте нити в плоскости сечения

Интегрируя (4.7) и (4.8) по площади поперечного сечения нити F и складывая найденный результат с (4.9), для суммарной погонной поперечной нагрузки от поворота θ имеем:

$$q_0 = -M_y\theta'' - M_y'\theta' - Q_z\theta' - Q_z'\theta = -(M_y\theta)''. \quad (4.10)$$

Поперечные нагрузки $dq_0^{(1)}$ и $dq_0^{(2)}$ создают в сечении дополнительный погонный крутящий момент

$$m_x^\theta = -\int_F [dq_0^{(1)} + dq_0^{(2)}] z = \frac{NI_y}{F} \theta''. \quad (4.11)$$

В выражении (4.11) учтено, что $\int_F z^3 dF = 0$.

При повороте поперечного сечения на угол θ касательные напряжения не вызовут крутящего момента, поскольку внешняя нагрузка $q = q_1 + q_2$ действует в плоскости симметрии поперечного сечения нити. Крутящий момент от приращений касательных напряжений будет возникать только в том случае, если нагрузка будет приложена не по оси нити. Допустим, что начальная нагрузка q_1 приложена на расстоянии e_1 от центра изгиба сечения, а дополнительная q_2 – на расстоянии e_2 (рис. 4.6).

При повороте поперечного сечения нити на угол θ возникает дополнительный крутящий момент, равный

$$m_x^\theta = -q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta. \quad (4.12)$$

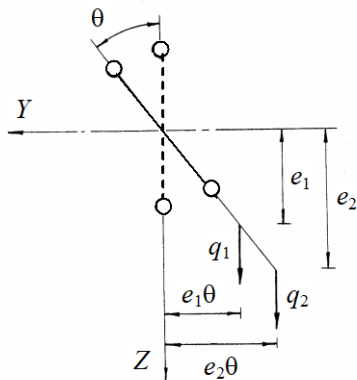


Рис. 4.6. Расположение нагрузок по высоте поперечного сечения нити

С учетом последнего соотношения, а также формулы (4.11) выражение для суммарного погонного крутящего момента от поворота сечения на угол θ можно записать в следующем виде:

$$m_x^\theta = \frac{NI_y}{F} \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta. \quad (4.13)$$

Суммируя (4.3) и (4.10), получаем полную величину погонной дополнительной поперечной нагрузки от перемещения v и поворота θ

$$q_y = Nv'' - (M_y \theta)'', \quad (4.14)$$

а суммируя зависимости (4.5), (4.6) и (4.13) – величину дополнительного погонного крутящего момента

$$m_x = -M_y v'' + \frac{NI_y}{F} \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta. \quad (4.15)$$

В силу принятого ранее предположения о пологости нити конечной жесткости, распор H в ней мало отличается от продольного усилия N [67, 103]. Тогда, учитывая данное допущение в формулах (4.14) и (4.15), окончательно получим:

$$q_y = Hv'' - (M_y \theta)''; \quad (4.16)$$

$$m_x = -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta, \quad (4.17)$$

где $r^2 = I_y/F$ – радиус инерции поперечного сечения нити.

Воспользуемся полученными соотношениями при рассмотрении устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости.

§ 4.3. Общие уравнения устойчивости нитей конечной жесткости

В соответствии с работами [24, 115, 204, 207] энергию упругой деформации нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{\omega}(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(v'')^2] dx, \quad (4.18)$$

где EI_{ω} – секториальная жесткость поперечного сечения нити; GI_d – крутильная жесткость; EI_z – изгибная жесткость нити в плоскости XOY .

Работу внешних сил при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба определим из выражения

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l (q_y v + m_x \theta) dx, \quad (4.19)$$

а с учетом (4.16) и (4.17) получим:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l [Hv''v - (M_y \theta)'' v - M_y v'' \theta + Hr^2 \theta \theta'' - q_1 e_1 \theta^2 - q_2 e_2 \theta^2] dx. \quad (4.20)$$

Так как рассматриваемое отклоненное (выпученное) состояние нити конечной жесткости является равновесным, то в соответствии с энергетическим критерием устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле [24] уравнение устойчивости с учетом (4.18) и (4.20) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^l [EI_{\omega}(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(v'')^2 - Hv''v + (M_y \theta)'' v + \\ & + M_y v'' \theta - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2 + q_2 e_2 \theta^2] dx = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах граничные условия можно представить в виде

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } x=0 & v = v'' = \theta = \theta'' = 0, \\ \text{при } x=l & v = v'' = \theta = \theta'' = 0. \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

В качестве функций v и θ , удовлетворяющих граничным условиям (4.22), принимаем:

$$v = A \sin \lambda x, \quad \theta = B \sin \lambda x, \quad (4.23)$$

где $\lambda = \pi/l$.

Подставляя значения ν и θ из (4.23) в уравнение устойчивости (4.21) и интегрируя полученное выражение, после некоторых преобразований придем к уравнению

$$(P_z + H)A^2 - \frac{4}{l}AB \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx + \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] r^2 B^2 = 0, \quad (4.24)$$

где $P_z = EI_z \lambda^2$ – эйлерова сила при продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega = (EI_\omega \lambda^2 + GI_d)/r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

Коэффициенты A и B в формуле (4.24) подбираются такими, чтобы дополнительная нагрузка, приложенная к нити, имела наименьшее значение.

Обозначая выражение, стоящее в левой части уравнения (4.24) через Π и составляя от него производные по каждому из коэффициентов, получим систему однородных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial A} &= 2(P_z + H)A - \frac{4}{l}B \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial B} &= -\frac{4}{l}A \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx + 2r^2 \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] B = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Потеря устойчивости становится возможной, если эта система уравнений может дать решения для коэффициентов A и B , отличные от нуля. Этому случаю соответствует равенство нулю определителя полученной системы уравнений. Приравнявая его нулю, имеем:

$$\begin{vmatrix} P_z + H & -\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx \\ -\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx & r^2 \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (4.26)$$

Раскрывая этот определитель, находим уравнение устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости

$$r^2 (P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx \right]^2 = 0. \quad (4.27)$$

Интеграл, входящий в уравнение (4.27), зависит от вида нагрузки, приложенной к нити и условий закрепления ее концов. Для вычисления изгибающего момента, действующего в нити, можно воспользоваться формулами

уточненного (3.5) или приближенного (3.195) методов. Применение приближенного метода для вычисления изгибающих моментов, действующих в нити, позволяет существенно упростить расчетные зависимости и практически не сказывается на точности расчетов. Так, например, разница между значениями изгибающих моментов в середине пролета, вычисленных по уточненному и приближенному методам при действии равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету, составляет не более 3,0 %.

Рассмотрим нить, работающую с изгибом от начальной нагрузки. В этом случае изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ и определяемый по формуле (3.195), можно представить в виде

$$M_y = \frac{M_y^6}{1 + kH}, \quad (4.28)$$

где M_y^6 – изгибающий момент в плоскости XOZ для балки с геометрическими характеристиками нити конечной жесткости; $k = \frac{1}{EI_y \lambda^2}$ – коэффициент.

Подставляя (4.28) в (4.27) и производя интегрирование, приходим к уравнению

$$r^2(P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12 \lambda^2} \right)^2 \left(\frac{q_1 + q_2}{1 + kH} \right)^2 = 0. \quad (4.29)$$

Полученное уравнение содержит две неизвестные величины – критическую нагрузку q_2 и критический распор H . Для связи между критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение неразрывности деформаций

$$L = L_0 + \Delta L, \quad (4.30)$$

где L – длина нити после приложения критической нагрузки; L_0 – длина нити при начальной нагрузке; ΔL – упругое приращение длины нити, вызванное критической нагрузкой.

После подстановки в уравнение (4.30) значений длин нити, получим уравнение (3.197). Перепишем его в несколько измененном виде

$$\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6 EF}{40320 \cdot (EI_y)^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320 \cdot (EI_y)^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (4.31)$$

Определяя из уравнения (4.31) величину q_2 и подставляя ее значение в выражение (4.29), приходим к следующему уравнению относительно критического распора H :

$$r^2(P_z + H) \left\{ P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} \left[q_1(e_1 - e_2) + e_2(1 + kH) \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} \right] \right\} - \left(\frac{3 + \pi^2}{12 \lambda^2} \right)^2 (a_1^2 H + a_2^2) = 0, \quad (4.32)$$

где

$$a_1^2 = \frac{40320 \cdot (EI_y)^2}{17 \cdot l^6 EF}; \quad a_2^2 = \frac{q_1^2}{(1 + kH_0)^2} - \frac{40320 \cdot (EI_y)^2}{17 \cdot l^6 EF} H_0.$$

Решая уравнение (4.32), определяем значение критического распора H , а подставляя его значение в уравнение (4.31) – величину критической дополнительной нагрузки q_2 .

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (4.28) будем иметь:

$$M_y = \frac{M_y^0}{1 + kH} - \frac{4y_0 x(l - x)H}{l^2(1 + kH)}, \quad (4.33)$$

где y_0 – стрела провисания нити при действии начальной нагрузки.

Вместо уравнения (4.31) получаем

$$\frac{EF}{(1 + kH)^2} \left[\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6}{40320(EI_y)^2} + \frac{(q_1 + q_2)y_0 l^2}{15EI_y} + \frac{8y_0^2}{3l^2} \right] = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0, \quad (4.34)$$

а вместо уравнения (4.29) –

$$r^2(P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right)^2 \frac{y_0^2}{(1 + kH)^2} \left(\frac{q_2 l^2}{8y_0} + H_0 - H \right)^2 = 0. \quad (4.35)$$

Уравнение для определения значения критического распора H примет вид

$$\begin{aligned} & r^2(P_z + H)(1 + kH)^2 \left[P_\omega + H + \frac{e_1 - e_2}{r^2 \lambda^2} q_1 - \frac{e_2 b_2}{2b_3 r^2 \lambda^2} + \right. \\ & \left. + \frac{e_2}{2b_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} \right] - \left(\frac{6 + 2\pi^2}{24 \lambda^2} \right)^2 \times \\ & \times \left[\frac{1}{2b_3} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{b_2}{2b_3} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0, \quad (4.36) \end{aligned}$$

где

$$b_1 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2}; \quad b_2 = \frac{l^2 y_0 EF}{15EI_y}; \quad b_3 = \frac{17l^6 EF}{40320(EI_y)^2}; \quad b_4 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} - H_0.$$

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах граничные условия будут иметь вид

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } x=0 & v=v'=\theta=\theta'=0, \\ \text{при } x=l & v=v'=\theta=\theta'=0. \end{array} \right\} \quad (4.37)$$

При таких граничных условиях в качестве функций v и θ можно принять

$$v = A(1 - \cos 2\lambda x), \quad \theta = B(1 - \cos 2\lambda x). \quad (4.38)$$

Подставив значения v и θ из (4.38) в уравнение устойчивости (4.21), получим выражение

$$\begin{aligned} (P_z^* + H)A^2 + \frac{4}{l} AB \int_0^l M_y \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \\ + \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] r^2 B^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $P_z^* = 4EI_z \lambda^2$ – эйлерова сила при продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega^* = (4EI_\omega \lambda^2 + GI_d)/r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

Выполняя последующие действия, как и в случае шарнирного закрепления концов нити, придем к уравнению устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости

$$\begin{aligned} r^2 (P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \\ - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Если нить работает с изгибом от начальной нагрузки, то изгибающий момент, действующий в нити, можно представить в виде

$$M_y = \frac{M_y^6}{1 + 0,25kH}. \quad (4.41)$$

Подставляя выражение для изгибающего момента M_y из (4.41) в (4.40), получаем уравнение устойчивости

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2}(q_1e_1 + q_2e_2) \right] - \frac{49}{256\lambda^4} \left(\frac{q_1 + q_2}{1 + 0,25kH} \right)^2 = 0. \quad (4.42)$$

Для связи между критическим распором H и критической дополнительной нагрузкой q_2 используем уравнение неразрывности деформаций (3.202). Перепишем его в несколько измененном виде

$$\frac{(q_1 + q_2)^2 l^6 EF}{60480 \cdot (EI_y)^2 (1 + 0,25kH)^2} - H = \frac{q_1^2 l^6 EF}{60480 \cdot (EI_y)^2 (1 + 0,25kH_0)^2} - H_0. \quad (4.43)$$

Заемствуя из уравнения (4.43) дополнительную критическую нагрузку q_2 и подставляя ее в формулу (4.42), приходим к уравнению критического распора H

$$r^2(P_z^* + H) \left\{ P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2} [q_1(e_1 - e_2) + e_2(1 + 0,25kH)\sqrt{c_1^2 H + c_2^2}] \right\} - \frac{49}{256\lambda^4} (c_1^2 H + c_2^2) = 0, \quad (4.44)$$

где

$$c_1^2 = \frac{60480 \cdot (EI_y)^2}{l^6 EF}; \quad c_2^2 = \frac{q_1^2}{(1 + 0,25kH_0)^2} - \frac{60480 \cdot (EI_y)^2}{l^6 EF} H_0.$$

Из уравнения (4.44) определяется значение критического распора H , а из выражения (4.43) – критическая дополнительная нагрузка q_2 .

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , можно представить в виде

$$M_y = \frac{M_y^0}{1 + 0,25kH} - \frac{4y_0 x(l - x)H}{l^2(1 + 0,25kH)}. \quad (4.45)$$

Подставляя (4.45) в (4.40), получаем уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2}(q_1e_1 + q_2e_2) \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \frac{1}{(1 + 0,25kH)^2} \left[\frac{21(q_1 + q_2)}{4(3 + \pi^2)} + \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0. \quad (4.46)$$

Для связи между критическим распором H и дополнительной критической нагрузкой q_2 используем уравнение неразрывности деформаций нити

$$\frac{EF}{(1+0,25kH)^2} \left[\frac{(q_1+q_2)^2 l^6}{60480(EI_y)^2} + \frac{(q_1+q_2)y_0 l^2}{90EI_y} + \frac{8y_0^2}{3l^2} \right] = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0. \quad (4.47)$$

Решая уравнение (4.47) относительно критической нагрузки q_2 и подставляя полученное значение в выражение (4.46), получаем уравнение, содержащее одно неизвестное – критический распор H :

$$\begin{aligned} & r^2 (P_z^* + H)(1+0,25kH)^2 \left[P_\omega^* + H + \frac{3(e_1 - e_2)}{4r^2 \lambda^2} q_1 - \frac{3e_2 d_2}{8d_3 r^2 \lambda^2} + \right. \\ & \left. + \frac{3e_2}{8d_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{d_2^2 + 4d_3(d_4 + H)(1+0,25kH)^2 - 4d_1 d_3} \right] - \left(\frac{3+\pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \times \\ & \times \left[\frac{21}{8d_3(3+\pi^2)} \sqrt{d_2^2 + 4d_3(d_4 + H)(1+0,25kH)^2 - 4d_1 d_3} - \right. \\ & \left. - \frac{21d_2}{8d_3(3+\pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где

$$d_1 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2}; \quad d_2 = \frac{l^2 y_0 EF}{90EI_y}; \quad d_3 = \frac{l^6 EF}{60480(EI_y)^2}; \quad d_4 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} - H_0.$$

Определяя из уравнения (4.48) критический распор H и подставляя его в выражение (4.47), находим дополнительную критическую нагрузку q_2 .

Нити конечной жесткости часто раскрепляют в горизонтальной плоскости какими-либо связями. Причем эти связи, препятствуя смещению нити в горизонтальной плоскости, не препятствуют повороту ее сечения вокруг некоторой оси, в общем случае не совпадающей с центральной осью нити (рис. 4.7). Допустим, что линия раскрепления нити находится на расстоянии e_c от центральной оси y , а начальная q_1 и дополнительная q_2 нагрузки приложены соответственно на расстояниях e_1 и e_2 от той же оси. Примем, что e_c , e_1 и e_2 постоянны по длине нити.

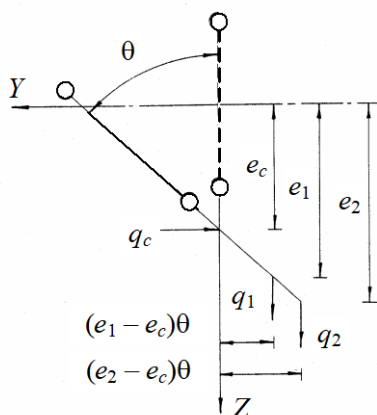


Рис. 4.7. Поворот поперечного сечения нити конечной жесткости, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости

При потере нитью устойчивости плоской формы изгиба горизонтальное перемещение оси нити будет равно

$$v = e_c \theta. \quad (4.49)$$

При этом возникающая в связях горизонтальная реакция q_c создает дополнительную крутящую нагрузку $m_c = q_c e_c$ относительно оси нити x . Дополнительный крутящий момент возникает и от внецентренного приложения нагрузок q_1 и q_2 при повороте поперечного сечения нити на угол θ . Его величина равна

$$m_q = -q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta. \quad (4.50)$$

Тогда, добавляя эти члены в выражения для дополнительной погонной поперечной нагрузки (4.16) и дополнительного погонного крутящего момента (4.17), получаем:

$$q_y = H v'' - (M_y \theta)'' - q_c; \quad (4.51)$$

$$m_x = -M_y v'' + H r^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta + q_c e_c. \quad (4.52)$$

Подставляя в уравнения (4.51) и (4.52) вместо v его значение из (4.49), будем иметь:

$$q_y = H e_c \theta'' - (M_y \theta)'' - q_c; \quad (4.53)$$

$$m_x = -M_y e_c \theta'' + H r^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta + q_c e_c. \quad (4.54)$$

Тогда уравнение устойчивости плоской формы изгиба примет вид

$$\int_0^l [EI_{\omega}(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z e_c^2(\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)'' e_c \theta + \\ + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1(e_1 - e_c)\theta^2 + q_2(e_2 - e_c)\theta^2] dx = 0. \quad (4.55)$$

В случае шарнирного закрепления концов нити в качестве функции, аппроксимирующей поворот θ , принимаем функцию (4.23). Подставляя значение θ из (4.23) в уравнение устойчивости нити, раскрепленной связями по всей длине (4.55), и интегрируя полученное выражение, приходим к следующему уравнению:

$$B^2 \left(EI_{\omega} \lambda^2 + GI_d + Hr^2 + EI_z e_c^2 \lambda^2 + He_c^2 + \right. \\ \left. + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin \lambda x dx \right) = 0. \quad (4.56)$$

Поскольку $B \neq 0$, то уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити, шарнирно раскрепленной связями по всей длине, примет вид

$$r^2(P_{\omega} + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx = 0. \quad (4.57)$$

В случае нити, работающей с изгибом от начальной нагрузки, уравнение (4.57) после некоторых преобразований запишется в виде

$$r^2(P_{\omega} + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{(q_1 + q_2)e_c}{1 + kH} = 0. \quad (4.58)$$

Уравнение (4.58) содержит две неизвестные величины – критический распор H и дополнительную критическую нагрузку q_2 . Для связи между критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение (4.31). Определяя из уравнения (4.31) величину q_2 и подставляя ее значение в выражение (4.58), придем к уравнению, в котором неизвестным будет критический распор H :

$$r^2(P_{\omega} + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_2}{\lambda^2} q_1 + \\ + \frac{1}{\lambda^2} \left[(e_2 - e_c)(1 + kH) - \frac{3 + \pi^2}{6} e_c \right] \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} = 0. \quad (4.59)$$

Решая уравнение (4.59), определяем значение критического распора H , а подставляя его значение в уравнение (4.31) – величину критической дополнительной нагрузки q_2 .

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (4.58) будем иметь

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{3 + \pi^2}{3\pi^2} \cdot \frac{4y_0 e_c}{1 + kH} \left(\frac{q_2 l^2}{8y_0} + H_0 - H \right) = 0. \quad (4.60)$$

Связь между дополнительной нагрузкой q_2 и распором H задается уравнением (4.34). Определяя из него значение q_2 и подставляя его в уравнение (4.60), получаем уравнение с одним неизвестным – критическим распором H :

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_2}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} \cdot \frac{b_2}{2b_3} + \frac{e_2 - e_c}{2b_3 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{e_c}{1 + kH} \times \times \left[\frac{1}{2b_3} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{b_2}{2b_3} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (4.61)$$

Вычисляя из уравнения (4.61) значение критического распора H и подставляя его в выражение (4.34), определяем величину критической дополнительной нагрузки q_2 .

§ 4.4. Действие дополнительных нагружений специального вида

4.4.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета. Рассмотрим нить, шарнирно закрепленную на опорах и нагруженную начальной равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой q_1 , и дополнительной равномерно распределенной на левой половине пролета нагрузкой q_2 . Будем считать, что при начальной нагрузке q_1 устойчивость плоской формы изгиба нити обеспечена. При возрастании дополнительной нагрузки q_2 в какой-то момент плоская форма изгиба нити перестанет быть устойчивой и, при определенной величине нагрузки q_2 , нить теряет устойчивость и изгибается по пространственной кривой.

В этом случае выражения для дополнительной погонной поперечной нагрузки q_y и дополнительного погонного крутящего момента m_x , возникающих от заданного напряженного состояния нити при изменении ее деформированного состояния, можно представить в виде

$$q_y = Hv'' - (M_y \theta)'', \quad (0 \leq x \leq l); \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned}
m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta, & (0 \leq x \leq l/2); \\
m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta, & (l/2 \leq x \leq l). \quad (4.63)
\end{aligned}$$

Используя изложенный подход, получаем уравнение устойчивости нити конечной жесткости при дополнительной равномерно распределенной на левой половине пролета нагрузке q_2 :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l/2} [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - Hv''v + (M_y \theta)'' v + \\
& \quad + M_y \theta v'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2 + q_2 e_2 \theta^2] dx + \\
& \quad + \int_{l/2}^l [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - Hv''v + (M_y \theta)'' v + \\
& \quad + M_y \theta v'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2] dx = 0. \quad (4.64)
\end{aligned}$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах граничные условия примут вид (4.22). В качестве функций v и θ , удовлетворяющих граничным условиям, примем

$$v = A \sin 2\lambda x, \quad \theta = B \sin 2\lambda x. \quad (4.65)$$

Подставляя значения v и θ из (4.65) в уравнение устойчивости и выполняя интегрирование полученного выражения, придем к уравнению

$$r^2 (P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{1}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + 0,5 q_2 e_2) \right] - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 2\lambda x dx \right]^2 = 0. \quad (4.66)$$

Рассмотрим нить, работающую с изгибом от начальной нагрузки. Выражая изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , по формуле (4.28) и подставляя его значение, вычисленное для данного случая нагружения, в уравнение (4.66), находим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& r^2 (P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{1}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + 0,5 q_2 e_2) \right] - \\
& \quad - \left(\frac{3 + 4\pi^2}{48\lambda^2} \right)^2 \left(\frac{q_1 + 0,5 q_2}{1 + kH} \right)^2 = 0. \quad (4.67)
\end{aligned}$$

Для связи между критической дополнительной нагрузкой и критическим распором используем уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{17(q_1 + 0,5q_2)^2 l^6 EF}{40320 \cdot (EI_y)^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320 \cdot (EI_y)^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (4.68)$$

Определяя из уравнения (4.68) значение дополнительной нагрузки q_2 и подставляя его в выражение (4.67), получаем уравнение для определения критического распора H :

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1 - e_2}{4r^2\lambda^2} q_1 + \frac{e_2}{4r^2\lambda^2} (1 + kH) \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} \right] - \left(\frac{3 + 4\pi^2}{48\lambda^2} \right)^2 (a_1^2 H + a_2^2)^2 = 0. \quad (4.69)$$

В случае работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (4.67) будем иметь

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1}{4r^2\lambda^2} q_1 + \frac{e_2}{8r^2\lambda^2} q_2 \right] - \left(\frac{3 + 4\pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \frac{1}{(1 + kH)^2} \left[\frac{(3 + 4\pi^2)(q_1 + 0,5q_2)}{4(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0, \quad (4.70)$$

а вместо уравнения (4.68) –

$$\frac{EF}{(1 + kH)^2} \left[\frac{17l^6 (q_1 + 0,5q_2)^2}{40320 (EI_y)^2} + \frac{(q_1 + 0,5q_2)y_0 l^2}{15EI_y} + \frac{8y_0^2}{3l^2} \right] = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0. \quad (4.71)$$

Уравнение для определения значения критического распора примет вид

$$r^2(P_z^* + H)(1 + kH)^2 \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1 - e_2}{4r^2\lambda^2} - \frac{e_2 b_2}{8b_3 r^2 \lambda^2} + \frac{e_2}{8b_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \left[\frac{3 + 4\pi^2}{8b_3(3 + \pi^2)} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{b_2(3 + 4\pi^2)}{8b_3(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0. \quad (4.72)$$

Выведем уравнение пространственной устойчивости нити конечной жесткости, раскрепленной в горизонтальной плоскости. Примем, что линия раскрепления нити проходит на расстоянии e_c от центральной оси поперечного сечения нити y . Расположение начальной q_1 и дополнительной q_2 нагрузок по высоте сечения показано на рис. 4.7.

Как и в случае с равномерно распределенной нагрузкой, горизонтальный прогиб оси нити при повороте поперечного сечения вокруг точки закрепления равен (4.49); погонная горизонтальная реакция, возникающая в связях, равна q_c , а погонный крутящий момент, возникающий от этой реакции, $-m_c = q_c e_c$.

Тогда величина дополнительной погонной поперечной нагрузки q_y будет равна (4.51), а величина дополнительного погонного крутящего момента

$$m_x = -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta + q_c e_c, \quad (0 \leq x \leq l/2), \quad (4.73)$$

$$m_x = -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta + q_c e_c, \quad (l/2 \leq x \leq l).$$

Заменяя в формулах (4.51) и (4.73) горизонтальный прогиб оси нити v в соответствии с (4.49) и подставляя полученные выражения в (4.18) и (4.20), находим уравнение устойчивости нити конечной жесткости в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z e_c^2(\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)'' e_c \theta + \\ & + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1(e_1 - e_c)\theta^2 + q_2(e_2 - e_c)\theta^2] dx + \\ & + \int_{l/2}^l [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z e_c^2(\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)'' e_c \theta + \\ & + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1(e_1 - e_c)\theta^2] dx = 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Считая, что концы нити шарнирно закреплены, примем в качестве аппроксимирующей функции θ функцию (4.65).

Подставляя значение θ в выражение (4.74), получаем уравнение устойчивости нити, шарнирно закрепленной связями по всей длине:

$$\begin{aligned} & r^2(P_\omega^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \\ & - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin^2 2\lambda x dx = 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Если нить работает с изгибом от начальной нагрузки, то уравнение устойчивости преобразуется к виду

$$r^2(P_{\omega}^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \\ - \frac{3 + 4\pi^2}{24\lambda^2} \cdot \frac{(q_1 + 0,5q_2)e_c}{1 + kH} = 0. \quad (4.76)$$

Уравнение неразрывности деформаций будет иметь вид (4.68), а уравнение для определения критического распора H –

$$r^2(P_{\omega}^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \\ + \frac{1}{4\lambda^2} \left[(e_2 - e_c)(1 + kH) - \frac{3 + 4\pi^2}{6} e_c \right] \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} = 0. \quad (4.77)$$

После определения из уравнения (4.77) критического распора H из соотношения (4.68) находим дополнительную критическую нагрузку q_2 .

Если нить работает без изгиба от начальной нагрузки, то вместо уравнения (4.76) будем иметь:

$$r^2(P_{\omega}^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \\ - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{e_c}{1 + kH} \left[\frac{(3 + 4\pi^2)(q_1 + 0,5q_2)}{4(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (4.78)$$

В качестве уравнения, связывающего критический распор с критической нагрузкой, воспользуемся уравнением (4.71).

Уравнение для определения критического распора будет иметь вид

$$r^2(P_{\omega}^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_2}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{4\lambda^2} \cdot \frac{b_2}{2b_3} + \\ + \frac{e_2 - e_c}{8b_3\lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1b_3} - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{e_c}{1 + kH} \times \\ \times \left[\frac{3 + 4\pi^2}{8b_3(3 + \pi^2)} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1b_3} - \right. \\ \left. - \frac{b_2(3 + 4\pi^2)}{8b_3(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (4.79)$$

После определения из уравнения (4.79) значения критического распора H находим критическую нагрузку q_2 из выражения (4.71).

4.4.2. Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета. Рассмотрим нить, шарнирно закрепленную на опорах и нагруженную начальной нагрузкой q_1 , равномерно распределенной по всему пролету, и дополнительной сосредоточенной нагрузкой P , действующей посредине пролета. Допустим, что при начальной нагрузке q_1 устойчивость плоской формы изгиба нити обеспечена. При возрастании дополнительной нагрузки P в какой-то момент плоская форма изгиба нити перестанет быть устойчивой и, при определенной величине нагрузки P , нить теряет устойчивость плоской формы изгиба.

В этом случае от заданного напряженного состояния в нити возникают дополнительные нагрузки:

$$q_y = H\nu'' - (M_y\theta)''; \quad (4.80)$$

$$m_x = -M_y\nu'' + Hr^2\theta'' - q_1e_1\theta; \quad (4.81)$$

$$m_p = Pe_p\theta, \quad (4.82)$$

где e_p – эксцентриситет приложения сосредоточенной нагрузки P от центра изгиба сечения; m_p – дополнительный крутящий момент, возникающий в нити от нагрузки P , приложенной с эксцентриситетом e_p , при повороте поперечного сечения на угол θ .

Поступая так же, как и в ранее рассмотренных случаях, получим уравнение устойчивости нити конечной жесткости при дополнительной сосредоточенной нагрузке посредине пролета:

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(\nu'')^2 - H\nu''\nu + (M_y\theta)''\nu + \\ & \quad + M_y\nu''\theta - Hr^2\theta\theta'' + q_1e_1\theta^2] dx + \\ & + \int_{l/2}^l [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(\nu'')^2 - H\nu''\nu + (M_y\theta)''\nu + \\ & \quad + M_y\nu''\theta - Hr^2\theta\theta'' + q_1e_1\theta^2] dx + Pe_p\theta^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Функции ν и θ , удовлетворяющие граничным условиям, будут соответствовать формулам (4.23). Здесь следует отметить, что при рассматриваемом виде нагрузки указанные формулы дадут погрешность, величина которой не превышает 1,50 % [161]. Внося последние в уравнение устойчивости (4.83), получим:

$$\begin{aligned} & r^2(P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2\lambda^2} \left(q_1e_1 + 2\frac{Pe_p}{l} \sin^2 \lambda x \right) \right] - \\ & - \left[\frac{2}{l} \left(\int_0^{l/2} M_y \sin^2 \lambda x dx + \int_{l/2}^l M_y \sin^2 \lambda x dx \right) \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Для выражения изгибающего момента, действующего в плоскости XOZ , используем зависимость (4.28). Подставив значение изгибающего момента, вычисленное для случая дополнительной сосредоточенной нагрузки посередине пролета, в уравнение (4.84), будем иметь:

$$r^2(P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} \left(q_1 e_1 + 2 \frac{Pe_p}{l} \sin^2 \lambda x \right) \right] - \left(\frac{1}{24} \cdot \frac{2(3 + \pi^2)q_1 l + 3(4 + \pi^2)P}{\pi^2(1 + kH)} l \right)^2 = 0. \quad (4.85)$$

Уравнение неразрывности деформаций, связывающее дополнительную критическую нагрузку и критический распор, примет вид

$$\frac{(136q_1^2 l^2 + 427q_1 Pl + 588P^2)l^4 EF}{322560 \cdot (EI_y)^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320 \cdot (EI_y)^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (4.86)$$

Решив последнее уравнение совместно с уравнением (4.85), найдем критическую дополнительную нагрузку и критический распор.

4.4.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета. Рассмотрим нить, шарнирно закрепленную на опорах и нагруженную начальной нагрузкой q_1 , равномерно распределенной по всему пролету, и дополнительной сосредоточенной нагрузкой P в четверти пролета. Как и ранее, будем считать, что при начальной нагрузке q_1 устойчивость нити обеспечена. При увеличении дополнительной нагрузки P в какой-то момент нить перестает быть устойчивой и при некоторой величине нагрузки P теряет устойчивость плоской формы изгиба.

В этом случае дополнительные нагрузки, возникающие от заданного напряженного состояния в нити, будут определяться соотношениями (4.80) – (4.82).

Уравнение устойчивости нити конечной жесткости при дополнительной сосредоточенной нагрузке в четверти пролета примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/4} [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(v'')^2 - Hv''v + (M_y\theta)''v + \\ & \quad + M_y v''\theta - Hr^2\theta\theta'' + q_1 e_1 \theta^2] dx + \\ & + \int_{l/4}^l [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(v'')^2 - Hv''v + (M_y\theta)''v + \\ & \quad + M_y v''\theta - Hr^2\theta\theta'' + q_1 e_1 \theta^2] dx + Pe_p \theta^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Функции v и θ , удовлетворяющие граничным условиям, выразим следующим образом:

$$\begin{aligned} v &= A \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \lambda x + \frac{1}{16} \sin 2\lambda x \right), \\ \theta &= B \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \lambda x + \frac{1}{16} \sin 2\lambda x \right). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Отметим, что формулы (4.88) дают погрешность, не превышающую 1,58 % [161].

Подставив значения v и θ из (4.88) в зависимость (4.87) и выполнив интегрирование полученного выражения, придем к уравнению

$$\begin{aligned} 1089r^2(P_z + H) \times & \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2\lambda^2} \left(q_1 e_1 + \frac{1}{66} \frac{Pe_p}{l} (8\sqrt{2} \sin \lambda x + \sin 2\lambda x)^2 \right) \right] - \\ & - \left[\frac{2}{l} \left(\int_0^{l/4} M_y (32 \sin^2 \lambda x + 10\sqrt{2} \sin \lambda x \sin 2\lambda x + \sin^2 2\lambda x) dx + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{l/4}^l M_y (32 \sin^2 \lambda x + 10\sqrt{2} \sin \lambda x \sin 2\lambda x + \sin^2 2\lambda x) dx \right) \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Выразив изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , по формуле (4.28) и подставив значение изгибающего момента, вычисленное для случая сосредоточенной нагрузки в четверти пролета в уравнение (4.89), получим:

$$\begin{aligned} 1089r^2(P_z + H) \times & \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2\lambda^2} \left(q_1 e_1 + \frac{1}{66} \frac{Pe_p}{l} (8\sqrt{2} \sin \lambda x + \sin 2\lambda x)^2 \right) \right] - \\ & - \left[\frac{1}{288} \frac{-18(129 + 44\pi^2)q_1 l - (3730 + 891\pi^2)P}{\pi^2(1 + kH)} l \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Для связи между критической дополнительной нагрузкой и критическим распором воспользуемся уравнением неразрывности деформаций

$$\begin{aligned} & \frac{(8704q_1^2 l^2 + 19341q_1 Pl + 11592P^2)l^4 EF}{20643840 \cdot (EI_y)^2 (1 + kH)^2} - H = \\ & = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320 \cdot (EI_y)^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Решив совместно уравнения (4.90) и (4.91), получим критическую дополнительную нагрузку и критический распор.

ГЛАВА 5

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 5.1. Исходные допущения

Теория деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости базируется практически на тех же допущениях, что и теория расчета нитей при работе материала в пределах упругости. Единственная дополнительная предпосылка связана с идеализацией диаграммы напряжение–деформация реальных материалов, которая в действительности оказывается достаточно сложной для непосредственного применения при расчете конструкций. В теории пластичности такая идеализация диаграммы сводится к отказу от учета присущих пластическому деформированию специфических эффектов, в том числе ползучести, гистерезиса и др. [35, 54, 59, 155]. Поэтому реальная зависимость между напряжениями и деформациями заменяется некоей аналитической кривой. Обычно эту диаграмму представляют в виде ломаной линии с двумя участками, реже применяются полигональная, параболическая и другие степенные аппроксимации [8, 35, 59, 79, 123].

Чаще других используются четыре модели работы материала: жестко-пластического, жестко-упрочняющегося, упруго-пластического и упруго-пластического с линейным упрочнением (рис. 5.1).

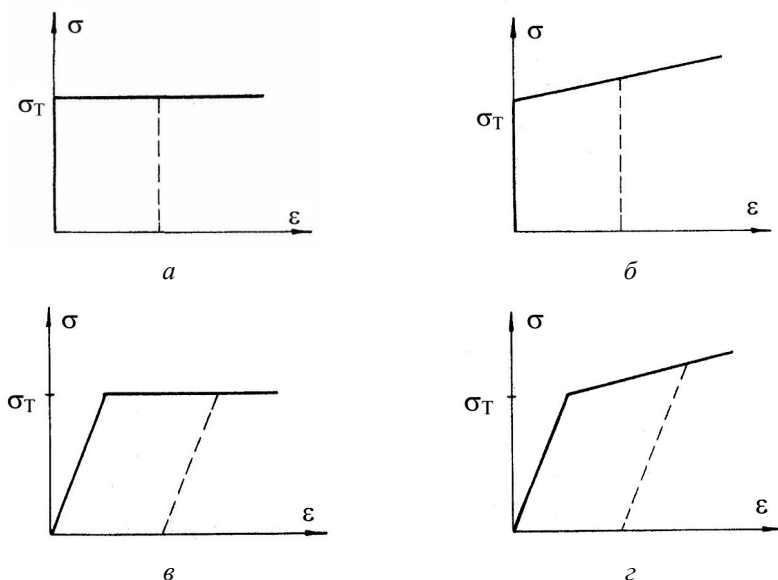


Рис. 5.1. Идеализированные диаграммы напряжение–деформация материала:
а – жестко-пластического; б – жестко-упрочняющегося;
в – упруго-пластического; г – то же, с линейным упрочнением

Из указанных моделей наиболее широко применяется модель идеального упруго-пластического материала (материала Прандтля). Как показали многочисленные исследования [6, 59, 109, 120, 131, 175], такая аппроксимация в целом вполне удовлетворительно отражает работу многих реальных материалов и позволяет более полно по сравнению с упругой стадией работы проанализировать поведение и определить дополнительные резервы прочности конструкции. В дальнейшем при изучении напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости за пределом упругости будем считать материал нити идеальным упруго-пластическим.

§ 5.2. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального упруго-пластического материала

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние упруго-пластической нити конечной жесткости с поперечным сечением идеального профиля, состоящего из двух одинаковых, имеющих суммарную площадь F тонких поясов и отстоящих один от другого на расстоянии h (рис. 5.2, а). Как показано в работах [8, 87, 164, 184, 195-197, 219], использование поперечного сечения нити такого профиля несколько облегчает решение задачи и относительно упрощает расчетные зависимости. Однако принципиальные изменения в соотношения при этом не вносятся, что позволяет на данном примере показать последовательность решения и вид разрешающих уравнений, соответствующих предлагаемой теории расчета.

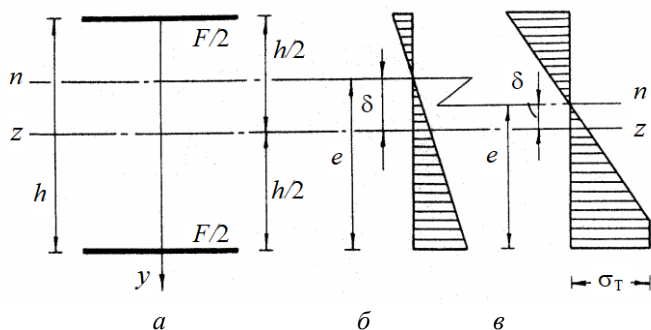


Рис. 5.2. Работа идеального профиля упруго-пластической нити конечной жесткости:
а – сечение профиля нити; б, в – эпюры напряжений в двух стадиях деформирования нити

Поведение поперечного сечения нити конечной жесткости на всех стадиях работы материала характеризуется зависимостью между распором, изгибающим моментом и кривизной нити. Для ее вывода спроектируем действующие в плоскости сечения элементарные силы на горизонтальную ось $z-z$ и составим сумму моментов этих сил относительно нейтральной оси $n-n$.

$$\int_F \sigma dF = H, \quad \int_F \sigma y dF = M_z + H\delta. \quad (5.1)$$

Входящее в эти зависимости нормальное напряжение σ является известной функцией относительного удлинения ϵ , вид которой устанавливается диаграммой растяжения материала. Однако в соответствии с гипотезой плоских сечений напряжения в волокне материала можно также представить как функцию кривизны оси нити k и расстояния y от нейтральной оси до рассматриваемого волокна. Записывая площадь элемента сечения dF в виде $dF = b(y)dy$, где $b(y)$ – ширина профиля нити на расстоянии y от оси $n - n$, преобразуем равенства (5.1) следующим образом:

$$\int_{y_1}^{y_2} \sigma(ky)b(y)dy = H, \quad \int_{y_1}^{y_2} \sigma(ky)b(y)ydy = M_z + H\delta, \quad (5.2)$$

пределы интегрирования в которых $y_1 = -(h - e)$, $y_2 = e$.

Для нити идеального профиля (см. рис. 5.2, а) имеем:

$$\begin{aligned} b(y) &= 0 & \text{при } -(h - e) < y < e, \\ b(y) &= \frac{F}{2} \frac{1}{dy} & \text{при } y = -(h - e), y = e. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Подставляя указанные условия в уравнения равновесия (5.2), получим:

$$\begin{aligned} \{\sigma[-k(h - e)] + \sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= H, \\ \{-(h - e)\sigma[-k(h - e)] + e\sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Закон изменения, входящего в последние соотношения нормального напряжения σ , в рассматриваемом нами случае идеального упруго-пластического материала можно записать в виде

$$\sigma = Eky \text{ при } |y| \leq \frac{\sigma_T}{Ek}, \quad \sigma = \sigma_T \text{sign } y \text{ при } |y| \geq \frac{\sigma_T}{Ek}, \quad (5.5)$$

где $\text{sign } y = 1$ при $y > 0$ и $\text{sign } y = -1$ при $y < 0$.

Если действующие в нити конечной жесткости усилия не вызывают ни в одном элементе поперечного сечения напряжений текучести, то нить работает в упругой стадии (рис. 5.2, б). Тогда, подставляя первое выражение из (5.5) в уравнения равновесия (5.4), получим:

$$[-Ek(h - e) + Eke] \frac{F}{2} = H, \quad [Ek(h - e)^2 + Eke^2] \frac{F}{2} = M_z + H\delta. \quad (5.6)$$

Учитывая, что параметр e можно записать в виде

$$e = \frac{h}{2} + \delta, \quad (5.7)$$

а δ представить известной формулой [16, 88]

$$\delta = \frac{\varepsilon_0}{k}, \quad (5.8)$$

где ε_0 – относительное удлинение оси нити, после некоторых преобразований получим два уравнения, определяющие соответственно кривизну и относительное удлинение оси нити:

$$\frac{EIk}{M_{\text{пр}}} = \frac{M_z}{M_{\text{пр}}}, \quad \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{H}{H_{\text{пр}}}. \quad (5.9)$$

Здесь принято, что $I = Fh^2/4$ – момент инерции, $M_{\text{пр}} = \sigma_T Fh/2$ – предельный изгибающий момент и $H_{\text{пр}} = \sigma_T F$ – предельный распор нити идеального профиля.

Упругая стадия работы профиля закончится, когда напряжения в нижнем (наиболее удаленном от нейтральной оси) волокне достигнут предела текучести. После этого в соответствии с принятой диаграммой растяжения их величина возрастет не будет. Поэтому при дальнейшем увеличении усилий в нити наступает вторая – упруго-пластическая стадия работы, когда в нижнем волокне появляется и по мере роста изгибающих моментов и распора утолщается пластический слой.

Условие появления первых пластических деформаций можно определить с помощью первого выражения из (5.5), устанавливающего распределение напряжений по сечению в упругой области. Приравняв в нем $y = e$ и $\sigma = \sigma_T$, получим:

$$Eke = \sigma_T, \quad (5.10)$$

откуда после исключения величин e и k и использования формул (5.7), (5.8) и первого выражения из (5.9) условие появления первых пластических деформаций приводится к виду

$$\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0. \quad (5.11)$$

По достижении внешней нагрузкой величины, при которой начинает выполняться последнее уравнение, начинается вторая – упруго-пластическая стадия деформирования, когда в сечении развивается область, охваченная пластическими деформациями (рис. 5.2, в). Подставив формулы (5.5) в уравнения равновесия (5.4), найдем

$$[-Ek(h-e) + \sigma_T] \frac{F}{2} = H, \quad [Ek(h-e)^2 + \sigma_T e] \frac{F}{2} = M_z + H\delta. \quad (5.12)$$

Преобразовывая равенства (5.12) аналогично соотношениям (5.6), придем к зависимостям, характеризующим кривизну и относительное удлинение оси нити:

$$\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0; \quad (5.13)$$

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{Elk}{M_{\text{пр}}} + 2\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1. \quad (5.14)$$

Заметим следующее. Если сравнить соотношения (5.11) и (5.13), первое из которых отражает условия появления пластических деформаций в поперечных сечениях, а второе характеризует кривизну нити в упруго-пластической стадии деформирования (вырождающееся в данном случае в зависимость между изгибающим моментом и распором), то увидим их полную тождественность. Это свидетельствует о том, что появление в сечениях нити конечной жесткости идеального профиля первых пластических деформаций означает реализацию в нем предельного состояния. Отсюда следует, что деформирование нити идеального профиля сопровождается образованием в ее пролете только двух типов участков: упругих и пластических. Последнее, как указывалось выше, несколько облегчает дальнейшее решение задачи, так как позволяет избежать рассмотрения упруго-пластических участков нити конечной жесткости, не внося при этом принципиальных изменений в расчетные зависимости.

Отметим также, что работа поперечных сечений балок за пределом упругости изучалась ранее Л.М. Беленьким [8], И.Л. Диковичем [38], С.Д. Лейтесом [87] и некоторыми другими авторами. Причем полученные ими результаты, хотя и отличаются по форме представления, но, тем не менее, достаточно хорошо согласуются с полученными в данном параграфе.

§ 5.3. Вывод общих дифференциальных уравнений

Используем полученные результаты для вывода уточненной теории деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости.

Допустим, что нить, работающая с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, с поперечным сечением площадью F , моментом инерции I и модулем упругости E нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = q_1 + q_2$ и находится в состоянии равновесия (рис. 5.3, а). Будем также считать, что нить на опорах закреплена шарнирно, ее материал является идеальным упруго-пластическим, а поперечное сечение имеет идеальный профиль. Выберем, как и ранее, в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения F , а в качестве искомой функции примем распор H .

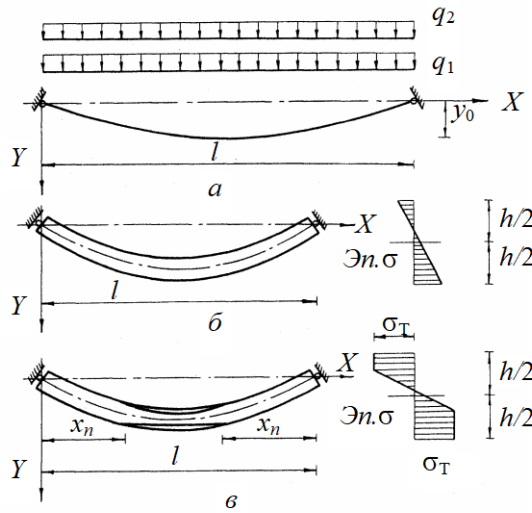


Рис. 5.3. Деформирование упруго-пластической нити конечной жесткости:
 а – расчетная схема нити; б – упругая фаза работы;
 в – упруго-пластическая фаза работы

Поведение нити конечной жесткости в первой фазе изгиба (рис. 5.3, б), когда все ее поперечные сечения работают в упругой стадии, подробно было рассмотрено ранее. Поэтому на этом останавливаться не будем.

Упругая фаза изгиба кончается, когда в наиболее нагруженном сечении нити изгибающий момент и распор достигают значений, при которых появляются первые пластические деформации. Для этого значения момента и распора должны удовлетворять условию (5.11).

Определив из уравнения (3.5) изгибающий момент в наиболее нагруженном сечении нити, в данном случае в середине пролета, и подставив его в соотношение (5.11), получим условие появления в нити первых пластических деформаций:

$$\frac{6\mu EI}{5l^2 H + 48EI} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0, \quad (5.15)$$

где $\mu = ql^2/M_{\text{пр}}$ – безразмерный параметр поперечной нагрузки.

По достижении внешней нагрузкой значения, определяемого последним выражением, начинается вторая фаза изгиба, когда образовавшийся в момент окончания первой фазы в середине пролета нити пластический шарнир трансформируется в пластический участок конечной протяженности (рис. 5.3, в). Определим расчетные зависимости при работе нити конечной жесткости в этой стадии изгиба. Для этого используем принцип возможных перемещений.

Если площадь поперечного сечения нити получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δF , то изменятся внутренние усилия, действующие в нити, и ее геометрия. Изгибающий момент M_z получит некоторое приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy . Кроме того распор получит некоторое приращение своей величины, равное δH .

Выражения, определяющие изогнутую ось нити и распределение изгибающих моментов для упругих участков ($l \leq x \leq x_n$, $l - x_n \leq x \leq l$) по-прежнему будут иметь вид (3.3) и (3.5), а для пластического участка ($x_n \leq x \leq l - x_n$) с учетом уравнения (5.13) их можно записать так:

$$y = \frac{M_z^6}{H} - \frac{M_{\text{пр}}}{H} \left(1 - \frac{H}{H_{\text{пр}}} \right); \quad (5.16)$$

$$M_z = M_{\text{пр}} \left(1 - \frac{H}{H_{\text{пр}}} \right). \quad (5.17)$$

Здесь принято, что x_n – координата границы между упругим и пластическим участками. Соответственно приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков также сохраняют свой вид (3.7), (3.9), (3.11) и (3.12), а для пластического участка получим следующие выражения:

$$\delta y = -\frac{M_z^6 - M_{\text{пр}}}{H(H + \delta H)} \delta H; \quad (5.18)$$

$$\delta M_z = -\frac{M_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} \delta H; \quad (5.19)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{E} \left[\frac{q}{M_{\text{пр}}} \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{\text{пр}}} \right] dx; \quad (5.20)$$

$$\delta d\varphi = \frac{M_{\text{пр}}(HE\delta I - EI\delta H - H_{\text{пр}}E\delta I)}{EI H_{\text{пр}}(EI + E\delta I)} dx. \quad (5.21)$$

При этом относительное удлинение оси пластического участка нити конечной жесткости идеального профиля определялось по формуле (5.14), где было принято, что кривизна оси пластического участка $k = q/H$ [38].

Найдем работу внешних и внутренних сил. Поскольку на нить действует только равномерно распределенная нагрузка, то для работы внешних сил имеем:

$$U_1 = 2 \int_0^{x_n} q \delta y dx + \int_{x_n}^{l-x_n} q \delta y dx. \quad (5.22)$$

Работа внутренних сил нити конечной жесткости состоит из двух слагаемых: работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M + \delta M$ на изменение угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$

$$U_2^1 = -2 \int_0^{x_n} (H + \delta H) \delta dx - \int_{x_n}^{l-x_n} (H + \delta H) \delta dx; \quad (5.23)$$

$$U_2^2 = -2 \int_0^{x_n} (M + \delta M) \delta d\varphi - \int_{x_n}^{l-x_n} (M + \delta M) \delta d\varphi. \quad (5.24)$$

Подставляя в уравнения (5.22) – (5.24) необходимые соотношения для внешних и внутренних сил и возможных перемещений, приводя подобные члены и применяя принцип Лагранжа (3.19), согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, получим:

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^{x_n} \frac{q M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - 2 \int_0^{x_n} \frac{EF \delta H - HE \delta F}{EF(EF + E \delta F)} (H + \delta H) dx - \\ & - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_n}^{l-x_n} \left[\frac{q}{M_{np}} \frac{HE \delta I - EI \delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{q(M_z^6 - M_{np}) \delta H}{H(H + \delta H)} dx + \\ & + 2 \int_0^{x_n} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE \delta I + y^6 \delta HE \delta I + M_z^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx - \\ & - \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{M_{np}(HE \delta I - \delta HEI - H_{np} E \delta I)}{EI H_{np}^2 (EI + E \delta I)} \times [M_{np} H_{np} - M_{np}(H + \delta H)] dx = 0. \quad (5.25) \end{aligned}$$

Разделив уравнение (5.25) почленно на δH и перейдя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{x_n H^2} \left(I_1 + \frac{1}{H^2} I_2 - I_3 \right) - \frac{F^2}{H^2} \left(1 - \frac{l}{2x_n} \right) \times \\ & \times \left[\frac{qEI H_{np}}{HFM_{np}} - \frac{M_{np}^2}{IH_{np}^2} (H - H_{np}) - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \quad (5.26) \end{aligned}$$

интегральные коэффициенты которого I_1 , I_2 и I_3 имеют вид

$$I_1 = q \int_0^{x_n} \frac{M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx,$$

$$I_2 = \frac{q}{2} \int_{x_n}^{l-x_n} (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx,$$

$$I_3 = EI \int_0^{x_n} \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx,$$

а m по-прежнему находим из формулы (3.21).

Решив последнее уравнение совместно с уравнением (5.13), которое в данном случае примет вид

$$\frac{6\mu EI(lx_n - x_n^2)^2}{l^2 H(l^3 x_n - 2lx_n^3 + x_n^4) + 12EI l^2 (lx_n - x_n^2)} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0, \quad (5.27)$$

найдем распор и координату границы между упругим и пластическим участками нити при конкретных размерах поперечного сечения и величине внешней нагрузки. Уравнения (5.26) будем решать путем разложения искомой функции (распора) в ряд Тейлора, а ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов – по формулам (3.3) и (3.5) для упругого и (5.16), (5.17) для пластического участков соответственно.

Нить будет работать во второй фазе до тех пор, пока длина упругого участка не обратится в нуль. Приравнявая в выражении (5.27) $x_n = 0$, найдем распор в момент окончания фазы: $H = H_{\text{пр}}$. При этом нить конечной начинает работать как пластическая система, подобная гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному. Тогда предельную поперечную нагрузку можно определить, воспользовавшись известным решением для гибких нитей [95]

$$\mu_{\text{пр}} = \frac{H_{\text{пр}} l}{M_{\text{пр}}} \sqrt{24 \frac{H_{\text{пр}} L_0^3}{EF l^3} + 64 \frac{y_0^2}{l^2}}. \quad (5.28)$$

Форму изогнутой оси полностью пластической нити конечной жесткости можно представить зависимостью (5.16), приняв, что $H = H_{\text{пр}}$. В частности, в середине пролета ордината кривой провисания нити будет иметь вид

$$y = \frac{\mu_{\text{пр}} M_{\text{пр}}}{8H_{\text{пр}}}. \quad (5.29)$$

Таким образом, полностью определено поведение нити конечной жесткости с идеальным поперечным сечением за пределом упругости и установлены зависимости для нахождения параметров напряженно-деформированного

состояния нити во всех фазах ее работы. Рассмотрение других типов поперечных сечений, как уже отмечалось, не вносит в решение принципиальных изменений. В этом случае общий путь решения задачи будет таким же, необходимо только дополнительно рассмотреть упруго-пластическую фазу изгиба и ввести соответствующие члены в уравнение для определения распора.

Необходимо также отметить характерную особенность предлагаемого метода, заключающуюся в автоматическом соблюдении условий неразрывности в местах сопряжения смежных зон по длине нити, поскольку формулы (3.1), (5.16) и (5.17) получены, исходя из условий равновесия, справедливых как для упругих, так и для пластических участков. Используемое же при выводе соотношений (3.3) и (3.5) выражение (3.2) вносит в решение погрешность, не превышающую нескольких процентов.

5.4. Действие дополнительных нагружений специального вида

5.4.1. Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки. Рассмотрим нить конечной жесткости с идеальным поперечным сечением площадью F и моментом инерции I , работающую с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Материал нити с модулем упругости E считаем упруго-пластическим. Нить нагружена равномерно распределенными нагрузками: начальной на всем пролете q_1 и дополнительной на части пролета q_2 (рис. 5.4). При выводе расчетных зависимостей примем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

Работа нити конечной жесткости в первой – упругой фазе изгиба (рис. 5.4, б) была рассмотрена ранее. При этом прогибы, изгибающие моменты и приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити определяются полученными решениями (3.3), (3.5), (3.7), (3.9), (3.11) и (3.12).

В момент достижения внешними нагрузками величины, при которой удовлетворяется условие (5.11) и появляются первые пластические деформации, начинается вторая – упруго-пластическая фаза изгиба (рис. 5.4, в). При этом изогнутая ось нити и распределение изгибающих моментов для упругих участков ($0 \leq x \leq x_{1,n}$; $x_{2,n} \leq x \leq l$) по-прежнему будут иметь вид (3.3) и (3.5), а для пластического участка ($x_{1,n} \leq x \leq x_{2,n}$) в случае его развития по длине нити в пределах участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 их можно представить с использованием формул (5.16) и (5.17). Приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити также сохранят свой вид как для упругих участков (3.7), (3.9), (3.11) и (3.12), так и для пластического участка (5.18) – (5.21). При этом в формуле (5.20) по-прежнему считаем, что $q = q_1 + q_2$.

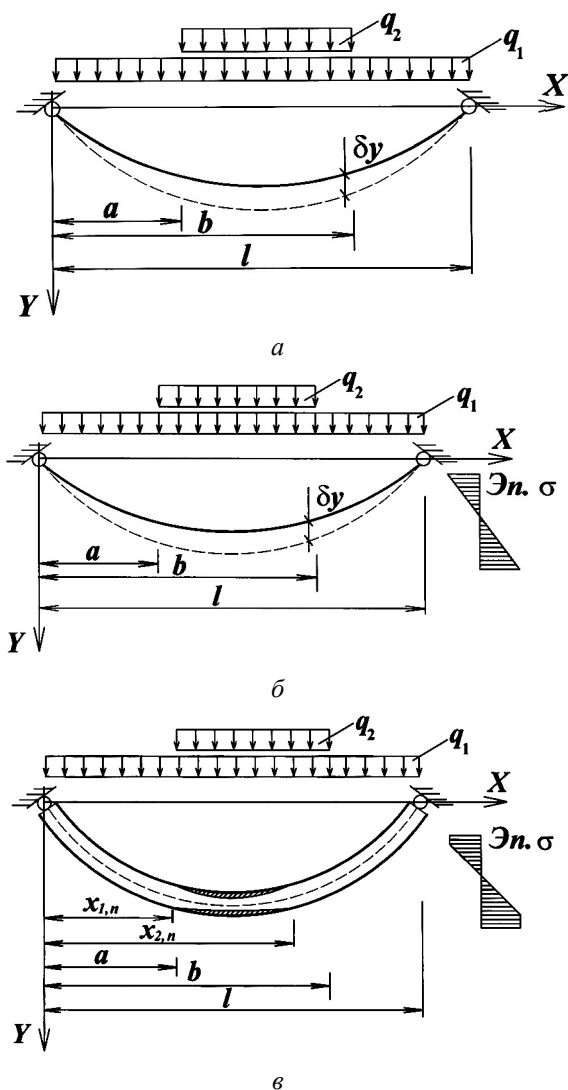


Рис. 5.4. Деформирование упруго-пластической нити конечной жесткости при действии дополнительной участковой равномерно распределенной нагрузки, несимметричной относительно середины пролета:
a – расчетная схема;
б – упругая фаза работы;
в – упруго-пластическая фаза работы

Найдем работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузок $q_1 + q_2$ на перемещении δy :

$$\begin{aligned}
U_1 = & - \int_0^a \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\
& - \int_a^{x_{1,n}} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\
& - \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} \frac{(q_1 + q_2)(M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \int_{x_{2,n}}^b \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\
& - \int_b^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx, \tag{5.30}
\end{aligned}$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta \varphi$:

$$\begin{aligned}
U_2^1 = & - \int_0^{x_{1,n}} \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx - \\
& - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} \left[\frac{q_1 + q_2}{M_{np}} \cdot \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\
& - \int_{x_{2,n}}^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \tag{5.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2^2 = & \int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx - \\
& - \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} \frac{M_{rp}(HE\delta I - \delta HEI - H_{rp}E\delta I)}{EI H_{rp}^2 (EI + E\delta I)} [M_{rp} H_{rp} - M_{rp}(H + \delta H)] dx + \\
& + \int_{x_{2,n}}^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

В соответствии с принципом Лагранжа, согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, подставляя (5.31) и (5.32) в формулу (3.19), получим:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^a \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\
& - \int_a^{x_{1,n}} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} \frac{(q_1 + q_2)(M_z^6 - M_{\text{пр}})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \\
& - \int_{x_{2,n}}^b \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\
& - \int_b^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_0^{x_{1,n}} \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx - \\
& - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} \left[\frac{q_1 + q_2}{M_{\text{пр}}} \cdot \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{\text{пр}}} \right] (H + \delta H) dx - \\
& - \int_{x_{2,n}}^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\
& + \int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx - \\
& - \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} \frac{M_{\text{пр}}(HE\delta I - \delta HEI - H_{\text{пр}} E\delta I)}{EI H_{\text{пр}}^2 (EI + E\delta I)} [M_{\text{пр}} H_{\text{пр}} - M_{\text{пр}}(H + \delta H)] dx + \\
& + \int_{x_{2,n}}^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx = 0. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

При дальнейшем росте пластического участка по длине нити и превышении его длины над длиной участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 выражения для параметров и приращений параметров напряженно-деформированного состояния пластического участка сохраняют свой вид и описываются равенствами (5.16) – (5.19), (5.21). Исключение составит только перемещение δdx , которое для участков $x_{1,n} \leq x \leq a$ и $b \leq x \leq x_{2,n}$ определится по формуле

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{E} \left[\frac{q_1}{M_{\text{пр}}} \cdot \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{\text{пр}}} \right] dx, \quad (5.34)$$

а для участка $a \leq x \leq b$ по-прежнему будет иметь вид (5.20). Причем здесь также принято, что $x_{1,n}$, $x_{2,n}$ – координаты границ между упругими и пластическим участками.

Найдем работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузок q_1 и $q_1 + q_2$ на перемещении δy :

$$U_1 = \int_0^{x_{1,n}} q_1 \delta y dx + \int_{x_{1,n}}^a q_1 \delta y dx + \int_a^b (q_1 + q_2) \delta y dx + \int_b^{x_{2,n}} q_1 \delta y dx + \int_{x_{2,n}}^l q_1 \delta y dx, \quad (5.35)$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta d\varphi$:

$$\begin{aligned} U_2^1 = & \int_0^{x_{1,n}} (H + \delta H) \delta dx + \int_{x_{1,n}}^a (H + \delta H) \delta dx + \int_a^b (H + \delta H) \delta dx + \\ & + \int_b^{x_{2,n}} (H + \delta H) \delta dx + \int_{x_{2,n}}^l (H + \delta H) \delta dx ; \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} U_2^2 = & - \int_0^{x_{1,n}} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_{x_{1,n}}^a (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_a^b (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \\ & - \int_b^{x_{2,n}} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_{x_{2,n}}^l (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Приравнивая в соответствии с принципом Лагранжа работу внешних (5.35) и внутренних (5.36), (5.37) сил с учетом формул (3.7), (3.9), (3.11) и (3.12), а также (5.18) – (5.21) и (5.34) к нулю, получим:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{x_{1,n}} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_{x_{1,n}}^a \frac{q_1 (M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \\ & - \int_a^b \frac{(q_1 + q_2)(M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \int_b^{x_{2,n}} \frac{q_1 (M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \\ & - \int_{x_{2,n}}^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_0^{x_{1,n}} \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx - \\ & - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_{1,n}}^a \left[\frac{q_1}{M_{np}} \cdot \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sigma_T}{E} \int_a^b \left[\frac{q_1 + q_2}{M_{\text{пр}}} \cdot \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{\text{пр}}} \right] (H + \delta H) dx - \\
& -\frac{\sigma_T}{E} \int_b^{x_{2,n}} \left[\frac{q_1}{M_{\text{пр}}} \cdot \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{\text{пр}}} \right] (H + \delta H) dx - \\
& - \int_{x_{2,n}}^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\
& + \int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx - \\
& - \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} \frac{M_{\text{пр}}(HE\delta I - \delta HEI - H_{\text{пр}} E\delta I)}{EIH_{\text{пр}}^2(EI + E\delta I)} [M_{\text{пр}} H_{\text{пр}} - M_{\text{пр}}(H + \delta H)] dx + \\
& + \int_{x_{2,n}}^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx = 0. \quad (5.38)
\end{aligned}$$

Разделив уравнения (5.33) и (5.38) почленно на δH и переходя затем в полученных выражениях к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, после интегрирования и некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению для определения распра в упруго-пластической нити конечной жесткости

$$\begin{aligned}
& \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} + \frac{EF^2 \sum_{i=1}^{i=7} I_i}{H^2(l + x_{1,n} - x_{2,n})} - \\
& - \frac{F^2(x_{2,n} - x_{1,n})}{H^2(l + x_{1,n} - x_{2,n})} \left[\frac{(q_1 + q_2)EIH_{\text{пр}}}{HFM_{\text{пр}}} - \frac{M_{\text{пр}}^2}{IH_{\text{пр}}^2}(H_{\text{пр}} - H) - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \quad (5.39)
\end{aligned}$$

интегральные коэффициенты которого в случае развития пластического участка по длине нити в пределах участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 ($x_{1,n} \leq x \leq x_{2,n}$) имеют вид

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \int_0^a \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; & I_2 &= - \int_a^{x_{1,n}} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \\
I_3 &= - \frac{1}{H^2} \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} (q_1 + q_2)(M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx; & I_4 &= - \int_{x_{2,n}}^b \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx;
\end{aligned}$$

$$I_5 = -\int_b^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad I_6 = \int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI(Hy^6 + M_z^6)^3} dx;$$

$$I_7 = \int_{x_{1,n}}^l \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI(Hy^6 + M_z^6)^3} dx,$$

а в случае превышения длины пластического участка над длиной участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 ($x_{1,n} \leq x \leq a$; $b \leq x \leq x_{2,n}$) их можно записать так:

$$I_1 = -\int_0^a \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad I_2 = -\frac{1}{H^2} \int_{x_{1,n}}^a q_1 (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx;$$

$$I_3 = \frac{1}{H^2} \int_a^b (q_1 + q_2) (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx; \quad I_4 = -\frac{1}{H^2} \int_b^{x_{2,n}} q_1 (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx;$$

$$I_5 = -\int_{x_{2,n}}^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad I_6 = \int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI(Hy^6 + M_z^6)^3} dx;$$

$$I_7 = \int_{x_{1,n}}^l \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI(Hy^6 + M_z^6)^3} dx.$$

Решив последнее уравнение совместно с уравнением (5.13), найдем распор и координаты границы между упругими и пластическими участками нити при конкретных размерах поперечного сечения и значении внешней нагрузки. При этом ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов будем находить по формулам (3.3), (3.5) для упругих и (5.16), (5.17) для пластического участка соответственно.

Если координаты границы между упругими и пластическими участками примут значения $x_{1,n} = 0$, $x_{2,n} = l$, то это означает, что длина упругих участков обратилась в нуль и свидетельствует об окончании упруго-пластической фазы работы нити. В этом случае значение распора H равно $H_{\text{пр}}$, а нить конечной жесткости начинает работать как пластическая система подобно гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному.

5.4.2. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки. При нагружении нити дополнительной участковой равномерно распределенной симметричной относительно середины пролета нагрузкой ($a = l/4$, $b = 3l/4$) дифференциальные уравнения для определения распора имеют следующий вид:

- в случае упругой фазы работы нити

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[2 \int_0^{l/4} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \int_{l/4}^{3l/4} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx \right] + \\ + \frac{F^2}{lH^2 I} \left[2 \int_0^{l/4} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx + \int_{l/4}^{3l/4} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx \right] = 0; \end{aligned} \quad (5.40)$$

- в случае упруго-пластической фазы работы нити

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} + \frac{EF^2 \sum_{i=1}^{i=4} I_i}{H^2 (l + x_{1,n} - x_{2,n})} - \\ - \frac{F^2 (x_{2,n} - x_{1,n})}{H^2 (l + x_{1,n} - x_{2,n})} \left[\frac{(q_1 + q_2) EIH_{\text{пр}}}{HFM_{\text{пр}}} - \frac{M_{\text{пр}}^2}{IH_{\text{пр}}^2} (H_{\text{пр}} - H) - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.41)$$

интегральные коэффициенты которого в случае развития пластического участка по длине нити в пределах участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 ($x_{1,n} \leq x \leq x_{2,n}$) имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 = -2 \int_0^{l/4} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad I_2 = -2 \int_{l/4}^{x_{1,n}} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \\ I_3 = -\frac{1}{H^2} \int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} (q_1 + q_2) (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx; \quad I_4 = 2 \int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI (Hy^6 + M_z^6)^3} dx, \end{aligned}$$

а в случае превышения длины пластического участка над длиной участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 ($x_{1,n} \leq x \leq a$; $b \leq x \leq x_{2,n}$) их можно записать так:

$$\begin{aligned} I_1 = -2 \int_0^{x_{1,n}} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad I_2 = -\frac{2}{H^2} \int_{x_{1,n}}^{l/4} q_1 (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx; \\ I_3 = \frac{1}{H^2} \int_{l/4}^{3l/4} (q_1 + q_2) (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx; \quad I_4 = 2 \int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI (Hy^6 + M_z^6)^3} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, полностью определена работа нити конечной жесткости с идеальным поперечным сечением в пределах и за пределами упругости и установлены зависимости для определения параметров напряженно-деформированного состояния во всех фазах ее работы при действии дополнительной участковой равномерно распределенной нагрузки.

5.4.3. Случай произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки.

Рассмотрим нить конечной жесткости с идеальным поперечным сечением площадью F и моментом инерции I , работающую с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Материал нити с модулем упругости E считаем упруго-пластическим. Нить нагружена начальной равномерно распределенной на всем пролете нагрузкой q_1 и дополнительной произвольно расположенной сосредоточенной нагрузкой P (рис. 5.5). При выводе расчетных зависимостей по-прежнему примем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

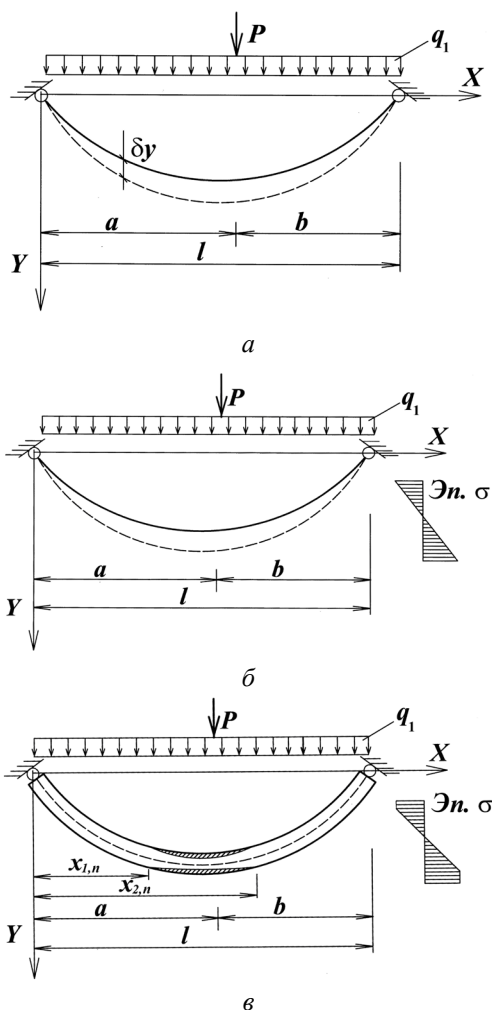


Рис. 5.5. Деформирование нити конечной жесткости при действии дополнительной произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки: а – расчетная схема; б – упругая фаза работы; в – упруго-пластическая фаза работы

Поведение нити конечной жесткости в первой – упругой фазе изгиба (рис. 5.5, б) подробно было рассмотрено ранее.

При удовлетворении же в какой-то момент условия (5.11) и появлении первых пластических деформаций начинается вторая – упруго-пластическая фаза изгиба (рис. 5.5, в). При этом изогнутая ось нити и распределение изгибающих моментов для упругих участков ($0 \leq x \leq x_{1,n}$; $x_{2,n} \leq x \leq l$) по-прежнему будут иметь вид (3.3) и (3.5), а для пластических участков ($x_{1,n} \leq x \leq a$; $a \leq x \leq x_{2,n}$) их можно представить с использованием формул (5.16) и (5.17). Приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити также сохраняют свой вид как для упругих участков (3.7), (3.9), (3.11) и (3.12), так и для пластического участка (5.18) – (5.21). При этом в формуле (5.20) считаем, что $q = q_1$.

Найдем работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы начальной равномерно распределенной на всем пролете нагрузки q_1 на перемещении δu и работы сосредоточенной нагрузки P на перемещении δu_a :

$$U_1^1 = - \int_0^{x_{1,n}} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_{x_{1,n}}^a \frac{q_1 (M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \\ - \int_a^{x_{2,n}} \frac{q_1 (M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \int_{x_{2,n}}^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (5.42)$$

$$U_1^2 = - \frac{P(M_a^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H, \quad (5.43)$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta d\varphi$:

$$U_2^1 = - \int_0^{x_{1,n}} \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx - \\ - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_{1,n}}^a \left[\frac{q_1}{M_{np}} \cdot \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\ - \frac{\sigma_T}{E} \int_a^{x_{2,n}} \left[\frac{q_1}{M_{np}} \cdot \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\ - \int_{x_{2,n}}^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned}
U_2^2 = & \int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE \delta I + y^6 \delta HE \delta I + M_z^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx - \\
& - \int_{x_{1,n}}^a \frac{M_{np}(HE \delta I - \delta HEI - H_{np} E \delta I)}{EI H_{np}^2 (EI + E \delta I)} \times [M_{np} H_{np} - M_{np}(H + \delta H)] dx - \\
& - \int_a^{x_{2,n}} \frac{M_{np}(HE \delta I - \delta HEI - H_{np} E \delta I)}{EI H_{np}^2 (EI + E \delta I)} \times [M_{np} H_{np} - M_{np}(H + \delta H)] dx + \\
& + \int_{x_{1,n}}^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE \delta I + y^6 \delta HE \delta I + M_z^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx. \quad (5.45)
\end{aligned}$$

Подставляя соотношения (5.42) – (5.45) в формулу (3.19), деля полученное уравнение почленно на δH , переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, после интегрирования и некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости при действии дополнительной произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки P

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2[P(M_a^6 - M_{np}) + I_1 + I_2]}{H^4[l - (x_{2,n} - x_{1,n})]} - \\
- \frac{F^2(x_{2,n} - x_{1,n})}{H^2[l - (x_{2,n} - x_{1,n})]} \left[\frac{M_{np}^2}{IH_{np}^2}(H - H_{np}) - \frac{q_1 H_{np} EI}{HFM_{np}} - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \quad (5.46)
\end{aligned}$$

интегральные коэффициенты которого I_1 и I_2 имеют вид

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int_0^{x_{1,n}} \frac{H^2 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \int_{x_{2,n}}^l \frac{H^2 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx, \\
I_2 = & - \frac{H^2}{EI} \left[\int_0^{x_{1,n}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx + \int_{x_{2,n}}^l \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx \right].
\end{aligned}$$

Решив уравнение (5.46) совместно с уравнением (5.13), которое в данном случае примет вид:

- при $x_{1,n} \leq x \leq a$

$$\frac{6EIx_{1,n}[2Pb + q_1l(l - x_{1,n})]^2}{M_{\text{пр}}l\{H[4Pbx_{1,n}(l^2 - b^2 - x_{1,n}^2) + q_1l(l^3 - 2lx_{1,n}^2 + x_{1,n}^3)] +$$

$$\times \frac{1}{+12EI[2Pb + q_1l(l - x_{1,n})]\} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0,$$

- при $a \leq x \leq x_{2,n}$

$$\frac{6EIx_{2,n}\{2P[bx_{2,n} - l(x_{2,n} - a)] + q_1lx_{2,n}(l - x_{2,n})\}^2}{M_{\text{пр}}l\{H[4Pbx_{2,n}(l^2 - b^2 - x_{2,n}^2) + 4Pl(x_{2,n} - a)^3 + q_1lx_{2,n}(l^3 - 2lx_{2,n}^2 + x_{2,n}^3)] +$$

$$\times \frac{1}{+M_{\text{пр}}l\{12EI[2P[bx_{2,n} - l(x_{2,n} - a)] + q_1lx_{2,n}(l - x_{2,n})]\} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0,$$

найдем распор и координаты границы между упругими и пластическими участками нити при конкретных размерах поперечного сечения и значении внешней нагрузки. При этом ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов будем находить по формулам (3.3), (3.5) для упругих и (5.16), (5.17) для пластических участков соответственно.

Если координаты границы между упругими и пластическими участками примут значения $x_{1,n} = 0$, $x_{2,n} = l$, то это означает, что длина упругих участков обратилась в нуль и свидетельствует об окончании упруго-пластической фазы работы нити. В этом случае значение распора H равно $H_{\text{пр}}$, а нить конечной жесткости начинает работать как пластическая система подобно гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному.

5.4.4. Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета. При нагружении нити дополнительной сосредоточенной нагрузкой посредине пролета дифференциальные уравнения для определения распора будут:

- в случае упругой фазы работы нити

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\frac{PM_{l/2}^6(y_{l/2}^6)^2}{(Hy_{l/2}^6 + M_{l/2}^6)^2} + 2 \int_0^{l/2} \frac{q_1 M_z^6(y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx \right] +$$

$$+ \frac{2F^2}{lH^2 I} \int_0^{l/2} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx = 0; \quad (5.47)$$

- в случае упруго-пластической фазы работы нити

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2 [P(M_{l/2}^6 - M_{\text{пр}}) + I_1 + I_2]}{H^4[l - 2x_n]} - \frac{F^2}{H^2} \left[2 \frac{H}{EF} + \frac{M_{\text{пр}}^2}{EIH_{\text{пр}}^2} (H - H_{\text{пр}}) - \frac{q_1 H_{\text{пр}} EI}{HFM_{\text{пр}}} \right] = 0. \quad (5.48)$$

Интегральные коэффициенты уравнения (5.48) имеют вид

$$I_1 = 2H^2 \int_0^{x_n} \frac{M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx, \quad I_2 = -\frac{2H^2}{EI} \int_0^{x_n} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx.$$

Таким образом, полностью определена работа нити конечной жесткости с идеальным поперечным сечением в пределах и за пределами упругости и установлены зависимости для определения параметров напряженно-деформированного состояния во всех фазах ее работы при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки.

§ 5.5. Влияние пластических шарниров на работу нити

При выводе уравнения (5.26) считалось, что функция относительного удлинения оси нити конечной жесткости по всей длине нити и во всех фазах ее работы есть величина непрерывная и не претерпевает в процессе своего изменения изломов и разрывов. Предположим, что данное допущение не является строгим и $\varepsilon_0(x)$ по длине нити терпит разрыв. Иными словами, в случае использования модели идеального упруго-пластического материала деформирование нити конечной жесткости при определенных типах нагружения и граничных условиях может сопровождаться образованием в ее поперечных сечениях стационарных пластических шарниров, вызывающих излом оси нити [16, 38, 109]. Последнее обстоятельство требует дополнения дифференциального уравнения (5.26) двумя новыми членами, входящими в работу внутренних сил. Первый из них отражает работу действующего в нити распора $H + \delta H$ на удлинении оси в пластическом шарнире, а второй – работу изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между примыкающими к пластическому шарниру поперечными сечениями нити (т. е. на угле излома оси нити). Найдем их значения.

Рассмотрим деформированное состояние нити конечной жесткости в стадии пластического шарнира (рис. 5.6).

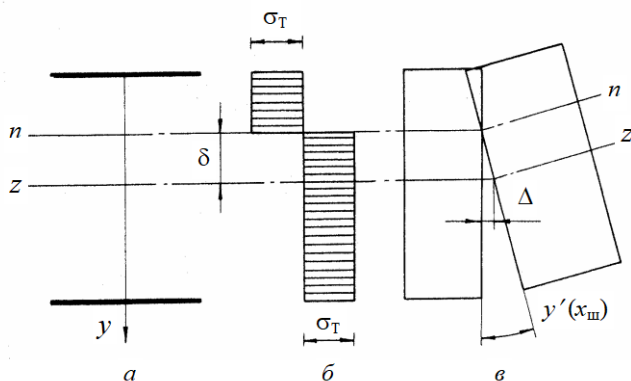


Рис. 5.6. Работа идеального поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости в стадии пластического шарнира: *а* – профиль нити; *б* – эпюра напряжений; *в* – деформированный элемент нити

Из рис. 5.6 видно, что в сечениях с пластическими шарнирами относительное удлинение всех волокон нити, кроме волокна $n - n$, равно бесконечности. Точно также равно бесконечности и относительное удлинение оси нити. Но поскольку расстояние между нейтральной осью и осью $z - z$ равно δ , то абсолютное удлинение оси нити конечной жесткости в пластическом шарнире можно представить в виде

$$\Delta = \delta y'(x_{\text{ш}}) = \delta \frac{dy(x_{\text{ш}})}{dx}, \quad (5.49)$$

где $x_{\text{ш}}$ – координата пластического шарнира по длине нити; $y'(x_{\text{ш}})$ – угол излома оси нити в пластическом шарнире.

Поскольку образование пластического шарнира свидетельствует о реализации в поперечном сечении нити предельного состояния, то для нахождения расстояния между осями $n - n$ и $z - z$ можем применить формулу [8, 38]

$$\delta = -\frac{dM_z}{dH}, \quad (5.50)$$

которая в рассматриваемом нами случае нити конечной жесткости идеально-го профиля с учетом (5.13) примет вид

$$\delta = \frac{M_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}}. \quad (5.51)$$

Используя последнюю зависимость, выражения для указанных выше дополнительных членов работы внутренних сил нити запишем следующим образом:

$$U_2^3 = -\sum \frac{M_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} \frac{dy(x_{\text{ш}})}{dx} (H + \delta H); \quad (5.52)$$

$$U_2^4 = -\sum \frac{M_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} \frac{dy(x_{\text{ш}})}{dx} (H_{\text{пр}} - H - \delta H), \quad (5.53)$$

причем количество членов суммы в этих зависимостях равно числу образовавшихся в нити пластических шарниров. При этом необходимо иметь в виду, что величина угла излома оси определяется путем однократного дифференцирования уравнения кривой провисания (5.16).

Как уже отмечалось, учитывая соотношения (5.52) и (5.53) при выводе дифференциального уравнения для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости (5.26), приходим к варианту уравнения нити идеального профиля, некоторые сечения которой находятся в предельном состоянии, т.е. работают в стадии пластического шарнира. Подобным образом может быть рассмотрено любое другое поперечное сечение и получены выражения для определения дополнительной работы внутренних сил при любой форме профиля нити. Только при нахождении расстояния δ в формулу (5.50) необходимо подставлять соответствующее конкретному профилю уравнение предельной кривой.

§ 5.6. Учет упрочнения материала

Известно, что одной из наиболее широко применяемых в теории пластичности является диаграмма идеального упруго-пластического материала, использование которой позволяет более полно проанализировать поведение и определить дополнительные резервы прочности конструкции. Уточнить результаты решения задач упруго-пластического деформирования и лучше отразить действительный характер работы материала можно, учитывая его упрочнение. В ряде случаев такое уточнение диаграммы $\sigma - \varepsilon$ приводит к более достоверным решениям и дает возможность выявить неучтенные ранее запасы прочности конструкции.

Как и в случае упруго-пластической нити конечной жесткости, теория расчета нити из упрочняющегося материала также базируется на допущениях и предположениях, принятых при рассмотрении работы нитей в пределах упругости. Однако далее при исследовании деформирования нити конечной жесткости используется другая модель материала, у которой зависимость напряжение–деформация представляется диаграммой идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением (см. рис. 5.1, з). При этом необходимо отметить, что общая схема расчета нити, обладающей упрочнением, практически не отличается от пути решения задачи деформирования идеально-пластических нитей конечной жесткости и основана на применении при выводе расчетных зависимостей принципа возможных перемещений.

Другой важной задачей теории пластичности является задача расчета конструкции при уменьшении действующих на нее нагрузок, т.е. в случае разгрузки. Это связано с тем, что при уменьшении нагрузки поведение материала, получившего пластические деформации, описывается законом, отли-

чающимся от закона нагружения. При разгрузке упруго-пластический материал ведет себя подобно упругому [6, 54, 105, 123]. Работа различных материалов в стадии разгрузки показана на рис.5.1 пунктирной линией, параллельной начальному участку диаграммы растяжения. Такая разгрузка продолжается до тех пор, пока напряжения не достигнут предела текучести противоположного знака. Потом вновь начинается пластическое течение.

Несовпадение зависимости $\sigma - \epsilon$ при нагрузке и разгрузке приводит к неоднозначности связи между напряжениями и деформациями в пластической области, т.е. одним и тем же напряжениям могут соответствовать разные удлинения. В связи с этим после прекращения действия нагрузки конструкция не возвращается в исходное состояние, а в ней появляются остаточные деформации [109, 131, 175]. Поэтому, чтобы найти решение конкретной упруго-пластической задачи, нужно знать не только действующую нагрузку, но и то, что предшествовало рассматриваемому напряженно-деформированному состоянию. Иными словами, в отличие от упругой стадии дополнительно необходима информация об истории нагружения конструкции. Сказанное особенно актуально применительно к висячим системам, у которых даже небольшие остаточные деформации могут внести значительные коррективы в напряженно-деформированное состояние системы при новом нагружении [44, 129, 202].

При решении указанной задачи принимается, что зависимости $\sigma - \epsilon$ при разгрузке и повторном нагружении совпадают вплоть до наибольших напряжений предшествовавшего нагружения, т.е. не учитывается явление гистерезиса. Кроме того, приняв во внимание условия работы рассматриваемых висячих систем, считаем, что они не подвержены переменным и циклическим нагружениям [41, 103, 113, 118, 152]. Отметим, что такие допущения являются общепринятыми при рассмотрении работы различных строительных конструкций за пределом упругости [8, 38, 109].

5.6.1. Работа поперечного сечения нити. Рассмотрим работу поперечного сечения нити конечной жесткости, считая материал упруго-пластическим с линейным упрочнением [185]. Для этого обратимся к составленным ранее условиям равновесия усилий, действующих в поперечном сечении (5.1) и рассмотрим на их основе работу поперечного сечения нити конечной жесткости идеального профиля (рис. 5.7, а). Уравнения равновесия, как это было показано выше, в данном случае примут вид

$$\begin{aligned} \{\sigma[-k(h-e)] + \sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= H, \\ \{-(h-e)\sigma[-k(h-e)] + e\sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \quad (5.54)$$

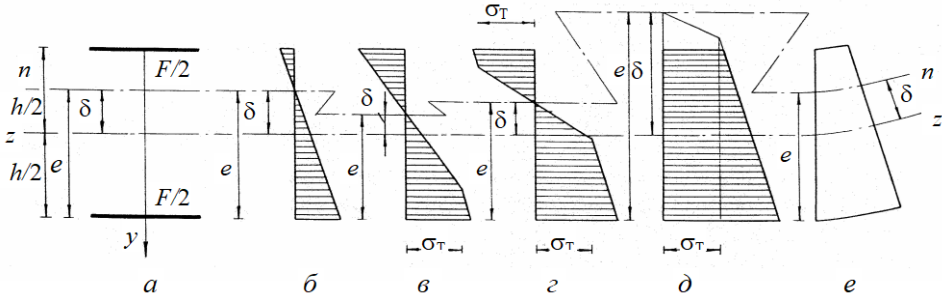


Рис. 5.7. Работа поперечного сечения идеального профиля нити конечной жесткости из упруго-пластического материала с линейным упрочнением:
 а – общий вид профиля нити; б – д – эпюры напряжений
 в четырех стадиях работы нити; е – деформированный элемент нити

Входящее в соотношения (5.54) нормальное напряжение σ в случае упруго-пластического материала с линейным упрочнением определяется по известным формулам [6]

$$\sigma = Eky \quad \text{при} \quad |y| \leq \frac{\sigma_T}{Ek},$$

$$\sigma = \sigma_T \left(1 - \frac{E}{E_0} \right) \text{sign } y + E_0ky \quad \text{при} \quad |y| \geq \frac{\sigma_T}{Ek}, \quad (5.55)$$

где E и E_0 – соответственно модули упругости и упрочнения; $\text{sign } y = 1$ при $y > 0$ и $\text{sign } y = -1$ при $y < 0$.

В общем случае необходимо рассмотреть четыре стадии работы сечения: упругую, упруго-пластическую с одной областью пластичности, упруго-пластическую с двумя областями пластичности и полностью пластическую.

Работа поперечного сечения нити в первой (упругой) стадии деформирования будет одинакова, независимо от свойств материала в пластичной области. Поэтому в данном случае соотношения, характеризующие кривизну и относительное удлинение оси нити, будут иметь вид, аналогичный (5.9), а условие окончания упругой стадии работы – (5.11).

Рассмотрим вторую стадию работы, когда деформирование нити сопровождается развитием в сечении участка, охваченного пластическими деформациями (рис. 5.7, в). Подставляя зависимости (5.55) в уравнения равновесия (5.54), получим выражения:

$$\left[-Ek(h-e) + \sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0ke \right] \frac{F}{2} = H,$$

$$\left[Ek(h-e)^2 + \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0ke^2 \right] \frac{F}{2} = M_z + H\delta. \quad (5.56)$$

Учитывая формулы (5.7) и (5.8) в последних зависимостях, получим формулы для кривизны и относительного удлинения оси нити при работе сечения во второй стадии:

$$\begin{aligned}\frac{Elk}{M_{\text{пр}}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 \right) + \frac{E}{E_0} \left(\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 \right) \right], \\ \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} &= \frac{1}{1 + E_0/E} \left[\left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \left(\frac{Elk}{M_{\text{пр}}} - 1 \right) + 2 \frac{H}{H_{\text{пр}}} \right].\end{aligned}\quad (5.57)$$

Вторая стадия работы поперечного сечения продолжается до тех пор, пока пластические деформации локализуются в районе нижнего пояса нити. При еще большем возрастании внутренних усилий напряжение достигнет предела текучести в верхнем поясе. Принимая во внимание, что знак этих напряжений обратен знаку напряжений с противоположной стороны поперечного сечения, составим условие окончания второй стадии работы. Для этого используем первое выражение из (5.55), принимая в нем $y = -(h - e)$ и $\sigma = -\sigma_T$. Тогда имеем:

$$Ek(h - e) = \sigma_T, \quad (5.58)$$

откуда с учетом (5.7), (5.8) и (5.57) находим:

$$\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0. \quad (5.59)$$

В дальнейшем в третьей стадии работы пластические деформации развиваются на двух участках, расположенных по разные стороны как от нейтральной оси, так и от оси симметрии поперечного сечения (рис. 5.7, з). В этом случае уравнения (5.54) принимают вид

$$\begin{aligned}[-E_0k(h - e) + E_0ke] \frac{F}{2} &= H, \\ \left[\sigma_T(h - e) \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0k(h - e)^2 + \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0ke^2 \right] \frac{F}{2} &= M_z + H\delta.\end{aligned}\quad (5.60)$$

Исключая из данных зависимостей величины e и δ и используя формулы (5.7) и (5.8), выражения, определяющие кривизну и относительное удлинение оси нити при работе сечения в третьей стадии, можно записать так:

$$\frac{Elk}{M_{\text{пр}}} = \frac{E}{E_0} \cdot \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} - \frac{E}{E_0} + 1, \quad \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{E}{E_0} \cdot \frac{H}{H_{\text{пр}}}.\quad (5.61)$$

Отметим следующее. Как уже указывалось выше, если материал является упруго-пластическим с линейным упрочнением, то кроме рассмотренных теоретически возможна еще вместо третьей четвертая стадия работы поперечного сечения. Суть ее состоит в том, что сечение полностью охватывается пластическими деформациями, причем и у нижнего, и у верхнего поясов напряжения имеют один знак (рис. 5.7, *д*). Практически это становится возможным в нитях конечной жесткости, у которых напряжения растяжения во много раз превышают напряжения изгиба, т.е. в случае нитей конечной жесткости, приближающихся по характеру своей работы к абсолютно гибким. Обычно такие нити сразу не отвечают требованиям, предъявляемым к нитям конечной жесткости в части отношения напряжений от изгиба к напряжениям от растяжения, и их нужно рассчитывать по теории гибких нитей. Однако полностью исключить возможность такого поведения сечения нити конечной жесткости нельзя. Поэтому выведем расчетные зависимости для этого случая работы поперечного сечения.

Условие окончания второй и начала четвертой стадии получим с помощью первого выражения из (5.55), положив в нем

$$y = (y - e), \quad \sigma = \sigma_T, \quad Ek(e - h) = \sigma_T, \quad (5.62)$$

или, что то же самое [после преобразования с учетом формул (5.7), (5.8) и соотношения (5.57)]

$$\frac{M_z}{M_{пр}} - \frac{H}{H_{пр}} + 1 = 0. \quad (5.63)$$

Зависимости (5.54) после подстановки в них второго условия из (5.55), соответствующего данной стадии работы, имеют вид

$$\left[E_0 k(e - h) + E_0 k e + 2\sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \right] \frac{F}{2} = H, \\ \left[\sigma_T (e - h) \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0 k(e - h)^2 + \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) E_0 k e^2 \right] \frac{F}{2} = M_z + H\delta. \quad (5.64)$$

В результате преобразований получим следующие соотношения, характеризующие кривизну и относительное удлинение оси нити при работе сечения в четвертой стадии:

$$\frac{EIk}{M_{пр}} = \frac{E}{E_0} \cdot \frac{M_z}{M_{пр}}, \quad \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{E}{E_0} \left(\frac{H}{H_{пр}} - 1 \right) + 1. \quad (5.65)$$

Таким образом, рассмотрены все возможные стадии работы поперечного сечения нити конечной жесткости идеального профиля и получены зависимости, связывающие действующие в нити изгибающие моменты и распор с кривизной и относительным удлинением ее оси.

5.6.2. Вывод дифференциальных уравнений. Применим полученные в предыдущем параграфе результаты для вывода расчетных зависимостей уточненной теории деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости с линейным упрочнением. Для этого также используем принцип возможных перемещений.

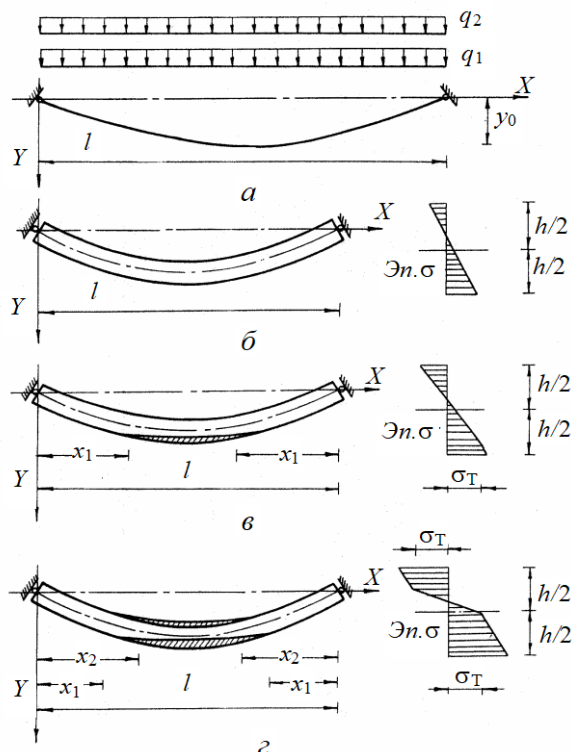


Рис. 5.8. Деформирование нити конечной жесткости из упруго-пластического материала с линейным упрочнением:
 а – расчетная схема нити; б – упругая стадия работы;
 в – стадия работы с зоной односторонней пластичности;
 г – то же, с зонами одно- и двусторонней пластичности

Предположим, что нить конечной жесткости, работающая с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, с идеальным поперечным сечением площадью F и моментом инерции I нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q = q_1 + q_2$ и находится в состоянии равновесия (рис. 5.8, а). Будем также считать, что материал нити является упруго-пластическим с линейным упрочнением. При выводе разрешающих уравнений примем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения F , а в качестве искомой функции – распор H .

Работа нити конечной жесткости в упругой стадии деформирования (рис. 5.8, б) будет одинакова во всех расчетных случаях независимо от свойств материала в пластической области.

Рассмотрим вторую стадию работы, когда деформирование нити сопровождается развитием локализуемой посередине пролета области конечной протяженности, охваченной пластическими деформациями (рис. 5.8, в). Определим расчетные зависимости при работе нити конечной жесткости в этой стадии изгиба.

Пусть площадь поперечного сечения нити получит очень малое, но конечное приращение своей величины δF . При этом изменятся действующие в нити внутренние усилия и ее геометрия: изгибающий момент M_z получит приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy . Кроме того распор H получит некоторое приращение δH .

Выражения, определяющие изогнутую ось нити и эпюру изгибающих моментов во второй стадии изгиба, сохраняют вид уравнений (3.3) и (3.5), поскольку получены из условий равновесия и пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке, а потому справедливы при любой диаграмме $\sigma - \varepsilon$. При этом необходимо иметь в виду, что при вычислении y и M_z для упругого и пластического участков вместо y^6 и M_z^6 в формулы (3.3) и (3.5) должны быть подставлены соответствующие данному участку зависимости. Тогда приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков ($0 \leq x \leq x_1$; $l - x_1 \leq x \leq l$) сохраняют свой вид (3.7), (3.9), (3.11) и (3.12), а для участка с односторонней пластичностью ($x_1 \leq x \leq l - x_1$) получим следующие выражения:

$$\delta y = - \frac{M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (5.66)$$

$$\delta M_z = - \frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (5.67)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{M_{np}(1 + \alpha)} \left[(1 - \alpha)(I\delta k + k\delta I + \delta I\delta k) + 2 \frac{M_{np}\delta H}{EH_{np}} \right] dx; \quad (5.68)$$

$$\delta d\varphi = -\frac{M_{\text{пр}}(1-\alpha)}{2H_{\text{пр}}E_0} \left[\frac{H_{\text{пр}}(1+\alpha)}{M_{\text{пр}}(1-\alpha)} \times \right. \\ \times \frac{(M_z^6)^2 (y^6 \delta H I + y^6 H \delta I + y^6 \delta H \delta I + M_z^6 \delta I)}{I(I+\delta I)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} - \\ \left. - \frac{I\delta H - H\delta I}{I(I+\delta I)} - \frac{H_{\text{пр}}\delta I}{I(I+\delta I)} \right] dx, \quad (5.69)$$

где x_1 – координата границы между упругим и пластичным участками;

$$\alpha = \frac{E_0}{E}; \quad k = \frac{M_{\text{пр}}(1-\alpha)}{2H_{\text{пр}}E_0I} \left[\frac{M_z H_{\text{пр}}(1+\alpha)}{M_{\text{пр}}(1-\alpha)} + H - H_{\text{пр}} \right] - \text{кривизна оси пластично-}$$

го участка нити, определенная с помощью первого из соотношений (5.57). Кроме того при выводе зависимости для удлинения бесконечно малого элемента участка с односторонней пластичностью δdx относительное удлинение оси нити ε_0 определялось по второму соотношению из (5.57) по формуле

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_T}{E(1+\alpha)} \left[(1-\alpha) \left(\frac{Elk}{M_{\text{пр}}} - 1 \right) + 2 \frac{H}{H_{\text{пр}}} \right]. \quad (5.70)$$

Найдем работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузки q на перемещении δy :

$$U_1 = 2 \int_0^{x_1} q \delta y dx + \int_{x_1}^{l-x_1} q \delta y dx, \quad (5.71)$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta d\varphi$:

$$U_2^1 = -2 \int_0^{x_1} (H + \delta H) \delta dx - \int_{x_1}^{l-x_1} (H + \delta H) \delta dx; \quad (5.72)$$

$$U_2^2 = -2 \int_0^{x_1} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_{x_1}^{l-x_1} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi. \quad (5.73)$$

Приравнявая в соответствии с принципом Лагранжа работу внешних и внутренних сил с учетом формул (3.7), (3.9), (3.11) и (3.12), а также (5.66) – (5.69) к нулю и перейдя затем в полученном выражении к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, после интегрирования и некоторых преобразований получим дифференциальное уравнение для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости с зоной односторонней пластичности:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{4H\alpha x_1} [(1+\alpha)l - 2(1-\alpha)x_1 - I_1] - \frac{EF^2}{H^2 x_1} (I_2 - I_3) = 0. \quad (5.74)$$

Соотношения для входящих в уравнение (5.74) интегральных коэффициентов I_1 , I_2 и I_3 имеют вид

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{E_0 I H_{\text{пр}} (1 - \alpha)}{M_{\text{пр}}} \int_{x_1}^{l-x_1} \frac{(M_z^6)^2 m_0}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx, \\
 I_2 &= q \int_0^{x_1} \frac{M_z^6 m^2}{(H m + E I M_z^6)^2} dx + \frac{q}{2} \int_{x_1}^{l-x_1} \frac{M_z^6 m_0^2}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx, \\
 I_3 &= EI \int_0^{x_1} \frac{(M_z^6)^4 m}{(H m + E I M_z^6)^3} dx + \frac{E_0 I (1 + \alpha)}{4} \int_{x_1}^{l-x_1} \frac{(M_z^6)^4 m_0}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx - \\
 &\quad - \frac{M_{\text{пр}} (1 - \alpha)}{4 H_{\text{пр}}} \int_{x_1}^{l-x_1} \frac{(M_z^6)^2}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)} dx,
 \end{aligned}$$

где $m_0 = E_0 I y^6$.

Их значения могут быть определены непосредственным либо численным интегрированием. Отметим также, что при этом должно соблюдаться соответствие между типом участка нити (упругий или пластический) и типом используемых при вычислении интегральных коэффициентов функций y^6 и M_z^6 .

Координата границы между упругим участком и участком с односторонней пластичностью x_1 определяется из условия (5.11), куда подставляем вместо M_z и, в том числе, M_z^6 соответствующие данному случаю равенства [38]. Таким образом, окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 &\frac{6\mu EI (lx_1 - x_1^2)^2}{Hl^2 (l^3 x_1 - 2lx_1^3 + x_1^4) + Hl^5 x_1 (\alpha^{-1} - 1) (1 - 8\mu^{-1})^{3/2} + 12EI l^2 (lx_1 - x_1^2)} + \\
 &\quad + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

Из решения полученной системы двух уравнений (5.74) и (5.75) находятся значения распора и координаты границы между упругим и пластичным участками нити, а затем по формулам (3.3), (3.5) – остальные параметры напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости, работающей в данной стадии изгиба.

Вторая стадия работы продолжается до тех пор, пока пластические деформации локализуются в нижнем поясе нити, и оканчивается, когда напряжения достигнут предела текучести в ее верхнем поясе. Этому моменту соответствует условие (5.59), которое после подстановки вместо M_z его значения, вычисленного для наиболее нагруженного сечения нити (в середине пролета), приводится к виду

$$\frac{6\mu EI(\omega + 8\alpha\mu^{-1})^2}{5l^2\alpha^2H + l^2\alpha H(1-\alpha)(8\omega^{3/2} - 3\omega^2) + 48E_0I(\omega + 8\alpha\mu^{-1})} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0,$$

где $\omega = 1 - \frac{8}{\mu}$.

Когда интенсивность внешней нагрузки достигнет величины, определяемой последним равенством, начинается третья стадия изгиба, при которой пластические деформации развиваются в районе обоих поясов и в каждой половине нити образуются три участка, работающие в различных стадиях изгиба (упругой, упруго-пластической с одной пластичной областью и упруго-пластической с двумя пластичными областями) (см. рис. 5.8, з).

В данном случае зависимости, определяющие изогнутую ось нити и распределение изгибающих моментов по ее длине, как указывалось выше, сохраняют вид (3.3), (3.5). Приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков и для участков с односторонней пластичностью также будут описываться равенствами (3.7), (3.9), (3.11), (3.12) и (5.66) – (5.69). Изменяются только пределы участка с односторонней пластичностью, которые теперь можно записать так: $x_1 \leq x \leq x_2$; $l - x_2 \leq x \leq l - x_1$, где x_2 – координата границы между участками с односторонней и двусторонней пластичностью. Для участка с двусторонней пластичностью ($x_2 \leq x \leq l - x_2$) приращения δy , δM_z , δdx и $\delta d\varphi$ определяются по формулам:

$$\delta y = -\frac{M_z^6(y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (5.76)$$

$$\delta M_z = -\frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (5.77)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T \delta H}{E_0 H_{\text{пр}}} dx; \quad (5.78)$$

$$\delta d\varphi = -\frac{1}{E_0 I} \left[\frac{(M_z^6)^2 (y^6 \delta HI + y^6 H \delta I + y^6 \delta H \delta I + M_z^6 \delta I)}{(I + \delta I)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} - \frac{M_{\text{пр}}(1-\alpha)\delta I}{I + \delta I} \right] dx. \quad (5.79)$$

При этом согласно выражению (5.61) кривизна и относительное удлинение оси участка нити с двусторонней пластичностью принимались равными

$$k = \frac{1}{E_0 I} [M_z - M_{\text{пр}}(1-\alpha)]; \quad (5.80)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_T H}{E_0 H_{\text{пр}}}. \quad (5.81)$$

Записывая далее, как и при рассмотрении предыдущих стадий изгиба, выражения для работ внешних и внутренних сил для упругих и пластичных участков нити и составляя затем уравнения принципа возможных перемещений, придем к дифференциальному уравнению для определения величины распора в упруго-пластической нити конечной жесткости с зонами односторонней и двусторонней пластичности

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{2H\alpha x_1} [l - (1 - \alpha)(x_1 + x_2) - I_1] - \frac{EF^2}{H^2 x_1} (I_2 - I_3) = 0. \quad (5.82)$$

Входящие в это соотношение интегральные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E_0 I H_{\text{пр}} (1 - \alpha)}{M_{\text{пр}}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(M_z^6)^2 m_0}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx, \\ I_2 &= q \int_0^{x_1} \frac{M_z^6 m^2}{(H m + E I M_z^6)^2} dx + q \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_z^6 m_0^2}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx + \\ &\quad + \frac{q}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} \frac{M_z^6 m_0^2}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx, \\ I_3 &= E I \int_0^{x_1} \frac{(M_z^6)^4 m}{(H m + E I M_z^6)^3} dx + \frac{E_0 I (1 + \alpha)}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(M_z^6)^4 m_0}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx - \\ &\quad - \frac{M_{\text{пр}} (1 - \alpha)}{2 H_{\text{пр}}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(M_z^6)^2}{H m_0 + E_0 I M_z^6} dx + \frac{E_0 I}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} \frac{(M_z^6)^4 m_0}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx. \end{aligned}$$

Координату границы между упруго-пластическими участками x_2 определяем по формуле, полученной из условия (5.59), куда подставляем вместо M_z выражение (3.5), а вместо M_z^6 — соответствующую зависимость из [38],

$$\begin{aligned} &6\mu E I \left[(lx^2 - x_2^2) - \frac{2l^2}{\mu} (1 - \alpha) \right]^2 \left\{ l^2 \alpha H \left[l^3 x_2 - 2lx_2^3 + x_2^4 - \frac{5l^4}{16} (1 - \alpha) \right] + \right. \\ &\quad \left. + l^4 \alpha H (1 - \alpha) \left[\frac{12}{\mu} \left(x_2^2 - lx_2 + \frac{l^2}{4} \right) + \frac{l^2}{16} (8\omega^{3/2} - 3\omega^2) \right] + 12l^2 E_0 I \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[(lx^2 - x_2^2) - \frac{2l^2}{\mu} (1 - \alpha) \right] \right\}^{-1} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0. \quad (5.83) \end{aligned}$$

Решая уравнение (5.82) совместно с уравнениями (5.78) и (5.83), найдем неизвестную величину распора H и координаты границ между участками по длине нити x_1 и x_2 при конкретных размерах поперечного сечения и величине внешней нагрузки. Уравнение (5.82) по-прежнему будем решать путем разложения искомой функции в ряд Тейлора, а ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов – по формулам (3.3) и (3.5). При этом, как уже отмечалось, должно соблюдаться соответствие между типом участка нити и видом используемых в вычислениях функций y^6 и M_z^6 .

Расчетные зависимости в случае, когда вместо третьей наступает четвертая стадия работы поперечного сечения нити, в настоящем параграфе не приводятся. Их при необходимости можно достаточно просто получить, пользуясь изложенной здесь методикой.

Аналогично можно решить задачу деформирования нити с учетом линейного упрочнения при любом другом виде поперечного сечения, опорных закреплениях и характере внешней нагрузки.

5.6.3. Определение остаточных прогибов при разгрузке. Конечной целью всех приведенных выше решений задачи о деформировании нити конечной жесткости было получение зависимостей, характеризующих элементы изгиба нити при непрерывном росте внешней нагрузки. Не менее важной является задача определения параметров напряженно-деформированного состояния нити при полном или частичном прекращении действия нагрузки. При этом, в отличие от работы нити в области упругих деформаций, когда изгиб конструкции при любом изменении нагрузки происходит по одному и тому же закону, деформирование упруго-пластических систем зависит от истории нагружения, т.е. от закона изменения нагрузки в процессе достижения ее текущего значения [6, 180]. Данное обстоятельство является следствием различного поведения упруго-пластического материала в случае увеличения и уменьшения нагрузки.

В теории пластичности обычно принимается, что при увеличении нагрузки материал последовательно проходит упругую и пластическую стадии работы, а связь между напряжениями и деформациями при этом нелинейна. При разгрузке упруго-пластический материал ведет себя как упругий и его поведение описывается законом Гука. Составим уравнения, характеризующие все элементы деформирования нити конечной жесткости при разгрузке.

В случае уменьшения нагрузки на величину Δq изменение изгибающего момента в поперечном сечении работающей за пределом упругости нити будет равно:

$$\Delta M_z = M_{z \max} - M_z, \quad (5.84)$$

где $M_{z \max}$ – максимальное значение изгибающего момента.

Величина ΔM_z может быть также найдена из условий равновесия, составленных с учетом упругой работы материала нити при разгрузке

$$M_{z \max} - M_z = M_{z \max}^6 - H_{\max} y_{\max} - M_z^6 + Hy, \quad (5.85)$$

где $M_{z \max}^6$, $H_{\max}$ и $y_{\max}$ – соответственно максимальные значения изгибающего момента в балке с характеристиками нити конечной жесткости, распора и кривой провисания нити.

Перегруппировав в выражении (5.85) члены, получим равенство:

$$M_z = (M_{z \max} - M_{z \max}^6 + H_{\max} y_{\max}) + M_z^6 - Hy. \quad (5.86)$$

В последнем соотношении выражение в скобках совершенно не зависит от изменения нагрузки Δq и представляет собой характерную функцию напряженно-деформированного состояния нити при максимальной нагрузке. Ее значения равны невязке величин, действующих в упруго-пластической нити изгибающих моментов и вычисленных в предположении упругой работы материала. Обозначая характерную функцию через Ω , перепишем (5.86) в виде

$$M_z = \Omega + M_z^6 - Hy, \quad (5.87)$$

что можно также считать условием равновесия для текущего значения изгибающего момента при разгрузке.

Принимая во внимание, как и при упругом изгибе, формулы (3.1) и (3.2), получим выражения для изогнутой оси и изгибающих моментов:

$$y = \frac{M_z^6 y^6 + \Omega y^6}{Hy^6 + M_z^6}; \quad (5.88)$$

$$M_z^6 = \frac{(M_z^6)^2 + \Omega M_z^6}{Hy^6 + M_z^6}. \quad (5.89)$$

Значения приращений параметров напряженно-деформированного состояния нити вычисляются по формулам:

$$\delta y = - \frac{[M_z^6 (y^6)^2 + \Omega (y^6)^2] \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)}; \quad (5.90)$$

$$\delta M_z = - \frac{[(M_z^6)^2 y^6 + \Omega M_z^6 y^6] \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)}; \quad (5.91)$$

$$\delta dx = \frac{EF\delta H - HE\delta F}{EF(EF + E\delta F)} dx ; \quad (5.92)$$

$$\delta d\varphi = - \frac{[(M_z^6)^2 + \Omega M_z^6][y^6 \delta HEI + E\delta I(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)]}{EI(EI + \delta EI)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx . \quad (5.93)$$

Применяя далее использованный при рассмотрении деформирования упругих и упруго-пластических нитей подход, получаем дифференциальную зависимость для определения распора в нити конечной жесткости при разгрузке:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{qm^2(M_z^6 + \Omega)}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^2 m(M_z^6 + \Omega)^2}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx = 0 . \end{aligned} \quad (5.94)$$

Определяя из уравнения (5.94) значение распора, с помощью формул (5.88) и (5.89) можно найти все параметры напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости при разгрузке.

Сравнивая выражения (5.94) и (3.24), видим, что дифференциальная зависимость для определения величины распора при разгрузке отличается от соответствующей зависимости в случае упругого изгиба нити наличием в числителях интегральных коэффициентов дополнительного члена, представляющего собой характерную функцию напряженно-деформированного состояния нити при максимальной нагрузке.

Таким образом, нахождение распора при разгрузке упруго-пластической нити конечной жесткости сводится к решению задачи изгиба упругой нити при соответствующей корректировке значений изгибающих моментов. Одновременно следует отметить, что в данном случае к определению остаточных прогибов нити конечной жесткости неприменима теорема о разгрузке [54, 79], поскольку распор в процессе снятия нагрузки является величиной переменной и связан с ней нелинейной зависимостью (5.94).

Учитывая последнее утверждение, остаточные прогибы надо находить как разность между ординатами начальной кривой провисания и ординатами изогнутой оси нити при разгрузке, значения которых вычисляются по формуле (5.88). Из соотношения (5.89) следует также, что при полном снятии нагрузки в сечениях нити появляются остаточные изгибающие моменты, т. е. в нити возникает состояние самонапряжения. При этом остаточные деформации и напряжения будут действовать по всему пролету нити конечной жесткости, а не локализоваться только на участках, получивших в процессе нагружения пластические деформации.

ГЛАВА 6

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

§ 6.1. Предварительные замечания. Сущность решения задачи

В настоящей главе рассматривается задача устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости за пределом упругости с учетом геометрической и физической нелинейностей. Такие задачи вызывают в последнее время большой практический интерес, поскольку при работе современных висячих систем (особенно раскрепленных связями в горизонтальной плоскости) нередко допускаются пластические деформации, а их конструктивные элементы все чаще рассчитываются по предельным нагрузкам. В том же случае, когда критическая нагрузка меньше предельной, именно вопросы устойчивости определяют работоспособность конструкции.

Рассмотрим нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, ось которой до потери устойчивости является плоской кривой. Как и при рассмотрении вопросов устойчивости в пределах упругой работы материала, примем оси x , y , z подвижными, а оси X , Y , Z – неподвижными координатными осями. Направление осей подвижной системы координат выберем таким образом, чтобы ось x располагалась по касательной к оси нити, а оси y и z – по главным центральным осям инерции поперечного сечения.

Как было показано выше, при работе материала в упругой стадии потенциальная энергия деформации при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба определяется формулой (4.18), интегрирование в которой распространяется на весь пролет нити конечной жесткости.

При работе нити в своей плоскости за пределом упругости по ее длине наряду с упругими участками развиваются области, охваченные пластическими деформациями. Поэтому потенциальная энергия деформации нити при потере плоской формы равновесия в таком случае будет состоять из суммы энергий упругих и пластических участков. Потенциальную энергию деформации упругих участков по-прежнему будем определять по формуле (4.18), интегрирование в которой будет уже выполняться только по длине упругих участков. Для определения же потенциальной энергии деформации пластических областей выражение (3.18) неприменимо. Следовательно, для решения задачи устойчивости нити за пределом упругости необходимо установить аналогичное соотношение для участков нити конечной жесткости, испытывающих упруго-пластические деформации.

Указанную задачу будем решать на основе теории пластического течения [35, 54, 120] с помощью энергетического критерия устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле [24, 59, 181], применение которого позволяет находить величины критических нагрузок, не прибегая к интегрированию дифферен-

циальных уравнений. В связи с этим разрешающие зависимости принимают довольно компактный вид и весьма удобны в практическом применении.

§ 6.2. Уточнение выражения потенциальной энергии деформации

Допустим, что до потери плоской формы равновесия в нити конечной жесткости имеются только нормальные напряжения σ_x , обусловленные возникающими в ней распором H и изгибающим моментом M_y . Примем, что материал нити является идеальным упруго-пластическим. При упругом деформировании выполняется закон Гука, а за пределом упругости поведение материала соответствует условию текучести Мизеса

$$T^2 = \tau_T^2 = \frac{1}{3} \sigma_T^2, \quad (6.1)$$

где

$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$ – интенсивность касательных напряжений; τ_T – предел текучести при сдвиге; σ_T – предел текучести при растяжении-сжатии.

Будем считать, что решение задачи упруго-пластического деформирования нити конечной жесткости в своей плоскости известно и определяется зависимостями, приведенными в главе 5. Допустим, что под действием возрастающей дополнительной нагрузки нить теряет устойчивость. При этом, как и в упругом случае, поперечные сечения нити получают поступательные смещения v в горизонтальной плоскости и поворачиваются на угол θ в плоскости сечения. При таком выпучивании нить конечной жесткости испытывает дополнительные деформации и напряжения. Данные возмущения изгиба и кручения накладываются на основное состояние упруго-пластического деформирования нити в своей плоскости. Компонентами напряжений σ_y , τ_{xy} и τ_{yz} можно пренебречь, так как боковые поверхности нити свободны от напряжений, а ее толщина обычно намного меньше высоты. Напряжением σ_z также пренебрегаем, поскольку по определению давление продольных волокон друг на друга отсутствует, т.е. они находятся в одноосном напряженном состоянии. Поэтому в соответствии с теорией пластического течения учитываем лишь сдвиг γ_{xz} , характеризующий кручение нити.

Как при упругой, так и при упруго-пластической потере плоской формы изгиба характер деформирования одинаков, поэтому, как показано в работе [59], приращения деформаций можно представить в виде

$$\delta \varepsilon_x = zw'' + yv''; \quad (6.2)$$

$$\delta \gamma_{xz} = -2y\theta'. \quad (6.3)$$

При потере плоской формы равновесия часть сечения будет испытывать нагружение, а часть – разгрузку. В области нагружения приращение работы пластической деформации $\delta W > 0$; при $\delta W < 0$ материал выходит из состояния текучести и разгружается по упругому закону. В данном случае в соответствии с принятыми допущениями

$$\delta W = \sigma_x \delta \varepsilon_x. \quad (6.4)$$

Поэтому нагружение и разгрузка будут различаться по знаку $\delta \varepsilon_x$, а граница между зонами определится уравнением $\delta \varepsilon_x = 0$, которое в развернутом виде с учетом соотношения (6.2) будет иметь вид

$$zw'' + yv'' = 0. \quad (6.5)$$

Из последнего уравнения легко может быть найден угол наклона границы между зонами нагружения и разгрузки, величина которого равна

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{v''}{w''}\right). \quad (6.6)$$

Определим теперь вариации напряжений $\delta \sigma_x$ и $\delta \tau_{xz}$. В упругой области поперечного сечения нити и в зонах разгрузки справедлив закон Гука. Тогда выражения для $\delta \sigma_x$ и $\delta \tau_{xz}$ могут быть записаны в виде

$$\delta \sigma_x = E \delta \varepsilon_x; \quad (6.7)$$

$$\delta \tau_{xz} = G \delta \gamma_{xz}. \quad (6.8)$$

В зонах нагружения должно выполняться условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_T + \delta \sigma_x)^2 + 3(\delta \tau_{xz})^2 = \sigma_T^2, \quad (6.9)$$

откуда, пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем:

$$\delta \sigma_x = 0. \quad (6.10)$$

Для $\delta \tau_{xz}$ в соответствии с теорией пластического течения и принятыми допущениями будем иметь

$$\delta \tau_{xz} = G \delta \gamma_{xz}, \quad (6.11)$$

т.е., как и в зонах разгрузки, приращения касательного напряжения и сдвига связаны законом Гука.

Найдем теперь приращения изгибающих и крутящего моментов. С учетом соотношения (6.7) и формулы (6.10) выражения для δM_y и δM_z можно представить в виде

$$\delta M_y = \int_{F_{yn}} \delta \sigma_x z dF, \quad \delta M_z = \int_{F_{yn}} \delta \sigma_x y dF, \quad (6.12)$$

где интегрирование распространяется на упругую область поперечного сечения нити и зоны разгрузки.

Приращение крутящего момента δM_x с учетом зависимостей (6.8) и (6.11) можно записать в виде

$$\delta M_x = 2 \int_F \delta \tau_{xz} y dF, \quad (6.13)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости. Поэтому, как и при упругой работе нити, приращение крутящего момента определяется по известной формуле [23, 60]

$$\delta M_x = G I_d \theta'. \quad (6.14)$$

Принимая во внимание выражения (6.7) – (6.11), потенциальную энергию деформации упруго-пластических участков нити конечной жесткости при потере устойчивости плоской формы изгиба можно записать в виде

$$W = \int_{V_{\text{уп-пл}}} \left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{1}{2G} T^2 \right) dv. \quad (6.15)$$

Здесь первый член подынтегрального выражения представляет собой энергию объемного сжатия, второй – энергию изменения формы; $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – относительное изменение объема; $V_{\text{уп-пл}}$ – объем упруго-пластических участков нити; $k = (1 - 2\mu)/E$; μ – коэффициент Пуассона.

Интенсивность касательных напряжений с учетом того, что все компоненты напряженного состояния, кроме $\delta \sigma_x$ и $\delta \tau_{xz}$, в нашем случае равны нулю, приводится к виду

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta \sigma_x^2 + 3\delta \tau_{xz}^2}. \quad (6.16)$$

Приращение нормального напряжения $\delta \sigma_x$ вычисляется по формуле

$$\delta \sigma_x = E \delta \varepsilon_x = E(u' - zw'' - yv'' - \omega \theta''), \quad (6.17)$$

которая для нашего случая имеет вид

$$\delta \sigma_x = E(-yv'' - \omega \theta''). \quad (6.18)$$

В последнем выражении учтено, что на основании кинематических гипотез теории тонкостенных стержней [23] для случая потери плоской формы равновесия члены u' и $z\omega''$ считаются величинами высшего порядка малости по сравнению с членами yv'' и $\omega \theta''$.

Тогда, подставляя соотношение (6.16) с учетом (6.18) в (6.15), принимая во внимание (6.7) – (6.11), а также пренебрегая энергией объемного сжатия для потенциальной энергии деформации, находим:

$$W = \frac{1}{6G} \int_{l_{\text{уп-пл}}} \left\{ \int_{F_{\text{уп}}} [E^2(-yv'' - \omega\theta'')^2 + 3G^2\rho^2(\theta')^2] dF + \right. \\ \left. + \int_{F_{\text{пл}}} 3G^2\rho^2(\theta')^2 dF \right\} dx. \quad (6.19)$$

В последнем выражении принято, что $\delta\tau_{xz} = G\rho\theta'$, где ρ – расстояние от оси до центра тяжести элементарной площадки dF . Кроме того, как указывалось выше, $F_{\text{уп}}$ – площадь упругой области поперечного сечения нити и зон разгрузки; $F_{\text{пл}}$ – площадь зон пластической деформации; $l_{\text{уп-пл}}$ – длина упруго-пластических участков нити.

После соответствующих преобразований и отбрасывания членов высшего порядка малости, соотношение (6.19) можно записать в виде

$$W = \frac{E^2}{6G} \int_{l_{\text{уп-пл}}} (I_{\omega}^* \theta'^2 + I_z^* v''^2) dx + \frac{1}{2} G I_d \int_{l_{\text{уп-пл}}} \theta'^2 dx, \quad (6.20)$$

где I_{ω}^* и I_z^* – приведенные секториальный момент инерции и момент инерции относительно оси z упруго-пластического поперечного сечения нити конечной жесткости соответственно.

Внося сюда значения $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ и считая $\mu = \frac{1}{2}$, т.е. принимая материал нити несжимаемым, окончательно приходим к выражению

$$W = \frac{1}{2} \int_{l_{\text{уп-пл}}} (EI_{\omega}^* \theta'^2 + G I_d \theta'^2 + EI_z^* v''^2) dx. \quad (6.21)$$

Отметим, что формулой (6.21) можно пользоваться только при вычислении потенциальной энергии деформации упруго-пластических участков нити. Для упругих же участков по-прежнему остается в силе формула (4.18). Таким образом, для решения рассматриваемой задачи становится возможным применение разработанного ранее в главе 4 метода расчета устойчивости плоской формы деформирования упругих нитей конечной жесткости. Только если для упругих участков нити принимаются реальные значения жесткостных характеристик поперечного сечения EI_{ω} и EI_z , то для упруго-пластических – приведенные EI_{ω}^* и EI_z^* . Найдем их значения.

§ 6.3. Определение положения границы раздела зон нагружения и разгрузки поперечного сечения нити

При работе нитей конечной жесткости за пределом упругости по их длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с одной и двусторонней пластичностью. При этом каждому участку будет соответствовать свое значение приведенной жесткости EI_z^* . Выведем зависимости, определяющие положение границы раздела зон нагружения и разгрузки для симметричных и несимметричных поперечных сечений.

6.3.1. Прямоугольное сечение. Рассмотрим нить конечной жесткости, поперечное сечение которой представляет собой вытянутый прямоугольник. Известно [38, 87], что при работе нити с прямоугольным поперечным сечением в своей плоскости за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней и двусторонней пластичностью (рис. 6.1). При этом каждому участку будет соответствовать свое значение приведенной жесткости EI_z^* , кроме того, величина секториального момента инерции для прямоугольного поперечного сечения равна нулю.

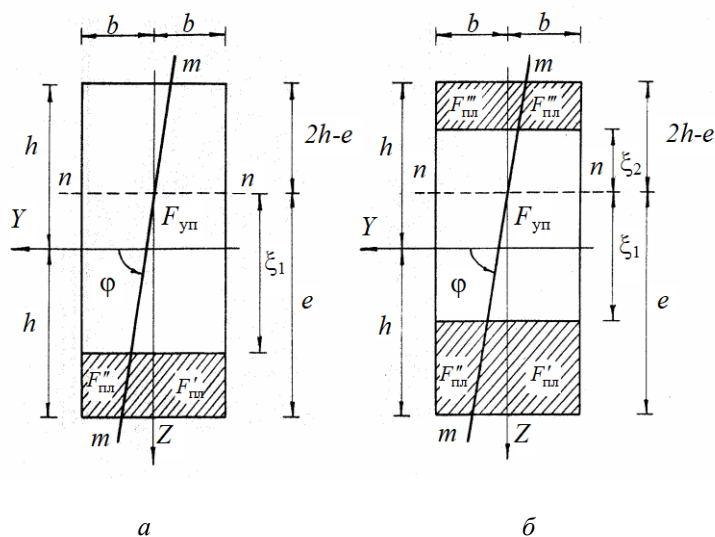


Рис. 6.1. Схема работы прямоугольного поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба:
 а – односторонняя пластичность; б – двусторонняя пластичность

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет одну пластичную область (рис. 6.1, а). При $-\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1$, где $\varphi_1 = \arctg(\xi_1/b)$, граница раздела (линия $m-m$) лежит в сечении $F_{уп}$ упругого ядра и тогда область пластической деформации полностью находится либо в состоянии нагружения, либо в состоянии разгрузки.

При $\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1$ граница раздела пересекает область пластической деформации. В этом случае в зоне $F'_{пл}$ происходит нагружение (разгрузка), а в зоне $F''_{пл}$ – разгрузка (нагружение). Можно показать [59, 60], что первый случай нереализуем и граница раздела всегда пересекает область пластической деформации.

Положение границы раздела можно найти, воспользовавшись известным допущением о том, что при потере плоской формы деформирования перемещения нити в вертикальной плоскости нет. Следовательно, выпучивание происходит при одном и том же значении действующего в вертикальной плоскости изгибающего момента, т.е. его приращение δM_y равно нулю. Отсюда, принимая во внимание первое из соотношений (6.12), имеем:

$$\int_{F_{уп}} \delta \sigma_x z dF = 0. \quad (6.22)$$

Предполагая для определенности, что нагружение происходит в $F'_{пл}$, а разгрузка – $F''_{пл}$, находим развернутую форму уравнения (6.22):

$$(I_y^{уп} + I_y'')\omega'' + I_{yz}''\nu'' = 0, \quad (6.23)$$

где $I_y^{уп}$ и I_y'' – соответственно моменты инерции упругого ядра и зоны разгрузки $F''_{пл}$ относительно оси y ; I_{yz}'' – центробежный момент инерции зоны разгрузки $F''_{пл}$; ω'' и ν'' – соответственно кривизны нити в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Введем в рассмотрение функцию $\omega = \lambda \ctg \varphi = e \ctg \varphi / b$, однозначно определяющую положение границы раздела. Тогда значения моментов инерции зоны $F''_{пл}$ можно записать в следующем виде:

- при $0 \leq \omega \leq 1$

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{4[(\eta^3 - \beta^3) + (3\beta + 1)\zeta_1 + \zeta_1^2] - \\ &\quad - \omega[(2\eta^2 + \beta^2)(1 + \zeta_1) + (4\alpha - 1)\zeta_1^2 + 3\zeta_1^3]\}(1 - \zeta_1), \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(1 - \zeta_1) - \omega^3(1 - \zeta_1^4)], \end{aligned}$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{6(\alpha + \zeta_1) - \omega^2[(2\alpha + 1)(1 + \zeta_1 + \zeta_1^2) + 3\zeta_1^2]\}(1 - \zeta_1);$$

- при $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3\zeta_1 \omega - 4 + \zeta_1^{-3} \omega^{-3}) \zeta_1^3,$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_1^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega^{-1}) \zeta_1,$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_1^2 \omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2} \omega^{-2}) \zeta_1^2,$$

где $\eta = h/e$; $\zeta_1 = \xi_1/e$; $\alpha = 2\eta - 1$; $\beta = \eta - 1$.

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают значения

$$I_y^{\text{уп}} = \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 [(\eta + \beta^2) + (\beta - 1) \zeta_1 + \zeta_1^2] (1 + \zeta_1),$$

$$I_z^{\text{уп}} = \frac{2}{3} b^4 \lambda (\alpha + \zeta_1).$$

Подстановка $I_y^{\text{уп}}$, I_y'' и I_{yz}'' в соотношение (6.23) после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω приводит к уравнениям

$$A_1 \omega^2 - A_2 \omega + A_3 = 0 \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (6.24)$$

$$B_1 \omega^4 + B_2 \omega^3 + B_3 \omega^2 - 1 = 0 \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), \quad (6.25)$$

где

$$A_1 = 3(\alpha^2 - 4\beta^2 \zeta_1^2 - 4\beta \zeta_1^3 - \zeta_1^4);$$

$$A_2 = 8[(3\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2 \zeta_1 + 3\beta \zeta_1^2 + \zeta_1^3]; \quad A_3 = 6(\alpha - 2\beta \zeta_1 - \zeta_1^2);$$

$$B_1 = 3\zeta_1^4; \quad B_2 = 8[(3\eta^3 + \beta^3) + 6\beta^2 \zeta_1 + 6\beta \zeta_1^2 + \zeta_1^3]; \quad B_3 = 6\zeta_1^2.$$

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет две пластичные области (рис. 6.1, б). Здесь, как и в случае участка с зоной односторонней пластичности, можно показать, что граница раздела всегда пересекает область пластической деформации. Будем считать, что нагружение происходит в зонах $F'_{\text{пл}}$ и $F'''_{\text{пл}}$, а разгрузка – в зонах $F''_{\text{пл}}$ и $F'''_{\text{пл}}$. Тогда вместо уравнения (6.23) имеем:

$$(I_y^{\text{уп}} + I_y'' + I_y''') w'' + (I_{yz}'' + I_{yz}''') v'' = 0. \quad (6.26)$$

Значения моментов инерции, соответствующие нижней и верхней зонам разгрузки при $0 \leq \omega \leq 1$, равняются:

$$\begin{aligned}
 I_y'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{ 4[(\eta^3 - \beta^3) + (3\beta + 1)\zeta_1 + \zeta_1^2] - \\
 &\quad - \omega[(2\eta^2 + \beta^2)(1 + \zeta_1) + (4\alpha - 1)\zeta_1^2 + 3\zeta_1^3] \} (1 - \zeta_1); \\
 I_z'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(1 - \zeta_1) - \omega^3(1 - \zeta_1^4)]; \\
 I_{yz}'' &= \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{ 6(\alpha + \zeta_1) - \omega^2[(2\alpha + 1)(1 + \zeta_1 + \zeta_1^2) + 3\zeta_1^3] \} (1 - \zeta_1); \\
 I_y''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{ 4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] - \\
 &\quad - \omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3] \} (1 - \zeta_2); \\
 I_z''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3(\alpha^4 - \zeta_2^4)]; \\
 I_{yz}''' &= \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{ 6(1 + \zeta_2) - \omega^2[(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha\zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3] \} (\alpha - \zeta_2).
 \end{aligned}$$

Здесь введены дополнительные обозначения: $\zeta_2 = \xi_2/e$; $\gamma = 2\eta^2 + 1$. Далее в зависимости от соотношения между параметрами η , ζ_1 и ζ_2 возможны три попарных варианта прохождения границы раздела через участки пластической деформации поперечного сечения нити, отличающиеся в данном случае друг от друга размерами области изменения функции $\omega = \omega(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$.

В первом из них (подварианты $a_1 : 1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$ и $a_1' : 1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$) граница раздела проходит через обе области пластичности и величины моментов инерции нижней и верхней зон разгрузки определяются из одинаковых выражений, имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned}
 I_y'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3\zeta_1 \omega - 4 + \zeta_1^{-3} \omega^{-3}) \zeta_1^3; \\
 I_z'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_1^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega^{-1}) \zeta_1; \\
 I_{yz}'' &= \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_1^2 \omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2} \omega^{-2}) \zeta_1^2; \\
 I_y''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{ 4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] - \\
 &\quad - \omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3] \} (1 - \zeta_2);
 \end{aligned}$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3(\alpha^4 - \zeta_2^4)];$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{6(1 + \zeta_2) - \omega^2[(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha\zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3]\}(\alpha - \zeta_2).$$

Во втором варианте каждому из подвариантов будут соответствовать свои зависимости для нахождения моментов инерции. Это связано с тем, что в подварианте a_2 граница раздела проходит только через верхнюю область пластической деформации, а в подварианте a_2' — пересекает обе области пластичности. Тогда будем иметь:

- для подварианта a_2 ($\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1}$)

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] - \omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3]\}(1 - \zeta_2);$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3(\alpha^4 - \zeta_2^4)];$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{6(1 + \zeta_2) - \omega^2[(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha\zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3]\}(\alpha - \zeta_2);$$

- для подварианта a_2' ($\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$)

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3\zeta_1 \omega - 4 + \zeta_1^{-3} \omega^{-3}) \zeta_1^3,$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_1^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega^{-1}) \zeta_1,$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_1^2 \omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2} \omega^{-2}) \zeta_1^2,$$

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3\zeta_2 \omega - 4 + \zeta_2^{-3} \omega^{-3}) \zeta_2^3,$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_2^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_2^{-1} \omega^{-1}) \zeta_2,$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_2^2 \omega^2 - 2 + \zeta_2^{-2} \omega^{-2}) \zeta_2^2.$$

В третьем варианте (подварианты $a_3 : \alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$ и $a'_3 : \zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$) граница раздела пересекает только верхнюю область пластической деформации. Поэтому, как и в первом варианте, моменты инерции будут определяться одинаковыми соотношениями

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3 \zeta_2 \omega - 4 + \zeta_2^{-3} \omega^{-3}) \zeta_2^3,$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_2^3 \omega^3 - 4 + 3 \zeta_2^{-1} \omega^{-1}) \zeta_2,$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_2^2 \omega^2 - 2 + \zeta_2^{-2} \omega^{-2}) \zeta_2^2.$$

Моменты инерции упругого ядра для рассматриваемого случая упруго-пластического участка нити конечной жесткости с зонами двусторонней пластичности запишем в виде

$$I_y^{\text{уп}} = \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 [3\beta^2 (\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)],$$

$$I_z^{\text{уп}} = \frac{2}{3} b^4 \lambda (\zeta_1 + \zeta_2).$$

Подставляя $I_y^{\text{уп}}$ и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (6.26), приходим к уравнениям для определения ω :

$$C_1 \omega^2 - C_2 \omega + C_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (6.27)$$

$$D_1 \omega^4 + D_2 \omega^3 + D_3 \omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), \quad (1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}); \quad (6.28)$$

$$K_1 \omega^2 - K_2 \omega + K_3 = 0, \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1}); \quad (6.29)$$

$$L_1 \omega^4 + L_2 \omega^3 + L_3 \omega^2 - 2 = 0, \quad (\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}); \quad (6.30)$$

$$M_1 \omega^4 + M_2 \omega^3 + M_3 \omega^2 - 1 = 0, \quad (\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}), \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}), \quad (6.31)$$

коэффициенты которых принимают значения:

$$C_1 = 3[2\alpha^2 - 4\beta^2 (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - 4\beta (\zeta_1^3 - \zeta_2^3) - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)],$$

$$C_2 = 8[2\eta^3 + 3\beta^2 (\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)],$$

$$C_3 = 6[2\alpha - 2\beta (\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)],$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= 3[-\alpha^2 + 4\beta^2\zeta_2^2 - 4\beta\zeta_2^3 + (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)], \\
D_2 &= 8[(\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)], \\
D_3 &= 6[-\alpha - 2\beta\zeta_2 + (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)], \\
K_1 &= 3(\alpha^2 - 4\beta^2\zeta_2^2 + 4\beta\zeta_2^3 - \zeta_2^4), \\
K_2 &= 8[(\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)], \\
K_3 &= 6(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2), \\
L_1 &= 3(\zeta_1^4 + \zeta_2^4), \\
L_2 &= 8[6\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 6\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)], \\
L_3 &= 6(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), \\
M_1 &= 3\zeta_2^4, \\
M_2 &= 8[6\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 6\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)], \\
M_3 &= 6\zeta_2^2.
\end{aligned}$$

Анализ уравнений (6.24), (6.25) и (6.27) – (6.31) показывает, что функция ω на всей своей области изменения является однозначной функцией η , ζ_1 и ζ_2 , причем $\omega \geq 0$. Последнее свидетельствует о том, что зоны нагружения всегда больше зон разгрузки. Заметим также, что при упругом изгибе граница раздела совпадает с осью z , а при упруго-пластическом, как указывалось выше, наклонена на угол φ , тангенс которого определяется отношением кривизн нити в горизонтальной и вертикальной плоскостях. При этом с увеличением областей пластической деформации граница раздела все более приближается к оси y и в предельном случае совпадает с ней.

Если в полученных зависимостях положить $e = h$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, то придем к потере устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластических балок. В этом случае реализуется только стадия работы с двумя областями пластической деформации поперечного сечения принятого здесь прямоугольного профиля [38]. При этом вместо восьми возможных вариантов прохождения границы раздела через области пластичности поперечного сечения балки будем иметь только два, для которых уравнения (6.27) – (6.31) преобразуются к виду

$$3(1 - \zeta^4)\omega^2 - 8(1 + \zeta^3)\omega + 6(1 - \zeta^2) = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (6.32)$$

$$3\zeta^4\omega^4 + 8\zeta^3\omega^3 + 6\zeta^2\omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}). \quad (6.33)$$

С помощью выражений (6.32) и (6.33) на рис. 6.2, *а* построена зависимость функции ω от параметра ζ , характеризующего относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения балки, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью. Заметим, что соотношения (6.32) и (6.33) полностью совпадают с решением, впервые полученным Л.М. Качановым и приведенным в монографии [59]. Таким образом, задача устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластических балок представляет собой частный случай рассматриваемой здесь задачи устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости.

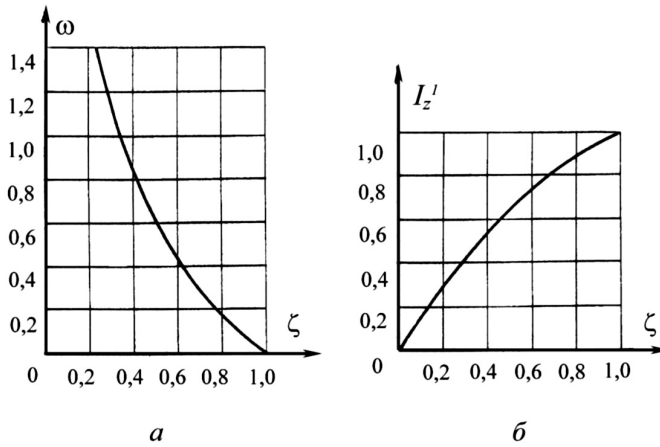


Рис. 6.2. Зависимости между параметром ζ и функциями ω и I_z' для прямоугольного поперечного сечения упруго-пластической балки:
а – график $\omega = \omega(\zeta)$; *б* – график $I_z' = I_z'(\zeta)$

6.3.2. Двутаверное сечение. Рассмотрим теперь двутаверное поперечное сечение нити конечной жесткости. При этом будем считать, что толщина полок двутавра намного меньше высоты профиля, а его стенка всегда работает в упругой стадии. Тогда в случае односторонней пластичности (рис. 6.3, *а*) пределы изменения функции ω составят $(0 \leq \omega \leq 1)$, а значения моментов инерции зоны $F_{пл}''$ можно представить так:

$$I_y'' = \frac{1}{3} b^4 \lambda^3 (1 - \omega) [(\eta^3 - \beta^3) - 3\beta^2 \zeta_1 - 3\beta \zeta_1^2 - \zeta_1^3];$$

$$I_z'' = \frac{1}{3} b^4 \lambda (1 - \omega^3) (1 - \zeta_1),$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{4} b^4 \lambda^2 (1 - \omega^2) (\alpha - 2\beta \zeta_1 - \zeta_1^2).$$

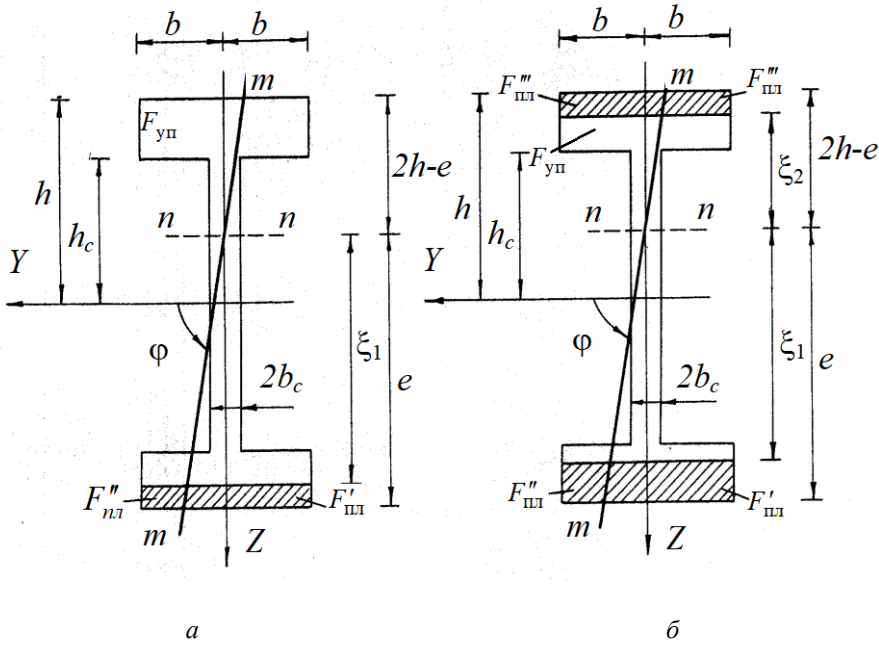


Рис. 6.3. Работа двутаврового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба: а – односторонняя пластичность; б – двусторонняя пластичность

Выражения для моментов инерции упругого ядра в данном случае можно записать следующим образом:

$$I_y^{\text{уп}} = \frac{4}{3} b_c b^3 \lambda^3 \eta_c^3 + \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 (\eta^3 - \eta_c^3) + \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 [(\beta^3 - \eta_c^3) + 3\beta^2 \zeta_1 + 3\beta \zeta_1^2 + \zeta_1^3],$$

$$I_z^{\text{уп}} = \frac{4}{3} b_c^3 b \lambda \eta_c + \frac{2}{3} b^4 \lambda (\alpha - 2\eta_c + \zeta_1),$$

где дополнительно принято, что $\eta_c = h_c/e$.

Выполняя далее подстановки и преобразования, аналогичные выполненным для прямоугольного поперечного сечения, получим уравнение для определения значений функции ω :

$$A_1 \omega^2 + A_2 \omega + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1), \quad (6.34)$$

где

$$A_1 = 3\alpha - 4(\eta^3 - \beta^3) + 6\beta(2\beta - 1)\zeta_1 + 3(4\beta - 1)\zeta_1^2 + 4\zeta_1^3;$$

$$A_2 = 16b_c b^{-1}\eta_c^3 + 4[(3\eta^3 - 4\eta_c^3 + \beta^3) + 3\beta^2\zeta_1 + 3\beta\zeta_1^2 + \zeta_1^3];$$

$$A_3 = -3(\alpha - 2\beta\zeta_1 - \zeta_1^2).$$

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости двутаврового поперечного сечения, имеющего две пластичные области (рис. 6.3, б). Будем считать, что нагружение происходит в зонах $F'_{пл}$ и $F'''_{пл}$, а разгрузка – в $F''_{пл}$ и $F'''_{пл}$. Тогда в случае $0 \leq \omega \leq 1$ значения моментов инерции, соответствующие нижней и верхней зонам разгрузки, примут вид

$$I''_y = \frac{1}{3}b^4\lambda^3(1-\omega)[(\eta^3 - \beta^3) - 3\beta^2\zeta_1 - 3\beta\zeta_1^2 - \zeta_1^3],$$

$$I''_z = \frac{1}{3}b^4\lambda(1-\omega^3)(1-\zeta_1),$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{4}b^4\lambda^2(1-\omega^2)(\alpha - 2\beta\zeta_1 - \zeta_1^2),$$

$$I'''_y = \frac{1}{3}b^4\lambda^3(1-\alpha\omega)[(\eta^3 + \beta^3) - 3\beta^2\zeta_2 + 3\beta\zeta_2^2 - \zeta_2^3],$$

$$I'''_z = \frac{1}{3}b^4\lambda(1-\alpha^3\omega^3)(\alpha - \zeta_2),$$

$$I'''_{yz} = \frac{1}{4}b^4\lambda^2(1-\alpha^2\omega^2)(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2).$$

В случае же $1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$ граница раздела проходит только через верхнюю область пластической деформации. Это означает, что разгрузка будет происходить только в зоне $F'''_{пл}$, так как вся нижняя область пластичности будет находиться в состоянии нагружения. При этом зависимости для I'''_y , I'''_z и I'''_{yz} будут тождественны приведенным выше.

Выражения для моментов инерции упругого ядра двутаврового поперечного сечения с зонами двусторонней пластичности записываются в виде

$$I^{уп}_y = \frac{4}{3}b_c b^3\lambda^3\eta_c^3 + \frac{2}{3}b^4\lambda^3[-2\eta_c^3 + 3\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)],$$

$$I^{уп}_z = \frac{4}{3}b_c^3 b\lambda\eta_c + \frac{2}{3}b^4\lambda(-2\eta_c + \zeta_1 + \zeta_2).$$

Подставляя $I_y^{\text{уп}}$ и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (6.26), приходим к уравнениям для определения значений функции ω :

$$B_1\omega^2 + B_2\omega + B_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (6.35)$$

$$C_1\omega^2 + C_2\omega + C_3 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}). \quad (6.36)$$

В уравнениях (6.35) и (6.36) обозначено:

$$B_1 = 3\alpha(\alpha^2 + 1) - 8(\eta^4 + \beta^4) + 12\beta^2(\zeta_1 + \alpha\zeta_2) - 6\beta(\zeta_1 - \alpha^2\zeta_2) + \\ + 12\beta(\zeta_1^2 - \alpha\zeta_2^2) - 3(\zeta_1^2 + \alpha^2\zeta_2^2) + 4(\zeta_1^3 + \alpha\zeta_2^3);$$

$$B_2 = 16b_c b^{-1}\eta_c^3 + 4[(2\eta^3 - 4\eta_c^3) + 3\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$B_3 = -3[2\alpha - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)];$$

$$C_1 = \alpha^2(6\beta - \alpha^2) + 6\alpha\beta(2\alpha - 1)\zeta_2 - 3\alpha(3\alpha - 2)\zeta_2^2 + 4\alpha\zeta_2^3;$$

$$C_2 = 16b_c b^{-1}\eta_c^3 + 4[(\eta^3 - 4\eta_c^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + \\ + 2\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$C_3 = -3(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2).$$

Если в полученных зависимостях положить $e = h$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, то придем к случаю потери устойчивости плоской формы изгиба двутавровой упруго-пластической балки. При этом, как указывалось выше, реализуется только стадия работы с двумя областями пластической деформации поперечного сечения. Поэтому, в рамках принятых нами допущений, вместо двух возможных вариантов прохождения границы раздела через области пластичности сечения балки будем иметь только одну ($0 \leq \omega \leq 1$), для которой вместо уравнений (6.35) и (6.36) получим зависимость:

$$(1 + 3\zeta^2 - 4\zeta^3)\omega^3 - 4\left[1 - 2\eta_c^3\left(1 - \frac{b}{b_c}\right) + \zeta^3\right]\omega + 3(1 - \zeta^2) = 0. \quad (6.37)$$

В качестве иллюстрации данного решения на рис. 6.4, а построена зависимость функции ω от параметра ζ , характеризующего относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения двутавровой балки, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью. Отметим, что кривые построены для трех значений η_c , равных соответственно 0,9, 0,7 и 0,6. При этом считалось, что отношение ширины стенки двутавра к ширине его полки составляет $b_c/b = 0,1$.

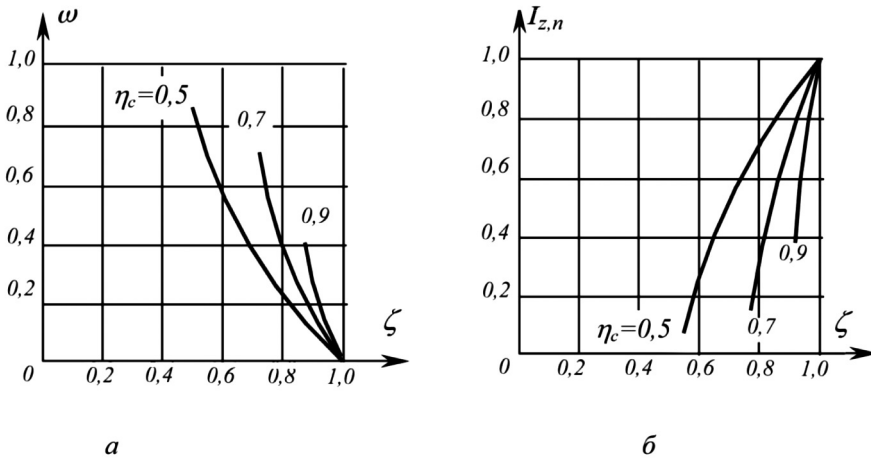


Рис. 6.4. Зависимости между параметром ζ и функциями ω , $I'_{z,\Pi}$ для двутаврового поперечного сечения упруго-пластической балки ($b_c/b = 0,1$):

a – график $\omega = \omega(\zeta)$; b – график $I'_{z,\Pi} = I'_{z,\Pi}(\zeta)$

6.3.3. Тавровое сечение. Рассмотрим нить конечной жесткости, имеющую тавровое поперечное сечение. При этом учтем, что его размеры находятся в пределах соотношений сортамента металлопроката, а именно: $11.22 \leq B/T \leq 24.25$; $1.18 \leq B/H \leq 2.42$; $11.2 \leq H/D \leq 22.46$, где B и T – ширина и толщина полки, а H и D – высота и толщина стенки. В случае работы нити с тавровым поперечным сечением в своей плоскости за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней (в стенке или полке) и двусторонней пластичностью.

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет одну пластичную область в стенке тавра (рис. 6.5).

Введем в рассмотрение функцию $\omega_1 = \lambda_1 \text{ctg} \varphi = e \text{ctg} \varphi / d$, однозначно определяющую положение границы раздела. Тогда значения моментов инерции зоны $F''_{\Pi\Pi}$ можно записать так:

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I''_y = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha^2\omega_1 + 2\alpha)\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 - (5\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{\text{уп}} = \frac{2}{3} b d^3 \lambda_1 (\eta_2^3 - \eta_c^3) + \frac{2}{3} d^4 \lambda_1^3 (\zeta_1^3 + \eta_1^3 + \eta_c^3 - 1) + 2 d^4 \lambda_1^3 (\eta_1 + \alpha \zeta_1 - \zeta_1^2) \alpha,$$

$$I_z^{\text{уп}} = \frac{2}{3} b^3 d \lambda_1 (\eta_2 - \eta_c) - \frac{2}{3} d^4 \lambda_1 (\alpha - \eta_c - \zeta_1),$$

где $\eta_2 = h_2 / e$; $\eta_c = h_c / e$.

Подстановка $I_y^{\text{уп}}$, I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (6.23) после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω_1 приводит к уравнениям

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_1 + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (6.38)$$

$$B_1 \omega_1^4 + B_2 \omega_1^3 + B_3 \omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}), \quad (6.39)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 + 4\alpha\eta_1 - 1); \\ A_2 &= 16bd^{-1}(\eta_2^3 - \eta_c^3) + 8[\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 + 3\alpha\eta_1 + 2(\eta_1^3 + \eta_c^3) - 1]; \\ A_3 &= 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 - 2\eta_1 + 1); \\ B_1 &= 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2); \\ B_2 &= 16bd^{-1}(\eta_2^3 - \eta_c^3) + 8[\zeta_1^3 - 6\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha\eta_1 + 2(\eta_1^3 + \eta_c^3) - 2]; \\ B_3 &= 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2). \end{aligned}$$

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет одну пластичную область в полке тавра (рис. 6.6).

Введем в рассмотрение функцию $\omega_2 = \lambda_2 \text{ctg} \varphi = e \text{ctg} \varphi / b$, однозначно определяющую положение границы раздела. Тогда значения моментов инерции зоны $F_{\text{пл}}''$ можно записать так:

- при $0 \leq \omega_2 \leq \beta^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - (\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\eta_2 + 3\eta_2^3)\omega_2 + 4(\eta_1^3 + \eta_2^3 - 1) + 12\alpha\eta_1];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda_2 [4(\beta - \zeta_2) - \omega_2^3(\beta^4 - \zeta_2^4)];$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 - (\alpha + 3\eta_2)\beta^3 + 6(\alpha + \eta_2)\beta];$$

- при $\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 + 6\alpha^2\omega_2^{-1} + 4\alpha\omega_2^{-2} + \omega_2^{-3}],$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda_2 (\omega_2^3 \zeta_2^3 - 4 + 3\omega_2^{-1} \zeta_2^{-1}) \zeta_2,$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b^4 \lambda_2^2 (3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega_2^{-1} + 3\omega_2^{-2}),$$

где $\beta = \eta_1 + \eta_2 - 1$.

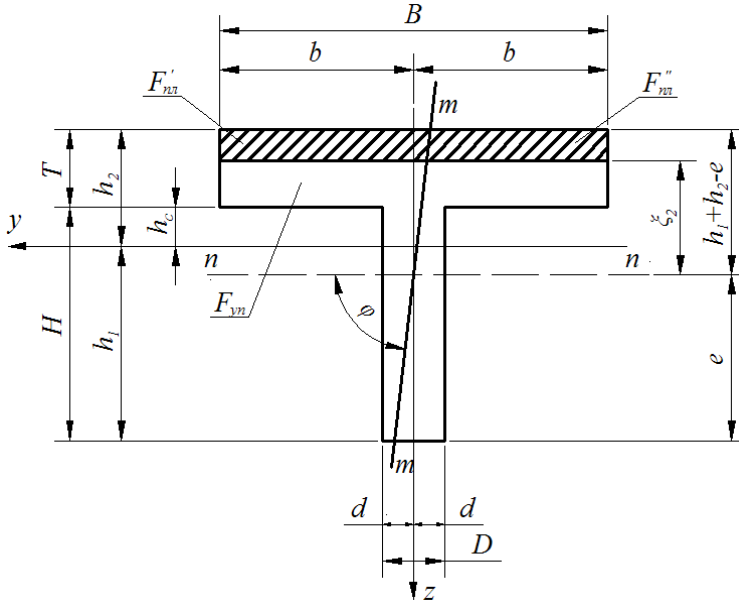


Рис. 6.6. Работа таврового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае односторонней пластичности в полке

Моменты инерции упругого ядра в этом случае принимают вид

$$I_y^{yn} = \frac{2}{3} d^4 \lambda_1^3 (\eta_1^3 + \eta_c^3) + \frac{2}{3} b^4 \lambda_2^3 (\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 - 3\alpha\eta_1 - \eta_1^3 - \eta_c^3 + 1),$$

$$I_z^{yn} = \frac{2}{3} d^4 \lambda_1 (\eta_1 + \eta_c) + \frac{2}{3} b^4 \lambda_2 (\alpha + \zeta_2 - \eta_c).$$

Подстановка I_y^{yn} , I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (6.23) после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω_2 приводит к уравнениям

$$C_1\omega_2^2 + C_2\omega_2 + C_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_2 \leq \beta^{-1}); \quad (6.40)$$

$$D_1\omega_2^4 + D_2\omega_2^3 + D_3\omega_2^2 - 1 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}), \quad (6.41)$$

где

$$C_1 = 3[\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2 - (\alpha + \eta_2)^2\beta^2];$$

$$C_2 = 16db^{-1}(\eta_1^3 + \eta_c^3) + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \eta_2^3 - \eta_1^3 - 2\eta_c^3 - 3\eta_1 + 1);$$

$$C_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2);$$

$$D_1 = 3[\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2];$$

$$D_2 = 16db^{-1}(\eta_1^3 + \eta_c^3) + 8[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha\eta_1 - 2(\eta_1^3 + \eta_c^3 - 1)];$$

$$D_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2).$$

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет две пластичные области (рис. 6.7).

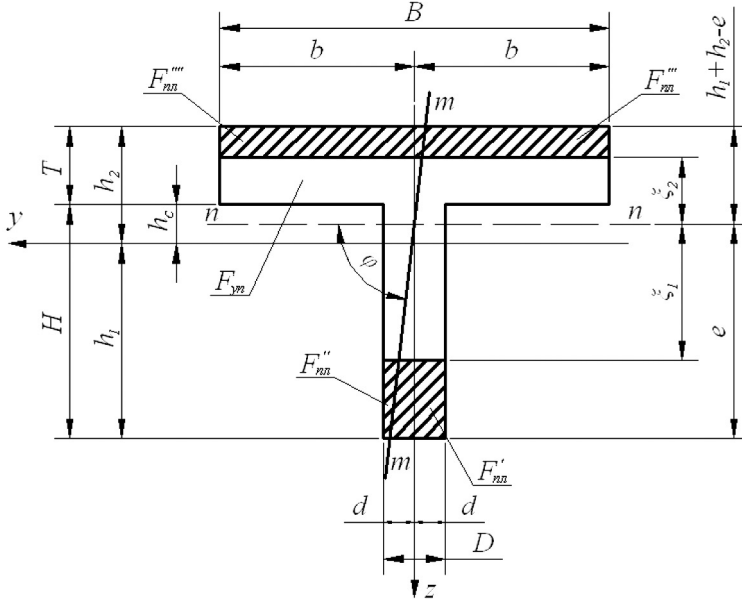


Рис. 6.7. Работа таврового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае двусторонней пластичности

Здесь, как и в случае участка с зоной односторонней пластичности, граница раздела всегда пересекает область пластической деформации. Будем считать, что нагружение происходит в зонах $F'_{\text{пл}}$ и $F'''_{\text{пл}}$, а разгрузка – в зонах $F''_{\text{пл}}$ и $F'''_{\text{пл}}$. Тогда вместо уравнения (6.23) используем уравнение (6.26).

Моменты инерции, соответствующие областям пластичности в стенке и полке при $0 \leq \omega_1 \leq 1$, будут:

$$I_y'' = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 - (5\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1 [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega_1^3];$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} d^4 \lambda_1^2 [3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega_1^2 - 6(2\alpha - 1)];$$

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - (\alpha^2 + 2\alpha\eta_2 + 3\eta_2^2)\beta^2\omega_2 + 4(\alpha^2 + \alpha\eta_2 + \eta_2^2)\beta];$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda_2 [\omega_2^3 \zeta_2^4 - 4\zeta_2 - \beta^4 \omega_2^3];$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\zeta_2 - (\alpha + 3\eta_2)\beta^3 \omega_2^2 - 6(\eta_1^2 - \eta_2^2 + 1)].$$

В случае прохождения границы раздела через обе области пластичности при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$ моменты инерции I_y''' , I_z''' и I_{yz}''' зоны разгрузки в полке $F'''_{\text{пл}}$ будут аналогичными приведенным выше для случая $0 \leq \omega_1 \leq 1$. Выражения моментов инерции зоны разгрузки в стенке $F''_{\text{пл}}$ в этом случае примут вид

$$I_y'' = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha^2\omega_1^{-1} - 4\alpha\omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1 (\omega_1^3 \zeta_1^3 - 4 + 3\omega_1^{-1} \zeta_1^{-1}) \zeta_1;$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} d^4 \lambda_1^2 (3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 - 8\alpha\omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}).$$

В случае, когда при двусторонней пластичности нити конечной жесткости таврового поперечного сечения граница раздела пересекает только область пластичности в полке, возможны два варианта ее прохождения. В первом из них (при $\zeta_1^{-1} \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \beta^{-1}$) выражения моментов инерции зоны разгрузки в полке можно представить в виде

$$\begin{aligned} I_y''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - \\ &\quad - (\alpha^2 + 2\alpha\eta_2 + 3\eta_2^2)\beta^2\omega_2 + 4(\alpha^2 + \alpha\eta_2 + \eta_2^2)\beta]; \\ I_z''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda_2 [\omega_2^3 \zeta_2^4 - 4\zeta_2 - \beta^4 \omega_2^3]; \\ I_{yz}''' &= \frac{1}{24} b^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\zeta_2 - (\alpha + 3\eta_2)\beta^3 \omega_2^2 - 6(\eta_1^2 - \eta_2^2 + 1)]. \end{aligned}$$

Во втором варианте (при $\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}$) моменты инерции определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} I_y''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 1)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 + \\ &\quad + 6\alpha^2\omega_2^{-1} + 4\alpha\omega_2^{-2} + \omega_2^{-3}], \\ I_z''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda_2 (3\omega_2^3 \zeta_2^4 - 4\omega_2^2 \zeta_2^3 + \omega_2^{-1}), \\ I_{yz}''' &= \frac{1}{24} b^4 \lambda_2^2 (3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega_2^{-1} + 3\omega_2^{-2}). \end{aligned}$$

Моменты инерции упругого ядра для рассматриваемого случая упруго-пластического участка нити конечной жесткости с зонами двусторонней пластичности запишем в виде

$$\begin{aligned} I_y^{yp} &= \frac{2}{3} d^4 \lambda_1^3 (\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_c^3) + \\ &\quad + \frac{2}{3} b^4 \lambda_2^3 (\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - \eta_c^3), \\ I_z^{yp} &= \frac{2}{3} d^4 \lambda_1 (\zeta_1 - \alpha + \eta_c) + \frac{2}{3} b^4 \lambda_2 (\zeta_2 + \alpha - \eta_c). \end{aligned}$$

Подставляя I_y^{yp} и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в уравнение (4.28), приходим к уравнениям для определения ω_1 , ω_2 :

$$K_1\omega_1^2 + K_2\omega_1 + K_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (6.42)$$

$$L_1\omega_1^4 + L_2\omega_1^3 + L_3\omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}); \quad (6.43)$$

$$M_1\omega_2^2 + M_2\omega_2 + M_3 = 0, \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega_1 \text{ и } \omega_2 \leq \beta^{-1}); \quad (6.44)$$

$$N_1\omega_2^4 + N_2\omega_2^3 + N_3\omega_2^2 - 1 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}), \quad (6.45)$$

коэффициенты которых принимают значения:

$$K_1 = 3(\zeta_1^4 + \zeta_2^4) - 12\alpha(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) + 12\alpha^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \\ - 3(\eta_1^2 - \eta_2^2 + 2\alpha)^2 - 6(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1);$$

$$K_2 = 8bd^{-1}(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - 2\eta_c^3 + \eta_2^3) + \\ + 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_1^3 + 2\eta_c^3);$$

$$K_3 = 6b^2d^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2) + 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + \alpha^2 - \eta_1^2);$$

$$L_1 = 3[(\zeta_1^4 + \zeta_2^4) - 4\alpha(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) + 4\alpha^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - (\beta - 2\eta_2)^2\beta^2];$$

$$L_2 = 8bd^{-1}(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - 2\eta_c^3 + \eta_2^3) + \\ + 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - 2\alpha^3 + 2\eta_c^3);$$

$$L_3 = 6b^2d^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2) + 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2);$$

$$M_1 = 3[\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2 - (\beta - 2\eta_2)^2\beta^2];$$

$$M_2 = 16db^{-1}(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_c^3) + \\ + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - 2\eta_c^3 + \eta_2^3);$$

$$M_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2);$$

$$N_1 = 3(\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2);$$

$$N_2 = 16db^{-1}(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_c^3) + \\ + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 2\alpha^3 - 2\eta_c^3);$$

$$N_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2).$$

- при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - \\ - 12\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha^2\omega_1^{-1} - 4\alpha\omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 (\omega_1^3 \zeta_1^3 - 4 + 3\omega_1^{-1} \zeta_1^{-1}) \zeta_1,$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 (3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 - 8\alpha\omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}),$$

где $\alpha = 1 - \eta$; $\zeta_1 = \xi_1 / e$; $\eta = h / e$.

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{\text{yn}} = \frac{4}{3} db_1^3 \lambda_1^3 \eta_c^3 + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1^3 + b_2^4 \lambda_2^3) (\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3),$$

$$I_z^{\text{yn}} = \frac{4}{3} db_1 \lambda_1 \eta_c (4d^2 - 6db_1 + 3b_1^2) + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1 + b_2^4 \lambda_2) (\zeta_1 + \beta - 2\eta_c),$$

где $\eta_c = h_c / e$; $\beta = 2\eta - 1$.

Подставляя I_y^{yn} , I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (6.23), после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω_1 придем к уравнениям

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_1 + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (6.46)$$

$$B_1 \omega_1^4 + B_2 \omega_1^3 + B_3 \omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}), \quad (6.47)$$

где

$$A_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$A_2 = 32b_1^{-1} d \eta_c^3 + 8b_1^{-1} b_2 (\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + 16(\eta^3 - \eta_c^3);$$

$$A_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha - 1);$$

$$B_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2);$$

$$B_2 = 32b_1^{-1} d \eta_c^3 + 8b_1^{-1} b_2 (\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + \\ + 8(\eta^3 - \alpha^3 - 2\eta_c^3);$$

$$B_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2).$$

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой, имеющего две пластичные области (рис. 6.9), считая, что нагружение происходит в зонах $F'_{пл}$ и $F'''_{пл}$, а разгрузка – в зонах $F''_{пл}$ и $F'''_{пл}$. Тогда в случае $0 \leq \omega_1 \leq 1$ значения моментов инерции, соответствующие нижней и верхней зонам разгрузки, примут вид

$$I_y'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 - (6\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega_1];$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega_1 - 6(2\alpha - 1)];$$

$$I_y''' = \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - (2\alpha^2 - 4\alpha + 3)\beta^2\omega_2 + 4(\alpha^2 - \alpha + 1)\beta];$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2 [(\zeta_2^4 - \beta^4)\omega_2^3 - 8\alpha + 4(1 - \zeta_2)];$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b_2^4 \lambda_2^2 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 - (\beta^4 + 2\beta^3 + \eta^3)\omega_2^2 + 6\beta].$$

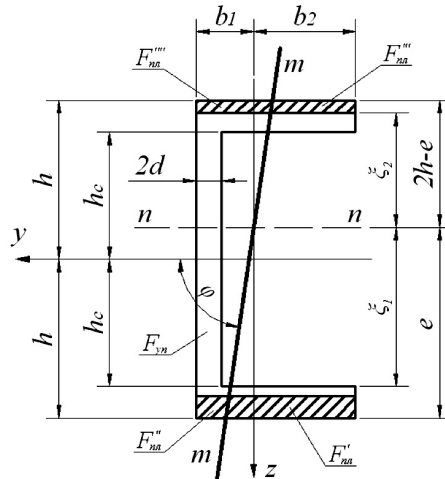


Рис. 6.9. Работа швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае двусторонней пластичности

В случае прохождения границы раздела через обе области пластичности при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$ моменты инерции I_y'' , I_z'' и I_{yz}'' зоны разгрузки $F_{\text{пл}}''$ будут такими же, как для случая $0 \leq \omega_1 \leq 1$. Выражения моментов инерции зоны $F_{\text{пл}}''$ в этом случае следующие:

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - \\ &\quad - 12\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha^2\omega_1^{-1} - 4\alpha\omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}], \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 (\omega_1^3 \zeta_1^3 - 4 + 3\omega_1^{-1} \zeta_1^{-1}) \zeta_1; \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 (3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 - 8\alpha\omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}). \end{aligned}$$

В случаях же $\zeta_1^{-1} \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \beta^{-1}$, $\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}$ (здесь $\omega_2 = \lambda_2 \text{ctg}\varphi = e \text{ctg}\varphi/b_2$) граница раздела проходит только через верхнюю область пластической деформации. Это говорит о том, что разгрузка будет происходить только в зоне $F_{\text{пл}}''$, так как вся нижняя область пластичности будет находиться в состоянии нагружения. Тогда при $\zeta_1^{-1} \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \beta^{-1}$ выражения моментов инерции I_y'' , I_z'' и I_{yz}'' будут:

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - \\ &\quad - (2\alpha^2 - 4\alpha + 3)\beta^2\omega_2 + 4(\alpha^2 - \alpha + 1)\beta], \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2 [(\zeta_2^4 - \beta^4)\omega_2^3 - 8\alpha + 4(1 - \zeta_2)], \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24} b_2^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 - (\beta^4 + 2\beta^3 + \eta^3)\omega_2^2 + 6\beta]. \end{aligned}$$

В том случае, когда $\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}$ соответствующие выражения примут вид

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 + \\ &\quad + 6\alpha^2\omega_2^{-1} + 4\alpha\omega_2^{-2} + \omega_2^{-3}], \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2 (\omega_2^3 \zeta_2^3 - 4 + 3\omega_2^{-1} \zeta_2^{-1}) \zeta_2, \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24} b_2^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega_2^{-1} + 3\omega_2^{-2}]. \end{aligned}$$

Выражения для моментов инерции упругого ядра швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой при двусторонней пластичности записываются в виде

$$I_y^{yn} = \frac{4}{3}db_1^3\lambda_1^3\eta_c^3 + \frac{1}{3}(b_1^4\lambda_1^3 + b_2^4\lambda_2^3) \times \\ \times [\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3\alpha(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 - 2\eta_c^3],$$

$$I_z^{yn} = \frac{4}{3}db_1\lambda_1\eta_c(4d^2 - 6db_1 + 3b_1^2) + \frac{1}{3}(b_1^4\lambda_1 + b_2^4\lambda_2)(\zeta_1 + \zeta_2 - 2\eta_c).$$

Подставляя I_y^{yn} и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (6.26), получим уравнения для определения функций ω_1 , ω_2 :

$$C_1\omega_1^2 + C_2\omega_1 + C_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (6.48)$$

$$D_1\omega_1^4 + D_2\omega_1^3 + D_3\omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}); \quad (6.49)$$

$$K_1\omega_2^2 + K_2\omega_2 + K_3 = 0, \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega_1 \text{ и } \omega_2 \leq \beta^{-1}); \quad (6.50)$$

$$L_1\omega_2^4 + L_2\omega_2^3 + L_3\omega_2^2 - 1 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}). \quad (6.51)$$

В уравнениях (6.48) – (6.51) обозначено:

$$C_1 = 3[\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4\alpha(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) + 4\alpha^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - 8\alpha^2 + 8\alpha - 2];$$

$$C_2 = 32b_1^{-1}d\eta_c^3 + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + \\ + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3);$$

$$C_3 = 6b_1^{-2}b_2^2(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 - \beta) + 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 - \beta);$$

$$D_1 = 3[\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4\alpha(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) + 4\alpha^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1];$$

$$D_2 = 32b_1^{-1}d\eta_c^3 + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + \\ + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 - 2\eta_c^3);$$

$$D_3 = 6b_1^{-2}b_2^2(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 - \beta) + 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2);$$

$$K_1 = 3(\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$K_2 = 32b_2^{-1}d\eta_c^3 + 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + \\ + 8b_1b_2^{-1}[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3\alpha(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + 3\alpha^2(\zeta_1 + \zeta_2) - 2\eta_c^3];$$

$$K_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 - \beta);$$

$$L_1 = 3(\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2);$$

$$L_2 = 32b_2^{-1}d\eta_c^3 + 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - 2\eta_c^3) + \\ + 8b_1b_2^{-1}[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3\alpha(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + 3\alpha^2(\zeta_1 + \zeta_2) - 2\eta_c^3];$$

$$L_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2).$$

6.3.5. Швеллерное сечение с горизонтальной стенкой. Рассмотрим поперечное сечение нити конечной жесткости в виде швеллера с горизонтальной стенкой. При этом будем считать, что его размеры находятся в пределах соотношений сортамента металлопроката. В случае работы нити с поперечным сечением в виде швеллера с горизонтальной стенкой за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней (в стенке или полках) и двусторонней пластичностью. Функции, определяющие положение границы раздела в рассматриваемом случае, примут вид: $\omega = \lambda ctg\varphi = e ctg\varphi / h$, $\omega_c = \lambda_c ctg\varphi = e ctg\varphi / h_c$. Тогда в случае односторонней пластичности в полках (рис. 6.10) значения моментов инерции зоны разгрузки $F''_{пл}$ можно представить таким образом:

- при $0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{3}(h_c^4\lambda_c^4 - h^4\lambda^4)(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - \eta_2^3),$$

$$I_z'' = \frac{1}{3}(h_c^4\lambda_c - h^4\lambda)(\zeta_2 - \beta),$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{4}(h_c^4\lambda_c^2 - h^4\lambda^2)(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^3 - \eta_2^2);$$

- при $\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c$

$$I_y'' = \frac{1}{12}h_c^4\lambda_c^3(4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega_c^{-1} - 4\alpha\omega_c^{-2} - \omega_c^{-3}) - \\ - \frac{1}{12}h^4\lambda^3[4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 + (\alpha^4 - 4\alpha\eta_2^3 + 3\eta_2^4)\omega + 4(\alpha^3 - \eta_2^3)],$$

$$I_z'' = \frac{1}{12}h_c^4\lambda_c(4\zeta_2 - 3\omega_c^{-1}) - \frac{1}{12}h^4\lambda[\beta^4\omega^3 - 4(\beta - \zeta_2)],$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24}h_c^4\lambda_c^2(6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega_c^{-1} - 3\omega_c^{-2}) - \\ - \frac{1}{24}h^4\lambda^2[6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - (\beta - 4\eta_2)\beta^3\omega^2 + 6(\beta - 2\eta_2)\beta];$$

- при $\beta^{-1} \leq \omega$ и $\omega_c \leq \zeta_2^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega_c^{-1} - 4\alpha\omega_c^{-2} - \omega_c^{-3}) - \\ - \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega^{-1} - 4\alpha\omega^{-2} - \omega^{-3}),$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c (4\zeta_2 - 3\omega_c^{-1}) - \frac{1}{12} h^4 \lambda (4\zeta_2 - 3\omega^{-1}),$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} h_c^4 \lambda_c^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega_c^{-1} - 3\omega_c^{-2}) - \\ - \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega^{-1} - \omega^{-2}];$$

- при $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$

$$I_y'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega\zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega - 2)\alpha\zeta_2^2 - \\ - 12\alpha^2\zeta_2 + 6\alpha^2\omega^{-1} + 4\alpha\omega^{-2} + \omega^{-3}],$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda (3\omega^{-1}\zeta_2^{-1} - 4 + \omega^3\zeta_2^3)\zeta_2,$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2\zeta_2^4 + 4\alpha\omega^2\zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega^{-1} + 3\omega^{-2}],$$

где $\alpha = 1 - \eta_1$; $\beta = \eta_1 + \eta_2 - 1$; $\zeta_2 = \xi_2 / e$; $\eta_2 = b_2 / e$.

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{\text{уп}} = \frac{2}{3} h^4 \lambda^3 (\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1) - \\ - \frac{2}{3} h_c^4 \lambda_c^3 [\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + (\eta_1 - 2\eta_d)^3],$$

$$I_z^{\text{уп}} = \frac{2}{3} h^4 \lambda (1 + \zeta_2) - \frac{2}{3} h_c^4 \lambda_c (1 + \zeta_2 - 2\eta_d),$$

где $\eta_1 = b_1 / e$; $\eta_d = d / e$.

Подставляя $I_y^{\text{уп}}$, I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (6.23), после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω получим уравнения:

$$A_1\omega + A_2 = 0, \quad (0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}); \quad (6.52)$$

$$B_1\omega^4 + B_2\omega^3 + B_3\omega^2 + B_4 = 0, \quad (\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c); \quad (6.53)$$

$$C_1\omega^3 + C_2\omega^2 + C_3 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega \text{ и } \omega_c \leq \zeta_2^{-1}); \quad (6.54)$$

$$D_1\omega^4 + D_2\omega^3 + D_3\omega^2 - 1 = 0, \quad (\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c). \quad (6.55)$$

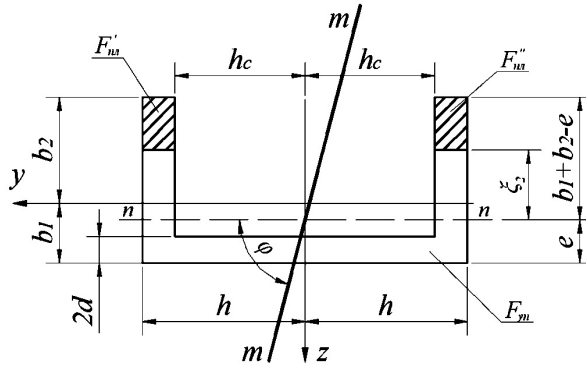


Рис. 6.10. Работа швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае односторонней пластичности в полках

Коэффициенты здесь имеют вид:

$$A_1 = 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + 2\eta_1^3 + \eta_2^3) - \\ - 8h_c h^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + 2(\eta_1 - 2\eta_d)^3 + \eta_2^3];$$

$$A_2 = 6(1 - h_c^2 h^{-2})(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2);$$

$$B_1 = -3(\eta_1^2 - \eta_2^2 + 1)^2 - 12(\eta_1^2 - \eta_2^2)\alpha - 8\alpha - 12\eta_2^2 + 8;$$

$$B_2 = 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + 2\eta_1^3 + \eta_2^3) - \\ - 8h_c h^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 2\alpha^3 + 2(\eta_1 - 2\eta_d)^3];$$

$$B_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2) - 6h_c^2 h^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2);$$

$$B_4 = h_c^2 h^{-2};$$

$$C_1 = 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 6\alpha^2 - 6\alpha + 2) - 8h_c h^{-1}\{\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 - \\ - 2(2\eta_d - 1)[2\eta_d(2\eta_d + 3\alpha - 2) + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1]\};$$

$$C_2 = 6(1 - h_c^2 h^{-2})(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2);$$

$$C_3 = h_c^4 h^{-4} - 1;$$

$$D_1 = 3(\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2);$$

$$D_2 = 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 6\alpha^2 - 6\alpha + 2) - 16h_c h^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 - \\ - 2\eta_d(4\eta_d^2 + 3\eta_1^2 - 6\eta_1\eta_d) + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1];$$

$$D_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2).$$

Моменты инерции упругого ядра для рассматриваемого случая упруго-пластического участка нити конечной жесткости можно представить так:

$$I_y^{\text{yn}} = \frac{4}{3}dh_c(4d^2 + 3h_c^2\lambda_c^2\eta_1 - 6dh_c\lambda_c\eta_1) - \frac{2}{3}h_c^4\lambda_c^3(\eta_1^3 + \eta_2^3) + \\ + \frac{2}{3}h^4\lambda^3(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_2^3); \\ I_z^{\text{yn}} = \frac{4}{3}dh_c^3 - \frac{2}{3}h_c^4\lambda_c(\beta + 1) + \frac{2}{3}h^4\lambda(\beta + \zeta_1).$$

Подставим выражения I_y^{yn} , I_y'' , I_{yz}'' в уравнение (6.23). В результате этого получим уравнения для определения значений функции ω :

$$K_1\omega^2 + K_2\omega + K_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (6.56)$$

$$L_1\omega^4 + L_2\omega^3 + L_3\omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}), \quad (6.57)$$

коэффициенты которых принимают значения:

$$K_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$K_2 = 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_1^3 + 2\eta_2^3) + \\ + 16h_ch^{-1}[2\eta_d(4\eta_d^2 - 6\eta_1\eta_d + 3\eta_1^2) - \eta_1^3 - \eta_2^3];$$

$$K_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha - 1);$$

$$L_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2);$$

$$L_2 = 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - 2\alpha^3 + 2\eta_2^3) + \\ + 16h_ch^{-1}[2\eta_d(4\eta_d^2 - 6\eta_1\eta_d + 3\eta_1^2) - \eta_1^3 - \eta_2^3];$$

$$L_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2).$$

Рассматривая упруго-пластический участок нити конечной жесткости швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой при двусторонней пластичности (рис. 6.12), будем считать, что нагружение происходит в зонах $F'_{\text{пл}}$ и $F'''_{\text{пл}}$, а разгрузка – в зонах $F''_{\text{пл}}$ и $F'''_{\text{пл}}$.

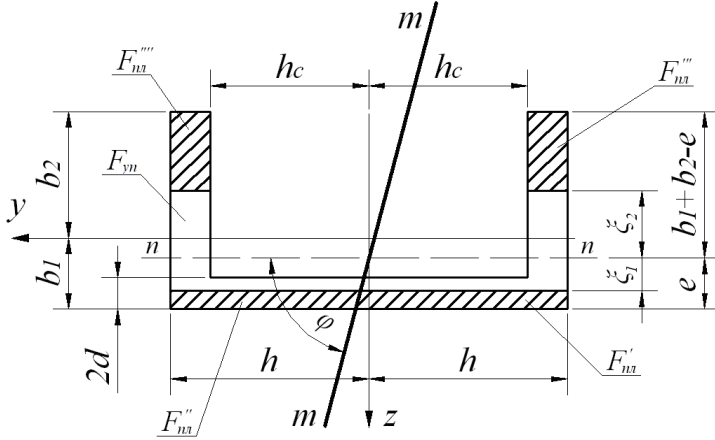


Рис. 6.12. Работа швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае двусторонней пластичности

С помощью функций ω и ω_c , определяющих положение границы раздела в рассматриваемом случае, выразим возможные варианты прохождения границы раздела и соответствующие им выражения моментов инерции, отвечающие нижней и верхней зонам разгрузки:

- при $0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega + 2)\alpha \zeta_1^2 - 12\alpha^2 \zeta_1 - (6\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)],$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega^3],$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha \zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega^2 - 6(2\alpha - 1)],$$

$$I_y''' = \frac{1}{3} (h_c^4 \lambda_c^4 - h^4 \lambda^4) (\zeta_2^3 + 3\alpha \zeta_2^2 + 3\alpha^2 \zeta_2 + \alpha^3 - \eta_2^3),$$

$$I_z''' = \frac{1}{3} (h_c^4 \lambda_c - h^4 \lambda) (\zeta_2 - \beta),$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{4} (h_c^4 \lambda_c^2 - h^4 \lambda^2) (\zeta_2^2 + 2\alpha \zeta_2 + \alpha^3 - \eta_2^2).$$

В случае двусторонней пластичности швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой при $\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c$; $\beta^{-1} \leq \omega$ и $\omega_c \leq \zeta_2^{-1}$; $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $\omega \leq 1$ моменты инерции I_y'' , I_z'' и I_{yz}'' зоны разгрузки $F_{пл}''$ будут аналогичными случаю $0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}$. Выражения моментов инерции зоны $F_{пл}'''$ для этих случаев примут вид:

- при $\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c$

$$I_y''' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega_c^{-1} - 4\alpha\omega_c^{-2} - \omega_c^{-3}) - \\ - \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 + (\alpha^4 - 4\alpha\eta_2^3 + 3\eta_2^4)\omega + 4(\alpha^3 - \eta_2^3)],$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c (4\zeta_2 - 3\omega_c^{-1}) - \frac{1}{12} h^4 \lambda [\beta^4 \omega^3 - 4(\beta - \zeta_2)],$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} h_c^4 \lambda_c^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega_c^{-1} - 3\omega_c^{-2}) - \\ - \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - (\beta - 4\eta_2)\beta^3 \omega^2 + 6(\beta - 2\eta_2)\beta];$$

- при $\beta^{-1} \leq \omega$ и $\omega_c \leq \zeta_2^{-1}$

$$I_y''' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega_c^{-1} - 4\alpha\omega_c^{-2} - \omega_c^{-3}) - \\ - \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega^{-1} - 4\alpha\omega^{-2} - \omega^{-3}),$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c (4\zeta_2 - 3\omega_c^{-1}) - \frac{1}{12} h^4 \lambda (4\zeta_2 - 3\omega^{-1}),$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} h_c^4 \lambda_c^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega_c^{-1} - 3\omega_c^{-2}) - \\ - \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega^{-1} - \omega^{-2});$$

- при $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $\omega \leq 1$

$$I_y''' = \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega\zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega - 2)\alpha\zeta_2^2 - \\ - 12\alpha^2\zeta_2 + 6\alpha^2\omega^{-1} + 4\alpha\omega^{-2} + \omega^{-3}],$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} h^4 \lambda (3\omega^{-1}\zeta_2^{-1} - 4 + \omega^3\zeta_2^3)\zeta_2,$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2\zeta_2^4 + 4\alpha\omega^2\zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega^{-1} + 3\omega^{-2}].$$

Для случая, при котором значения функций, определяющих положение границы раздела, находятся в пределах $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$, выражения моментов инерции I_y'' , I_z'' и I_{yz}'' зоны разгрузки $F_{пл}'''$ будут такими же, как выше приведенные для случая, при котором $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $\omega \leq 1$. Выражения моментов инерции зоны $F_{пл}''$ при $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$ можно представить так:

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega + 2)\alpha \zeta_1^2 - \\ &\quad - 12\alpha^2 \zeta_1 + 6\alpha^2 \omega^{-1} - 4\alpha \omega^{-2} + \omega^{-3}], \\ I_z'' &= \frac{1}{12} h^4 \lambda (3\omega^{-1} \zeta_1^{-1} - 4 + \omega^3 \zeta_1^3) \zeta_1, \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2 \zeta_1^4 - 4\alpha \omega^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha \zeta_1 - 8\alpha \omega^{-1} + 3\omega^{-2}]. \end{aligned}$$

Выражения для моментов инерции упругого ядра швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой при двусторонней пластичности записываются таким образом:

$$\begin{aligned} I_y^{уп} &= \frac{2}{3} h^4 \lambda^3 [\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2] - \\ &\quad - \frac{2}{3} h_c^4 \lambda_c^3 [\zeta_2^3 + 3\alpha \zeta_2^2 + 3\alpha^2 \zeta_2 + \alpha^3 + (\eta_1 - 2\eta_d)^3], \\ I_z^{уп} &= \frac{2}{3} h^4 \lambda (\zeta_1 + \zeta_2) - \frac{2}{3} h_c^4 \lambda_c (\zeta_2 - 2\eta_d + 1). \end{aligned}$$

Подставляя $I_y^{уп}$ и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в выражение (6.26), получим уравнения для определения функции ω :

$$M_1 \omega^2 + M_2 \omega + M_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}); \quad (6.58)$$

$$N_1 \omega^4 + N_2 \omega^3 + N_3 \omega^2 + N_4 = 0, \quad (\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c); \quad (6.59)$$

$$P_1 \omega^4 + P_2 \omega^3 + P_3 \omega^2 + P_4 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega \text{ и } \omega_c \leq \zeta_2^{-1}); \quad (6.60)$$

$$S_1 \omega^4 + S_2 \omega^3 + S_3 \omega^2 - 1 = 0, \quad (\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c \text{ и } \omega \leq 1); \quad (6.61)$$

$$T_1 \omega^4 + T_2 \omega^3 + T_3 \omega^2 - 2 = 0, \quad (\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c \text{ и } 1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}). \quad (6.62)$$

В уравнениях (6.58) – (6.62) обозначено:

$$M_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$M_2 = 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + \eta_1^3 + \eta_2^3] - \\ - 8h_ch^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + 2(\eta_1 - 2\eta_d)^3 + \eta_2^3];$$

$$M_3 = 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 2\alpha^2 - \eta_1 - \eta_2] - \\ - 6h_c^2h^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2);$$

$$N_1 = 3[\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - (\alpha + \eta_2)^2\beta^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1];$$

$$N_2 = 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + \eta_1^3 + \eta_2^3] - \\ - 8h_ch^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 2(\eta_1 - 2\eta_d)^3 + 2\alpha^3];$$

$$N_3 = 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 2\alpha^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2] - 6h_c^2h^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2);$$

$$N_4 = h_c^4h^{-4};$$

$$P_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$P_2 = 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1] - \\ - 8h_ch^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 2\alpha^3 + 2(\eta_1 - 2\eta_d)^3];$$

$$P_3 = 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha - 1] - 6h_c^2h^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2);$$

$$P_4 = h_c^4h^{-4} - 1;$$

$$S_1 = 3[\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\alpha + 4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1];$$

$$S_2 = 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1] - \\ - 16h_ch^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + (\eta_1 - 2\eta_d)^3];$$

$$S_3 = 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha - 1];$$

$$T_1 = 3[\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\alpha + 4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\alpha^2];$$

$$T_2 = 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2] - \\ - 16h_ch^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + (\eta_1 - 2\eta_d)^3];$$

$$T_3 = 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 4\alpha^2].$$

6.3.6. Угловое сечение с неравными полками. Рассмотрим поперечное сечение нити конечной жесткости в виде неравнополочного уголка. При этом учтем, что его размеры находятся в пределах соотношений сортамента металлопроката. В случае работы нити с поперечным сечением в виде неравнополочного уголка за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней и двусторонней пластичностью. Функция, однозначно определяющая положение границы раздела в рассматриваемом случае, имеет вид $\omega_1 = \lambda_1 \text{ctg} \varphi = e \text{ctg} \varphi / b_1$. Тогда в случае односторонней пластичности (рис. 6.13) значения моментов инерции зоны разгрузки $F''_{\text{пл}}$ можно представить так:

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I''_y = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 + 4(2\alpha\omega_1 - 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 - (6\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)],$$

$$I''_z = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega_1^3],$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 [3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega_1^2 - 6(2\alpha - 1)];$$

- при $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$I''_y = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha^2\omega_1^{-1} - 4\alpha\omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}],$$

$$I''_z = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 (3\omega_1^{-1} \zeta_1^{-1} - 4 + \omega_1^3 \zeta_1^3) \zeta_1,$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 [3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 - 8\alpha\omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}],$$

где принято, что $\alpha = 1 - \eta_1$; $\eta_1 = h_1 / e$; $\zeta_1 = \xi_1 / e$.

При этом моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{\text{уп}} = \frac{2}{3} b_1^4 \lambda_1^4 (\beta^3 + \eta_2^3) \eta_d + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1^3 + b_2^4 \lambda_2^3) (\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3),$$

$$I_z^{\text{уп}} = \frac{2}{3} b_1^4 \lambda_1^2 (4\eta_d^2 \lambda_1^2 - 6\eta_d \lambda_1 + 3) (\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_d) \eta_d + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1 + b_2^4 \lambda_2) (\zeta_1 - 1 + 2\eta_d),$$

где $\beta = \eta_1 - 2\eta_d$; $\eta_2 = h_2 / e$; $\eta_d = d / e$.

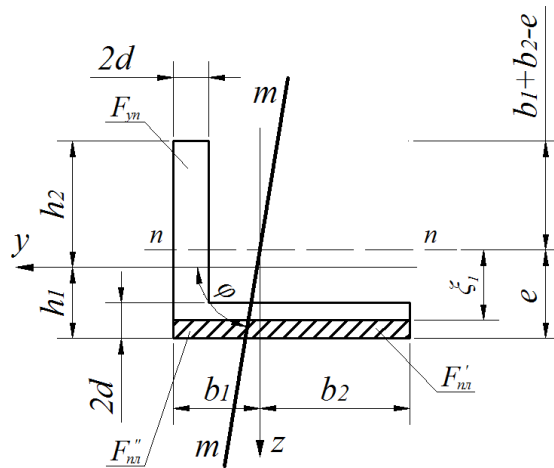


Рис. 6.13. Работа уголкового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае односторонней пластичности

Подставив моменты инерции I_y^{yp} , I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (6.23), получим уравнения для определения функции ω_1 :

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_1 + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (6.63)$$

$$B_1 \omega_1^4 + B_2 \omega_1^3 + B_3 \omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}). \quad (6.64)$$

Коэффициенты имеют вид:

$$A_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$A_2 = 16\lambda_1(\beta^3 + \eta_2^3)\eta_d + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3) + 16[\beta^2 + 2\eta_1(\eta_1 - \eta_d)]\eta_d;$$

$$A_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha - 1);$$

$$B_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2);$$

$$B_2 = 16\lambda_1(\beta^3 + \eta_2^3)\eta_d + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3) - 8(\alpha^3 + \beta^3);$$

$$B_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2).$$

При рассмотрении двусторонней пластичности в уголкового поперечном сечении (рис. 6.14) отметим, что варианты прохождения границы раздела и соответствующие им выражения моментов инерции зоны разгрузки $F_{пл}''$

будут аналогичными представленным выше для случая односторонней пластичности. Заметим, что в зонах $F'_{пл}$ и $F'''_{пл}$ при этом будет происходить нагружение. Моменты инерции упругого ядра в случае двусторонней пластичности можно записать следующим образом:

$$I_y^{уп} = \frac{2}{3} b_1^4 \lambda_1^4 (\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2 + 3\zeta_2 - 8\eta_d^3) \eta_d + \\ + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1^3 + b_2^4 \lambda_2^3) (\zeta_1^3 - 3\alpha \zeta_1^2 + 3\alpha^2 \zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3),$$

$$I_z^{уп} = \frac{2}{3} b_1^4 \lambda_1^2 (4\eta_d^2 \lambda_1^2 - 6\eta_d \lambda_1 + 3) (\zeta_2 + 1 - 2\eta_d) \eta_d + \\ + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1 + b_2^4 \lambda_2) (\zeta_1 - 1 + 2\eta_d),$$

где $\zeta_2 = \xi_2 / e$.

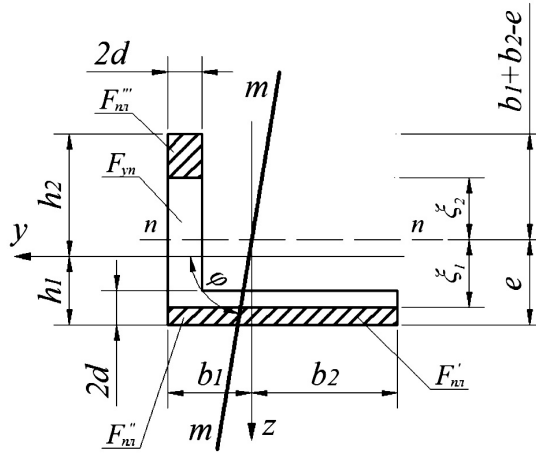


Рис. 6.14. Работа уголкового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае двусторонней пластичности

Используя формулу (6.26) получим уравнения для определения ω_1 :

$$C_1 \omega_1^2 + C_2 \omega_1 + C_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (6.65)$$

$$D_1 \omega_1^4 + D_2 \omega_1^3 + D_3 \omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}), \quad (6.66)$$

где

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1); \\
 C_2 &= 16\lambda_1(\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2 + 3\zeta_2 - 8\eta_d^3 + 1)\eta_d + \\
 &\quad + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3) + 16[\beta^2 + 2\eta_1(\eta_1 - \eta_d)]\eta_d; \\
 C_3 &= 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha - 1); \\
 D_1 &= 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2); \\
 D_2 &= 16\lambda_1(\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2 + 3\zeta_2 - 8\eta_d^3 + 1)\eta_d + \\
 &\quad + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3) - 8(\alpha^3 + \beta^3); \\
 D_3 &= 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2).
 \end{aligned}$$

§ 6.4. Определение приведенной жесткости поперечного сечения нити

Для того чтобы найти приведенную жесткость поперечного сечения нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба за пределами упругости необходимо вначале установить зависимость приращения изгибающего момента δM_z от кривизны нити в горизонтальной плоскости v'' . Решение указанной задачи можно получить с использованием второго из соотношений (6.12), куда подставляется вместо $\delta\sigma_x$ соответствующая зависимость. Применим данный подход для вычисления δM_z при различных типах поперечного сечения и вариантах распространения зон пластической деформации по сечению нити.

6.4.1. Прямоугольное сечение. Рассмотрим прямоугольное поперечное сечение нити. Величина приращения изгибающего момента в горизонтальной плоскости с учетом выражения (6.2) и второго из соотношений (6.12) для участка нити с односторонней пластичностью равна:

$$\delta M_z = E(I_z^{yn} + I_z'' - I_{yz}'' \operatorname{ctg}\varphi) v''. \quad (6.67)$$

Последнюю зависимость можно также представить в виде

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \zeta_1) v'', \quad (6.68)$$

где $I_z^*(\eta, \zeta_1) = I_z \cdot I'_z(\eta, \zeta_1)$; $I_z = \frac{4}{3}b^4\lambda\eta$ – момент инерции относительно оси z полностью упругого поперечного сечения нити; $I'_z(\eta, \zeta_1)$ – поправка к упругому моменту инерции, характеризующая изменение его величины в результате развития в сечении зон пластической деформации.

Подставляя соответствующие значения моментов инерции в выражение (6.67), получаем:

$$I'_z(\eta, \zeta_1) = \begin{cases} \frac{1}{32\eta} \{8[(2\alpha+1) + \zeta_1] - 6(\alpha - 2\beta\zeta_1 - \zeta_1^2)\omega + \\ + [(2\alpha-1) - 4\beta\zeta_1^3 - \zeta_1^4]\omega^3\}, & (0 \leq \omega \leq 1); \\ \frac{1}{32\eta} [3\omega^{-1} + 8(2\alpha + \zeta_1) + 6\zeta_1^2\omega - \zeta_1^4\omega^3], & (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), \end{cases}$$

где значение функции ω по-прежнему вычисляется по уравнениям (6.24) и (6.25).

В случае упруго-пластического участка нити конечной жесткости с двусторонней пластичностью вместо соотношения (6.67) будем иметь:

$$\delta M_z = E[I_z^{yn} + I_z'' + I_z''' - (I_{yz}'' + I_{yz}''') \operatorname{ctg} \varphi] v'', \quad (6.69)$$

которое в силу связи между ω и η , ζ_1 и ζ_2 можно записать так:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2) v''. \quad (6.70)$$

Аналогично предыдущему величина $I_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$ представляется произведением двух членов

$$I_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = I_z \cdot I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2),$$

первый из которых, как и в случае участка нити с односторонней пластичностью, представляет собой упругий момент инерции поперечного сечения, второй – поправку к его значению, зависящую от величины областей пластичности.

Внося I_z^{yn} , I_z'' , I_z''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (6.69) для поправки к упругому моменту инерции, имеем:

- при $(0 \leq \omega \leq 1)$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \{8[(\alpha+1) + (\zeta_1 + \zeta_2)] - 6[2\alpha - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]\omega + \\ + [(2\alpha-1) - \alpha^3(\alpha-2) - 4\beta(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)]\omega^3\};$$

- при $(1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), (1 \leq \omega \leq \alpha^{-1})$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \{3\omega^{-1} + 8[\alpha + (\zeta_1 + \zeta_2)] - \\ - 6[\alpha + 2\beta\zeta_2 - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]\omega - [\alpha^3(\alpha-2) - 4\beta\zeta_2^3 + (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)]\omega^3\};$$

- при $\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1}$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \{ 8[\alpha + (2\zeta_1 + \zeta_2) - 6(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2)\omega - \\ - [\alpha^3(\alpha - 2) - 4\beta\zeta_2^3 + \zeta_2^4]\omega^3 \};$$

- при $\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} [6\omega^{-1} + 8(\zeta_1 + \zeta_2) + 6(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\omega - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)\omega^3];$$

- при $\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$, $\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$

$$I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} [3\omega^{-1} + 8(2\zeta_1 + \zeta_2) + 6\zeta_2^2\omega - \zeta_2^4\omega^3].$$

Следует отметить, что входящее в последние зависимости значение функции ω определяется из соответствующих уравнений (6.27) – (6.31).

При потере устойчивости плоской формы равновесия упруго-пластических балок ($e = h$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$) выражения для $I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$ после упрощений преобразуются к виду

$$I'_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{16} [8(1 + \zeta) - 6(1 - \zeta^2)\omega + (1 - \zeta^4)\omega^3], & (0 \leq \omega \leq 1); \\ \frac{1}{16} (8 + 3\zeta^{-1}\omega^{-1} + 6\zeta\omega - \zeta^3\omega^3)\zeta, & (1 \leq \omega \leq \zeta^{-1}), \end{cases}$$

где ω определяется по (6.32) и (6.33) соответственно. На рис. 6.2, б показан график $I'_z(\zeta)$.

6.4.2. Двутаверовое сечение. В случае двутаверового поперечного сечения нити зависимость (6.68) при односторонней пластичности преобразуется таким образом:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) v'', \quad (6.71)$$

причем, входящую сюда величину $I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1)$ можно представить так:

$$I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) = I_z^c + I_{z,n}^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) = I_z^c + I_z^n \cdot I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1),$$

где $I_z^c = \frac{4}{3} b b_c^3 \lambda \eta_c$ и $I_z^n = \frac{4}{3} b^4 \lambda (1 - \eta_c)$ – упругие моменты инерции относительно оси z соответственно стенки и полка двутавра; $I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1)$ – поправка к упругому моменту инерции полки, характеризующая изменение его величины в результате развития в сечении зон пластичности.

Учитывая необходимые значения моментов инерции в соотношениях (6.67) и (6.71), после некоторых преобразований получим поправку к упругому моменту инерции полков:

$$I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1) = \frac{1}{16(1-\eta_c)} \{4(1+2\alpha-4\eta_c+\zeta_1) - 3(\alpha-2\beta\zeta_1-\zeta_1^2)\omega + [3\alpha-4-2(3\beta-2)\zeta_1-3\zeta_1^2]\omega^3\}, \quad (0 \leq \omega \leq 1).$$

При этом значение входящей в последнюю формулу функции ω определяется из уравнения (6.34).

В случае упруго-пластического участка нити конечной жесткости с двусторонней пластичностью вместо выражения (6.71) будем иметь:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) v'',$$

а зависимость для приведенного момента инерции соответственно примет вид

$$I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = I_z^c + I_z^n \cdot I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2).$$

Здесь, как и выше, I_z^c и I_z^n – упругие моменты инерции стенки и полков двутавра, а $I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2)$ – поправка к упругому моменту инерции полков для случая двусторонней пластичности.

Внося I_z^{yn} , I_z'' , I_z''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (6.69) и учитывая (6.71), получим следующие выражения для поправки к упругому моменту инерции:

- при $0 \leq \omega \leq 1$

$$I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16(1-\eta_c)} \{4[2(\eta-2\eta_c)+(\zeta_1+\zeta_2)] - 3[2\alpha-2\beta(\zeta_1-\zeta_2)-(\zeta_1^2+\zeta_2^2)]\omega + [3\alpha(1+\alpha^2)-4(1+\alpha^4)+4(\zeta_1+\alpha^3\zeta_2)-6\beta(\zeta_1-\alpha^2\zeta_2)-3(\zeta_1^2+\alpha^2\zeta_2^2)\omega^3]\};$$

- при $1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$

$$I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16(1-\eta_c)} \{4[\alpha-4\eta_c+2\zeta_1+\zeta_2] - 3(\alpha+2\beta\zeta_2-\zeta_2^2)\omega - \alpha^2[\alpha(8\beta+1)-2(7\beta+2)\zeta_2+3\zeta_2^2]\omega^3\}.$$

Входящее в данные соотношения значение функции ω вычисляется из соответствующих уравнений (6.35), (6.36).

В балочном варианте ($e = h$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$) выражение для поправки к упругому моменту инерции полков двутавра после упрощений примет вид

$$I'_{z,n}(\eta_c, \zeta) = \frac{1}{8(1-\eta_c)} [4(1-2\eta_c + \zeta) - 3(1-\zeta^2)\omega - (1-4\zeta + 3\zeta^2)\omega^3],$$

$$(0 \leq \omega \leq 1),$$

где ω определяется из решения уравнения (6.37).

С использованием последнего соотношения на рис.6.4, $\bar{b}$ построена серия кривых, связывающих параметр ζ с функцией $I'_{z,n} = f(\eta_c, \zeta)$ при различной величине η_c , для частного случая $b_c/b = 0,1$.

6.4.3. Тавровое сечение. Рассмотрим тавровое поперечное сечение нити конечной жесткости. Величина приращения изгибающего момента в горизонтальной плоскости с учетом выражения (6.6) и второго из соотношений (6.12) для участка нити с односторонней пластичностью будет:

$$\delta M_z = E(I_z^{yn} + I_z'' - I_{yz}'' \operatorname{ctg} \varphi) v''. \quad (6.72)$$

Последнюю зависимость можно также представить в виде

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1) v'', \quad (6.73)$$

где $I_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1) = I_z I_z'(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1)$;

$I_z = \frac{2}{3} [d^4 \lambda_1 (\eta_1 + \eta_c) + b^4 \lambda_2 (\eta_2 - \eta_c)]$ – момент инерции относительно оси z

полностью упругого поперечного сечения нити; $I_z'(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1)$ – поправка к упругому моменту инерции, характеризующая изменение его величины в результате развития в сечении зон пластической деформации.

Подставляя соответствующие значения моментов инерции в выражение (6.72), получаем:

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I_z'(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1) = \frac{1}{16[b^4 \lambda_2 (\eta_c - \eta_2) - d^4 \lambda_1 (\eta_c + \eta_1)]} \times \{16b^4 \lambda_2 (\eta_c - \eta_2) +$$

$$+ d^4 \lambda_1 [(\zeta_1^4 + 4(1 - \zeta_1^3) \alpha - 1) \omega_1^3 - 6(\zeta_1^2 + 2(1 - \zeta_1) \alpha - 1) \omega_1 -$$

$$- 8(\zeta_1 - 2(\alpha - \eta_c) + 1)]\};$$

- при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$

$$I_z'(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1) = \frac{1}{16[b^4 \omega_2 (\eta_c - \eta_2) - d^4 \omega_1 (\eta_c + \eta_1)]} \times [16b^4 \omega_2 (\eta_c - \eta_2) +$$

$$+ d^4 \omega_1 (\zeta_1^4 - 4\alpha \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2) + 8d^4 \omega_1 (\alpha - 2\eta_c - \zeta_1) + 3d^4 (4\alpha \zeta_1 \omega_1^2 - 1)],$$

где значение функции ω_1 по-прежнему вычисляется по уравнениям (6.24) и (6.25).

В случае упруго-пластического участка нити конечной жесткости с двусторонней пластичностью вместо соотношения (6.72) будем иметь:

$$\delta M_z = E[I_z^{yn} + I_z'' + I_z''' - (I_{yz}'' + I_{yz}''') \operatorname{ctg} \varphi] v'', \quad (6.74)$$

которое также можно записать следующим образом:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) v'' . \quad (6.75)$$

Аналогично предыдущему, величина $I_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2)$ представляется произведением двух членов

$$I_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = I_z I_z'(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2),$$

первый из которых, как и в случае участка нити с односторонней пластичностью, представляет собой упругий момент инерции поперечного сечения, второй – поправку к его значению, зависящую от величины областей пластичности.

Внося I_z^{yn} , I_z'' , I_z''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (6.74) для поправки к упругому моменту инерции, имеем:

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I_z'(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16[b^4\lambda_2(\eta_c - \eta_2) - d^4\lambda_1(\eta_c + \eta_1)]} \times \\ \times \{2b^4\lambda_2[3(\eta_2^2 - \alpha^2 - 2\alpha\zeta_2 - \zeta_2^2)\omega_2 - 4(\alpha + \eta_2 - 2\eta_c)] + \\ + d^4\lambda_1[(\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\alpha + 3\alpha^4 - 8\alpha^3\eta_2 + 6\alpha^2\eta_2^2 + 4\alpha - \eta_2^4 - 1)\omega_1^3 - \\ - 6(\zeta_1^2 - 2(\zeta_1 - 1)\alpha - 1)\omega_1 - 8(\zeta_1 - 2(\alpha - \eta_c) + 3)]\};$$

- при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$

$$I_z'(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16[b^4\lambda_2(\eta_c - \eta_2) - d^4\lambda_1(\eta_c + \eta_1)]} \times \\ \times \{2b^4\lambda_2[3(\eta_2^2 - \alpha^2 - 2\alpha\zeta_2 - \zeta_2^2)\omega_2 - 4(\alpha + \eta_2 - 2\eta_c + \zeta_2)] + \\ + d^4\lambda_1[(\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\alpha - (3\alpha + \eta_2)\beta^3)\omega_1^3 - 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1)\omega_1 + \\ + 8(\alpha - 2\eta_c - \zeta_1) - 3\omega_1^{-1}]\}.$$

Здесь нужно отметить, что входящее в последние зависимости значение функции ω_1 определяется из соответствующих уравнений (6.29) и (6.30).

Таким образом, для рассматриваемых задач устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости прямоугольного, двутаврового и таврового поперечного сечения получены зависимости для определения приведенных жесткостных характеристик нити при всех возможных случаях ее работы. Аналогично может быть получено решение задачи также в случаях, когда поперечное сечение принимается в виде швеллера с вертикальной или горизонтальной стенкой и уголка с неравными полками.

§ 6.5. Общие уравнения устойчивости для нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости

Рассмотрим задачу устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластической нити конечной жесткости, свободной от связей в горизонтальной плоскости. В данном случае получить уравнение устойчивости в общем виде для произвольного поперечного сечения, подобно тому, как это было сделано в главе 4 при исследовании устойчивости нити в пределах упругой работы материала, в принципе можно. Однако окончательное выражение не удастся привести к компактному и удобному для практического использования виду. Поэтому целесообразнее выводить уравнение устойчивости специально в каждом конкретном случае поперечного сечения нити.

Используя полученные выше результаты, а также принимая во внимание приведенные в главе 4 решения, можно получить уравнение устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластической нити конечной жесткости прямоугольного поперечного сечения. В случае работы нити с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, шарнирного закрепления концов на опорах и загрузки равномерно распределенными нагрузками q_1 и q_2 уравнение устойчивости может быть представлено в виде

$$(P_z^* + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0, \quad (6.76)$$

где P_z^* – приведенная критическая сила при упруго-пластическом продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega = GI_d / r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости; $\Psi(q_1, q_2)$ – характерная функция нагрузки для случая упруго-пластической потери устойчивости; $\lambda = \pi / l$.

Для входящих в зависимость (6.76) функций P_z^* и Ψ имеем выражения:

$$P_z^* = P_z P'_z = P_z \left[\frac{4}{l} \int_0^{x_1} \sin^2 \lambda x dx + \frac{4}{l} \int_{x_1}^{x_2} I'_z(\eta, \varsigma_1) \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{2}{l} \int_{x_2}^{l-x_2} I'_z(\eta, \varsigma_1, \varsigma_2) \sin^2 \lambda x dx \right]; \quad (6.77)$$

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr} \left[\int_0^{x_1} M_y \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y \sin^2 \lambda x dx \right], \quad (6.78)$$

где $P_z = EI_z \lambda^2$ – критическая сила при упругом продольном изгибе в плоскости XOY ; P'_z – поправка к значению P_z , зависящая от величины областей пластичности в поперечном сечении нити; x_1 и x_2 – координаты границы между упругим участком и участком с односторонней пластичностью, а также между участками с односторонней и двусторонней пластичностью.

При использовании приведенных формул следует иметь в виду, что координаты x_1 и x_2 определяются в результате решения задачи упруго-пластического деформирования нити конечной жесткости, а поправка к значению изгибающего момента I'_z – в соответствии с рекомендациями, содержащимися в предыдущем параграфе.

Для представления входящих в подынтегральные выражения функции Ψ изгибающих моментов M_y , как и в упругом случае, воспользуемся формулой (4.28). Тогда после некоторых преобразований получим:

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx \right]. \quad (6.79)$$

При этом необходимо только соблюдать соответствие между типом участка нити конечной жесткости (упругий, упруго-пластический с зоной односторонней пластичности и упруго-пластический с зоной двусторонней пластичности) и видом используемых в данном представлении зависимостей, характеризующих распределение балочных изгибающих моментов. Отметим, что эти соотношения приведены в работах [8, 38]. Значения интегралов в формуле (6.79) могут быть определены либо непосредственным интегрированием, либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса.

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах уравнение (6.76) преобразуется к виду

$$(4P_z^* + H) \left[P_\omega + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0. \quad (6.80)$$

Значение характерной функции нагрузки здесь будет равно:

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]. \quad (6.81)$$

Для нити конечной жесткости, загруженной начальной равномерно распределенной по всему пролету и дополнительной равномерно распределенной на левой половине пролета нагрузками, при шарнирном закреплении концов на опорах уравнения устойчивости с учетом (4.66) можно представить так:

$$(4P_z^* + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{4r^2\lambda^2} \left(q_1 e_1 + \frac{1}{2} q_2 e_2 \right) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0. \quad (6.82)$$

В последнем соотношении P_z^* и Ψ , в отличие от своих выражений в (6.77), (6.79) и (6.81), запишутся как

$$\begin{aligned} P_z^* = P_z \cdot & \left[\frac{2}{l} \int_0^{x_1} \sin^2 2\lambda x dx + \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} I'_z(\eta, \zeta_1) \sin^2 2\lambda x dx + \right. \\ & + \frac{2}{l} \int_{x_2}^{x_3} I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) \sin^2 2\lambda x dx + \frac{2}{l} \int_{x_3}^{x_4} I'_z(\eta, \zeta_1) \sin^2 2\lambda x dx + \\ & \left. + \frac{2}{l} \int_{x_4}^{l-x_4} \sin^2 2\lambda x dx \right]; \end{aligned} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned} \Psi(q_1, q_2) = \frac{2}{lr(1+kH)} & \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx + \right. \\ & + \int_{x_2}^{x_3} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx + \int_{x_3}^{x_4} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx + \left. \int_{x_4}^{l-x_4} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx \right]. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Здесь принято, что x_1 и x_2 – координаты между участками на левой половине пролета, а x_3 и x_4 – на правой половине пролета нити конечной жесткости.

Зависимости для других расчетных случаев (работа без изгиба от начальной нагрузки, иной вид поперечного сечения и др.) упруго-пластической нити конечной жесткости, свободной от связей в горизонтальной плоскости, здесь не показаны, поскольку могут быть получены аналогично приведенным.

Уравнения (6.76), (6.80) и (6.82) содержат две неизвестные величины – критическую дополнительную нагрузку q_2 (значение начальной нагрузки q_1 считается заданным и неизменным в процессе нагружения) и критический распор H . Для связи между ними используем, как и при упругой работе материала, уравнение неразрывности деформаций (4.30). Очевидно, что данное соотношение вполне правомочно, поскольку, во-первых, нить под действием любой дополнительной, в том числе и критической, нагрузки деформируется

в плоскости XOZ , во-вторых, оно получено на основании чисто геометрических соображений, поэтому справедливо при любом характере зависимости между напряжением и деформацией. Однако в данном случае уравнение (4.30) должно быть раскрыто иначе.

Полагая, что удлинение нити конечной жесткости происходит за счет растяжения ее оси, ΔL может быть вычислено следующим образом:

$$\Delta L = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx, \quad (6.85)$$

где первый член правой части представляет собой удлинение оси нити от начальной и дополнительной нагрузок, а второй – только от начальной нагрузки.

Внося с учетом [62, 103] в соотношение (4.30) значения длин нити, а также принимая во внимание (6.85), для уравнения неразрывности деформаций получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l (w'_0)^2 dx = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx, \quad (6.86)$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{2(1+kH)} \int_0^l \left(\frac{dw^\delta}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2(1+kH_0)} \int_0^l \left(\frac{dw_0^\delta}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx. \quad (6.87)$$

Подставляя сюда соответствующие выражения для балочного прогиба ω^δ [38], удлинения оси нити ε (см. главу 5) и решая полученное уравнение совместно с уравнениями устойчивости (6.76), (6.80) и (6.82), находим значения критического распора H и критической дополнительной нагрузки q_2 непосредственно в каждом конкретном случае работы упруго-пластической нити конечной жесткости. При этом, как указывалось выше, должно соблюдаться соответствие между типом участка нити и видом используемых при интегрировании уравнения (6.87) функций ω^δ и ε .

§ 6.6. Общие уравнения устойчивости для нити, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости

Методика, применяемая при выводе уравнений устойчивости упруго-пластической нити конечной жесткости, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости, остается такой же, как и в случае нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости.

Рассмотрим нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, шарнирно закрепленную на опорах, загруженную равномерно распределенными нагрузками q_1 , q_2 и имеющую

прямоугольное поперечное сечение. Тогда на основании (4.57) и с использованием приведенных выше решений уравнение устойчивости, после некоторых преобразований, может быть представлено в виде

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \Psi(q_1, q_2) = 0. \quad (6.88)$$

Здесь, как и прежде, приведенная критическая сила при упруго-пластическом продольном изгибе P_z^* определяется по формуле (6.77), а для характерной функции нагрузки Ψ находим:

$$\begin{aligned} \Psi(q_1, q_2) = \frac{8e_c}{l(1+kH)} & \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx \right]. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Напомним, что в зависимостях (6.88) и (6.89) через e_c обозначено расстояние от точки раскрепления нити до центра тяжести ее поперечного сечения.

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах вместо уравнения (6.88) будем иметь:

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(4P_z^* + H) + \frac{3}{4\lambda^2} [(e_1 - e_c) q_1 + (e_2 - e_c) q_2] - \Psi(q_1, q_2) = 0, \quad (6.90)$$

а вместо выражения (6.89) соответственно

$$\begin{aligned} \Psi(q_1, q_2) = \frac{8e_c}{l(1+kH)} & \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \right. \\ & \left. + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]. \end{aligned} \quad (6.91)$$

В случае действия на раскрепленную в горизонтальной плоскости упруго-пластическую нить конечной жесткости несимметричной нагрузки (начальная нагрузка q_1 равномерно распределена по всему пролету, а дополнительная нагрузка q_2 равномерно распределена только на левой половине пролета) и при шарнирном закреплении концов на опорах уравнение устойчивости приводится к виду

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(4P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \Psi(q_1, q_2) = 0, \quad (6.92)$$

причем для приведенной критической силы P_z^* сохраняется вид (6.83), а выражение для характерной функции нагрузки будет отличаться от соответствующей зависимости (6.84) только на постоянный коэффициент $2e_c/r$.

Уравнения устойчивости для других случаев работы упруго-пластических нитей конечной жесткости не приводятся, так как методика их получения понятна.

Для связи между содержащимися в зависимостях (6.82), (6.90) и (6.92) критическим распором H и критической дополнительной нагрузкой q_2 будем использовать, как и в случае нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости, уравнение неразрывности деформаций (6.87).

Таким образом, полностью определено поведение нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала при потере устойчивости плоской формы деформирования, а также установлены зависимости для нахождения критического распора и критической дополнительной нагрузки при различных случаях ее работы. Аналогично может быть получено решение задачи при любом другом виде поперечного сечения, опорных закреплениях и характере внешней нагрузки.

ГЛАВА 7

РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ ПОВЫШЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 7.1. Методика расчета висячих систем

Большепролетные пространственные комбинированные висячие системы повышенной жесткости обладают рядом специфических особенностей, связанных с объединением в единую конструкцию элементов различной структуры, мерности и жесткости, например, вантовых сетей, нитей конечной жесткости и мембран и заключающихся в их большой кинематической подвижности и высокой деформативности в процессе нагружения. Поэтому указанные системы и задачи их расчета являются геометрически нелинейными. Методика расчета висячих систем основана на специально построенных нелинейных соотношениях метода конечных элементов и является частным случаем (задача статики) сильнонелинейных эволюционных задач взаимодействия деформируемых тел, решение которых сводится к моделированию изменения свойств и структуры системы при ее нагружении. В такой постановке параметр времени служит параметром продолжения решения и в зависимости от вида задачи может трактоваться как реальное время или как ведущий параметр воздействия [71, 75, 88].

В соответствии с таким подходом описание нелинейного деформирования висячих систем повышенной жесткости удобно выполнить аналогично описанию движения сплошной среды в пространстве и во времени [139–141]. Для получения разрешающих соотношений воспользуемся вариационным принципом Гамильтона [89, 172], с помощью которого вариационное уравнение движения сплошной среды может быть представлено в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_v \delta U dv + \int_v \rho \ddot{\vec{R}} \cdot \delta \vec{R} dv - \int_v \vec{p} \cdot \delta \vec{R} dv \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_s \vec{q} \cdot \delta \vec{R} ds = 0. \quad (7.1)$$

С другой стороны, для любого момента времени t вместо соотношения (7.1) будем иметь:

$$\int_v \delta U dv + \int_v \rho \ddot{\vec{R}} \cdot \delta \vec{R} dv - \int_v \vec{p} \cdot \delta \vec{R} dv - \int_s \vec{q} \cdot \delta \vec{R} ds = 0. \quad (7.2)$$

В уравнениях (7.1) и (7.2) первый член представляет собой вариацию энергии деформации, второй – вариацию работы инерционных сил, а третий и четвертый – вариации работы внешних объемных и поверхностных сил. Кроме того, здесь приняты следующие обозначения: δU – вариация удельной энергии деформации; $\ddot{\vec{R}}$ и $\vec{R}$ – соответственно вектор ускорений и радиус-вектор материальной точки тела; $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – обобщенные векторы объемных и поверхностных сил; v и s – соответственно объем и поверхность тела; ρ – плотность.

Начальные условия задачи (7.2) задаются в момент времени $t = t_0$

$$\vec{R}(t_0) = \vec{R}_0, \quad \vec{\dot{R}}(t_0) = \vec{\dot{R}}_0, \quad \hat{\sigma}(t_0) = \hat{\sigma}_0, \quad \hat{\gamma}(t_0) = \hat{\gamma}_0, \quad \rho(t_0) = \rho_0. \quad (7.3)$$

Значительная геометрическая нелинейность рассматриваемых систем при наличии больших перемещений обуславливает необходимость учета в расчетах конечных приращений деформаций. Для этого в соответствии с [143] введем понятие фиксируемых конфигураций сплошной среды как трехмерного тела в зависимости от его состояния. Рассмотрим три состояния тела в процессе его деформирования:

- *натуральное* – напряжения и деформации отсутствуют;
- *начальное* – тело находится в состоянии равновесия под действием начальных внешних нагрузок и воздействий;
- *конечное* – тело при дополнительных внешних нагрузках и воздействиях приходит в новое состояние равновесия.

Каждому из перечисленных состояний тела соответствует своя фиксируемая конфигурация:

- C_0 в момент времени $t = 0$;
- C_t в момент времени $t = t$;
- $C_{t+\Delta t}$ в момент времени $t = t + \Delta t$.

В качестве отсчетной принимаем конфигурацию C_t , соответствующую начальному состоянию тела. Введем далее в рассмотрение две системы координат: глобальную декартовую Z^1, Z^2, Z^3 и местную криволинейную лагранжевую x^1, x^2, x^3 . Тогда положение произвольной точки в фиксируемых конфигурациях задается непрерывными и требуемое число раз дифференцируемыми вектор-функциями

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2, x^3), \quad \vec{\bar{r}} = \vec{\bar{r}}(x^1, x^2, x^3), \quad \vec{\bar{R}} = \vec{\bar{R}}(x^1, x^2, x^3), \quad (7.4)$$

которые в глобальной системе координат записываются с помощью формул

$$\vec{r} = Z^{i'} \vec{e}_{i'}; \quad \vec{\bar{r}} = Z^{i'} \vec{\bar{e}}_{i'}; \quad \vec{\bar{R}} = Z^{i'} \vec{\bar{e}}_{i'}^*, \quad (7.5)$$

где $\vec{e}_{i'}$ – единичные масштабные векторы-орты глобальной системы координат, а функции $Z^{i'}$, $Z^{i'}$ и $Z^{i'}$ определяются соотношением

$$Z^{i'} = Z^{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad Z^{i'} = Z^{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad Z^{i'} = Z^{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad (7.6)$$

причем однозначность функций (7.6) обеспечивается неравенством нулю их якобианов [89].

Базисные векторы для фиксируемых конфигураций тела запишем в виде

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{\partial}}{\partial x^i}, \quad \bar{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}, \quad \bar{e}_i^* = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^i}. \quad (7.7)$$

Компоненты метрических тензоров каждого из состояний в свою очередь определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = C_i^{k'} C_j^{m'} \delta_{k'm'}, \quad G_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = C_i^{n'} C_j^{s'} \delta_{n's'}, \\ G_{mn}^* = e_m^* \cdot e_n^* = C_m^{t'} C_n^{f'} \delta_{t'f'}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где $C_i^{n'}$ – компоненты тензора преобразования из глобальной в местную систему координат; δ_{mn} – символ Кронекера.

Деформацию сплошной среды можно представить как изменение длин и направлений векторов, отнесенных к отсчетной конфигурации [89],

$$ds^r = d\vec{r} \cdot \hat{G} \cdot d\vec{r}, \quad (7.9)$$

где $d\vec{r} = dx^s d\vec{e}_s$; $\hat{G} = G_{sk} \vec{e}^s \vec{e}^k$ – мера деформации Коши-Грина.

В соответствии с выбранной отсчетной конфигурацией введем вектор приращений перемещений

$$\vec{u} = \vec{R} - \vec{r}. \quad (7.10)$$

В силу сильной геометрической нелинейности рассматриваемых задач используем тензор конечных деформаций Коши-Грина

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2} \left(G_{sk}^* - G_{sk} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T + \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}^T), \quad (7.11)$$

где $\nabla \vec{u} = \nabla_i u_j \vec{e}^i \vec{e}^j$.

Представим функцию удельной энергии деформации в виде скалярной функции тензорного аргумента второго ранга с учетом ее индифферентности [34] как

$$U = U(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{12}^2, \dots, \varepsilon_{31}). \quad (7.12)$$

Тогда, задавая ε_{ij} бесконечно малые приращения $\delta \varepsilon_{ij}$ при неизменном t , можно получить выражение функции удельной энергии деформации вместо конфигурации C_t в близкой ей конфигурации $C_{t+\Delta t}$. Для этого представим полиномиальную функцию (7.12) разложением в ряд Тейлора с удержанием трех членов ряда [172]

$$U(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) = U(\varepsilon_{ij}) + \hat{U}_{\hat{\varepsilon}} \cdots \delta\varepsilon + \frac{1}{2} \delta\hat{\varepsilon}^T \cdots \hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} \cdots \delta\hat{\varepsilon}^T, \quad (7.13)$$

где $\delta\hat{\varepsilon}^T = \delta\varepsilon_{mn} \bar{e}^m \bar{e}^n$; $\hat{U}_{\hat{\varepsilon}} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{st}} \bar{e}^s \bar{e}^t$ – тензор второго ранга;

$\hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{st}} \bar{e}^m \bar{e}^n \bar{e}^s \bar{e}^t$ – тензор четвертого ранга.

Представляя напряжения и внешние воздействия в приращениях и вводя известные обозначения [89]

$$\hat{U}_{\hat{\varepsilon}} = \hat{\sigma}', \quad \hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \hat{C}_4, \quad \delta\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma}, \quad (7.14)$$

соотношение для вариации удельной энергии деформации относительно отсчетной конфигурации приводится к следующему виду:

$$\delta U = (\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma}) \cdot \delta\hat{\gamma}, \quad (7.15)$$

где $\hat{\sigma}'$ – второй симметричный тензор начальных напряжений Пиола-Кирхгоффа; $\hat{\gamma}$ – тензор конечных деформаций Коши-Грина.

Подставляя соотношение (7.15) в формулу (7.2) и учитывая выражение (7.10), приходим к уравнению

$$\int_v (\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma}) \cdot \delta\hat{\gamma} dv + \int_v \rho \bar{u} \cdot \delta \bar{u} dv - \int_v \bar{p} \cdot \delta \bar{u} dv - \int_s \bar{q} \cdot \delta \bar{u} ds = 0. \quad (7.16)$$

При статических воздействиях вариация работы инерционных сил равна нулю и принцип Гамильтона сводится к принципу минимума потенциальной энергии сплошной среды (принципу Лагранжа)

$$\delta \Pi = \delta W - \delta A = 0, \quad (7.17)$$

откуда имеем

$$\int_v (\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma}) \cdot \delta\hat{\gamma} dv - \int_v \bar{p} \cdot \delta \bar{u} dv - \int_s \bar{q} \cdot \delta \bar{u} ds = 0. \quad (7.18)$$

Последнее выражение является исходным для получения основных соотношений метода конечных элементов.

§ 7.2. Разрешающие уравнения метода конечных элементов

Принимая во внимание допущение о постоянстве объемных и поверхностных сил в пределах конечных элементов [112], выражение вариации полной потенциальной энергии можно представить таким образом:

$$\delta \Pi = \sum_L [(R_L^{k'})_{\text{с.г.}} + (R_L^{k'})_{\text{м.}} + (R_L^{k'})_{\text{с.ж.}} - P_L^{k'} - Q_L^{k'}] \delta u_{k'}^L, \quad (7.19)$$

где $(R_L^{k'})_{\text{с.г.}}$, $(R_L^{k'})_{\text{м.}}$, $(R_L^{k'})_{\text{с.ж.}}$ – коэффициенты матриц реакций соответственно стержня, воспринимающего растяжение-сжатие, мембраны и стержня, воспринимающего растяжение-сжатие с изгибом; $P_L^{k'}$ – компоненты вектора объемных узловых сил; $Q_L^{k'}$ – компоненты вектора поверхностных узловых сил.

Распространим в (7.19) суммирование по всем конечным элементам дискретной модели висячей системы повышенной жесткости

$$\sum_{\Omega} \left\{ \sum_L [(R_L^{k'})_{\text{с.г.}} + (R_L^{k'})_{\text{м.}} + (R_L^{k'})_{\text{с.ж.}} - P_L^{k'} - Q_L^{k'}] \delta u_{k'}^L = 0 \right. \quad (7.20)$$

и, переходя затем от суммирования по элементам к суммированию по всем узлам дискретной модели, получим:

$$\sum_N [(R_N^{k'})_{\text{с.г.}} + (R_N^{k'})_{\text{м.}} + (R_N^{k'})_{\text{с.ж.}} - P_N^{k'} - Q_N^{k'}] \delta u_{k'}^N = 0, \quad (7.21)$$

$$(N = 1, 2, \dots, M)$$

где M – общее число узлов дискретной модели.

Отсюда в силу независимости вариаций перемещений $\delta u_{k'}^N$ получаем систему нелинейных уравнений равновесия:

$$\sum_{N=1}^M [(R_N^{k'})_{\text{с.г.}} + (R_N^{k'})_{\text{м.}} + (R_N^{k'})_{\text{с.ж.}} - P_N^{k'} - Q_N^{k'}] = 0, \quad (7.22)$$

решая которую можно определить неизвестные значения параметров напряженно-деформированного состояния висячей системы повышенной жесткости.

§ 7.3. Алгоритмы решения нелинейных задач

7.3.1. Общие положения. Как было показано в предыдущем параграфе, равновесное состояние конечноэлементной модели висячей конструкции повышенной жесткости описывается системой нелинейных уравнений высокого порядка (7.22). Обычно для решения таких систем используются различные итерационные методы, которые можно трактовать как методы установления решения дифференциального уравнения, описывающего некоторый нестационарный процесс [137]. При таком подходе задача статики висячей системы сводится к задаче отыскания равновесных состояний динамической дискретной модели, уравнение движения которой на данном шаге нагружения имеет вид [69]

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + \{F(u)\} - \{Q(u)\} = 0, \quad (7.23)$$

где $[M]$ и $[C]$ – матрицы, интерпретируемые как матрицы масс и вязкого демпфирования конечноэлементной модели; $\{F(u)\}$ и $\{Q(u)\}$ – векторы обобщенных внутренних и внешних сил дискретной модели конструкции; $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$ – векторы ускорений, скоростей и неизвестных приращений перемещений (точкой обозначена операция дифференцирования по времени t).

Решение уравнения (7.23) считается полученным, когда дискретная модель приходит в равновесное положение, соответствующее значению приложенных внешних нагрузок. Одновременно должны выполняться требования равенства нулю уравнений равновесия и вектора скорости системы

$$\{F(u)\} - \{Q(u)\} = 0, \quad \{\dot{u}\} = 0. \quad (7.24)$$

Скорость решения и, как следствие, общий объем вычислительных операций зависят от многих факторов: демпфирующих свойств модели, эффективности алгоритма численного интегрирования (7.23), выбора матриц $[M]$, $[C]$ и параметров алгоритма интегрирования [139].

Результаты большого количества выполненных численных экспериментов и решения различных сильнонелинейных задач [76, 78, 178, 191–194, 215, 218] показывают, что наиболее целесообразным применительно к исследованию рассматриваемых конструкций является использование не одного, хотя и эффективного итерационного метода, а их комбинации. В этом случае окончательное решение задачи достигается поэтапно на основе ряда последовательных решений, каждое из которых есть не что иное, как начальное приближение к последующему этапу решения. В предлагаемой схеме исследования висячих систем повышенной жесткости в такой взаимодополняющей комбинации используются методы установления, динамической и вязкой релаксации [171], дискретных торможений [69], Ньютона, Ньютона-Рафсона и Ньютона-Канторовича [72], а также их различные модификации.

7.3.2. Особенности построения алгоритмов расчета висячих систем.

При построении алгоритмов решения (7.23) воспользуемся следующими аппроксимационными формулами:

$$\begin{aligned} \{\dot{u}^{n+1}\} &= \{\dot{u}^n\} + [(1-\alpha)\{\ddot{u}^n\} + \alpha\{\ddot{u}^{n+1}\}] \Delta t, \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \{\dot{u}^n\} \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{u}^n\} + \beta \{\ddot{u}^{n+1}\} \right] \Delta t^2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

В зависимости от значений параметров α , β можно получить различные неявные и явные разностные схемы. Так, при $\alpha = 1/2$ и $\beta = 1/4$ уравнения (7.25) приводятся к виду

$$\left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} = \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\} + \Delta t \{ \ddot{u}^n \}; \quad \{ u^{n+1} \} = \{ u^n \} + \Delta t \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\}, \quad (7.26)$$

что соответствует представлению скоростей и ускорений через центральные разности

$$\left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} = \frac{\{ u^{n+1} \} - \{ u^n \}}{\Delta t}; \quad \{ \ddot{u}^n \} = \frac{\left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} - \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\}}{\Delta t}. \quad (7.27)$$

Как правило, в уравнении (7.23) в качестве матриц $[M]$ и $[C]$ выбираются диагональные матрицы, элементы которых пропорциональны диагональным коэффициентам матрицы жесткости системы уравнений равновесия, представление которых выглядит следующим образом:

$$[M] = \rho[D], \quad [C] = c[D], \quad [D] = \text{diag}[K],$$

$$[K] = \left[\frac{\partial (\{F(u)\} - \{Q(u)\})}{\partial \{u\}} \right]_{\{u\}=0}, \quad (7.28)$$

где ρ – фиктивная плотность системы; c – коэффициент вязкого сопротивления.

Подставляя в (7.27) вычисленные по (7.23) значения компонент вектора ускорений в точке n , а также используя (7.28) и среднее значение вектора скоростей вида

$$\{ \dot{u}^n \} = \frac{1}{2} \left(\left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\} \right),$$

получим рекуррентные формулы метода динамической релаксации:

$$\left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} = \frac{2 - c\Delta t/\rho}{2 + c\Delta t/\rho} \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\} - \frac{2\Delta t/\rho}{2 + c\Delta t/\rho} [D]^{-1} (\{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\});$$

$$\{ u^{n+1} \} = \{ u^n \} + \Delta t \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (7.29)$$

Известны другие варианты методов установления. Соотношения метода вязкой релаксации [171] могут быть получены из (7.23) при $[M] \equiv 0$, $[C] = c[E]$, $\alpha = 1$ (неявная разностная схема для параболического уравнения):

$$c^{n+1}[E]\{\dot{u}^{n+1}\} + \{F(u^{n+1})\} - \{Q(u^{n+1})\} = 0;$$

$$\{\dot{u}^{n+1}\} = \frac{1}{\Delta t}(\{u^{n+1}\} - \{u^n\}), \quad (7.30)$$

где $[E]$ – единичная матрица.

Матрица Якоби для нелинейной системы (7.30) в точке n имеет вид

$$\left. \frac{\partial \left(c^{n+1}[E] \frac{1}{\Delta t} (\{u^{n+1}\} - \{u^n\}) + \{F(u^{n+1})\} - \{Q(u^{n+1})\} \right)}{\partial \{u^{n+1}\}} \right|_{(n)} = \frac{c^n}{\Delta t} [E] + [K^n]. \quad (7.31)$$

Тогда решение уравнения (7.30) сводится к итерациям типа Ньютона по формулам

$$\left([K^n] + \frac{c^n}{\Delta t} [E] \right) \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\} = -\{F(u_i^{n+1})\} + \{Q(u_i^{n+1})\} - c^n [E] \{\dot{u}_i^{n+1}\};$$

$$\{u_{i+1}^{n+1}\} = \{u_i^{n+1}\} + \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\};$$

$$\{\dot{u}_{i+1}^{n+1}\} = \frac{\{u_{i+1}^{n+1}\} - \{u^n\}}{\Delta t}. \quad (7.32)$$

При решении сильнонелинейных задач численная устойчивость и более высокая скорость сходимости итерационного процесса обеспечивается если пренебречь членом $c^n [E] \{\dot{u}_i^{n+1}\}$ в правой части (7.32). При этом оператором-регуляризатором итерационного процесса является матрица $c^n [E] / \Delta t$. При $\Delta t = 1$ и $c^n = 0$ алгоритм (7.32) сводится к непосредственному решению системы (7.24) методом Ньютона-Рафсона.

В методе дискретных торможений [69] установление решения системы (7.23) обеспечивается не только учетом диссипативных сил, но и введением в процессе численного интегрирования дискретного затухания (торможения) в те моменты времени, когда система «проскакивает» равновесное положение. В моменты торможения, которые характеризуются локальными максимумами кинетической энергии системы, скорости всех точек системы приравняются нулю.

Применительно к расчету висячих систем повышенной жесткости реализованы и исследованы следующие варианты итерационных методов.

1. Метод дискретных торможений на основе явной разностной схемы без дополнительной диссипации:

$$\begin{aligned}\left\{\dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}}\right\} &= \left\{\dot{u}^{n-\frac{1}{2}}\right\} - \frac{\Delta t}{\rho} [D]^{-1} (\{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\}); \\ \left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\} &= H(\Delta T_0^n) \left\{\dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}}\right\} + (H(\Delta T_0^n) - 1) \frac{\Delta t [D]^{-1}}{\rho} (\{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\}); \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \Delta t \left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\},\end{aligned}\quad (7.33)$$

где $\Delta T_0^n = \left\{\dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}}\right\}^T [D] \left\{\dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}}\right\} - \left\{\dot{u}^{n-\frac{1}{2}}\right\} [D] \left\{\dot{u}^{n-\frac{1}{2}}\right\}$ – приращение кинетической энергии системы; $H(\Delta) = \begin{cases} 0, & \Delta < 0 \\ 1 & \Delta \geq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

2. Метод дискретных торможений с использованием соотношений неявной разностной схемы (7.31) в сочетании с методом Ньютона:

$$\begin{aligned}\left\{\dot{u}_{(0)}^{n+\frac{1}{2}}\right\} &= \left\{\dot{u}_{(0)}^{n-\frac{1}{2}}\right\} - \frac{\Delta t}{\rho} [K^{(n)}]^{-1} \{h(u^n)\}; \\ \left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\} &= H(\Delta) \left\{\dot{u}_{(0)}^{n+\frac{1}{2}}\right\} + (H(\Delta) - 1) \frac{\Delta t}{\rho} [K^{(n)}]^{-1} \{h(u^n)\}; \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \Delta t \left\{\dot{u}_{(0)}^{n+\frac{1}{2}}\right\},\end{aligned}\quad (7.34)$$

где $\{h(u^n)\} = \{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\}$.

3. Метод дискретных торможений в сочетании с методом динамической релаксации (7.29):

$$\begin{aligned}\left\{\dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}}\right\} &= \frac{2 - c\Delta t/\rho}{2 + c\Delta t/\rho} \left\{\dot{u}^{n-\frac{1}{2}}\right\} - \frac{2\Delta t/\rho}{2 + c\Delta t/\rho} [D]^{-1} (\{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\}); \\ \left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\} &= H(\Delta T_0^n) \left\{\dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}}\right\} + (H(\Delta T_0^n) - 1) \frac{\Delta t}{2\rho} [D]^{-1} (\{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\}); \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \Delta t \left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\}.\end{aligned}\quad (7.35)$$

4. Метод дискретных торможений в сочетании с покоординатным дискретным демпфированием, при котором приравнивается нулю коэффициент вязкости $c_{(i)}$, соответствующий i -му уравнению в формулах (7.35), при движении точки к своему положению равновесия, а не от него:

$$c_{(i)} = H \left(\left(\dot{u}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(\dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right) c. \quad (7.36)$$

5. Метод Ньютона-Канторовича:

$$\begin{aligned} ([K^n] + c^n[E]) \{\Delta u_i^{n+1}\} &= \{Q(u_i^{n+1})\} - \{F(u_i^{n+1})\}, \\ \{u_{i+1}^{n+1}\} &= \{u_i^{n+1}\} + \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\}, \end{aligned} \quad (7.37)$$

где $[K^n]$ – линеаризованная матрица жесткости конечноэлементной модели; $[E]$ – единичная матрица.

Здесь необходимо отметить, что при выводе формул (7.37) было принято, что $\Delta t = 1$, а также что матрица $[K^n]$ совпадает с матрицей Якоби системы (7.24) в начальной точке $n + 1$ -го шага нагружения при $\{u_0^{n+1}\} = 0$ и остается постоянной.

Сходимость указанных итерационных процессов контролируется по норме вектора невязки $(\{\ddot{u}^{n+1}\})^2$, а итерационный процесс считается законченным, если $(\{\ddot{u}^{(n+1)}\})^2 < \varepsilon$, где ε – некоторая наперед заданная малая величина.

7.3.3. Метод продолжения по параметру возмущения в сочетании с методом Ньютона-Канторовича. Можно показать, что если при решении системы уравнений вида

$$[K]\{u\} - \{R\} = 0 \quad (7.38)$$

на каждой итерации метода динамической релаксации выбрать параметры c , Δt и матрицы $[M]$, $[C]$ такими, чтобы минимизировать потенциальную энергию системы

$$\Pi = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{R\} \quad (7.39)$$

в направлении, определяемом векторами $\{\ddot{u}\}$ и $\{\dot{u}\}$, то метод динамической релаксации сводится к двухшаговому методу сопряженных градиентов. В этом случае $\{\ddot{u}\}$ определяет направление, противоположное градиенту функции (7.39), а $\{\dot{u}\}$ – сопряженное к нему направление.

Известно, что для хорошей сходимости метода сопряженных градиентов матрица $[K]$ должна быть положительно определенной и хорошо обусловленной [171]. В ином случае итерационный процесс не сходится из-за накопления ошибок округления. Один из способов улучшения сходимости метода сопряженных градиентов заключается в том, что после J итераций (J – порядок системы) предлагается начинать процесс сначала. В такой модификации метод сопряженных градиентов становится аналогичным методу дискретных торможений. Однако в последнем методе моменты торможений определяются по локальным максимумам кинетической энергии, а не назначаются через фиксированное число шагов.

Для решения нелинейных систем с хорошим начальным приближением более экономичными являются неявные методы типа Ньютона. Путем численных экспериментов установлено [73], что для задач рассматриваемого класса начальный вектор является приемлемым если при решении системы модифицированным методом Ньютона-Канторовича с постоянной матрицей Якоби время, затраченное на итерации, не превышает более чем в 1,5–2 раза время, необходимое для ее вычисления и триангуляции. В ином случае необходимо уменьшить шаг нагружения, а при чрезмерном уменьшении шага перейти к методу дискретных торможений.

При решении задач статики висячих систем повышенной жесткости величины приращений внешнего воздействия обычно принимаются такими, что приращения перемещений, полученные на предыдущих одном-двух шагах, могут служить основой для экстраполяции начального приближения вектора приращений перемещений на новом шаге нагружения. В этом случае естественно предпочтительнее метод Ньютона. Однако для его сходимости кроме приемлемого начального приближения требуется еще и хорошая обусловленность матрицы $[K]$, что, как известно, не имеет места в начальных стадиях нагружения, когда еще не достигнут достаточный уровень предварительного напряжения висячей системы. Плохой обусловленностью обладают также линеаризованные матрицы жесткости комбинированных висячих систем и систем со специальными дополнительными условиями, исключаемыми с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа.

Стремление расширить область применения метода Ньютона привело к необходимости развития алгоритмов, основанных на его комбинации с методами регуляризации, применяемыми при решении некорректно поставленных эллиптических задач, методами расчленения [1] и групповой релаксации [171]. Если в (7.32) принять

$$\frac{c[E]}{\Delta t} \equiv c^{(n)}[E]; \quad \Delta t = 1; \quad (i_i^{n+1}) \equiv 0, \quad (7.40)$$

то индекс n становится номером шага по параметру нагружения и рекуррентную формулу итераций на $(n+1)$ -м шаге продолжения можно записать в виде

$$([K^{(n)}] + c^{(n)}[E]) \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\} = \{Q(u_i^{n+1})\} - \{F(u_i^{n+1})\};$$

$$\{u_{i+1}^{n+1}\} = \{u_i^{n+1}\} + \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\}, \quad (7.41)$$

где $c^{(n)}$ – коэффициент регуляризации на n -м шаге; $[K^{(n)}]$ – линеаризованная матрица жесткости дискретной модели; $\{\Delta u_{i+1}^{n+1}\}$ – приращения перемещений на i -й итерации $n+1$ -го шага. Матрица жесткости системы линеаризованных уравнений равновесия дискретной модели $[K^{(n)}]$ совпадает с матрицей Якоби (7.31) в начальной точке $n+1$ -го шага нагружения при $\{u_0^{n+1}\} = 0$ и остается постоянной.

Сущность различных способов регуляризации сводится к тому, чтобы отфильтровать решения, обуславливающие неустойчивость итерационного процесса, при этом коэффициент регуляризации должен удовлетворять условию

$$\lambda_{\min}^{(n)} \ll c^{(n)} \ll \lambda_{\max}^{(n)}, \quad (7.42)$$

где $\lambda^{(n)}$ – собственные значения матрицы $[K^{(n)}]$.

Значения $\lambda_{\max}^{(n)}$, $\lambda_{\min}^{(n)}$ можно оценить, анализируя диагональные коэффициенты треугольной матрицы, полученной в результате факторизации $[K^{(n)}]$ методом Холецкого [47].

Увеличение скорости сходимости итерационного процесса метода Ньютона при данном способе регуляризации обеспечивается введением демпфирующего множителя, который согласно принципам построения итерационных процессов можно классифицировать как множитель нижней релаксации. Величину этого множителя определяем по аналогии с методом групповой координатной релаксации [171], когда в качестве группы рассматривается вся исходная система. Управление релаксацией заключается в выборе уравнения с ведущим индексом I_k на каждом шаге продолжения, исходя из результатов предыдущего шага. Для определения ведущего индекса на $n+1$ -м шаге используется условие, аналогичное применяемому в релаксационной процедуре Гаусса [171]. При этом невязка уравнения с ведущим индексом подчиняется условию

$$\frac{\left(Q_{I_k}^{(n-1)} - F_{I_k}^{(n-1)}\right)^2}{(K_{I_k I_k})^2} \geq \frac{\left(Q_I^{(n-1)} - F_I^{(n-1)}\right)^2}{(K_{II})^2}; \quad I = 3(N-1) + i';$$

$$i' = 1, 2, 3; \quad N = 1, 2, \dots, M; \quad I_k = 3(N-1) + i'. \quad (7.43)$$

Значение коэффициента релаксации на $n+1$ -м шаге нагружения для уравнения с ведущим индексом определяется по формуле градиентного метода с минимальными невязками, что соответствует методу нижней релаксации [171],

$$q_{I_k} = \frac{(\{R\}^T [K] \{R\})^2}{(\{R\}^T [K]^T [K] \{R\})(\{R\}^T \{R\})} \leq 1, \quad (7.44)$$

где $\{R\} = \{F(u)\} - \{Q(u)\}$.

В (7.44) знак равенства возможен только в том случае если $\{R\}$ будет собственным вектором матрицы $[K]$. Значения остальных коэффициентов релаксации определяются по формуле

$$q_I = 1 - (1 - q_{I_k}^{(n)}) \left(\frac{R_I^{(n-1)} K_{I_k I_k}}{R_{I_k}^{(n-1)} K_{II}} \right)^2. \quad (7.45)$$

Таким образом, введенные множители нижней релаксации изменяются в интервале

$$q_{I_k} \leq q_I \leq 1, \quad (7.46)$$

а рекуррентная формула (7.41) в компонентной форме с учетом демпфирующих множителей имеет вид

$$\begin{aligned} \left[K_{NL}^{i'j'(n)} + c^{(n)} \delta^{i'j'} n_{(N)}^{(i')} \delta_{NL} \right] \Delta \tilde{u}_{i'}^{L(n,m+1)} &= Q_N^{j'(n,m)} - F_N^{j'(n,m)}; \\ \tilde{u}_{i'}^{L(n,m+1)} &= \tilde{u}_{i'}^{L(n,m)} q_{(i')}^{(L)} \Delta \tilde{u}_{i'}^{L(n,m+1)}; \quad N = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (7.47)$$

где $n_{(N)}^{(i')}$ – компоненты вектора единичной нормали к поверхности системы в узле N ; $K_{NL}^{i'j'(n)}$ – коэффициенты матрицы жесткости конечноэлементной модели; M – число узлов дискретной модели; $q_{(i')}^{(L)} \equiv q_I$, $I = 3(L-1) + i'$.

7.3.4. Комбинированный алгоритм расчета висячих систем. Известно, что метод Ньютона-Канторовича весьма эффективен и обладает высокой скоростью сходимости итерационного процесса при одном условии – ему требуется начальное весьма близкое приближение решения [139]. Данное обстоятельство применительно к висячим системам связано с их большой кинематической подвижностью и высокой деформативностью, что приводит к ухудшению обусловленности и даже в некоторых случаях – к вырожденности матрицы жесткости $[K]$ системы линеаризованных уравнений. Особенно это характерно для начальных этапов расчета, когда еще не достигнут достаточ-

ный для увеличения жесткости конструкции уровень напряженного состояния. В этих случаях используется метод дискретных торможений, обеспечивающий достаточно быструю сходимость и высокую гибкость вычислительного процесса относительно вида нелинейности [69]. В указанном методе, как уже отмечалось, решение системы (7.23) обеспечивается не только учетом диссипативных сил, но и введением в процессе численного интегрирования дискретного затухания (торможения) в те моменты времени, когда система «проскакивает» равновесное положение. Иными словами, в моменты торможения, которые характеризуются локальными максимумами кинетической энергии системы, скорости всех точек приравняются нулю. Однако и здесь также желательно предварительное задание параметров начального напряженно-деформированного состояния конструкции, поскольку в противном случае как время счета, так и число итераций вычислительного процесса могут неоправданно возрасти.

Учитывая изложенное выше, схема комбинированного алгоритма исследования деформирования висячих систем повышенной жесткости, включает следующие этапы:

- 1) предварительное определение параметров напряженно-деформированного состояния основных несущих элементов висячей системы с помощью решений, представленных в главе 3 настоящего издания;
- 2) уточнение полученного на первом этапе напряженно-деформированного состояния для всей висячей системы методом дискретных торможений;
- 3) решение задачи методом Ньютона-Канторовича с учетом определенного на втором этапе напряженно-деформированного состояния системы;
- 4) дополнительный этап, на котором при необходимости производится решение задачи с учетом итогового напряженно-деформированного состояния конструкции от статических нагрузжений на специфические, неучтенные ранее нагрузки и воздействия, например, ветровые, сейсмические и пр.

§ 7.4. Реализация методики исследования висячих систем

Для решения проблемных задач прочности сильнонелинейных конструкций используется вычислительный комплекс ПАРУС [71, 75, 77, 187, 213], включающий специализированные программы, предназначенные для исследования статики и динамики пространственных систем. Ведущим в решениях рассматриваемых задач является метод конечных элементов.

Исследование нелинейного деформирования сложных объектов методом конечных элементов сводится к решению больших систем нелинейных уравнений, что сопряжено со значительными математическими трудностями. Решение данной проблемы реализуется на основе двух подходов: глобальной редукции исходных уравнений равновесия конечноэлементных моделей с помощью энергетических методов [139] и декомпозиции (фрагментации).

Декомпозиция расчетной модели позволяет использовать конечные элементы различной мерности и жесткости, локальные сгущения расчетной сети, а также различные шаги ведущего параметра алгоритма в пределах каждого фрагмента. На самом высоком уровне декомпозиции выделяются взаимодействующие объекты. Последующие уровни реализуются по различным признакам: размерности задачи, структуре объектов, однородности или неоднородности физико-механических свойств, условиям работы отдельных элементов конструкции, топологическим признакам дискретной модели и др. Выбор схемы дискретизации определяется типом фрагмента.

В процессе расчета осуществляется последовательное рассмотрение отдельных фрагментов на основе содержащейся информации о нагрузках, граничных условиях, физико-механических характеристиках и др. Граничные условия фрагментов могут приниматься в виде ограничений на все или некоторые компоненты перемещений, а также в виде уравнений связи в обобщенных неизвестных на границах. Одной из основных характеристик фрагмента является тип используемого базового элемента, оптимально моделирующего фрагмент. Информация, идентифицирующая тип базового элемента, содержит следующие характеристики: количество узлов, число неизвестных в узле, тип и число степеней свободы конечного элемента, количество и тип независимых физико-механических констант и пр.

Используемый для расчета всяких систем повышенной жесткости комплекс программ является одной из ветвей вычислительного комплекса ПАРУС и ориентирован на исследование всяких конструкций, включающих фрагменты стержней, воспринимающих растяжение-сжатие (ванты) и растяжение-сжатие с изгибом (нити конечной жесткости), а также мембран. Одна из основных задач комплекса – исследование напряженно-деформированного состояния указанных конструкций с учетом больших перемещений и деформаций на основе шагового интегрирования уравнений движения дискретных моделей. Эти задачи, как было отмечено в предыдущем параграфе, решаются на основе взаимодополняющей комбинации методов установления, динамической и вязкой релаксации, дискретных торможений, Ньютона, Ньютона-Рафсона и Ньютона-Канторовича, а также их различные модификации.

Комплекс программ базируется на современных принципах построения системного математического обеспечения, таких как модульная организация основных алгоритмов и программ, универсальность и незамкнутость по отношению к применению новых типов конечных элементов и вычислительных алгоритмов, высокая степень автоматизации всех этапов расчета, а также удобство и наглядность средств подготовки и контроля исходных данных.

Укрупненная блок-структура комплекса программ представлена на рис. 7.1. Блок управления вычислительным процессом осуществляет управление ходом решения задачи, последовательно вызывая программные блоки.

Блок задания исходных данных производит полное определение всех параметров, необходимых для решения задачи: реализует разбивку конструкции на фрагменты, а фрагментов – на конечные элементы и задает информацию об их связях с узлами дискретной модели (т.е. определяет топологическую структуру конструкции), производит задание геометрических данных, физико-механических и жесткостных характеристик, граничных условий, внешних воздействий и др.

Блок обработки, контроля и отображения исходных данных систематизирует их задание, производит анализ и поиск возможных вкрапшихся ошибок по тем или иным формальным признакам, а также по выбору пользователя выдает или не выдает исходные данные на то или иное устройство (экран дисплея, печатающее устройство или графопостроитель).

Блок решения системы нелинейных уравнений равновесия в соответствии с принятой схемой алгоритма исследования деформирования висячих систем повышенной жесткости производит непосредственное решение системы уравнений, определение параметров напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов висячей системы, а также в случае необходимости – учет дополнительных воздействий. При этом из программных модулей, реализующих соотношения метода конечных элементов для стержней и мембран, автоматически выбираются те, которые необходимы для решения данной конкретной задачи.

Блок обработки и анализа результатов расчетов производит их систематизацию и формальный анализ на соответствие тем или иным заранее заданным характерным признакам, соответствующим реальному процессу деформирования висячей системы повышенной жесткости.

Блок отображения результатов расчетов производит запись на магнитные носители и выдачу полученных в результате решения задачи параметров напряженно-деформированного состояния висячей конструкции по желанию пользователя на экран дисплея, печатающее устройство или графопостроитель. Принятые формы выдачи и представления результатов решения задачи позволяют значительно сократить трудоемкость их обработки и анализа.

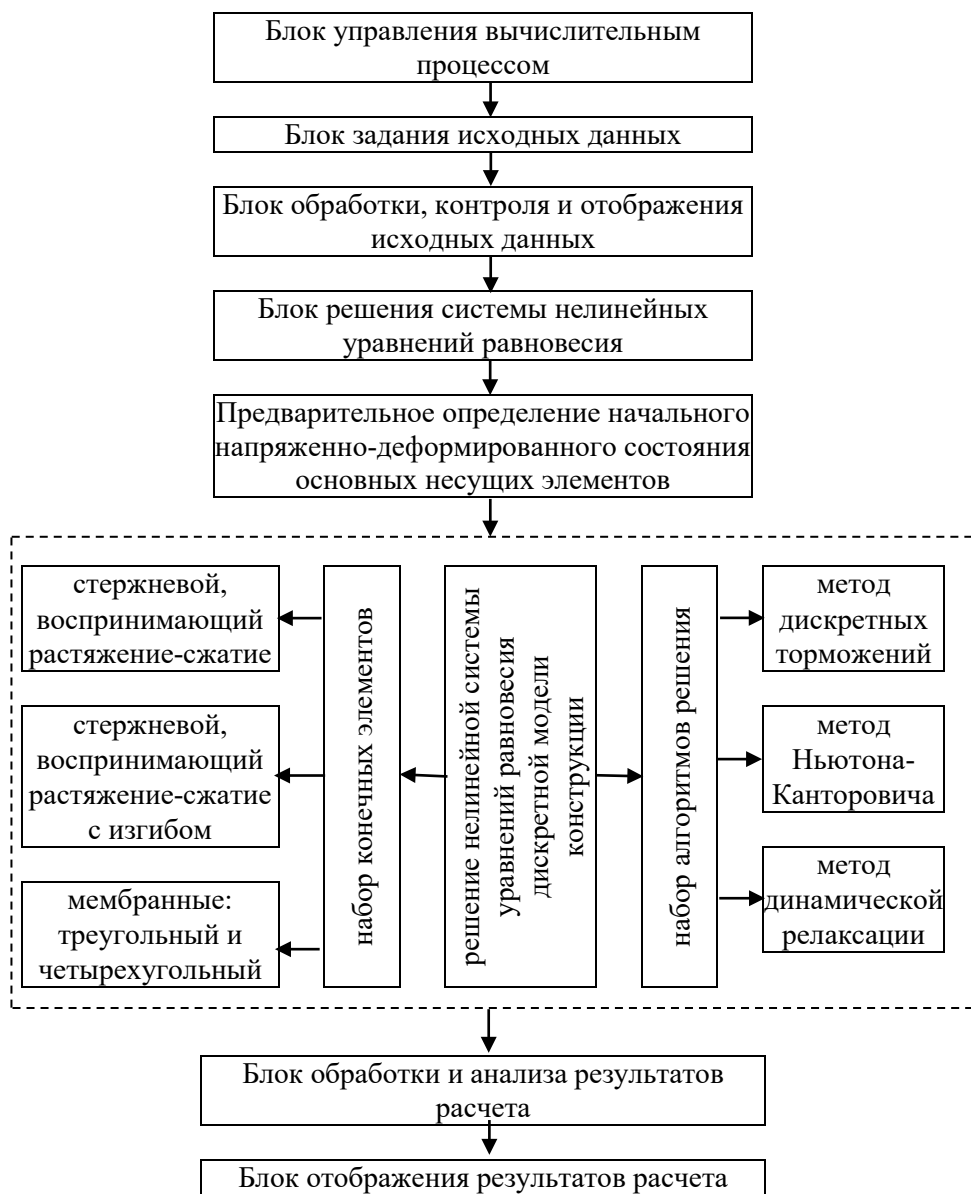


Рис. 7.1. Укрупненная блок-структура комплекса программ расчетов
висячих систем повышенной жесткости

ГЛАВА 8

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 8.1. Работа нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций

Напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости зависит от многих факторов: характера и величины дополнительной нагрузки, стрелы провисания, жесткости нити на растяжение и изгиб, способа закрепления концов нити на опорах и др. Для изучения влияния указанных факторов на работу нитей конечной жесткости проводились численные исследования.

В качестве объекта исследований были приняты нити в виде стальных труб пролетом 30 м с шарнирным и жестким закреплением концов на опорах. Наружный диаметр труб 26,8; 60,0 и 89,0 мм при толщине стенки соответственно 2,8; 3,5 и 4,0 мм. При исследовании стрела провисания нитей варьировалась в пределах $1/10$ – $1/40$ пролета. Модуль упругости материала стенок труб равен $2,1 \cdot 10^7$ Н/см².

8.1.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете.

Ниже приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния нитей при различной стреле провисания и жесткости на изгиб при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис. 8.1 – 8.4).

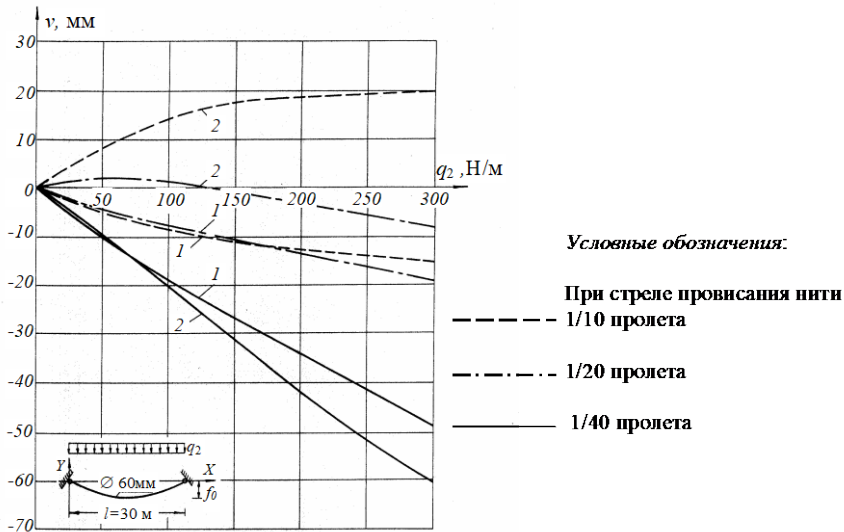


Рис. 8.1. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

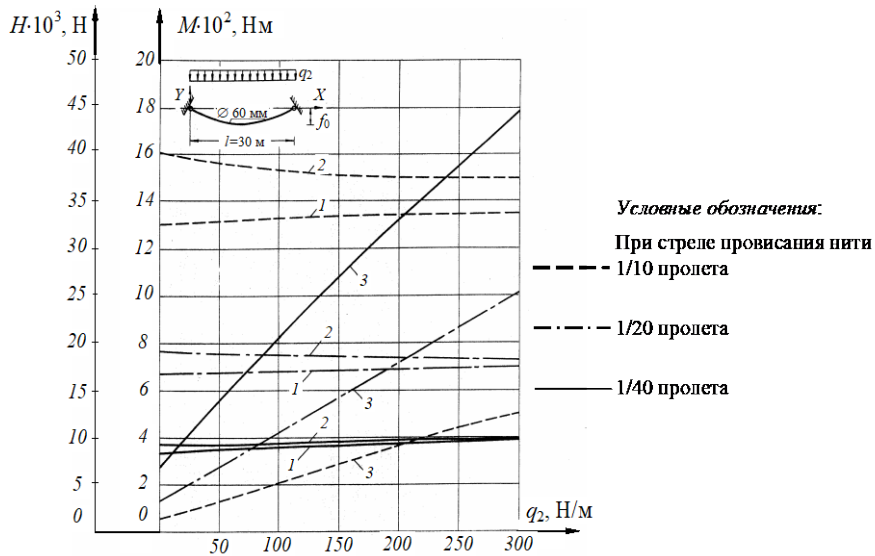


Рис. 8.2. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 — изгибающий момент в четверти пролета;
2 — то же, в середине пролета; 3 — распор

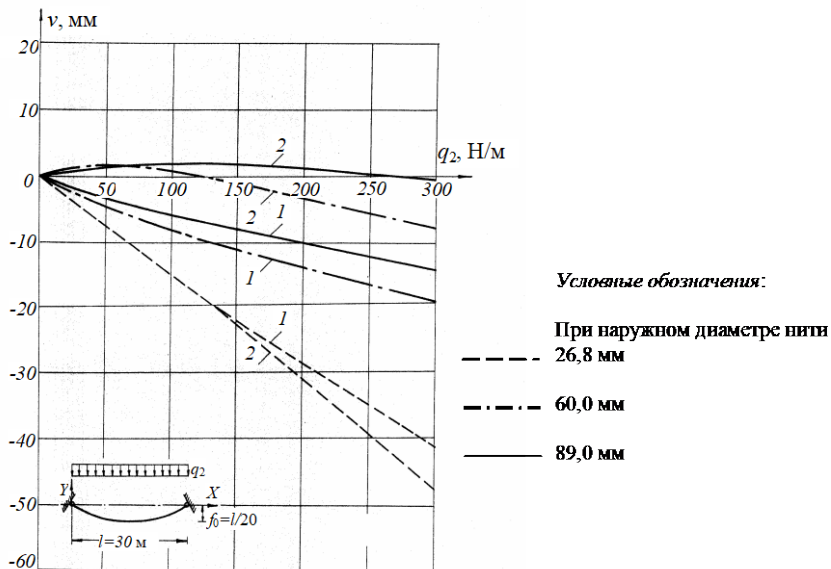


Рис. 8.3. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 — в четверти пролета; 2 — в середине пролета

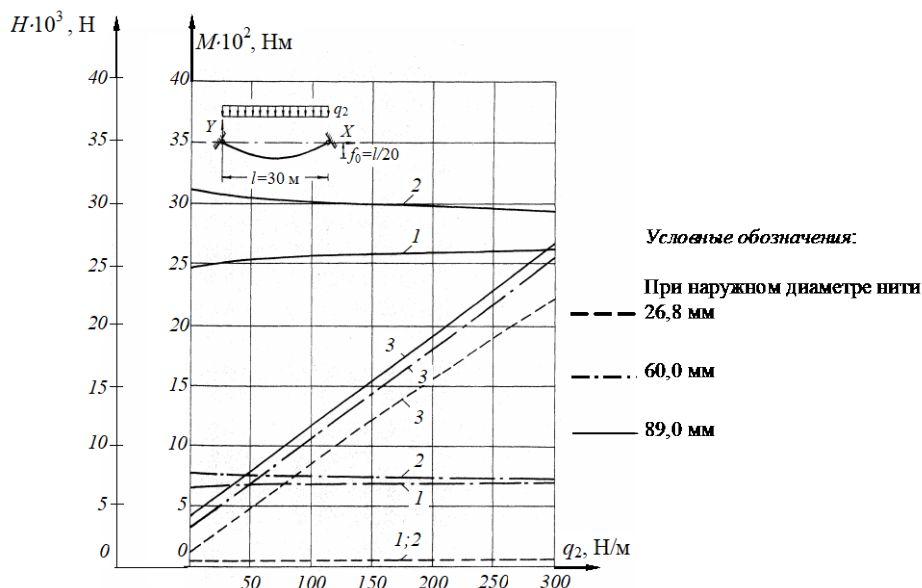


Рис. 8.4. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 – изгибающий момент в четверти пролета;
2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

Из рис. 8.1 видно, что изменение стрелы провисания существенно сказывается не только на значениях вертикальных перемещений нити, но и на их направлении. С увеличением стрелы провисания отрицательные перемещения нити уменьшаются, а в середине пролета даже становятся положительными. Если при стреле провисания $1/40$ пролета нить перемещается вниз как в четверти, так и в середине пролета при всех рассмотренных значениях интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки, то при стреле провисания $1/20$ пролета нить в середине пролета перемещается вниз при значении интенсивности дополнительной нагрузки более 130 Н/м . При меньшей дополнительной нагрузке нить в середине пролета перемещается вверх. При стреле провисания $1/10$ пролета нить в середине пролета перемещается вверх при всех рассмотренных значениях интенсивности дополнительной нагрузки, причем с увеличением интенсивности дополнительной нагрузки положительные перемещения нити в середине пролета также увеличиваются. При увеличении стрелы провисания нити с $1/40$ до $1/20$ пролета (при интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) отрицательные перемещения нити в середине пролета уменьшаются в $7,4$ раза, а в четверти пролета – в $2,5$ раза. При увеличении стрелы провисания с $1/20$ до $1/10$ пролета отрицательные перемещения нити в четверти пролета уменьшаются в $1,3$ раза, а в середине пролета изменяют знак.

Такой характер деформирования нити конечной жесткости можно объяснить тем, что при увеличении стрелы кривая провисания нити все более отличается от квадратной параболы, а дополнительная равномерно распреде-

ленная нагрузка, приближая форму нити к параболическому очертанию, способствует приподниманию нити в середине пролета и опусканию в четвертях.

Изменение усилий, действующих в нити, связано с изменением стрелы провисания почти прямо пропорциональной зависимостью (см. рис. 8.2). Так, увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/20$ пролета приводит к уменьшению распора и увеличению изгибающих моментов в четверти и середине пролета в 1,8 раза. При дальнейшем увеличении стрелы провисания с $1/20$ до $1/10$ пролета происходит уменьшение распора и увеличение изгибающих моментов в четверти и середине пролета в 2 раза. При увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки происходит выравнивание значений изгибающих моментов в четверти и середине пролета. Выравнивание изгибающих моментов объясняется приближением формы кривой провисания нити под нагрузкой к параболическому очертанию.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки близка к линейной. При этом увеличение интенсивности нагрузки в 6 раз (с 50 до 300 Н/м) вызывает увеличение распора в 3,2 раза при стреле провисания $1/40$ пролета, в 3,7 раза – при стреле провисания $1/20$ пролета и в 3,9 раза – при стреле провисания $1/10$ пролета. Причем при увеличении распора действующий в нити изгибающий момент практически не меняется.

Влияние жесткости нити на ее деформативность показано на рис. 8.3. Как и стрела провисания, жесткость нити влияет не только на перемещения, но и на их направление. С увеличением жесткости отрицательные перемещения нити в четверти и середине пролета уменьшаются. Так, при увеличении наружного диаметра нити с 26,8 до 60,0 мм (и интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) отрицательные перемещения в четверти пролета уменьшаются в 2,2 раза, а в середине – в 5,8 раза. При увеличении наружного диаметра с 60,0 до 89,0 мм уменьшение отрицательных перемещений нити в четверти и середине пролета составило соответственно 1,4 и 16,2 раза.

Кривые изменения распора и изгибающих моментов для нитей различной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки показаны на рис. 8.4. Зависимость распора от интенсивности дополнительной нагрузки близка к линейной. Причем приращение распора во всех трех образцах при увеличении интенсивности нагрузки от 0 до 300 Н/м близко к одному значению. С увеличением жесткости нити увеличиваются действующие в ней изгибающие моменты. Так, изгибающие моменты в нити наружным диаметром 89,0 мм (при интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) превышают изгибающие моменты в нити наружным диаметром 60,0 мм в 4 раза. В свою очередь, моменты в нити наружным диаметром 60,0 мм больше моментов в нити наружным диаметром 26,8 мм в 13 раз. При увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки происходит выравнивание действующих в нити изгибающих моментов.

8.1.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета. На рис. 8.5 – 8.8 показаны зависимости перемещений нити и действующих в ней усилий при различной стреле провисания и жесткости нити от дополнитель-

ной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета.

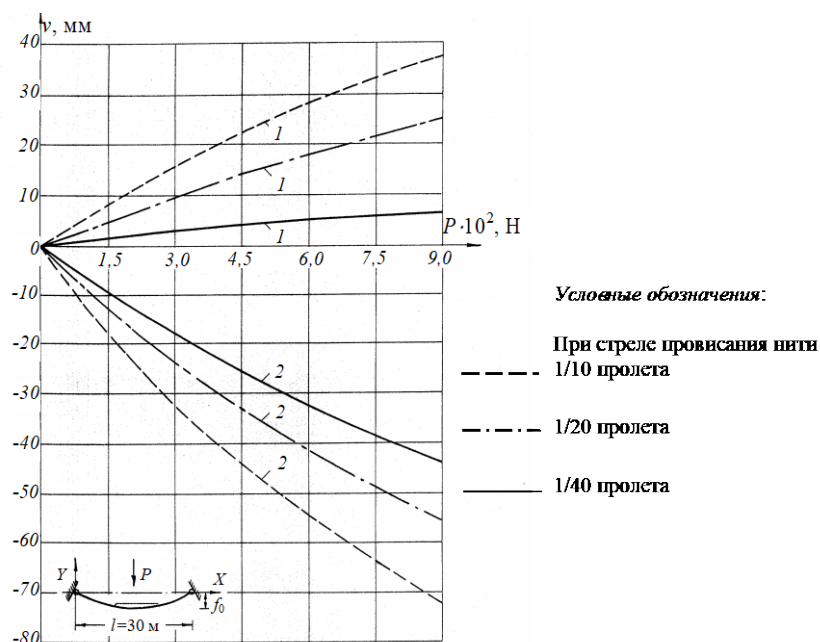


Рис. 8.5. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

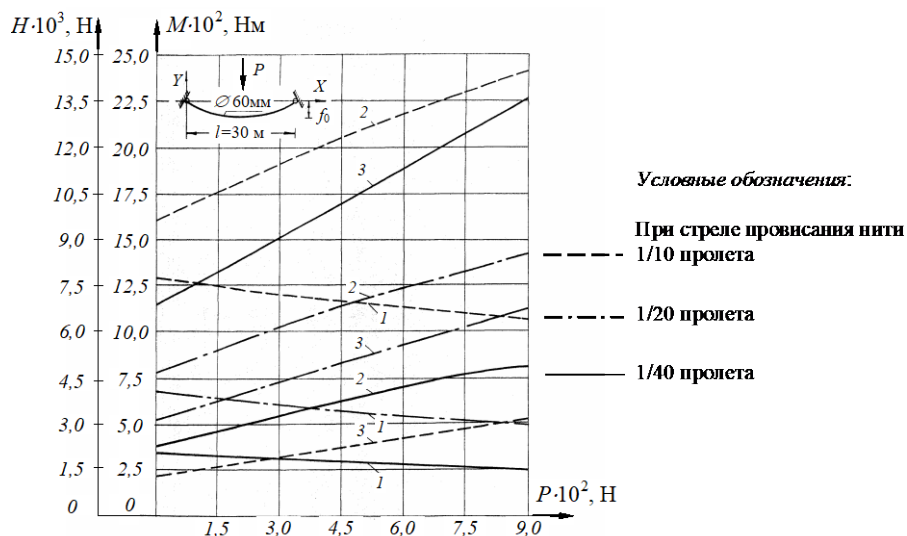


Рис. 8.6. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – изгибающий момент в четверти пролета;

2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

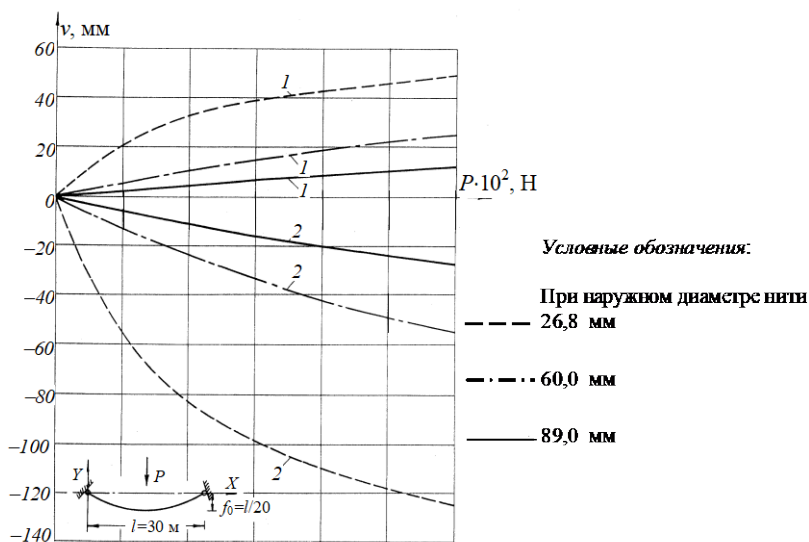


Рис. 8.7. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

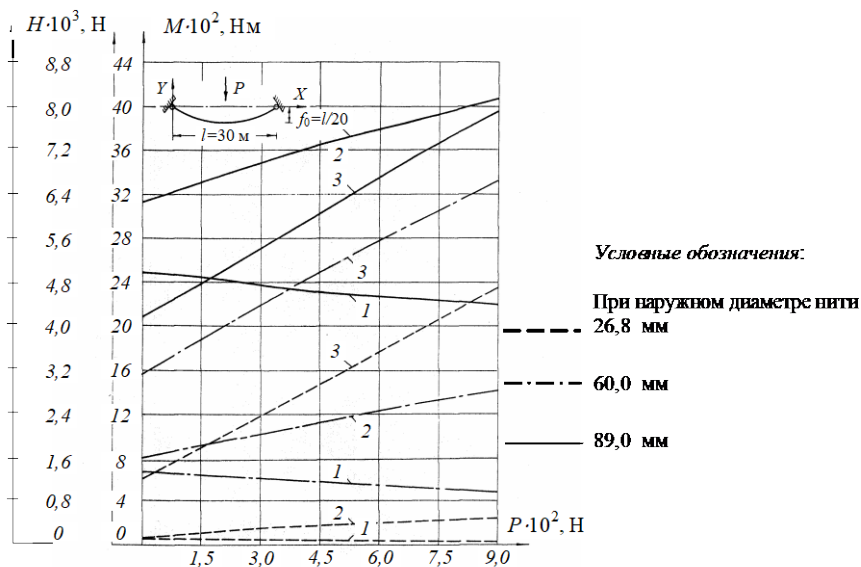


Рис. 8.8. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – изгибающий момент в четверти пролета;
2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

Из рис. 8.5 видно, что перемещения нити при разных стрелах провисания имеют одинаковый характер: в середине пролета нить резко опускается, а в четверти пролета – поднимается. С увеличением сосредоточенной силы увеличиваются перемещения как в четверти, так и в середине пролета нити. Так, при увеличении сосредоточенной силы со 150 до 900 Н перемещения нити при стреле провисания $1/40$ пролета увеличились в четверти пролета в 4,1 раза, при стреле провисания $1/20$ пролета – в 5,3 раза и при стреле провисания $1/10$ пролета – в 5 раз. В середине пролета перемещения увеличиваются в 4,5 раза при всех стрелах провисания. Увеличение стрелы провисания при постоянном значении сосредоточенной нагрузки также приводит к увеличению перемещений, несмотря на то, что при этом уменьшаются перемещения, вызванные упругими деформациями нити. Так, при увеличении стрелы провисания с $1/40$ до $1/10$ пролета (при сосредоточенной нагрузке 900 Н) перемещения нити в четверти пролета увеличиваются в 5,7 раза, а в середине пролета – в 1,6 раза. Такое явление деформации нити конечной жесткости можно объяснить большой кинематической податливостью нити, т.е. изменением формы ее равновесия.

Зависимости усилий, действующих в нити, от сосредоточенной нагрузки показаны на рис. 8.6. С увеличением сосредоточенной силы увеличение распора в нити при всех стрелах провисания растет почти линейно. Изгибающие моменты, действующие в нити в точке приложения сосредоточенной нагрузки, значительно увеличиваются. Они более чем в 2 раза превышают изгибающие моменты, действующие в четверти пролета нити. С увеличением сосредоточенной силы происходит увеличение изгибающих моментов в середине и уменьшение в четверти пролета. С уменьшением стрелы провисания изгибающие моменты уменьшаются. Так, уменьшение стрелы провисания с $1/10$ до $1/20$ пролета приводит к уменьшению изгибающих моментов в четверти и середине пролета соответственно в 4,3 и 3 раза.

На рис. 8.7 изображены зависимости вертикальных перемещений при различных жесткостях нити от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета. Как видно из рис. 8.7, жесткость нити влияет только на перемещения, направление их остается постоянным; в четверти пролета нить перемещается вверх, а в середине – вниз. Наибольшие перемещения получает нить наружным диаметром 26,8 мм. Они превышают перемещения нити наружным диаметром 60,0 мм в 1,9–2,2 раза, а перемещения нити наружным диаметром 89,0 мм – в 4,1–4,7 раза.

Влияние жесткости нити на возникающие в ней усилия при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета, показано на рис. 8.8, откуда видно, что жесткость нити почти не влияет на возникающий в ней распор. Так, при увеличении сосредоточенной силы от 0 до 900 Н распор увеличивается на 3550 Н для всех рассматриваемых образцов.

Большее влияние оказывает жесткость нити на изгибающие моменты и на отношения моментов в середине пролета к моментам в четверти пролета. С увеличением жесткости нити это отношение уменьшается. Так, если для нити наружным диаметром 26,8 мм момент в середине пролета превышает момент в четверти пролета в 17 раз, то для нити наружным диаметром 60,0 мм это превышение со-

ставляет 2,8 раза, а для нити наружным диаметром 89,0 мм – 1,9 раза.

8.1.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета. Результаты исследования напряженно-деформированного состояния нитей при различной стреле провисания и жесткости на изгиб при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета, показаны на рис. 8.9 – 8.12.

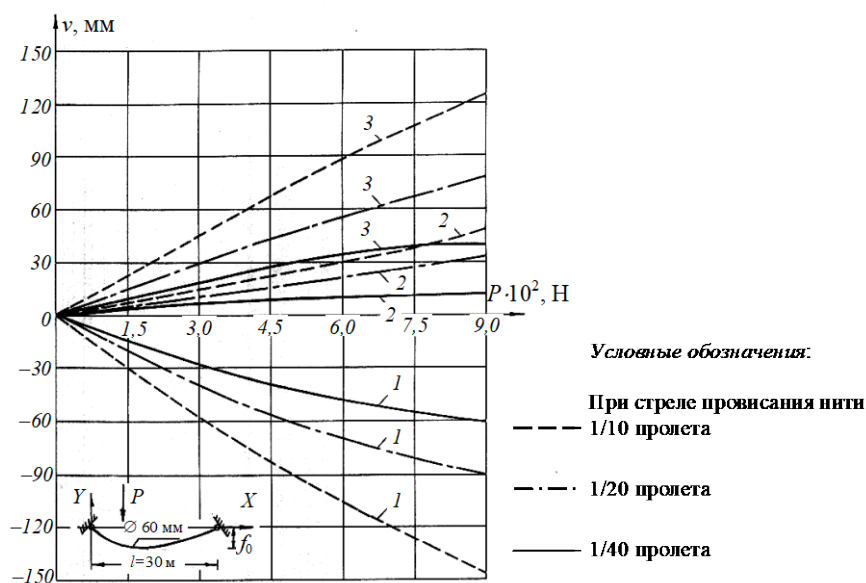


Рис. 8.9. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета:
1 – в загруженной четверти пролета; 2 – в середине пролета;
3 – в незагруженной четверти пролета

Несимметричная нагрузка сильно влияет на характер деформирования нитей конечной жесткости. На рис. 8.9 построены графики вертикальных перемещений нити при различных стрелах провисания. Из рис. 8.9 видно, что нить в загруженной четверти пролета резко опускается вниз, а в середине и незагруженной четверти пролета – поднимается вверх. Значения отрицательных перемещений в 2 раза, а положительных – в 3 раза превосходят значение соответствующих перемещений нити, находящейся под действием дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета. Перемещения нити с увеличением стрелы провисания увеличиваются. Так, при увеличении стрелы провисания с 1/40 до 1/10 пролета перемещения нити в загруженной четверти пролета увеличиваются в 2,5 раза, а в середине и незагруженной четверти пролета – соответственно в 3,8 и 3,1 раза. При этом перемещения нити в незагруженной четверти пролета превышают перемещения в середине пролета в 2,5 раза при всех стрелах провисания.

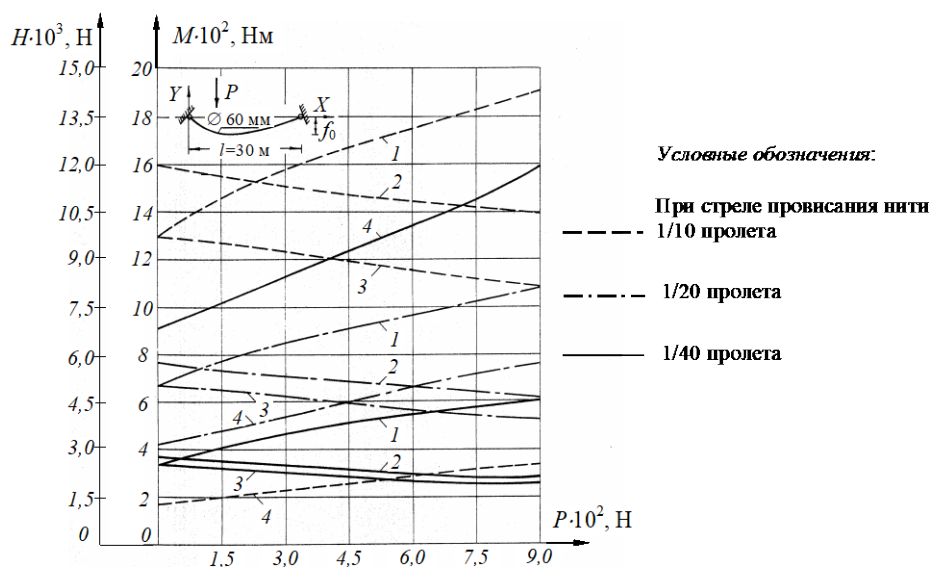


Рис. 8.10. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – изгибающий момент в загруженной четверти пролета; 2 – то же, в середине пролета; 3 – то же, в незагруженной четверти пролета; 4 – распор

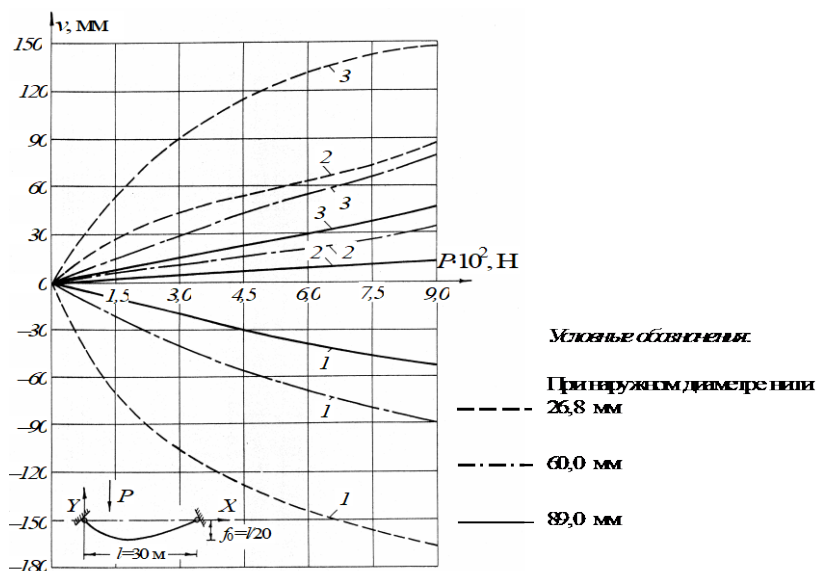


Рис. 8.11. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – в загруженной четверти пролета; 2 – в середине пролета;

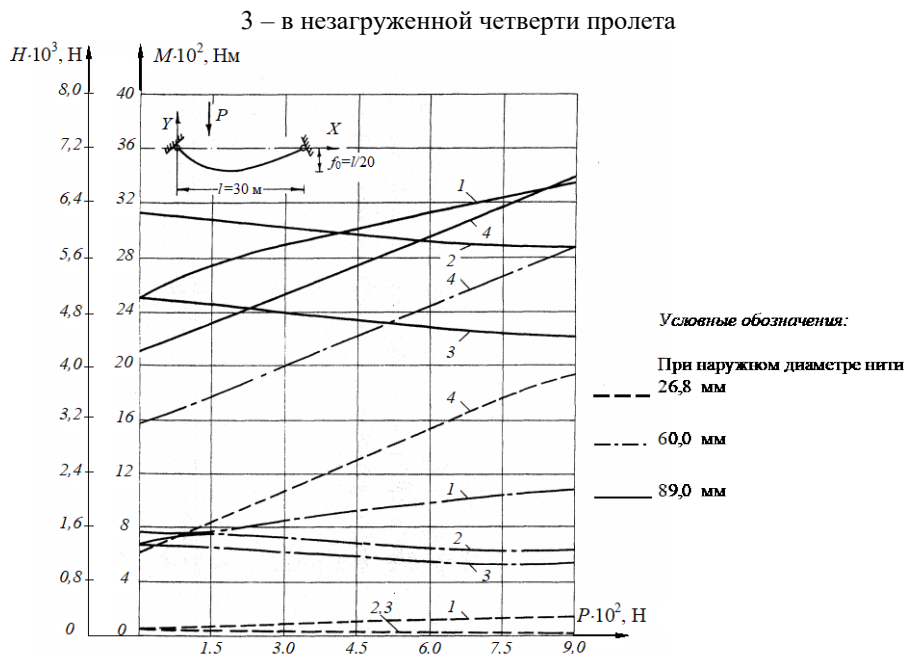


Рис. 8.12. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – изгибающий момент в загруженной четверти пролета; 2 – то же, в середине пролета; 3 – то же, в незагруженной четверти пролета; 4 – распор

Графики усилий, действующих в нити конечной жесткости, при различных стрелах провисания построены на рис. 8.10. Зависимость распора от дополнительной сосредоточенной нагрузки при всех стрелах провисания близка к линейной. При этом распор достигает несколько меньшего значения, чем в нити под действием симметричной сосредоточенной нагрузки. Распор уменьшается примерно на 20 % при всех стрелах провисания.

При увеличении сосредоточенной нагрузки происходит увеличение изгибающих моментов в загруженной четверти пролета и уменьшение изгибающих моментов в середине и незагруженной четверти пролета. Так, при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н момент в загруженной четверти пролета увеличивается в 1,6 раза, а в середине и незагруженной четверти пролета уменьшается в 1,2 раза. Следует отметить, что при несимметричной нагрузке максимальные значения изгибающих моментов меньше, чем в нити под действием симметричной сосредоточенной нагрузки (при одном и том же значении сосредоточенной силы). Изгибающие моменты уменьшаются примерно на 30 % при всех стрелах провисания.

Влияние жесткости нити на перемещения и возникающие в ней усилия при действии сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета, показано на рис. 8.11 и 8.12. Из рис. 8.11 видно, что характер деформирования для нитей различной жесткости одинаков: в загруженной четверти про-

лета нить опускается вниз, а в середине и в незагруженной четверти пролета – поднимается вверх. Уменьшение жесткости нити приводит к увеличению перемещений. Так, перемещения нити наружным диаметром 26,8 мм превышают перемещения нити наружным диаметром 60,0 мм в 1,8–2,6 раза, а перемещения нити наружным диаметром 89,0 мм – в 3,2–6,9 раза. По сравнению с нитью, находящейся под действием дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета, отрицательные перемещения нити возрастают в 1,4–2,0 раза, а положительные – в 3,0–3,9 раза. Причем с увеличением жесткости нити разность между перемещениями возрастает.

Зависимость распора от сосредоточенной нагрузки близка к линейной (см. рис. 8.12). Причем жесткость нити почти не влияет на распор. Так, при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н распор во всех нитях увеличился на 2600 Н.

Более существенно влияет жесткость нити на изгибающий момент. Так, при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н изгибающий момент в загруженной четверти пролета увеличился в 3,2 раза для нити наружным диаметром 26,8 мм, в 1,6 раза – для нити наружным диаметром 60,0 мм и в 1,3 раза – для нити наружным диаметром 89,0 мм. Одновременно происходит уменьшение изгибающего момента в середине и незагруженной четверти пролета в 2,8 и 2,1 раза – для нити наружным диаметром 26,8 мм, в 1,3 раза – для нити наружным диаметром 60,0 мм и в 1,1 раза – для нити наружным диаметром 89,0 мм.

8.1.4. Анализ результатов исследований. Анализ данных численных исследований позволяет сделать следующие выводы:

- характер дополнительной нагрузки заметно влияет на деформативность нитей конечной жесткости. Если при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки нить перемещается в вертикальной плоскости в основном за счет упругих деформаций, то при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине и, в особенности, в четверти пролета, перемещения нити в вертикальной плоскости происходят в основном за счет изменения формы кривой провисания, а именно: нагруженная часть нити (четверть и середина пролета) перемещается вниз, а ненагруженная часть нити и, в особенности, ее четверть пролета – вверх. При этом в ненагруженной части нити наблюдаются также значительные осевые перемещения;

- дополнительная равномерно распределенная нагрузка вызывает значительное увеличение распора при незначительном изменении изгибающего момента. Причем изгибающий момент, действующий в четверти пролета, увеличивается, а в середине пролета – уменьшается;

- дополнительная сосредоточенная нагрузка при незначительном увеличении распора вызывает значительное увеличение изгибающих моментов, действующих в сечениях нити, расположенных непосредственно под нагрузкой. Причем изгибающие моменты быстро уменьшаются при удалении от

места приложения нагрузки;

- удаление дополнительной сосредоточенной нагрузки от середины пролета приводит к увеличению перемещений и уменьшению изгибающих моментов и распора в нити;
- жесткое закрепление концов нити на опорах, мало влияя на общее напряженно-деформированное состояние нити, резко уменьшает перемещения и увеличивает изгибающие моменты в приопорных участках длиной до 0,05 пролета. Влияние жесткого закрепления увеличивается с увеличением жесткости нити и стрелы ее провисания;
- увеличение стрелы провисания увеличивает перемещения и действующие в нити изгибающие моменты при одновременном уменьшении распора;
- жесткость нити практически не сказывается на распоре. С увеличением жесткости уменьшаются перемещения и увеличиваются действующие в нити изгибающие моменты;
- при действии на нить дополнительной равномерно распределенной нагрузки определенной интенсивности в середине пролета наблюдаются положительные перемещения;
- горизонтальные перемещения нити в плоскости ее провисания зависят, в основном, от изменения формы кривой равновесия и достигают максимального значения при действии несимметричной сосредоточенной нагрузки.

§ 8.2. Работа нити конечной жесткости за пределом упругости

8.2.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете. Исследование напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости за пределом упругости проводилось на примере нити с идеальным поперечным сечением пролетом 30 м с шарнирным и жестким закреплением концов на опорах. Площадь поперечного сечения нити составляла $F = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, а момент инерции $I = 8,64 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$. При исследовании было принято, что нить загружена дополнительной равномерно распределенной нагрузкой на всем пролете, стрела провисания нити варьировалась в пределах $1/10 - 1/40$ пролета, площадь поперечного сечения оставалась постоянной, а жесткость на изгиб изменялась за счет увеличения или уменьшения высоты профиля. Рассматривалась работа нитей из идеального упруго-пластического материала ($\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$).

Графики зависимости перемещений нитей конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при различных стрелах провисания показаны на рис. 8.13.

Из рис. 8.13 видно, что изменение стрелы провисания существенно сказывается на величине и характере перемещений нити на всем интервале изменения дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, при минимальной из принятых стрел провисания $f_0 = 1/40$ перемещения нити в четверти и в середине пролета качественно однородны и близки по значению. Увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/20$ пролета приводит к уменьшению перемещений нити приблизительно в 2–2,5 раза. Причем в начале упругой стадии работы, как уже отмечалось, в середине пролета нити наблюдаются небольшие положительные перемещения.

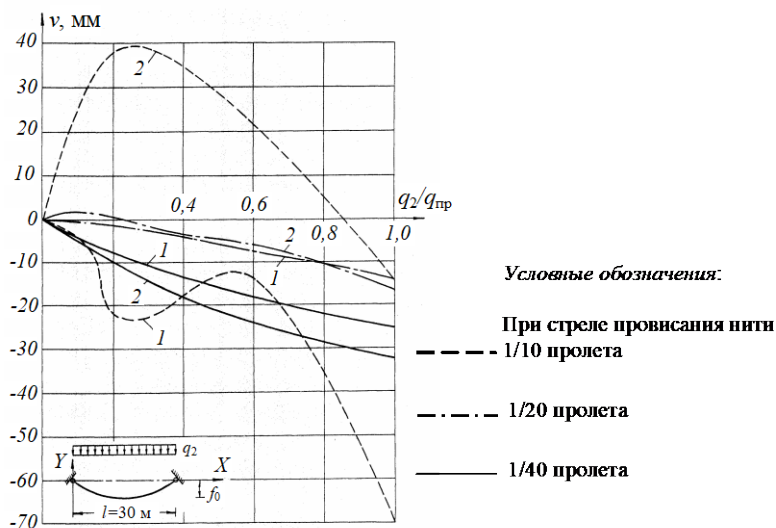


Рис. 8.13. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

Наиболее ярко нелинейность работы нитей конечной жесткости видна при работе нити со стрелой провисания 1/10 пролета. Здесь практически на всем интервале изменения интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки ($0 \leq q_2 \leq 0,85q_{\text{пр}}$) перемещения нити в середине пролета положительны, причем максимальное их значение достигает весьма значительной величины $v = 39$ мм, что составляет 1/770 пролета. И только на самом последнем этапе, когда интенсивность дополнительной нагрузки близка к предельной ($0,85q_{\text{пр}} \leq q_2 \leq q_{\text{пр}}$) и пластические деформации охватывают практически всю нить, она в середине пролета начинает перемещаться вниз. Наибольшее значение этого прогиба составляет всего $v = 13$ мм, что в 3 раза меньше полученного ранее нитью положительного перемещения.

Весьма характерно также в этом случае поведение нити в четверти пролета. До значения интенсивности дополнительной нагрузки, равного $q_2 = 0,6q_{\text{пр}}$, прогибы в этом сечении определяются в основном кинематическими составляющими перемещений, связанными с изменением формы кривой провисания нити – от заданной к параболической. Об этом свидетельствует тот факт, что при непрерывном возрастании интенсивности дополнительной нагрузки прогибы нити вначале увеличиваются, а затем начинают уменьшаться. И только после того, как форма нити при $q_2 = 0,6q_{\text{пр}}$ стабилизируется, при дальнейшем увеличении нагрузки начинается равномерное увеличение перемещений, максимальное значение которых достигает $v = 70$ мм или 1/430 пролета.

Влияние жесткости нити на ее деформативность при различных значениях параметра жесткости $u = 0,5l(H_{\text{пр}}/EI)^{1/2}$ показано на рис. 8.14.



Рис. 8.14. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Из рис. 8.14 видно, что жесткость нитей из идеального упруго-пластического материала заметно влияет на их работу под нагрузкой. Так, при прочих равных условиях нити с большим параметром жесткости оказываются более деформативны, чем нити с меньшим параметром жесткости. При этом увеличение квадрата параметра u от 1 до 5 приводит к увеличению безразмерного прогиба середины пролета нити в 1,3 раза, а увеличение квадрата параметра жесткости от 1 до 25 – только в 2,1 раза. В свою очередь, нити с меньшим значением параметра u быстрее достигают стадии полной пластичности и по своей работе становятся подобны абсолютно гибким нитям.

Следует также отметить, что неучет в расчетах возможности пластической работы материала приводит к значительному занижению воспринимаемых нитями нагрузок. В данном случае, например, предельная нагрузка для разных кривых от 2 до 3,5 раза превышает нагрузку, соответствующую появлению текучести в нити конечной жесткости.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при разных стрелах провисания близка к линейной (рис. 8.15).

При этом увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/20$ пролета вызывает уменьшение распора в нити в 1,4 раза, а увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/10$ пролета – в 2,2 раза. Соответственно увеличивается воспринимаемая нитью предельная нагрузка: в первом случае в 1,6 раза, во втором – в 2,6 раза. Отметим также, что нелинейный характер представленных кривых проявляется сильнее в нитях с малыми стрелами провисания.

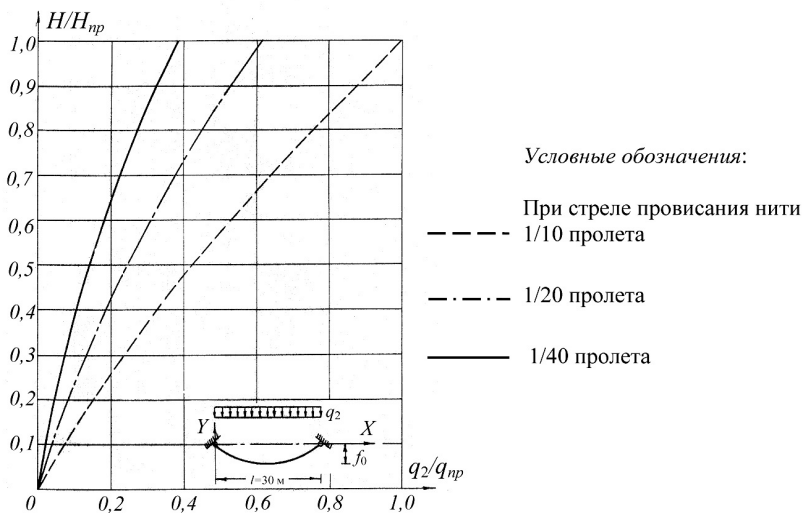


Рис. 8.15. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Кривые изменения изгибающих моментов в середине пролета упруго-пластических нитей конечной жесткости изображены на рис. 8.16.

Из рис. 8.16 видно, что и жесткость нити на изгиб, и стрела ее провисания заметно влияют на изгибающие моменты. При увеличении квадрата параметра жесткости от 5 до 15 изгибающие моменты уменьшаются в 2 раза. При дальнейшем увеличении параметра u^2 от 15 до 25 изгибающие моменты также уменьшаются в 2 раза, что свидетельствует о некотором возрастании интенсивности уменьшения изгибающих моментов. Причем такой характер изменения изгибающих моментов в зависимости от параметра жесткости присущ всем рассмотренным стрелам провисания нити.

Из анализа зависимости кривых на рис. 8.16 также следует, что жесткость нити на изгиб влияет не только на значения моментов, но и на характер их изменения при увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, при $u^2 = 5$ уменьшение изгибающих моментов в нити происходит практически на всем интервале увеличения интенсивности дополнительной нагрузки. При $u^2 = 15$ и 25 при увеличении дополнительной нагрузки от 0 до $(0,6 - 0,7)q_{\text{пр}}$ изгибающие моменты остаются почти постоянными и только на последнем участке интервала при $q_2 > 0,7q_{\text{пр}}$, т. е. когда в нити развиваются значительные области пластического деформирования, резко уменьшаются. При этом они перестают влиять на форму кривой провисания нити конечной жесткости, которая становится подобной гибкой нити.



Рис. 8.16. Зависимость изгибающего момента в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки: 1 – $u^2 = 5$; 2 – $u^2 = 15$; 3 – $u^2 = 25$

Стрела провисания нити конечной жесткости влияет только на действующие в ней изгибающие моменты, оставляя неизменной качественную картину их изменения. Например, при уменьшении стрелы провисания с 1/10 до 1/20 пролета действующие в нити изгибающие моменты уменьшаются в 2,8 раза. В свою очередь, моменты в нити со стрелой провисания 1/20 пролета превышают моменты в нити со стрелой провисания 1/40 пролета в 1,6 раза, т. е. интенсивность их уменьшения несколько замедляется. Отметим, что последнее замечание справедливо как для упругих, так и для упруго-пластических стадий работы нити.

8.2.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета. На рис. 8.17 – 8.20 представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки P , приложенной в середине пролета. При исследовании (в данном разделе и далее в разделах 8.2.3 и 8.2.4) принято, что стрела провисания нити варьируется в пределах 1/40 – 1/20 пролета; на рисунках сплошная линия соответствует стреле провисания 1/40, пунктирная – 1/30 и штрихпунктирная – 1/20 пролета; кривая 1 отвечает поперечному сечению нити с абсциссой $l/2$, кривая 2 – с абсциссой $l/4$, кривая 3 – с абсциссой $3l/4$; точкой на кривых показан момент изменения фаз изгиба нити (появление первых пластических деформаций).

Из рис. 8.17 видно, что увеличение сосредоточенной силы приводит к увеличению распора в нити от его исходного значения до граничного $H_{нр}$ при

всех стрелах провисания по близкой к линейной зависимости в пределах каждой фазы изгиба, причем эта кривая имеет характерный излом в момент изменения фазы изгиба. При этом следует отметить, что увеличение стрелы провисания приводит к некоторому замедлению скорости увеличения распора и уменьшению значения дополнительной сосредоточенной нагрузки, при которой появляются первые пластические деформации. Так, например, при стреле провисания $1/40$ пролета первые пластические деформации появляются при соотношении $P/P_{пр} \approx 0,29$, а при стреле провисания $1/20$ пролета – $P/P_{пр} \approx 0,09$, т.е. при увеличении стрелы провисания в 2 раза величина дополнительной сосредоточенной нагрузки, при которой появляются первые пластические деформации, уменьшается в 3,22 раза.

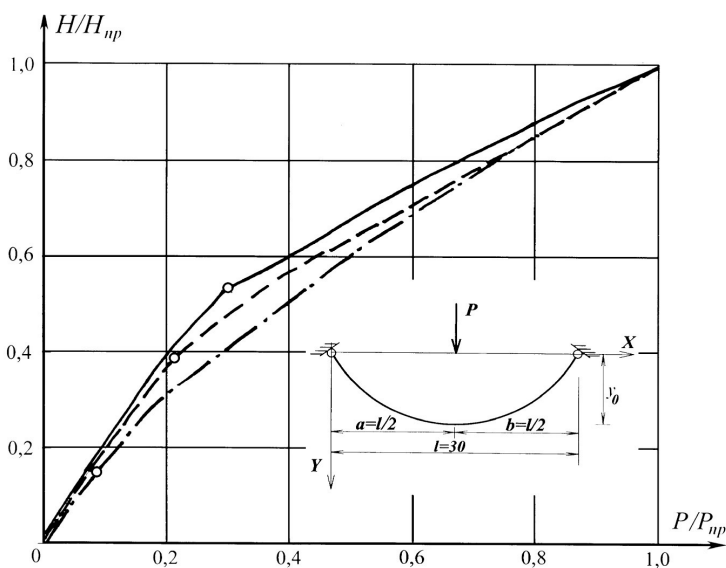


Рис. 8.17. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета

В отличие от распора, кривые изменения изгибающих моментов в нити конечной жесткости (рис. 8.18) при увеличении дополнительной сосредоточенной нагрузки имеют не только ярко выраженный нелинейный характер, но и $x = l/2$ и $x = l/4$ – качественно разнородные участки. Так, если при увеличении $P/P_{пр}$ от 0 до 0,1 значения изгибающих моментов в середине пролета увеличиваются, а в четверти – уменьшаются, то при дальнейшем росте дополнительной нагрузки изгибающие моменты по всему пролету нити постепенно уменьшаются до нуля. При $P/P_{пр} = 0,1$ значения изгибающих моментов при $x = l/2$ от 2 до 3,2 раза (при различных стрелах провисания) превышают

значения изгибающих моментов при $x = l/4$. Последнее объясняется тем, что, во-первых, при действии незначительной по величине сосредоточенной нагрузки нить конечной жесткости является достаточно деформативной системой, в которой форма кривой провисания достаточно сильно влияет на напряженно-деформированное состояние. Во-вторых, нить конечной жесткости в предельном состоянии работает подобно гибкой нити, значение распора в которой равно $H_{пр}$, а значение изгибающего момента – нулю.

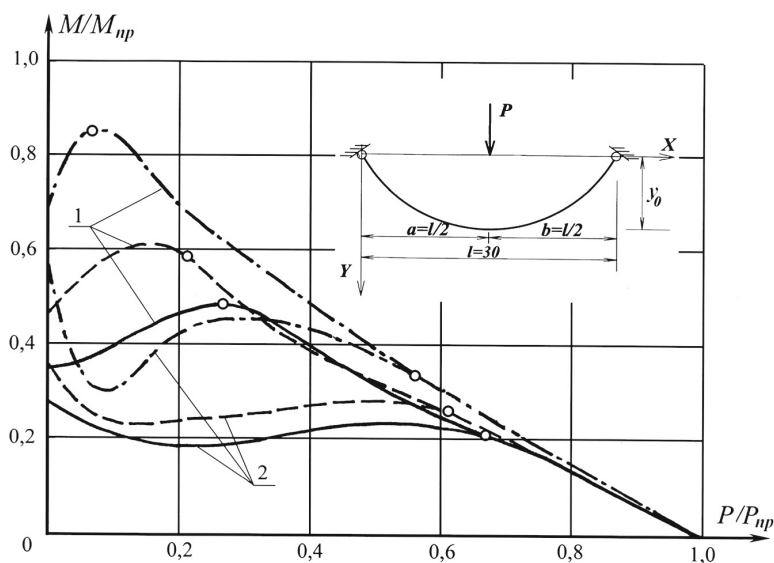


Рис. 8.18. Зависимость изгибающего момента в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета

Из рис. 8.19 видно, что стрела провисания также существенно влияет на перемещения нити конечной жесткости, находящейся под действием дополнительной сосредоточенной нагрузки. Так, при прочих равных условиях, нити с большей стрелой провисания оказываются более деформативными на всем интервале изменения дополнительной нагрузки. Например, перемещение нити со стрелой провисания $1/20$ пролета при $P/P_{пр} = 0,4$ больше перемещения нити при стреле провисания $1/30$ и $1/40$ пролета соответственно в 2,08 и в 2,73 раза. Лучше всего нелинейная работа нити конечной жесткости наблюдается при стреле ее провисания $1/20$ пролета. Здесь, почти на всем интервале изменения интенсивности нагрузки, в середине пролета перемещения нити положительны, чего нельзя сказать о четверти пролета, где перемеще-

ния отрицательны. Таким образом, увеличение дополнительной сосредоточенной нагрузки приводит к изменению формы кривой провисания нити, а именно: середина пролета опускается, а четверти пролета – сначала поднимаются и только потом начинают опускаться.

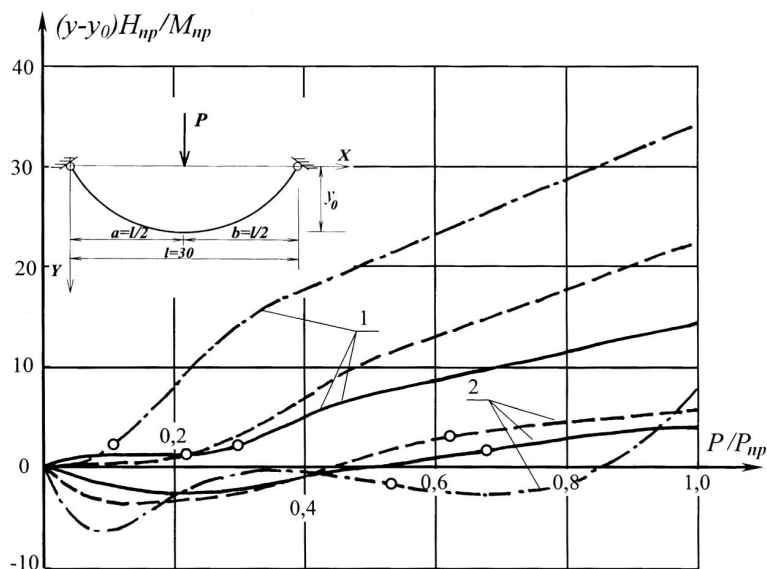


Рис. 8.19. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета

На рис. 8.20 показана зависимость длины пластического участка упруго-пластической нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета. Из рисунка видно, что стрела провисания нити существенно влияет не только на появление первых пластических деформаций, но и на длину образовавшегося пластического участка: чем больше стрела провисания, тем раньше в нити появляются пластические деформации и тем больше длина пластического участка. Уменьшение стрелы провисания с $1/20$ до $1/40$ пролета приводит к увеличению, во-первых, параметра P/P_{np} , при котором появляются первые пластические деформации, больше чем в 4 раза – с $0,08$ до $0,33$ и, во-вторых, длин пластических участков от $1,7$ до $2,85$ раза при значении $P/P_{np} = 0,4$.

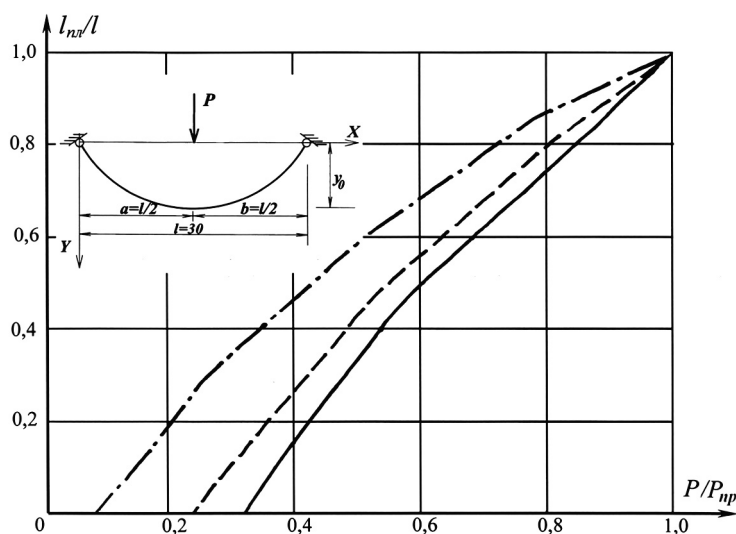


Рис. 8.20. Зависимость длины пластического участка в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета

8.2.3. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки. На рис. 8.21 – 8.24 показаны зависимости параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости от дополнительной участковой равномерно распределенной нагрузки q_2 , приложенной симметрично относительно середины пролета нити.

На рис. 8.23 приведена зависимость распора, действующего в нити конечной жесткости, от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки.

Увеличение дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки, как и увеличение дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета, приводит к увеличению распора в нити от исходного значения до предельного H_{np} при всех стрелах провисания по близкой к линейной зависимости в пределах каждой фазы изгиба. Следует отметить также, что график этой зависимости имеет выраженный излом в момент изменения фазы изгиба. Причем увеличение стрелы провисания приводит к некоторому замедлению скорости роста величины распора и уменьшению величины дополнительной нагрузки, при котором появляются первые пластические деформации. Так, например, при стреле провисания $1/40$ пролета первые пластические деформации появляются при соотношении $q_2/q_{np} \approx 0,44$, а при $1/20$ пролета – $q_2/q_{np} \approx 0,18$. То есть при увеличении стрелы провисания в 2 раза, величина дополнительной распределенной нагрузки, при которой появляются первые пластические деформации, уменьшается в 2,44 раза.

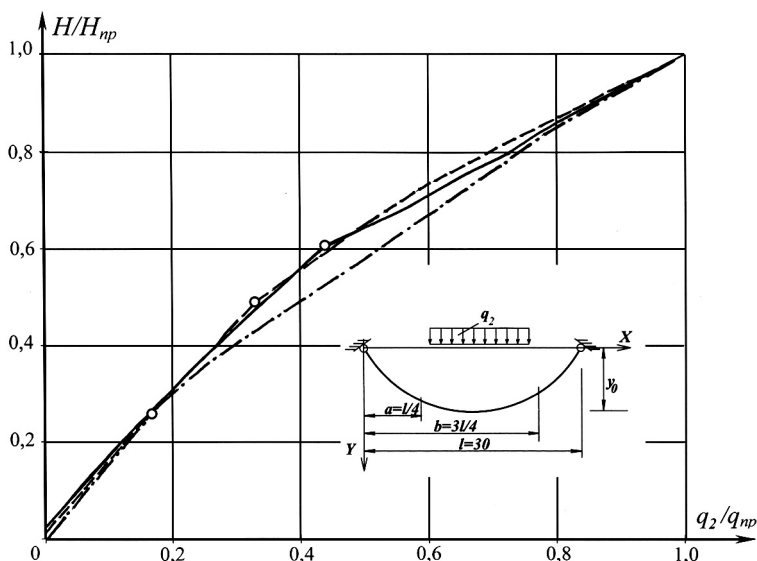


Рис. 8.21. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки

Из рис. 8.21 также видно, что зависимость распора в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки качественно аналогична случаю действия дополнительной сосредоточенной нагрузки, но ее значения количественно отличаются. Последнее объясняется тем, что форма кривой провисания нити при действии дополнительной симметричной участковой распределенной нагрузки очень отличается от формы кривой нити при действии сосредоточенной нагрузки. Такое же отличие будет наблюдаться и далее при рассмотрении зависимостей изгибающих моментов M/M_{np} , перемещений $(y-y_0)H_{np}/M_{np}$ и длины пластического участка $l_{пл}/l$.

Кривые зависимости изгибающих моментов в нити конечной жесткости от дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки представлены на рис. 8.22. Как видно из рисунка, изначально с возрастанием параметра q_2/q_{np} от 0 до 0,08 при стреле провисания $1/20$ пролета, от 0 до 0,19 при стреле провисания $1/30$ пролета и от 0 до 0,25 при стреле провисания $1/40$ пролета значения изгибающих моментов по всему пролету уменьшаются, а потом незначительно увеличиваются. При дальнейшем увеличении дополнительной распределенной нагрузки изгибающие моменты по всему пролету нити постепенно уменьшаются до нуля, после чего нить конечной жесткости становится полностью пластичной и начинает работать подобно гибкой нити.

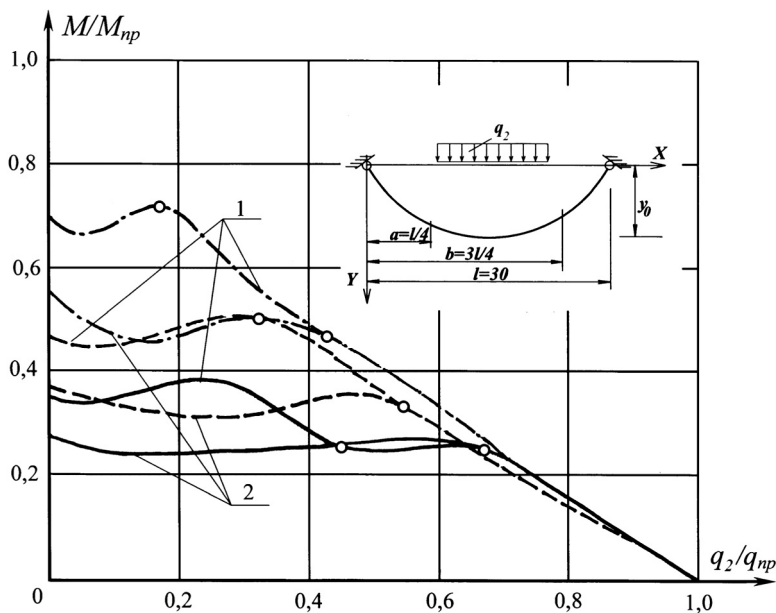


Рис. 8.22. Зависимость изгибающего момента в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки

Как уже отмечалось, стрела провисания существенно влияет на перемещения нити конечной жесткости при действии дополнительной нагрузки (рис. 8.23). Так, при прочих равных условиях, нити, имеющие большую стрелу провисания, оказываются более деформативными, чем нити с меньшей стрелой провисания на всем интервале изменения дополнительной нагрузки.

Например, перемещения нити в середине пролета при стреле провисания $1/20$ пролета и при $q_2/q_{np} = 0,8$ больше перемещений нити со стрелой провисания $1/30$ и $1/40$ пролета соответственно в 1,68 и 2,06 раза, а в четвертях пролета – соответственно в 1,18 и 1,93 раза. Так, в середине пролета при увеличении q_2/q_{np} от 0 до 2,1 (при стреле провисания $1/20$ пролета), от 0 до 0,30 (при стреле провисания $1/30$ пролета) и от 0 до 0,21 (при стреле провисания $1/40$ пролета) перемещения нити отрицательны, т.е. происходит ее приподнимание, но при дальнейшем росте дополнительной равномерно распределенной нагрузки (до $q_2/q_{np} = 1,0$) перемещения меняют свой знак на противоположный и становятся положительными. Последнее свидетельствует, что происходит опускание нити конечной жесткости. В четвертях пролета деформирование нити происходит подобно указанному.

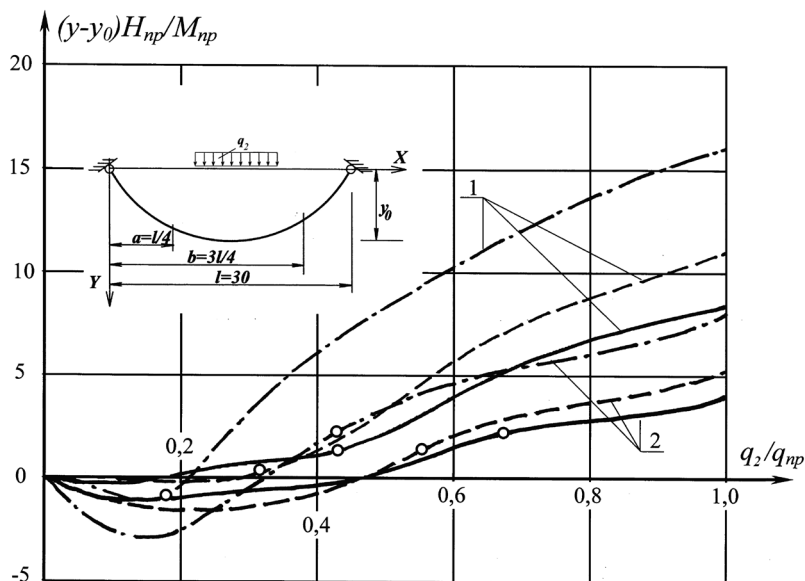


Рис. 8.23. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки

На рис. 8.24 представлена зависимость длины пластического участка в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки. Из графика видно, что чем больше стрела провисания, тем раньше в нити появляются пластические деформации и тем больше длина участка пластичности. Уменьшение стрелы провисания в 2 раза с $1/20$ до $1/40$ пролета приводит к увеличению, во-первых, параметра q_2/q_{np} , при котором появляются первые пластические деформации более чем в 2,38 раза – с 0,18 до 0,43, и, во-вторых, увеличению длины пластического участка от 1,16 до 1,67 раза при значении $q_2/q_{np} = 0,6$.

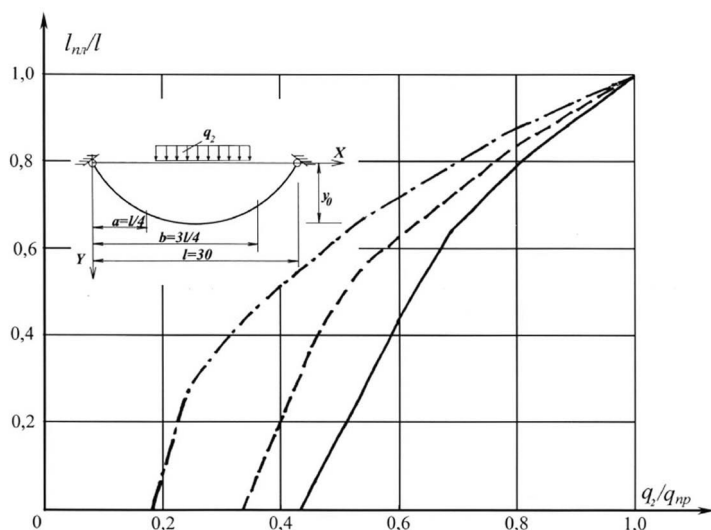


Рис. 8.24. Зависимость длины пластического участка в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки

8.2.4. Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки. На рис. 8.25 – 8.27 показаны зависимости параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости от участковой равномерно распределенной нагрузки q_2 , приложенной несимметрично относительно середины пролета нити.

Как видно из рис. 8.25, с увеличением дополнительной несимметричной участковой равномерно распределенной нагрузки распор в нити конечной жесткости при всех стрелах провисания, как и ранее, возрастает по зависимости, близкой к линейной в пределах каждой фазы изгиба, а его график претерпевает излом в момент изменения фазы изгиба.

Графики зависимости изгибающих моментов от интенсивности дополнительной нагрузки (рис. 8.26) имеют ярко выраженный нелинейный характер. Так, при увеличении параметра q_2/q_{np} от 0 до 0,7 изгибающие моменты в загруженной четверти пролета нити возрастают, а в середине и незагруженной четверти – уменьшаются. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к монотонному уменьшению значений изгибающих моментов, достигающих нуля по всему пролету нити при достижении нагрузкой своего предельного значения. Последнее объясняется переходом нити конечной жесткости в полностью пластическую стадию работы.

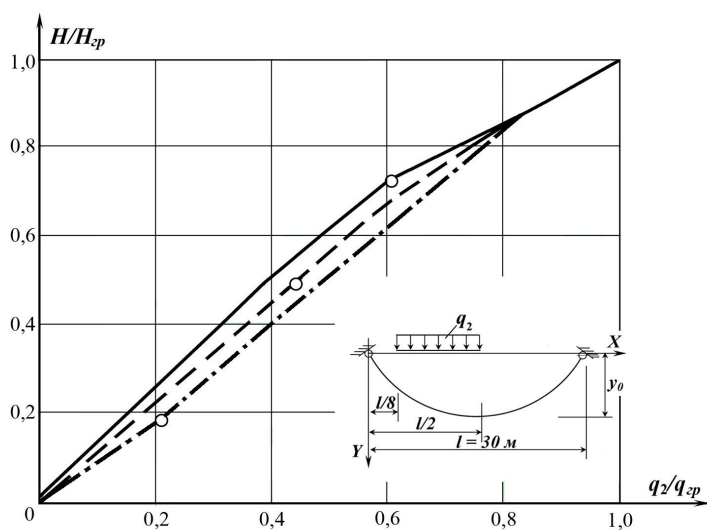


Рис. 8.25. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной несимметричной участковой равномерно распределенной нагрузки

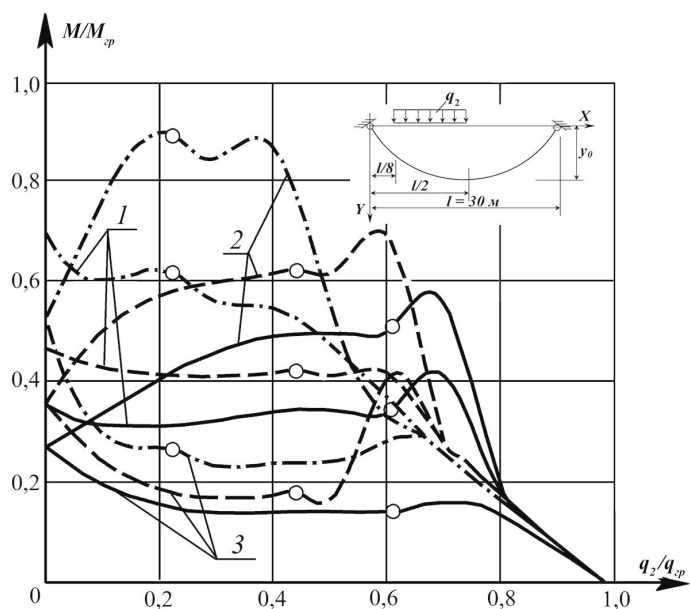


Рис. 8.26. Зависимость изгибающих моментов в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной несимметричной участковой равномерно распределенной нагрузки

Из рис. 8.27 следует, что стрела провисания заметно влияет на перемещения нити. Так, при прочих равных условиях, нити с большей стрелой провисания оказываются более деформативными, чем нити с меньшей стрелой провисания на всем интервале изменения дополнительной нагрузки. Если в нагруженной четверти и в середине пролета нить перемещается вниз при всех рассмотренных значениях интенсивности дополнительной нагрузки, то в ненагруженной четверти нить перемещается вверх. Причем с увеличением нагрузки абсолютная величина этих перемещений также увеличивается. Например, при увеличении стрелы провисания с $1/40$ до $1/30$ пролета (при интенсивности дополнительной нагрузки $q_2 = q_{пр}$, когда пластические деформации охватывают всю нить) отрицательные перемещения нити увеличиваются в 0,45 раза, а при увеличении стрелы провисания с $1/30$ до $1/20$ пролета – 1,55 раза. Такой характер деформирования нитей конечной жесткости можно объяснить значительной кинематической составляющей перемещений, поскольку увеличение стрелы провисания при действии несимметричных нагрузок в первую очередь приводит к изменению формы кривой провисания нити, а именно: в нагруженной части пролета она перемещается вниз, а в ненагруженной – вверх.

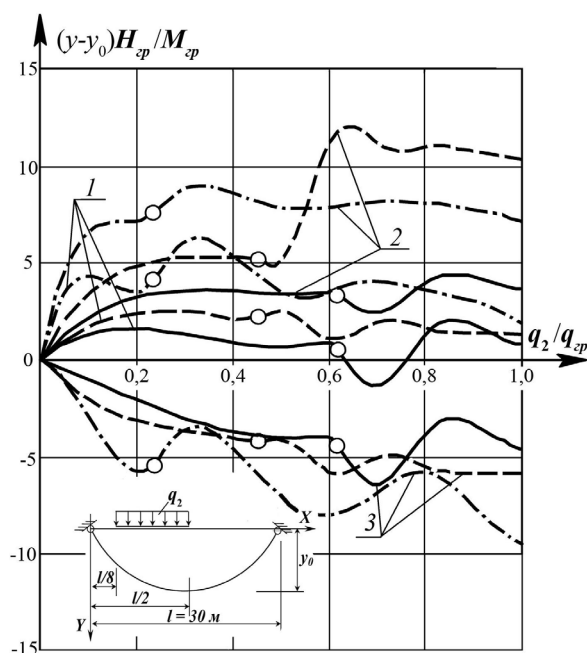


Рис. 8.27. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной несимметричной участковой равномерно распределенной нагрузки

8.2.5. Влияние длины пластического участка на работу нити. Рассмотрим нить конечной жесткости пролетом $l = 150$ м, стрелой провисания при начальной нагрузке $f_0 = 6$ м и с шарнирным закреплением концов на опорах. Нить имеет идеальное поперечное сечение площадью $F = 1,2 \cdot 10^{-2}$ м². Материал нити принят идеальным упруго-пластическим. Модуль упругости материала нити равен $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, а предел текучести $\sigma_T = 345$ МПа. Нить нагружена начальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q_1 = 0,942$ кН/м и двумя видами дополнительных нагрузок: равномерно распределенной на всем пролете и сосредоточенной в середине пролета. Исследуем поведение нити во второй фазе изгиба, когда в ней развивается область конечной протяженности, охваченная пластическими деформациями. На рис. 8.28 – 8.31 показаны зависимости распора в нити, приложенной к нити дополнительной нагрузки, а также ее перемещений от длины пластического участка.

Из приведенных на рис. 8.28 кривых видно, что в случае нагружения нити распределенной нагрузкой пластичность в нити появляется при большей величине распора, чем при ее нагружении сосредоточенной нагрузкой, а именно: при $H/H_{пр} = 0,45$ для распределенной и $H/H_{пр} = 0,40$ для сосредоточенной нагрузки. Отметим также, что зависимости $H = f(\Delta)$ близки к параболическому виду, независимо от вида действующей нагрузки. С увеличением пластического участка, а соответственно и величины соотношения $l_{пл}/l$, кривые сближаются все больше, пока не пересекутся в точке, где $l_{пл}/l = 1$ и $H/H_{пр} = 1$. Тогда нить конечной жесткости становится полностью пластичной и начинает работать подобно гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному. Заметим также, что при других видах нагружений кривые зависимости $H = f(\Delta)$ будут иметь аналогичный вид и проходить между представленными на рис. 8.28 графиками.

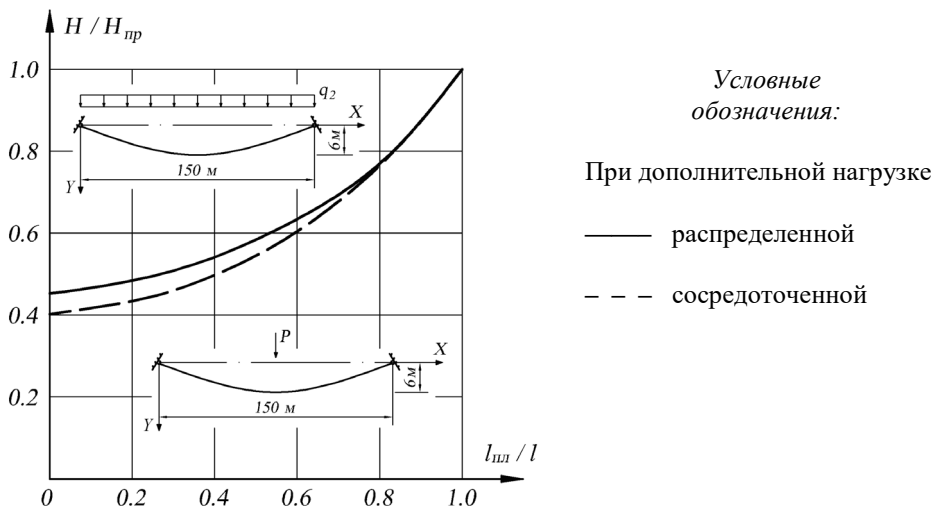


Рис. 8.28. Зависимость распора в нити конечной жесткости от длины пластического участка

На рис. 8.29 изображена зависимость дополнительной распределенной и сосредоточенной нагрузок от длины пластического участка нити. В случае распределенной нагрузки пластичность возникает при $q_2/q_{2пр} = 0,41$. С увеличением параметра $l_{пл}/l$ дополнительная распределенная нагрузка увеличивается по зависимости, вид которой близок к параболическому. При $l_{пл}/l = 1$ нагрузка достигает предельного значения, нить становится полностью пластичной, а несущая способность последней исчерпывается. В случае нагружения нити сосредоточенной нагрузкой P зависимость также близка к параболической, но кривая при этом имеет более пологий вид. При этом нить работает в упругой стадии до тех пор, пока нагрузка не достигнет величины $P/P_{пр} = 0,36$. Отметим также, что отношение величины дополнительной нагрузки к ее предельному значению, соответствующее появлению первых пластических деформаций, в случае нагружения распределенной нагрузкой в 1,14 раза больше отношения аналогичных параметров для сосредоточенной нагрузки, а несущая способность нити больше в случае действия распределенной нагрузки.

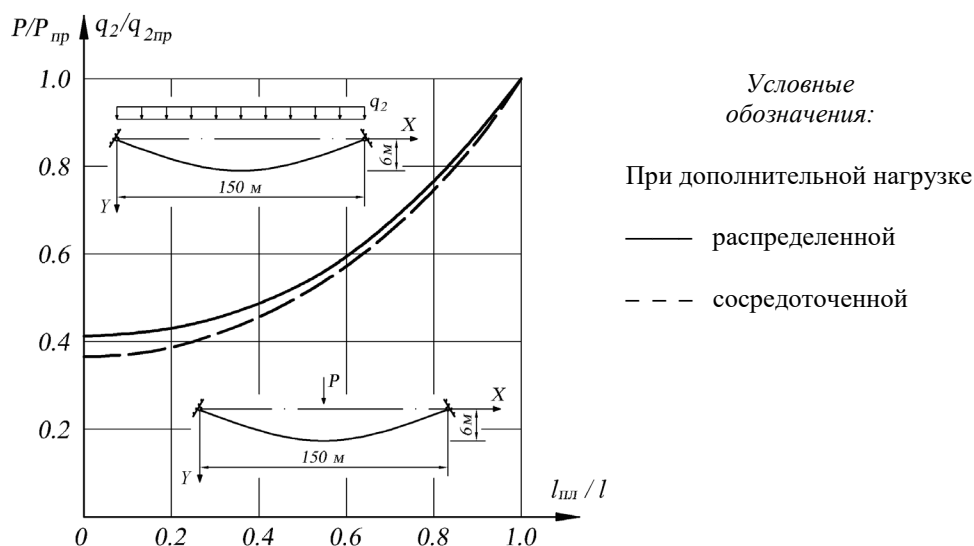


Рис. 8.29. Зависимость приложенной к нити конечной жесткости дополнительной нагрузки от длины пластического участка

На рис. 8.30 показана зависимость перемещений в середине пролета нити конечной жесткости от длины пластического участка для упруго-пластической стадии работы. Как видно из данного рисунка, в случае распределенной нагрузки, пока длина пластического участка не превысит треть длины нити, увеличение перемещений происходит довольно плавно, после чего — резко возрастает. Для сосредоточенной нагрузки характерно более равномерное увеличение перемещений с возрастанием параметра $l_{пл}/l$. Сле-

дует отметить, что при равных длинах пластических участков величина перемещений больше в случае нагружения нити сосредоточенной нагрузкой. В частности, при $l_{пл}/l = 1$ максимальный безразмерный прогиб нити в упруго-пластической стадии работы составляет 0,55 для сосредоточенной и только 0,51 для распределенной нагрузки.

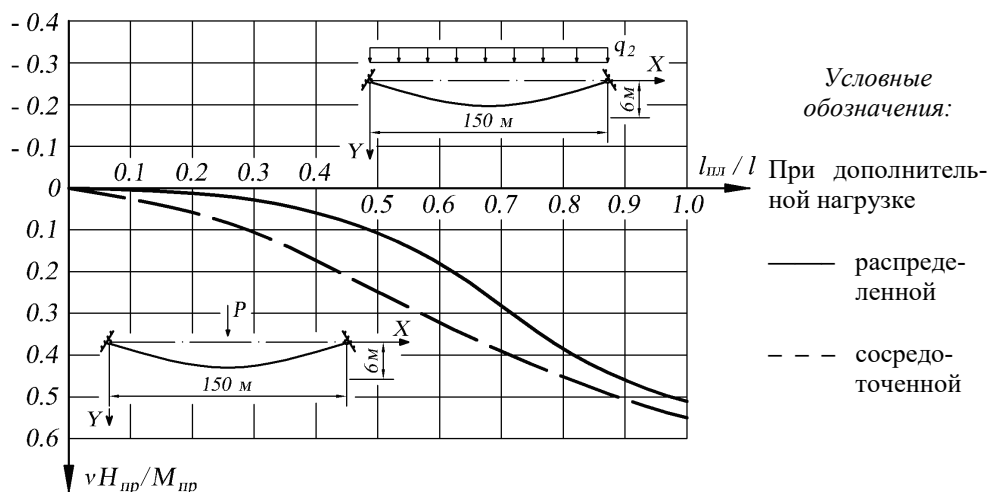


Рис. 8.30. Зависимость перемещений нити конечной жесткости в середине пролета от длины пластического участка

На рис. 8.31 построена зависимость перемещений в четверти пролета нити конечной жесткости от длины пластического участка также для упруго-пластической стадии работы. Из рисунка видно, что здесь перемещения нити определяются в основном кинематическими составляющими перемещений, связанными с изменением формы кривой провисания. В частности, с увеличением длины пластического участка под действием сосредоточенной нагрузки форма нити стремится к V-образному виду, а под действием распределенной — приближается к параболическому. Последнее объясняется тем, что при непрерывном возрастании длины пластического участка и соответственно величины нагрузки прогибы нити вначале уменьшаются и нить поднимается, затем они начинают увеличиваться, а нить — опускаться. Постоянное же увеличение прогибов начинается только после стабилизации формы нити под нагрузкой. При действии распределенной нагрузки максимальное значение безразмерного прогиба достигает значения 0,44. В случае нагружения нити сосредоточенной нагрузкой даже при достижении нитью полной пластичности (при $l_{пл}/l = 1$) прогибы остаются отрицательными, а их значение равно $-0,42$.

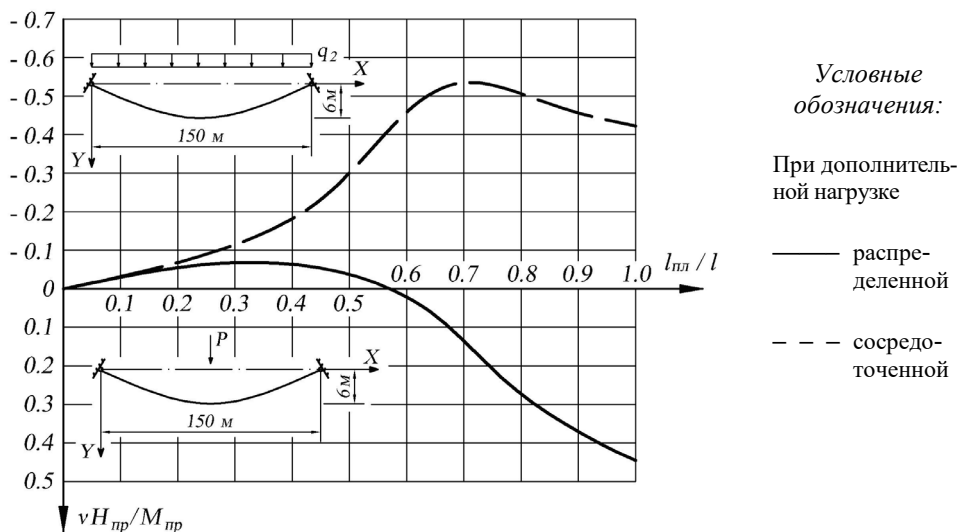


Рис. 8.31. Зависимость перемещений нити конечной жесткости в четверти пролета от длины пластического участка

8.2.6. Влияние упрочнения материала на работу нити. На рис. 8.32 показана зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при различных значениях жесткости нити $u = 0,5l(H_{пр}/\alpha EI)^{1/2}$, где коэффициент α по-прежнему представляет собой отношение модулей упрочнения и упругости, т. е. $\alpha = E_0/E$. На рис. 8.32 линии со значениями $u^2 = 1, 5, 15, 25$ и 50 построены только до момента начала упрочнения материала, а график со значением $u^2 = 3$ охватывает всю площадь работы нити. Причем каждая из кривых этого графика для последней стадии изгиба нити (когда начинается упрочнение материала) соответствует определенному модулю упрочнения.

Из анализа полученных результатов и сопоставления кривых графиков рис. 8.14 и 8.32 видно, что вплоть до момента начала упрочнения материала нити какая-либо заметная разница в характере деформирования нитей конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала и материала с упрочнением отсутствует. Как и ранее, интенсивность изменения перемещений нити достигает наибольшего значения, когда она входит в пластическую стадию. В дальнейшем с увеличением нагрузки приращение прогиба уменьшается.

Следует также отметить, что при нагрузке, превышающей предельную для нитей из идеального упруго-пластического материала, напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости практически полностью определяется действующим в них распором, поскольку изгибающие моменты при этом весьма незначительны.

Кроме того, из рис. 8.32 видно, что с уменьшением модуля упрочнения материала характер деформирования нитей все более точно соответствует работе нитей конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала.

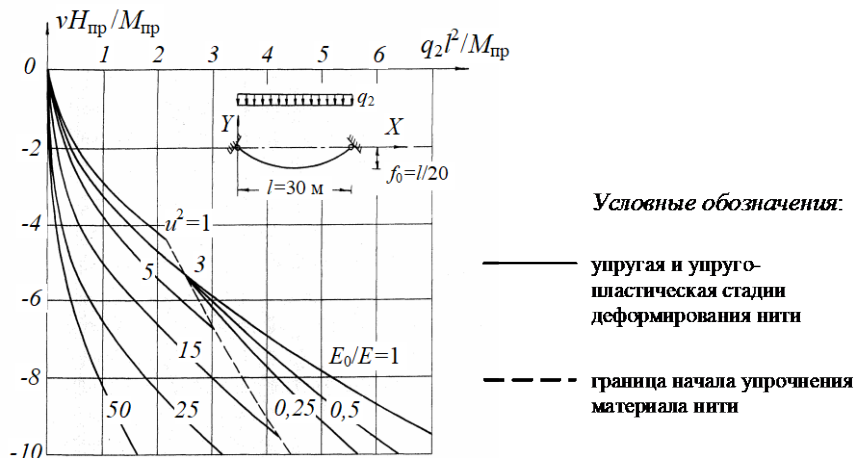


Рис. 8.32. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

8.2.7. Особенности работы нити при разгрузке. Характер изменения остаточных прогибов для нити с параметром жесткости $u^2 = 100$ при разгрузке показан на рис. 8.33.

Как уже отмечалось выше, при данном соотношении геометрических размеров нить в предельном состоянии имеет максимальные прогибы в четвертях пролета. В середине пролета перемещения нити незначительны. При снятии нагрузки нить конечной жесткости ввиду работы ее поперечных сечений в пластической стадии не возвращается в исходное состояние и ее ось остается деформированной. В этом случае распределение остаточных прогибов по пролету нити в какой-то мере остается аналогичным распределению прогибов при активном нагружении: их максимальные значения по-прежнему наблюдаются в четвертях пролета и достигают $v = 42$ мм. При этом стрела провисания нити конечной жесткости после снятия нагрузки оказывается даже меньше, чем при действии начальной нагрузки, поскольку в середине пролета возникают положительные перемещения $v = 23$ мм. Отметим также, что, как следует из рис. 8.33, поведение нити конечной жесткости не только при активном нагружении, но и при разгрузке носит существенно нелинейный характер.

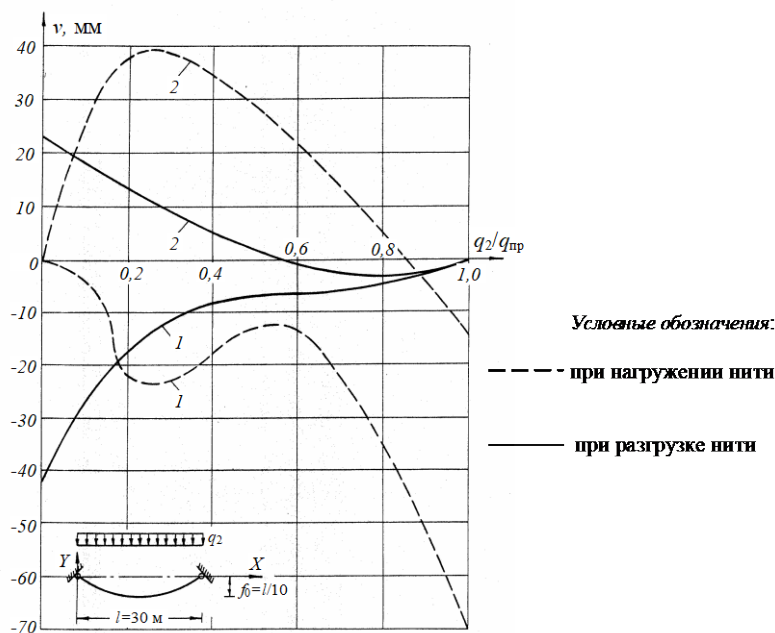


Рис. 8.33. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при нагружении и разгрузке:
 1 — в четверти пролета; 2 — в середине пролета

8.2.8. Анализ результатов исследований. Анализ данных выполненных численных исследований позволяет сделать следующие выводы:

- стрела провисания не только в упругой, но и в упруго-пластической стадии деформирования нити конечной жесткости оказывает существенное влияние на перемещение нити. Если при уменьшении стрелы увеличиваются прогибы в середине, то при ее увеличении — в четвертях пролета. При этом в зависимости от стрелы провисания с увеличением нагрузки интенсивность прогибов может увеличиваться вплоть до предельного состояния нити, а может и уменьшаться;
- увеличение стрелы провисания вызывает значительное уменьшение распора в нити и, наоборот, при уменьшении стрелы провисания распор в нити увеличивается. Причем данная зависимость сохраняется при любом значении дополнительной нагрузки;
- жесткость на изгиб заметно сказывается на перемещениях нити только до момента, пока по ее длине еще не развились значительные области пластического деформирования. При развитых пластических деформациях влияние жесткости на прогибы несколько уменьшается, однако при этом выясняется, что нить с большей жесткостью на изгиб является более деформативной, чем нить с меньшей жесткостью;

- характер изменения изгибающих моментов в нити конечной жесткости определяется не столько приложенной нагрузкой, сколько размером стрелы провисания и жесткостью на изгиб. С увеличением нагрузки и ростом пластических деформаций изгибающие моменты в нити уменьшаются, а при приближении нагрузки к предельному значению – стремятся к нулю. При этом нить конечной жесткости становится по характеру своей работы подобной гибкой нити;

- жесткое закрепление концов нити на опорах заметное влияние оказывает на напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости только в начальный период нагружения, когда она работает в упругой стадии, и то лишь в случаях большой жесткости на изгиб и значительной стрелы провисания. При увеличении дополнительной нагрузки характер деформирования нити с жестким закреплением аналогичен деформированию нити с шарнирным опиранием;

- пластические деформации, вызывая перераспределение и выравнивание напряжений в нити конечной жесткости, значительно повышают ее несущую способность, которая может в 3,5 и даже 10 раз превышать нагрузку, соответствующую моменту появления текучести;

- влияние упрочнения материала сказывается только на заключительном этапе деформирования, когда нагрузка близка или превышает предельную для нитей из идеального упруго-пластического материала. До этого момента существенной разницы в работе этих двух групп нитей не отмечается. Кроме того, учет упрочнения существенно (более чем в 5 раз) повышает предельную нагрузку по сравнению с нитями, выполненными из идеального упруго-пластического материала;

- в случае снятия нагрузки нить не возвращается в исходное состояние и ее ось остается деформированной, причем оказывается расположенной выше кривой равновесия при действии начальной нагрузки. В связи с этим разгрузка приводит к появлению остаточных перемещений и возникновению в нити состояния самонапряжения.

§ 8.3. Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций

С целью изучения влияния характера и интенсивности дополнительной нагрузки, жесткости на изгиб и кручение, раскрепления нити связями в горизонтальной плоскости, эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки и установки связей на устойчивость плоской формы деформирования нитей конечной жесткости были проведены численные исследования. При этом исходные данные принимались такими, чтобы работа опытных образцов нитей при значениях дополнительных нагрузок, близких к критическим, была характерна для широкого класса висячих систем.

В качестве объекта исследований принимались нити двутаврового поперечного сечения пролетом 30 м, стрелой провисания $f_0 = l/20$, с расположенными на одном уровне опорами, с шарнирным и жестким закреплением на концах. Площадь поперечного сечения нити составляла $F = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, моменты инерции соответственно в плоскостях наибольшей и наименьшей жесткости – $I_y = 1,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ и $I_z = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$, а полярный момент инерции – $I_d = 8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Модуль упругости материала равен $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$. Пространственная устойчивость нитей изучалась при действии дополнительных симметричных и несимметричных равномерно распределенных нагрузок. При этом считалось, что в раскрепленных нитях дополнительная нагрузка всегда была приложена в уровне верхнего пояса.

8.3.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете.

На рис. 8.34 – 8.36 приведены результаты исследования устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости при различных значениях начальной равномерно распределенной нагрузки, жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и жесткости нити на кручение при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету.

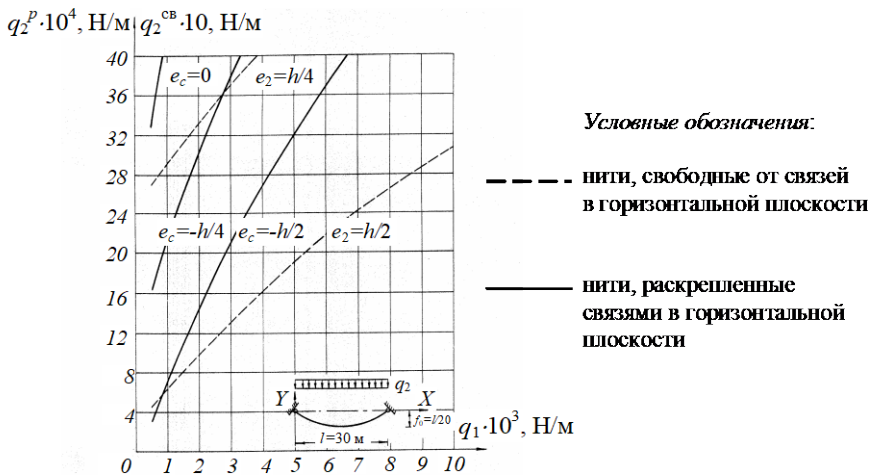


Рис. 8.34. Зависимость между критической дополнительной и начальной равномерно распределенными нагрузками при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

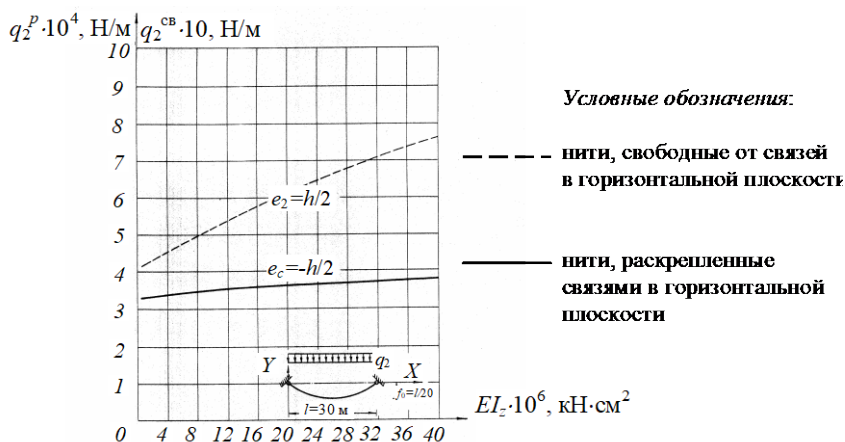


Рис. 8.35. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на изгиб в горизонтальной плоскости при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

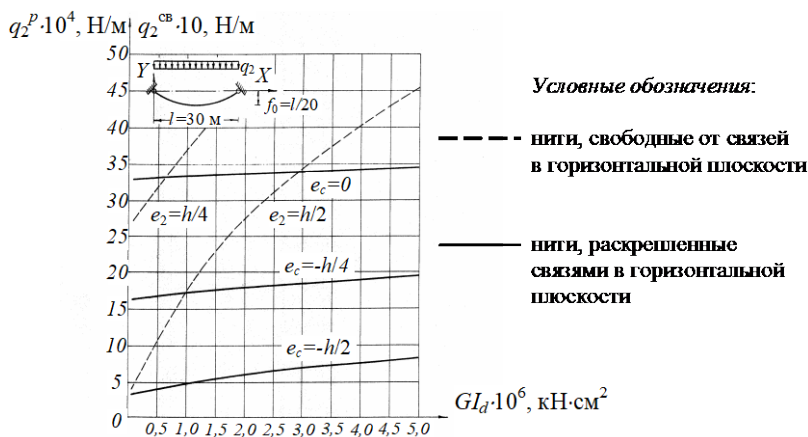


Рис. 8.36. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на кручение при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

Интенсивность начальной равномерно распределенной нагрузки (собственного веса нити) существенно сказывается на критической дополнительной нагрузке как в свободных от связей в горизонтальной плоскости, так и в раскрепленных связями нитях. При прочих равных условиях это влияние гораздо сильнее проявляется в раскрепленных нитях (см. рис. 8.34). Например, если при увеличении интенсивности начальной нагрузки в 10 раз от 1000 до 10000 Н/м критическая дополнительная равномерно распределенная нагрузка

в свободных от связей нитях возрастает в 5,3 раза, то в раскрепленных нитях она увеличивается уже в 9,7 раза. При этом необходимо отметить, что само по себе раскрепление нитей связями в горизонтальной плоскости вызывает рост критической дополнительной нагрузки в 750 раз. Зависимость $q_2 = f(q_1)$, как это видно из рис. 8.34, носит более выраженный нелинейный характер для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости. Для нитей, раскрепленных связями, эта зависимость близка к прямо пропорциональной.

Перемещение уровня раскрепления нити от нижнего пояса к верхнему (т. е. при изменении эксцентриситета установки связей от $e_c = -h/2$ до $e_c = h/2$, где h – высота профиля) вызывает весьма значительный рост интенсивности критической дополнительной нагрузки. Причем эта интенсивность оказывается связанной с эксцентриситетом квадратичной функциональной зависимостью вида $q_2 = f(e_c)$, близкой к гиперболической, кривая которой имеет бесконечную ветвь с асимптотой $e_c = h/2$. Иными словами, при приближении эксцентриситета линии раскрепления нити к верхнему поясу интенсивность критической дополнительной нагрузки неограниченно возрастает. Практически это означает, что при раскреплении нитей конечной жесткости в уровне верхнего пояса устойчивость плоской формы изгиба полностью обеспечена.

Из рис. 8.34 видно также, что понижение уровня приложения дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, оказывает на пространственную устойчивость нитей конечной жесткости такое же воздействие, как и повышение уровня установки связей в раскрепленных нитях. Так, при изменении эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки от верхнего пояса к нижнему дополнительная критическая нагрузка все более возрастает, а при $e_c = -h/2$ стремится к бесконечности. Последнее свидетельствует о том, что при приложении дополнительной нагрузки к нижнему поясу нить устойчивости плоской формы изгиба не теряет.

Увеличение жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки (см. рис. 8.35) вызывает достаточно значительный рост интенсивности критической дополнительной нагрузки для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и практически не сказывается на раскрепленных нитях. Если для свободных от связей нитей увеличение наименьшей жесткости на изгиб в 10 раз (от $4 \cdot 10^6$ до $40 \cdot 10^6$ кН·см²) вызывает увеличение критической дополнительной нагрузки в 1,6 раза, то для раскрепленных нитей – всего в 1,1 раза. Причем повышение уровня связей в раскрепленных нитях и понижение уровня приложения дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приводит к еще более сильному ослаблению этого влияния, которое в итоге практически полностью исчезает.

Влияние крутильной жесткости нити на интенсивность критической дополнительной нагрузки видно из рис. 8.36. Как и жесткость нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки, жесткость на кручение весьма заметно сказывается на критической дополнительной нагрузке для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и мало влияет на пространствен-

ную устойчивость раскрепленных нитей. Об этом свидетельствует то, что при увеличении крутильной жесткости нити в 10 раз (от $0,5 \cdot 10^6$ до $5 \cdot 10^6$ кН·см²) интенсивность критической дополнительной нагрузки для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, увеличивается в 9,2 раза, а для раскрепленных нитей – всего в 1,9 раза. При этом, как и в предыдущем случае (см. рис. 8.35), соответствующее изменение уровня установки связей и приложения внешней нагрузки в раскрепленных и свободных нитях конечной жесткости приводит к уменьшению воздействия крутильной жесткости нити на ее устойчивость плоской формы деформирования.

8.3.2. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета. Результаты исследования пространственной устойчивости нитей конечной жесткости при различных значениях начальной равномерно распределенной нагрузки, жесткости нити на изгиб в горизонтальной плоскости и жесткости нити на кручение при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной на половине пролета, показаны на рис. 8.37 – 8.39.

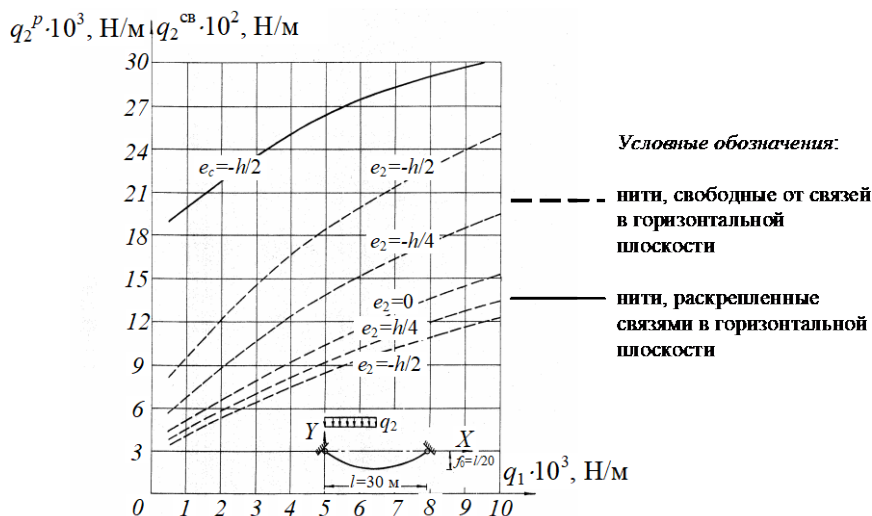


Рис. 8.37. Зависимость между критической дополнительной и начальной равномерно распределенной нагрузками при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

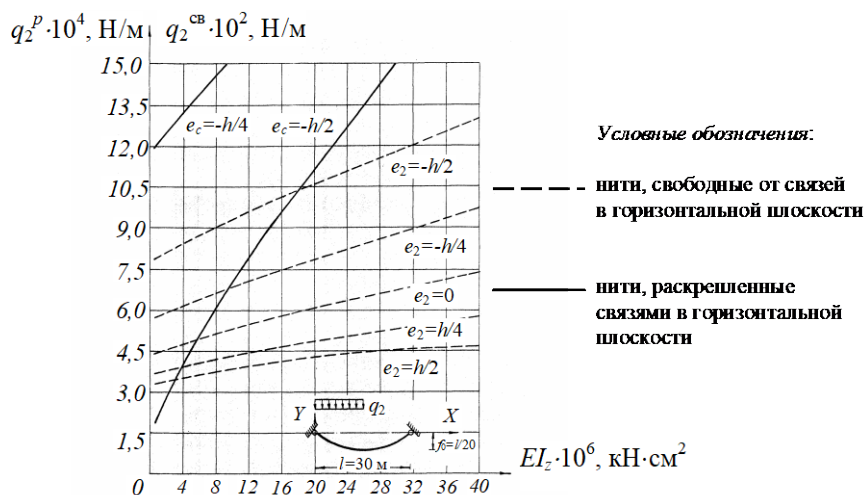


Рис. 8.38. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на изгиб в горизонтальной плоскости при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

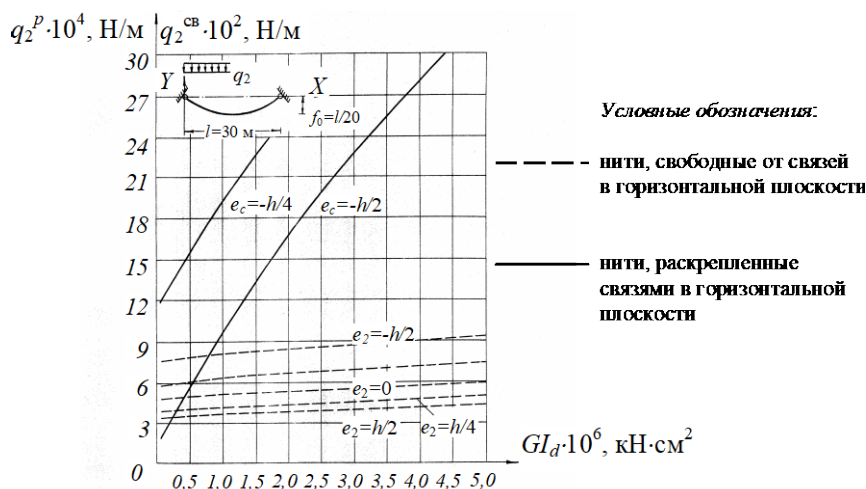


Рис. 8.39. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на кручение при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

Изменение характера дополнительной нагрузки (несимметричная вместо симметричной) приводит к качественно иной работе нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и значительно изменяет количественные показатели потери плоской формы изгиба для раскрепленных нитей. Как показано на рис. 8.37, в этом случае свободные от связей нити конечной жест-

кости теряют пространственную устойчивость не только при приложении внешней нагрузки к верхнему, но и к нижнему поясам. При этом влияние приложенной к нижнему поясу дополнительной нагрузки на деформирование нити оказывается чуть менее значительным, но носит более выраженный нелинейный характер, чем при нагрузке, приложенной к верхнему поясу. Например, при увеличении начальной равномерно распределенной нагрузки в 10 раз от 1000 до 10000 Н/м интенсивность дополнительной критической нагрузки, приложенной к нижнему поясу, увеличивается в 2,6 раза, а приложенной к верхнему поясу – в 3 раза. Заметим также, что по сравнению с рассмотренным ранее симметричным нагружением в данном случае дополнительная критическая нагрузка увеличивается приблизительно в 10 раз. Последнее свидетельствует о более неблагоприятном воздействии симметричного нагружения на висячие системы, свободные от связей в горизонтальной плоскости.

Снижение уровня приложения внешней нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приводит, как и ранее, к повышению интенсивности критической нагрузки (см. рис. 8.37). Однако теперь этот закон выражается не гиперболической, а параболической зависимостью, кривая которой имеет достаточно большой растрвор.

В раскрепленных нитях увеличение начальной нагрузки вызывает более плавное нарастание интенсивности критической дополнительной нагрузки, чем при симметричном нагружении. Так, при увеличении начальной нагрузки в 10 раз от 1000 до 10000 Н/м в данном случае интенсивность критической нагрузки возрастает в 1,6 раза, а при симметричном нагружении – в 9,7 раза. Абсолютная же величина критической дополнительной нагрузки уменьшается при этом в среднем в 1,7 раза, что свидетельствует о более опасном воздействии несимметричного нагружения на раскрепленные висячие системы.

Повышение уровня раскрепления нити от нижнего пояса к верхнему оказывает на работу нитей конечной жесткости такое же воздействие, как и при симметричном нагружении – происходит значительное повышение критической нагрузки. Причем зависимость $q_2 = f(e_c)$ имеет практически тот же гиперболический характер, что и в указанном случае, т. е. при раскреплении нити в уровне верхнего пояса она не теряет устойчивости плоской формы изгиба ни при каких значениях дополнительной нагрузки.

Из рис. 8.38 и 8.39 видно, что несимметричная нагрузка совершенно меняет характер влияния жесткостных параметров нити на ее пространственную устойчивость. Так, если при симметричном нагружении увеличение жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и на кручение вызывает увеличение критической дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и почти не сказывается на раскрепленных нитях, то здесь наблюдается обратная зависимость, а именно: не очень заметное увеличение критической нагрузки в нераскрепленных и значительное ее увеличение в раскрепленных нитях. Это видно из следующего. При увеличении наименьшей жесткости нити на изгиб (см. рис. 8.38) в 10 раз от $4 \cdot 10^6$ до $40 \cdot 10^6$ кН·см² интен-

сивность критической нагрузки возрастает для свободных от связей нитей в 1,5 и 1,2 раза при приложении внешней нагрузки соответственно к нижнему и верхнему поясам, а для раскрепленных нитей – уже в 5,2 раза.

Аналогичный характер имеет также зависимость $q_2 = f(GI_d)$. Например, изменение жесткости на кручение (см. рис. 8.39) в 10 раз (от $0,5 \cdot 10^6$ до $5 \cdot 10^6$ кН·см²) вызывает увеличение дополнительной критической нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, в 1,2 раза независимо от эксцентриситета ее приложения, а в раскрепленных нитях – в 5,9 раза. Кроме того отметим, что зависимости $q_2 = f(EI_z)$ и $q_2 = f(GI_d)$ для нераскрепленных нитей весьма близки к линейным, а для раскрепленных нитей носят нелинейный характер.

8.3.3. Анализ результатов исследований. Анализ данных выполненных исследований позволяет сделать следующие выводы:

- характер дополнительной нагрузки заметно влияет на устойчивость плоской формы изгиба нитей конечной жесткости. Если при симметричном нагружении (нагрузка равномерно распределена по всему пролету) интенсивность критической нагрузки у нитей, раскрепленных связями в горизонтальной плоскости, отнесенная к интенсивности критической нагрузки у нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приблизительно равна 750, то при несимметричном нагружении (нагрузка равномерно распределена на половине пролета) отношение q_2^p/q_2^{cb} уменьшается до 60. Это является результатом одновременно происходящего уменьшения критической нагрузки для раскрепленных и увеличения для свободных нитей;
- симметричное нагружение по сравнению с несимметричным оказывается более опасным для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и, наоборот, для раскрепленных нитей более опасным по сравнению с симметричным будет несимметричное нагружение;
- жесткость нити на изгиб в горизонтальной плоскости и на кручение оказывает достаточно значительное влияние на интенсивность критической нагрузки. Причем при симметричном нагружении это влияние существеннее для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, а при несимметричном – для раскрепленных нитей;
- начальная равномерно распределенная нагрузка вызывает значительное увеличение критической дополнительной нагрузки как у нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, так и у раскрепленных. Отметим, что при несимметричном нагружении интенсивность критической нагрузки растет сравнительно медленнее, чем при симметричном;
- жесткое закрепление концов нити на опорах сказывается на интенсивности критической дополнительной нагрузки лишь тогда, когда нити имеют значительную жесткость на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и на кручение. С уменьшением жесткостных параметров разница между значениями критической нагрузки у нитей с жестким и шарнирным закреплением концов становится несущественной;

- раскрепление нити связями в горизонтальной плоскости в уровне нижнего пояса вызывает очень значительное увеличение интенсивности критической дополнительной нагрузки, которая при прочих равных с нераскрепленными нитями условиях возрастает в 750 раз. Повышение уровня установки связей от нижнего пояса нити к верхнему приводит к дальнейшему увеличению критической нагрузки, происходящему по гиперболической зависимости. При раскреплении нити конечной жесткости связями в уровне верхнего пояса устойчивость плоской формы изгиба нити полностью обеспечена как при симметричном, так и при несимметричном нагружении;

- понижение уровня приложения внешней нагрузки от верхнего пояса к нижнему оказывает на работу нитей конечной жесткости, свободных от связей в горизонтальной плоскости, такой же эффект, как и установка связей – происходит увеличение интенсивности критической дополнительной нагрузки. Однако если при симметричном нагружении критическая нагрузка связана с эксцентриситетом своего приложения гиперболической зависимостью, причем при приложении нагрузки к нижнему поясу нить пространственной устойчивости ни при каких условиях не теряет, то при несимметричном нагружении эта зависимость имеет уже параболический характер. Последнее означает, что при несимметричном нагружении нить теряет устойчивость плоской формы изгиба при приложении внешней нагрузки как к верхнему, так и к нижнему поясам нити конечной жесткости.

§ 8.4. Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости за пределом упругости

Рассмотрим упруго-пластическую нить конечной жесткости пролетом $l = 150$ м с идеальным поперечным сечением площадью $F = 1,2 \cdot 10^{-2}$ м². Материал нити принят идеальным упруго-пластическим с модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Нить шарнирно подвешена к двум размещенным на одном уровне опорам и загружена начальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q_1 = 0,942$ кН/м. Стрела провисания нити при начальной нагрузке составляет $y_0 = 6$ м. Нить загружена дополнительной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q_2 по всей ее длине. Эксцентриситеты приложения начальной и дополнительной нагрузок e_1 и e_2 равны нулю.

8.4.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете.

На рис. 8.40 показана зависимость перемещений упруго-пластической нити конечной жесткости в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки на всем пролете при различных значениях предела текучести материала нити σ_T . Из данного рисунка следует, что в упругой стадии работы нить в середине пролета поднимается вверх, что обусловлено изменением формы кривой провисания – от заданной к параболической. С появлением пластических деформаций знак перемещений изменяется

на противоположный и нить в середине пролета начинает опускаться. Отметим, что предел текучести материала нити заметно влияет на ее работу под нагрузкой. Так, при прочих равных условиях, нити с меньшим параметром σ_T являются более деформативными. При этом увеличение значения предела текучести материала всего лишь на 3,7 % (с 216 до 224 МПа) уменьшает прогиб в середине пролета нити в 2,8 раза и увеличивает критическую нагрузку в 1,1 раза. Кроме этого, увеличение параметра текучести материала приводит к наступлению упруго-пластической стадии работы нити и потере ею устойчивости при больших значениях интенсивности дополнительной нагрузки. При этом с возрастанием σ_T увеличение критической нагрузки происходит почти прямо пропорционально.

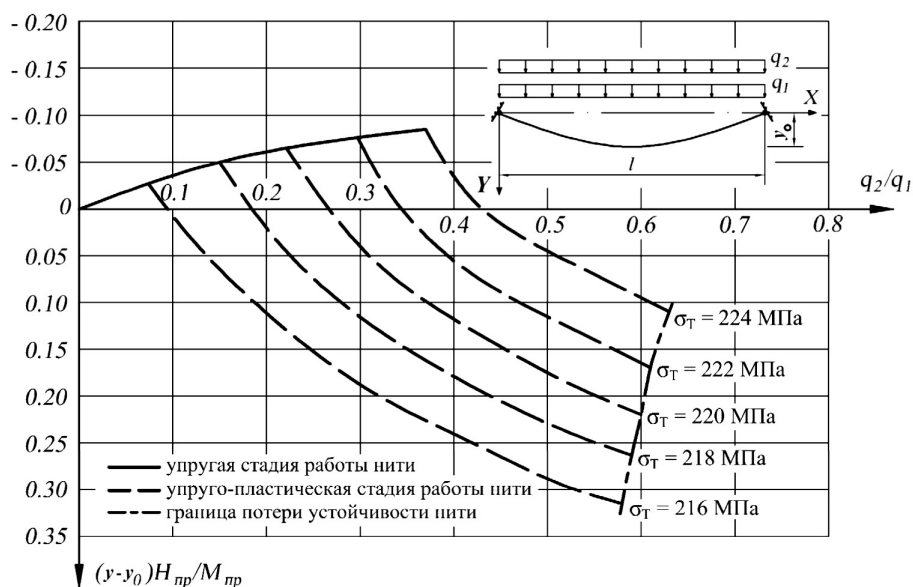


Рис. 8.40. Зависимость перемещений упруго-пластической нити конечной жесткости в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

На рис. 8.41 представлены графики зависимости координаты границы раздела участков нити от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки, имеющие ярко выраженный нелинейный характер. Отметим, что предел текучести материала σ_T влияет только на размер участков нити, но при этом оставляет неизменной качественную картину их изменения. Например, увеличение параметра σ_T на 2 МПа приводит к увеличению отношения q_2/q_1 , соответствующего моменту возникновения первых пластических деформаций, приблизительно на 0,08. С возрастанием дополнитель-

ной нагрузки кривые сближаются. Это свидетельствует о том, что для нитей с разными величинами σ_T отличие в размерах участков с возрастанием нагрузки постепенно уменьшается. Также отметим, что увеличение значения σ_T на 3,7 % (с 216 до 224 МПа) приводит к уменьшению размера пластического участка в момент потери устойчивости нити в 1,1 раза.

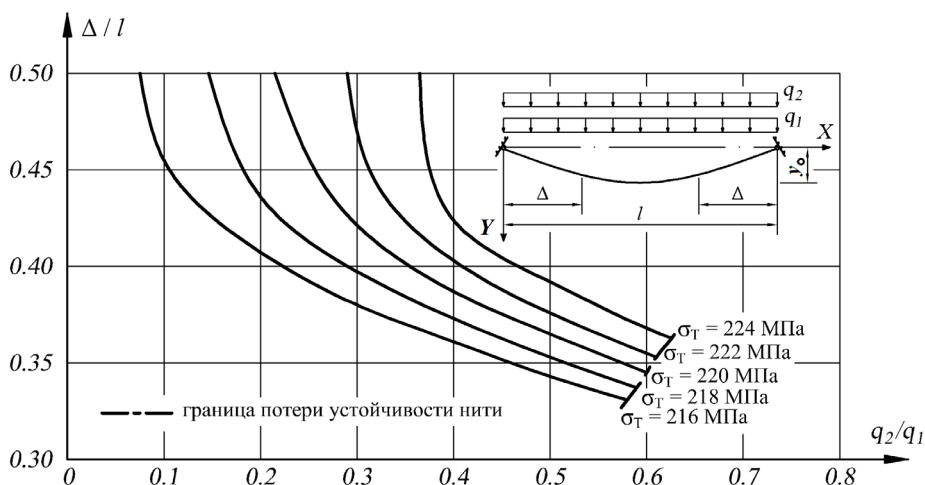


Рис. 8.41. Зависимость координаты границы раздела участков нити от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

В табл. 8.1 отражены расположение и численные значения размеров упругих и пластических участков по длине нити при различных значениях дополнительной равномерно распределенной нагрузки и σ_T .

На рис. 8.42 приведен график зависимости критической дополнительной равномерно распределенной нагрузки от эксцентриситета ее приложения при различных начальных значениях стрелы провисания y_0 . Из рисунка видно, что эта зависимость имеет вид, близкий к гиперболическому независимо от величины y_0 . При увеличении e_2 от 0 до $0,25h$ происходит резкое уменьшение критической нагрузки. Дальнейшее возрастание эксцентриситета приложения нагрузки также сопровождается уменьшением параметра $q_{2кр}$, но интенсивность уменьшения последнего при этом значительно замедляется. Существенно сказывается на величине критической дополнительной равномерно распределенной нагрузки изменение начальной стрелы провисания. В частности, при эксцентриситете $e_2 = 0$ нить со стрелой провисания $y_0 = 7$ м теряет устойчивость при значении дополнительной нагрузки $q_{2кр} = 3,57q_1$, а с $y_0 = 6$ м – при $q_{2кр} = 0,967q_1$. Нужно отметить, что на протяжении всего графика критическая нагрузка для нити со стрелой провисания 7 м приблизительно в 4 раза превышает критическую нагрузку для нити со стрелой провисания 6 м. Последнее свидетельствует о том, что нить с большим параметром

y_0 является более устойчивой.

Таблица 8.1

q_2/q_1	Координата границы между упругими и пластическими участками Δ , м				
	$\sigma_t = 216 \text{ МПа}$	$\sigma_t = 218 \text{ МПа}$	$\sigma_t = 220 \text{ МПа}$	$\sigma_t = 222 \text{ МПа}$	$\sigma_t = 224 \text{ МПа}$
0.1					
0.2					
0.3					
0.4					
0.5					
0.6					

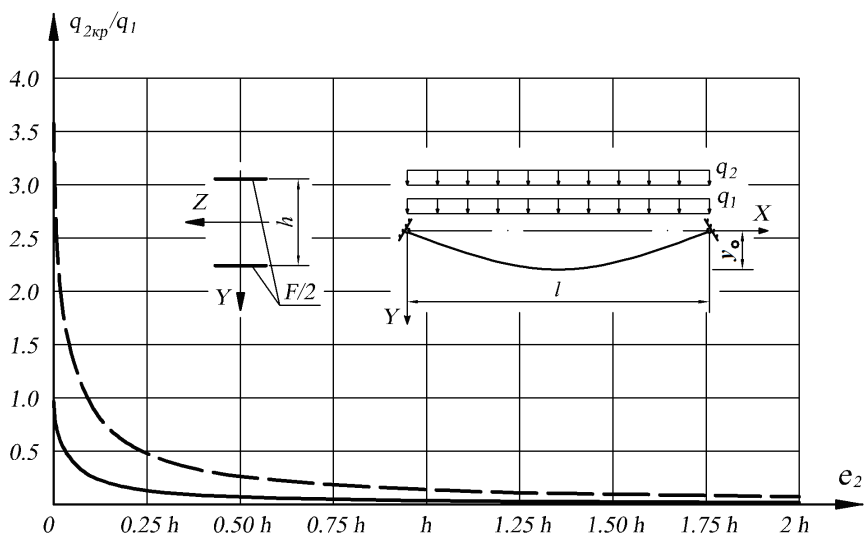


Рис. 8.42. Зависимость критической дополнительной равномерно распределенной нагрузки от эксцентриситета ее приложения при различных начальных стрелах провисания:

———— $y_0 = 6$ м; - - - - - $y_0 = 7$ м

Рис. 8.43 отражает зависимость критического распора от эксцентриситета приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Из анализа приведенных на рисунке кривых следует, что характер изменения этой зависимости носит существенно нелинейный характер и по своему виду подобен зависимости, представленной на рис. 8.42. Следует заметить, что в нити с начальной стрелой провисания $y_0 = 7$ м разность критических распоров, соответствующих эксцентриситетам приложения нагрузки $e_2 = 0$ и $e_2 = 2h$, в 2,43 раза превышает аналогичный параметр для нити со стрелой провисания $y_0 = 6$ м. Это обусловлено тем, что, с одной стороны, у нитей с увеличением стрелы провисания распор уменьшается, поэтому критический распор при $e_2 = 2h$ у нити с $y_0 = 7$ м меньше. Но, с другой стороны, нити с большей стрелой провисания являются более устойчивыми (см. рис. 8.42) и поэтому с уменьшением эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки критический распор у нити с $y_0 = 7$ м становится больше, чем у нити с $y_0 = 6$ м.

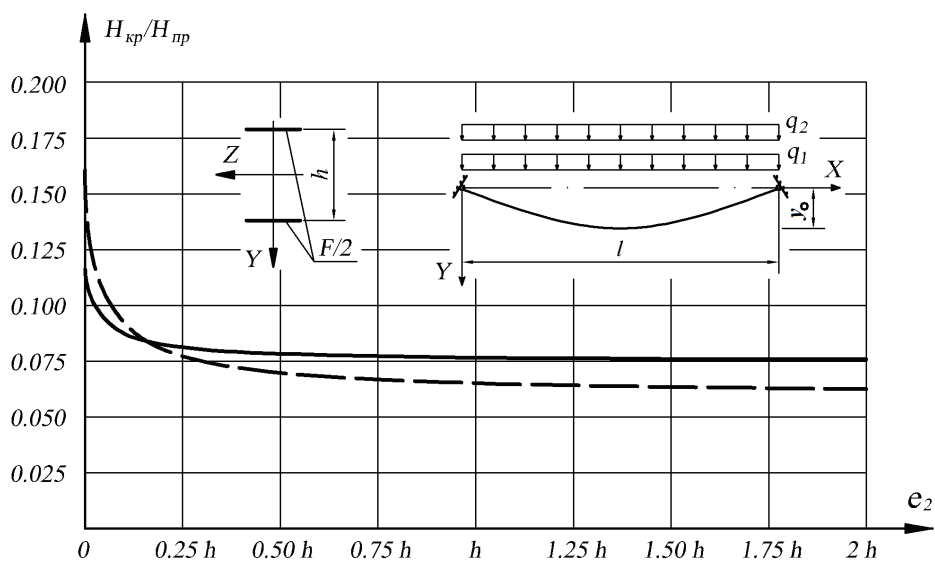


Рис. 8.43. Зависимость критического распора от эксцентриситета приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки при различных начальных стрелах провисания:

———— $y_0 = 6$ м; - - - - - $y_0 = 7$ м

На рис. 8.44 представлены кривые зависимости между пределом текучести материала нити и критической дополнительной равномерно распределенной нагрузкой для нити с начальной стрелой провисания $y_0 = 6$ м. Из рисунка следует, что характер изменения представленных кривых не зависит от экс-

центриситета приложения дополнительной нагрузки. Так, в упруго-пластической нити с увеличением предела текучести материала нити σ_T возрастание интенсивности критической нагрузки происходит почти линейно. Однако когда параметр σ_T достигает значения, при котором в нити в момент потери устойчивости не возникают пластические деформации, в кривых появляется точка излома и увеличение критической дополнительной нагрузки прекращается даже при дальнейшем возрастании σ_T . Это свидетельствует о том, что предел текучести материала не влияет на устойчивость упругих нитей. Также отметим, что кривая претерпевает излом при эксцентриситете приложения нагрузки $e_2 = 0$, когда критическая дополнительная нагрузка достигает значения $q_{2кр} = 0,967q_1$. Для эксцентриситетов $e_2 = h/4$ и $e_2 = h/2$ аналогичные значения $q_{2кр}$ равны $0,133q_1$ и $0,072q_1$ соответственно.

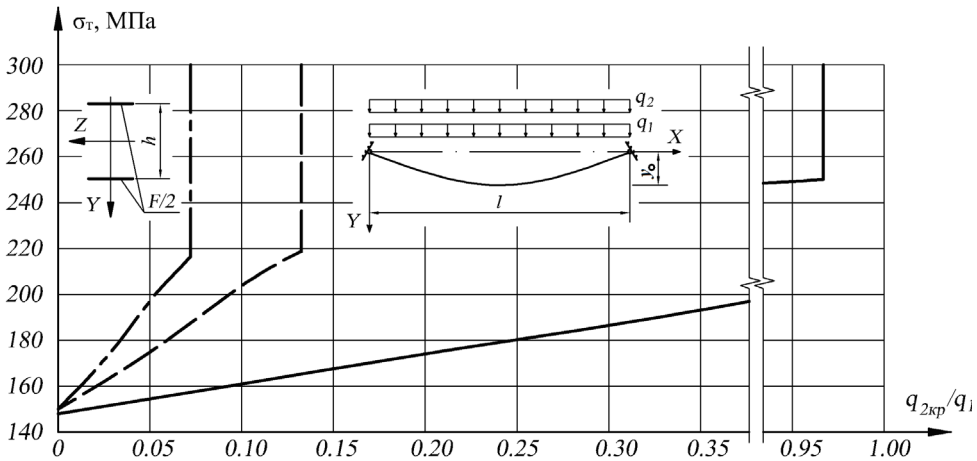


Рис. 8.44. Зависимость между пределом текучести материала нити и критической дополнительной равномерно распределенной нагрузкой при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки:
 ————— $e_2 = 0$; - - - - - $e_2 = h/4$; - · - · - $e_2 = h/2$

Графики зависимости между пределом текучести материала нити и длиной пластического участка построены на рис. 8.45. Из рисунка видно, что представленные кривые имеют подобный характер изменения независимо от величины эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки. При величине параметра $\sigma_T = 150$ МПа длина пластического участка нити приблизительно равна $0,614l$ независимо от величины e_2 . С возрастанием предела текучести материала σ_T происходит уменьшение пластического участка по параболической зависимости. Когда σ_T достигает значения 216,6 МПа для $e_2 = h/2$, то отношение $l_{пл}/l = 0$, что свидетельствует о том, что при данном значении σ_T пластические деформации в нити в момент потери устойчивости отсутствуют (см. рис. 8.44). Аналогичное значение предела текучести мате-

риала для нитей с $e_2 = 0$ и $h/4$ составляют 249,8 и 218,8 МПа соответственно.

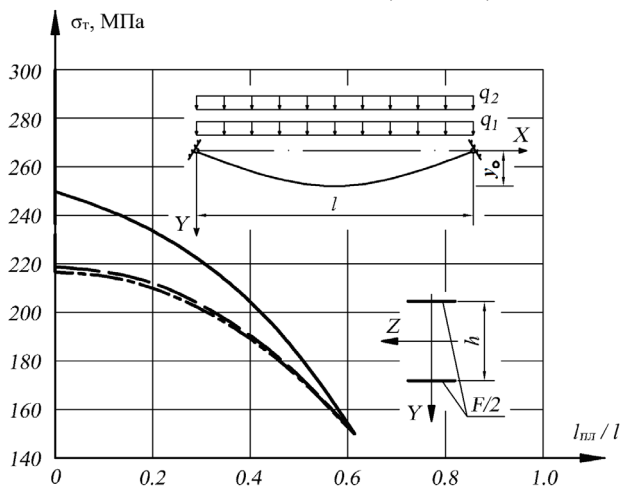


Рис. 8.45. Зависимость между пределом текучести материала нити и длиной пластического участка при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки:

————— $e_2 = 0$; - - - - - $e_2 = h/4$; - · - · - $e_2 = h/2$

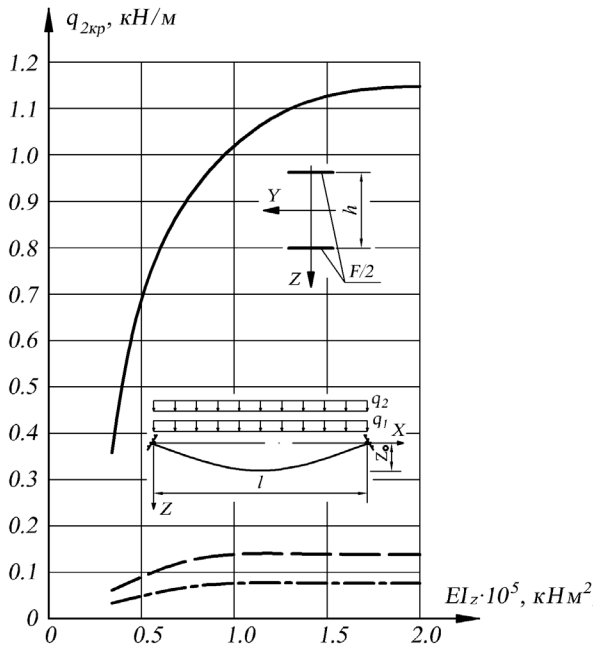


Рис. 8.46. Зависимость между критической дополнительной равномерно распределенной нагрузкой и жесткостью нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки при различных эксцентриситетах

приложения дополнительной нагрузки:

————— $e_2 = 0$; - - - - - $e_2 = h/4$; — - - - - $e_2 = h/2$

На рис. 8.46 изображен график зависимости критической дополнительной равномерно распределенной нагрузки от изгибной жесткости нити из плоскости действия внешней нагрузки при различных значениях эксцентриситета ее приложения. Из рисунка видно, что увеличение изгибной жесткости нити вызывает значительный рост интенсивности критической дополнительной нагрузки. Так, при $e_2 = 0$ увеличение изгибной жесткости почти в 6 раз (от $0,34 \cdot 10^5$ до $2 \cdot 10^5$ кНм²) приводит к возрастанию критической дополнительной нагрузки в 3,2 раза. В тоже время повышение эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки приводит к ослаблению данного влияния. Так, для случаев $e_2 = h/4$ и $e_2 = h/2$ аналогичному увеличению изгибной жесткости соответствует возрастание $q_{2кр}$ в 2,3 раза.

8.4.2. Анализ результатов исследований. Анализ данных выполненных исследований позволяет сделать следующие выводы:

- увеличение предела текучести материала упруго-пластической нити приводит к увеличению дополнительной критической нагрузки, т.е. нить становится более устойчивой. В тоже время на упругие нити данное утверждение не распространяется;
- повышение уровня приложения дополнительной нагрузки приводит к уменьшению величины критической нагрузки. При этом, чем меньше начальная стрела провисания упруго-пластической нити, тем менее устойчивой она является. Однако на качественную картину изменения критической нагрузки от эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки начальная стрела провисания не влияет, а отличие заключается лишь в количественных характеристиках;
- изгибная жесткость нити из плоскости действия внешней нагрузки оказывает достаточно значительное влияние на величину интенсивности критической нагрузки. С повышением уровня приложения дополнительной нагрузки данное влияние уменьшается. Нужно отметить, что независимо от величины эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки с увеличением изгибной жесткости из плоскости действия внешней нагрузки возрастание интенсивности критической нагрузки происходит по параболической зависимости и отличается только количественными характеристиками.

§ 8.5. Влияние пластических деформаций на работу поперечных сечений нити конечной жесткости при потере устойчивости плоской формы изгиба

Рассмотрим работу поперечных сечений нити конечной жесткости с учетом развивающихся в сечениях областей пластических деформаций при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба. Работа поперечных сечений нити зависит от многих факторов: вида и размеров сечения и областей пла-

стических деформаций, жесткости нити на растяжение и изгиб, характера и величины действующих нагрузок, геометрических параметров нити и др. Для изучения влияния указанных факторов на работу поперечных сечений нити проводились численные исследования. При этом исходные данные для поперечных сечений принимались из существующего сортамента металлопроката таким образом, чтобы охватить как можно более широкий класс висячих систем.

8.5.1. Тавровое сечение. В случае тавра 13ШТ1 (рис. 8.47, *а*) можно заметить, что график зависимости угла наклона границы раздела от относительной высоты части упругого ядра при односторонней пластичности в стенке (при чистом изгибе зона пластичности изначально появляется только в стенке) приближается к параболическому виду. Причем указанный график имеет два ярко выраженных характерных участка: первый (с односторонней пластичностью) на интервале изменения параметра ζ от 1 до 0,234, когда функция ω_1 возрастает достаточно монотонно, и второй (с двусторонней пластичностью) при $\zeta = 0,232 - 0,132$, когда интенсивность увеличения значений функции ω_1 резко возрастает. Отметим, что первый участок отвечает случаю, когда граница раздела проходит через нижнюю горизонтальную грань стенки, а второй – через стенку и полку.

Из рис. 8.47, *а* также видно, что между двумя отмеченными ранее участками находится весьма незначительный по своей протяженности третий участок, ограниченный значениями параметра ζ от 0,234 до 0,232. Причем данный отрезок графика характерен тем, что на этом интервале изменения параметра ζ угол наклона границы раздела увеличивается до такой степени, что граница раздела начинает пересекать боковую вертикальную грань стенки. При дальнейшем возрастании угла наклона наступает двусторонняя пластичность поперечного сечения, а при угле наклона границы раздела, соответствующему $\omega_1 = 97,62$, полка тавра становится полностью пластичной.

Подобные кривые можно получить и для других тавровых сечений (рис. 8.47, *б, в*). Следует отметить, что кривая зависимости $\omega_1(\zeta)$ для прямоугольного поперечного сечения (рис. 8.47, *з*) [59] качественно отличается от соответствующих кривых для тавровых поперечных сечений и приближается к гиперболическому виду.

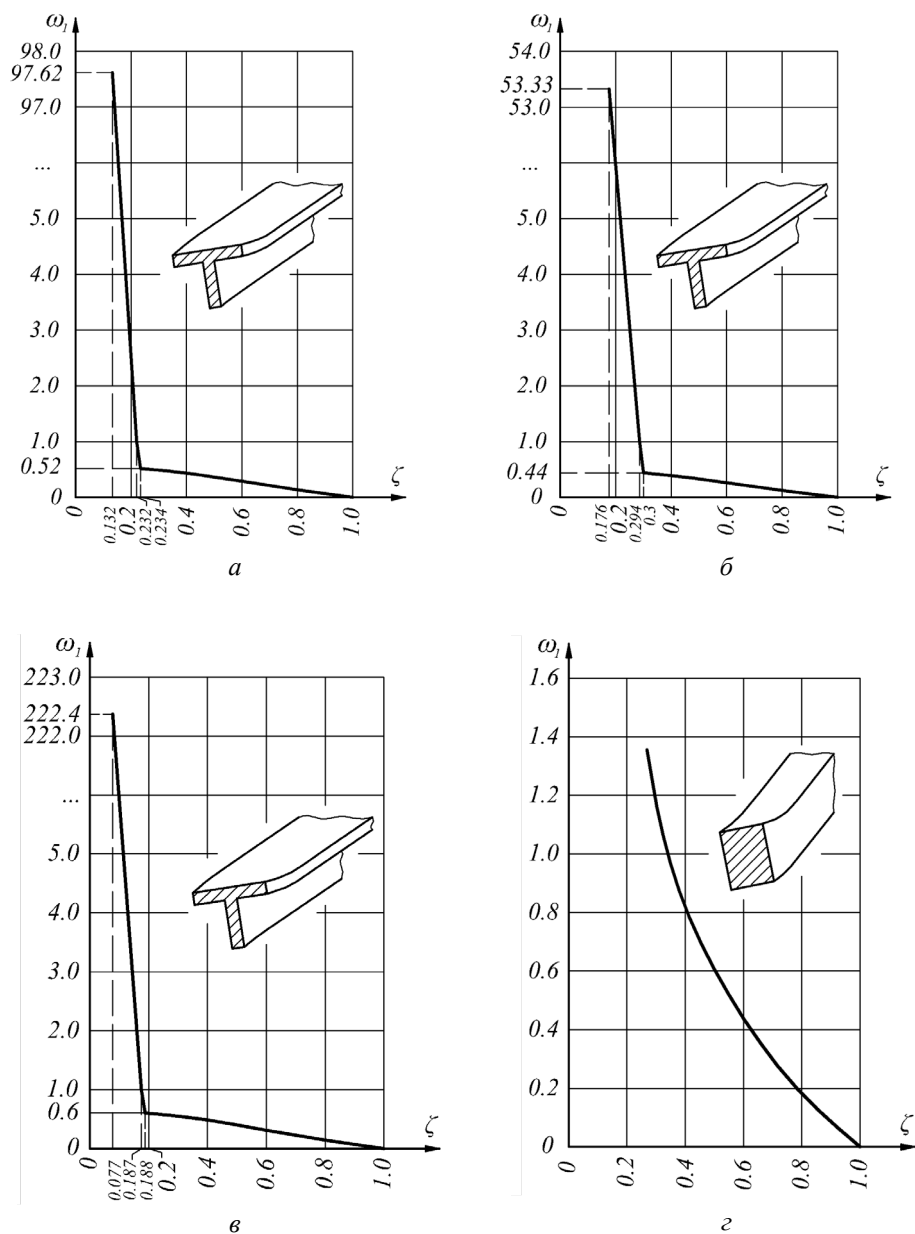


Рис. 8.47. Зависимость между параметром ζ и функцией ω_1 для поперечного сечения из тавра:
a – 13ШТ1; *б* – 30ШТ4; *в* – 15КТ1; *г* – прямоугольное поперечное сечение

8.5.2. Швеллерное сечение с вертикальной стенкой. Для швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой реализуется стадия работы только с двумя областями пластичной деформации. Для этого случая на рис. 8.48 показаны графики зависимости $\omega_1(\zeta)$, где параметр ζ характеризует относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью. На рисунке для сравнения также представлен аналогичный график, полученный Л. М. Качановым [59] для прямоугольного поперечного сечения.

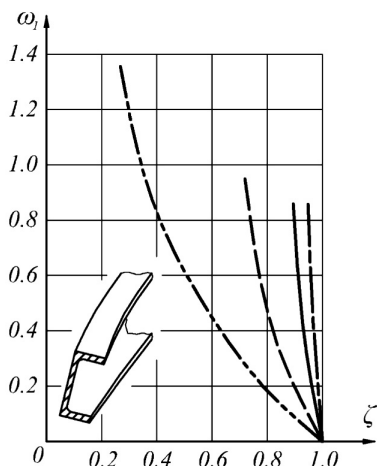


Рис. 8.48. Зависимость между параметром ζ и функцией ω_1 для поперечного сечения из швеллера с вертикальной стенкой:

- · — · — швеллер 5П;
- швеллер 16П;
- · — — швеллер 30Л;
- — — — прямоугольное поперечное сечение

Из анализа приведенных на рис. 8.48 графиков можно сделать вывод, что для швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой увеличение площади областей пластичности приводит к достаточно быстрому возрастанию угла наклона границы раздела для больших номеров швеллерного сортамента по сравнению с их меньшими номерами, а также для всех швеллеров по сравнению с прямоугольным поперечным сечением.

При этом для швеллера 5П можно отметить, что угол наклона границы раздела возрастает приблизительно в 2,5 раза быстрее, чем для прямоугольного поперечного сечения. При $\omega_1 = 0,95$ полки данного швеллера становятся полностью пластичными.

Для швеллеров 16П и 30Л угол наклона тоже возрастает быстрее по сравнению с прямоугольным поперечным сечением, приблизительно в 7 и 12 раз соответственно, а полки этих швеллеров становятся полностью пластичными при $\omega_1 = 0,85$. Также следует отметить, что возрастание угла наклона границы раздела прямо пропорционально высоте швеллера.

8.5.3. Швеллерное сечение с горизонтальной стенкой. Для случая швеллера с горизонтальной стенкой на рис. 8.49 приведен вид функции $\omega(\zeta)$, в которой параметр ζ , как и раньше, характеризует относительную высоту

части упругого ядра поперечного сечения, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью. Для сравнения здесь также показан график для прямоугольного поперечного сечения, полученный Л. М. Качановым [59].

Анализ результатов, характеризующих работу швеллера с горизонтальной стенкой при развитии пластичных областей, показал следующее. Кривая зависимости угла наклона границы раздела от относительной высоты части упругого ядра при односторонней пластичности в полках (при чистом изгибе зона пластичности изначально появляется только в полках) близка к параболическому виду только на определенных участках. Например, для швеллера 30Л такой вид кривой отмечается на интервале $1 \leq \zeta \leq 3,3$.

При значении же $\zeta = 1$ в кривых присутствует точка излома графика. Именно с этого момента в рассматриваемом поперечном сечении появляется двусторонняя пластичность, угол границы раздела начинает возрастать значительно быстрее, а его зависимость приближается к гиперболическому виду. Можно отметить, что кривая зависимости $\omega(\zeta)$ для прямоугольного поперечного сечения также близка к гиперболическому виду, но угол наклона увеличивается быстрее при поперечном сечении из швеллера с горизонтальной стенкой. В частности, для швеллера 30Л угол наклона границы раздела возрастает приблизительно в 2,3 раза быстрее, чем для прямоугольного сечения. При $\omega = 0,81$ стенка данного швеллера становится полностью пластичной и кривая обрывается. Стенки швеллеров 5П и 16П становятся полностью пластичными при $\omega = 0,65$.

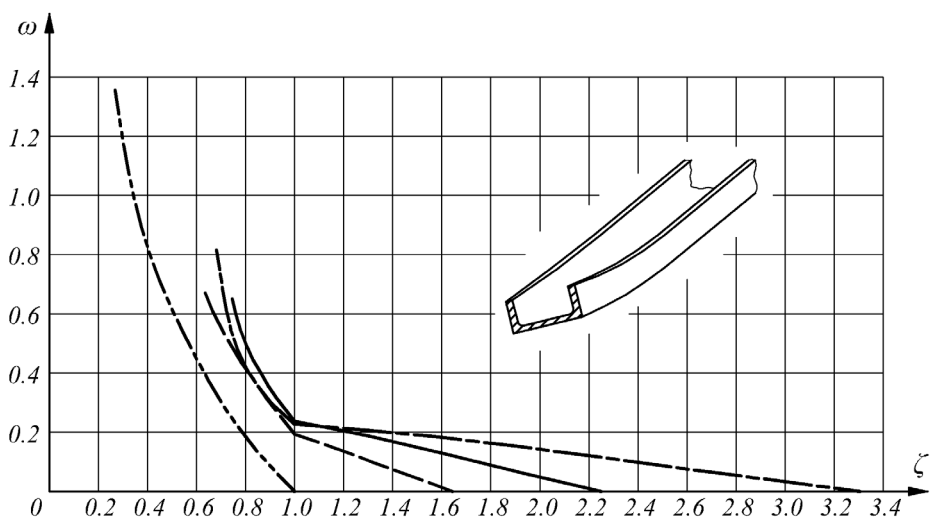


Рис. 8.49. Зависимость между параметром ζ и функцией ω для поперечного сечения из швеллера с горизонтальной стенкой:
 - - - - - швеллер 5П; ————— швеллер 16П; - - - - - швеллер 30Л;
 — · — · — — — — — прямоугольное поперечное сечение

§ 8.5.4. Угловое сечение с неравными полками. На рис. 8.50 представлены кривые зависимости $\omega_1(\zeta)$, где параметр ζ характеризует относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения в виде неравнополочного уголка, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью.

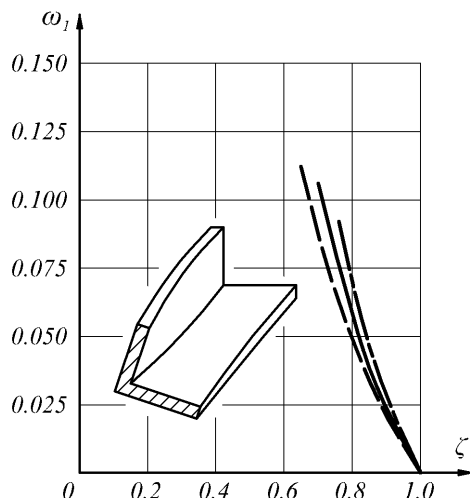


Рис. 8.50. Зависимость между параметром ζ и функцией ω_1 для поперечного сечения из неравнополочного уголка:

- — — — — уголок 25×16×3;
- уголок 100×65×10;
- · - · - · - уголок 200×125×16

При рассмотрении рис. 8.50 можно заметить, что представленные на нем кривые зависимости $\omega_1(\zeta)$ имеют нелинейный характер, а их вид приближается к гиперболическому. В кривых, соответствующих более крупным уголкам, угол наклона границы раздела увеличивается быстрее, чем в уголках меньшего сортамента. Точки обрыва кривых соответствуют моменту наступления полной пластичности в горизонтальных полках уголков. Следует отметить, что в более крупных уголках полная пластичность в горизонтальных полках достигается быстрее при меньшем угле наклона границы раздела. В частности, в уголке 25×16×3 горизонтальная полка полностью охватывается пластическими деформациями при $\omega_1 = 0,112$, а в уголках 100×65×10 и 200×125×16 – при $\omega_1 = 0,106$ и $0,092$ соответственно. При этом значение функции ω_1 , при котором в горизонтальной полке развивается полная пластичность, для самого маленького уголка – 25×16×3 в 1,22 раза превышает аналогичный параметр для самого крупного уголка 200×125×16.

8.5.5. Анализ результатов исследований. Анализ данных выполненных исследований поперечных сечений нити конечной жесткости с учетом зон одно- и двусторонней пластичности при выпучивании нити в горизонтальной плоскости позволяет сделать следующие выводы:

- с наступлением упруго-пластической фазы работы нити конечной жесткости граница раздела между областями нагружения и разгрузки, образовавшимися в поперечном сечении нити при появлении пластических деформаций, начинает свое отклонение от вертикальной оси, причем с уменьшением параметра, характеризующего относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения нити, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью, граница раздела все более приближается к горизонтальной оси и в предельном случае совпадает с ней;

- для рассмотренных типов поперечных сечений нити область нагружения всегда больше области разгрузки, а граница раздела всегда пересекает область пластической деформации за исключением швеллера с горизонтальной стенкой при односторонней пластичности в полках, для которого граница раздела проходит между пластичными областями;

- для таврового поперечного сечения нити темпы роста угла наклона границы раздела малы лишь при односторонней пластичности и только тогда, когда граница пересекает нижнюю горизонтальную грань стенки. Как только граница раздела пересечет боковую вертикальную грань стенки, темпы роста угла наклона многократно увеличиваются. Появление же пластических участков в полке тавра приводит к еще большему увеличению угла наклона границы раздела;

- сопоставление графиков зависимости угла наклона границы раздела от параметра, характеризующего относительную высоту части упругого ядра, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью, для поперечных сечений в виде швеллеров с вертикальной стенкой и прямоугольника, показало, что в швеллерных сечениях угол наклона границы раздела увеличивается значительно быстрее. При этом чем больше номер швеллерного сортамента, тем быстрее увеличивается угол наклона границы раздела. Кроме того отметим, что независимо от размеров поперечного сечения, графики качественно не отличаются, а различие имеет только количественный характер;

- в случае поперечного сечения нити из швеллера с горизонтальной стенкой можно выделить два участка кривой для угла наклона границы раздела. На первом участке при односторонней пластичности в полках происходит монотонное увеличение угла наклона. С появлением же пластических деформаций в стенке швеллера кривая видоизменяется, а темпы роста угла наклона границы раздела резко увеличиваются.

§ 8.6. Сопоставление теоретических результатов с данными экспериментальных исследований

Сравнение результатов расчета с данными экспериментальных исследований проводилось для нити конечной жесткости, подверженной действию дополнительной равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузок, а также для фермы конечной жесткости, находящейся под действием дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Проводилось также сравнение методов расчета фермы конечной жесткости на устойчивость плоской формы изгиба. Решения этих задач аналитическими и экспериментальными методами приведены в работах [50, 62, 199–201].

Результаты сравнения полученных решений с данными экспериментальных исследований для нити конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис. 8.51) приведены в табл. 8.2, из которой видно, что максимальная погрешность при определении распора по уточненной теории составляет 0,2 %, по МКЭ – 0,8 %, по приближенному методу – 0,6 % и по аналитическому решению – 0,3 %. Погрешность при определении стрелы провисания нити в середине пролета составила: по уточненной теории – 1,1 %, по МКЭ – 0,2 %, по приближенному методу – 1,8 % и по аналитическому решению – 1,5 %. При приближении к опорам погрешность при определении стрелы провисания уточненным и приближенным методами возрастает, достигая максимального значения в приопорных участках длиной 0,15 пролета.

Максимальная погрешность при вычислении изгибающих моментов по уточненной теории составляет 9,4 %, по МКЭ – 8,8 %, по приближенному методу – 10,8 % и по аналитическому решению – 10,7 %. Из табл. 8.2 видно, что изгибающие моменты, определенные по МКЭ, приближенному методу и аналитическому решению, превышают опытные по всему пролету, а определенные по уточненной теории – только на участке 0,25–0,75 пролета. В приопорных участках изгибающие моменты, вычисленные по уточненной теории, меньше, чем определенные экспериментально.

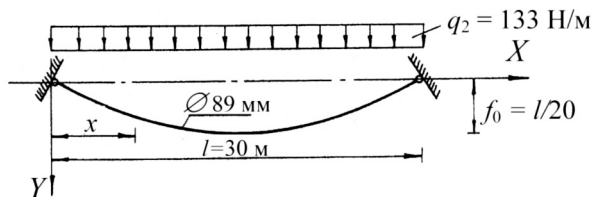


Рис. 8.51. К сопоставлению результатов расчета нити конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Таблица 8.2

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор, $H/\%$	Стрела провисания, см / %	Изгибающий момент, Нм / %
0,0	I	14314,9/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	14343,4/100,2	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	14201,7/99,2	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	14400,8/100,6	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	14361,8/100,3	0,0/100,0	0,0/100,0
0,1	I	14314,9/100,0	48,9/100,0	1531,1/100,0
	II	14343,4/100,2	51,1/103,5	1387,2/90,6
	III	14201,7/99,2	49,0/100,2	1645,0/107,4
	IV	14400,8/100,6	51,6/104,5	1682,0/109,9
	V	14361,8/100,3	49,4/101,0	1694,3/110,7
0,2	I	14314,9/100,0	91,8/100,0	2314,2/100,0
	II	14343,4/100,2	93,6/101,9	2182,7/94,3
	III	14201,7/99,2	91,3/99,4	2356,7/101,8
	IV	14400,8/100,6	94,6/103,1	2436,9/105,3
	V	14361,8/100,3	91,7/99,8	2411,4/104,2
0,3	I	14314,9/100,0	124,0/100,0	2568,9/100,0
	II	14343,4/100,2	123,6/99,7	2762,4/107,5
	III	14201,7/99,2	123,3/99,4	2767,2/107,7
	IV	14400,8/100,6	124,6/100,5	2771,6/107,9
	V	14361,8/100,3	123,4/99,5	2764,1/107,6
0,4	I	14314,9/100,0	143,5/100,0	2726,3/100,0
	II	14343,4/100,2	142,2/99,1	2979,8/109,3
	III	14201,7/99,2	143,1/99,7	2964,9/108,8
	IV	14400,8/100,6	142,8/99,5	3020,7/110,8
	V	14361,8/100,3	141,7/98,8	2963,2/108,7
0,5	I	14314,9/100,0	150,1/100,0	2902,6/100,0
	II	14343,4/100,2	148,5/98,9	3039,6/104,7
	III	14201,7/99,2	149,8/99,8	2994,9/103,2
	IV	14400,8/100,6	147,3/98,2	3126,1/107,7
	V	14361,8/100,3	147,8/98,5	3066,1/105,6

Примечание. I – эксперимент [199]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; V – аналитическое решение [62].

В табл. 8.3 приведены результаты сравнения теоретических и экспериментальных значений распора, стрелы провисания и изгибающих моментов в нити конечной жесткости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, расположенной в середине пролета (рис. 8.52). В этом случае наблюдается несколько большая погрешность при определении характеристик напряженно-деформированного состояния нити, чем при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, погрешность при определении распора по уточ-

ненной теории составляет 0,8 %, по МКЭ – 1,1 %, по приближенному методу – 1,3 % и по аналитическому решению – 1,6 %. Погрешность при определении стрелы провисания нити в середине пролета по уточненной теории составляет 1,5 %, по МКЭ – 0,5 %, по приближенному методу – 2,1 % и по аналитическому решению – 1,8 %. При этом, как и в случае с дополнительной равномерно распределенной нагрузкой, погрешность при определении стрелы провисания уточненным и приближенным методами увеличивается при приближении к опорам, а максимального значения достигает в приопорных участках длиной 0,15 пролета.

Таблица 8.3

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор, Н / %	Стрела провисания, см / %	Изгибающий момент, Нм / %
0,0	I	7736,6/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	7796,4/100,8	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	7818,4/101,1	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	7837,2/101,3	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	7861,3/101,6	0,0/100,0	0,0/100,0
0,1	I	7736,6/100,0	46,2/100,0	1030,2/100,0
	II	7796,4/100,8	48,8/104,6	913,8/88,7
	III	7818,4/101,1	46,9/101,5	1135,2/110,2
	IV	7837,2/101,3	49,8/106,2	1147,5/111,4
	V	7861,3/101,6	47,4/102,6	1191,5/115,8
0,2	I	7736,6/100,0	88,5/100,0	1790,6/100,0
	II	7796,4/100,8	90,7/102,5	1630,4/91,1
	III	7818,4/101,1	88,8/100,3	1907,4/106,5
	IV	7837,2/101,3	93,0/104,1	1933,3/108,0
	V	7861,3/101,6	89,5/101,1	1917,7/107,1
0,3	I	7736,6/100,0	122,3/100,0	2220,2/100,0
	II	7796,4/100,8	122,3/100,0	2471,5/111,3
	III	7818,4/101,1	122,1/ 99,8	2496,7/112,5
	IV	7837,2/101,3	123,5/101,0	2513,8/113,2
	V	7861,3/101,6	1122,2/ 99,9	2545,9/114,7
0,4	I	7736,6/100,0	144,8/100,0	2890,4/100,0
	II	7796,4/100,8	143,4/ 99,0	3245,9/112,3
	III	7818,4/101,1	144,3/ 99,6	3130,6/108,3
	IV	7837,2/101,3	143,0/ 98,7	3315,3/114,7
	V	7861,3/101,6	142,7/ 98,5	3367,4/116,6
0,5	I	7736,6/100,0	153,2/100,0	3950,1/100,0
	II	7796,4/100,8	152,3/ 99,4	4301,6/108,9
	III	7818,4/101,1	152,9/ 99,5	4127,9/104,5
	IV	7837,2/101,3	150,7/ 98,4	4349,1/110,1
	V	7861,3/101,6	150,4/ 98,2	4399,3/111,4

Примечание. I – эксперимент [199]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; V – аналитическое решение [62].

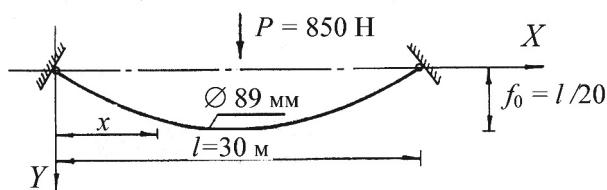


Рис. 8.52. К сопоставлению результатов расчета нити конечной жесткости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки

Максимальная погрешность при определении изгибающих моментов составляет: по уточненной теории – 12,3 %, по МКЭ – 12,5 %, по приближенному методу – 14,7 % и по аналитическому решению – 16,6 %.

Результаты сравнения полученных решений с данными экспериментальных исследований для фермы конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис. 8.53) приведены в табл. 8.4. Максимальная погрешность при определении распора в верхнем поясе фермы по уточненной теории составляет 1,3 %, по МКЭ – 1,5 %, по приближенному методу – 2,1 % и по аналитическому решению – 1,5 %. Соответственно для нижнего пояса максимальная погрешность составляет 1,1; 1,3; 1,7 и 1,2 %. Из табл. 8.4 видно, что погрешность при определении прогиба в середине пролета составляет: по уточненной теории – 1,0 %, по МКЭ – 0,6 %, по приближенному методу – 2,2 % и по аналитическому решению – 1,7 %. Причем максимальная погрешность наблюдается в приопорных участках длиной 0,15 пролета.

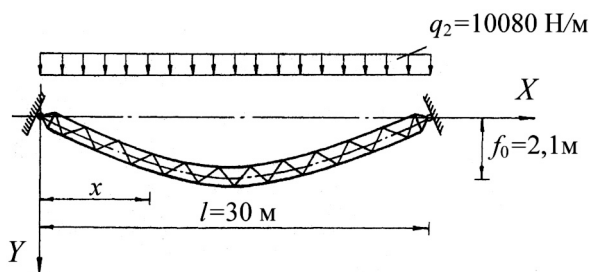


Рис. 8.53. К сопоставлению результатов расчета фермы конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Таблица 8.4

Относи- тельная коорди- ната, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор в поясе, Н/ %		Прогиб, см / %	Изгибающий момент, Нм / %
		верхнем	нижнем		
0,0	I	191400/100,0	338800/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	188529/98,5	334734/98,8	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	195419/102,1	344560/101,7	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	194222/101,5	342830/101,2	0,0/100,0	0,0/100,0
0,125	I	191400/100,0	338800/100,0	3,92/100,0	21360/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	4,13/105,3	19073/89,3
	III	188529/98,5	334734/98,8	3,97/101,2	23453/109,8
	IV	195419/102,1	344560/101,7	4,21/107,4	23774/111,3
	V	194222/101,5	342830/101,2	4,05/103,3	23911/111,9
0,241	I	191400/100,0	338800/100,0	6,99/100,0	32800/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	7,01/100,3	3128/101,0
	III	188529/98,5	334734/98,8	6,93/99,2	34014/103,7
	IV	195419/102,1	344560/101,7	7,21/103,2	35129/107,1
	V	194222/101,5	342830/101,2	6,95/ 99,4	34571/105,3
0,360	I	191400/100,0	338800/100,0	9,00/100,0	40343/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	8,91/99,0	44337/109,9
	III	188529/98,5	334734/98,8	8,95/99,4	43005/106,6
	IV	195419/102,1	344560/101,7	8,93/99,2	45467/112,7
	V	194222/101,5	342830/101,2	8,91/99,0	44914/111,3
0,5	I	191400/100,0	338800/100,0	9,89/100,0	43380/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	9,79/99,0	46113/106,3
	III	188529/98,5	334734/98,8	9,83/99,4	45245/104,3
	IV	195419/102,1	344560/101,7	9,67/97,8	47892/110,4
	V	194222/101,5	342830/101,2	9,72/98,3	46417/107,0

Примечание. I – эксперимент [50]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; V – аналитическое решение [62].

Максимальная погрешность при вычислении изгибающих моментов по уточненной теории составляет 10,7 %, по МКЭ – 9,8 %, по приближенному методу – 12,7 % и по аналитическому решению – 11,9 %.

Анализ приведенных решений показывает, что результаты, полученные по уточненной теории и МКЭ, достаточно близки к экспериментальным данным. Худшее совпадение имеем для результатов, полученных по приближенному методу и аналитическому решению. Относительное совпадение результатов, полученных по уточненной и приближенной методикам, а также по МКЭ, с аналитическим решением объясняется выбором расчетных схем нитей. При увеличении стрелы провисания и сосредоточенной нагрузки, а также при удалении ее от середины пролета погрешность при аналитическом определении усилий и перемещений нити возрастает.

На рис. 8.54 показана зависимость дополнительной критической равномерно распределенной нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости плоской формы изгиба фермы (см. рис. 8.53), от начальной равномерно распределенной нагрузки. Критическая равномерно распределенная нагрузка вычислялась по методике, изложенной в главе 4. Погрешность при определении критической нагрузки достигает 9,3 %. При увеличении начальной нагрузки погрешность несколько уменьшается. Из рис. 8.54 видно, что график зависимости, построенный с применением предлагаемого метода расчета, носит более выраженный нелинейный характер, чем приведенный в работе [50].

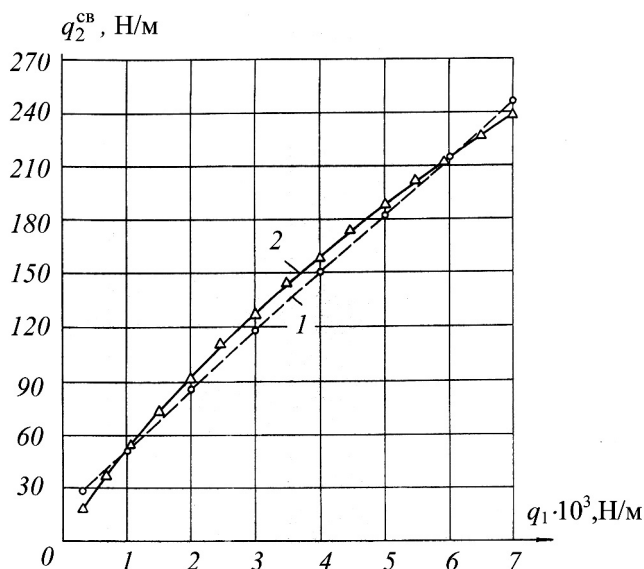


Рис. 8.54. Зависимость дополнительной критической равномерно распределенной нагрузки от начальной равномерно распределенной: 1 – метод И.М. Зотовой [50]; 2 – предлагаемый метод

§ 8.7. Разработка и совершенствование конструктивных решений висячих систем

На основании анализа результатов выполненных исследований и изучения влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости разработаны предложения по совершенствованию конструктивных решений висячих систем повышенной жесткости, включающие вопросы компоновки сооружений, выбора рациональных соотношений геометрических размеров, уменьшения напряжений в конструктивных элементах и пр.

8.7.1. Висячий переход трубопровода. Известно, что системы висячих переходов трубопроводов имеют недостаточную горизонтальную жесткость пролетного строения. Поэтому при действии ветровой нагрузки могут наблюдаться значительные горизонтальные перемещения трубопровода [63, 64]. Обычно для предупреждения подобного явления конструкция снабжается горизонтальными ветровыми фермами с укрепленными на пилонах консольными ригелями или специальными оттяжками [118]. Недостатком подобного решения является большая материалоемкость и трудоемкость монтажа, обусловленная наличием горизонтальных ветровых конструкций.

Добиться повышения горизонтальной жесткости перехода при одновременном уменьшении его материалоемкости и трудоемкости монтажа можно, располагая поддерживающие канаты под углом как к вертикальной, так и к горизонтальной плоскостям, что позволяет включить их в работу на горизонтальные (ветровые) нагрузки. Такое расположение поддерживающих канатов в пространстве достигается двумя путями.

1. Канаты выполняются расходящимися от середины пролета к опорам, причем их вертикальная стрела провисания меньше вертикальной стрелы провисания трубопровода (рис. 8.55). При этом соединительные элементы располагаются наклонно в поперечном направлении, а их длина и угол наклона к вертикали увеличиваются от середины пролета к опорам.

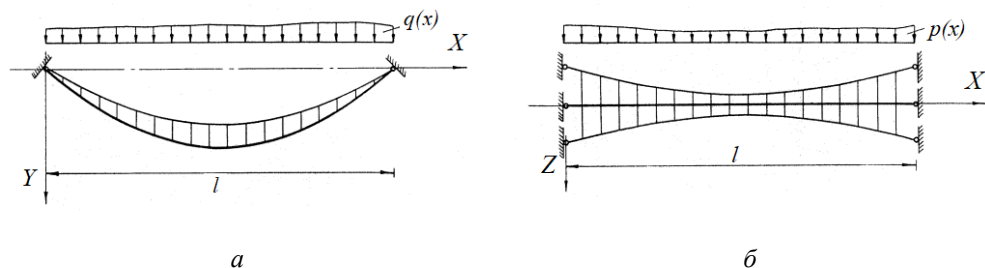


Рис. 8.55. Система с поддерживающими канатами, расходящимися от середины пролета к опорам с повышенной жесткостью на изгиб в горизонтальной плоскости:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

2. Канаты выполняются расходящимися от опор к середине пролета, где между ними устанавливается балка-распорка, перпендикулярная продольной оси перехода и воспринимающая горизонтальную составляющую распора в канатах (рис. 8.56). При этом соединительные элементы, как и в первом случае, располагаются наклонно, только если угол их наклона к вертикали увеличивается по-прежнему от середины пролета к опорам, то длина увеличивается в противоположном направлении – от опор к середине пролета.

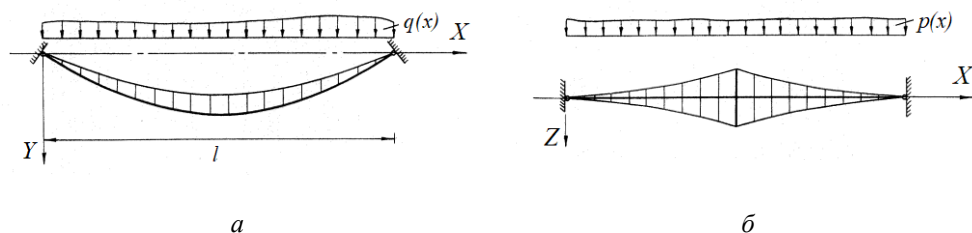


Рис. 8.56. Система с поддерживающими канатами, расходящимися от опор к середине пролета с повышенной жесткостью на изгиб в горизонтальной плоскости:
 а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

8.7.2. Висячее покрытие повышенной жесткости. Предложена новая конструкция прямоугольного в плане висячего покрытия повышенной жесткости промышленных и гражданских зданий, отличающаяся от запроектированных малой материалоемкостью и строительной высотой (рис. 8.57). Покрытие содержит наружный и внутренние опорные контуры, стороны которых взаимно параллельны. Внешний опорный контур опирается на угловые колонны, которые выполнены выше уровня покрытия. В углах внутренних опорных контуров установлены пилоны, верхушки которых соединены между собой вдоль диагонали висячего покрытия и прикреплены к верхушкам соответствующих угловых колонн связями. В углах внутренних опорных контуров установлены пилоны, верхушки которых соединены между собой вдоль диагонали висячего покрытия и прикреплены к верхушкам соответствующих угловых колонн связями.

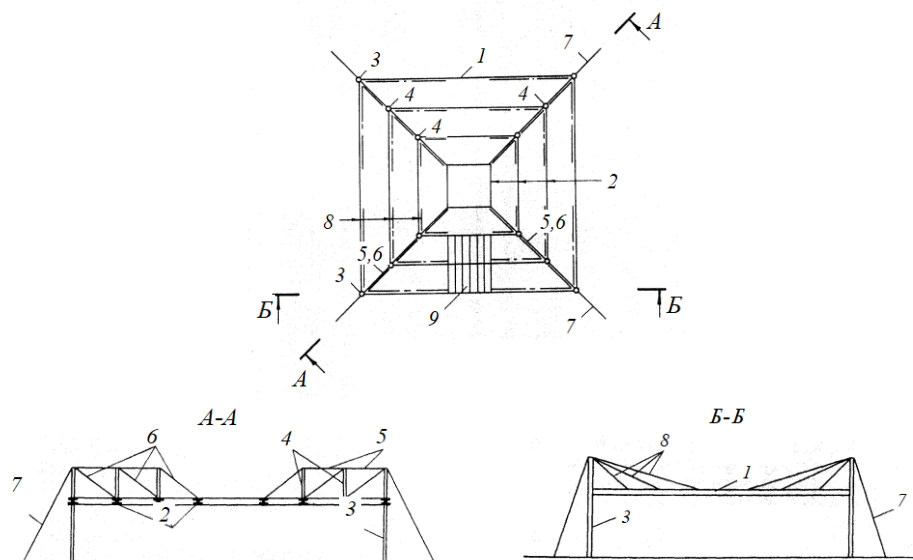


Рис. 8.57. Висячее покрытие:

- 1 – наружный опорный контур; 2 – внутренний опорный контур; 3 – угловая колонна;
 4 – пилон; 5 – связь; 6 – несущий диагональный элемент; 7 – наклонная оттяжка;
 8 – подвеска; 9 – плита перекрытия

Для повышения жесткости покрытия в уровне наружного и внутренних опорных контуров могут быть установлены несущие диагональные элементы, выпущенные за пределы здания и заанкеренные к фундаментам угловых колонн наклонными оттяжками. Каждый внутренний опорный контур в углах поддерживается подвеской, нисходящей с верхушки пилона, установленного на предыдущем от наружного внутреннем контуре. Наружный и внутренние опорные контуры поддерживаются в пролете подвесками, нисходящими с верхушки соответствующего пилона или угловой колонны. На верхние пояса наружного и внутренних опорных контуров опираются плиты покрытия.

Предлагаемое висячее покрытие обладает повышенной жесткостью, что допускает устройство подвесного транспорта с эффективной его работой как вдоль, так и поперек здания, а также позволяет осуществить унификацию и типизацию используемых конструктивных элементов.

8.7.3. Способ монтажа висячего покрытия. Предложен способ монтажа висячего покрытия зданий и сооружений, несущими конструкциями которого являются висячие фермы повышенной жесткости. Пояса таких ферм, как правило, выполняют из элементов достаточно гибких, но обладающих по сравнению с нитями повышенной жесткостью и способных воспринимать сжимающие усилия, не выключаясь из работы [65, 67, 103]. Несмотря на наличие таких элементов, указанные фермы обладают заметной деформативностью, особенно при неравномерных нагрузках. Поэтому существуют различные способы обеспечения жесткости рассматриваемых висячих покрытий [41], но они имеют серьезный недостаток – повышенную трудоемкость производства работ. Устранить указанный недостаток можно, монтируя фермы участками, в каждом из которых верхние пояса объединяют между собой и с опорами шарнирно, нижние пояса выполняют разрывными, а после пригружения покрытия соединяют участки ферм по нижним поясам жесткими вставками.

Монтаж конструкций покрытия осуществляется в такой последовательности (рис. 8.58). Участки висячих ферм, соединенных между собой в уровне верхнего пояса шарнирами, поднимают в проектное положение и крепят к опорам (рис. 8.58, *а*). Затем устанавливают горизонтальные связи, укладывают по фермам и закрепляют плиты перекрытия (рис. 8.58, *б*), после чего пригружают покрытие временной нагрузкой, равной или близкой расчетной (рис. 8.58, *в*). На следующем этапе производится заглушение шарниров путем соединения нижних поясов участков ферм между собой с помощью жестких вставок соответствующей длины (рис. 8.58, *г*). На последнем этапе снимают ранее уложенный пригруз (рис. 8.58, *д*).

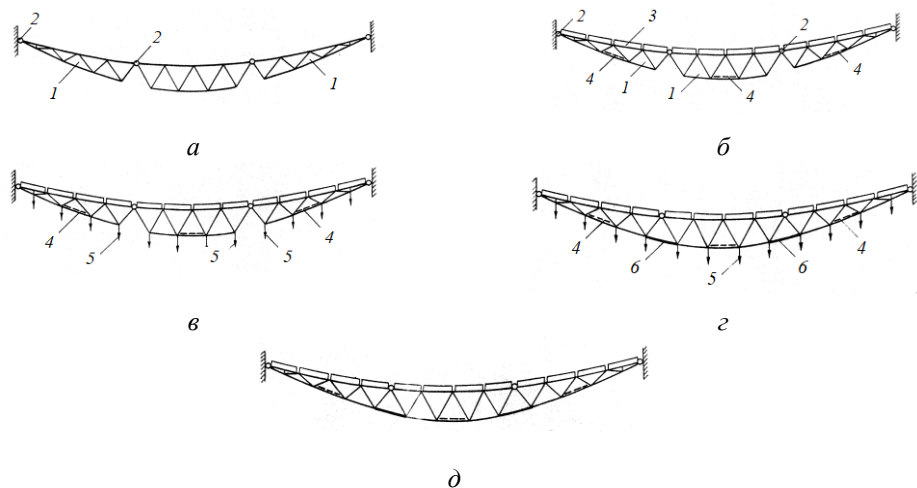


Рис. 8.58. Этапы монтажа (а–д) висячего покрытия повышенной жесткости:
 1 – участок висячей фермы; 2 – шарнир; 3 – плита перекрытия;
 4 – связь; 5 – временная нагрузка; 6 – жесткая вставка

Таким образом, наряду с уменьшением трудоемкости монтажа (в частности, отсутствуют такие принятые операции, как предварительное специальное обжатие высокопрочными канатами или замоноличивание стыков плит перекрытия) геометрия висячей фермы оказывается зафиксированной в положении, соответствующем действию временной нагрузки. Тем самым кинематическая податливость фермы оказывается в значительной степени исчерпанной, что благоприятно сказывается на работе висячего покрытия в целом.

8.7.4. Подпорная стенка с поперечными гибкими несущими элементами. Наряду со стандартными подходами анализ результатов выполненных исследований позволил также сформулировать непредвиденные подходы в применении висячих систем (в том числе повышенной жесткости) и разработать с их использованием новые конструктивные решения.

Одним из таких предложенных нестандартных решений является новая конструкция подпорной стенки, включающая вертикальные опоры, анкерные плиты и прикрепленную к ним соответственно верхними и нижними концами парусную оболочку, пригруженную грунтом обратной засыпки (рис. 8.59).

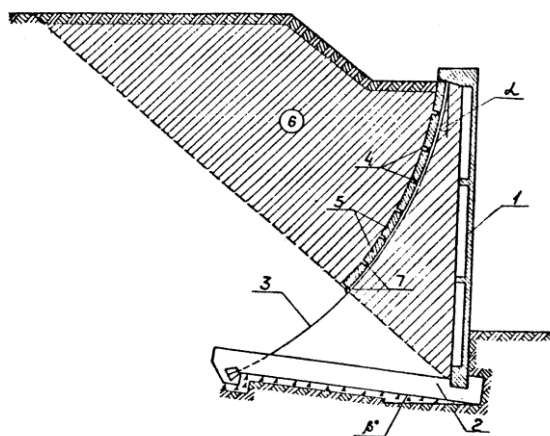


Рис. 8.59. Поперечный разрез подпорной стенки:

- 1 – передняя стенка; 2 – анкерная плита; 3 – гибкий несущий элемент; 4 – зазор;
5 – сборные железобетонные плиты; 6 – грунт обратной засыпки; 7 – упоры

Подпорная стенка выполнена из сборных железобетонных элементов – анкерных плит и установленной на них вертикальной передней стенки. Верхушка передней стенки и задний конец анкерных плит соединены расположенными вдоль подпорной стенки поперечными гибкими несущими элементами из канатов (круглой стали, полос и т.п.). По несущим элементам уложены с зазором между ними сборные железобетонные плиты. Причем плиты располагаются не по всей длине несущих элементов, а только в пределах призмы обрушения (в зоне воздействия грунта обратной засыпки), что соответствует в зависимости от свойств грунта примерно половине длины несущих элементов. При этом размеры зазоров назначаются предельно допустимыми из условия исключения передачи части распора засыпки на переднюю стенку. С учетом угла внутреннего трения грунта, т.е. геометрии призм обрушения (на рис. 8.59 не показаны) в зазорах, размеры имеют такой же порядок, как и высота железобетонных плит. Во избежание сползания плит вниз на несущих элементах устроены упоры. Для максимального обжатия передней стенки угол α между вертикалью и касательной к оси несущего элемента у примыкания к передней стенке принимается минимальным (не более 10°), угол β наклона анкерных плит – как обычно (7°).

Подпорная стенка работает следующим образом. Давление массы грунта обратной засыпки через железобетонные плиты передается на несущие элементы и вызывает в них усилия растяжения. Передняя стенка при минимальном значении угла α воспринимает, в основном, вертикальную составляющую распора в несущих элементах и работает на сжатие. Поскольку железобетонные плиты располагаются в пределах призмы обрушения, исключается передача на стенку горизонтальной составляющей нагрузки от распора

грунта обратной засыпки. Передняя стенка и анкерные плиты совместно с несущими элементами образуют замкнутый контур, который и воспринимает действующую в них горизонтальную составляющую распорных усилий. Вертикальная составляющая этих усилий через переднюю стенку пригружает анкерные плиты, увеличивая тем самым силы трения бетона по грунту.

Таким образом, в описанной конструкции железобетонные плиты работают преимущественно на сжатие. Отсутствуют значительные сосредоточенные нагрузки. Вертикальная составляющая распора используется для пригружения через переднюю стенку анкерных плит, повышая способность последних воспринимать горизонтальную составляющую распора. Сам распор существенно меньше благодаря тому, что парусная оболочка выполнена не сплошной, а в виде дискретных нитей, а также в связи с ограничением зоны размещения железобетонных плит упорами. В результате достигается возможность значительного уменьшения сечения элементов, исключения трудоемких работ при монтаже по забивке мощных свай и повышения степени заводской готовности конструкции.

8.7.5. Резервуар со стенкой в виде цилиндрической оболочки, провисающей подобно нити конечной жесткости. Следующим нестандартным решением является новая конструкция резервуара для хранения жидких продуктов, стенка которого представляет собой цилиндрическую оболочку, провисающую в виде нити конечной жесткости (рис. 8.60).

Резервуар является многоугольным в плане. Стенка и днище по каждой стороне многоугольника выполняются из совместно рулонированного на заводе полотна и крепятся, соответственно, к наружному опорному контуру и свободно обхватывающей центральную колонну трубчатой обойме, на оголовке которой устанавливается внутренний опорный контур. К последнему крепятся радиальные ванты, поддерживающие наружный опорный контур. Угол α примыкания провисающей по кривой нити конечной жесткости стенки к наружному опорному контуру находится в диапазоне $0,5 < \operatorname{tg} \alpha < 1,5$. По вантам укладывается кровля, а стенки соединяются между собой компенсаторами с целью исключения кольцевых напряжений. Такая конструкция обеспечивает повышенную надежность при неравномерных осадках основания за счет приварки полотнищ лепестков днища к трубчатой обойме, а при сейсмических воздействиях – за счет возможности изменения геометрической формы резервуара, принимающей такое очертание, при котором усилия в несущих элементах будут минимальными.

Для уменьшения кинематических перемещений рулонированных полотнищ стенок при выкачке и закачке жидкости по высоте резервуара в местах наибольших положительных и отрицательных ординат эпюры кинематических перемещений стенок резервуара устанавливаются параллельно днищу два кольца жесткости: наружное и внутреннее. Наружное кольцо крепится к стенкам на расстоянии $1/4 - 1/3$ высоты от днища резервуара до наружного опорного контура, в зоне наибольших положительных кинемати-

ческих перемещений оболочки и работает на растяжение. Конструктивно оно представляет собой полосу, площадь сечения которой определяется из расчета предотвращения кинематических перемещений оболочки наружу резервуара при полной выкачке продукта. Внутреннее кольцо жесткости крепится к стенкам с внутренней стороны резервуара на расстоянии $2/3 - 3/4$ его высоты до наружного опорного контура, в зоне наибольших отрицательных кинематических перемещений оболочки и работает на сжатие. Кольцо выполняется коробчатого или двутаврового поперечного сечения, площадь которого принимается из расчета предотвращения кинематических перемещений оболочки внутрь резервуара при полной выкачке продукта.

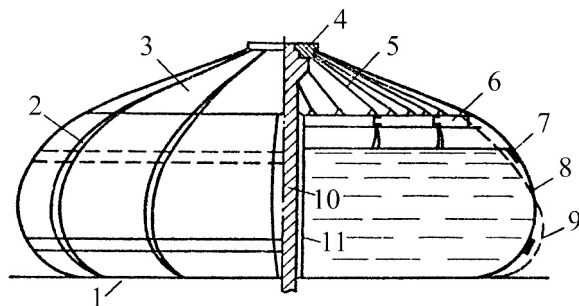


Рис. 8.60. Фасад и поперечное сечение резервуара с эпюрой кинематических перемещений (штриховые линии):

- 1 – днище; 2 – компенсаторы; 3 – кровля; 4 – внутренний опорный контур;
 5 – радиальная ванта; 6 – наружный опорный контур; 7 – внутреннее кольцо жесткости;
 8 – стенка; 9 – наружное кольцо жесткости; 10 – центральная колонна;
 11 – трубчатая обойма

Каждое из колец жесткости может не крепиться к стенкам, а быть подвешено к наружному опорному контуру на указанной высоте с непосредственным примыканием к стенкам резервуара. Причем в обоих кольцах жесткости возникают сравнительно небольшие усилия, поскольку основная нагрузка на них зависит от кинематических перемещений стенок резервуара при отсутствии в нем продукта. По мере заполнения резервуара продуктом усилия в кольцах жесткости будут уменьшаться.

Также необходимо отметить, что параметры расстановки колец жесткости связаны с положением максимальных положительных (наружу резервуара) и отрицательных (внутри резервуара) ординат эпюры кинематических перемещений цилиндрической оболочки (показана штриховой линией на рис. 8.60), построенной на основании результатов численного расчета резервуара с учетом жесткости цилиндрической оболочки. Аналогичные результаты были также достигнуты при исследовании нитей конечной жесткости, являющихся расчетной моделью висячей цилиндрической оболочки – стенки резервуара.

Установленные в указанных зонах, кольца жесткости фиксируют проектное положение стенок резервуара при действии расчетной нагрузки, независимо от того закачан или выкачан из резервуара продукт. При этом наружное кольцо жесткости предотвращает кинематические перемещения цилиндрической оболочки наружу резервуара при полной выкачке продукта, а верхнее кольцо – препятствует кинематическим перемещениям оболочки внутрь резервуара.

Таким образом, в резервуаре предлагаемой конструкции за счет установки колец жесткости в указанных зонах достигается возможность существенно (более чем на порядок) снизить кинематические перемещения стенок при выкачке продукта, т.е. практически зафиксировать проектную геометрию цилиндрической оболочки при расчетной нагрузке (заполненном продуктом резервуаре). Например, установлено, что постановка даже одного наружного нижнего кольца жесткости позволяет уменьшить ординаты эпюры кинематических перемещений в верхней части резервуара в 4 – 6 раз. Тем самым появляется возможность значительно упростить конструкцию компенсаторов между стенками резервуара и повысить его надежность.

ГЛАВА 9

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

§ 9.1. Висячий трубопроводный переход нефтепровода

На линии нефтепровода Чимкент – Чарджоу был запроектирован двухниточный трубопроводный переход через р. Амударью с пролетом 950 м, стрелой провисания 70 м, диаметром труб 630 мм (рис. 9.1, *а*). Предложенное решение обеспечивает необходимую несущую способность и повышенную жесткость пролетной конструкции. Это достигается тем, что несущие канаты очерчены по пространственным кривым, имеющим наклон как к горизонтальной под углом $56^{\circ}12'$, так и к вертикальной под углом $33^{\circ}88'$ плоскостям. Трубопровод крепится к несущим канатам посредством тросовых стяжек, расположенных с шагом 40 м. Посередине пролета расстояние между канатами 6 м. В поперечном сечении тросовые стяжки располагаются наклонно, причем их длина и угол наклона к вертикали возрастают от середины пролета к опорам. Пилоны приняты V-образными с шарнирным креплением к опорам. Отметка верха пилона над уровнем земли – 115 м.

В качестве расчетной принята дискретная модель, в которой несущие канаты, оттяжки пилонов, тросовые стяжки и поперечные элементы по верху пилонов представляются растянуто-напряженными стержневыми элементами, пилоны – шарнирно соединяемыми стержнями, способными воспринимать растяжение-сжатие, а трубопровод – стержневыми элементами, воспринимающими растяжение-сжатие с изгибом.

Схема разбивки вантово-стержневой системы трубопроводного перехода нефтепровода на конечные элементы изображена на рис. 9.1, *б*. Порядок нумерации узлов дискретной модели и ориентация осей глобальной системы координат понятны из рис. 1.1.

Расчет трубопроводного перехода производился при четырех схемах нагружения:

- 1 – собственный вес перехода ($q_1 = 6,08$ кН/м);
- 2 – несимметричное нагружение: собственный вес, нагрузка от снега ($q_c = 0,33$ кН/м), вес нефти на половине пролета ($q_n = 4,87$ кН/м) и изменение температуры ($\Delta t = 22^{\circ}\text{C}$);
- 3 – симметричное нагружение: собственный вес, нагрузка от снега, вес нефти на всем пролете и изменение температуры;
- 4 – дополнительное сочетание нагрузок: симметричное нагружение плюс ветровая нагрузка ($q_v = 0,99$ кН/м).

При 1-й схеме нагружения вся нагрузка от собственного веса перехода воспринимается только канатами. При других схемах труба и несущие канаты работают как единое целое.

Усилия, возникающие в канатах и трубе при различных схемах нагружения трубопроводного перехода, приведены в табл. 9.1 и 9.2. Из них видно, что несимметричная нагрузка (2-я схема нагружения), существенно влияя на величины усилий в трубе, почти не сказывается на распределении усилий в несущих канатах. И, наоборот, ветровая нагрузка (4-я схема нагружения), почти не сказываясь на усилиях в трубе, значительно влияет на усилия в канатах. При этом усилия в канатах, расположенных с наветренной стороны, по сравнению с 3-й схемой нагружения увеличиваются, а в канатах, расположенных с подветренной стороны, – уменьшаются.

Таблица 9.1

Схема нагружения	Труба					
	продольное усилие, кН			изгибающий момент, кН·м		
	середина пролета	узел примыкания к пилону		середина пролета	четверть пролета	
		левому	правому		левая	правая
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	917,71	776,0	1352,94	142,86	96,86	185,85
3	2152,46	2387,63	2387,63	147,95	129,54	129,54
4	2142,09	2374,89	2374,89	144,13	125,17	125,17

Таблица 9.2

Схема нагрузки	Канаты					
	с наветренной стороны			с подветренной стороны		
	продольные усилия, кН					
	середина пролета	узел примыкания к пилону		середина пролета	узел примыкания к пилону	
		левому	правому		левому	правому
1	5783,37	6218,79	6218,79	5783,37	6218,79	6218,79
2	7238,19	7739,60	7717,44	7238,19	7739,60	7717,44
3	8086,07	8660,45	8660,45	8086,07	8660,45	8660,45
4	9028,0	9678,18	9678,18	7178,27	7684,59	7684,59

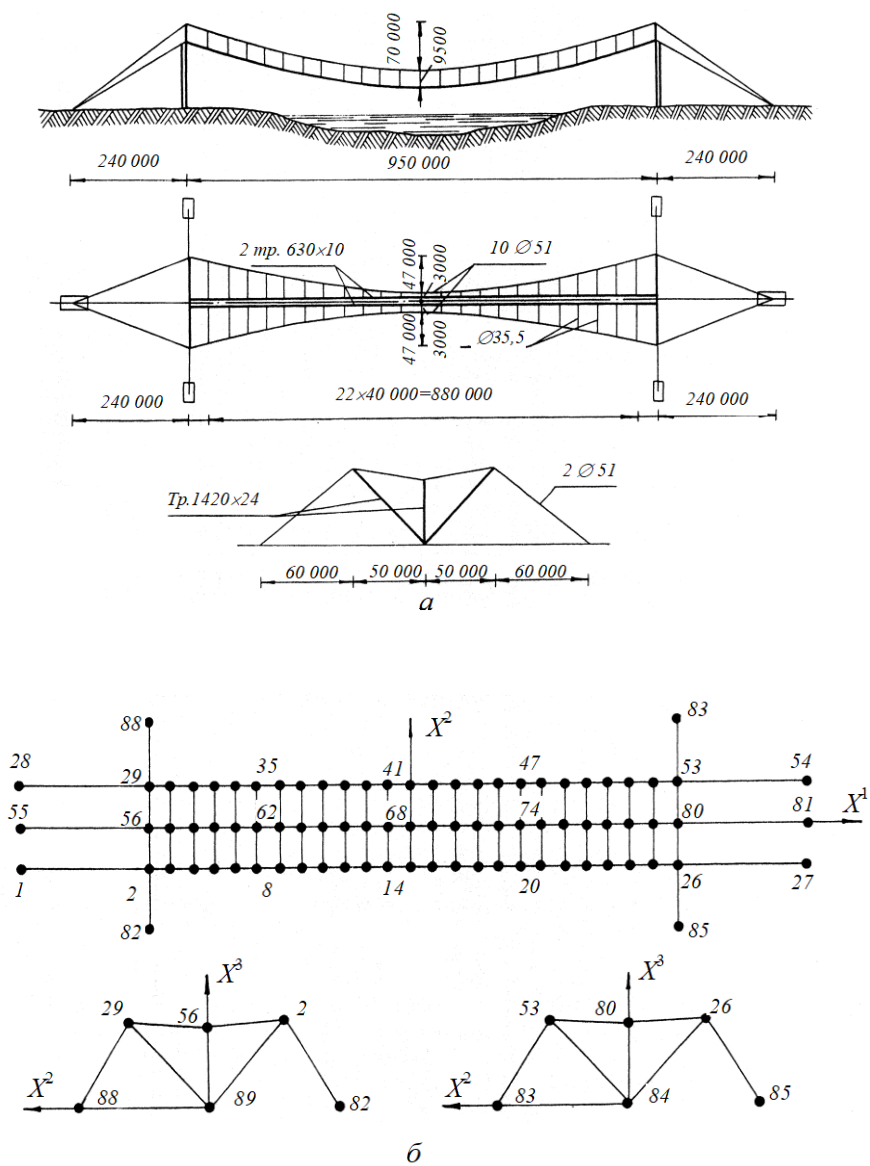


Рис. 9.1. Конструктивная (а) и топологическая (б) с нумерацией узлов схемы висячего трубопроводного перехода нефтепровода

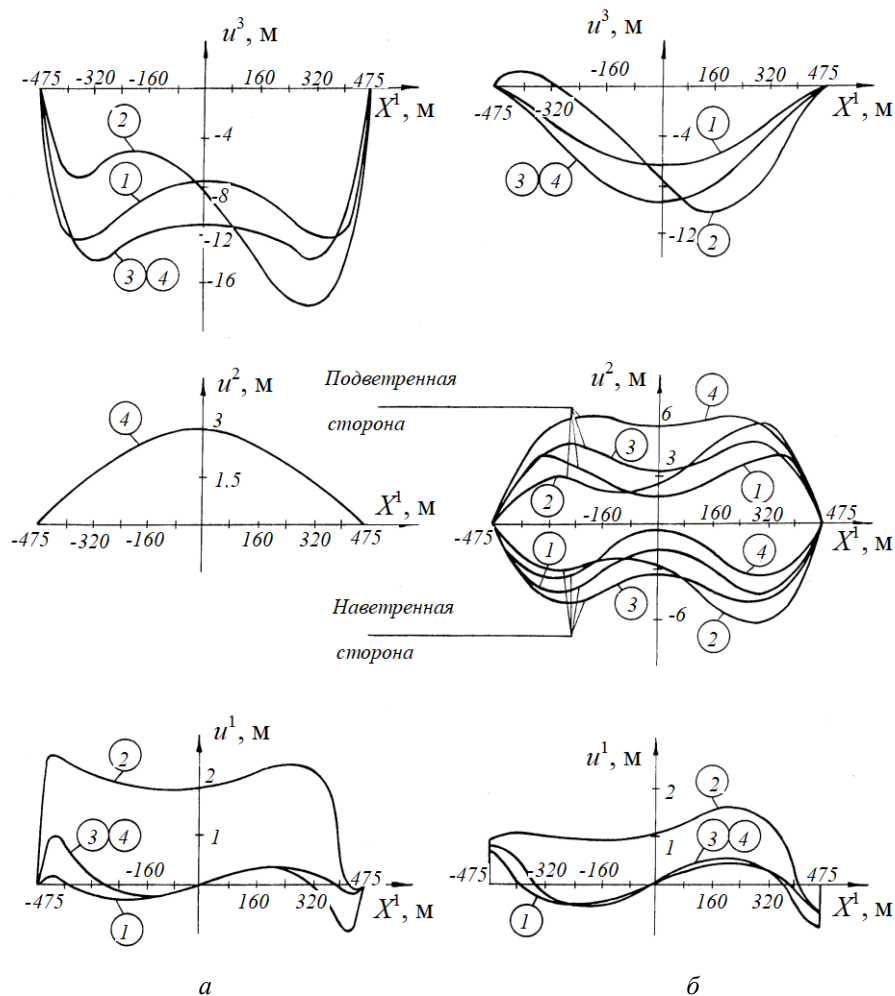


Рис. 9.2. Эпюры перемещений конструктивных элементов висячего трубопроводного перехода нефтепровода при различных схемах нагружения: а – труба; б – канаты; 1 – собственный вес; 2 – несимметричное нагружение; 3 – симметричное нагружение; 4 – дополнительное сочетание нагрузок

Эпюры перемещений конструктивных элементов нефтепровода, полученные в результате расчетов, изображены на рис. 9.2. Из анализа этих эпюр следует, что перемещения трубы в вертикальной плоскости u^3 и вдоль оси трубопроводного перехода u^1 при 3-й и 4-й схемах нагружения совпадают.

Эти же перемещения и при этих же видах нагружения совпадают и для канатов. Кроме того перемещения трубы и канатов в вертикальной плоскости и вдоль оси трубопровода при 1-й, 3-й и 4-й схемах нагружения имеют одинаковый характер.

Перемещения трубы в вертикальной плоскости и вдоль оси трубопроводного перехода имеют наибольшие значения в четвертях пролета для 1-й, 3-й и 4-й схем нагружения. Это объясняется тем, что если в середине пролета перемещения зависят в основном от упругих деформаций нити, то в четвертях пролета велико значение кинематических перемещений, т.е. перемещений за счет изменения формы кривой провисания нити. Это особенно хорошо видно при 2-й схеме нагружения – перемещения трубы вдоль оси перехода u^1 в 5 раз больше (за счет изменения формы равновесия), чем в остальных схемах.

Эпюры перемещений трубы и канатов в горизонтальной плоскости u^2 также показаны на рис. 9.2. Из приведенных эпюр видно, что оба каната при 1-й, 2-й и 3-й схемах нагружения деформируются симметрично относительно оси трубопроводного перехода. При действии ветровой нагрузки (4-я схема нагружения) перемещения обоих канатов в горизонтальной плоскости приблизительно одинаковы, но если абсолютные значения перемещений каната, находящегося с наветренной стороны, уменьшаются, то для каната с подветренной стороны – увеличиваются.

Труба при 1-й, 2-й и 3-й схемах нагружения деформируется только в вертикальной плоскости. При действии ветровой нагрузки максимальное отклонение трубы от вертикали наблюдается посередине пролета и равно 3 м, что составляет 1/317 пролета.

Результаты исследования напряженно-деформированного состояния пространственной вантово-стержневой системы висячего трубопроводного перехода нефтепровода свидетельствуют о том, что предложенное конструктивное решение обеспечивает высокую несущую способность и жесткость пролетной конструкции перехода как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях, а усилия и перемещения при всех четырех схемах нагружения находятся в допустимых пределах.

§ 9.2. Висячее покрытие универсального спортивно-зрелищного зала

С использованием разработанной методики расчета исследовано напряженно-деформированное состояние висячего комбинированного покрытия универсального спортивно-зрелищного зала (УСЗЗ) на 10500 мест, возведенного в г. Алматы. Несущая система представляет собой пространственную большепролетную ферменную конструкцию с мембранным покрытием (рис. 9.3).

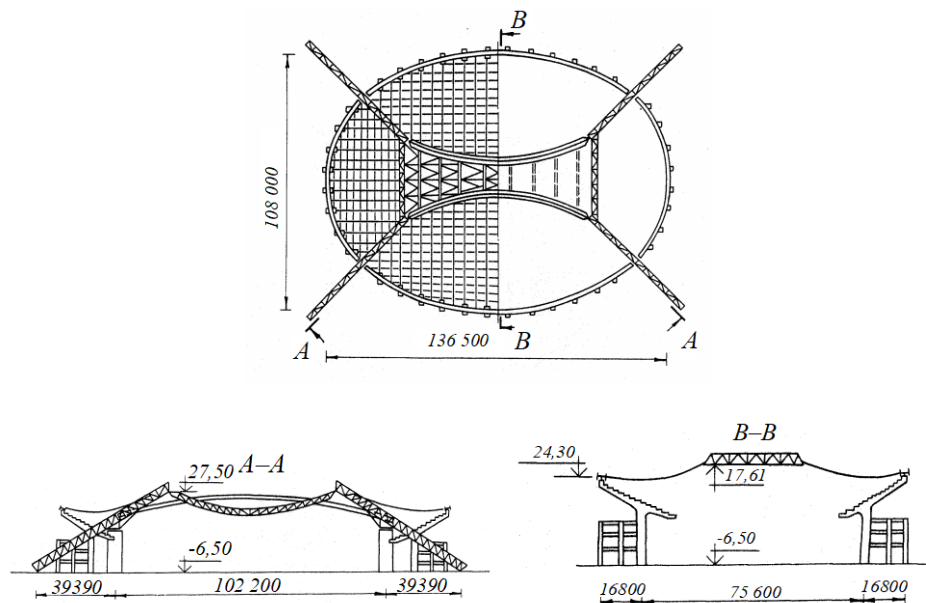


Рис. 9.3. Конструктивная схема покрытия универсального спортивно-зрелищного зала

Ферменная конструкция состоит из двух наклонных под углом 40° рам, каждая из которых включает два пилон и соединяющий их ригель, двух трехгранных ферм и связевых ферм центральной части. При этом пилоны, трехгранные фермы и ригели имеют решетчатое пространственное поперечное сечение. Мембранное покрытие состоит из центральной оболочки и четырех оболочек боковых пролетов, выполненных из стальной мембраны. Оболочка центральной части имеет нулевую, а оболочки боковых пролетов – отрицательную гауссову кривизну. Причем для формообразования последних используется ортогональная сетка, образованная направляющими нитями (висячими нитями конечной жесткости) и поперечными прогонами. Мембранное покрытие боковых пролетов крепится к овальному в плане упругоподатливому внешнему опорному контуру, выполненному из сварного двутавра и опертому на железобетонные консоли трибун.

Две шарнирно подвешенные трехгранные висячие фермы служат внутренними опорными контурами оболочек соответствующих боковых пролетов и наклонены под углом $30^\circ 40'$ к вертикальной плоскости. Этот конструктивный прием обеспечивает работу внутреннего опорного контура одновременно по двум схемам: по вертикали – висячей фермы конечной жесткости, а по горизонтали – двухшарнирной арки. Для двух других оболочек боковых пролетов внутренними опорными контурами являются соединяющие пилоны ригели. Боковыми же опорными контурами для всех оболочек боковых пролетов служат пилоны.

Ввиду двухсторонней симметрии конструктивной схемы покрытия УСЗЗ, а также учитывая симметрию действующих нагрузок в качестве расчетной принята 1/4 часть покрытия (рис. 9.4, а). При этом горизонтальная плоскость глобальной системы координат проходит через узлы опирания пилонов на поддерживающие стойки, где конструктивно обеспечены условия работы, эквивалентные жесткому заземлению.

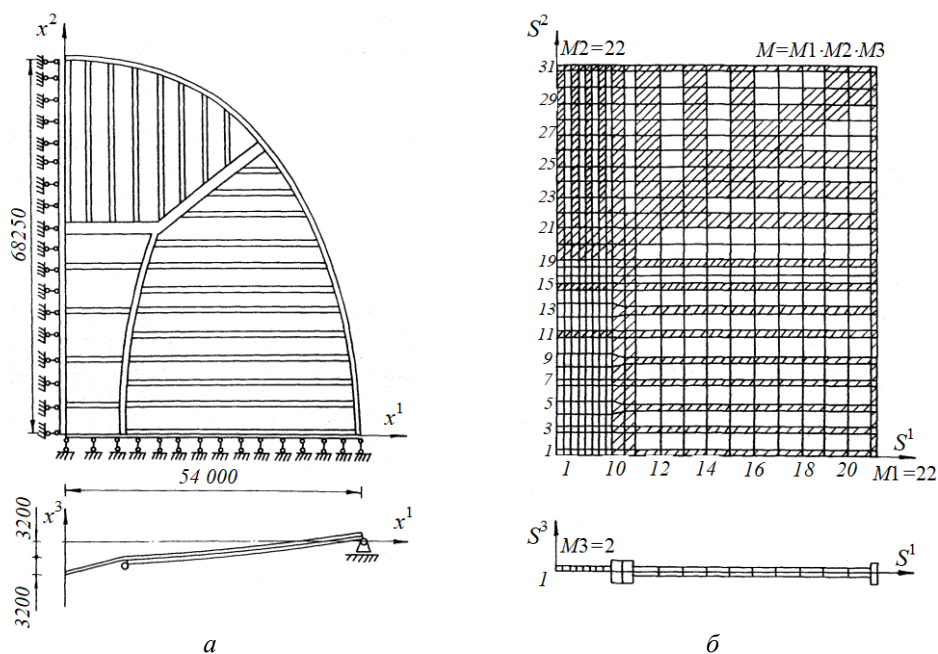


Рис. 9.4. Расчетная (а) и топологическая (б) схемы покрытия универсального спортивно-зрелищного зала (штрихами отмечены участки повышенной жесткости)

В расчетной схеме мембранная оболочка представляется набором мембранных четырехугольных конечных элементов, толщина которых определяется в результате учета листовой мембраны и «размазывания» прогонов, исходя из эквивалентной цилиндрической жесткости конструкции мембраны с прогонами и гладкой тонкой оболочки. Ферменные элементы несущей системы – пилоны, трехгранные фермы, ригели и связевые фермы, а также направляющие нити и опорный контур представляются стержневыми конечными элементами прямоугольного поперечного сечения, воспринимающими усилия растяжения-сжатия и изгиба. Их параметры устанавливаются с учетом эквивалентного «размазывания» стержневых элементов покрытия. Для каждого типа конечных элементов определяются

соответствующие размеры поперечного сечения и эквивалентный модуль упругости, обеспечивающие равенство цилиндрических и изгибных жесткостных характеристик расчетных и реальных конструктивных элементов. По осям симметрии фрагмента наложены связи на соответствующие перемещения узлов, опорный контур покрытия закреплен от смещения по третьему направлению, а узлы опирания пилона закреплены жестко.

При описании топологической структуры конечноэлементной модели покрытия расчетная схема отображается на прямоугольную сеточную область с координатами S^1 , S^2 , S^3 и единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов модели: в плане от 1 до $M1 = 22$ и от 1 до $M2 = 32$, по толщине оболочки от 1 до $M3 = 2$, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели понятен из рис. 9.4, б.

Расчет конструкции покрытия производился на два вида воздействий: статическое (собственный вес покрытия с учетом кратковременной и снеговой нагрузок) с суммарной интенсивностью равномерно распределенной нагрузки $q = 4 \text{ кН/м}^2$ и динамическое при расчетной сейсмичности района строительства 9 баллов.

Составляющая сейсмическая нагрузка $S_{ij}(x^1, x^2)$ для двумерной области комбинированного висячего покрытия в ij -м направлении вычислялась согласно работе [83, 145] по формуле

$$S_{ij}(x^1, x^2) = q(x^1, x^2) K_c \mu(x^1, x^2) \eta_{ij}(x^1, x^2) \beta_{ij}, \quad (9.1)$$

где $q(x^1, x^2)$ – функция распределения нагрузки по покрытию; K_c – коэффициент сейсмичности; $\mu(x^1, x^2)$ – функция распределения переносного движения по покрытию; $\eta_{ij}(x^1, x^2)$ – коэффициент формы колебаний системы; β_{ij} – коэффициент динамичности, характеризующий динамический эффект сейсмического воздействия; i, j – число полуволн в продольном и поперечном направлениях.

Выражение для коэффициента формы колебаний висячего покрытия можно записать в виде

$$\eta_{ij}(x^1, x^2) = \frac{\Phi_{ij}(x^1, x^2) \int_S m(x^1, x^2) \mu(x^1, x^2) \Phi_{ij}(x^1, x^2) dx^1 dx^2}{\mu(x^1, x^2) \int_S m(x^1, x^2) \Phi_{ij}^2(x^1, x^2) dx^1 dx^2}, \quad (9.2)$$

где $m(x^1, x^2)$ – функция распределения массы системы; $\Phi_{ij}(x^1, x^2)$ – функция формы собственных колебаний покрытия, а его значение определяется на основе численного интегрирования инвариантных динамических характеристик для дискретной конечноэлементной модели покрытия.

Функция распределения переносного движения в каждом конкретном случае может быть представлена в соответствии с рекомендациями [83], а формула для определения коэффициента динамичности имеет вид

$$\beta_{ij} = \frac{\Delta\beta_{ij}}{T_{ij}} = \frac{\Delta\beta_{ij}\omega_{ij}}{2\pi}, \quad (9.3)$$

где $\Delta\beta_{ij}$ – поправка к коэффициенту динамичности, отражающая уменьшение характеристики затухания висячих мембранно-стрепневых оболочек по сравнению со значением, принятым в действующих нормах [83]; T_{ij} – период собственных колебаний; ω_{ij} – частота собственных колебаний.

Спектр собственных частот и соответствующий им спектр форм собственных колебаний комбинированного висячего покрытия можно найти из решения так называемого векового уравнения, получаемого из соотношения (6.23) при $[C] = 0$ по стандартной схеме. При этом задача вычисления форм собственных колебаний дискретной конечноэлементной модели решается методом итераций подпространства.

Для нахождения максимальной величины сейсмической нагрузки, как показано в работе [83], в формуле (9.1) достаточно удержать только один член, зависящий от низшей формы колебаний, т. е. $S_{11}(x^1, x^2)$. Значение функции $\mu(x^1, x^2) = 1$, поскольку в этом случае ускорение переносного движения для всех точек колеблющейся системы одинаково. Кроме того было также принято, что $K_c = 0,1$ и $\Delta\beta_{ij} = 3,5$.

О характере напряженно-деформированного состояния покрытия при сейсмическом нагружении можно судить по результатам, отраженным на рис. 9.5 – 9.7. Опорный контур по всей своей длине оказался сжатым и практически безизгибным. Так, если максимальные сжимающие усилия $N = 5660$ кН, то изгибающие моменты не превышают $M = 192$ кН·м и почти не сказываются на его напряженном состоянии. Это свидетельствует о том, что очертание опорного контура покрытия близко к оптимальному. Перемещения контура в горизонтальной плоскости достигают наибольших значений в 43 и в 1365 узлах и соответственно равны $u_{43}^1 = -11,4$ см и $u_{1365}^2 = -4,9$ см.

Наиболее нагруженным элементом несущей системы УСЗЗ является трехгранная ферма, значение продольного усилия в которой находится в пределах от $N = -9910$ кН до $N = 8800$ кН, а изгибающих моментов – $M = -19430$ кН·м до $M = 9020$ кН·м. Соответственно сжимающие напряжения в верхнем поясе фермы достигают $\sigma_v = 24$ МПа, а растягивающие в нижнем – $\sigma_n = 75,6$ МПа. Перемещения узла опирания фермы на пилон $u_{811}^1 = -0,58$ см, $u_{811}^2 = -16,31$ см и $u_{811}^3 = -25,69$ см, а прогиб фермы в центральной точке составляет $u_{19}^3 = 77,91$ см.

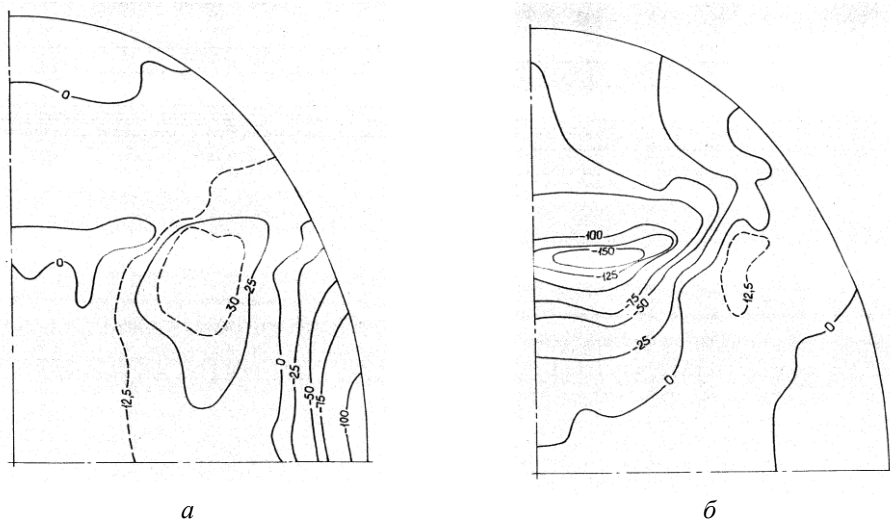


Рис. 9.6. К расчету покрытия универсального спортивно-зрелищного зала при статических и сейсмических нагрузках:
 а – изолинии $u^1 \cdot 10^{-1}$, см; б – изолинии $u^2 \cdot 10^{-1}$, см

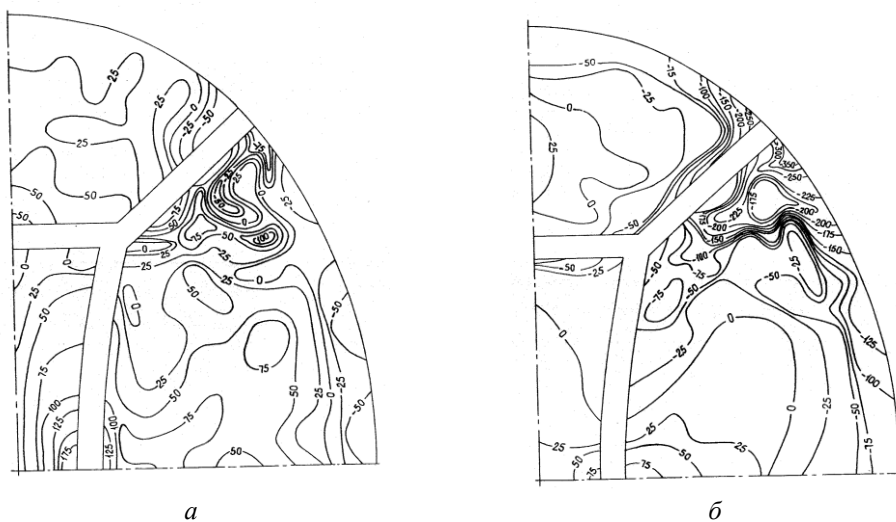


Рис. 9.7. К расчету покрытия универсального спортивно-зрелищного зала при статических и сейсмических нагрузках:
 а – изолинии $\sigma_{\max}$, МПа; б – изолинии $\sigma_{\min}$, МПа

Максимальные растягивающие напряжения в мембране $\sigma_m = 186$ МПа. В приконтурных зонах мембрана испытывает небольшое сжатие $\sigma_m = 50\text{--}100$ МПа, но в местах примыкания опорного контура к пилону модуль отрицательного главного напряжения достигает $\sigma_m = 374$ МПа, что может привести к образованию складок. Характер распределения главных напряжений на срединной поверхности мембранной оболочки показан на рис. 9.7.

Следует также отметить, что анализ результатов расчетов покрытия УСЗЗ на статическую и сейсмическую нагрузки показал, что данное сооружение мало восприимчиво к сейсмическим воздействиям. Учет в расчете сейсмических нагрузок при сейсмичности района строительства 9 баллов позволил уточнить его результаты в пределах 8 % общего напряженно-деформированного состояния, что находится в пределах точности наших сведений о реальных нагрузках и задания исходных данных, а, следовательно, не оказывает решающего влияния на прочностные показатели.

На основании выполненного расчета можно заключить, что несущая система покрытия УСЗЗ обладает в целом достаточно большим запасом прочности. Небольшое перенапряжение наблюдается в направляющих нитях в местах их примыкания к опорному контуру. Здесь же в мембране возникают и складчатые зоны, обусловленные наличием ограниченного одноосного напряженного состояния. Подобные явления практически полностью зависят от начальной формы оболочки и условий ее закрепления, а потому могут быть легко устранены, например, путем установки в приугловых зонах покрытия распорок или жестких вставок.

§ 9.3. Висячий трубопроводный переход керосинопровода

На линии керосинопровода в районе г. Ангарска запроектирован двухниточный трубопроводный переход через р. Ангару, представляющий собой комбинированную пространственную вантово-стержневую систему, состоящую из несущих канатов, пилонов и соединительных тросовых элементов (рис. 9.8, а). Общая длина перехода – 702,958 м, пролет – 450 м, отметка верха пилона над уровнем земли – 48 м.

Несущие канаты разведены в плане, образуя пространственную конструкцию из двух наклонно расположенных под углом 45° висячих систем, соединенных между собой тросовыми стяжками с шагом 12 м. Посередине пролета расстояние между канатами составляет 6 м. Конструктивно трубы исключены из совместной работы с канатами (на рис. 9.8, а показаны жирной линией).

В расчетной схеме тросовые элементы представляются набором прямолинейных растянуто-напряженных стержней, а пилоны – прямолинейными сжатыми стержнями, шарнирно соединенными с тросовыми элементами и основанием.

Схема разбивки вантово-стержневой системы перехода на конечные элементы изображена на рис. 9.8, б. Порядок нумерации узлов дискретной модели и ориентация осей глобальной системы координат понятны из рис. 9.8, а.

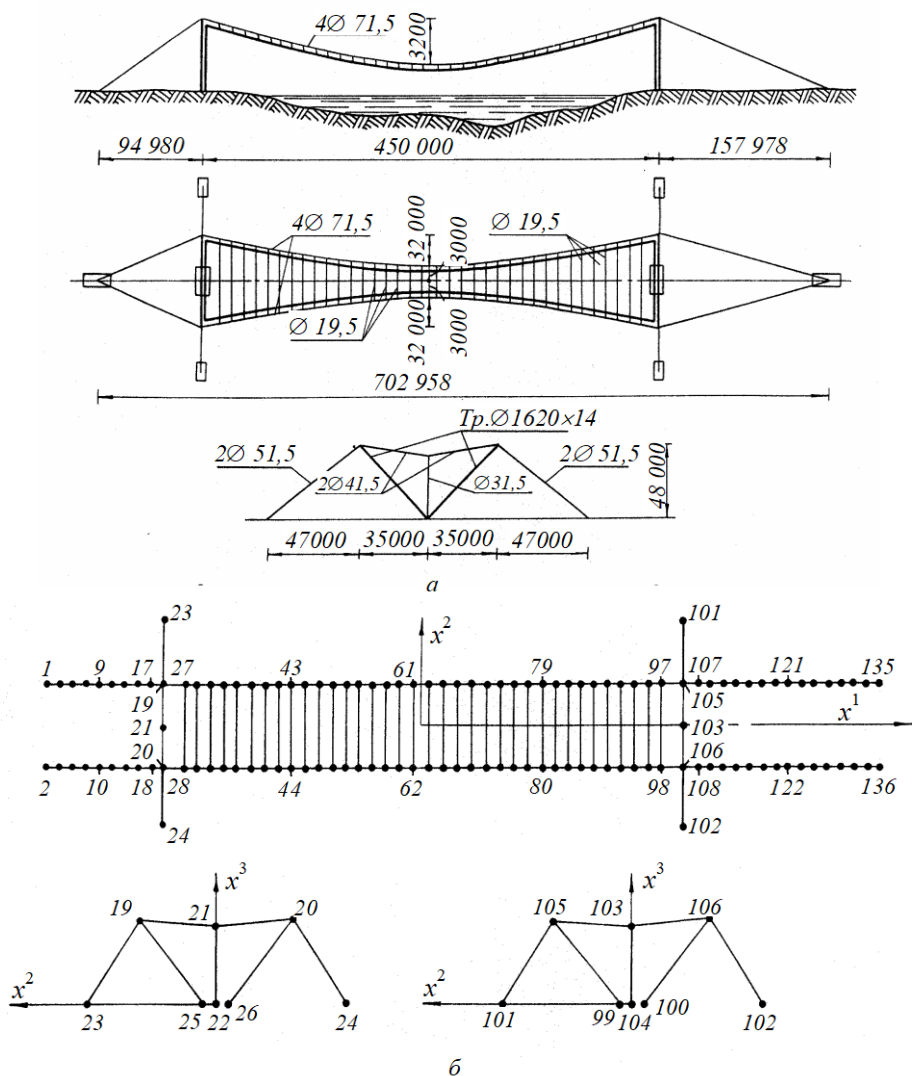


Рис. 9.8. Конструктивная (а) и топологическая (б) с нумерацией узлов схемы висячего трубопроводного перехода керосинопровода

При расчете трубопроводного перехода была поставлена задача определения начальной формы вантово-стержневой системы, напряженной действием собственного веса, и напряженно-деформированного состояния при действии различных эксплуатационных нагрузок и их комбинаций.

На первом этапе расчета была определена начальная конфигурация вантово-стержневой системы по ее заданным основным геометрическим параметрам. На втором – расчет трубопроводного перехода производился при следующих схемах нагружения:

- 1 – собственный вес ($q_1 = 6,55$ кН/м) и снеговая нагрузка ($q_c = 1,828$ кН/м);
- 2 – то же и отрицательная разность температур ($\Delta t^x = -54^\circ\text{C}$);
- 3 – " – и положительная разность температур ($\Delta t^t = 57^\circ\text{C}$);
- 4 – " – и ветровая нагрузка ($q_v = 1,44$ кН/м);
- 5 – " – снеговая и ветровая нагрузки;
- 6 – " – снеговая и ветровая нагрузки и отрицательная разность температур.

О характере напряженно-деформированного состояния перехода можно судить по рис. 9.9. Максимальные продольные перемещения наблюдаются в точке крепления к пилону несущего каната, расположенного с наветренной стороны перехода, при 5-й схеме нагружения. Максимальное перемещение $u_1 = 0,148$ м. При остальных нагружениях перемещения вдоль оси трубопроводного перехода относительно малы.

Деформирование несущих канатов в горизонтальном, поперечном к оси трубопровода направлении при 1-й, 2-й и 3-й схемах нагружения происходит симметрично. Максимальное перемещение канатов наблюдается в опорных участках и составляет $u^2 = 0,015$ м. При действии ветровой нагрузки (4-я, 5-я и 6-я схемы нагружения) перемещения обоих канатов в горизонтальной плоскости приблизительно одинаковы. Максимальное отклонение канатов от начального положения наблюдается при 4-й схеме нагружения в середине пролета, $u^2 = 1,916$ м, что составляет 1/234 пролета.

Перемещения канатов в вертикальной плоскости при 1-й и 3-й схемах нагружения практически совпадают, а при 4-й и 6-й – имеют одинаковый характер. Максимальные перемещения возникают при 5-й схеме нагружения в несущем канате, расположенном с подветренной стороны перехода, $u^3 = 1,752$ м, что вполне допустимо.

Сопоставление результатов расчетов трубопроводного перехода на действие эксплуатационных нагрузок показало, что наиболее неблагоприятным сочетанием является собственный вес, снеговая и ветровая нагрузки и отрицательная разность температур. При этом в несущих канатах усилие $N = 8,885$ МН, что соответствует напряжению $\sigma = 6,117 \cdot 10^2$ МПа.

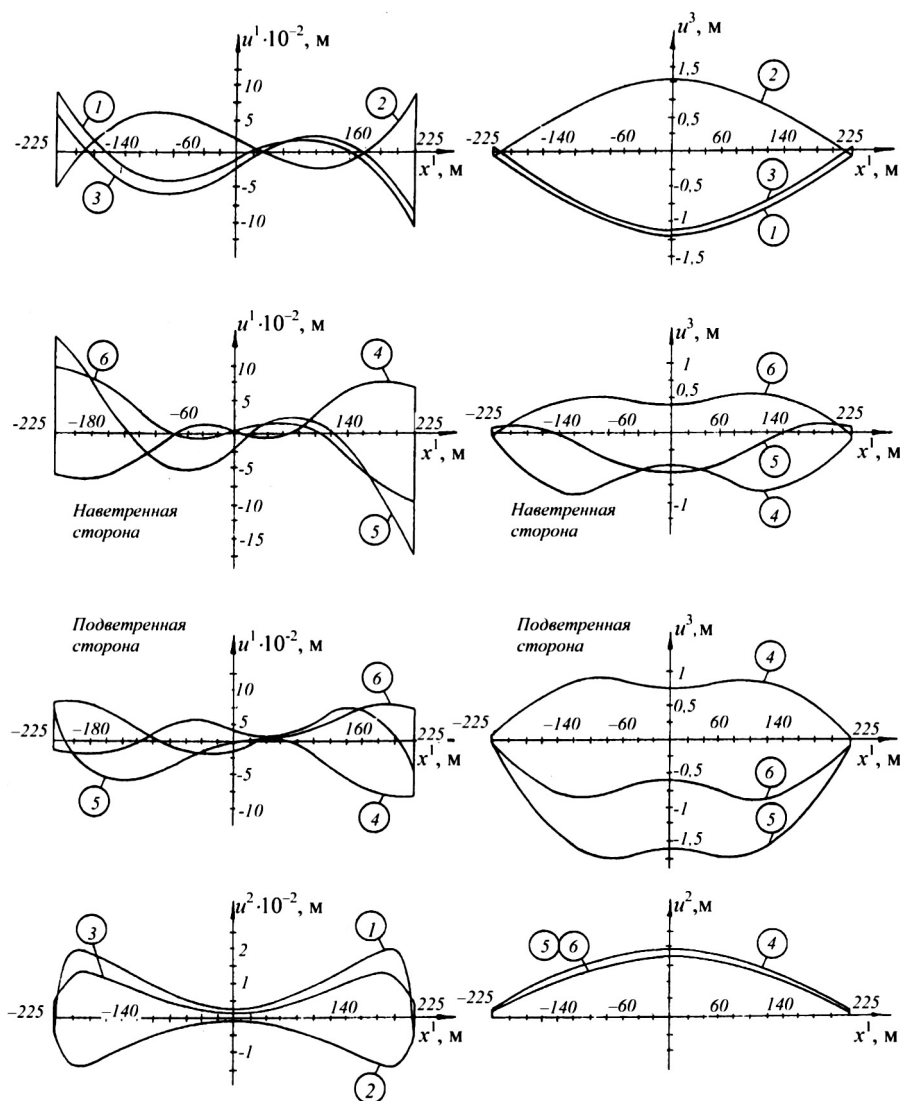


Рис. 9.9. Эпюры перемещений несущих канатов висячего трубопроводного перехода керосинопровода при различных схемах нагружения

Полученные результаты свидетельствуют о том, что рассчитанная конструкция висячего трубопроводного перехода керосинопровода обладает высокой несущей способностью и жесткостью, а усилия и перемещения при наиболее неблагоприятном сочетании эксплуатационных нагрузок находятся в допустимых пределах.

§ 9.4. Облегченная складчатая конструкция ангара для самолетов

В аэропорту г. Донецка запроектирован и рассчитан ангар для самолетов пролетом 48 м и длиной 49 м, представляющий собой бескаркасную тонкостенную складчатую конструкцию, состоящую из 7 одинаковых секций шириной 7 м. Каждая секция образована из жестко защемленной арки полигонального очертания, составленной из 14 однотипных панелей длиной 5 м, выполненных из холодногнутых алюминиевых листов толщиной 2,5 мм (рис. 9.10, а). Высота арки 21,5 м. Поперечное сечение секции здания показано на рис. 9.10, б. В местах изломов арки по всей длине сооружения расположены решетчатые диафрагмы из стальных холодногнутых профилей для придания ему повышенной жесткости. Ангар оборудован подвесным краном грузоподъемностью 50 кН и пролетом 12 м, расположенным в центре здания.

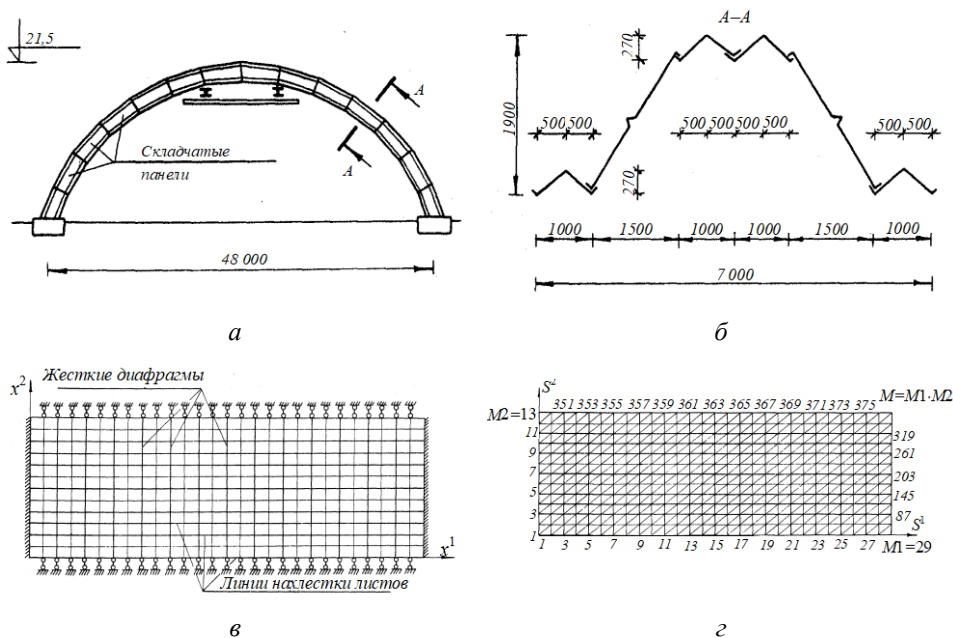


Рис. 9.10. Схемы облегченной складчатой конструкции ангара для самолетов:
а – конструктивная поперечного сечения сооружения; б – то же, складчатой секции;
в – расчетная секции; г – топологическая складчатой секции с номерами
координатных линий и узлов сеточной области

Учитывая двустороннюю симметрию конструкции ангара, а также то, что здание состоит из 7 одинаковых складчатых секций, в качестве расчетной принята одна из этих секций (средняя). По направлению неучитываемых в расчете частей сооружения поставлены связи на соответствующие перемещения узлов (рис. 9.10, в).

В расчетной схеме листы секции представляются набором мембранных треугольных конечных элементов. Места стыковки листов секции, представляющие собой зоны повышенной жесткости, и решетчатые диафрагмы аппроксимируются стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения-сжатия. На рис. 9.10, в показана также схема разбивки расчетной секции на конечные элементы.

При описании топологической структуры конструкции расчетная схема секции отображается на прямоугольную сеточную область. Вводится местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 29$ и от 1 до $M2 = 13$ по каждому направлению, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 = 377$, как это показано на рис. 9.10, г. Таким образом, каждый узел дискретной модели определяется номером N с текущими сеточными координатами I, J соответственно по S^1 и по S^2 . При этом величины N, I и J связаны зависимостью

$$N(I, J) = I + M1(I - 1). \quad (9.4)$$

Расчет ангара производился в три этапа. На первом – была определена исходная форма сооружения от действия собственного веса его конструктивных элементов (рис. 9.11, а). На втором – исследовано напряженно-деформированное состояние здания при четырех комбинациях постоянных и временных нагрузок (рис. 9.11, б – д) и определено наиболее неблагоприятное их сочетание, включающее собственный вес сооружения, симметричную снеговую нагрузку и нагрузку от кранового оборудования. На третьем – был произведен расчет здания на действие определенного ранее наиболее неблагоприятного сочетания нагрузок (рис. 9.11, е).

Результаты расчета в виде эпюр напряжений, возникающих в крайних волокнах поперечного сечения складчатой секции, и вертикальных перемещений ее нейтральной оси приведены на рис. 9.12. Причем каждая эпюра рис. 9.12 соответствует аналогичной на рис. 9.11. Из анализа представленных эпюр можно сделать следующие выводы. Наибольшие сжимающие напряжения, возникающие в месте опирания секции, составили $\sigma_{\min} = 146$ МПа, что меньше расчетного сопротивления алюминиевого сплава $R_y = 150$ МПа. Максимальные растягивающие напряжения составили $\sigma_{\max} = 91$ МПа. Наибольший прогиб наблюдается в коньке секции и равен $u_{\max}^3 = 7,43$ см, что также меньше допускаемого прогиба $[u] = 10,75$ см ($1/200$ высоты сооружения).

Результаты свидетельствуют о том, что рассчитанное сооружение имеет высокую несущую способность и жесткость, а напряжения и перемещения при полной эксплуатационной нагрузке находятся в допустимых пределах. Максимальные напряжения возникают в местах опирания секции на фундамент и хотя не достигают допускаемых значений – весьма близки к ним.

Поэтому для обеспечения нормальной эксплуатации сооружения было рекомендовано заменить жесткое опирание секции на шарнирное или применить другие специальные способы крепления.

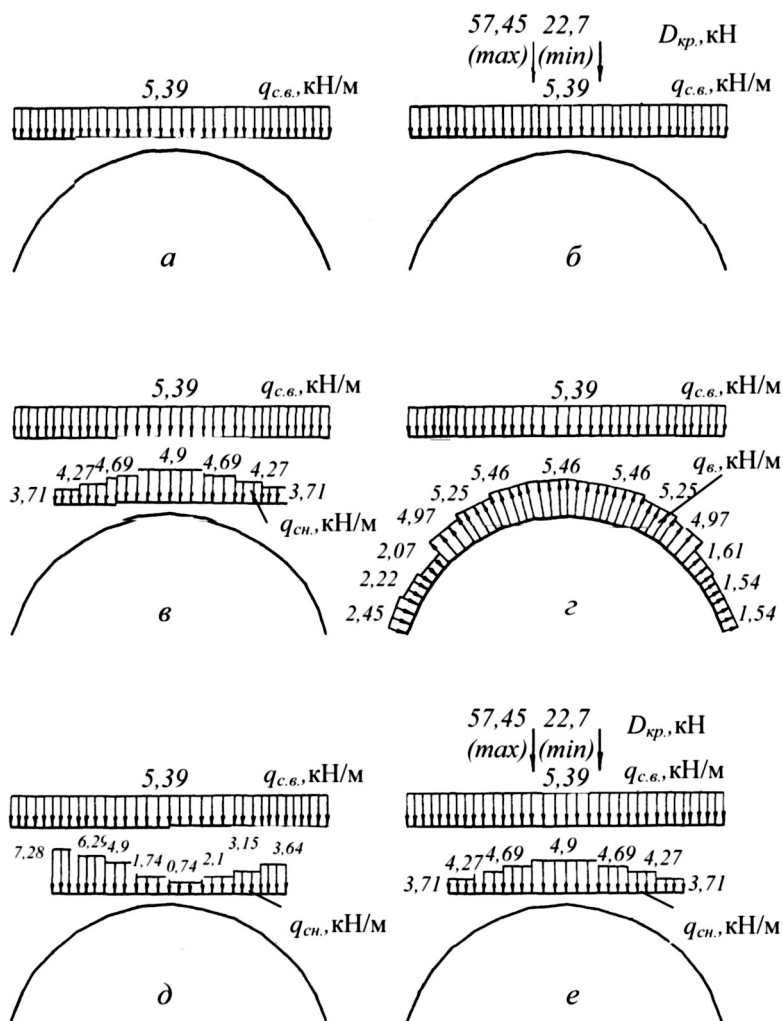


Рис. 9.11. Схемы нагружения (*a – e*) ангара постоянными и временными нагрузками

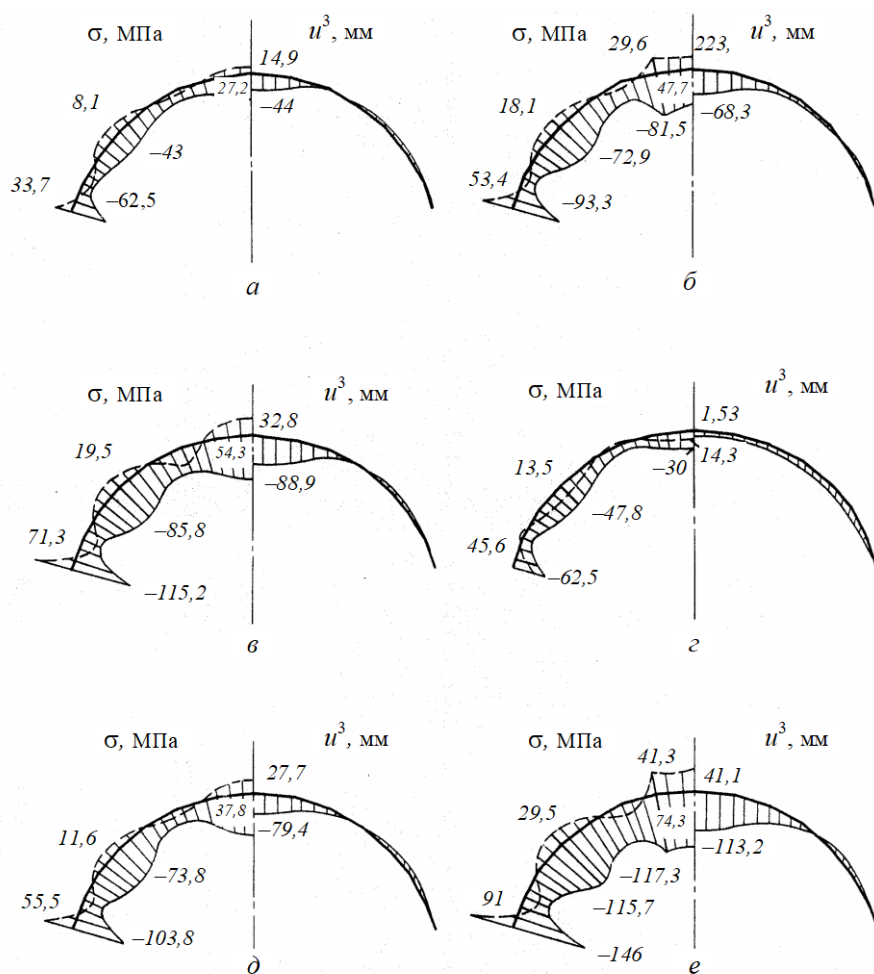


Рис. 9.12. Эпюры напряжений --- $\sigma_{\max}$; — $\sigma_{\min}$ и перемещений складчатой секции ангара при различных схемах нагружения (a – e)

§ 9.5. Висячая мембранная оболочка покрытия

Рассмотрим покрытие, представляющее собой висячую мембранную оболочку на упруго-податливом трубобетонном опорном контуре прямоугольной формы, поддерживаемом спаренными железобетонными колоннами. Отличительной чертой данного покрытия является то, что мембрана крепится к опорному контуру по всему периметру.

В процессе монтажа на отметке покрытия из отдельных стальных листов сваривается первоначально плоская мембрана и опорный контур с дополнительной арматурой. При подъеме в проектное положение оболочка под действием собственного веса, начальных несовершенств при сварке и прогиба контура принимает свободно провисающую форму. После закрепления опорный контур заполняется бетоном. По достижении бетоном расчетной прочности по мембране укладывается стабилизирующий и антикоррозионный слой торкрет-бетона, слой утеплителя и рулонный ковер на мастике.

Постоянной нагрузкой, действующей на покрытие, является собственный вес его несущих и конструктивных элементов. В качестве временной принята снеговая нагрузка. Воздействие ветрового давления на пологую мембрану с учетом стабилизирующего слоя оказывает только разгружающее влияние и при расчете не принимается во внимание.

Конструктивная схема висячего покрытия показана на рис. 9.13, а. Как уже отмечалось, прямоугольная в плане мембранная оболочка подвешена на достаточно гибком ($h/l = 1/50 \dots 1/100$) замкнутом опорном трубобетонном контуре. Покрытие является конструктивно анизотропным, состоящим из двух слоев – стальной мембраны толщиной 4 мм и железобетонной тонкой оболочки толщиной 30 мм. Модуль упругости материала мембраны $E_m = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,33$. Для железобетонной оболочки соответственно принимаем $E_{об} = 3 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{об} = 0,18$. Опорный трубобетонный контур приводится к эквивалентному стержню с круглым поперечным сечением площадью $F_k = 1,169$ м² и модулем упругости $E_k = 3,92 \cdot 10^4$ МПа. Исходная форма покрытия определяется по формуле

$$z = -f_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (9.5)$$

где f_0 – начальная стрела провисания; a и b – половина длины и ширины покрытия соответственно.

Ввиду симметрии конструкции и действующих нагрузок расчеты произведены для 1/4 части покрытия. Расчетная схема фрагмента изображена на рис. 9.13, б. При описании топологической структуры покрытия расчетная схема фрагмента отображается на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 13$, от 1 до $M2 = 13$ и от 1 до $M3 = 2$ по каждому направлению, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели понятен из рис. 9.13, б.

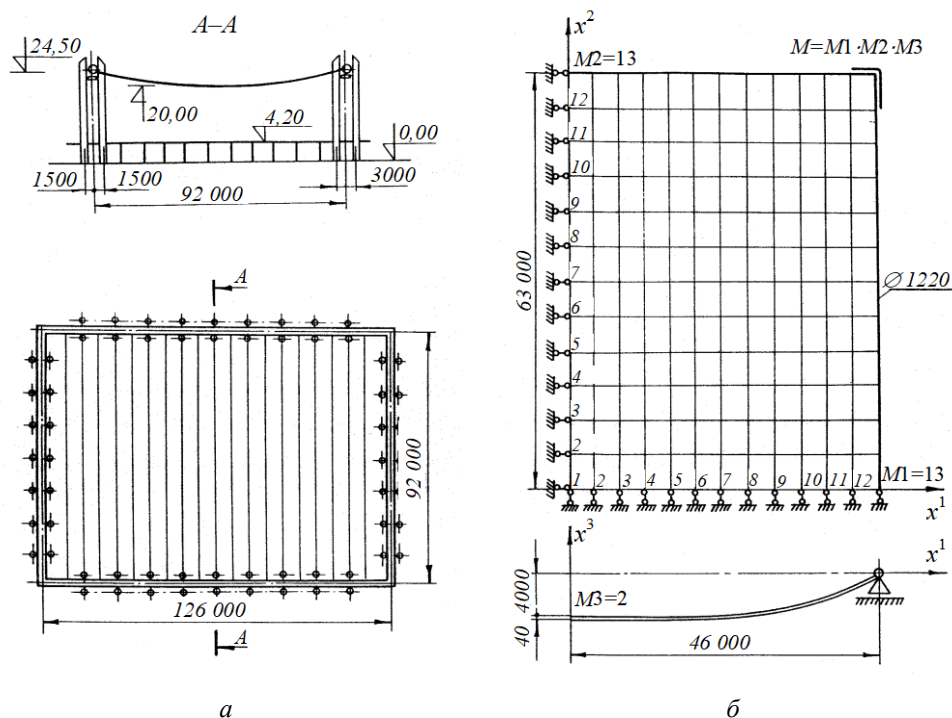


Рис. 9.13. Конструктивная (а) и расчетная (б) с нумерацией координатных линий сеточной области схемы висячего покрытия

В расчетной схеме оболочка представляется набором мембранных четырехугольных конечных элементов, а контур – стержневыми конечными элементами, воспринимающими растяжение – сжатие с изгибом. По осям симметрии фрагмента наложены связи на соответствующие перемещения узлов, а узел, находящийся в углу опорного контура, закреплен жестко.

О характере напряженно-деформированного состояния покрытия при полной расчетной нагрузке (2,63 МПа) можно судить по результатам, показанным на рис. 9.14. Опорный контур практически по всей длине оказался сжатым и только в приугловых участках наблюдаются растягивающие усилия. Изгибающие моменты в контуре относительно невелики, за исключением тех же приугловых участков, где момент достигает достаточно большого значения. Максимальные сжимающие усилия, изгибающие моменты и прогибы в контуре (в горизонтальной плоскости) составляют: $N = 4352$ кН, $M = 13383$ кН·м, $u^1 = 0,38$ м. Прогиб висячей оболочки в центральной точке $u^3 = 1,22$ м.

§ 9.6. Трансформирующаяся вантово-стержневая оболочка

Выполнен расчет трансформирующейся вантово-стержневой оболочки, которая при освобождении некоторых связей превращается в механизм, изменяющий свои размеры без нарушения целостности узловых соединений. Складывание такой системы производится за счет продавливания половины узлов каркаса к центру кривизны. Обратный процесс – раскрытие осуществляется путем поочередного выдавливания тех же узлов в проектное положение.

Общий вид трансформирующейся вантово-стержневой оболочки пролетом 20,5 м и высотой 4,72 м показан на рис. 9.15, *а*. Ее каркас образован из шестиугольных ячеек, выполненных из элементов двух типов: стержней, способных воспринимать растяжение-сжатие (на рис. 9.15 выделены жирными линиями), и ванта, воспринимающих только растягивающие усилия. В исходном недеформированном состоянии стержни предварительно сжаты усилием $N = 500$ Н, а ванты предварительно растянуты усилием $N = 144$ Н.

В связи с несимметричностью конструкции относительно осей координат в качестве расчетной схемы принята вся оболочка с учетом наложенных на ее конструктивных элементов связей. При разбивке трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на составляющие фрагменты было учтено наличие в ее конструкции так называемых «верхних» и «нижних» узлов (см. рис. 9.15, *б*, где «верхние» узлы обозначены точками). В связи с этим в отдельные фрагменты были выделены соединяющие «верхние» и «нижние» узлы вантовые сети, а также сжатые стержневые элементы. Схемы разбивки оболочки на фрагменты с нумерацией узлов сеточной области изображены на рис. 9.16 и 9.17. Тонкими линиями показаны «фиктивные» стержни и узлы, введенные в топологические схемы вантовых сетей и сжатых стержней с целью придания им большей регулярности.

Указанные фрагменты отображаются на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов по оси S^1 от 1 до $M1 = 9$, по оси S^2 от 1 до $M2 = 9$ и по оси S^3 от 1 до $M3 = 2$, как показано на рис. 9.16 и 9.17, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Таким образом, каждый узел дискретной модели определяется номером N с текущими сеточными координатами I, J, K соответственно по осям S^1, S^2, S^3 . При этом величины N, I, J, K будут связаны зависимостью

$$N(I, J, K) = I + M1(I - 1) + M1 \cdot M2(K - 1). \quad (9.6)$$

Отметим также, что в расчетной схеме ванты представляются набором прямолинейных стержневых конечных элементов, способных воспринимать только растягивающие усилия, а сжатые элементы – прямолинейными стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения-сжатия.

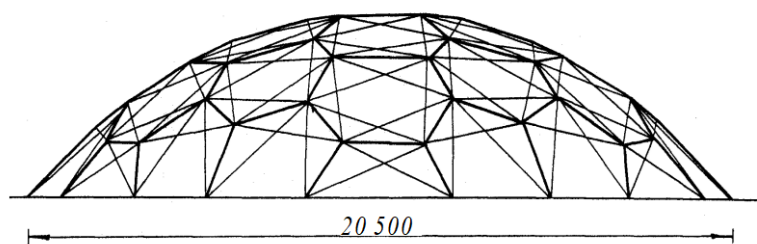
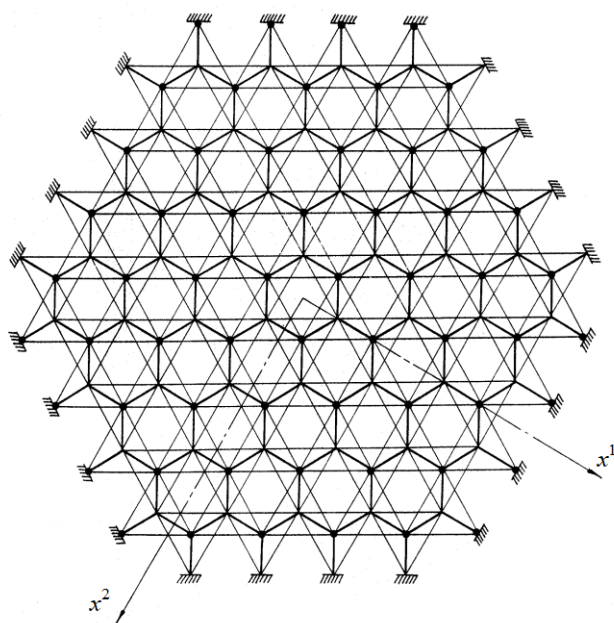
*a**б*

Рис. 9.15. Общий вид (а) и расчетная схема (б) трансформирующейся вантово-стержневой оболочки

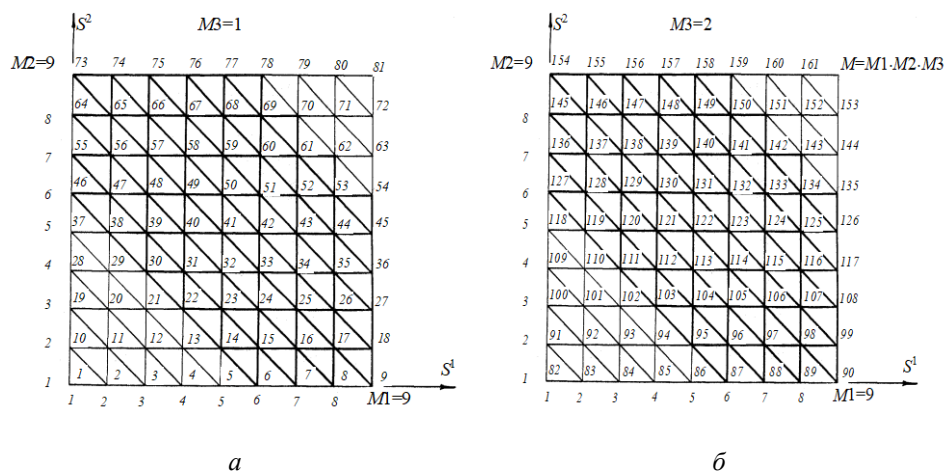


Рис. 9.16. Топологические схемы фрагментов вантовых сетей трансформирующейся вантово-стержневой оболочки:

a – вантовая сеть, соединяющая «нижние» узлы;

б – то же, соединяющая «верхние» узлы

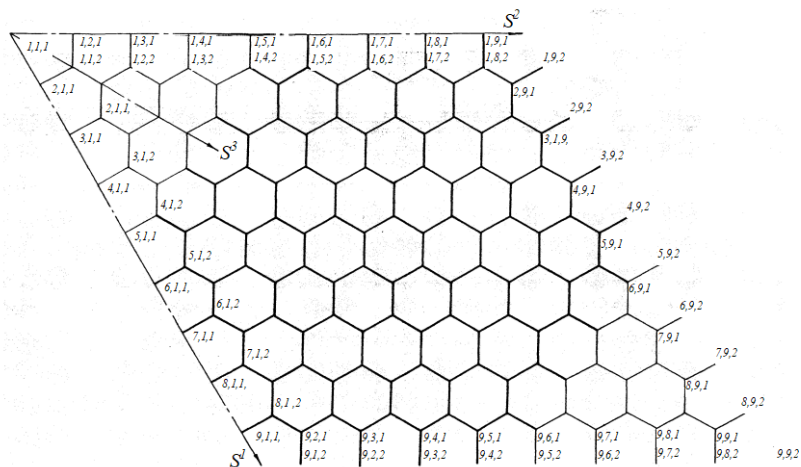


Рис. 9.17. Топологическая схема фрагмента сжатых стержней трансформирующейся вантово-стержневой оболочки

Расчет трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на общую устойчивость проводился при двух типах нагружения:

- полном – когда направленная по оси x^3 нагрузка прикладывалась во все узлы оболочки;
- неполном – когда направленная по оси x^3 нагрузка прикладывалась только к «верхним» узлам оболочки.

Как в первом, так и во втором случаях в качестве исходного положения для дальнейших расчетов принималось равновесное состояние оболочки, полученное с учетом собственного веса ее конструктивных элементов и заданных усилий преднапряжения.

В результате расчета было установлено, что критическая нагрузка при первом типе нагружения $P_{кр} = 370$ Н, при втором – $P_{кр} = 170$ Н. На рис. 9.18 изображены кривые «нагрузка–перемещение» для наиболее характерных узлов оболочки. Из анализа представленных результатов видно, что при увеличении нагрузки некоторые узлы оболочки претерпевают положительные перемещения (опускаются), а другие – отрицательные (поднимаются). Причем, если при полном нагружении поднимаются только крайние как «нижние», так и «верхние» узлы, а все остальные опускаются, то при неполном нагружении поднимаются независимо от их расположения исключительно «нижние» узлы, а все «верхние» также независимо от их расположения опускаются.

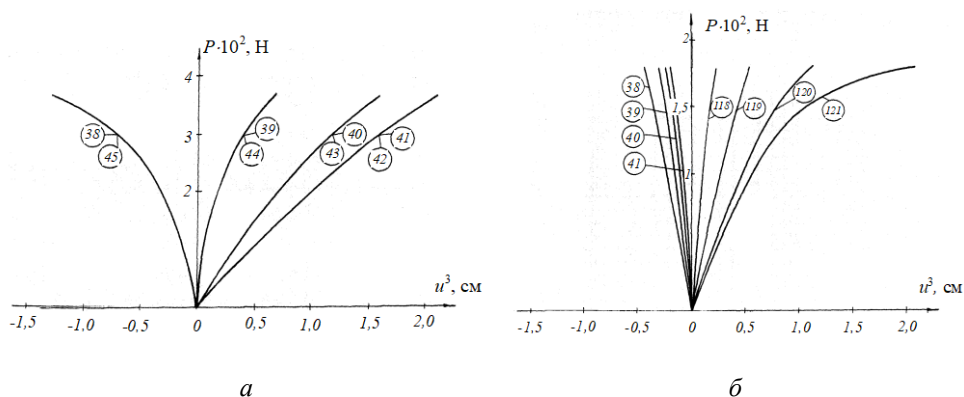


Рис. 9.18. К расчету трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на общую устойчивость:

$a, б$ – кривые «нагрузка – перемещение» соответственно для полного и неполного нагружения

§ 9.7. Висячее покрытие универсального производственного здания

Исследовано напряженно-деформированное состояние висячего покрытия круглого в плане универсального производственного здания диаметром 51,4 м (рис. 9.19, а). Мембранная оболочка подвешена на внешнем упруго-податливом замкнутом кольцевом железобетонном контуре с отношением $H/R = 1/100$. В центре покрытия имеется отверстие диаметром 4,1 м, через которое по технологическим требованиям проходит вентиляционная шахта. В месте примыкания к шахте мембрана опирается на внутренний упруго-податливый контур ($h/r = 1/100$). Материал мембраны – тонкий стальной лист с приведенной толщиной $h_m = 4$ мм, модулем упругости $E_m = 2,1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu_m = 0,3$. Модуль упругости и коэффициент Пуассона материала опорных контуров для приведенного сечения соответственно равны $E_k = 2,273 \cdot 10^4$ МПа и $\nu_k = 0,2$.

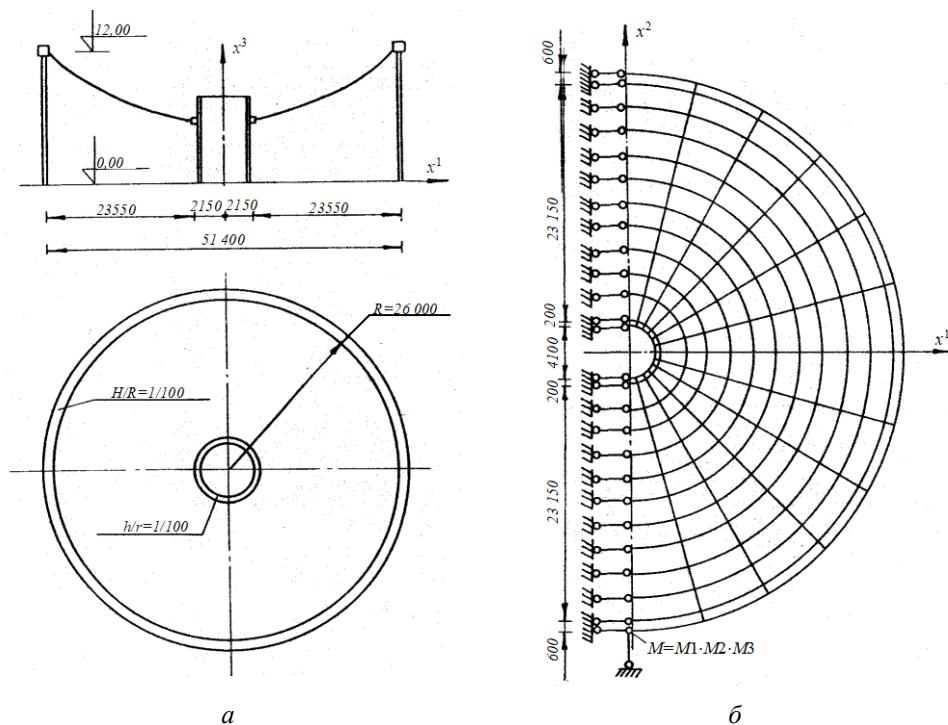


Рис. 9.19. Конструктивная (а) и расчетная (б) схемы висячего покрытия универсального производственного здания

Исходная форма мембранной оболочки задана в виде перевернутого усеченного параболоида вращения диаметром в основании 50,8 м, в вершине – 4,5 м при высоте 5,6 м. Начальные координаты поверхности оболочки определяются по формуле

$$z = \frac{5}{23,15^2} \left(x^2 + y^2 - 4,5\sqrt{x^2 + y^2} + 5,0625 \right) + 0,004. \quad (9.7)$$

При описании топологической структуры конечноэлементной модели покрытия расчетная схема отображается на сеточную область с единичными размерами ячеек, координатными линиями которой являются равномерно расположенные концентрические полуокружности (направление S^1). Вводится местная нумерация узлов модели: в плане от 1 до $M1 = 13$ и от 1 до $M2 = 13$, по толщине оболочки от 1 до $M3 = 2$, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели понятен из рис. 9.19, б. По оси симметрии расчетной схемы наложены связи на перемещения по оси x^1 , а опорные контуры покрытия закреплены от смещения по третьему направлению. С целью исключения смещения дискретной модели в горизонтальной плоскости на один из узлов внешнего опорного контура наложены связи, обеспечивающие его шарнирное закрепление.

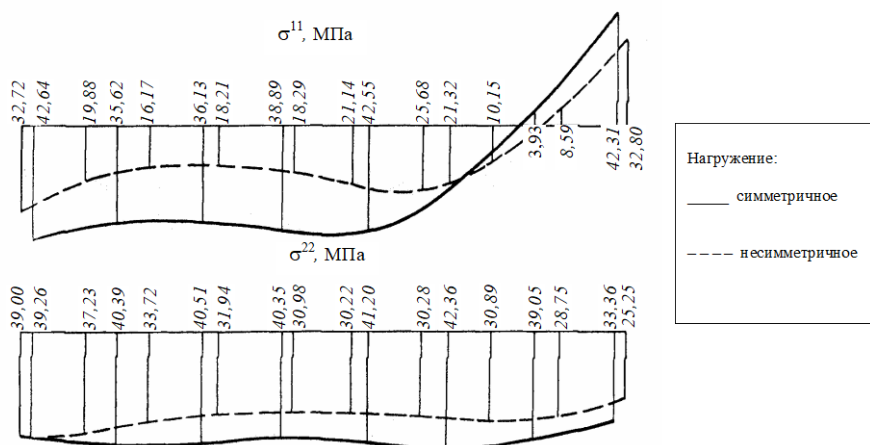
Расчет конструкции покрытия производился в два этапа: на постоянную (собственный вес) нагрузку интенсивности $q_1 = 3,8 \text{ кН/м}^2$ с учетом временной (снеговой) как симметричной по всему покрытию, так и несимметричной на половине покрытия нагрузки интенсивностью $q_c = 0,2 \text{ кН/м}^2$. При симметричном нагружении расчет выполнялся для 1/4 покрытия без закрепления внутреннего опорного контура, а при несимметричном – для половины покрытия.

О характере напряженно-деформированного состояния мембранного покрытия можно судить по результатам, показанным на рис. 9.20.

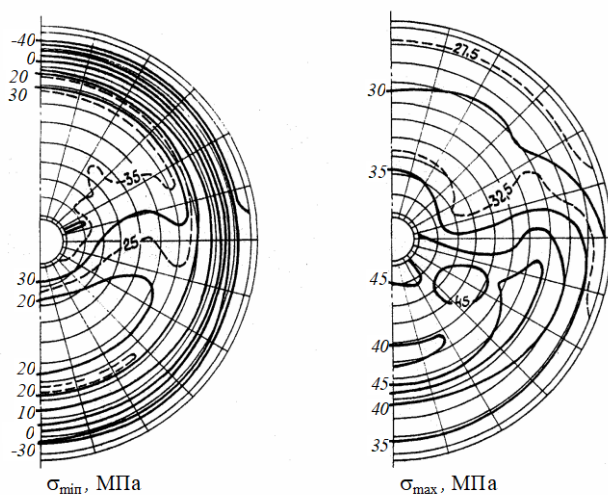
Максимальные растягивающие напряжения в мембране $\sigma^{22} = 42,36 \text{ МПа}$ возникают при действии симметричной нагрузки в радиальном направлении. Некоторые элементы мембраны в приконтурных зонах испытывают достаточно большое сжатие. При этом модуль отрицательного главного напряжения в кольцевом направлении $\sigma^{11} = 42,31 \text{ МПа}$ при симметричном и $\sigma^{11} = 32,8 \text{ МПа}$ при несимметричном нагружениях, что может привести к образованию складок. Характер распределения главных мембранных напряжений в покрытии при несимметричном нагружении показан на рис. 9.20. Максимальные сжимающие усилия в опорных контурах возникают при действии симметричной нагрузки и для внешнего и внутреннего контура соответственно будут $N_1 = 2407,2 \text{ кН}$ и $N_2 = 360,7 \text{ кН}$.

На основании выполненного расчета можно заключить, что висячая мембранная оболочка обладает значительным запасом прочности, поскольку толщина листовой стали подбиралась не по прочностным, а по конструктивным и технологическим требованиям. Складчатые зоны, обусловленные

наличием ограниченного одноосного напряженного состояния, могут возникать в приконтурной зоне мембранной оболочки и распространяться до $1/6 - 1/5$ длины радиуса в зависимости от условий закрепления оболочки и ее начальной формы.



а



б

Рис. 9.20. К расчету висячего покрытия универсального производственного здания:

а – распределение главных напряжений в кольцевом направлении;

б – распределение главных мембранных напряжений

§ 9.8. Висячее покрытие выставочного павильона

Исследовано напряженно-деформированное состояние висячего большепролетного покрытия выставочного павильона. Покрытие имеет форму гиперболического параболоида с разницей вертикальных отметок углов контура 20 м, расстоянием между осями колонн в плане 94,34 м и длинами диагоналей – 100 и 160 м (рис. 9.21). Основными несущими элементами висячего покрытия являются нити конечной жесткости, опирающиеся с шагом 3,776 м на упруго-податливый трубобетонный опорный контур и зафиксированные в проектном положении с помощью распорок из швеллера № 10. По нитям уложен профилированный настил, по которому выполнена мягкая кровля. Предложенная конструкция покрытия обеспечивает максимальное снижение его материалоемкости и наиболее полно отвечает требованиям современной технологии изготовления и монтажа висячих систем.

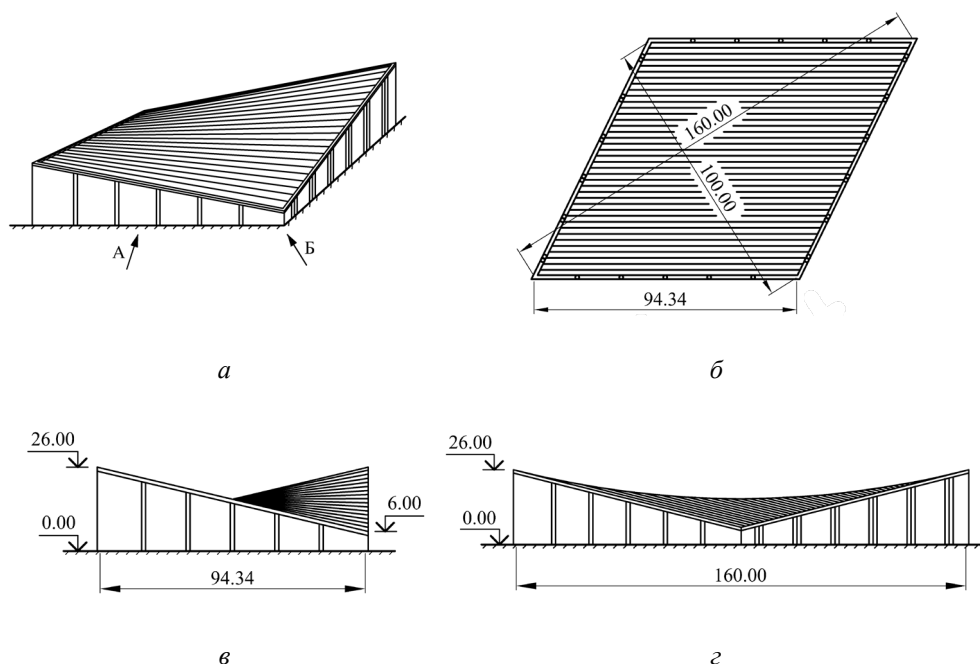


Рис. 9.21. Конструктивная схема покрытия:

a – общий вид; *б* – план; *в* – вид А; *г* – вид Б

На рис. 9.22 представлены поперечные сечения основных несущих элементов покрытия – нитей конечной жесткости из швеллеров № 40 и опорного трубобетонного контура, состоящего из заполненной бетоном металлической трубы $\varnothing 1200 \times 14$ мм с арматурным каркасом из 12 стержней $\varnothing 28$ АIII. Нити конечной жесткости и труба опорного контура выполнены из стали марки С46/33 с пределом текучести $|\sigma_{ст}^T| = 330$ МПа, а бетон опорного контура принят класса В45 с предельным значением $|\sigma_6^T| = 60$ МПа.

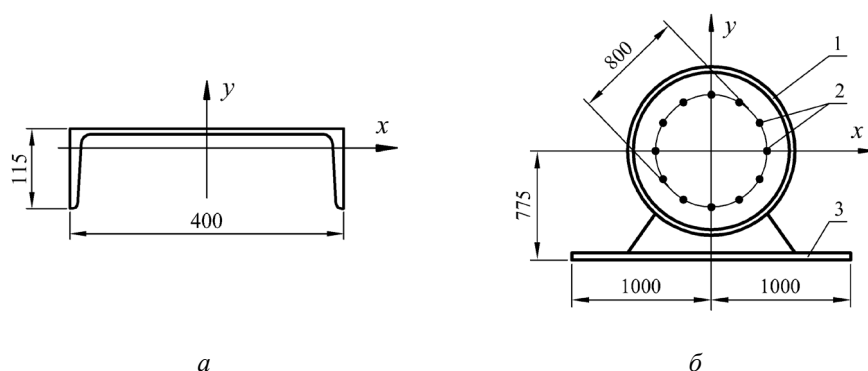


Рис. 9.22. Поперечное сечение:
 а – нити конечной жесткости; б – опорного трубобетонного контура;
 1 – труба $\varnothing 1200 \times 14$; 2 – арматура $\varnothing 28$ АIII; 3 – плита 2000×25

На рис. 9.23 наведена расчетная схема покрытия, в которой его основные несущие элементы представлены стержневыми конечными элементами прямоугольного поперечного сечения, воспринимающими усилия растяжения-сжатия и изгиба. Параметры конечных элементов (размеры поперечного сечения и эквивалентный модуль упругости) установлены с учетом эквивалентного «размазывания» стержневых элементов покрытия таким образом, чтобы обеспечить эквивалентность жесткостных характеристик расчетных и реальных конструктивных элементов.

При описании топологической структуры покрытия его расчетная схема отображается на прямоугольную сеточную область. Вводится местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 2$, от 1 до $M2 = 43$ и от 1 до $M3 = 49$, а также сквозная – от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов показан на рис. 9.23.

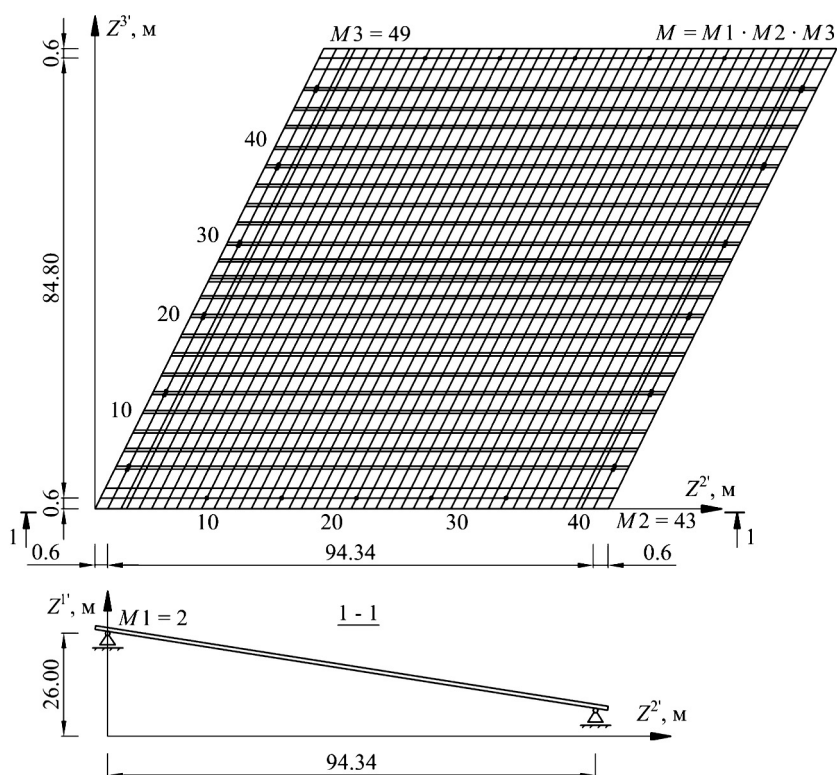


Рис. 9.23. Расчетная схема висячего покрытия с нумерацией координатных линий сеточной области

В качестве внешнего воздействия на покрытие принято равномерно распределенное по его поверхности нагружение от собственного веса конструкций с учетом нагрузок от легкого подвесного потолка и электрооборудования $q_{с.в.}^p = 2,63 \text{ кН/м}^2$, а также максимальной снеговой нагрузки $q_c^p = 1,57 \text{ кН/м}^2$.

По результатам расчета построены эпюры перемещений, продольных сил и изгибающих моментов в средней нити конечной жесткости (рис. 9.24) и боковой (перпендикулярной нитям) стороне опорного контура (рис. 9.25). Анализ полученных результатов показал, что кривая деформирования нити имеет три точки перегиба, а максимальные прогибы весьма значительны и достигают 9,689 м. Эпюры продольных сил N^{22} и изгибающих моментов M^{22} имеют в средней части плавный характер, а на краях наблюдаются

знакопеременность и значительные абсолютные значения усилий.

тивности и подлежит уточнению.

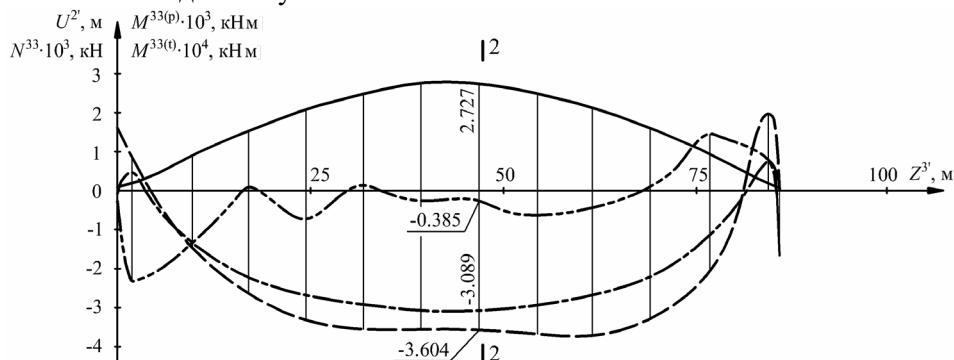


Рис. 9.25. Эпюры в боковой стороне опорного контура:

- — — — — перемещения U^2 ; - - - - - продольные силы N^{33} ;
- - - - - компонента изгибающего момента косого изгиба $M^{33(p)}$;
- — — — — компонента изгибающего момента косого изгиба $M^{33(t)}$

С целью уменьшения горизонтальных перемещений продольных (параллельных нитям) сторон опорного контура вводим упруго-податливую связь по направлению Z^3 (рис. 9.26) с единичной жесткостью $R_a^{3'} = 1260$.

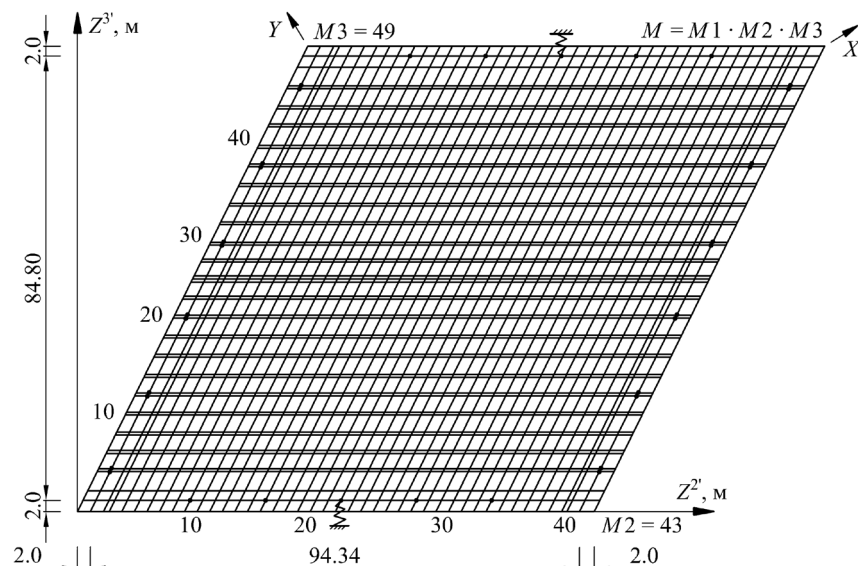


Рис. 9.26. Расчетная схема висячего покрытия с нумерацией координатных линий сеточной области

и дополнительно введенной упруго-податливой связью

Принимаем также новый вариант поперечного сечения нити конечной жесткости, включающий швеллер № 40, стальную полосу 540×20 и два уголка 50×5 (рис. 9.27, а). С целью повышения жесткости трубобетонного опорного контура его конструкция развита в горизонтальной плоскости и включает две заполненные бетоном трубы $\varnothing 1620 \times 18$ с арматурным каркасом из 24 стержней $\varnothing 32$ АШ в каждой, совместная работа которых обеспечивается двумя трубами $\varnothing 600 \times 10$ и $\varnothing 660 \times 10$, плитой основания 4400×40, верхним листом 2000×20 и двумя продольными гладкими стержнями $\varnothing 32$ мм (рис. 9.27, б).

С учетом указанных поперечных сечений опорного контура и нитей конечной жесткости выполнен новый расчет покрытия, расчетная схема которого представлена на рис. 9.26. По результатам расчета определены ординаты начального и деформированного состояния покрытия (рис. 9.28, 9.29), а также прогибы, продольные силы и изгибающие моменты в средней нити конечной жесткости (рис. 9.30) и боковой стороне опорного контура (рис. 9.31).

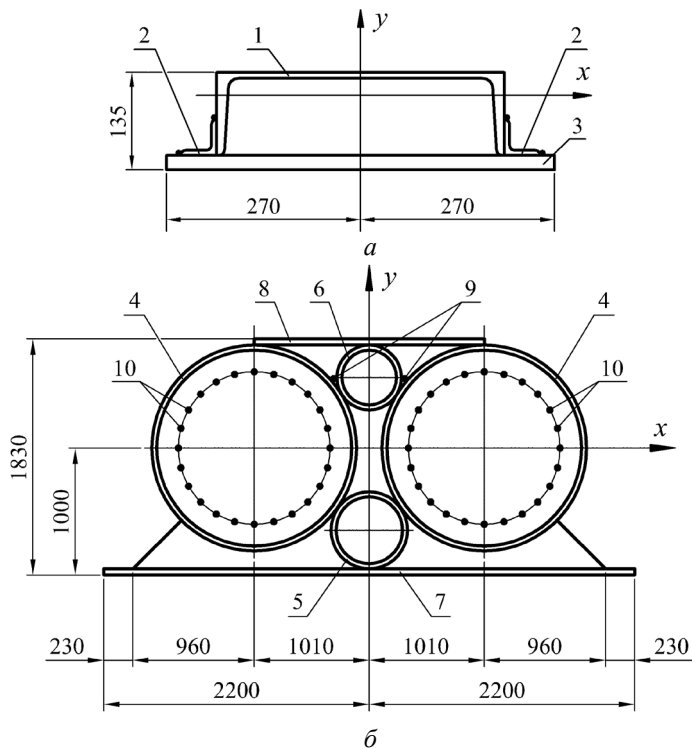


Рис. 9.27. Новое поперечное сечение:

- а – нити конечной жесткости; б – опорного трубобетонного контура;
 1 – швеллер № 40; 2 – уголок 50×5; 3 – лист 540×20; 4 – труба $\varnothing 1620 \times 18$;
 5 – труба $\varnothing 660 \times 10$; 6 – труба $\varnothing 600 \times 10$; 7 – плита 4400×40; 8 – лист 2000×20;

9 – стержень Ø32; 10 – арматура Ø32 АШ

Анализ результатов расчета большепролетного висячего покрытия свидетельствует, что перемещения опорного контура в горизонтальной плоскости меньше допустимых нормативных параметров $U_{\max}^{2'} / l_k = 0,474 / 94,34 = 1/200 > 1/150$, а деформированная поверхность покрытия в сечении по побочной диагонали имеет впадину с амплитудой 0,21 м на длине 50 м, вызывающую обратный уклон поверхности покрытия величиной $i = -0,0084$. Поэтому для его изменения по конструктивным требованиям на положительный уклон $i = +0,005$ под кровлей необходимо выполнить поверхностную облегченную конструкцию с максимальной амплитудой $h = 0,35 - 0,40$ м.

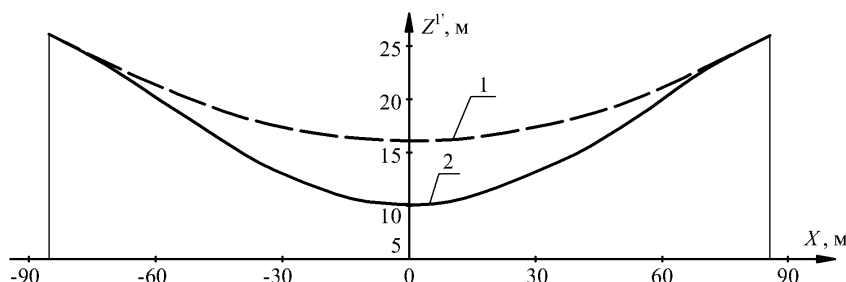


Рис. 9.28. Исходное (1) и деформированное (2) состояния главной диагонали покрытия

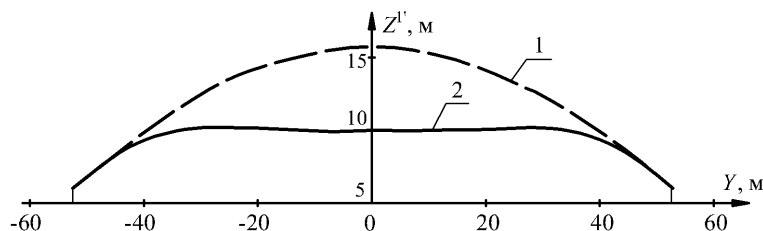


Рис. 9.29. Исходное (1) и деформированное (2) состояния побочной диагонали покрытия

По результатам анализа, представленных на рис. 9.30 и 9.31 данных, определены наиболее нагруженные поперечные сечения в средней нити конечной жесткости (сечение 3 – 3) и боковой стороне опорного контура (сечение 4 – 4).

Для средней нити конечной жесткости в сечении 3 – 3 (рис. 9.30) получены усилия $N^{22} = 2888,0$ кН и $M^{22} = -46,6$ кНм, которые создают максимальное напряжение $\sigma_{\max} = 256,7$ МПа. В то же время, в крайних нитях в средних (наиболее нагруженных) поперечных сечениях действуют усилия

$N^{22} = 4170,0$ кН и $M^{22} = -41,9$ кНм, создающие максимальное напряжение $\sigma_{\max} = 318,6$ МПа, которое не превышает предельных значений для стали С46/33. Следует отметить, что в нитях конечной жесткости напряжения от изгиба составляют 25 – 30 % от полных величин напряжений.

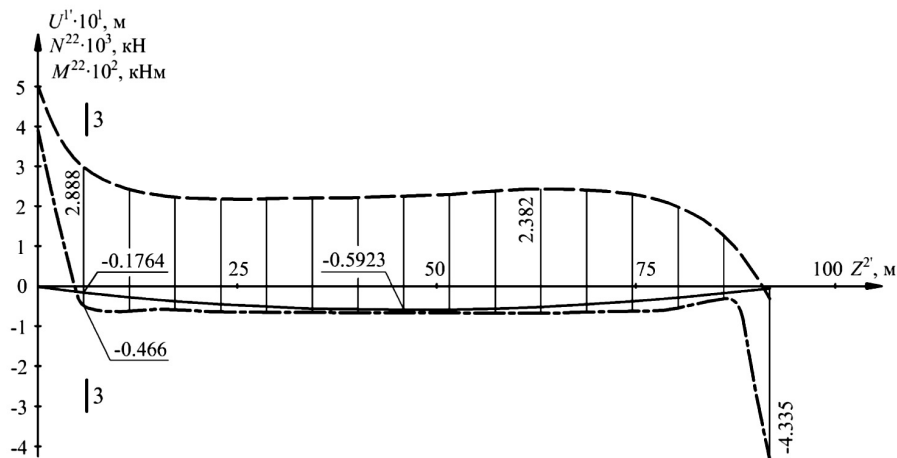


Рис. 9.30. Эпюры в средней нити конечной жесткости:

— — — — — перемещения U^1 ;
 - - - - - продольные силы N^{22} ; — — — — — изгибающие моменты M^{22}

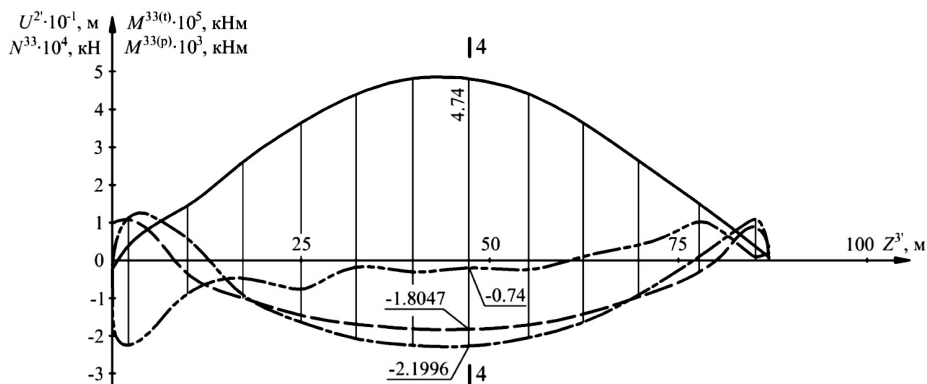


Рис. 9.31. Эпюры в боковой стороне опорного контура:

— — — — — перемещения U^2 ; - - - - - продольные силы N^{33} ;
 — — — — — компонента изгибающего момента косого изгиба $M^{33(p)}$;

Максимальные внутренние усилия в опорном контуре наблюдаются в сечении 4–4 (рис. 9.31) и составляют $N^{33} = -18047$ кН, $M^{33(t)} = -219960$ кНм и $M^{33(p)} = -740$ кНм. С учетом перераспределения напряжений между трубой и железобетоном опорного контура пропорционально их жесткостям максимальные напряжения в них составили $\sigma_{\max}^{\text{тр.}} = -195,7$ МПа и $\sigma_{\max}^{\text{ж.б.}} = -41,5$ МПа, что не превышает предельные значения напряжений для принятых бетона класса В45 и стали марки С46/33.

Выполненный расчет по определению конструкции упруго-податливой связи показал, что ее поперечное сечение должно состоять из шести швеллеров № 40 и полосового листа 1400×32 мм (рис. 9.32).

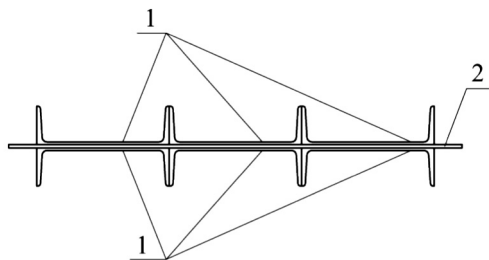


Рис. 9.32. Поперечное сечение упруго-податливой связи:
1 – швеллер № 40; 2 – лист 1400×32

На основании анализа результатов выполненного расчета можно заключить, что введение дополнительных упруго-податливых связей к продольным сторонам опорного контура, а также использование уточненных конструкций опорного контура и нитей конечной жесткости обеспечивает высокую несущую способность и жесткость рассмотренного большепролетного висячего покрытия. При этом усилия и перемещения, возникающие в них при действии эксплуатационных нагрузок, находятся в допустимых пределах.

§ 9.9. Висячее мембранно-вантовое покрытие демонстрационного зала

Применение в висячих покрытиях тонколистовых мембран позволяет совместить в одном конструктивном решении несущие и ограждающие функции. Однако, ввиду легкости мембранных элементов, вопросы обеспечения достаточной жесткости сооружения, особенно при действии ветровых нагрузок, требуют самого пристального внимания. Немаловажной проблемой является также получение необходимой формы мембраны с использованием плоских раскройных элементов [113, 114, 198].

В настоящее время разработан ряд оригинальных двухслойных мембранно-вантовых висячих конструкций, совмещающих в себе положительные качества мембранных и вантовых систем. В этих системах вантовая сеть выполняет несущие функции, а мембрана, укладываемая на стойки, установленные в узлах вантовой сети, является натягающей системой и одновременно ограждающей конструкцией. Предварительное напряжение создается раздвижкой телескопических стоек, соединяющих вантовую сеть с мембраной. Такое решение позволяет не только обеспечить достаточную жесткость рассматриваемой конструкции, но одновременно повысить ее экономичность вследствие сокращения расхода металла по сравнению с двухпоясными вантовыми системами и висячими железобетонными оболочками [113, 188, 193].

В данном примере использована методика, позволяющая смоделировать процесс монтажа круглого в плане висячего комбинированного мембранно-вантового покрытия демонстрационного зала диаметром 70 м и выполнить его расчет на действие постоянных и временных нагрузок. При этом целью исследований являлось:

1. Выявление влияния предварительного напряжения на напряженно-деформированное состояние первоначально плоской мембраны и определение такой его величины, которая обеспечивает допустимые прогибы мембраны при действии постоянных и временных нагрузок.

2. Определение начальной формы провисания вантовой сети, обеспечивающей достаточную жесткость конструкции в процессе предварительного напряжения и действия постоянных и временных нагрузок.

3. Исследование допустимости проведения отдельных расчетов мембраны и вантовой сети на усилия предварительного напряжения путем сопоставления их результатов с расчетом всей комбинированной конструкции при тех же условиях.

4. Выполнение полного расчета комбинированной конструкции на действие постоянных и временных нагрузок с учетом усилий предварительного напряжения.

Конструктивная схема покрытия представлена рис. 9.33 и включает ванты, стойки-распорки и мембрану. Ванты подвешены к жесткому опорному контуру – железобетонному кольцу и образуют вогнутую вантовую сеть. В узлах вантовой сети вертикально установлены стойки-распорки (места их расположения на рис. 9.33 показаны точками), на верхние концы которых опирается жестко защемленная в опорном контуре мембрана. Ванты выполнены из стальных канатов $\varnothing 55$ мм, стойки – из стальных труб $\varnothing 63,5 \times 5$ (РС-2) и $\varnothing 108 \times 4$ (РС-1), а мембрана – из алюминиевого листа толщиной 2 мм.

В качестве расчетной принята дискретная модель, в которой ванты представляются прямолинейными шарнирно-соединенными растянуто-напряженными стержнями, стойки – прямолинейными сжатыми стержнями, шарнирно соединенными с вантовой сетью и мембраной; а мембрана – набором плоских треугольных элементов.

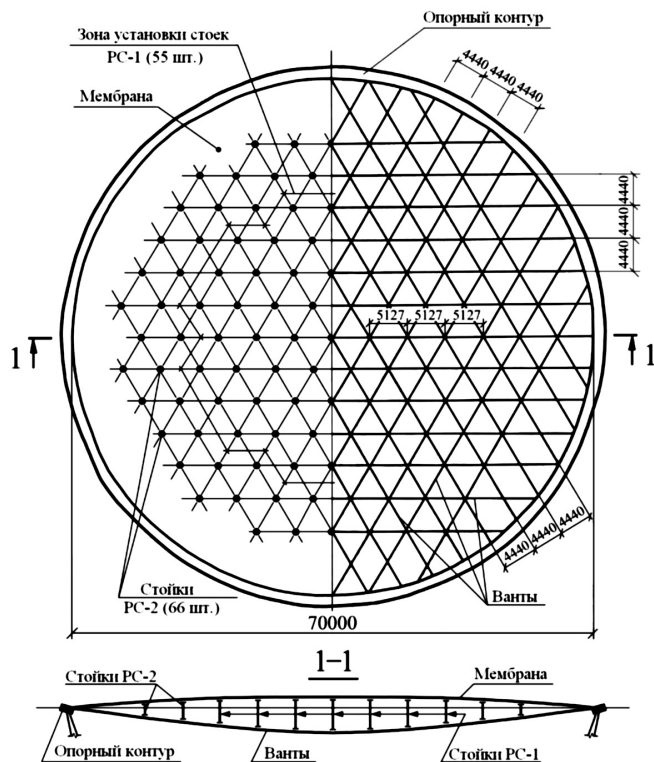


Рис. 9.33. Конструктивная схема покрытия

Ввиду симметричности конструкции покрытия и действующих на нее нагрузок в качестве расчетной принята половина покрытия с наложенными на нее по оси симметрии связями на перемещения (рис. 9.34). На этом же рисунке точками показаны места установки стоек.

При описании топологической структуры покрытия фрагменты мембраны и вантовой сети отображены на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек. При этом введена местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 9$ и от 1 до $M2 = 17$ по каждому направлению, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2$, как показано на рис. 9.35. Таким образом, каждый узел дискретной модели определяется номером N с текущими сеточными координатами I, J , соответственно по осям Z^1 и Z^2 . При этом величины N, I, J связаны зависимостью: $N = I + M1 \cdot (J - 1)$. На рис. 9.36 указаны номера узлов мембранного фрагмента.

Геометрические характеристики элементов мембранно-вантовой комбинированной системы покрытия демонстрационного зала и физические параметры материала были приняты следующими:

1. Ванты представляют собой стальные канаты $\varnothing 55$ мм. Площадь поперечного сечения каната составляет $F_{\text{вт}} = 13,81 \text{ см}^2$, жесткость $EF = 22096 \text{ тс}$, а расчетная несущая способность $N = 78,03 \text{ тс}$. Кроме того, модуль упругости материала проволок каната равняется $E = 1,6 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$, а масса его одного погонного метра составляет 12,25 кг.

2. Мембрана выполнена из алюминиевого листа толщиной 2 мм с модулем упругости материала $E = 7,1 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$, расчетным сопротивлением 190 кгс/см^2 и плотностью $2,73 \text{ т/м}^3$.

3. Стойки представляют собой стальные трубы $\varnothing 63,5 \times 5$ с площадью поперечного сечения $F_{\text{ст}} = 9,19 \text{ см}^2$, модулем упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$, жесткостью $EF = 19299 \text{ тс}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ и массой одного погонного метра – 12,63 кг.

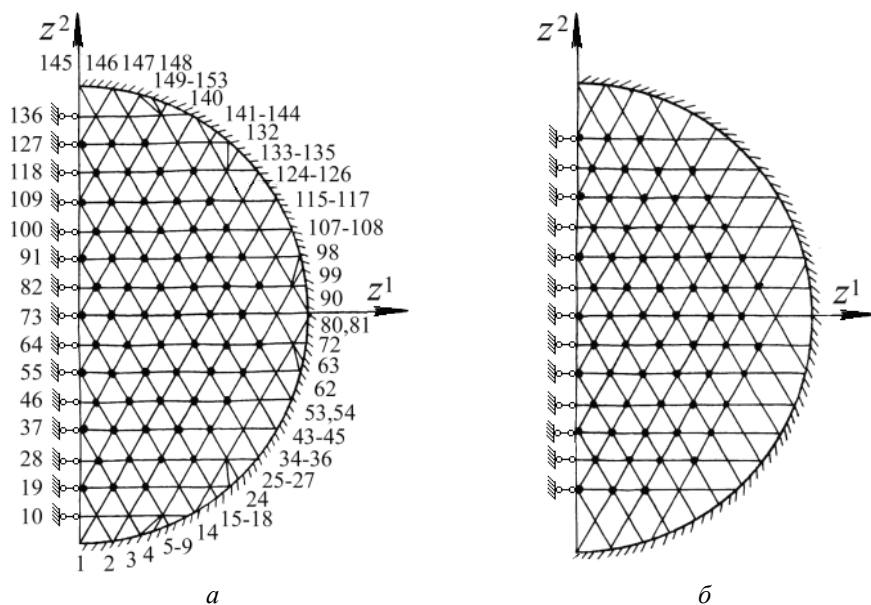


Рис. 9.34. Расчетная схема мембраны (а) и вантовой сети (б)

Расчет конструкции покрытия выполнялся в два этапа на следующие виды нагрузок: от усилий предварительного напряжения и эксплуатационные (с учетом собственного веса покрытия и снегового нагружения).

Расчет на усилия предварительного напряжения проводился в такой последовательности. На первом этапе были определены усилия в стойках покрытия для создания предварительного напряжения всей системы; на втором – определена исходная конфигурация вантовой сети, причем геометрия мембраны в исходном положении была принята плоской; и, наконец, на третьем – выполнен расчет конструкции покрытия на усилия предварительного напряжения.

Поскольку мембрана вследствие предварительного напряжения должна принять максимально выпуклую вверх форму (так как под действием эксплуатационных нагрузок она опускается), то основным критерием при определении усилий предварительного напряжения в стойках являлось требование не превышать мембранные напряжения расчетного сопротивления алюминиевого сплава АМ_г 2-П, равного $R_p = 1190 \text{ кгс/см}^2$.

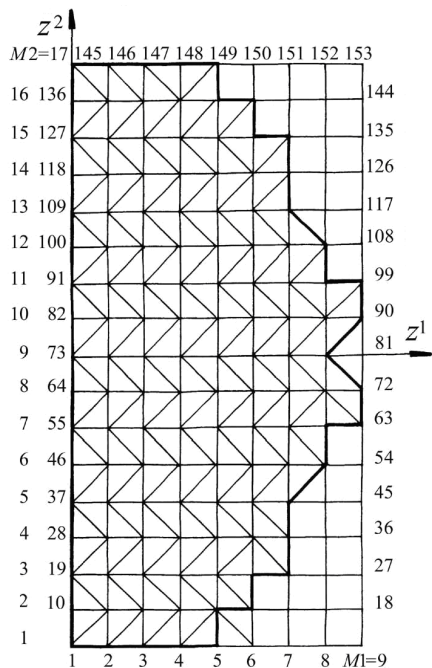


Рис. 9.35. Топологическая схема покрытия с нумерацией координатных линий и узлов сеточной области

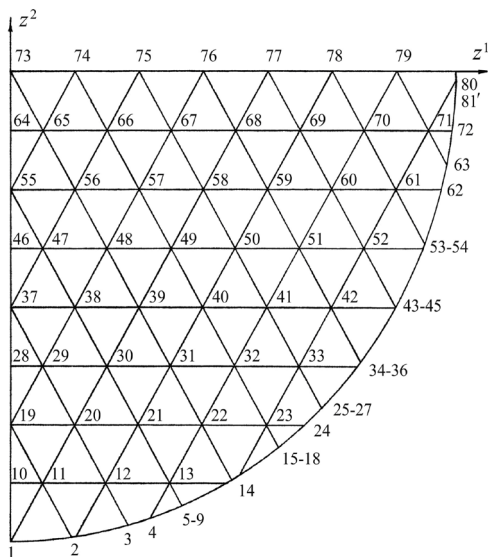


Рис. 9.36. Номера узлов мембранного фрагмента

В соответствии с этим для определения усилий предварительного напряжения в стойках была рассчитана мембрана под действием сил, эквивалентных воздействию стоек. Расчеты были выполнены на усилия величиной 1, 2 и 3 т и было установлено, что искомые усилия предварительного напряжения в стойках равны 2 тонны. В процессе расчета также было выявлено, что в данном случае стрела подъема мембраны не является определяющим расчетным критерием, поскольку в соответствии с архитектурными и конструктивными требованиями ее величина могла варьироваться от 1,2 до 1,75 м, а при определенных усилиях предварительного напряжения в стойках она составила всего 1,37 м. Результаты расчета в виде графиков и изолиний представлены на рис. 9.37, 9.38.

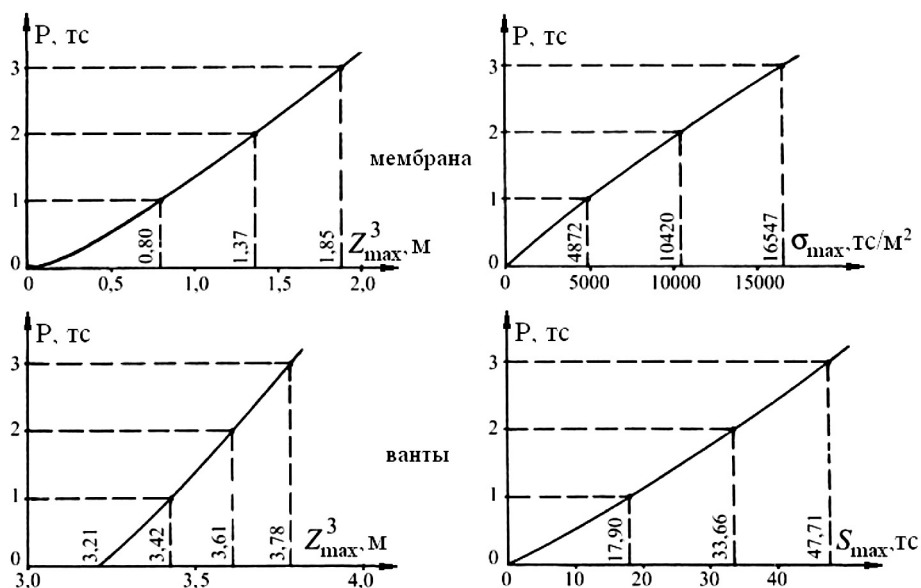


Рис. 9.37. Графики зависимостей $Z_{\max}^3$ и $\sigma_{\max}$ в мембране, а также $Z_{\max}^3$ и $S_{\max}$ в вантах от усилий предварительного напряжения в стойках (раздельный расчет)

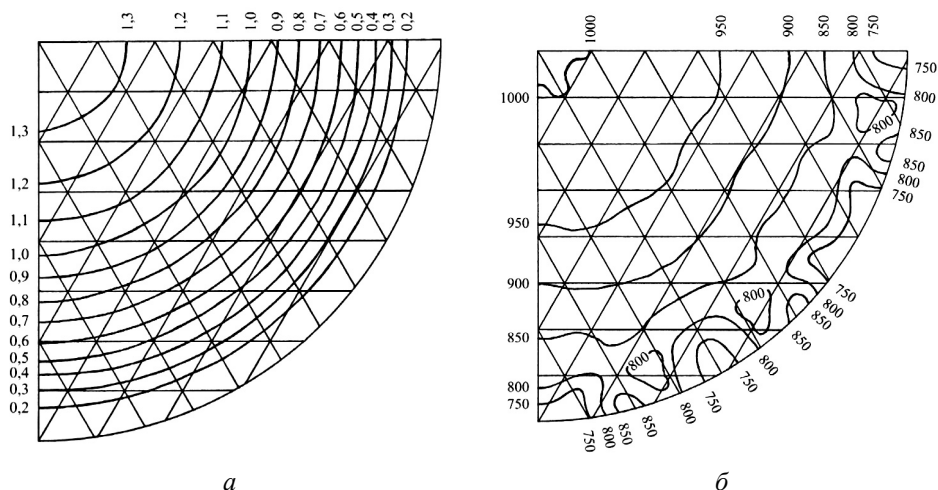


Рис. 9.38. Изолинии в мембране от усилий предварительного напряжения в стойках (раздельный расчет):

$a - Z_{\max}^3$, М; $b - \sigma_{\max}$, тс/м²

Определение исходной конфигурации вантовой сети производилось с учетом ориентировочной величины стрелы ее провисания в процессе эксплуатации, равной 3,5 м, величины расчетного усилия в вантах, равного 78,03 тс, а также узловых нагрузок на стойку от эксплуатационной нагрузки в размере 7 тс.

В результате такого расчета была выявлена стрела провисания вантовой сети в исходном состоянии и ее величина равна 3,21 м. Попутно, как и при раздельном расчете мембраны, были получены результаты раздельного расчета вантовой сети, от действия узловых сил, равных 2 тс. Результаты этих расчетов приведены на графиках (рис. 9.37).

Таким образом, имея исходную конфигурацию конструкции мембранно-вантового покрытия, был проведен ее совместный расчет на усилия предварительного напряжения. Результаты расчета представлены на рис. 9.39.

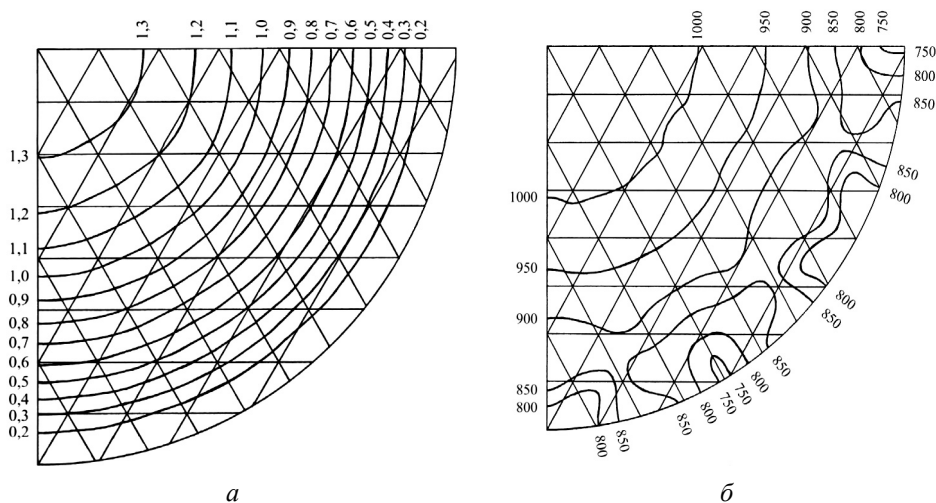


Рис. 9.39. Изолинии в мембране от усилий предварительного напряжения в стойках (совместный расчет):

$$a - Z^3, \text{ м}; \quad б - \sigma_{\max}, \text{ тс/м}^2$$

Предварительно напряженное усилиями в стойках мембранно-вантовое покрытие далее рассчитывалось на такие эксплуатационные нагрузки: собственный вес кровли интенсивностью 92 кг/м², а также собственный вес кровли и равномерно распределенной по всему покрытию снеговой нагрузки интенсивностью 190 кгс/м². Результаты расчета представлены на рис. 9.40 и 9.41.

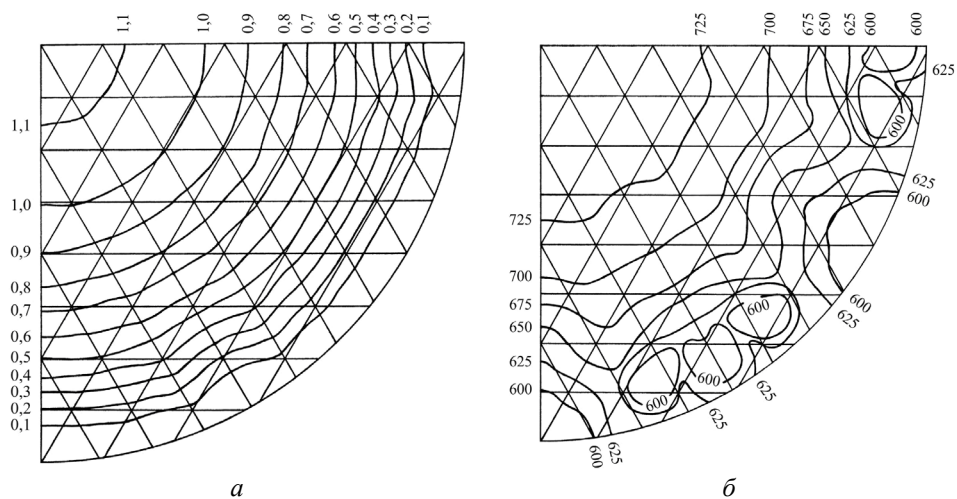


Рис. 9.40. Изолинии в мембране от усилий предварительного напряжения в стойках и собственного веса кровли:

$$a - Z^3, \text{ м}; \quad \bar{b} - \sigma_{\max}, \text{ тс/м}^2$$

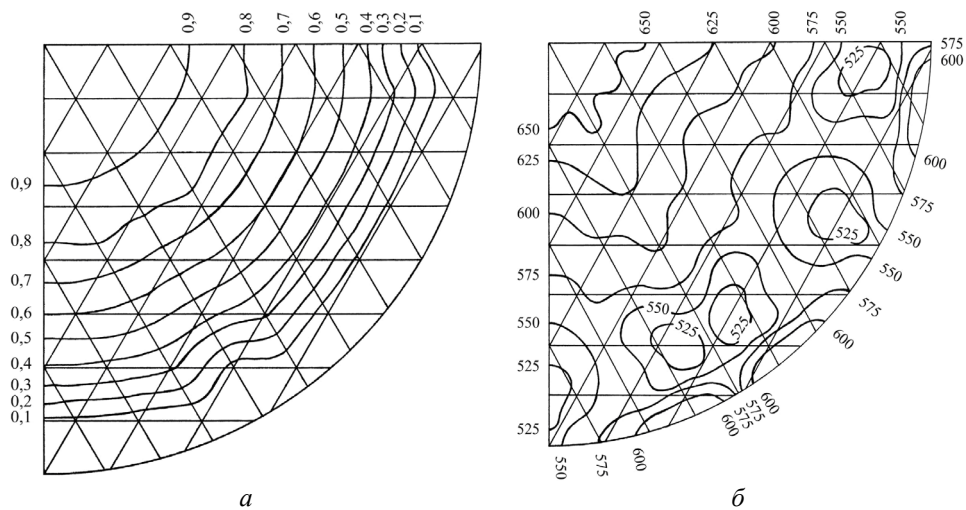


Рис. 9.41. Изолинии в мембране от усилий предварительного напряжения в стойках, собственного веса кровли и снеговой нагрузки:

$$a - Z^3, \text{ м}; \quad \bar{b} - \sigma_{\max}, \text{ тс/м}^2$$

Основные результаты выполненных расчетов сводятся к следующему.

Случай раздельного расчета от усилий предварительного напряжения в стойках 2 тс – максимальные значения главных напряжений в мембране равны 10420 тс/м^2 , а ее выгиб (перемещения от начального плоского состояния) достигает 1,371 м. Максимальные значения усилий в вантах составляют 33,66 тс, а их прогиб равен 3,609 м при начальном значении 3,21 м.

Случай совместного расчета от усилий предварительного напряжения в стойках 2 тс – максимальные значения главных напряжений в мембране равны 10777 тс/м^2 , а ее выгиб достигает 1,387 м. Максимальные значения усилий в вантах составляют 33,81 тс, а их прогиб равен 3,611 м при начальном значении 3,21 м.

Случай совместного расчета от усилий предварительного напряжения в стойках 2 тс и собственного веса кровли интенсивностью 92 кгс/м^2 – максимальные значения главных напряжений в мембране равны 7848 тс/м^2 , а ее выгиб достигает 1,19 м. Максимальные значения усилий в вантах составляют 50,74 тс, а их прогиб равен 3,802 м. Величина усилий в стойках составляет 4,26 тс.

Случай совместного расчета от усилий предварительного напряжения в стойках 2 тс, собственного веса кровли и снеговой нагрузки интенсивностью 190 кгс/м^2 – максимальные значения главных напряжений в мембране равны 6898 тс/м^2 , а ее выгиб достигает 0,996 м. Максимальные значения усилий в вантах составляют 70,56 тс, а их прогиб равен 3,998 м. Величина усилий в стойках составляет 7,51 тс.

Анализ результатов выполненных исследований мембранно-вантовой комбинированной системы покрытия демонстрационного зала позволяет сделать следующие выводы:

- расчет на действие усилий предварительного напряжения как для рассмотренной, так и для подобных ей конструкций целесообразно проводить с использованием раздельной расчетной схемы вследствие незначительного отличия результатов раздельного и совместного расчетов друг от друга;
- расчет на действие других нагрузок (собственный вес, оборудование, снег, ветер и др.) следует проводить с использованием совместной расчетной схемы после уточнения формы конструктивных элементов и параметров их исходного напряженно-деформированного состояния;
- действие эксплуатационных нагрузок приводит к уменьшению как растягивающих напряжений в мембране по сравнению с их величинами от усилий предварительного напряжения, так и выгиба мембраны, результирующее значение которого составляет 0,996 м и обеспечивает возможность свободного поверхностного стока дождевых вод. Кроме того, действие эксплуатационных нагрузок вызывает усилия в вантах с максимальным значением 70,56 тс, что меньше расчетного значения 78,03 тс;

- большая кинематическая подвижность (перемещения и формоизменение) системы наблюдается только на стадии создания ее предварительного напряжения, после чего конструкция приобретает достаточно высокую жесткость. Поэтому расчеты, выполняемые после достижения системой требуемого уровня предварительного напряжения, можно выполнять на основе линеаризованной теории, выбирая в качестве исходной предварительно напряженную конфигурацию системы.

§ 9.10. Висячее покрытие зрительного зала

Выполнен проект реконструкции комплекса зданий и сооружений Зеленого театра, расположенного на Парковой аллее в г. Киеве и представляющего собой многоярусный ансамбль, состоящий из зрительного зала, необходимых технических помещений, развлекательных заведений, кафе, баров и клубов (рис. 9.42).

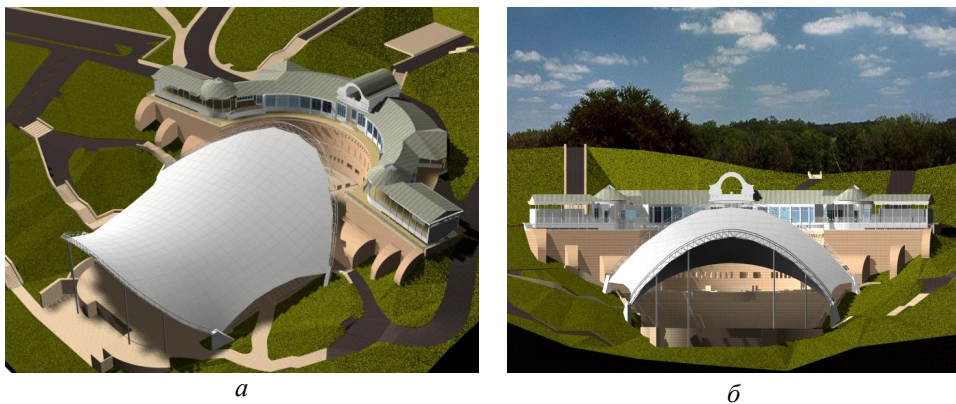


Рис. 9.42. Общий вид Зеленого театра:
а – перспектива; *б* – фасад

При проектировании висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра за основу была принята традиционная наиболее универсальная перекрестная вантовая сетка седловидной формы, натянутая между двумя наклонными двухшарнирными арками пролетами 50 и 42 м каждая и накрытая навесом специальной формы из высококачественной полупрозрачной полимерной ткани (рис. 9.43). Вантовая сетка была получена в результате пересечения двух семейств кривых. Для придания обеим видам вант наибольшей кривизны несущие ванты имеют направление, отвечающее седловине сетки, а натягающие – натянуты перпендикулярно несущим. Таким образом, вантовая сетка обладает значительной пространственной кривизной и жесткостью, вследствие чего даже при больших равномерных нагрузках будет иметь незначительные деформации. Однако при неравномерных нагрузках, особенно кососимметричных, вантовая сетка может вести себя иначе, поскольку такие нагрузки, как правило, приводят к значительным перемещениям и деформациям висячего покрытия, тем самым создавая определенные трудности для

нормальной эксплуатации всего сооружения. Поэтому при проектировании были выполнены тщательные исследования рассматриваемой конструкции на влияние такого рода нагрузок.

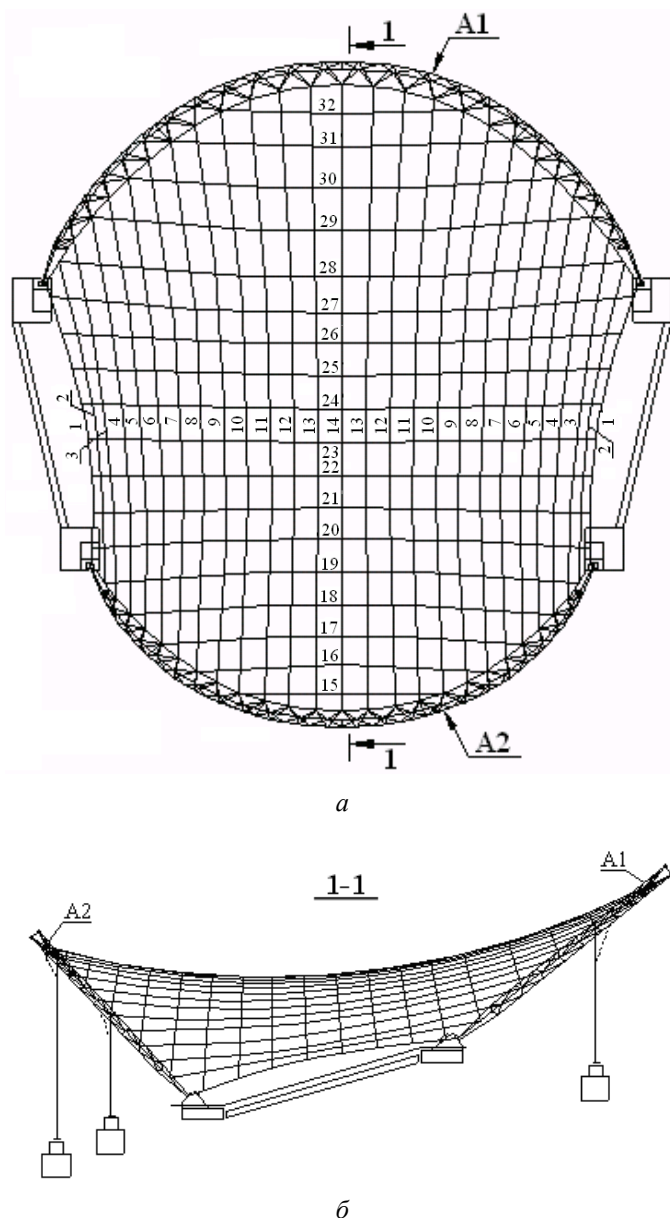


Рис. 9.43. Конструктивная схема висячего покрытия зрительного зала
Зеленого театра (с нумерацией вант):
а – план; б – разрез; (А1, А2 – опорные арки пролетом 50 и 42 м соответственно)

С целью придания покрытию большей прочности, а также более надежного соединения вант обоих направлений между собой для каждого их типа принято различное проектное решение. На более мощном контурном тросе с переменным шагом расположен ряд одинаковых деталей с круглым отверстием в нижней части, которые крепятся к тросу с помощью болтов и сжимов (рис. 9.44, *а*, *б*). Сквозь отверстие этой детали заводятся ванты другого направления. Все другие ванты, за исключением контурных, присоединяются друг к другу с помощью сжимов и прямоугольных пластин с двумя круглыми отверстиями, сквозь которые заводятся фиксируемые болтами пластины, удерживающие ванты в неподвижности (рис. 9.44, *в*). Крепление же самой вантовой сетки к нижним поясам арок осуществляется с помощью листовых фасонек с проушинами, причем центрирование вант производится по оси нижних поясов арок в узлах.

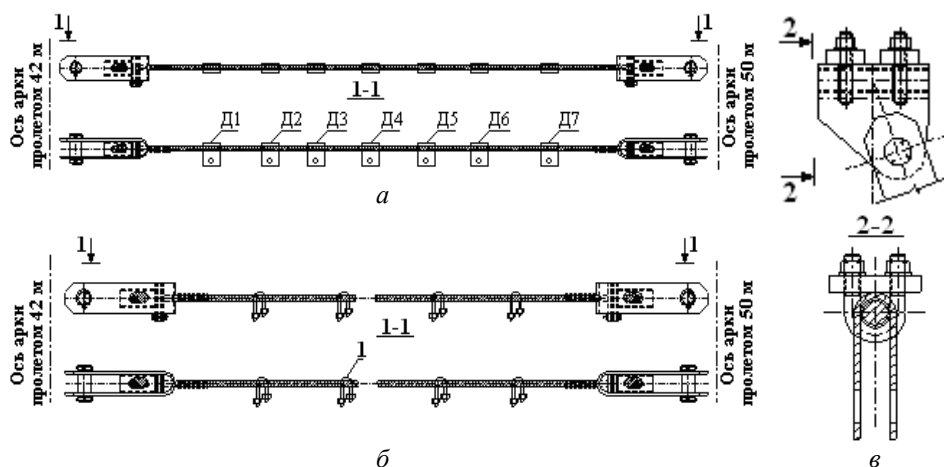


Рис. 9.44. Конструктивные схемы:
а – ванта 1; *б* – ванты 2...32; *в* – детали Д1...Д7

При проектировании висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра опорная конструкция принята из двух наклонных двухшарнирных металлических арок, уравнивающих распор вант своим собственным весом. Арки запроектированы из горячекатаных труб решетчатыми треугольного поперечного сечения с параллельными поясами в средней части пролета и с серповидными боковыми гранями в крайних четвертях. Все узловые соединения раскосов арок с поясами приняты сварными безфасоночными без сплющивания концов труб. Кроме того, в пролете 50-метровой арки установлены две промежуточные стойки, а в пролете 42-метровой – четыре промежуточные стойки в качестве опор в процессе монтажа, а также оттяжек для восприятия усилий от вантовой сетки.

Конечноэлементная модель висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра изображена на рис. 9.45 и насчитывает 1043 узла и 3353 конечных элемента (КЭ). Составляющими модели были приняты строительные конструкции, расположенные между уровнями от $-3,5$ до $19,0$ м включительно: стойки, решетчатые арки, вантовая сетка и полимерная ткань. Для описания вантовой сетки использованы стержневые КЭ, работающие только на растяжение; арки, подкосы арок и стойки аппроксимированы стержневыми КЭ общего вида, сечение которых отвечает использованным реальным профилям. Натянутая же на вантовую сетку полимерная ткань описана мембранными КЭ толщиной $0,0001$ м.

Примыкание арок и стоек к фундаментам принято в соответствии с реальными условиями опирания шарнирным, а для стержневых КЭ вантовой сетки в местах их пересечения реализованы специальные условия взаимодействия, учитывающие проскальзывание этих элементов. Последнее обеспечивает не только адекватность взаимных перемещений КЭ вантовой сетки, но и совместимость перемещений полимерной ткани и вантовой сетки перпендикулярно поверхности сетки, а также не препятствует их взаимным перемещениям по касательной к ее поверхности.

В расчете были учтены две группы нагрузок: постоянные (собственный вес несущих конструкций и предварительное напряжение в вантах) и временные (ветровая продольная и поперечная, а также снеговая симметричная и несимметричная). Таким образом, количество расчетных нагрузок составило шесть, а принятых в соответствии с требованиями действующих нормативных документов сочетаний нагрузок – восемь, при этом постоянные нагрузки присутствовали во всех сочетаниях.

При исследовании висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра были поставлены последовательные задачи определения начальной формы вантовой сетки от предварительного напряжения в вантах, расчета покрытия при воздействии расчетных нагрузок, а также расчета покрытия при воздействии их наихудшего расчетного сочетания. На первом этапе была решена задача формообразования и определена начальная конфигурация вантовой сетки с учетом ее геометрических параметров, а также подобрана соответствующая величина предварительного напряжения вант. Расчет выполнен за 16 шагов продолжения по безразмерному параметру нагружения D ($D = N_0/EF$, где N_0 – величина предварительного напряжения вант; E – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения), причем на каждом шаге по параметру нагружения уточнение уравновешенной формы вантовой сетки проводилось итерированием с учетом заданных конструктивных и технологических ограничений.

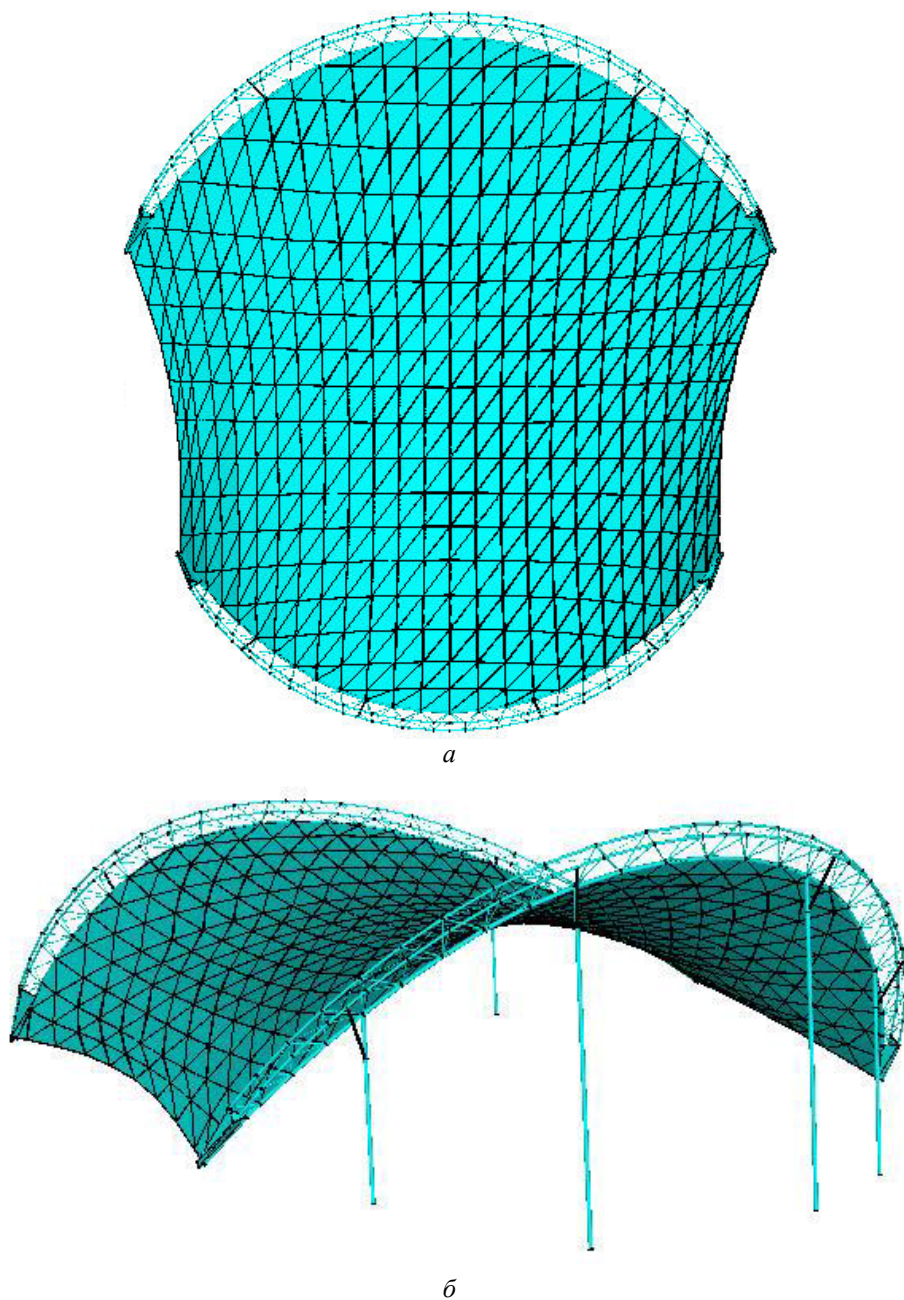


Рис. 9.45. Конечноэлементная модель висячего покрытия зрительного зала
Зеленого театра:
a – план; *б* – перспектива

На втором этапе исследования было определено напряженно-деформированное состояние висячего покрытия при воздействии постоянных и временных нагрузок. В связи с существенной геометрической нелинейностью конструкции покрытия, его расчет выполнен шагово-итерационным методом, в процессе которого был проведен анализ целого ряда факторов, существенно влияющих как на ход решения задачи в целом, так и на точность полученного результата. В качестве таких факторов были приняты: количество шагов нагружения и итераций на каждом шаге, величина и точность критериев, по которым рассчитывается задача, а также вид самих критериев. Причем величины соответствующих параметров подбирались индивидуально путем сопоставления результатов расчетов, их детального анализа, уточнения и подбора оптимального значения. Анализ результатов расчетов покрытия показал, что наихудшее расчетное сочетание нагрузок включает: собственный вес несущих конструкций, предварительное напряжение в вантах, снеговую несимметричную и ветровую продольную нагрузки.

На третьем этапе исследования был выполнен расчет покрытия на воздействие определенного на предыдущем этапе наихудшего расчетного сочетания нагрузок. О характере напряженно-деформированного состояния висячего покрытия можно судить по результатам, представленным на рис. 9.46 – 9.48.

Вертикальные перемещения (рис. 9.46) достигают своих наибольших величин на части покрытия, находящейся под действием снеговой несимметричной нагрузки, их максимальные значения равны $w = 41,7$ см (что составляет 1/120 пролета) и находятся в допустимых пределах.

В этой же части покрытия отмечаются максимальные значения продольных усилий в вантах $N = 0,19$ МН при величине разрывного усилия $N_p = 0,22$ МН. Причем в ванте, находящейся посередине покрытия, продольное усилие практически равно нулю.

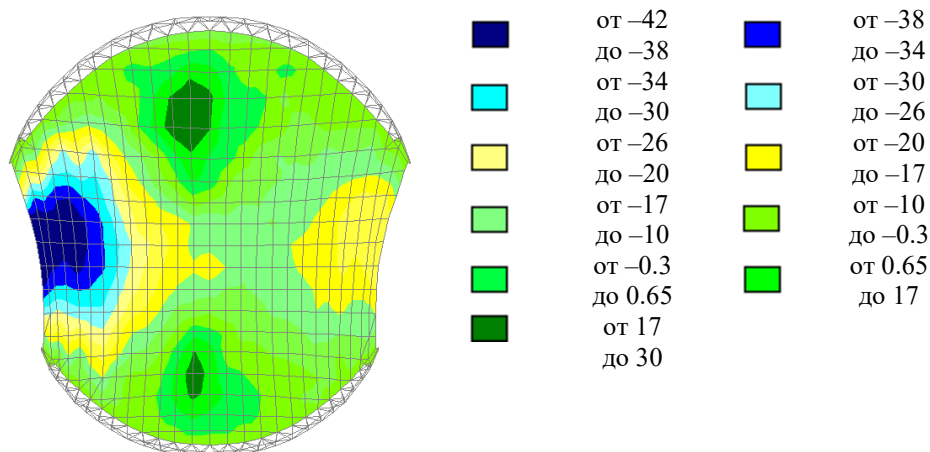


Рис. 9.46. Изополя вертикальных перемещений висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра

Распределение вертикальных перемещений в опорных арках изображено на рис. 9.47. Из приведенных эпюр следует, что если арка пролетом 42 м при наихудшем расчетном сочетании нагрузок деформируется относительно вертикальной оси несимметрично, то арка пролетом 50 м, наоборот, – практически симметрично. Наибольшие значения вертикальных перемещений наблюдаются посередине арки пролетом 50 м (рис. 9.47, б), равняются $w = 13,05$ см, что составляет $1/383$ пролета.

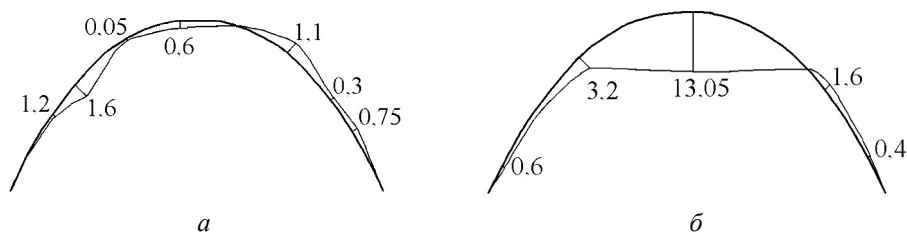


Рис. 9.47. Эпюры вертикальных перемещений (см) в опорных арках пролетом:
а – 42 м; б – 50 м

Опорные арки почти по всей своей длине оказались сжатыми и практически безмоментными. Так, если максимальное сжимающее усилие достигает значения $N = 155,5$ кН (рис. 9.48), то изгибающий момент не превышает $M = 6$ кНм, что практически не влияет на напряженное состояние арки. Последнее свидетельствует также о том, что форма опорных арок покрытия близка к оптимальной. Следует также отметить, что перемещения висячего покрытия Зеленого театра при воздействии несимметричных нагрузок не намного превышают аналогичные значения при симметричных нагрузках, что является следствием значительной жесткости конструкции.

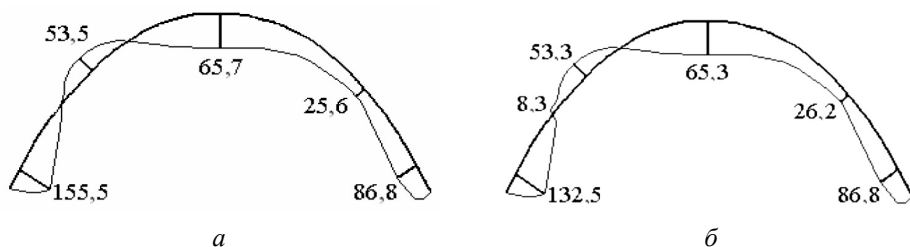


Рис. 9.48. Эпюры продольных усилий (кН) в опорных арках пролетом:
а – 42 м; б – 50 м

Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенное конструктивное решение висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра обеспечивает пространственную работу конструкции, высокую несущую способность и пониженную деформативность при действии неравномерных и несимметричных нагрузок, а усилия и перемещения при наихудшем расчетном сочетании нагрузок находятся в допустимых пределах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А.* Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. – М.: Стройиздат, 1976. – 248 с.
2. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
3. *Аргирис Дж.* Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Стройиздат, 1968. – 241 с.
4. *Балдин В.А., Шейнфельд Н.М.* Применение трубчатых конструкций из стали повышенной и высокой прочности в перекрытиях // *Металлические конструкции*. – М.: Стройиздат, 1966. – С. 50–63.
5. *Барская Н.А.* Метод конечных элементов в строительной механике. – Л.: ВНИИГ, 1973. – Вып. 1. – 101 с.; вып. 2. – 68 с.
6. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
7. *Безухов Н.И., Лужин О.В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высш. шк., 1974. – 200 с.
8. *Беленький Л.М.* Расчет судовых конструкций в пластической стадии. – Л.: Судостроение, 1983. – 448 с.
9. *Беленя Е.И.* Основные направления научных исследований в металлических конструкциях // *Изв. вузов. Стр-во и архитектура*. – 1969. – № 12. – С. 3–9.
10. *Битюцкий А.И.* Некоторые вопросы расчета висячих покрытий с ортогональной пространственной сеткой нитей // *Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ*. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 150–159.
11. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
12. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
13. *Болотин В.В.* О пространственной деформации балок после потери устойчивости // *Расчет пространственных конструкций*. – М.: Госстройиздат, 1959. – Вып. 5. – С. 61–73.
14. *Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф.* Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. – М.: Стройиздат, 1972. – 190 с.
15. *Борейко А.С.* О расчете физически нелинейного гибкого стержня // *Автоматизация и оптимизация проектируемых конструкций*. – Хабаровск, 1977. – С. 35–38.
16. *Броуде Б.М.* Предельные состояния стальных балок. – М.-Л.: Госстройиздат, 1953. – 216 с.
17. *Бубнов И.Г.* Труды по теории пластин. – М.: Гостехиздат, 1953. – 423 с.

18. Бурман З.И., Лукашенко В.И., Тимофеев М.Т. Расчет тонкостенных подкреплённых оболочек методом конечных элементов с применением ЭЦВМ. – Казань: КГУ, 1973. – 569 с.
19. Бурчак Г.П. О пространственной устойчивости и колебаниях сплошных балочных пролетных строений с ездой поверху: Дис. ... канд. техн. наук. – М., 1953. – 197 с.
20. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – 475 с.
21. Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 28–33.
22. Варвак П.М., Варвак А.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.
23. Власов В.З. Избранные труды. – М.: АН СССР, 1962. – Т. 1. – 528 с.; т. 2. – 507 с.; т. 3. – 472 с.
24. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
25. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1975. – 367 с.
26. Галин Л.А. Упруго-пластические задачи. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
28. Гвамичава А.С., Лазарева Г.С. Применение гибких элементов при создании компактно складывающихся поверхностей // Исследования, разработка и внедрение висячих систем в покрытиях и инженерных сооружениях. – К., 1982. – С. 114–116.
29. Геммерлинг А.В. Общий метод расчета рам из упруго-пластического материала // Строительная механика и расчет сооружений. – 1968. – № 3. – С. 1–7.
30. Геммерлинг А.В. Расчет стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1974. – 206 с.
31. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсных сил. – М.: Госстройиздат, 1961. – 320 с.
32. Гольдштейн А.С., Киреенко В.И. Висячие и арочные переходы нефтепроводов. – М.: Недра, 1964. – 115 с.
33. Гордеев В.Н., Илиев К.Н., Перельмутер А.В., Прицкер А.Я. Исследование совместной работы плоского мембранного настила и податливого бортового элемента // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 3. – С. 50–54.
34. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
35. Гудьер Дж. Н., Ходж Ф.Г. Упругость и пластичность. – М.: ИЛ, 1960. – 190 с.
36. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976. – 95 с.
37. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
38. Дикович И.Л. Статика упруго-пластических балок судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1967. – 264 с.
39. Динник А.Н. Устойчивость упругих систем. – М.: ОНТИ, 1935. – 183 с.

40. *Дмитриев Л.Г.* Расчет вантовых покрытий // Стр-во и архитектура. – К., 1963. – № 2. – С. 16–17.
41. *Дмитриев Л.Г., Касилов А.В.* Вантовые покрытия. – К.: Будівельник, 1974. – 272 с.
42. *Дривинг А.Я.* Устойчивость мачт на оттяжках. – М.: Стройиздат, 1964. – 112 с.
43. *Ершов Н.Ф.* Упруго-пластический расчет пластин с распором // Прикладная механика. – 1963. – Т. 9, № 6. – С. 55–62.
44. *Ершов Н.Ф.* Цилиндрический изгиб пластин с распором, выполненных из линейно упрочняющихся материалов // Тр. ГПИ. – Горький: ГГУ, 1966. – № 3. – С. 21–30.
45. *Ершов Н.Ф., Свечников О.И.* Предельное состояние и надежность конструкций речных судов. – Л.: Судостроение, 1970. – 152 с.
46. *Завриев К.С., Ониашвили О.Д.* Избр. тр. – Тбилиси: Мецниереба, 1978. – 297 с.
47. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
48. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений в механике сплошных сред. – М.: Недра, 1974. – 239 с.
49. *Знаменский П.М.* Общая устойчивость длинных открытых профилей при продольном сжатии // Техника воздушного флота. – 1934. – № 12. – С. 1–16.
50. *Зотова И.М.* Исследование висячих систем покрытия типа «опрокинутых» арок: Дис. ... канд. техн. наук. – М.: 1979. – 216 с.
51. *Зотова И.М.* К расчету висячих покрытий с конечной изгибной жесткостью // Строительные конструкции. Исслед. по метал. конструкциям: Сб. науч. тр. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. – М.: ЦИНИС, 1970. – Вып. 5. – С. 6–29.
52. *Ивович В.А.* Нелинейные колебания гибкой пологой нити // Строительная механика и расчет сооружений. – 1966. – № 5. – С. 39–44.
53. *Илленко К.Н.* О расчете нити с изгибной жесткостью // Строительная механика и расчет сооружений. – 1966. – № 6. – С. 47–50.
54. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
55. *Ильясевич С.А.* Металлические коробчатые мосты. – М.: Транспорт, 1970. – 279 с.
56. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
57. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
58. *Карякин Н.И.* Основы расчета тонкостенных конструкций. – М.: Высш. шк., 1960. – 239 с.
59. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 324 с.
60. *Качанов Л.М.* Устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. XV, № 2. – С. 195–206.
61. *Качурин В.К.* Статический расчет вантовых систем. – Л.: Стройиздат, 1969. – 141 с.
62. *Качурин В.К.* Теория висячих систем. – М.-Л.: Госстройиздат, 1962. – 224 с.

63. Качурин В.К., Брагин А.В., Ерунов Б.Г. Проектирование висячих и вантовых мостов. – М.: Транспорт, 1971. – 280 с.
64. Киреенко В.И., Шимановский В.Н., Коршунов Д.А., Смирнов Ю.В. Висячие трубопроводные переходы. – К.: Будівельник, 1968. – 160 с.
65. Кирсанов Н.М. Висячие и вантовые конструкции. – М.: Стройиздат, 1981. – 158 с.
66. Кирсанов Н.М. Висячие покрытия производственных зданий. – М.: Стройиздат, 1990. – 127 с.
67. Кирсанов Н.М. Висячие системы повышенной жесткости. – М.: Стройиздат, 1973. – 116 с.
68. Кирсанов Н.М. Расчет висячих комбинированных систем по линиям влияния с учетом прогибов. – Воронеж: ВГУ, 1976. – 103 с.
69. Кислоокий В.Н. Алгоритм численного решения задач статики и динамики нелинейных систем // Прикладная механика. – 1966. – Т. II, вып. 6. – С. 87–91.
70. Кислоокий В.Н. Исследование статики и динамики висячих, пневмонапряженных и комбинированных систем методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – № 4. – С. 27–30.
71. Кислоокий В.Н. Реализация МКЭ в расчетах мембранно-стержневых, висячих, пневмонапряженных и комбинированных систем // Комплексный расчет зданий и сооружений с применением ЭВМ. – К.: КИСИ, 1978. – С. 61–65.
72. Кислоокий В.Н. Статика и динамика нелинейных вантово-стержневых систем // Сопротивление материалов и теория сооружений – К.: Будівельник, 1969. – Вып. IX. – С. 13–21.
73. Кислоокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А. Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек // Проблемы прочности. – 1977. – № 7. – С. 25–32.
74. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Фесенко О.А. Сравнительный анализ алгоритмов решения задач статики мягких оболочек методом конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1983. – Вып. 43. – С. 53–58.
75. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В. Решение задач формообразования и расчета сильно нелинейных пространственных покрытий // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 5. – С. 1–4.
76. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Боговис В.Е. Численный расчет большепролетных пространственных комбинированных конструкций // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1987. – № 7. – С. 33–38.
77. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Касилова Т.А., Крицкий В.Б. Комплекс программ для статических и динамических расчетов нелинейных комбинированных систем // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 48. – С. 32–35.
78. Кислоокий В.Н., Шимановский А.В., Лазарева Г.С., Крицкий А.Б. Решение задач общей устойчивости сильно нелинейных вантово-стержневых систем // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1985. – № 9. – С. 28–33.
79. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. – М.: ИЛ, 1961. – 79 с.

80. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1965. – 632 с.
81. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: ЛГУ, 1977. – 206 с.
82. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1949. – 376 с.
83. Корчинский И.Л., Гриль А.А. Расчет висячих покрытий на динамические воздействия (землетрясение, ветер). – М.: Стройиздат, 1978. – 220 с.
84. Косенко И.С. Висячие конструкции покрытий. – М.: Стройиздат, 1966. – 87 с.
85. Кузнецов Э.Н. Пространственные вантовые системы. Теория и расчет // Строительная механика и расчет сооружений. – 1967. – № 3. – С. 1–6.
86. Кульбах В.Р. Вопросы статического расчета висячих систем. – Таллинн: ТПИ, 1970. – 118 с.
87. Лейтес С.Д. Устойчивость сжатых стальных стержней. – М.: Госстройиздат, 1954. – 308 с.
88. Лилеев А.Ф., Селезнева Е.Н. Методы расчета пространственных вантовых систем. – М.: Стройиздат, 1964. – 171 с.
89. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
90. Людковский И.Г. Комбинированные висячие покрытия // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: ЦИНИС, 1973. – № 8. – С. 4–24.
91. Людковский И.Г. Современное состояние и перспективы применения висячих покрытий // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 5–52.
92. Людковский И.Г., Иванов М.А., Пасюта А.В., Филякин А.А. Висячие оболочки покрытий с внешним листовым армированием // На стройках России. – 1987. – № 11. – С. 7–11.
93. Людковский И.Г., Федоров А.Д. Работа опорных участков вант // Висячие покрытия: Сб. научн. тр. НИИЖБ. – М.: ЦИНИС, 1971. – С. 157–162.
94. Матевосян Р.Р. Устойчивость стержневых систем (качественная теория). – М.: Госстройиздат, 1961. – 252 с.
95. Мацелинский Р.Н. Расчет гибких нитей на произвольную вертикальную нагрузку // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 52–60.
96. Мацелинский Р.Н. Статический расчет гибких висячих конструкций. – М.-Л.: Госстройиздат, 1950. – 192 с.
97. Мацелинский Р.Н. Статический расчет упругих нитей // Строительная механика и расчет сооружений. – 1959. – № 4. – С. 3–9.
98. Медведев С.В., Карапетян Б.К., Быховский В.А. Сейсмические воздействия на здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1968. – 191 с.
99. Мельников Н.П. Пути прогресса в области металлических конструкций. – М.: Стройиздат, 1974. – 136 с.
100. Метод конечных элементов в механике сплошной среды / Под ред. П.М. Варвака. – К.: КАДИ, 1976. – 114 с.

101. Метод конечных элементов в строительной механике / Под ред. А.Г. Угодникова. – Горький: ГГУ, 1975. – 165 с.
102. Метод конечных элементов в строительной механике сплошных сред // Реферативный обзор зарубежной литературы за период 1966–1970 гг. – Л.: ВНИИГ, 1971. – 160 с.
103. Москалев Н.С. Конструкции висячих покрытий. – М.: Стройиздат, 1980. – 331 с.
104. Мурзаханов Г.Х., Щугорев В.Н. Влияние вторичных трещин на устойчивость и рост отслоений в конструкциях из композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 6. – С. 1120–1124.
105. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: ИЛ, 1954. – Т. 1. – 620 с.; М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 863 с.
106. Немчинов Б.К. Численный метод расчета нитей конечной жесткости // Труды ВИСИ. – Воронеж: ВГУ, 1970. – Т. 16, вып. 3. – С. 10–17.
107. Немчинов Б.К. Экспериментальное исследование нитей конечной жесткости // Тр. ВИСИ. – Воронеж: ВГУ, 1971. – Т. 17, вып. 7. – С. 7–13.
108. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). – К.: Будівельник, 1980. – 232 с.
109. Нил Б.Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материала. – М.: Госстройиздат, 1961. – 315 с.
110. Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.
111. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
112. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
113. Отто Ф. Висячие покрытия, их формы и конструкции. – М.: Госстройиздат, 1960. – 179 с.
114. Отто Ф., Шлейер Ф.К. Тентовые и вантовые строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1970. – 175 с.
115. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
116. Передерий Г.П. Курс мостов. Конструкция, проектирование и расчет. – М.-Л.: Госжелдориздат, 1933. – 490 с.
117. Перельмутер А.В. Основы расчета вантово-стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1969. – 190 с.
118. Петров И.П., Спиридонов В.В. Надземная прокладка трубопроводов. – М.: Недра, 1965. – 447 с.
119. Попов Н.Н., Распоргуев Б.С. Динамический расчет висячих конструкций. – М.: Стройиздат, 1966. – 84 с.
120. Постнов В.А. Теория пластичности и ползучести. – Л.: ЛПИ, 1975. – 266 с.
121. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 279 с.

122. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 342 с.
123. *Прагер В.* Проблемы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.
124. *Пуховский А.Б.* Повышение сейсмостойкости стальных листовых конструкций методами предварительного напряжения // Проектирование и строительство трубопроводов и газонефтепромысловых сооружений. – 1982. – № 10. – С. 29–32.
125. *Пуховский А.Б., Капцов В.В.* Исследование работы висячих покрытий при сейсмических воздействиях // Металлические конструкции в строительстве: Сб. науч. тр. МИСИ им. В.В. Куйбышева. – М., 1983. – № 183. – С. 82–92.
126. *Рабинович И.М.* Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. – М.: Стройиздат, 1975. – 144 с.
127. *Рабинович И.М.* Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.
128. *Рабинович И.М., Сеницын А.П., Теренин Б.М., Лужин О.В.* Расчет сооружений на импульсные воздействия. – М.: Стройиздат, 1970. – 304 с.
129. *Раковицкий Ю.А.* К определению остаточных прогибов гибких сжато-изогнутых (или растянуто-изогнутых) стержней // Тр. МАДИ. – М., 1972. – Вып. 36. – С. 32–40.
130. *Рекач Г.В.* Расчет гибкой растяжимой нити по деформированному состоянию // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1970. – Вып. 18. – С. 178–182.
131. *Ржаницын А.Р.* Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. – М.: Госстройиздат, 1954. – 287 с.
132. *Ржаницын А.Р.* Статика и динамика пологой упругой нити // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 60–76.
133. *Ржаницын А.Р.* Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
134. *Ржаницын А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Гостехтеоретиздат, 1955. – 475 с.
135. *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.
136. *Розин Л.А.* Стержневые системы как системы конечных элементов. – Л.: ЛГУ, 1976. – 232 с.
137. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
138. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1974. – Вып. 24. – С. 147–156.
139. *Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
140. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 284 с.
141. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.
142. *Серов В.Н.* Упруго-пластический изгиб судовых пластин конечной жесткости: Дис. ... канд. техн. наук. – Л., 1955. – 141 с.

143. Семенюк Н.П., Бойко Н.Б. Моделирование дискретной связи слоев при расчете на устойчивость двухслойной цилиндрической оболочки // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 46–51.
144. Сидорович Е.М. К расчету гибких нитей на упругих опорах // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1965. – № 6. – С. 53–57.
145. Синицын А.П. Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки. – М.: Стройиздат, 1967. – 145 с.
146. Скворцов В.И. Расчет жесткой нити при произвольном нагружении в плоскости ее провисания // Тр. МИИТ. – М., 1971. – Вып. 371. – С. 108–114.
147. Складнев Н.Н. Исследование прямоугольных пластин из материала с криволинейной несимметричной диаграммой растяжения-сжатия в условиях действия плоского напряженного состояния и поперечного изгиба // Некоторые задачи сопротивления материалов: Сб. науч. тр. МИСИ им. В.В.Куйбышева. – М., 1969. – № 63. – С. 39–52.
148. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Шапошников Н.Н. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. – М.: Судпромгиз, 1965. – 380 с.
149. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов. – М.: Высш. шк., 1970. – 408 с.
150. Снитко Н.К. Динамика сооружений. – М.-Л.: Госстройиздат, 1960. – 356 с.
151. Снитко Н.К. Устойчивость сжатых и сжатоизогнутых стержневых систем. – М.-Л.: Госстройиздат, 1956. – 207 с.
152. Соботка З. Висячие покрытия. – М.: Стройиздат, 1964. – 151 с.
153. Соколов А.Г. Опоры линий электропередач. Расчет и конструирование. – М.: Госстройиздат, 1961. – 171 с.
154. Соколов А.Г., Гвамичава А.С. Решения инженерных конструкций космических радиотелескопов // Антенны. – М.: Радио и связь, 1981. – Вып. 29. – С. 3–10.
155. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
156. Сорокин В.В. Сложный упруго-пластический изгиб удлиненных пластин // Тр. НТО судостроительной промышленности. – Л., 1964. – Вып. 53. – С. 111–124.
157. Спиро В.Е. Оценка упруго-пластических деформаций вытянутых прямоугольных пластин при сложном изгибе. – Л.: Судостроение, 1964. – № II. – 64 с.
158. Стрелецкий Н.С. Избранные труды. – М.: Стройиздат, 1975. – 423 с.
159. Стрельбицкая А.И., Колгадин В.А., Матошко С.И. Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости. – К.: Наук. думка, 1971. – 244 с.
160. Тартаковский Г.А. Строительная механика трубопровода. – М.: Недра, 1967. – 312 с.
161. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 508 с.
162. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 363 с.; т. 2. – 480 с.
163. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избр. работы. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
164. Тихенко Ю.Н. Учет пластических деформаций при изгибе балок двутаврового сечения. – М.: Госстройиздат, 1955. – 208 с.

165. Тихомирова Е.И. Расчет идеально упруго-пластических статически неопределимых стержневых систем: Дис... канд. техн. наук. – М., 1983. – 118 с.
166. Торнтон Ч., Томасетти Р. Строительство крупных ангаров с несущим консольным покрытием // Гражданское стр-во. – 1970. – № II. – С. 17–22.
167. Трофимов В.И., Гольденберг Л.И. Большепролетные покрытия Олимпийских сооружений // Стр-во и архитектура. – М.: Знание, 1984. – № 5. – 61 с.
168. Трофимов В.И., Еремеев П.Г., Давыдов Е.Ю. Мембранные (тонколистовые) висячие покрытия. Обзорная информация // Стр-во и архитектура. Строит. конструкции. – М.: ЦИНИС, 1981. – Серия 8. – Вып. 1. – 65 с.
169. Трофимович В.В. Метод расчета предварительно напряженных статически неопределимых висячих систем // Прикладная механика. – 1968. – № 12. – С. 49–57.
170. Тютюнин Г.В., Гольденшлюгер С.В. К определению прогибов при упруго-пластическом изгибе балок // Некоторые вопросы прочности и надежности. – Фрунзе, 1979. – С. 102–106.
171. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.-Л.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
172. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Соппротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 832 с.; 1978. – Т. 2. – 616 с.; 1981. – Т. 3. – 480 с.
173. Филин А.П. Проблемы использования современных вычислительных средств в строительной механике // Тр. I Всес. конф. по применению ЭЦВМ в строит. механике. – М., 1966. – С. 9–14.
174. Фридман Ю.Г. Устойчивость плоской формы деформации нитей конечной изгибной жесткости // Вопросы архитектуры и стр-ва зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры. – М.: ЦНИИЭП учеб. зданий, 1974. – № 2. – С. 112–123.
175. Ходж Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. – М.: Машгиз, 1963. – 380 с.
176. Цаплин С.А. Висячие мосты. – М.: Дориздат, 1949. – 287 с.
177. Цаплин С.А. Висячие мосты. Теория и расчет. – М.-Л.: Гострансиздат, 1937. – 240 с.
178. Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Сергатая Т.А. Расчет пространственной висячей системы по деформированной схеме // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1990. – № 5. – С. 34–39.
179. Шаров Я.Ф. Некоторые особенности упруго-пластического изгиба сварных перекрытий корпуса судна // Проектирование и прочность сварных конструкций: Сб. науч. тр. НТО Машпрома. – М., 1959. – С. 72–85.
180. Шимановский А.В. Исследование напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости при активном нагружении и разгрузке // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, № 11. – С. 110–117.
181. Шимановский А.В. Некоторые вопросы устойчивости плоской формы деформирования нитей конечной жесткости за пределами упругости // Проблемы прочности. – 1992. – № 4. – С. 43–49.

182. Шимановский А.В. Некоторые задачи статики нитей конечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 6. – С. 29–32.
183. Шимановский А.В. Особенности реализации метода рядов Фурье в расчетах несущих элементов висячих систем // Висячие комбинированные конструкции. – Воронеж: ВГУ, 1991. – С. 43–51.
184. Шимановский А.В. Расчет упруго-пластических нитей конечной жесткости с использованием принципа Лагранжа // Строительная механика и расчет сооружений. – 1992. – № 2. – С. 27–33.
185. Шимановский А.В. Упруго-пластический расчет нитей конечной жесткости из упрочняющегося материала // Изв. вузов. Строительство. – 1992. – № 2. – С. 27–32.
186. Шимановский А.В. Уточнение методики расчета нитей конечной жесткости при статических воздействиях // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1985. – № 5. – С. 115–118.
187. Шимановский А.В., Гайна Г.А. Интерактивная система для расчетов прочности и устойчивости строительных конструкций на микроЭВМ // Системы автоматизированного проектирования объектов строительства (САПР-ОС). – К.: Будівельник, 1988. – Вып. 5. – С. 72–77.
188. Шимановский А.В., Лисицин Б.М. Моделирование строительных конструкций / Под общей редакцией Шимановского А.В. – К.: Сталь, 2006. – 724 с.
189. Шимановский А.В., Марзицин Б.М. Применение рядов Фурье в задачах статики гибких упругих нитей // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1985. – Вып. 47. – С. 95–98.
190. Шимановский А.В., Оглобля А.И. Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. – К.: Сталь, 2002. – 372 с.
191. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Анализ нелинейного деформирования мембранных и стержневых систем // Расчет прочности, устойчивости и колебаний сооружений. – Воронеж: ВГУ, 1990. – С. 150–156.
192. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Исследование вантово-стержневой системы висячего перехода трубопровода при больших перемещениях // Изв. СКНЦ ВШ. Технические науки. – 1987. – № 3. – С. 90–96.
193. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Теория и расчет сильнонелинейных конструкций. – К.: Сталь, 2005. – 432 с.
194. Шимановский А.В., Цыхановский В.К., Тулебаев К.Р. Численное исследование комбинированного висячего покрытия спортивной арены на статические и сейсмические воздействия // Изв. вузов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 18–24.
195. Шимановский А.В., Чабан Н.А. Аналитические решения нелинейных задач статики нитей конечной жесткости при активных нагружениях // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 121–129.
196. Шимановський О.В., Чабан Н.О. Вплив пластичних властивостей матеріалу на граничний стан нитки скінченної жорсткості // Проблеми прочности. – 2007. – № 5. – С. 132–140.
197. Шимановский А.В., Шалинский В.В. Численно-аналитическое решение задач физически и геометрически нелинейного деформирования стержней // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45. – № 5. – С. 124–131.

198. Шимановский В.Н. Висячие системы. – К.: Будівельник, 1984. – 208 с.
199. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости). – К.: Будівельник, 1973. – 198 с.
200. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б. Статические и динамические испытания моделей трубопроводных переходов в виде провисающей нити // Экспериментальные исследования инженерных сооружений. – К.: Будівельник, 1969. – Вып. 5. – С. 44–49.
201. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б., Присяженко Е.К. Экспериментальное исследование нитей конечной жесткости // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1967. – Вып. 6. – С. 5–21.
202. Шимановский В.Н., Соколов А.А. Расчет висячих конструкций за пределом упругости. – К.: Будівельник, 1975. – 104 с.
203. Шимановский В.Н., Харченко Р.Б., Киреенко В.И., Лысов В.Б. Новое решение трубопроводного перехода висячего типа // Промышленное строительство и инженерные сооружения. – 1975. – № 6. – С. 18–20.
204. Шимановский В.Н., Шимановский А.В. Устойчивость плоской формы изгиба пологих нитей конечной жесткости // Развитие металлических конструкций. Работы школы Н.С. Стрелецкого. – М.: Стройиздат, 1987. – С. 391–403.
205. Ширко Н.В. Упруго-пластический изгиб гибких криволинейных стержней // Тр. ВНИИ физико-технических и радиотехнических измерений. – М., 1971. – Вып. 8. – С. 77–85.
206. Щедров В.С. Основы механики гибкой нити. – М.: Машгиз, 1961. – 172 с.
207. Ягн Ю.И. Изгибно-крутильные деформации тонкостенных стержней открытого профиля. Теория и расчет. – М.: Гостехиздат, 1952. – 108 с.
208. Bandel H.K. Das orthogonale Seilnetz hyperbolisch-parabolischer Form unter verticalen Lastzusanden und Temperaturanderung // Der Bauingenieur. – 1959. – Jg. 34, № 10. – S. 394–401.
209. Bauer. Das flache biegesteife Seil mit elastischer Einspannung an der Enden // Der Bauingenieur. – 1972. – Jg. 47, № 11. – S. 387–393.
210. Ichizou T., Kimihira K., Hiroshi Y. Inelastic coupled buckling of vertically curved girders under pure bending // Technol. Repts Kansai Univ. – 1975. – № 16. – P. 77–91.
211. Jensen I.I. Eine statische und dynamische Untersuchung der Seil und Membautragwerke // Bericht. – 1970. – № 70. – S. 120–128.
212. Kappus R. Zentrisches und exzentrisches Drehknicken von Staben mit offenem Profil // Der Stahlbau. – 1953. – Jg. 22, H. 1. – S. 6–12.
213. Kislookij V.N., Kasilova T.A., Krizkij W.B., Zichanovskij W.K., Shimanovskij A.V. Programm-komplex zur nichlinearen statischen und dynamischen Berechnung Kombiniertes Konstruktionen // Wiss. Z. Hochsch. Archit. Bauwes. – Weimar, 1985. – Reihe B. – Jg. 31, H. 31. – S. 97–99.
214. Koichi T., Kuniaki U., Hisashi T. Failure of steel beams due to lateral buckling under repeated loads // Rapp. commis. trav. Assoc. Ints. ponts. Et charpentes. – 1973. – V. 13. – P. 312–325.

215. *Lissitsin B. M., Shimanovsky A.V.* The new solutions and the theory of calculation for the overground radial-cable-stayed main product lines and for passages of large spans // IASS Symposium: Spatial structures at the turn of millennium. – Copenhagen, 1991. – V. III. – P. 165–172.
216. *Shimanovsky A., Shalinsky V.* The Stability of Plane Shape Under Bending of Elastically-Plastic Finite Rigidity Tendons, having Non-symmetrical Cross-Section // Proceedings and Extended Abstracts of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures IASS-IACM 2008 «Spanning Nano to Mega». – Ithaca, 2008. – 4 p.
217. *Schleyer F.K.* Die Berechnung von Seilon, Seilnetzen und Seilwerken // Lugbeanspruchte Konstruktionen. – 1966. – Bd. 2, H. 10. – S. 48–61.
218. *Shimanovsky A.V., Tylebayev K.R.* New type of seismic stable large-span suspended roofing of public building and method of its calculation // IASS International Congress: Innovative Large Span Structures. – Toronto, 1992.
219. *Skladnev N.N., Shimanovsky A.V.* General calculation for suspended structures of large-span buildings and construction considering plastic properties of materials // IASS International Congress: Innovative Large Span Structures. – Toronto, 1992.
220. *Wagner H.* Verdrehung und Knickung von offenem Profilen // Festschrift zum 25 Jahrgen T.H. – Danzig. – 1929. – S. 241–254.
221. *Weber C.* Biegung und Schub in geraden Balken // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1924. – Bd. 4, H. 4. – S. 334–348.
222. *Young A.G.* Ship plating beyond the elastic limit // Quart. Trans. Inst. Naval Architects. – 1959. – V. 101, № 2. – P. 107–112.

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ	11
1.1. Некоторые тенденции совершенствования висячих систем	11
1.2. Обзор теоретических и экспериментальных исследований.....	21
1.3. Задачи исследований	34
ГЛАВА 2. ВИСЯЧИЕ СИСТЕМЫ. ТИПЫ И ОСОБЕННОСТИ	36
2.1. Покрытия зданий и сооружений	36
2.2. Мембранные конструкции	48
2.3. Мосты и путепроводы	55
2.4. Трубопроводные переходы	57
ГЛАВА 3. УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ	64
3.1. Предварительные замечания. Предпосылки расчета	64
3.2. Общий случай деформации нити. Основные дифференциальные уравнения задачи	65
3.3. Действие дополнительных нагружений специального вида	71
3.3.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета	76
3.3.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета	78
3.3.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета	79
3.4. Решение дифференциальных уравнений	81
3.5. Учет влияния температурных воздействий	86
3.6. Учет влияния деформации основания	89
3.7. Расчет многопролетной нити на упруго-податливых опорах	92
3.8. Расчет двухпоясной висячей системы	96
3.9. Оценка предпосылок расчета и полученных решений. Пределы применимости	100
3.10. Расчет нитей конечной жесткости с помощью рядов Фурье	109

3.10.1.	Точное решение задачи. Случай нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной нагрузки ...	109
3.10.2.	О характерной R -функции нагрузки	112
3.10.3.	Лемма о сумме ряда $G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2}$	114
3.10.4.	Точное решение задачи. Случай нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной нагрузки ...	116
3.10.5.	Приближенное решение задачи	120
ГЛАВА 4.	УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ	131
4.1.	Вводные замечания. Принятые допущения	131
4.2.	Определение дополнительных погонных нагрузок	132
4.3.	Общие уравнения устойчивости нитей конечной жесткости	137
4.4.	Действие дополнительных нагружений специального вида	146
4.4.1.	Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета	146
4.4.2.	Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета	151
4.4.3.	Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета	152
ГЛАВА 5.	УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ	154
5.1.	Исходные допущения	154
5.2.	Напряженно-деформированное состояние нити из идеального упруго-пластического материала	155
5.3.	Вывод общих дифференциальных уравнений	158
5.4.	Действие дополнительных нагружений специального вида	163
5.4.1.	Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки	163
5.4.2.	Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки	169
5.4.3.	Случай произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки	171
5.4.4.	Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета	174

5.5.	Влияние пластических шарниров на работу нити	175
5.6.	Учет упрочнения материала	177
5.6.1.	Работа поперечного сечения нити	178
5.6.2.	Вывод дифференциальных уравнений	182
5.6.3.	Определение остаточных прогибов при разгрузке	188
ГЛАВА 6.	УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ	191
6.1.	Предварительные замечания. Сущность решения задачи	191
6.2.	Уточнение выражения потенциальной энергии деформации	192
6.3.	Определение положения границы раздела зон нагружения и разгрузки поперечного сечения нити	196
6.3.1.	Прямоугольное сечение	196
6.3.2.	Двутапное сечение	203
6.3.3.	Тавровое сечение	207
6.3.4.	Швеллерное сечение с вертикальной стенкой	215
6.3.5.	Швеллерное сечение с горизонтальной стенкой ..	220
6.3.6.	Угловое сечение с неравными полками	229
6.4.	Определение приведенной жесткости поперечного сечения нити	232
6.4.1.	Прямоугольное сечение	232
6.4.2.	Двутапное сечение	234
6.4.3.	Тавровое сечение	236
6.5.	Общие уравнения устойчивости для нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости	238
6.6.	Общие уравнения устойчивости для нити, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости	241
ГЛАВА 7.	РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ ПОВЫШЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ...	244
7.1.	Методика расчета висячих систем	244
7.2.	Разрешающие уравнения метода конечных элементов	247
7.3.	Алгоритмы решения нелинейных задач	248
7.3.1.	Общие положения.....	248
7.3.2.	Особенности построения алгоритмов расчета висячих систем	249
7.3.3.	Метод продолжения по параметру возмущения в сочетании с методом Ньютона-Канторовича	253

7.3.4. Комбинированный алгоритм расчета висячих систем	256
7.4. Реализация методики исследования висячих систем	257
ГЛАВА 8. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ	261
8.1. Работа нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций	261
8.1.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете	261
8.1.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета	264
8.1.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета	268
8.1.4. Анализ результатов исследований	271
8.2. Работа нити конечной жесткости за пределом упругости	272
8.2.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете	272
8.2.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета	276
8.2.3. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки	280
8.2.4. Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки	284
8.2.5. Влияние длины пластического участка на работу нити	287
8.2.6. Влияние упрочнения материала на работу нити ..	290
8.2.7. Особенности работы нити при разгрузке	291
8.2.8. Анализ результатов исследований	292
8.3. Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций	293
8.3.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете	294
8.3.2. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета	297
8.3.3. Анализ результатов исследований	300
8.4. Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости за пределом упругости	301
8.4.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете	301
8.4.2. Анализ результатов исследований	308

8.5. Влияние пластических деформаций на работу поперечных сечений нити конечной жесткости при потере устойчивости плоской формы изгиба	308
8.5.1. Тавровое сечение	309
8.5.2. Швеллерное сечение с вертикальной стенкой	311
8.5.3. Швеллерное сечение с горизонтальной стенкой .	311
8.5.4. Угловое сечение с неравными полками	313
8.5.5. Анализ результатов исследований	313
8.6. Сопоставление теоретических результатов с данными экспериментальных исследований	315
8.7. Разработка и совершенствование конструктивных решений висячих систем	320
8.7.1. Висячий переход трубопровода	321
8.7.2. Висячее покрытие повышенной жесткости	322
8.7.3. Способ монтажа висячего покрытия	323
8.7.4. Подпорная стенка с поперечными гибкими несущими элементами	324
8.7.5. Резервуар со стенкой в виде цилиндрической оболочки, провисающей подобно нити конечной жесткости	326
ГЛАВА 9. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ.....	329
9.1. Висячий трубопроводный переход нефтепровода	329
9.2. Висячее покрытие универсального спортивно-зрелищного зала	333
9.3. Висячий трубопроводный переход керосинопровода	340
9.4. Облегченная складчатая конструкция ангара для самолетов	344
9.5. Висячая мембранная оболочка покрытия	347
9.6. Трансформирующаяся вантово-стержневая оболочка	351
9.7. Висячее покрытие универсального производственного здания	355
9.8. Висячее покрытие выставочного павильона	358
9.9. Висячее мембранно-вантовое покрытие демонстрационного зала	366
9.10. Висячее покрытие зрительного зала	375
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	382

Научное издание

**Шимановский Александр Витальевич
Шалинский Валерий Владимирович,
Чабан Наталья Александровна**

МЕХАНИКА ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

Ш 61 Механика висячих систем. – К.: Изд-во «Сталь»,
2010. – 399 с, рис. 184, табл. 12.

Редактор	Т.И. Лукашевич
Компьютерная верстка	Т.И. Цапро

Подписано к печати 29.06.10. Формат 70×100/16.
Бумага офсет. Гарнитура Times New Roman.
Печать офсет. Усл. печ. л. 32,41.
Тираж 500 экз. Заказ № 0300.

ООО «Издательство «Сталь».
просп. Освободителей, 1, г. Киев, 02660,
тел./факс 516-45-02, тел. 516-55-92.

Свидетельство субъекта издательского дела
ДК № 1212 от 28.01.2003