

**А.В. Шимановский,
В.В. Шалинский, Н.А. Чабан**

МЕХАНИКА ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

Издание третье,
переработанное и дополненное

*Под общей редакцией
члена-корреспондента Национальной академии наук Украины,
заслуженного деятеля науки и техники Украины,
доктора технических наук, профессора
А.В. Шимановского*

**Киев
Издательство «Сталь»
2013**

УДК 624.074.04
ББК 38.112

Шимановский А.В., Шалинский В.В., Чабан Н.А.

Ш 61 Механика висячих систем. Издание третье, переработанное и дополненное / Под общей редакцией Шимановского А.В. – К.: Изд-во «Сталь», 2013. – 541 с., рис. 277, табл. 28.

В книге изложены нелинейная теория, построение основных разрешающих соотношений, методы и алгоритмы численного исследования, а также анализ прочности, жесткости и устойчивости висячих систем. Приведены уточненные результаты исследований реальных большепролетных пространственных комбинированных висячих систем с учетом больших перемещений и деформаций, конструктивной анизотропии, пластических свойств материалов, потери устойчивости плоской формы деформирования и местной устойчивости тонколистовых оболочек.

Для научных работников, инженеров, преподавателей, аспирантов, магистров и студентов технических вузов.

ISBN 978-966-1555-74-6

УДК 624.074.04
ББК 38.112

Шимановський О.В., Шалінський В.В., Чабан Н.О.

Ш 61 Механіка висячих систем. Видання третє, перероблене та доповнене / За загальною редакцією Шимановського О.В. – К.: Вид-во «Сталь», 2013. – 541 с., рис. 277, табл. 28.

У книзі викладено нелінійну теорію, побудову основних розв'язних співвідношень, методи й алгоритми числового дослідження, а також аналіз міцності, жорсткості та стійкості висячих систем. Наведено уточнені результати досліджень реальних великопрогнових просторових комбінованих висячих систем із урахуванням значних переміщень і деформацій, конструктивної анізотропії, пластичних властивостей матеріалів, втрати стійкості плоскої форми деформування і місцевої стійкості тонколистових оболонок.

Для науковців, інженерів, викладачів, аспірантів, магістрів і студентів технічних вузів.

Рецензенты: Л.М. Лобанов, академик Национальной академии наук Украины, доктор технических наук, профессор
В.Т. Трощенко, академик Национальной академии наук Украины, доктор технических наук, профессор

Рекомендовано к изданию Научно-техническими советами: Министерства регионального развития, строительства и жилищно-коммунального хозяйства Украины, Украинской государственной корпорации «Укрмонтажспецстрой», Института геотехнической механики имени Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины, Института электросварки имени Е.О. Патона Национальной академии наук Украины, ООО «Украинский институт стальных конструкций имени В.Н. Шимановского».

© А.В. Шимановский,
В.В. Шалинский, Н.А.Чабан, 2013
© Издательство «Сталь», 2013

ISBN 978-966-1555-74-6

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке книги «Механика висячих систем» для третьего издания авторами была полностью сохранена основная идея предыдущих изданий, состоящая в том, чтобы дать научным работникам и инженерам существенные основы знаний по механике висячих систем в целом, а также вопросам расчета, конструирования и проектирования их конструктивных элементов в частности, в столь простой форме, какую только позволяет теория этих систем, вместе с набором решений реальных задач, важных для инженерной практики и проектирования.

Весь текст книги был вновь пересмотрен с внесением целого ряда изменений (иногда достаточно существенных) как за счет улучшения структуры его изложения в сочетании с переработкой и уточнением некоторых положений, так и путем дополнения отдельных разделов, а также устранения вкрапившихся в предыдущие издания погрешностей и опечаток. Сообразно с этим основные изменения и дополнения сводятся к следующему.

Книга расширена путем добавления новой главы, а именно главы 6, раскрывающей работу гибких нитей за пределом упругости с использованием диаграмм упруго- и жестко-пластического тела без учета и с учетом упрочнения материала. Кроме того, анализ поведения этих нитей под нагрузкой позволил выполнить и включить в данную главу оценку влияния указанных моделей работы материала на процесс деформирования нитей, а также результаты исследования качества и близости численных решений и пределов применимости разрешающих соотношений. Глава 1 дополнена новыми многочисленными сведениями о большепролетных пространственных висячих системах, которые были применены в последнее время (в том числе и в 2012 году) в гражданских и промышленных зданиях и инженерных сооружениях. При этом особое внимание уделено описанию уникальных конструкций висячих мостов, большинство из которых являются единственными реализо-

ванными такого рода объектами в мировой практике строительства. В главе 3 уточнено изложение метода получения дифференциальной зависимости между распором и нагрузкой для гибкой нерастяжимой нити и рассмотрен альтернативный подход, отличающийся от прежнего использованием иных варьируемых параметров. Глава 7 дополнена выводом дифференциальных уравнений для полностью пластической фазы деформирования нити конечной жесткости из упруго-пластического материала с линейным упрочнением в случае прохождения нейтральной оси вне поперечного сечения нити. Сделано несколько дополнений к главе 11, содержащей анализ напряженно-деформированного состояния и несущей способности нитей конечной жесткости, в части изложения результатов решения задач для жестко-пластической нити с учетом упрочнения материала. В главу 12 включены три новых больших раздела, первый из которых дополняет существующий параграф по исследованию висячего покрытия стадиона его расчетом при локализованных тепловых воздействиях с целью выявления влияния этих воздействий на общее напряженно-деформированное состояние покрытия, определения огнестойкости и проектирования огнезащиты его конструктивных элементов, второй – содержит результаты исследования напряженно-деформированного состояния висячего большепролетного покрытия здания общественного назначения, а в третьем – изложены результаты численного расчета вертикальных цилиндрических резервуаров сверхбольшого объема с новым конструктивным решением. Что же касается приложения, то оно дополнено новым разделом, расширяющим существующий параграф о способах решения вариационных задач основными сведениями в части использования методов Бубнова-Галеркина и коллокаций для их приближенного решения.

Следует также отметить, что, как и в предыдущих изданиях, большой объем нового фактического материала, вошедшего в третье издание книги «Механика висячих систем», потребовал значительной переработки введения и его актуализации.

И, наконец, в завершение уместно будет указать еще на одно немаловажное обстоятельство, побудившее авторов к подготовке настоящего третьего издания. Это обстоятельство заключается в том, что как первое, так и второе издания книги «Механика висячих систем» разошлись в читательской среде, так и не успев удовлетворить, судя по отзывам читателей, их спроса. А эти отзывы, и это хочется подчеркнуть особо, свидетельствуют об интересе читателей к рассматриваемым в книге вопросам. Кроме того, в отзывах читателей был также высказан ряд предложений как в части расширения книги дополнительным фактическим материалом, так и в части уточнения некоторых положений и формулировок. Все эти предложения были с благодарностью приняты авторами, а их большая часть, логически наиболее корреспондирующаяся с содержанием книги, – учтена при подготовке настоящего третьего издания.

А.В. Шимановский

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание книги «Механика висячих систем» было подготовлено в 2008–2009 годах и опубликовано в 2010 году. Со времени подготовки и выхода этого издания в свет в связи с осуществлением строительства ряда зданий и сооружений с применением висячих систем, теория висячих систем в целом, а также вопросы расчета, конструирования и проектирования их конструктивных элементов в частности, становятся все более и более важными для инженеров-строителей и получили дальнейшее развитие. Поэтому главной целью настоящего переработанного и дополненного издания является максимально компактное изложение наиболее важных новых результатов.

При подготовке второго издания книги «Механика висячих систем» авторы, сохранив первоначально принятую общую структуру и направленность изложения материала, преследовали три основные цели. Первая цель заключалась в сборе и систематизации разобщенного и рассредоточенного по отдельным публикациям многочисленного материала по теории расчета висячих систем и их конструктивных элементов (в первую очередь – гибких нитей) и изложении его с учетом принятых авторами единых методологических позиций нелинейной механики и вариационного исчисления. Второй целью являлось дополнение книги новыми разделами, содержащими новые результаты, которые были получены авторами в части развития уточненной теории расчета нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе на произвольные вертикальные и горизонтальные нагрузки, а также численного исследования напряженно-деформированного состояния висячих систем ряда реальных гражданских зданий и инженерных сооружений. Третья цель состояла в переработке некоторых разделов книги в соответствии с появившимся новым материалом, взаимосвязанном изложении содержания, а также исправлении вкравшихся в первое издание погрешностей и опечаток.

Во второе издание книги «Механика висячих систем» включено три новых больших раздела – третья и седьмая* главы, а также приложение, содержащие различные аспекты теории расчета висячих систем и связанные с ней вопросы. В третьей главе изложены многочисленные решения теории прочностного расчета гибких недеформируемых и упругих нитей, охватывающие как общую постановку задачи, так и ее практические приложения в части учета изменения температуры, смещения и неравномерной осадки опор. Описаны интересные частные случаи расчета гибких нитей, а именно нитей с нулевой стрелой провисания (так называемых струн) и многопролетных нитей на упругоподатливых опорах. Приведено решение вытекающей из расчета гибких нитей задачи о спрямлении дуги и указан иной, отличный от используемого авторами вариационного подхода, путь получения разрешающих зависимостей. Седьмая* глава содержит вопросы расчета нитей конечной жесткости за пределом упругости с использованием гипотезы жестко-пластического тела применительно к идеализации свойств материала. Наряду с разрешающими уравнениями задачи дано построение предельных кривых поперечных сечений, определение предельных состояний нити и получение предельных величин действующих нагрузок. В приложении, для возможного облегчения понимания представленного в книге материала, авторы сочли уместным поместить основные понятия о вариационных принципах и вариационных методах, на применении которых базируется получение основных разрешающих соотношений теории расчета гибких нитей и нитей конечной жесткости. Одновременно четвертая глава, в которой изложена уточненная теория расчета нитей конечной жесткости с использованием принципа возможных перемещений, дополнена сведениями в части области применения конструктивных и существования теоретических решений нитей конечной жесткости, а одиннадцатая** глава, содержащая результаты расчетов большепролетных висячих систем, дополнена новыми разделами, в которых дано описание и представлен анализ результатов исследования ряда реальных гражданских зданий и инженерных сооружений. Большой объем нового фактического материала, который вошел во второе издание книги «Механика висячих систем», потребовал значительной переработки введения к изданию.

В заключение хочется отметить, что настоящее второе издание книги «Механика висячих систем» подготовлено по рекомендации выдающегося ученого и замечательного человека Бориса Евгеньевича Патона, который сам никогда не останавливается на достигнутом и другим всегда советует следовать этим путем. Авторы выражают Борису Евгеньевичу свою искреннюю признательность.

А.В. Шимановский

* В третьем издании книги «Механика висячих систем» номер седьмой главы изменен на восьмой.

** В третьем издании книги «Механика висячих систем» номер одиннадцатой главы изменен на двенадцатый.

ВВЕДЕНИЕ

Большепролетные пространственные висячие системы различного назначения и типа находят все более широкое применение в строительстве и различных отраслях современной техники. Это обусловлено не только их техническими особенностями, но также и значительной экономической эффективностью по сравнению с обычными конструкциями. Большепролетные висячие конструкции, запроектированные с учетом их пространственной работы, являются более легкими, прочными и надежными, чем плоскостные системы. Такими свойствами в полной мере обладают висячие и мембранные системы, все шире используемые в гражданских и промышленных зданиях и инженерных сооружениях, а также при их реконструкции. Кроме того, применение указанных конструкций позволяет перекрывать большие площади без промежуточных опор, создавать легкие и выразительные архитектурные формы, рационально использовать прочностные свойства материала (за счет его работы преимущественно на растяжение); они также малочувствительны к различного рода перегрузкам, сейсмическим воздействиям, осадкам и неравномерному смещению опор. Именно поэтому большепролетные пространственные висячие системы часто бывают незаменимыми при строительстве не только названных, но и многих других уникальных сооружений.

Впрочем, нельзя не отметить и тот факт, что большепролетные пространственные висячие системы наряду с преимуществами имеют и некоторые недостатки. При чем устранение этих недостатков создает постоянный побудительный мотив для развития висячих систем – совершенствуются конструктивные формы, уточняются методы расчета, применяются эффективные материалы для несущих элементов, реализуются новые типы соединений, внедряются прогрессивные способы изготовления и монтажа.

Иллюстрацией к сказанному может служить разработка методов стабилизации формы висячих систем, поскольку известно, что они имеют повы-

шенную деформативность при воздействии сосредоточенных и особенно несимметричных нагрузок. Следует отметить, что методы уменьшения деформативности висячих систем во многом зависят от их функционального назначения. Например, если стабилизация покрытий зданий и сооружений достигается в основном предварительным напряжением, то повышение жесткости пролетного строения мостов, путе- и трубопроводных переходов – за счет различных конструктивных мероприятий. В последнее время для этих целей все больше применяют висячие системы повышенной жесткости, расчетной моделью несущих элементов которых являются нити конечной жесткости.

Можно указать также на целый ряд характерных факторов, связанных с расчетом большепролетных пространственных висячих систем. Это и сильная нелинейность рассматриваемых конструкций, и наличие зон одноосного напряженного состояния, и адекватная формулировка интегрального закона состояния материала на основе различных реологических моделей, а также многое-многое другое. Между тем является не только совершенно очевидным, но и абсолютно бесспорным тот факт, что без правильного представления о работе большепролетных пространственных висячих систем под нагрузкой невозможно не только создать новые рациональные формы, но даже обеспечить достаточную прочность и надежность применяемых систем. А поэтому развитию теории расчета большепролетных пространственных висячих систем необходимо уделять особое внимание.

Что же касается научно-технической проблемы, решаемой в данной книге, то следует заметить, что она связана с разработкой теории расчета большепролетных пространственных комбинированных висячих систем, а также комплексным исследованием процессов их формообразования, конструирования и деформирования с учетом значительной геометрической, физической и конструктивной нелинейностей. При этом геометрическая нелинейность характеризуется большими перемещениями, физическая – неупругими деформациями, а конструктивная – изменением параметров расчетной модели в процессе работы конструкции. Кроме того, значительное внимание в книге уделяется вопросам разработки и совершенствования новых конструктивных решений большепролетных пространственных комбинированных висячих систем при компоновке их схем, рационализации соотношений геометрических размеров, уменьшения параметров напряженного состояния и обеспечения, по возможности, равнопрочной работы несущих элементов и т. п.

Именно поэтому в книге в качестве объектов исследования рассматриваются различные большепролетные пространственные комбинированные конструкции, а именно: висячие (вантовые, повышенной жесткости на основе нитей конечной жесткости, мембранные) и оболочечные системы. Еще одним характерным аспектом книги является то, что в ней для поиска ответов на обозначенные проблемные вопросы с использованием нелинейной теории

упругости и пластичности разработана теория расчета прочности и устойчивости указанных сильнонелинейных систем на произвольные нагрузки и воздействия в пределах и за пределами упругости, сформулирована концепция ее конечноэлементного представления и получены основные соотношения метода конечных элементов.

Теперь же скажем несколько слов, касающихся общей характеристики настоящего издания. Книга состоит из двенадцати глав и приложения. В первых двух главах приведен обзор теоретических и экспериментальных исследований несущих элементов висячих систем, а также описаны основные конструктивные решения и рассмотрены вопросы проектирования, изготовления и монтажа большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Главы с третьей по девятую посвящены теории расчета прочности и устойчивости гибких нитей и нитей конечной жесткости, а также висячих систем с их применением. Причем в главах с третьей по пятую рассмотрена работа нитей и висячих систем в пределах упругой работы материала, а с шестой по девятую – за пределами упругости. Десятая глава посвящена вопросам численной реализации предлагаемых теоретических положений и метода конечных элементов применительно к расчету большепролетных пространственных комбинированных висячих систем; при этом особое внимание обращено на алгоритмы решения больших систем нелинейных разрешающих уравнений. В последних двух главах изложены результаты численного исследования нитей конечной жесткости и большепролетных пространственных комбинированных висячих систем ряда реальных гражданских и промышленных зданий и инженерных сооружений на прочность и устойчивость в пределах и за пределами упругости и сформулированы предложения по совершенствованию и разработке их новых конструктивных решений. И, наконец, в приложении в весьма краткой форме представлены основные сведения о вариационных принципах построения разрешающих уравнений и способах решения вариационных задач, которые были широко использованы при написании данной книги.

Рассмотрим теперь, останавливаясь на наиболее характерных моментах, содержание всех разделов настоящего издания.

В первой главе дается обзор некоторых конструктивных решений большепролетных пространственных висячих систем и приводится классификация методов стабилизации их формы под нагрузкой. Особое внимание обращено на висячие системы повышенной жесткости, несущие элементы которых выполнены из нитей конечной жесткости. Приведен обзор теоретических и экспериментальных исследований таких нитей и систем на их основе. Отмечено, что методы расчета в упругой стадии не позволяют выявить истинные запасы прочности конструкции, поскольку в большинстве случаев пластические деформации приводят к перераспределению и выравниванию напряжений, а, следовательно, и к повышению несущей способности сооружения. При этом указано, что учет пластических деформаций может дать

особенно большой эффект при расчете таких, в значительной степени нелинейно работающих систем, как висячие.

С учетом результатов анализа тенденций совершенствования прочностных характеристик конструкционных материалов сделан вывод, что их повышение обусловило широкое применение в строительстве экономичных и изящных тонкостенных и висячих систем. Отмечено, что для таких систем роль расчетов на устойчивость существенно возросла, так как их разрушение чаще всего связано с потерей или общей устойчивости, или устойчивости составляющих конструкцию отдельных элементов. Относительно развитых в вертикальной плоскости висячих систем указано, что такой расчет часто дает значение нагрузки, при которой происходит потеря эксплуатационных свойств висячей системы и даже ее разрушение, существенно меньшее, чем полученное обычным расчетом на прочность.

И, наконец, завершают первую главу главная цель и направления ее достижения, сформулированные на основании анализа результатов выполненного обзора теоретических и экспериментальных исследований, а также развития теории конструктивных форм висячих систем.

Во второй главе сосредоточены общие сведения о гражданских и промышленных зданиях и инженерных сооружениях с применением большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Рассмотрены покрытия в виде вантовых и комбинированных систем и оболочек, а также мембранные конструкции. Приведены конструктивные и расчетные схемы, оценена пространственность работы сооружений. Изложены вопросы проектирования, расчета, изготовления и монтажа. Описаны требования, предъявляемые к таким сооружениям, рекомендуемые конструктивные материалы, нагрузки и воздействия. Указаны некоторые перспективные тенденции развития конструктивных форм. Повышенное внимание уделено конструктивным решениям мостов, путе- и трубопроводных переходов через естественные и искусственные препятствия: выполнена классификация схем мостов и переходов, а также приведена характеристика их несущих конструкций. Рассмотрены требования, предъявляемые к таким сооружениям, типы конструктивных решений и узлов пролетных строений. Значительное внимание уделено висячим и вантовым мостам, а также особенностям реализации их основных конструктивных элементов – балок жесткости, пилонов, узлов крепления вант, подвесок и кабелей.

Третья глава содержит основные сведения о классификации нитей и теории прочностного расчета гибких нерастяжимых и упругих нитей на произвольные (в т. ч. специального вида) вертикальные нагрузки, в основу которой положен принцип возможных перемещений. Сформулированы основные зависимости расчета гибких нитей, а также дано общее решение задачи для гибких нерастяжимых и упругих нитей, обладающее высокой степенью точности. Рассмотрены практически важные случаи расчета гибких нитей, в т. ч. нитей с нулевой стрелой провисания (так называемых струн) с учетом и без

учета предварительного напряжения, а также многопролетных гибких нитей на упруго-податливых опорах. Представлены решения, отображающие влияние изменения температуры окружающей среды, смещения и неравномерной осадки опор на работу гибких нитей.

Наряду с теорией расчета гибких нитей, базирующейся на применении принципа возможных перемещений, изложен иной метод расчета гибкой нерастяжимой нити, основанный на использовании формулы длины дуги, позволивший получить разрешающие зависимости, простые и удобные для практического применения. Рассмотрена задача о спрямлении дуги, решение которой найдено по аналогии с решением для гибкой нерастяжимой нити, построенным на основе принципа возможных перемещений. Получены соотношения для определения длины не только гладких кривых, но также кривых, имеющих переломы, выраженные через известные геометрические параметры нити – длину пролета и стрелу провисания, которые имеют достаточную простоту и высокую степень точности и применяются в последующих главах при рассмотрении конкретных классов задач.

Особо стоит отметить, что завершает третью главу достаточно обширный раздел, содержащий оценку не только исходных допущений представленной теории расчета гибких нитей, но и погрешности полученных решений, которая свидетельствует о высокой точности полученных результатов.

В четвертой главе описана уточненная теория расчета нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе на произвольные (в т. ч. специального вида) вертикальные и горизонтальные нагрузки, построенная с использованием принципа возможных перемещений. Сформулированы разрешающие уравнения нелинейной задачи, а также получено ее общее решение, обладающее высокой степенью точности. Рассмотрены практически важные случаи расчета висячих систем, в т. ч. учет влияния изменения температуры окружающей среды, смещения и неравномерной осадки опор, расчета многопролетной нити конечной жесткости на упруго-податливых опорах и двухпроясных висячих систем, пояса которых выполнены из нитей конечной жесткости. Показано, что частными случаями полученного общего решения задачи являются известные решения для гибкой однопролетной нити, а также для гибкой многопролетной нити на упруго-податливых опорах.

Исследована точность как исходных предпосылок теории, так и полученных решений. Показано, что представленная уточненная теория расчета позволяет более точно определять параметры напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе по сравнению с существующими методами расчета.

Наряду с уточненной теорией расчета нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе изложены приближенные методы расчета, основанные на применении метода рядов Фурье, позволившие не только существенно упростить расчетные зависимости, но и свести методику расчета к решениям, простым и удобным для практического применения.

Пятая глава посвящена описанию общего метода расчета устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе на симметричные и несимметричные нагружения (в т. ч. специального вида) с использованием принципа возможных перемещений и энергетического критерия устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле. Представлены общие разрешающие уравнения задачи, а также зависимости для определения критического распора и критической дополнительной нагрузки при различных сочетаниях нагрузок, произвольных условиях закрепления на опорах, эксцентриситете приложения нагрузки и пр. Полученные решения распространены на случай нитей конечной жесткости, раскрепленных связями в горизонтальной плоскости.

Определены пределы применения предложенных решений. При этом особо подчеркнуто, что полученные расчетные зависимости дают общее решение рассматриваемой задачи, частные случаи которого описывают потерю устойчивости плоской формы изгиба, с одной стороны, гибких нитей, а с другой – балок.

В шестой главе излагается теория расчета гибких нитей за пределом упругости. Последовательно рассмотрено поведение гибких нитей с использованием четырех идеализированных диаграмм напряжение-деформация материала нити: упруго-пластической, упруго-пластической с линейным упрочнением, жестко-пластической и жестко-пластической с линейным упрочнением. Установлены условия появления пластических деформаций во всех стадиях работы поперечного сечения гибкой нити. Представлены соотношения для геометрически и физически нелинейной задачи гибкой нити при активном нагружении. Изложена методика и определены предельные величины действующих на гибкую нить нагрузок. Приведены уравнения, определяющие параметры напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах деформирования, а также условия смены фаз работы нити, которые обобщены на наиболее часто встречающиеся на практике виды нагружений.

Повышенное внимание уделено изучению влияния моделей работы материала на поведение гибких нитей. Представлены оценки качества, сходимости и близости численных решений при использовании различных моделей работы материала. Показана область допустимых значений и пределы применимости разрешающих соотношений.

В седьмой главе рассматриваются вопросы расчета висячих систем с учетом пластических свойств материала. Представлено два варианта идеализации работы реального материала: упруго-пластический материал и упруго-пластический материал с линейным упрочнением. Установлены зависимости между распором, изгибающим моментом и кривизной во всех стадиях работы поперечного сечения нити конечной жесткости.

Представленные в четвертой главе уточненная теория и метод расчета распространены на случай работы нитей конечной жесткости за пределом упругости. Описаны разрешающие уравнения геометрически и физически

нелинейной задачи при активном нагружении и разгрузке. Приведены уравнения, определяющие параметры напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах деформирования, координаты границы между упругим и пластическими участками по ее длине, а также условия смены фаз работы нити, которые обобщены на все виды нагружений и воздействий. Учтено влияние на напряженно-деформированное состояние нити образующихся в процессе нагружения в ее пролете пластических шарниров. Показано, что вытекающие из разработанной теории частные случаи представляют собой известные решения для гибкой нити.

Восьмая глава развивает изложенный в предыдущей седьмой главе расчет висячих систем с учетом пластических свойств материала путем рассмотрения работы нитей конечной жесткости с использованием гипотезы жестко-пластического материала. Представлены зависимости между распором и изгибающим моментом, при совместном действии которых в поперечном сечении наступает предельное состояние, а также приведены предельные кривые предельного состояния для наиболее характерных видов поперечных сечений.

Указаны условия смены фаз работы нити конечной жесткости, зависимости для определения координат границы между жесткими и пластическими участками по ее длине, а также соответствующие каждой фазе разрешающие уравнения задачи. Изложена методика и определены предельные величины действующих на нить нагрузок для некоторых видов нагружений и воздействий. Показано, что частными случаями полученных решений являются известные решения для балок и гибких нитей.

Девятая глава посвящена общему методу расчета устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе за пределом упругости на симметричные и несимметричные нагружения (в т. ч. специального вида), который, как и метод расчета устойчивости упругих нитей, основан на принципе возможных перемещений с использованием энергетического критерия устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле. Изложены вопросы расчета устойчивости плоской формы изгиба висячих систем за пределом упругости и отмечены особенности их поведения при значениях внешних нагрузок, близких или равных критическим. С привлечением теории пластического течения уточнено выражение потенциальной энергии деформации применительно к случаю потери устойчивости упруго-пластических нитей конечной жесткости. Описано поведение поперечного сечения нити конечной жесткости с зонами односторонней и двусторонней пластичности при ее выпучивании в горизонтальной плоскости. Выполнен анализ взаимовлияния зон нагружения и разгрузки в поперечном сечении при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба. Определены соотношения, характеризующие положение границы раздела между этими зонами для возможных случаев работы нити и характерных форм поперечных сечений. Рассмотрены возможные

случаи прохождения границы раздела по поперечному сечению при различной толщине пластичных областей.

Установлены зависимости для определения приведенной жесткости поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при различных типах профиля и вариантах распространения зон пластической деформации по сечению нити. Представлены уравнения устойчивости для всех фаз работы упруго-пластической нити конечной жесткости, а также зависимости для определения критического распора и критической дополнительной нагрузки при различных сочетаниях нагрузок, граничных условиях и форме поперечного сечения, а также эксцентриситета приложения нагрузки и закрепления нити связями в горизонтальной плоскости и пр.

В десятой главе изложена концепция применения метода конечных элементов к расчету большепролетных пространственных комбинированных висячих систем, состоящих из фрагментов различной структуры, мерности и жесткости. Представлена постановка и реализация конечноэлементной методики расчета, основанной на специально построенных для рассматриваемых систем нелинейных соотношениях метода конечных элементов в вариационной формулировке. Отмечены возникающие при этом трудности, связанные с большой кинематической подвижностью и высокой деформативностью висячих систем в процессе нагружения. Описана аппроксимация функций перемещений, деформаций и напряжений в пространстве базисных функций дискретной модели комбинированной континуальной области.

Особое внимание обращено на алгоритмы решения больших систем нелинейных разрешающих уравнений. Описаны некоторые специальные эффективные алгоритмы решения задач нелинейного деформирования большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Выполнено обоснование разработанных теоретических положений путем сопоставления решений тестовых задач с имеющимися в литературных источниках. Определены пределы применения предложенных расчетных моделей. Изложена программная реализация методики исследования напряженно-деформированного состояния большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Приведено описание принципов и функциональной схемы комплекса программ. Указаны возможные режимы работы комплекса, форма представления исходных данных и результатов расчета, а также другие присущие ему особенности.

Одиннадцатая глава содержит результаты обширных численных исследований нитей конечной жесткости и висячих систем, состоящих из гибких нитей и нитей конечной жесткости, на прочность и устойчивость в пределах и за пределами упругости. Рассмотрено влияние различных факторов на напряженно-деформированное состояние, несущую способность и устойчивость нитей. Проведен анализ и выявлены закономерности поведения нитей конечной жесткости и висячих систем на их основе, дана оценка достоверности предложенной теории расчета путем сравнения полученных результатов с

известными аналитическими решениями и данными экспериментальных исследований.

Повышенное внимание уделено предложениям в части совершенствования и разработки новых конструктивных решений большепролетных пространственных комбинированных висячих систем, основанных на найденных закономерностях поведения нитей конечной жесткости и включающих вопросы компоновки сооружения, выбора рациональных соотношений геометрических параметров, уменьшения напряжений в конструктивных элементах и пр. Указаны возможные направления применения висячих систем в конструкциях, где ранее такие системы обычно не использовались, а также рассмотрены новые решения несущих элементов висячих систем и методы искусственного регулирования усилий в этих элементах.

В двенадцатой главе изложены результаты численного исследования напряженно-деформированного состояния большепролетных пространственных комбинированных висячих систем ряда реальных гражданских и промышленных зданий и инженерных сооружений. Представлен анализ закономерностей их работы при различных схемах загрузки, а также отмечены выявленные при этом особенности в части образования опасных зон в конструкциях, где напряжения в составляющих их элементах близки или даже превышают расчетное сопротивление материала. Описаны выработанные с учетом анализа результатов проведенных исследований рекомендации по совершенствованию или изменению первоначально принятых проектных решений, а также обозначены некоторые пути совершенствования конструктивных решений рассматриваемых систем.

Приложение содержит основные понятия о применяемых в механике вариационных принципах и вариационных методах, положенных в основу представленной в настоящей монографии теории расчета гибких нитей и нитей конечной жесткости, а также висячих систем на их основе. В общем виде изложены сведения о вариационных принципах построения разрешающих уравнений и способах решения вариационных задач. Даны понятия потенциальной энергии в точке силового поля и потенциальной энергии деформации упругой системы, а также указаны подходы для их определения. Описаны способы представления потенциальной энергии через квадратичные формы обобщенных перемещений и обобщенных сил. Сформулированы теоремы Кастилиано и Лагранжа и приведены стандартные формы их записи.

Изложена формулировка и представлено выражение полной энергии деформируемой системы, а также показано, что с использованием этого понятия достаточно просто выражаются условия равновесия рассматриваемой системы. Представлена первая вариация полной энергии системы, на основе которой сформулирован принцип вариации перемещений (принцип Лагранжа), а также отмечено, что при помощи второй вариации полной энергии системы можно определить качественные показатели ее равновесия (критерий Дирихле). Описаны основные способы решения вариационных задач, осно-

ванные либо на решении дифференциальных уравнений, либо на использовании прямых методов вариационного исчисления. Даны примеры расчета упругих систем на основе принципов вариации перемещений и напряжений (принципов Лагранжа и Кастилиано).

И, наконец, в завершение заметим, что авторы надеются, что данная книга не только заинтересует, но и будет полезна специалистам, причастным к созданию (расчету, конструированию, проектированию) разнообразных большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Причем эта надежда базируется на нескольких моментах. Во-первых, в книге с единых методологических позиций изложен весьма обширный теоретический и практический материал, представлены все использованные соотношения нелинейной теории упругости и пластичности, а также описаны различные алгоритмы решения больших систем нелинейных уравнений, к которым сводятся рассматриваемые в данном издании задачи деформирования большепролетных пространственных комбинированных висячих систем. Во-вторых, книга снабжена не только тестовыми примерами, позволяющими вникнуть в детали алгоритмов, но и реальными задачами, содержащими дальнейшее развитие идей, лишь слегка затронутых в тексте.

Более того, именно эти отмеченные моменты, по мнению авторов, делают книгу весьма доступной для самостоятельного изучения студентами, бакалаврами, магистрами, аспирантами, научными работниками, инженерами и всеми, кому представленные задачи интересны с практической точки зрения.

И еще упомянем одну деталь, на которой, с точки зрения авторов, стоит остановиться во введении, – в книге использовано немало специальной терминологии. Именно поэтому при ее написании авторы старались придерживаться устоявшегося стиля, а также прижившейся терминологии и обозначений, принятых в большинстве работ отечественных ученых данного научного направления. Однако в случае наличия нескольких вариантов изложения или сосуществования разных терминов для обозначения одного и того же понятия, что наиболее присуще содержанию третьей главы, при написании которой были использованы публикации [61, 62, 95-97], авторы отдавали предпочтение своим работам, в первую очередь [180-197], чтобы сохранить целостность и последовательность изложения.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность академику Национальной академии наук Украины, доктору технических наук, профессору А.Н. Гузю, который сформулировал основную идею книги, определил структуру и форму подачи материала.

Улучшению содержания рукописи в значительной мере способствовали замечания и советы рецензентов – академика Национальной академии наук Украины, доктора технических наук, профессора Л.М. Лобанова и академика Национальной академии наук Украины, доктора технических наук, профессора В.Т. Трошенко, большая часть которых была учтена при подготовке

окончательного варианта рукописи. Им авторы приносят свою искреннюю признательность.

ГЛАВА 1

СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

§ 1.1. Некоторые тенденции совершенствования висячих систем

Вначале отметим хорошо известный факт постоянного внедрения в практику строительства новых типов промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений, в которых традиционные конструктивные решения заменяются новыми, отвечающими современным направлениям в проектировании. Причем одним из таких современных направлений, переросшим в последние десятилетия как у нас в стране, так и за рубежом в уже непреложную закономерность, является увеличение (в ряде случаев довольно значительное) пролетов зданий и сооружений. Именно поэтому особый интерес проявляется к висячим системам, получившим распространение в различных отраслях народного хозяйства. Это покрытия промышленных зданий и сооружений – заводов по сборке самолетов и ангаров для их содержания и обслуживания, универсальных цехов по выпуску крупногабаритной продукции, судостроительных эллингов, складов, гаражей и др.; спортивных сооружений – стадионов, крытых арен и плавательных бассейнов; цирков, киноконцертных залов, вокзалов и рынков, различного рода павильонов и др., а также многообразные инженерные сооружения – мосты, трубопроводные переходы, канатные дороги, кабель-краны, линии связи и электропередачи и др.

Также хорошо известно, что по сравнению с традиционными конструкциями висячие системы имеют ряд преимуществ, заключающихся в рациональном использовании прочностных свойств материала, относительной простоте изготовления, индустриальности монтажа, небольшой трудоемкости и стоимости строительства, возможности создания легких и выразительных с эстетической точки зрения архитектурных форм. Кроме того, такие системы малочувствительны к разного рода специфическим воздействиям, в том числе к сейсмическим нагрузкам, осадкам и неравномерному смещению опор и т. п.

Основным несущим элементом большинства висячих систем является трос, расчетной моделью которого служит гибкая нить. Нити являются идеальными несущими конструкциями, обладающими всеми ранее перечисленными преимуществами висячих систем, что позволяет значительно снизить материалоемкость сооружений, особенно при средних и больших пролетах. Однако при всех очевидных и неоспоримых преимуществах, нитям присущ и весьма существенный недостаток – повышенная деформативность при действии несимметричных и особенно сосредоточенных нагрузок. Именно поэтому указанное обстоятельство потребовало разработки специальных конструктивных решений, снижающих величину прогибов и обеспечивающих стабильность формы нитей под нагрузкой. Поиск этих решений применительно к висячим системам велся в основном в двух направлениях, а именно: увеличение жесткости и совершенствование конструкции пролетной части.

Следует сказать, что направление по увеличению жесткости привело к созданию предварительно напряженных висячих систем и применению нитей конечной жесткости, т. е. нитей, у которых под действием произвольной поперечной нагрузки возникают напряжения растяжения и изгиба [62, 91, 103].

Что же касается совершенствования конструкций висячих систем, то в результате целого ряда работ этого направления появились двухпоясные системы [65, 67], системы Жискаляра [116], С.А. Цаплина [176, 177], в виде жесткой решетчатой цепи или арки [63, 67, 141], радиально-вантовые [64] и др.

Обратим далее внимание на такой интересный факт, что впервые висячие системы получили применение при строительстве мостов. Причем первые висячие мосты строились по схеме «цепь – балка», а увеличение их жесткости происходило в основном за счет усиления балки и обеспечения ее неразрезности в многопролетных мостах [116]. В дальнейшем для увеличения жесткости и надежности пролетного строения начали использовать нисходящие ванты. Примером такой конструкции может служить построенный в 1867 году через реку Огайо в г. Цинциннати трехпролетный железнодорожный висячий мост пролетом 322 м и общей длиной 687 м (рис. 1.1, *а*) [67, 176]. Мосты подобной конструкции были также построены во Франции через реки Сону в г. Лионе пролетом 110 м и Сену около г. Гавра пролетом 160 м [67]. В этих мостах крайние панели пролета у пилонов не имели вертикальных подвесок, в связи с чем нагрузка от них передавалась с помощью наклонных вант непосредственно на пилоны (рис. 1.1, *б*).

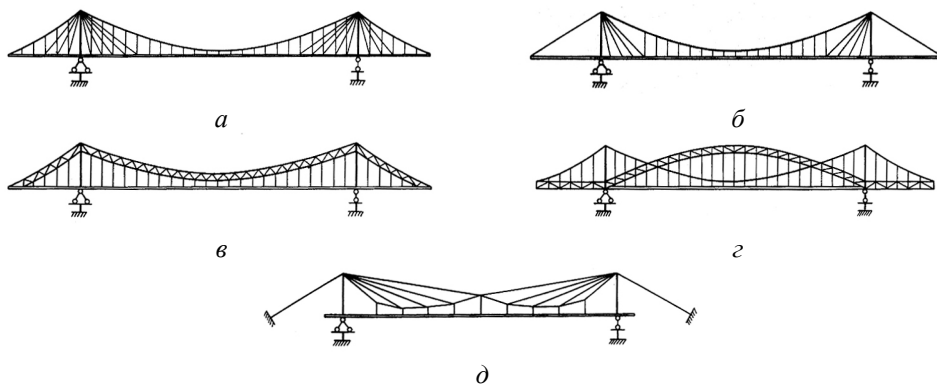


Рис. 1.1. Висячие мосты через реки:

а – Огайо; *б* – Сону и Сену; *в* – Аллегейни; *г* – Рейн; *д* – Нарын

Совершенно иной подход к увеличению жесткости висячих мостов заключается в применении в качестве растянутых несущих элементов моста жестких ферм. Именно такое решение было использовано при строительстве в 1884 году моста через реку Аллегейни в г. Питтсбурге, когда были соединены раскосной решеткой параллельные цепи, расположенные в одной вертикальной плоскости (рис. 1.1, *в*). Наряду с этим способом для увеличения

жесткости висячих мостов используют арки в качестве элемента жесткости, что получило применение в ряде случаев и, в частности, в проекте моста через реку Рейн пролетом 203 м (рис. 1.1, *з*) [116, 176]. Однако, несмотря на преимущества подобных систем в части большей жесткости по сравнению с цепной и кабельной схемами, они не получили широкого распространения вследствие значительного веса, сложности изготовления и монтажа, а также громоздкости расположенных на большой высоте элементов конструкции.

Достаточно интересным решением в практике строительства висячих мостов является система, состоящая из прямолинейных вант и не имеющая параболически очерченной цепи, т. е. так называемая система Жискляра [116, 176]. Примером подобной конструкции может служить висячий мост, построенный через реку Нарын в 1935 году (рис. 1.1, *д*) [63].

Увеличить жесткость пролетного строения висячего моста можно также путем включения обратного троса, создающего предварительное напряжение конструкции. В качестве примера подобного решения приведем возведенный во Франции мост пролетом 198 м, обратные тросы которого имели стрелу провисания $1/25$ пролета и кроме того были наклонены внутрь проезжей части (рис. 1.2, *а*). При этом, как отмечается в [67], прогибы в середине моста уменьшились приблизительно в 5 раз, а прогибы в четвертях пролета – незначительно. Заметим, что данная конструкция по характеру своей работы полностью соответствует применяемым в настоящее время в строительстве двухпоясным системам.

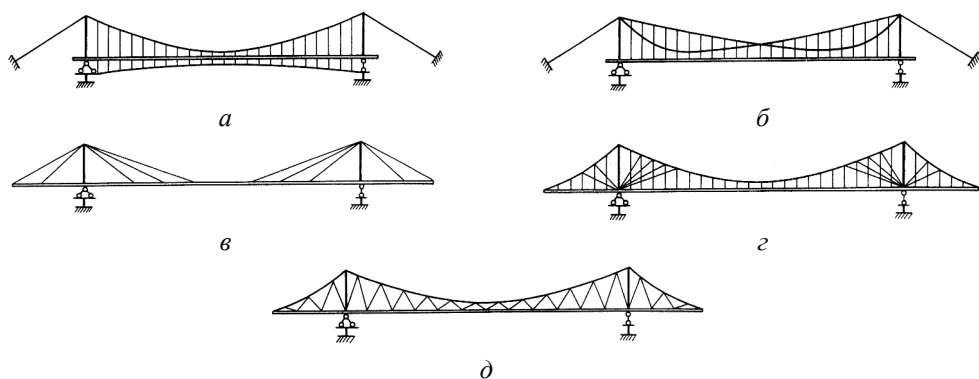


Рис. 1.2. Схемы висячих мостов:

а – через р. Луару; *б* – через водохранилище около г. Кривого Рога;
в – через р. Днепр; *г* – через Мессинский пролив; *д* – через р. Северн

Широкое распространение как у нас в стране, так и за рубежом получили висячие системы С.А. Цаплина, а также радиально-вантовые системы [64, 176, 177]. Примерами данных конструктивных решений могут служить построенные в 1960 году висячий мост пролетом 130 м через водохранилище около г. Кривого Рога (рис. 1.2, *б*) и трехпролетный мост с центральным про-

летом 144 м и общей длиной 276 м через реку Днепр в г. Киеве (рис. 1.2, в).

Известно, что повысить жесткость висячей системы, наряду с приведенными раньше способами, можно путем включения в схему восходящих вант. Самым ярким представителем среди мостов, где было использовано подобное предложение, является запроектированный висячий мост через Мессинский пролив (рис. 1.2, з), главный пролет которого имеет длину 1524 м [62, 149].

Следует также обратить внимание на применение висячих систем с перекрестной вантовой решеткой и с наклонными вантами. Примером такого решения может служить построенный в 1967 году трехпролетный мост с центральным пролетом 988 м и общей длиной 1598 м (рис. 1.2, д) через реку Северн вблизи г. Глостера [149].

Дальше обратим внимание на то, что, начиная примерно с середины 1960-х годов, ускоряется развитие технологии заводского изготовления сварных пролетных строений на высокомеханизированных поточных линиях и отрабатываются прогрессивные конструктивные методы, приемы и способы монтажа, а именно: навесная сборка; предварительное напряжение конструкций, в том числе методом упругого деформирования, обеспечивающего возможность регулирования напряженно-деформированного состояния несущих элементов; концентрация материала в особо напряженных зонах; натяжение отдельных элементов и поверхностей; совмещение несущими элементами нескольких функций; обеспечение аэродинамической надежности; оптимизация различных схем мостов. Причем результаты этих работ способствуют не только созданию новых конструктивных форм и схем пролетных строений, но и расширению возможностей применения большепролетных мостов.

В последние десятилетия во многих странах построено большое количество (десятки и сотни) висячих мостов с большими и сверхбольшими пролетами, в которых были использованы многие достижения в области мостостроения. Наиболее характерные и значимые из этих мостов, длина главного пролета которых превышает один километр, приведены в табл. 1.1, а шесть самых выдающихся из них также изображены на рис. 1.3-1.8.

Таблица 1.1

Название и краткие сведения	Страна	Длина главного пролета, м	Общая длина, м	Год открытия
Мост Акаси-Кайкё через пролив Акаси; соединяет г. Кобе на острове Хонсю с г. Авадзи на острове Авадзи	Япония	1991	3911	1998
Мост Сихоумэнь через залив Ханчжоувань архипелага Чжоушань; соединяет острова Цзиньтан и Цэцзы	КНР	1650	5452	2009
Мост Большой Бельт через пролив Большой Бельт; соединяет острова Фюн и Зеландия (самый длинный в Европе)	Дания	1624	6790	1998

Мост Жуньян через реку Янцзы между городами Янчжоу и Чжэньцзян	КНР	1490	7210	2005

Продолжение табл. 1.1

Название и краткие сведения	Страна	Длина главного пролета, м	Общая длина, м	Год открытия
Мост Хамбер через Хамберский эстуарий рек Трент и Уз; соединяет Восточный Йоркшир и Северный Линкольншир (самый длинный с 1981 г. по 1998 г.)	Великобритания	1410	2220	1981
Мост Цзяньинь через реку Янцзы между городами Шанхай и Нанкин	КНР	1385	3071	1999
Мост Цинма через пролив Мавань между островами Цин И и Мавань	Гонконг	1377	2160	1997
Мост Верразано-Нэрроуз через реку Гудзон в г. Нью-Йорк (самый длинный с 1964 г. по 1981 г.)	США	1298	4176	1964
Мост Золотые Ворота через пролив Золотые Ворота в г. Сан-Франциско (самый длинный с 1937 г. по 1964 г.)	США	1280	2737	1937
Мост Янлю через реку Янцзы в г. Ухань	КНР	1280	2725	2007
Мост Хёгакустенброн через реку Онгерманельден между городами Хернёсанд и Крамфорс	Швеция	1210	1867	1997
Мост Айчжай через каньон реки Дэхан в г. Цзишоу на автомагистрали между городами Чанша и Чунцин	КНР	1176	1314	2012
Мост Макинак через пролив Макино между Великими озерами Гурон и Мичиган	США	1158	2626	1958
Мост Хуанпу через реку Чжуцзян в г. Гуанчжоу	КНР	1108	7016	2008
Мост Минами Бисан-Сето через Внутреннее Японское море; соединяет острова Хонсю и Сикоку	Япония	1100	1723	1988
Мост султана Мехмеда Фатиха – второй мост через Босфорский пролив в г. Стамбул	Турция	1090	1510	1988
Мост Балинхэ через горный каньон в провинции Гуйчжоу	КНР	1088	2237	2009
Босфорский мост – первый мост через Босфорский пролив в г. Стамбул	Турция	1074	1560	1973
Мост Джорджа Вашингтона через реку Гудзон в г. Нью-Йорк (самый длинный с 1931 г. по 1937 г.)	США	1067	1451	1931

Мост Курусима-3 через Внутреннее Японское море; соединяет острова Оси-ма с Сикоку	Япония	1030	1570	1999

Окончание табл. 1.1

Название и краткие сведения	Страна	Длина главного пролета, м	Общая длина, м	Год открытия
Мост Курусима-2 через Внутреннее Японское море; соединяет острова Оси-ма с Сикоку	Япония	1020	1515	1999
Мост имени 25 апреля через реку Тежу в г. Лиссабон	Порту-галия	1013	2277	1966
Фортский мост через фьорд Фёрт-оф-Форт в Шотландии между городами Эдинбург и Абердин	Велико-британия	1006	2512	1964



a



б

Рис. 1.3. Общие виды висячего моста Акаси-Кайкё через пролив Акаси:
а – вид сверху; *б* – вид снизу



Рис. 1.4. Общий вид висячего моста Сихоумэнь через залив Ханчжоувань



Рис. 1.5. Общий вид висячего моста Большой Бельт через пролив Большой Бельт



Рис. 1.6. Общий вид висячего моста Жуньян через реку Янцзы



Рис. 1.7. Общий вид висячего моста Хамбер через Хамберский эстуарий рек Трент и Уз



Рис. 1.8. Общий вид висячего моста Цзяньинь через реку Янцзы

Итак, изучив историю строительства висячих мостов, можно сделать вывод о том, что, начиная со второй половины XX века, их пролеты имеют размеры, намного превышающие километр, а сама конструкция отличается совершенством и изяществом [63, 65, 149].

В последнее время все чаще стали строиться висячие трубопроводные переходы больших пролетов. По характеру статической работы их можно разделить на три группы. К первой группе относятся переходы, в которых трубопровод работает как балка на упруго-податливых опорах с пролетами, равными расстоянию между подвесками несущего каната или точками крепления радиальных вант (рис. 1.9, *а, б, в*). Причем в переходах этой группы, как и в висячих мостах, всю нагрузку воспринимают провисающие канаты или радиальные ванты. Примерами переходов первой группы являются:

- переход газопровода диаметром 520 мм и пролетом 130 м. Трубопровод поддерживается двумя канатами диаметром 59 мм каждый. Боковая жесткость пролетного строения обеспечивается горизонтальными оттяжками из канатов диаметром 30 мм. Труба крепится к несущим канатам с помощью подвесок, расположенных с шагом 6,5 м [118, 160];

- переход газопровода через реку Дунай пролетом 320 м. Отличительной особенностью его являются V-образные пилоны, превращающие пролетное строение в пространственную конструкцию, не требующую каких-либо дополнительных устройств для восприятия ветровых нагрузок [64].

Ко второй группе относятся переходы, в которых трубопровод является единственным несущим элементом, воспринимающим всю нагрузку (рис. 1.9, *г*). Одним из первых из этой группы переходов был построен двухниточный переход газопровода через реку Ухту. Пролет перехода составляет 400 м, диаметр труб – 114 мм, а стрела провисания равна 18 м [118]. В 1963 году через реку Ию был построен однониточный переход нефтепровода диаметром 720 мм с пролетами 340 и 88,4 м. Так как один ее берег был значительно выше второго, то потребовалась установка всего лишь одного пилона [64]. Несколько позже был построен двухниточный переход газопровода через реку Кубань пролетом 350 м и диаметром труб 273 мм. Причем трубы этого

перехода расположены на расстоянии 1,2 м одна от другой и соединены через 40 м распорками. Стрела провисания трубопровода равна 10,5 м [118, 160].

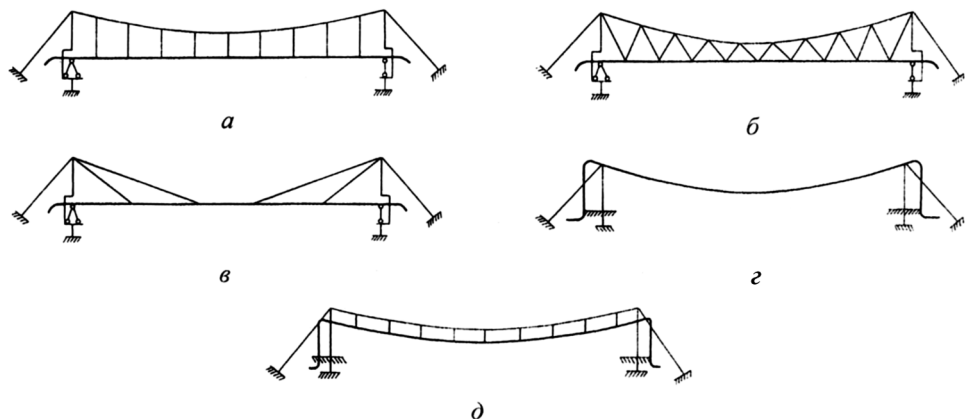


Рис. 1.9. Схемы висячих трубопроводных переходов:
 а – с одноцепными фермами; б – с решетчатыми фермами;
 в – с радиально-вантовыми фермами; г – в виде провисающей нити;
 д – в виде провисающей нити с поддерживающими канатами

К третьей группе относятся переходы, являющиеся модификацией двух первых типов переходов: одноцепных из первой группы и в виде провисающей нити из второй группы (рис. 1.9, д). Типичным представителем переходов этой группы может служить запроектированный двухниточный переход газопровода через реку Сырдарью пролетом 800 м и диаметром труб 426 мм. Стрела провисания трубопровода равна 57,4 м [203].

Отметим, что из перечисленных систем висячих переходов наиболее экономичными являются переходы в виде провисающей нити [32, 64]. Однако они не получили массового применения, поскольку в таких переходах при определенных соотношениях геометрических и физических параметров труб могут возникать высокие напряжения от растяжения и изгиба [64, 199].

Сообразно с этим более рациональными есть переходы, относящиеся к третьей группе – в виде провисающей нити с поддерживающими канатами. Конструкция переходов такой системы свободна от недостатков как первой группы переходов (позволяет использовать несущую способность трубопровода на растяжение и изгиб), так и второй (имеет повышенную надежность и позволяет производить замену звеньев труб в пролете).

При всем при этом, а также несмотря на большой опыт, накопленный при проектировании и строительстве висячих мостов и трубопроводных переходов, нить как элемент покрытия применяется сравнительно недавно [66, 90, 103, 206]. Первые вантовые покрытия были сооружены в 1896 году на Всероссийской выставке в г. Нижнем Новгороде выдающимся российским инженером В.Г. Шуховым (рис. 1.10) [41, 91, 103]. Висячие же покрытия широко применяются только с 1953 года, когда в г. Рэлей в США было построе-

но покрытие спортивного зала (рис. 1.11). Конструкция покрытия размером в плане 92×97 м образована седловидной ортогональной вантовой сетью отрицательной гауссовой кривизны. Сеть подвешена к опорному контуру, выполненному из двух пересекающихся параболических железобетонных арок, наклоненных под углом 22° к горизонту и опирающихся по периметру на стальные колонны. Вантовая сеть выполнена из несущих и стабилизирующих канатов, имеющих диаметр соответственно 19–32 и 12–19 мм. Причем предварительное натяжение стабилизирующих канатов повышает жесткость всей конструкции покрытия и одновременно снижает его деформативность под действием различного рода временных нагрузок [41, 84, 103, 113].



Рис. 1.10. Павильон с висячим покрытием
в г. Нижнем Новгороде



Рис. 1.11. Рэлей-арена

Примером использования висячих конструкций для промышленного строительства может служить покрытие пролетом 163 м бумажной фабрики в г. Мантуя, где основные конструкции выполнены в виде висячего моста с вертикальными подвесками и балками жесткости высотой 1,5 м, на которые уложены поперечные балки (рис. 1.12) [66, 84]. В этом плане представляет также интерес построенный в 1971 году в г. Лос-Анджелесе ангар для самолетов [65, 166]. Конструкция принята консольного типа с несущими элементами – вантами, омоноличенным металлическим настилом (рис. 1.13). Вылет консолей ангара 69 м, длина здания составляет 135 м, а ширина – 168 м.

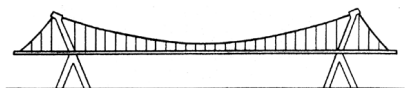


Рис. 1.12. Схема висячего покрытия
бумажной фабрики в г. Мантуя

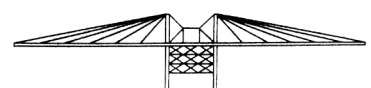


Рис. 1.13. Схема висячего покрытия
ангара для самолетов в г. Лос-Анджелесе

Весьма интересными и перспективными являются здания с шатровым покрытием. В последние годы были построены два достаточно крупных сооружения с таким покрытием – закрытая стоянка диаметром 160 м на 400 автобусов в г. Киеве и резервуар для хранения воды диаметром 167 м в г. Дурбан, ЮАР. Схема этих сооружений представлена на рис. 1.14.



Рис. 1.14. Схема висячего покрытия закрытой стоянки в г. Киеве и резервуара для хранения воды в г. Дурбан

Основной несущей конструкцией покрытия закрытой стоянки служит система в виде 84 радиальных вант из стальных канатов диаметром 65 мм. Распор вант воспринимается сжатым наружным и растянутым внутренним опорными контурами. Внутренний опорный контур диаметром 8 м выполнен из двух металлических колец прямоугольного поперечного сечения, связанных по высоте ребрами жесткости. Верхнее кольцо опирается на внутреннюю опору, выполненную в виде цилиндрической оболочки диаметром 8 м и высотой 18 м. Помимо основного назначения – передачи нагрузки от покрытия на фундамент, опора также является вентиляционной шахтой. Наружный сборно-монолитный железобетонный опорный контур прямоугольного поперечного сечения опирается на 84 железобетонные колонны таврового сечения высотой 8 м каждая. На ванты уложены сборные ребристые железобетонные плиты, швы между которыми замоноличены расширяющимся бетоном, что позволило обжать плиты [65, 103, 198].

Основная несущая конструкция резервуара состоит из 120 радиальных вант, изготовленных из 41 проволоки диаметром 7 мм каждая. Верхний железобетонный опорный контур прямоугольного поперечного сечения предварительно напряжен 16 канатами. Нижний железобетонный опорный контур двутаврового сечения опирается на контрфорсы, расположенные через каждые 33°. Внутренняя опора выполнена в виде полый цилиндрической оболочки диаметром 12 м и высотой 50 м. По вантам уложены сборные железобетонные ребристые плиты трапецевидной формы. При этом с целью предварительного напряжения покрытия, как и в предшествующем примере, швы между плитами были замоноличены расширяющимся бетоном.

Характерным подходом к повышению жесткости системы покрытия может также служить применение двухпоясных висячих систем, у которых предварительное напряжение поясов осуществляется путем раздвижки распорок по длине вантовой фермы или барабана в центре покрытия, либо стягиванием подвесок (рис. 1.15, *a – д*). В данном случае предварительное натяжение не только повышает жесткость системы, но и дает возможность гибким элементам воспринимать сжатие [41, 65, 66, 91, 114].

Повысить жесткость висячей системы можно также путем увеличения собственного веса покрытия (рис. 1.15, *e*). При этом вес покрытия должен быть таким, чтобы любая временная несимметричная нагрузка, во-первых, не вызывала значительных перемещений и, во-вторых, быть больше величины

нагрузки, вызываемой отрицательным давлением ветра [84, 113, 152].

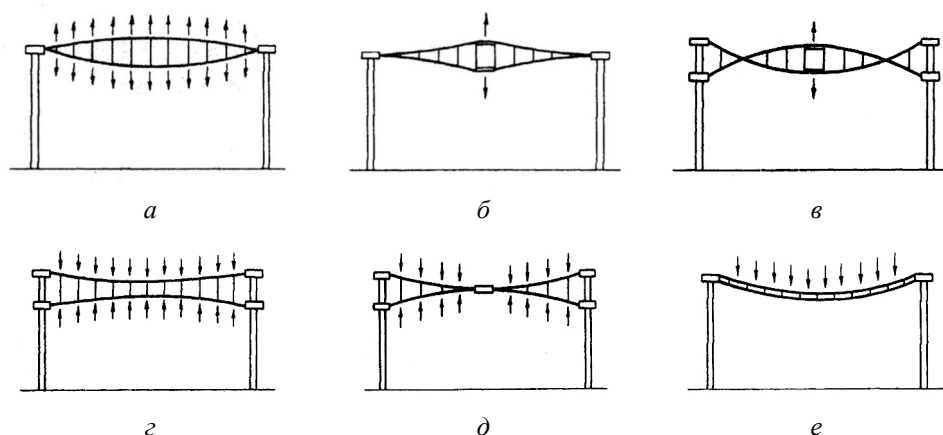


Рис. 1.15. Способы предварительного напряжения висячих покрытий:

а – раздвижкой распорок; *б, в* – раздвижкой центрального барабана;

г, д – стягиванием подвесок; *е* – увеличением собственного веса

Весьма широкое распространение получили висячие конструкции при сооружении спортивных арен. Так, например, хорошо известно покрытие Олимпийского плавательного бассейна в г. Токио (рис. 1.16, *а*), построенного по проекту архитектора К. Танге в 1964 году [83]. Овальной формы сооружение имеет в плане размеры 126×120 м. А само покрытие состоит из подвешенных к пилонам двух главных вант, распор от которых через оттяжки передается на специальные фундаменты, а также несущих вант, опирающихся одним концом на главные ванты, а другим – на опорное кольцо (рис. 1.16, *б*). Несущие ванты выполнены из стальных двутавров, а стабилизирующие – из тросов. Кровлей служат стальные листы, уложенные по прогонам.

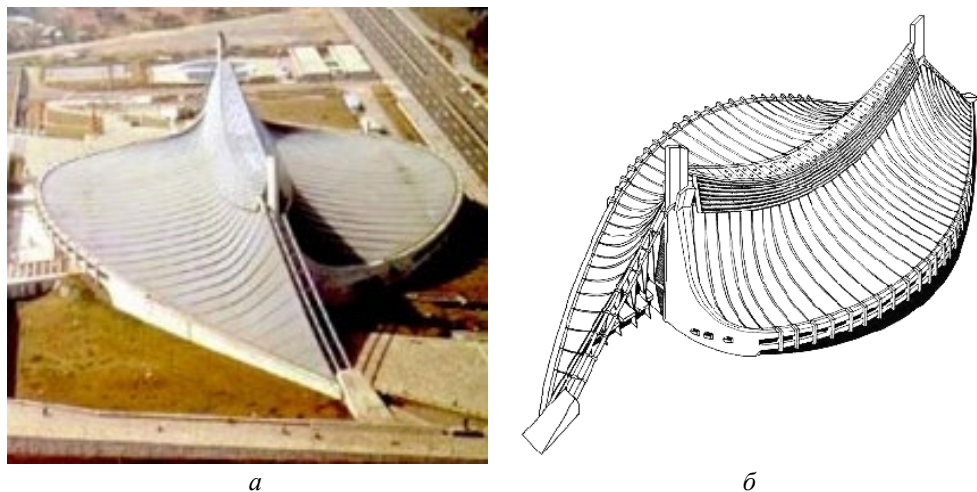


Рис. 1.16. Олимпийский плавательный бассейн в г. Токио:
а – общий вид; *б* – принципиальная конструктивная схема

Ярким примером, демонстрирующим возможности висячих систем, является «Купол тысячелетия» (рис. 1.17), возведенный в 2000 году в г. Гринвиче (Великобритания). Диаметр купола равен 320 м, а высота в центре – 48 м. Купол накрывает площадь 80000 м². Оболочка купола опирается на вантовую сеть, которая удерживается радиальными вантами, закрепленными на 12 решетчатых мачтах. Высота каждой из мачт составляет 100 м, а общая длина вантовых элементов – около 70 км.



Рис. 1.17. «Купол тысячелетия» в г. Гринвиче

Все чаще в строительстве, в частности при возведении спортивных сооружений, применяются мембранные висячие покрытия. В качестве примера рассмотрим двускатное висячее покрытие Олимпийского велотрека в г. Москве (рис. 1.18). Конструкцию покрытия образуют два «крыла» – мембраны. Каждое «крыло» представляет собой седловидную мембрану на опорном контуре из двух стальных арок, расположенных под разным углом к горизон-

ту. Оба опорных контура «крыльев» пролетом 168 м объединены друг с другом раскосной конструкцией. Внутри каждого опорного контура «крыла» выполнена седловидная постель из взаимно перпендикулярных направляющих – стальных полос и швеллеров, с устройством по ней мембранного покрытия.



Рис. 1.18. Олимпийский велотрек в г. Москве

В последнее время наряду с известными решениями для уменьшения деформативности покрытий зданий и сооружений все чаще стали применять висячие системы, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости [62, 67, 90, 103, 167, 198]. Примером такого конструктивного решения может служить покрытие Дворца спорта в г. Вильнюсе, пролет которого равен 70 м. Висячие фермы высотой 2,2 м имеют трубчатое сечение и располагаются с шагом 3 м. Нижний пояс усилен тросом диаметром 63 мм, который благодаря предварительному натяжению сжимает ферму. По фермам уложены утепленные армоцементные плиты. Второй пример – покрытие плавательного бассейна в г. Москве для Олимпийских игр (рис. 1.19). Здесь висячие фермы конечной жесткости имеют пролет 104 м и высоту 2,5 м. Сечение верхнего пояса состоит из швеллера № 40, уложенного плашмя, а нижнего пояса – из швеллера № 20, работающего в вертикальной плоскости. Решетка фермы состоит из уголков. Шаг ферм – 4,5 м. По ним, непосредственно по криволинейному верхнему поясу, уложен оцинкованный профилированный настил [65, 103]. Несмотря на большой пролет здания, распор в висячей ферме при полной снеговой нагрузке не превышает 1200 кН. Этого удалось достичь благодаря достаточно большой стреле провисания фермы, достигающей 18 м. Данное решение позволило облегчить не только сами висячие фермы, но и опорный контур, состоящий из железобетонных арок [103, 167].

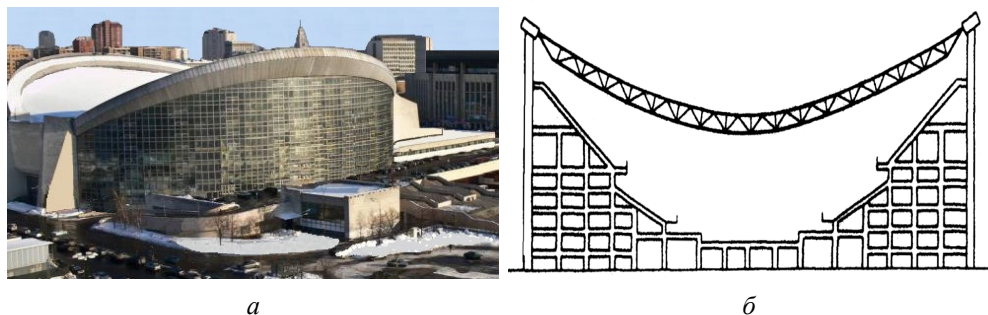


Рис. 1.19. Олимпийский плавательный бассейн в г. Москве:
а – общий вид; *б* – принципиальное поперечное сечение

Интересными примерами зданий с покрытиями в виде висячих систем повышенной жесткости являются Олимпийский гимнастический зал диаметром 67 м и здание общественных собраний на эллиптическом плане с размерами 110,7×82,9 м в г. Токио, павильон аттракционов размером 240×67 м в г. Сент-Хелнер на острове Джерси (Великобритания), а также возведенный в 2006 году в г. Москве Ледовый дворец спорта (рис. 1.20), провисающее покрытие которого имеет диаметр 100 м и состоит из наружного опорного контура, внутреннего кольца и радиальной системы нитей конечной жесткости.

В последние годы находят также применение в качестве покрытий зданий и сооружений тонколистовые пологие мембранные оболочки. В частности можно указать на покрытие Большой арены в г. Санкт-Петербурге, представляющее собой цельную стальную мембрану диаметром 160 м и толщиной 6 мм, подкрепленную радиально направленными ребрами из балок. Интенсивно исследуются, проектируются и строятся мембранные покрытия не только на круглом, но и на прямоугольном плане. Следует заметить, что примерами разработок такого типа мембранных оболочек являются покрытия над реконструируемыми главными корпусами московских заводов «Компрессор», «АЗЛК» и «Фрезер» [90, 92].

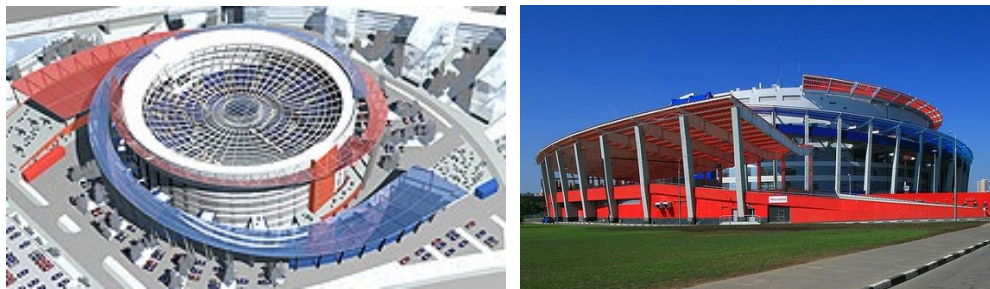


Рис. 1.20. Ледовый дворец спорта в г. Москве

Необходимо также отметить интересное направление в исследовании новых конструктивных решений для сооружений различного назначения с использованием составных элементов висячих систем – вант и стержней, представляющее собой разработку трансформирующихся металлических покрытий, в том числе вантово-стержневых оболочек. Как показано в работах [28, 154], применение указанных конструкций позволяет существенно сократить трудозатраты при монтаже и перенести в заводские условия не только изготовление, но и сборку каркаса здания.

Перечисленные тенденции относительно совершенствования конструктивных решений и увеличения жесткости висячих систем значительно повышают их эксплуатационные свойства и по этому признаку ставят висячие системы в один ряд с другими современными типами конструкций. Принимая во внимание другие указанные выше достоинства висячих систем, учитывая постоянное увеличение прочностных характеристик выпускаемой стали [9, 103, 198], а также то, что прочность стали растет быстрее ее стоимости [4, 99], можно утверждать, что висячие системы в недалеком будущем получат массовое применение в практике строительства [66, 90, 99, 168, 198], что значительно расширит возможности возведения экономичных, эффективных и изящных большепролетных промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений.

§ 1.2. Обзор теоретических и экспериментальных исследований

Точкой отсчета истории расчета гибкой нити обычно принято считать 30-е годы XIX века, когда французский инженер Навье впервые опубликовал полученное им решение уравнения кривой нерастяжимой нити, находящейся под действием вертикальной нагрузки. В дальнейшем ученые многих стран посвящали свои работы различным вопросам, связанным с расчетом гибких нитей. Причем вначале теория гибкой нити развивалась как составная часть теории расчета висячих мостов. При этом значительный научный вклад в эту теорию был внесен Г.П. Передерием, Н.С. Стрелецким, С.А. Цаплиным, С.А. Ильясевичем и другими учеными.

Г.П. Передерием [116] и Н.С. Стрелецким [158] были разработаны основы современного мостостроения. Кроме того, Г.П. Передерий собрал и систематизировал весь материал по расчету висячих систем, до этого разбросанный и разбросанный по отдельным изданиям и характеризующийся решением тех или иных частных задач при отдельных видах нагружения.

Первый шаг в направлении обобщения решения гибкой нерастяжимой нити был сделан С.А. Цаплиным [176, 177], который предложил использовать для ее расчета принцип Лагранжа. Однако, применяя этот принцип к конечным перемещениям, ему удалось получить только приближенные решения задачи для пологих нитей при непрерывной функции нагрузки. Также здесь следует сказать, что поскольку нить является нелинейной системой, то указанное использование принципа возможных перемещений нельзя признать вполне строгим.

С.А. Ильясевич [55] впервые предложил учитывать переменность распора при расчете колебаний мостов. Кстати говоря, вклад зарубежных исследователей в решение этой проблемы подробно описан в уже упоминавшейся работе Г.П. Передерия [116], а также в монографии В.А. Смирнова [149].

Несколько позже появились работы Р.Н. Мацелинского [95–97] и В.К. Качурина [61–63]. Причем Р.Н. Мацелинский дал более точное аналитическое решение для гибкой нерастяжимой нити при действии произвольной вертикальной нагрузки, чем полученное С.А. Цаплиным, применив к расчету нити принцип Лагранжа в строгой интерпретации, т. е. к перемещениям бесконечно малым, а не конечным. Им показан путь учета упругих деформаций, разработан уточненный метод расчета гибких упругих нитей и дана оценка принятых допущений на точность расчета. Конечное уравнение, описывающее напряженно-деформированное состояние нити, им было представлено в виде

$$H^3 + \frac{8\omega}{3n^2m^3}H^2 = \frac{D\omega}{2lm^3}, \quad (1.1)$$

где $\omega = EF$ – жесткость нити на растяжение; H – распор; l – пролет; $n = l/f$ и $m = L/l$ – коэффициенты; L – длина нити; f – начальная стрела провисания; D – характеристика нагрузки, вычисляемая по формуле

$$D = \int_0^l qM^6 dx = \int_0^l (Q^6)^2 dx, \quad (1.2)$$

причем здесь под M^6 и Q^6 понимается соответственно изгибающий момент и поперечная сила от заданной нагрузки q в условной прямолинейной балке, которая по всем остальным параметрам аналогична гибкой нити.

Другой метод расчета гибкой упругой нити изложен в монографиях В.К. Качурина [61–63]. Исходя из уравнений длин нити, находящейся под действием начальной и дополнительной нагрузок*, и используя для связи между ними условие неразрывности деформаций, автором было получено следующее уравнение для определения величины распора в нити:

$$H_1^3 + \left(\frac{EF}{2lH_0^2} \int_0^l Q_0^2 dx - H_0 \right) H_1^2 - \frac{EF}{2l} \int_0^l Q_1^2 dx = 0, \quad (1.3)$$

где H_0 и Q_0 – распор и перерезывающая сила в нити, находящейся под действием начальной нагрузки; H_1 и Q_1 – то же, при действии дополнительной нагрузки.

Отметим, что В.К. Качуриным в уже упомянутых ранее его работах [61–63] рассмотрено также влияние на напряженно-деформированное состояние нити смещения опор и изменения температуры и разработан метод расчета нити на нагрузку, действующую перпендикулярно плоскости первоначального провисания.

* Под начальной подразумевается нагрузка, при которой нить провисает с заданной стрелой; под дополнительной – любая другая нагрузка, прикладываемая к нити после приложения начальной нагрузки. Одним из примеров начальной нагрузки может служить собственный вес нити.

В известной статье А.Р. Ржаницына [132] приведены более точные по сравнению с полученными В.К. Качуриным формулы статического расчета гибкой нити.

Отдельным вопросам расчета гибкой упругой нити посвящены работы Л.Г. Дмитриева [40], А.Я. Дривинга [42], А.Ф. Лилеева и Е.Н. Селезневой [88], Г.В. Рекача [130], В.А. Светлицкого [140], Е.М. Сидоровича [144], В.А. Смирнова [149], А.Г. Соколова [153], В.С. Щедрова [206], Х.К. Банделя [208], Ф. Бауэра [209], И.И. Енсена [211], З. Сobotки [152], Ф. Отто и Ф.К. Шлейера [113, 114] и др. Анализ перечисленных работ свидетельствует, что теория расчета гибкой нити в настоящее время разработана достаточно полно.

Дальше обратим внимание на такой общеизвестный факт – гибкая нить является основным элементом большого класса плоских и пространственных висячих систем. В этом плане скажем, что вопросы расчета указанных систем на статические нагрузки нашли отражение в трудах А.И. Битюцкого [10], Л.Г. Дмитриева и А.В. Касилова [40, 41], В.К. Качурина [61-63], Э.И. Кузнецова [85], В.Р. Кульбаха [86], А.Ф. Лилеева и Е.Н. Селезневой [88], А.В. Перельмутера [117], И.М. Рабиновича [126], В.В. Трофимовича [169], В.Н. Шимановского [198], Ф.К. Шлейера [217] и др. Также отметим, что исследованию напряженно-деформированного состояния висячих систем при сейсмических и ветровых воздействиях посвящены работы [11, 12, 30-32, 41, 52, 70, 80, 83, 98, 110, 119, 124, 125, 128, 132, 133, 144, 149, 150, 160] и др.

Теперь перейдем непосредственно к истории развития теории расчета нитей конечной изгибной жесткости. Является общепризнанным, что основы теории этих нитей были заложены в трудах К.С. Завриева [46], разработавшего методику расчета стержней, подверженных совместному действию поперечной нагрузки и осевой силы. Значителен также вклад И.Г. Бубнова [17], рассмотревшего задачу продольно-поперечного изгиба стержней, у которых продольное усилие зависит от прогиба стержня. В свою очередь С.П. Тимошенко [161, 163] развил расчет растянуто-изогнутых стержней энергетическим методом, а также дал предложения по приближенному определению величины распора. Следует отметить также труды А.С. Вольмира [24], Н.В. Корноухова [82], Н.К. Снитко [151], а также целого ряда других авторов.

Дальнейшее развитие теории нитей с изгибной жесткостью получила в трудах В.К. Качурина, Н.М. Кирсанова, Н.С. Москалева, В.Н. Шимановского, Ю.В. Смирнова, Р.Б. Харченко, Г.А. Тартаковского и К.Н. Илленко.

В монографии В.К. Качурина [62] приведено решение для нити конечной жесткости, находящейся под действием произвольной вертикальной нагрузки. Причем в зависимости от способа монтажа висячей системы им получено два вида дифференциальных уравнений изгиба нити, а именно:

- для нити, работающей с изгибом от начальной и дополнительной ,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{q}{EI} = 0, \quad (1.4)$$

- для нити, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от до-

полнительной нагрузки,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{8Hf}{EI l^2} + \frac{q}{EI} = 0, \quad (1.5)$$

где EI – жесткость нити на изгиб.

Поскольку при решении уравнений (1.4) и (1.5) не удается получить распор в явном виде, то для его определения В.К. Качуриным предлагается использовать метод последовательных приближений, задаваясь вначале каким-либо значением распора. Однако указанное решение весьма трудоемко, потому что приходится выполнять по 3–5 и более попыток.

В работах Н.М. Кирсанова [67, 68] показана возможность применения для расчета нитей конечной жесткости хорошо разработанной методики расчета висячих мостов. Методика основана на использовании ступенчатой линеаризации исходных нелинейных уравнений, при выводе которых применяются специально построенные с учетом прогибов функции влияния. Выражения последних получены Н.М. Кирсановым для различных случаев расчета висячих систем повышенной жесткости, а для решения нелинейных уравнений предлагается использовать метод последовательных приближений.

Н.С. Москалевым [103] разработан и систематизирован расчет нитей конечной жесткости по методу предельных состояний, причем, расчет на прочность здесь отделен от расчета на деформативность. Принятое исходным для расчета на прочность состояние полного расчетного нагружения позволяет при таком подходе для заданной нагрузки получить непосредственно из условий равновесия предельную геометрию и расчетные усилия в нитях, а также определить действительный запас несущей способности висячей конструкции с учетом геометрической и физической нелинейностей. Деформационный расчет в свою очередь также разделен на расчет упругих и кинематических перемещений, что позволяет по отдельности определить эти два вида деформации. Для нахождения величины распора при действии произвольной вертикальной нагрузки автор использует метод последовательных приближений, принимая в первом приближении распор как для гибкой нити. В дальнейшем уточнение величины распора производится с одновременной корректировкой прогиба нити. Выведен также ряд универсальных расчетных зависимостей и произведен анализ влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние нити. Отметим, что полученные формулы можно эффективно использовать при назначении первоначальных параметров нити – жесткости на растяжение и изгиб, высоты сечения и других.

В.Н. Шимановский, Ю.В. Смирнов и Р.Б. Харченко [64, 198, 199, 202] разработали общую методику расчета нитей конечной жесткости при действии любой поперечной нагрузки произвольного направления и вывели универсальные формулы для определения прогибов и изгибающих моментов в сечениях нити. Предложенная авторами методика основана на использовании принятого для гибких упругих нитей [61–63] способа раскрытия статической неопределимости системы путем применения условия неразрывности дефор-

маций. Неизвестным в полученных уравнениях выступает безразмерный параметр $u = 0,5l(H/ED)^{1/2}$, учитывающий геометрические, статические и физико-механические характеристики нити. При этом нахождение параметра u производится из трансцендентного уравнения вида

$$\alpha_1\varphi_1(u) + \alpha_2\varphi_2(u) + \alpha_3\varphi_3(u) + \dots + \alpha_i\varphi_i(u) + \dots + \alpha_n\varphi_n(u) = 0, \quad (1.6)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ – коэффициенты, зависящие от физических и геометрических характеристик нити; $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u), \dots, \varphi_i(u), \dots, \varphi_n(u)$ – трансцендентные функции, аргументом которых является параметр u . Причем в предложенной методике авторами при расчете нити учитывается также влияние на ее напряженно-деформированное состояние различных воздействий: изменения температуры, смещения и неравномерной осадки опор.

Разработанная Г.А. Тартаковским [160], применительно к трубопроводным переходам, методика расчета нитей конечной жесткости основана на известных дифференциальных зависимостях для растянуто-изогнутых стержней. Однако при определении величины распора жесткость нити на изгиб не учитывается, а изгибающие моменты, действующие в поперечных сечениях нити, вычисляются независимо от распора как вторые производные от уравнения упругой линии нити. Отметим, что такой подход является не совсем строгим и дает приемлемые результаты для ограниченного круга задач.

Иной метод расчета был предложен К.Н. Илленко [53]. Автор условно расчленил нить конечной жесткости на два конструктивных компонента: абсолютно гибкую нить и изгибаемый элемент. При этом нагрузка распределяется между нитью и изгибаемым элементом исходя из условия равенства прогибов между ними по всей длине пролета. Напряжения в нити конечной жесткости определяются путем суммирования напряжений в гибкой нити и изгибаемом элементе. Полученные таким путем формулы представляют собой достаточно сложные трансцендентные выражения. Следует отметить, что указанная методика, как и методика Г.А. Тартаковского, дает удовлетворительные результаты лишь для ограниченного круга задач.

Отметим также, что некоторым вопросам развития теории расчета нитей конечной жесткости посвящены работы [51, 106, 146] и другие.

Перейдем теперь к характеристике состояния исследований работы нитей конечной жесткости за пределом упругости. Прежде всего заметим, что методы расчета в упругой стадии работы материала не позволяют выявить истинных запасов прочности конструкции. В большинстве случаев пластические деформации приводят к перераспределению и выравниванию напряжений, а, следовательно, и к повышению несущей способности сооружения. Причем указанное обстоятельство может дать особенно значительный эффект при расчете таких нелинейно деформируемых систем, как висячие.

Общеизвестно, что основы теории пластичности были заложены Сен-Венаном и М. Леви, которые создали один из вариантов теории и вывели основные уравнения плоской деформации, а также А. Хааром, Т. Карманом, Г. Генки, Л. Прандтлем и Р. Мизесом, которые получили важные результаты

по основным уравнениям теории пластичности и методам решения плоской задачи. Значительный вклад в развитие теории пластичности внесен Н.И. Безуховым [6], Дж.Н. Гудьером [35], А.А. Ильюшиным [54], Л.М. Качановым [59], В.В. Новожиловым [111], В.Т. Койтером [79], В. Прагером [123], Л.И. Седовым [141], В.В. Соколовским [155], Ф.Г. Ходжем [35] и др. Ими разработаны новые теории, выполнены их анализ и экспериментальная проверка, а также развиты приближенные методы расчета и решены отдельные задачи.

Следует сказать, что одной из первых работ, посвященных упруго-пластическому расчету пластинок, можно считать монографию И.Г. Бубнова [17], в которой изучалось их деформирование при шарнирном и жестком закреплении концов, и было показано, что появление пластических деформаций в пластинке не исчерпывает ее несущей способности. Кроме того, экспериментально установлено, что жесткое закрепление концов на опорах заметно сказывается на характере деформирования пластинки только в упругой стадии, а за пределом упругости благодаря появлению вблизи опорных сечений пластического шарнира – приближается к работе пластинки с шарнирным закреплением.

Первые работы по исследованию упруго-пластического изгиба балок также базировались на гипотезе пластического шарнира. Эту гипотезу широко использовали Л.М. Беленький [8], И.Л. Дикович [38], Н.Ф. Ершов [43-45], А.Р. Ржаницын [131], Я.Ф. Шаров [179], Б.Г. Нил [109], Ф.Г. Ходж [175], А.Г. Янг [222] и др., применяя два основных подхода к решению задачи. В первом из них полагается, что балка работает упруго вплоть до момента образования пластических шарниров. Текучесть же возникает лишь в местах их появления и не распространяется по длине балки. Предельная нагрузка определяется при этом из условия образования пластических шарниров в середине пролета и жестких опорных закреплениях. Второй подход заключается в рассмотрении изгиба жестко-пластических балок без учета образования упруго-пластических зон и упругих деформаций материала. Однако характерной особенностью обоих этих подходов является то, что они дают возможность определить только предельные нагрузки и прогибы балки в области больших пластических деформаций и не позволяют оценить перемещения, а также характер и величину пластических деформаций балки.

В работах Н.И. Безухова и О.В. Лукина [7], А.С. Борейко [15], Л.А. Галина [26], А.В. Геммерлинга [29], И.Л. Диковича [38], Н.Ф. Ершова [43-45], В.А. Постнова [120], В.Н. Серова [142], Н.Н. Складнева [147], В.В. Сорокина [156], В.Е. Спиро [157], А.И. Стрельбицкой [159], Г.В. Тютюнина [170] и др. для исследования напряженно-деформированного состояния балок за пределом упругости используются дифференциальные уравнения упруго-пластического равновесия при изгибе. В такой постановке задачи считается, что по длине балки одновременно существуют участки, находящиеся в различных фазах деформирования – упругой, упруго-пластической с односторонней текучестью и упруго-пластической с двусторонней текучестью. Для каждого из

этих участков записываются отдельные дифференциальные уравнения. Поскольку границы упруго-пластических зон, как по длине балки, так и в пределах поперечных сечений, изменяются в процессе нагружения, то их положение определяется из условий равенства внутренних и внешних усилий в сечениях с текучестью.

Следует заметить, что И.Л. Диковичем [38] указанная задача решена в замкнутом виде. Им получены соотношения между кривизной оси балки и изгибающим моментом для наиболее распространенных типов профилей, а также рассмотрено большое количество частных примеров. Причем расчетные зависимости получены для балок из идеального упруго- и жестко-пластического материала, а также для материала с линейным упрочнением.

В работе Н.Ф. Ершова [44] для упрощения интегрирования системы уравнений предлагается задавать функцию прогиба. Кроме того, исследование упруго-пластических балок проводилось также энергетическим методом, основанным на использовании обобщенной теоремы Кастильяно [43, 45].

В.Н. Серов [142] решает задачу вариационным методом Лагранжа-Ритца. Причем функция прогиба балки задается им в виде ряда Фурье. Нужно сказать, что такой подход приводит к очень громоздкой и сложной системе трансцендентных уравнений. Указывая на данный факт, сам автор предлагает ограничить количество членов ряда функции прогибов двумя.

Другой путь приближенного решения задачи избрал В.В. Сорокин [156]. Он использует для определения параметров напряженно-деформированного состояния упруго-пластической балки метод последовательных приближений, задаваясь в качестве исходного приближения упругим решением. Заметим, что такой способ также является достаточно трудоемким и, как отмечает сам автор, не всегда может быть достигнута быстрая сходимость вычислительного процесса, например, для балок с небольшой жесткостью на изгиб.

Различные численные методы для исследования работы балок за пределом упругости применялись в работах [15, 165, 205] и др. При этом в большинстве перечисленных работ на зависимость напряжение-деформация не накладываются какие-либо ограничения и интегралы, входящие в уравнения, могут быть также вычислены численно.

Что же касается характеристики исследований работы нитей (как гибких, так и конечной жесткости) за пределом упругости, то необходимо отметить следующее. К сожалению, этому вопросу посвящено сравнительно небольшое количество работ. К ним можно отнести работы И.Г. Людковского и А.Д. Федорова [93], Б.К. Немчинова [106], В.Н. Шимановского и А.А. Соколова [202] и некоторых других авторов.

Так, например, Б.К. Немчинов при расчете нитей конечной жесткости за пределом упругости использует диаграмму напряжение-деформация жестко-пластического материала. Однако, как об этом уже было сказано раньше, такой подход дает хорошие результаты только в том случае, если возможно пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими.

В свою очередь, И.Г. Людковский и А.Д. Федоров путем эксперимен-

тальных исследований установили, что разрушение висячих конструкций чаще всего происходит вследствие образования больших пластических деформаций вблизи опорных закреплений в случае их жесткого опирания. Аналогичное явление в висячих конструкциях, как показано в работе [85], может также происходить в местах приложения сосредоточенных нагрузок.

Иначе подошли к решению рассматриваемой задачи В.Н. Шимановский и А.А. Соколов. Этими авторами был разработан численный метод расчета упруго-пластических нитей конечной жесткости, основанный на решении нелинейной системы уравнений с привлечением метода итераций. Причем вследствие использования дискретной математической модели нити им удалось отказаться не только от необходимости определения границ зон текучести по ее длине, но и от приведенных жесткостных характеристик поперечного сечения. Кроме того, авторами были выполнены обширные исследования нитей и показано влияние различных параметров на их напряженно-деформированное состояние.

Обратим далее внимание на такой хорошо известный факт, что для определения истинного характера деформирования конструкции за пределом упругости необходимо знать кроме величины действующей нагрузки еще и закон ее изменения, т. е. учитывать историю нагружения. Обычно вследствие разных законов нагружения и разгрузки конструкция после снятия внешних сил не возвращается в исходное состояние и в ней появляются остаточные деформации. Этому вопросу применительно к работе балок и нитей конечной жесткости посвящено небольшое количество работ [38, 44, 45, 129, 202].

В книге И.Л. Диковича [38] задача решена путем составления дифференциального уравнения изгиба, откорректированного для случая разгрузки. Установлены также зависимости между изгибающим моментом и кривизной при разгрузке упруго-пластических балок. Причем при выводе расчетных зависимостей полагалось, что в балке не возникают вторичные пластические деформации. Полученные соотношения были применены автором для определения остаточных прогибов упруго-пластической балки идеального профиля при действии равномерно распределенной нагрузки.

Заметим, к слову, что аналогичная постановка решения указанной задачи была применена Н.Ф. Ершовым [44, 45], однако только для балки прямоугольного поперечного сечения. Отметим также, что в работе Ю.А. Раковщика [129] определение остаточных прогибов при разгрузке сводится к численному решению системы линейных уравнений, а у В.Н. Шимановского и А.А. Соколова [202] – к решению системы нелинейных уравнений. И именно вследствие использования упомянутого подхода круг задач, решение которых может быть получено сравнительно с небольшими затратами машинного времени, авторам удалось значительно расширить. Впрочем, даже здесь возникают свои трудности, основные из которых заключаются в способах линеаризации задачи и обеспечении сходимости итерационных решений.

Теперь нужно сказать несколько слов относительно исследований устойчивости конструкций. Но прежде всего заметим, что основной причи-

ной интереса исследователей к этому вопросу является весьма и весьма широкое применение в строительстве экономичных и изящных тонкостенных традиционных и висячих конструкций, обусловленное повышением прочностных характеристик конструкционных материалов. Сообразно с этим, для таких конструкций роль расчетов на устойчивость существенно возрастает, т. к. их разрушение чаще всего связано с потерей или общей устойчивости, или устойчивости составляющих конструкцию отдельных элементов.

Хорошо известно, что первые исследования устойчивости балок были выполнены Л. Прандтлем и А. Митчеллом, которые рассматривали упругую балку-полосу при действии сосредоточенных сил. Одной из первых публикаций, посвященных вопросам устойчивости, также является работа С.П. Тимошенко [163], в которой он с помощью энергетического метода исследует устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки силами, действующими в плоскости ее наибольшей жесткости.

Несколько позже появляются работы Г. Вагнера [220], К. Вебера [221], П.М. Знаменского [49], Р. Каппуса [212], посвященные отдельным задачам устойчивости тонкостенных стержней. При этом, как указывалось В.З. Власовым [23], для достижения цели использовались далеко не равноценные расчетные предпосылки, приемы и методы решения. В результате были допущены ошибки при выводе уравнений, описывающих процесс потери устойчивости стержней, подверженных действию поперечных нагрузок.

Теперь отметим, что в 30-х годах XX века начинается интенсивная разработка теории устойчивости тонкостенных стержней отечественными учеными. Причем наиболее общая, глубоко обоснованная теория тонкостенных стержней открытого профиля была разработана В.З. Власовым [23]. Введя гипотезы об отсутствии сдвигов в срединной поверхности и о недеформируемости контура поперечного сечения стержня в своей плоскости, В.З. Власов значительно упростил уравнения теории цилиндрических оболочек, установил общий закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня при совместном изгибе и кручении. Он разработал общий метод определения координат центра изгиба и выявил новые геометрические характеристики сечения. Наряду с вопросами прочности В.З. Власовым была рассмотрена и устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля произвольного поперечного сечения.

Исследования В.З. Власова были положены в основу многих работ, посвященных вопросам прочности и устойчивости тонкостенных стержней. При этом большое внимание уделялось исследованию влияния на устойчивость места расположения нагрузок по высоте сечения балки, характера опорных закреплений и других факторов [16, 20, 24, 39, 58, 151, 207].

Тем не менее, получение точного решения задач устойчивости путем интегрирования дифференциальных уравнений представляется довольно проблематичным. В некоторых простых случаях точное решение удастся получить с помощью функций Бесселя, значительная часть которых табулирована. В отдельных случаях решение соответствующих уравнений устойчиво-

сти удастся получить в бесконечных рядах. И поэтому при рассмотрении описанных выше задач достаточно большое внимание уделяется методам их решения. Эти вопросы нашли отражение в трудах Н.А. Алфутова [2], В.В. Болотина [12], В.М. Броуде [16], Д.В. Бычкова [20], В.З. Власова [23], А.С. Вольмира [24], А.Н. Динника [39], Н.И. Карякина [58], Н.В. Корноухова [82], Р.Р. Матевосяна [94], Я.Г. Пановко и И.И. Губановой [115], И.М. Рабиновича [127], А.Р. Ржаницына [134], А.Ф. Смирнова [148], Н.К. Снитко [151], С.П. Тимошенко [163], Ю.И. Ягна [207] и др.

Вообще говоря, задачи определения критического параметра нагрузки для балок, раскрепленных связями из плоскости изгиба, имеют важное практическое значение. Достаточно отметить, что в современных конструкциях отдельно стоящие балки почти не встречаются, поскольку обычно они связываются между собой посредством системы связей в виде прогонов или плит.

По всей видимости, первая попытка решения указанной задачи принадлежит С.П. Тимошенко [163], который считал, что связи влияют на упругое сопротивление закручиванию поперечных сечений. В дальнейшем эту же задачу рассматривали В.В. Болотин [12], Г.П. Бурчак [19] и А.Р. Ржаницын [134], включившие в расчет угол поворота поперечного сечения как жесткого целого без учета деформаций контура. Как правило, в указанных публикациях оговаривалась постановка задачи, рассматривались простейшие частные случаи работы раскрепленных балок и только намечались пути получения общего решения.

В последнее же время в связи с применением в покрытиях зданий и сооружений висячих ферм с развитым в вертикальной плоскости поперечным сечением, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости, возникла необходимость их расчета на устойчивость плоской формы изгиба. Однако этой проблеме посвящено незначительное количество работ [50, 174].

Ю.Г. Фридман [174], используя полученные В.З. Власовым общие дифференциальные уравнения устойчивости тонкостенных стержней, рассмотрел несколько частных случаев загрузки нитей конечной жесткости при различных граничных условиях. При весьма приближенных исходных предположениях ему удалось получить расчетные зависимости, связывающие внешнюю нагрузку с жесткостными и геометрическими параметрами поперечного сечения, а также с действующим в нити в критическом состоянии распором.

Другой метод расчета предложила И.М. Зотова [50], которая, рассматривая равновесие отклоненного состояния бесконечно малого элемента нити, получила систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих устойчивость плоской формы изгиба нитей конечной жесткости. Поскольку точное решение полученной системы уравнений получить не представлялось возможным, она нашла приближенное решение, используя для этого метод Бубнова-Галеркина. В результате удалось получить весьма сложное нелинейное алгебраическое уравнение пятой степени относительно критического прогиба нити, т. е. прогиба, при котором плоская форма деформации перестает быть устойчивой. Зная значение критического прогиба, без труда можно

определить величину внешней нагрузки, вызвавшей этот прогиб.

Как уже неоднократно отмечалось раньше, в современных конструкциях часто допускаются пластические деформации, а расчет нередко ведется по предельным нагрузкам. Но так как в раскрепленных связях в горизонтальной плоскости балках и нитях можно ожидать достижения внешней нагрузкой критического значения ранее предельного, то поэтому вопрос об устойчивости плоской формы изгиба в упруго-пластической области приобретает важное значение. Отметим, что задачи пластического выпучивания не только нитей конечной жесткости, но и балок в наиболее общем виде до настоящего времени точно не решены. Имеются только отдельные работы, в которых рассматриваются решения задач устойчивости плоской формы изгиба балок в пластической области. Например, в работах Л.М. Качанова [59, 60] и Б.Г. Нила [109] задача устойчивости упруго-пластической балки сводится к задаче устойчивости упругой балки с соответствующими приведенными жесткостными характеристиками поперечного сечения. При этом материал балки считается идеальным упруго-пластическим, а поперечное сечение – прямоугольным. Некоторые частные вопросы устойчивости плоской формы изгиба балок за пределом упругости нашли отражение в статьях [13, 210, 214].

Теперь обратим внимание на то, что в последнее время наряду с классическими аналитическими методами стали широко применяться различные численные методы, ориентированные на максимальное использование вычислительной техники [3, 14, 22]. Причем вопросам внедрения вычислительных машин в практику исследования, расчета и проектирования строительных конструкций посвящено довольно много работ. В ряде публикаций приведены обзоры исследований, намечаются перспективы дальнейшего развития применения вычислительной техники. К ним относятся труды А.В. Александрова, Б.Я. Лашеникова, Н.Н. Шапошникова и В.А. Смирнова [1], Дж. Аргириса [3], А.Ф. Смирнова [148], А.П. Филина [173] и многих других.

Особо широкое применение численные методы нашли в исследованиях таких сильнонелинейных систем, как висячие. В работах [10, 40, 61, 62, 88, 103] определение усилий и перемещений предлагается производить методом последовательных приближений. Л.Г. Дмитриевым [41] был разработан метод многоступенчатого нагружения, идея которого принадлежит В.З. Власову [23]. Суть этого метода сводится к получению решения системы нелинейных уравнений путем решения рекуррентных систем линейных уравнений при условии, что на каждом шаге расчета нагрузка прикладывается к конструкции достаточно малыми порциями и каждое предыдущее состояние принимается при этом за исходное. При таком подходе к решению задачи одновременно обеспечивается справедливость применяемых общих принципов линейной строительной механики и теории упругости.

К числу методов, нашедших за последние годы применение в инженерной практике, следует отнести метод сеток (метод конечных разностей), вариационно-разностный метод и метод конечных элементов. Причем все эти

методы, используя те или иные приемы, сводят решение континуальной задачи к решению систем уравнений высокого порядка. Из перечисленных методов особенно широкое применение нашел отличающийся своей универсальностью, физической наглядностью и высокой алгоритмичностью метод конечных элементов (МКЭ). Как уже отмечалось, метод основан на идее кусочной аппроксимации непрерывных полей, в результате чего континуальная среда представляется дискретной моделью с конечным числом степеней свободы [27, 112]. Хорошо известно также, что идея дискретизации конструкции возникла сначала на основе общих дискретных методов строительной механики, а позднее на основе метода Ритца с использованием принципа минимума потенциальной энергии. Широкие возможности использования методов дискретизации открылись с появлением быстродействующих ЭВМ. В шестидесятые и начале семидесятых годов XX века многие ученые посвятили свои труды распространению МКЭ, его развитию и теоретическому обоснованию расчетов конструкций сложных конфигураций. К ним относятся А.В. Александров [1, 148], З.И. Бурман [18], П.М. Варвак [100], В.Н. Гордеев [33], А.С. Городецкий [21], В.Н. Кислокий [70, 73, 75, 139], В.Г. Корнеев [81], Б.Я. Лашеников [1], Ю.И. Немчинов [108], А.В. Перельмутер [33, 117], В.А. Постнов [121, 122], Л.А. Розин [135, 136], А.С. Сахаров [21, 73, 138, 139], А.Г. Угодчиков [101], И.Я. Хархурим [122], Н.И. Шапошников [1, 148], Дж. Аргирис [3], Р. Галлагер [27], Ж. Деклу [36], О. Зенкевич [47], Дж. Оден [112] и др. В эти и последующие годы появился целый ряд работ по расчету строительных конструкций [3, 18, 21, 148], были выпущены монографии [27, 36, 47, 81, 108, 112, 121, 136, 139], специальные сборники [100, 101] и библиографические справочники [5, 102].

Однако, несмотря на то, что за последние годы появилось довольно много публикаций, посвященных МКЭ и его применению при решении задач механики, в них не нашли отражения все многочисленные аспекты, связанные с быстро развивающимся МКЭ [5, 27, 102, 139]. Например, при применении МКЭ в геометрически нелинейной постановке к расчету висячих систем несущие элементы последних аппроксимируются, как правило, стержнями, работающими на растяжение-сжатие [48, 112, 136, 139]. При этом жесткостью элементов на изгиб пренебрегается. Вместе с тем, как показано в работах [61, 62, 67, 103, 199], именно изгибная жесткость элементов может оказать существенное влияние на работу конструкции под нагрузкой. Сведений же о расчете с помощью МКЭ в геометрически нелинейной постановке висячих систем повышенной жесткости, расчетной моделью которых служит нить конечной жесткости, в литературе практически не имеется.

И, наконец, в заключение этого раздела коснемся еще такого важного вопроса как экспериментальные исследования висячих систем повышенной жесткости. Прежде всего, необходимо подчеркнуть, что эти исследования весьма малочисленны. По существу дела можно указать лишь на исследования нитей конечной жесткости [107, 118, 199-201], а также на исследования

висячих ферм конечной жесткости [50].

Так, например, Б.К. Немчиновым [107] были выполнены испытания нитей конечной жесткости, которое представляли собой стальные стержни круглого и квадратного поперечных сечений. Причем при проведении испытаний автором варьировалась только стрела провисания нитей. А для испытаний, выполненных И.П. Петровым и В.В. Спиридоновым [118], в качестве опытных образцов нитей конечной жесткости были приняты трубы. При этом, так же как и в предшествующем случае, варьировалась стрела провисания нитей. Однако особенностью этих испытаний являлось то, что здесь наряду со статическими нагрузками учитывалось влияние внутреннего давления на общее напряженно-деформированное состояние трубы.

Нужно отметить, что наиболее всеобъемлющие испытания нитей конечной жесткости были проведены В.Н. Шимановским, Ю.В. Смирновым и Р.Б. Харченко [199-201]. При проведении испытаний авторами в качестве образцов нитей использовались трубы, а варьируемыми параметрами были приняты площадь сечения нити и стрела ее провисания. Также отметим, что нити испытывались на вертикальные и горизонтальные симметричные и несимметричные загрузки при шарнирном и жестком закреплении концов. В результате испытаний были получены зависимости прогибов, углов поворота поперечных сечений и действующих в нити изгибающих моментов при различных схемах загрузки и условиях закрепления на опорах, а также выполнена оценка влияния различных факторов (жесткость на изгиб, стрела провисания, граничные условия) на напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости.

В работе И.М. Зотовой [50] приведены результаты испытаний фермы конечной жесткости, представляющей собой двухпоясную висячую систему с параллельными поясами. Причем если в качестве верхнего пояса фермы использовался стальной канат, то нижний пояс был выполнен из двух уголков, образующих тавровое сечение. Ферма испытывалась на действие различных вертикальных нагрузок при шарнирном и жестком закреплении опорных сечений. В результате испытаний автором были получены зависимости прогибов и усилий в поясах фермы при различных схемах нагружения.

Резюмируя изложенное, следует заметить, что анализ результатов экспериментальных исследований, проведенный авторами указанных работ, в целом показал достаточно удовлетворительное совпадение теоретических решений с опытными данными. Однако если при действии распределенных симметричных нагрузок погрешность в определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости обычно достаточно мала, то при действии сосредоточенных и в особенности несимметричных нагрузок она несколько возрастает. Кроме того, на величине погрешности сказываются и некоторые другие факторы. В качестве примера укажем на выявленную закономерность, согласно которой уменьшение жесткости нити или увеличение стрелы ее провисания также приводит к относительному воз-

растанию величины погрешности существующих теоретических решений.

§ 1.3. Задачи исследований

Как следует из приведенного обзора, висячие системы получили широкое применение при строительстве промышленных и гражданских зданий, а также инженерных сооружений. При этом в зависимости от их функционального назначения основное внимание уделяется именно той части расчета висячей системы, которая обеспечивает выполнение предъявляемых к конструкции эксплуатационных требований. Например, если при расчете висячего трубопроводного перехода основное внимание уделяется обеспечению несущей способности и жесткости пролетного строения, то при исследовании применяемых в покрытиях зданий и сооружений висячих ферм повышенной жесткости необходимо также выполнить расчет и на устойчивость плоской формы изгиба, поскольку потеря устойчивости хотя бы одной фермы может привести к потере эксплуатационных свойств и даже разрушению всего сооружения. Причем соответствующая указанному моменту критическая нагрузка может быть существенно меньше предельной, полученной по обычному расчету на прочность для первоначальной формы равновесия.

Нужно сказать, что первые публикации по расчету гибких упругих нитей начали появляться в середине 1950-х годов. В последующие годы, в связи с расширением области применения висячих систем в строительстве, было опубликовано большое количество работ, в которых с использованием многочисленных теоретико-экспериментальных подходов, способов и методов расчета рассматривались различные аспекты поведения гибких упругих нитей не только при произвольных нагрузках и воздействиях, но и с учетом особенностей их применения как составных частей конструктивных решений разнообразных висячих систем. Причем полученные в этих работах результаты позволили в целом достаточно полно сформулировать теорию расчета гибкой упругой нити. Однако в связи с тем, что имеющиеся многочисленные материалы по теории расчета гибких упругих нитей разобщены и рассредоточены по отдельным публикациям, цельного представления этой теории в едином изложении так и не было достигнуто.

Работы, посвященные исследованиям прочности и деформативности нитей конечной жесткости, появились в основном в последние четыре – пять десятилетий XX века. Как правило, в этих работах для определения параметров напряженно-деформированного состояния нити используется метод последовательных приближений, с помощью которого решается или дифференциальное уравнение изгиба, или уравнение неразрывности деформаций, связывающее длины нити в исходном и деформированном состояниях. Однако вследствие значительной нелинейности задачи расчетные зависимости имеют довольно громоздкий вид, а их решение представляет собой весьма трудоемкий процесс.

Кстати говоря, очень малое количество работ посвящено расчету висячих конструкций повышенной жесткости на устойчивость плоской формы изгиба, а еще меньшее – расчету с учетом пластических свойств материала.

И теперь четко видно, что недостатки теоретических разработок и приближенность существующих методов расчета указанных систем сказываются не только на исследовании напряженно-деформированного состояния реальных конструкций, но и на их проектировании. Все это привело к тому, что в процессе эксплуатации в несущих конструкциях целого ряда сооружений возникли чрезвычайно большие напряжения. А некоторые сооружения, в том числе и ряд уникальных, обрушились [64, 118, 198].

С другой стороны, ошибки проектировщиков даже в таком на первый взгляд достаточно простом вопросе, как отнесение нити к категории абсолютно гибких или конечной жесткости приводят к не меньшим последствиям. Так, например, ориентация только на одну величину жесткости нити на изгиб не позволяет правильно определить, по какой же из теорий необходимо вести расчет. Именно поэтому В.К. Качурин, рассматривая эту проблему в своей известной монографии [62], указывал на то, что в подобных случаях к расчету нити следует подходить исключительно комплексно.

Также заметим, что проведенный анализ построенных и запроектированных зданий и инженерных сооружений с применением висячих систем показал, что во многих случаях были приняты не лучшие конструктивные решения. К сожалению, при реализации проектов не использовалась большая часть присущих висячим конструкциям потенциальных возможностей, что привело к чрезмерному усложнению схем сооружений, увеличению их материалоемкости, стоимости и сроков строительства.

Резюмируя изложенное, отметим, что главной целью настоящего издания является представление и построение общей теории расчета висячих систем в целом и составляющих эти системы несущих элементов в частности с единых методологических позиций нелинейной механики и вариационного исчисления, а также иллюстрация возможностей этой теории на примерах реальных промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений.

Указанная цель предопределяет следующие основные этапы ее реализации:

1. Сбор и систематизация разобщенного и рассредоточенного по отдельным публикациям многочисленного материала по теории расчета гибких нитей и висячих систем на их основе, а также распространение теории за пределы упругости.

2. Создание уточненной теории расчета прочности и устойчивости несущих элементов висячих систем повышенной жесткости в упругой и пластической стадиях работы материала на произвольные нагрузки и воздействия, а также разработка простых и удобных для практического использования инженерных методов расчета.

3. Совершенствование некоторых висячих систем в области конструктивных форм, способов и приемов монтажа для более полного использования присущих им преимуществ при проектировании и возведении зданий и сооружений.

ГЛАВА 2

ВИСЯЧИЕ СИСТЕМЫ. ТИПЫ И ОСОБЕННОСТИ

История развития большепролетных пространственных висячих систем свидетельствует, что именно российский инженер и ученый В.Г. Шухов не только впервые в мировой практике выдвинул идею применения висячих систем с эффективным использованием работы материала на растяжение, но и успешно ее реализовал при строительстве покрытий многих зданий и сооружений. В последующие годы конструктивные решения и принципы расчета висячих систем постоянно совершенствовались, был накоплен определенный теоретический и практический опыт, а также разработаны оригинальные проекты применения этих систем при возведении промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений. Однако в последнее время в практике отечественного строительства указанные системы не находят должного применения. Этому есть много объективных причин как экономического, так и практического характера. В частности, одной из практических причин является отсутствие надежных методик расчета и достоверных данных о поведении большепролетных пространственных висячих систем с учетом новых, выдвигаемых жизнью, требований к объемно-планировочным решениям, архитектурным формам, технологиям возведения и эксплуатации и т. п.

Впрочем, теперь уже считается вполне установленным тот факт, что только с использованием большепролетных пространственных висячих систем удастся создать при минимальном расходе материалов прочные, достаточно жесткие и надежные в эксплуатации системы [41, 65, 91, 113, 188, 193, 198, 215]. Более того, по существу дела именно рассматриваемые системы безоговорочно являются наиболее прогрессивными не только в техническом отношении, но и с экономической точки зрения, поскольку часто позволяют снизить расход материалов на 1 м² площади по сравнению с широко применяемыми в строительстве плоскостными системами [66, 103, 167, 188, 198].

Используемые в практике строительства большепролетные пространственные висячие системы весьма разнообразны по своему назначению, структуре, форме, применяемым материалам, принципам конструирования, технологии изготовления, условиям эксплуатации. И поэтому в данной работе внимание уделено лишь некоторым основным типам большепролетных пространственных висячих систем (как правило, являющихся по характеру своей работы сильнонелинейными системами), нашедших применение в настоящее время или заслуживающих, по мнению авторов, внимания специалистов.

§ 2.1. Покрытия зданий и сооружений

Развитие производств с гибкой технологией, совершенствование промышленного оборудования, появление агрегатов большой единичной мощности, укрупнение общественных центров и сооружений спортивного назначения, защищенных от атмосферных воздействий, требуют зданий со значительными объемами, свободными от несущих конструкций, и соответственно эффективных большепролетных покрытий. Такие покрытия должны быть легкими, технологичными в изготовлении и монтаже, допускать применение эффективных типов кровли, подвесных крановых путей, отвечать архитектурно-композиционному замыслу и иметь высокие эксплуатационные качества. Именно поэтому в практике строительства промышленных и гражданских зданий наметилась тенденция к замене традиционных конструктивных решений новыми, отвечающими современным требованиям проектирования. При этом особый интерес вызывают большепролетные пространственные конструкции, в том числе и висячие покрытия, широко применяемые в различных областях народного хозяйства. Их характерной особенностью является то, что пролетные конструкции работают в основном на растяжение, что позволяет использовать самые прочные стали и перекрывать практически неограниченные пролеты при сравнительно небольшом расходе материала на несущие и ограждающие конструкции.

Теперь обратим внимание на то, что висячие покрытия представляют собой пространственные системы, образованные пролетными несущими и ограждающими конструкциями, воспринимающими внешние нагрузки, а также опорными конструкциями, работающими во взаимодействии с пролетными и воспринимающими их реакции. Как правило, эти опорные конструкции являются элементами несущего каркаса здания.

В практике строительства применяются вантовые системы, мембранные покрытия, висячие оболочки и комбинированные системы. В вантовых системах, в отличие от оболочек, не обеспечивается совместная работа ограждающих конструкций с опорным контуром. В комбинированных же системах характер работы ограждающих конструкций может быть различным.

Нужно сказать, что имеющийся опыт строительства показывает, что наиболее экономичными являются висячие покрытия, опорные конструкции которых работают в основном на сжатие. Естественной формой таких покрытий в плане является круг или правильный многоугольник. Указанное очертание обеспечивает также наибольшую несущую способность пролетных конструкций при прочих равных условиях, поэтому покрытия рассматриваемого типа в общем объеме возведенных зданий и сооружений с висячими покрытиями составляют значительно большую часть по сравнению с другими типами покрытий. Однако даже в круглых в плане зданиях на опорные конструкции уходит около 50 % от расхода материала в целом на покрытие. Именно поэтому снижение материалоемкости опорных конструкций в зданиях с висячими покрытиями является одной из важных задач.

Отказ от круглого плана и переход к строительству зданий с традиционным прямоугольным планом связан, как правило, с дополнительным расходом

материала. При выборе рациональной конструкции покрытия с прямоугольным планом дополнительный расход материала можно свести к минимуму.

Заметим, что при проектировании висячих покрытий очень важен выбор геометрии поверхности покрытия. В связи с этим получили распространение покрытия с положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизной. Наряду с простыми поверхностями, описываемыми элементарными функциями, применяются также различного рода составные поверхности, имеющие переломы по линиям сопряжения простых поверхностей. Характер поверхности покрытия в значительной степени определяет его деформативность, применение того или иного метода напряжения вантовой сети и пр.

Не менее важен также выбор схемы и структуры вантовой сети. Применяются регулярные (закон образования структуры, сети которой одинаковы по всей поверхности) и нерегулярные вантовые сети, образованные одним или несколькими семействами несущих элементов (гибких нитей, нитей конечной жесткости и т. п.). Однослойные сети из одного семейства вант (параллельных в прямоугольных в плане зданиях и радиальных в круглых) вследствие большой кинематической податливости применяются, как правило, в виде арматуры висячих оболочек. А двухслойные сети, образованные пересечением двух семейств кривых, применяются в основном для вантовых систем. Наибольшее же распространение получили сети из одного и двух семейств вант. При этом сети из трех и более семейств вант встречаются реже.

Пролетная конструкция висячих покрытий выполняется, за редким исключением, предварительно напряженной. Причем усилия предварительного напряжения могут непосредственно передаваться как на опорный контур, так и на конструкции ограждения.

Следует сказать, что вантовые сети проектируют из стальных канатов, пучков высокопрочной проволоки, арматурных стержней, а также из листового и профильного металла.

Одним из условий, которое оказывает определяющее влияние на выбор типа конструкций покрытий, является удовлетворение функциональных особенностей зданий. Таким образом, если для гражданских зданий этим требованиям соответствуют многие типы висячих покрытий, то для промышленных зданий средних и больших пролетов – в основном покрытия с разомкнутым опорным контуром (цилиндрические оболочки, подвесные и комбинированные). Для зданий пролетом 24–48 м и более конкурентоспособными являются покрытия с замкнутым опорным контуром, не работающим на изгиб, а также покрытия с внешне безраспорной пролетной частью.

Теперь заметим, что в зависимости от своего назначения здания с вантовыми покрытиями могут иметь самые разнообразные очертания в плане: прямоугольное, квадратное, овальное, многоугольное, круглое, комбинированное (состоящее из прямолинейных и криволинейных участков) и др. В весьма большом диапазоне могут изменяться также пролеты и высота отдельных частей зданий, радиусы кривизны поверхности и другие параметры.

Дальше приведены некоторые данные, которыми руководствуются при выборе отдельных параметров зданий с вантовыми покрытиями [41, 103].

Размер пролета. В отличие от балочных конструкций в несущих элементах вантовых систем усилие (распор) увеличивается пропорционально величине пролета. Однако если не ограничивать высоту опорных конструкций и соответствующим образом подбирать стрелу провисания несущих элементов, то можно добиться того, что распор в них не будет расти с увеличением пролета. Именно поэтому в зданиях с вантовыми покрытиями величина пролета не сказывается так существенно на материалоемкости пролетных конструкций, как в традиционных балочных системах.

Расположение опор. В прямоугольных однопролетных зданиях опоры, как правило, располагаются по периметру здания, а в многопролетных – линейно (строчно) и в шахматном порядке (в зависимости от типа вантовой сети). В овальных, многоугольных и круглых зданиях опоры могут располагаться как по периметру зданий, так и в центре. Покрытия с одной центральной опорой (шатрового типа) позволяют вдвое уменьшить пролет и заметно снизить расход материалов как на ванты, так и на внутренний и наружный опорные контуры. Сообразно с этим особенно целесообразно применять такие решения при строительстве зданий в районах с просадочными грунтами, поскольку можно всю нагрузку от покрытия передать на центральную опору и не бояться просадок опор, поддерживающих наружный опорный контур.

Встречаются также покрытия с овальным, многоугольным и круглым планами с опорой не в центре покрытия, с двумя и большим числом опор, расположенных внутри здания. Однако такие решения, как правило, менее эффективны, особенно в части трудоемкости работ.

Форма и число опорных контуров. Прямоугольные однопролетные здания выполняются в основном с замкнутым опорным контуром. Реже встречаются здания с разомкнутым опорным контуром. В последнее время применяются также решения с внутренними распорками, расположенными по диагоналям здания. В вертикальной плоскости замкнутый опорный контур выполняется прямолинейным, многоугольным или криволинейным. В последних двух случаях очертание опорного контура принимается в соответствии с кривой провисания несущей пролетной конструкции. В однопролетных зданиях с разомкнутым опорным контуром последний выполняется прямолинейным или с небольшим уклоном, обеспечивающим при одной и той же стреле провисания несущих элементов сток воды с покрытия.

Прямоугольные многопролетные, особенно промышленные здания чаще всего проектируются с разомкнутым опорным контуром. Реже применяются решения с замкнутым опорным контуром, расположенным по периметру отдельных ячеек – в зданиях с крупной сеткой колонн: 24×24 , 24×36 , 36×36 и более.

В овальных покрытиях опорный контур может быть из одного или нескольких аркообразных элементов различного очертания в плане и профиле.

Причем при увеличении числа аркообразных элементов они в пределе образуют замкнутый кольцевой опорный контур.

Одно- и многопролетные прямоугольные и круглые здания с жесткими висячими оболочками, как правило, устраиваются с одним опорным контуром. В легких предварительно напряженных вантовых системах эффективными могут оказаться решения с двумя опорными контурами. В ряде случаев находят применение многокольцевые системы, в которых каждое последующее за наружным опорным контуром кольцо в виде циклической рамы опирается на нижний ярус вант и воспринимает распор от их верхнего яруса.

Теперь остановимся и повнимательнее ознакомимся с некоторыми типами поверхностей вантовых покрытий, образованных из одного или нескольких семейств несущих элементов, для зданий с прямоугольным планом.

Здесь нужно сказать, что одной из наиболее распространенных форм поверхностей является поверхность, образованная кривой провисания несущих элементов. Покрытия с такой поверхностью называются цилиндрическими. Эти покрытия образуются системой параллельных в плане вант.

В вантово-балочных системах (рис. 2.1, *а, б, в*) по вантам укладывают прямолинейные, двухскатные и криволинейные балки, а по ним, в свою очередь, – легкие ограждающие конструкции. Причем поскольку при больших пролетах отвод воды с кровли вдоль пролета затруднен, то применяются в основном решения с двухскатными или криволинейными балками.

Дальше обратим внимание на то, что покрытия в виде оболочек состоят из параллельных вант (но встречаются также системы, в которых ванты расходятся под некоторым углом) и омоноличенных с ними железобетонных плит (рис. 2.1, *г, д*). Для повышения трещиностойкости оболочки выполняют предварительно напряженными. В таких покрытиях можно несколько уменьшить расход металла на ванты (приблизительно на 10–15%), если изготавливать плиты с выпущенной за пределы поперечных ребер, расположенных параллельно вантам, арматурой, а затем сварить выпуски из смежных плит между собой, а выпуски из крайних – приварить к опорному контуру.

Следует заметить, что с целью уменьшения деформативности пролетную конструкцию в покрытиях цилиндрического типа выполняют в виде висячих ферм конечной жесткости, как, например, покрытие Олимпийского плавательного бассейна в г. Москве (рис. 2.1, *е*) [103, 167].

В многопролетных зданиях с вантовыми покрытиями, особенно с легким кровельным ограждением, применяются различного рода двухпоясные системы с решеткой в виде вертикальных растяжек или стоек, а также фермы с треугольной решеткой (рис. 2.1, *ж, з, и, к*). При сравнительно небольших пролетах целесообразно применять конструкции со сжатыми стойками (в виде рыбок), при средних и больших пролетах – решетку, состоящую из сжатых стоек и растяжек, и для всего диапазона пролетов – треугольную решетку.

Укажем также на то, что многие здания с прямоугольным планом строятся с так называемыми подвесными покрытиями, несущие элементы которых находятся над поверхностью кровли. Здесь в качестве несущей системы

в подвесных покрытиях применяются радиально-вантовые системы, одно- и двухцепные системы с различной решеткой, расположенные вдоль или поперек пролета здания, и многие другие (рис. 2.1, л, м, н). Поверхность кровли в таких покрытиях может быть плоской, одно-, двух- или четырехскатной.

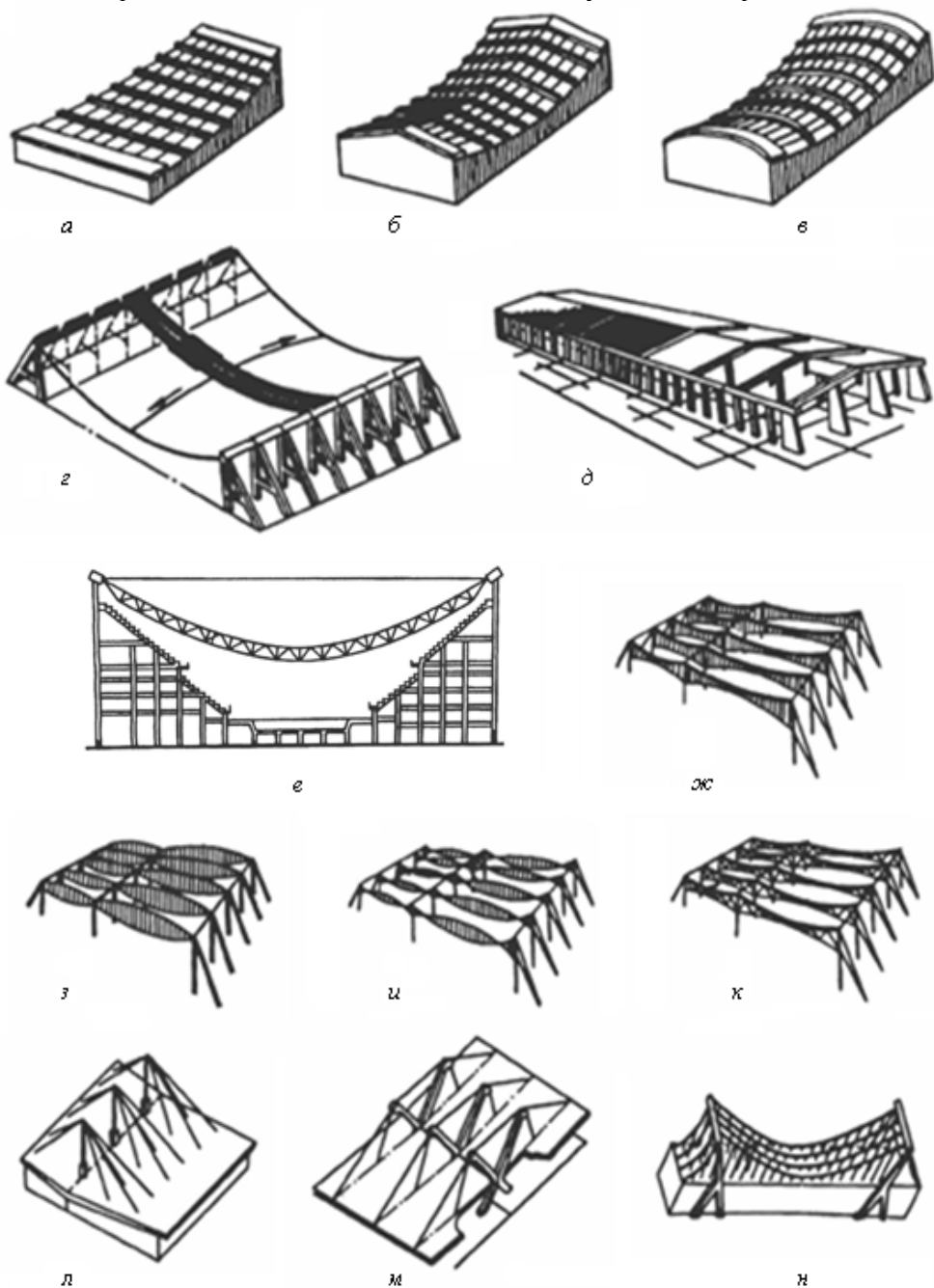


Рис. 2.1. Схемы висячих покрытий на прямоугольном плане:

а–в – из свободно провисающих вант и балок; *г, д* – из свободно провисающих и предварительно напряженных вант; *е* – с висячими фермами конечной жесткости; *жс–к* – с двухпоясными вантовыми фермами; *л, м, н* – с подвесными кровлями

Стоит отметить, что представляется весьма перспективной конструкция покрытия, показанная на рис. 2.2, *ж*, вантовая сеть которой выполняется из параллельных и радиальных вант. Параллельные ванты крепятся к затяжкам, поддерживаемым в проектном положении выходящими из углов опорного контура радиальными вантами. Такая вантовая сеть целесообразна и для многопролетных зданий с разомкнутым опорным контуром, т. к. она позволяет увеличить расстояние между анкерными опорами и при установке на промежуточные колонны ферм пролетом, равным расстоянию между анкерными опорами, дает возможность образовать крупную сетку колонн. Причем в промышленных зданиях благодаря применению этого приема можно более рационально разместить производственное оборудование и на 6–15 % увеличить мощность предприятий без повышения стоимости строительства [66].

С точки зрения удовлетворения требований, предъявляемых к покрытиям промышленных зданий, достаточно эффективно решение, приведенное на рис. 2.2, *з*. Пролетная конструкция такого покрытия выполняется из параллельных сторонам опорного контура ферм, объединяемых на монтаже в замкнутые прямоугольники. Фермы поддерживаются в проектном положении диагональными вантами. На верхний пояс ферм укладываются плиты покрытия, образующие жесткий диск, препятствующий потере устойчивости опорного контура в горизонтальной плоскости. Такие покрытия допускают устройство малоуклонной кровли и подвесного транспорта. Их можно возводить при строительстве как однопролетных, так и многопролетных зданий.

Положив в основу описанную выше конструкцию покрытия, можно, удливив фермы, образующие внутренний опорный контур, до наружного контура и установив на них дополнительные фермы, получить другое решение пролетной части (рис. 2.2, *и*). Если при этом до прикрепления концов ферм к наружному опорному контуру пригрузить последние, то можно существенно облегчить как фермы, так и наружный опорный контур вследствие перераспределения усилий. Наружный опорный контур в таких покрытиях будет работать как балка на упруго-податливых опорах, причем от действия реактивных усилий концов ферм он будет приподниматься вверх.

Хорошо известно также, что во многих зданиях с замкнутым опорным контуром, как и в большепролетных многопролетных зданиях с разомкнутым опорным контуром, целесообразно применять покрытия с легкими ограждающими конструкциями [194]. Для уменьшения деформаций от временных нагрузок такие покрытия необходимо проектировать со стабилизированной формой поверхности. Наиболее просто вопросы стабилизации поверхности покрытий решаются при применении двухпоясных вантовых систем. Одна из таких систем покрытия показана на рис. 2.2, *к*. Здесь верхний и нижний пояса ферм покрытия крепятся к распорке в пределах опорного контура. Распорку

одним концом присоединяют к канату-подбору, закрепленному в углах опорного контура, а другим – опирают на опорный контур через катки или прокладки из антифрикционного материала (например, фторопласта). При этом обеспечивается раздельная передача составляющих опорной реакции вантовой фермы: вертикальной – на колонны, поддерживающие опорный контур, а горизонтальной – на канат-подбор. Причем благодаря такому приему на контур не передается поперечная нагрузка и он работает в основном на сжатие.

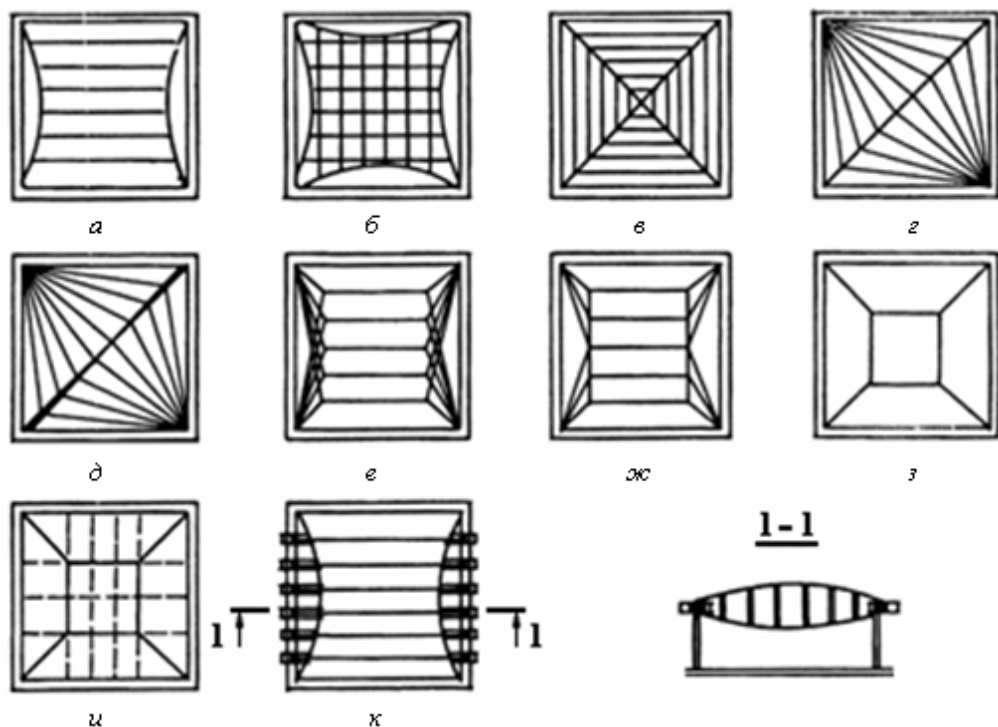


Рис. 2.2. Схемы вантовых сетей в прямоугольных зданиях с замкнутым опорным контуром:

а, б – с канатами-подборами; *в* – с двумя диагональными элементами; *г* – с одним диагональным элементом; *д* – с одним диагональным элементом переменного сечения по длине; *е* – с оттяжками; *ж* – с затяжками; *з* – с дополнительным внутренним опорным контуром; *и* – с дополнительным внутренним опорным контуром и фермами; *к* – с распорками и канатами и канатами-подборами

Теперь перейдем к рассмотрению некоторых типов поверхностей вантовых покрытий зданий криволинейного очертания в плане [113, 152]. Покрытия таких зданий чаще всего имеют сложную поверхность, образованную двумя и более семействами вант (рис. 2.3). Обычно поверхности таких покрытий не являются кусочно-гладкими. Причем в основе отдельных элементарных ячеек, составляющих поверхность покрытия, лежит, как правило, по-

верхность гиперболического параболоида. В таких покрытиях вантовая сеть выполняется предварительно напряженной. Отметим, что в качестве ограждающих конструкций применяется профилированный настил, металлические или алюминиевые панели с минераловатным утеплителем.

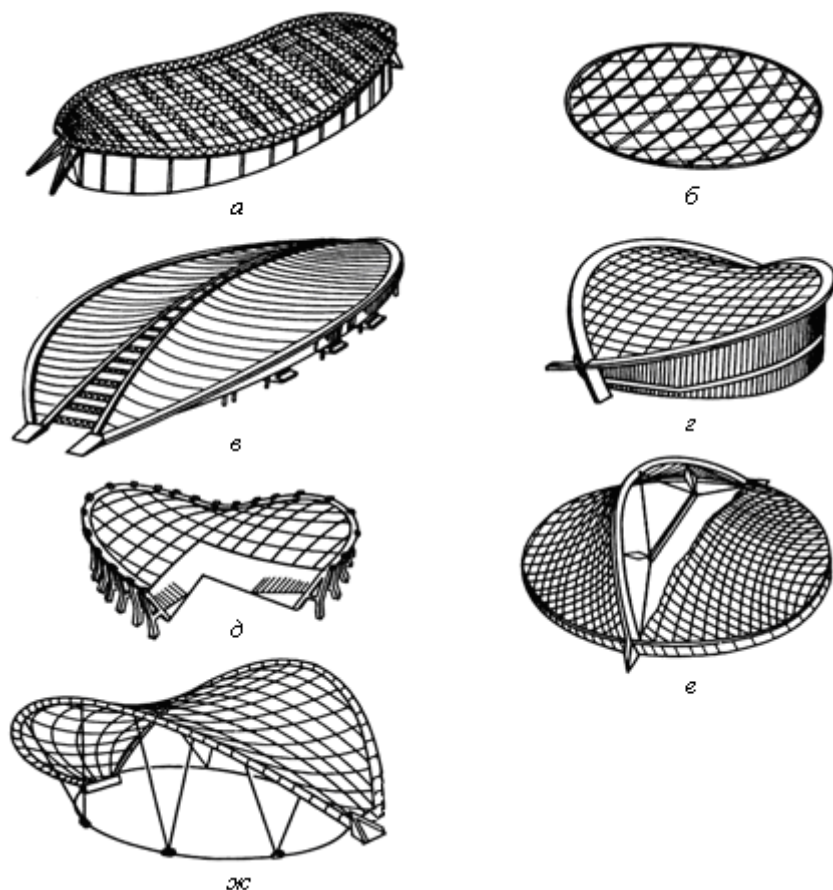


Рис. 2.3. Схемы висячих покрытий зданий криволинейного очертания в плане: *а, б* – с жесткими поперечными элементами и балками; *в–ж* – то же, седловидные

Известно, что из всех видов висячих покрытий наибольшее распространение получили покрытия с круглым планом, особенно шатрового типа [65, 84]. В построенных покрытиях вантовая сеть принята одно- или двухслойной, как правило, радиальной и радиально-кольцевой систем (рис. 2.4). В последние годы нашли применение также мембранные покрытия, в том числе из алюминиевых переплетенных лент (рис. 2.4, *в*). Однако ортогональная и особенно косоугольная вантовые сети не получили широкого распространения. Последнее объясняется тем, что при одних и тех же исходных данных расход материала на ванты на единицу площади горизонтальной проекции покрытия

с радиальной сетью является в 1,5 раза меньшим чем с ортогональной. А ко-соугольная сеть по эффективности несколько уступает ортогональной.

Только поэтому с целью уменьшения числа типоразмеров ограждающих конструкций была предложена радиально-вантовая система с дополнительными параллельными вантами, расположенными на одинаковом расстоянии (рис. 2.5, *a*). Причем в таких покрытиях стрелы провисания дополнительных вант подбираются таким образом, чтобы поверхность покрытия опиралась по кривой провисания основных вант [198].

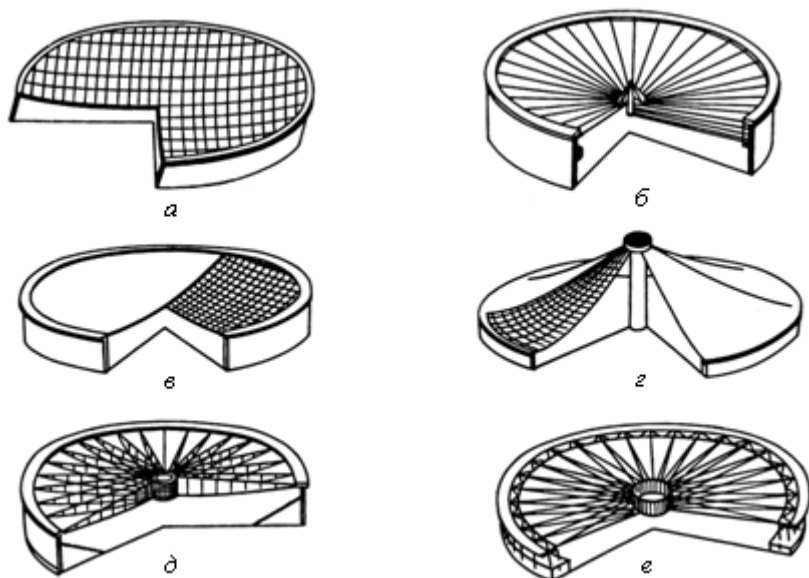


Рис. 2.4. Схемы висячих покрытий на круглом плане:
a-з – однослойные; *д, е* – двухслойные

Уменьшить число типоразмеров плит также можно, если установить через каждую пару радиальных вант в середине пролета распорки, длина которых равна шагу вант у наружного опорного контура (рис. 2.5, *б*).



Рис. 2.5. Схемы радиально-вантовых сетей
с уменьшенным числом типоразмеров ограждающих конструкций:

- а* – с дополнительными параллельными вантами;
б – с дополнительными распорками в середине пролета

В большинстве выполненных покрытий шатрового типа угол наклона вант к горизонтальной плоскости в месте примыкания их к наружному опорному контуру принят равным нулю. При таком примыкании вант к опорному контуру вертикальная нагрузка от покрытия передается только на внутреннюю опору. Причем для передачи части вертикальной нагрузки на наружные колонны, а также для уменьшения высоты внутренней опоры геометрию покрытия принимают такой, чтобы ванты примыкали к наружному опорному контуру под углом к горизонту, меньшим нуля.

Кстати говоря, анализ работы рассмотренных выше вантовых сетей как для круглых покрытий, так и для покрытий с другими планами показал, что при нагружении покрытия произвольной вертикальной нагрузкой усилия в вантах неодинаковы, что приводит к снижению технико-экономических показателей не только для собственно вантовых сетей, но и для конструкций, воспринимающих распор вант. В этой связи представляются перспективными равнопрочные сети, в основу которых положено примыкание к узлу трех вант под углом 120° . На этой основе уже разработаны шестиугольные и другие структуры вантовых сетей.

Хорошо известно, что многие вантовые системы обладают большой кинематической податливостью. Стабилизация поверхности таких систем заключается в сведении кинематических перемещений до минимума. Однако для очень легких вантовых покрытий эта, казалось бы, простая задача перерастает в проблему первостепенной важности. Отметим, что пока не существует решений, обеспечивающих возможность применения ограждающих конструкций массой 5–10 кг и удовлетворяющих требованиям, предъявляемым к покрытиям в части деформативности, возможности подвески различного рода технологического оборудования и т. п. Сравнительно тяжелые комбинированные, подвесные и другие типы покрытий, состоящие из балок, ферм и железобетонных плит, как правило, не нуждаются в стабилизации поверхности. Она обеспечивается массой настила и его омоноличивания. Стабилизация же легких покрытий обеспечивается предварительным напряжением несущих элементов – вант, ферм и т. п. – последовательно или одновременно.

Следует сказать, что в зависимости от конструкции пролетной части покрытия применяются различные методы напряжения несущих элементов. Предварительное напряжение однопоясных радиально-вантовых покрытий на круглом плане, цилиндрических покрытий на прямоугольном плане и некоторых других типов покрытий в виде железобетонных оболочек может осуществляться: монтажной пригрузкой, укладываемой непосредственно на плиты покрытия или подвешиваемой к вантам; с помощью различного рода отяжков, прикрепленных к вантам и полу или фундаментам здания; установкой

временных напрягающих вант с раздвижными распорками (по типу двухпоясных систем); натяжением домкратами и другими способами.

Достаточно просто осуществляется напряжение несущих элементов в однопоясных покрытиях с ортогональной сетью вант на поверхности гиперболического параболоида, наиболее часто – домкратами, реже – поворотом с небольшим опусканием (вращательно-поступательным движением) опорных конструкций (арок, распорок и т. п.). Но в последнем случае необходимо очень точно определить геометрию всех элементов вантовой сети, иначе одни ванты могут оказаться ненапряженными, а другие – перенапряженными, что существенно скажется на работе опорных конструкций. Натяжение вант домкратами не требует столь высокой точности определения их геометрии, хотя оно и не очень индустриально, особенно когда выполняется ступенями путем последовательного обхода диаметрально противоположных вант (во избежание появления больших изгибающих моментов в опорном контуре).

Натяжение двухпоясных покрытий из вантовых ферм выполняется путем стягивания поясов вертикальными или наклонными тросами решетки или раздвижки поясов сжатыми стойками. Процесс натяжения не вызывает каких-либо затруднений, т. к. для обеспечения необходимых усилий в поясах ферм достаточно создать сравнительно небольшие усилия в элементах решетки. Предварительное напряжение придает поясам ферм форму, подобную форме веревочного многоугольника от равномерно распределенной нагрузки.

В двухпоясных радиально-вантовых покрытиях предварительное напряжение поясов ферм может осуществляться путем раздвижки колец центрального барабана. При этом, как указывалось раньше, к исходной геометрии вантовых ферм должны предъявляться более жесткие требования.

Предварительное напряжение вантовых сетей зависит от конструкции пролетной части, характера и интенсивности временной нагрузки, требований к деформативности покрытия и других факторов и окончательно определяется в результате выполнения технико-экономических расчетов.

В зависимости от усилия натяжение вант может осуществляться динамометрическими ключами, различного рода натяжными устройствами, вантовыми и гидравлическими домкратами. Для контроля усилий натяжения могут применяться приборы, основанные на динамическом, а также статическом методах контроля.

§ 2.2. Мембранные конструкции

Начнем с напоминания, что мембранная система представляет собой пространственную конструкцию из тонкого металлического листа, закрепленного на контуре. Пролетная конструкция (мембрана) может быть подкреплена системой элементов, используемых для монтажа оболочки, ее стабилизации и т. п. Причем цепные усилия с пролетной конструкции воспринимаются опорным контуром.

Хорошо известно, что мембранные системы имеют некоторые преимущества, поскольку именно в этих системах возможно наиболее полное использование несущей способности материала. Мембрана имеет минимальную толщину, т. к. работает в основном на растяжение в двух направлениях без опасности потери устойчивости. Цепные усилия с пролетной конструкции воспринимаются одним элементом – опорным контуром, работающим совместно с мембраной, которая в большинстве случаев обеспечивает его устойчивость. Мембрана совмещает одновременно несущие и ограждающие функции. Даже в том случае, когда применяется обычная кровля, не требуются панели и другие промежуточные элементы, не участвующие в пространственной работе системы. Все это обеспечивает минимальный расход материалов на мембранные конструкции [103].

Существенное уменьшение металлоемкости мембранных систем, относительная простота их монтажа, применение большеразмерных рулонных полотнищ заводского изготовления определяют снижение трудоемкости и стоимости их возведения, сокращение сроков строительства. Тонколистовыми конструкциями можно перекрыть без промежуточных опор практически любые требуемые пролеты, причем с увеличением пролета экономическая целесообразность применения таких конструкций все более возрастает.

Мембранные покрытия, как правило, имеют минимальную строительную высоту, что не только уменьшает расход материалов на стеновое ограждение, но и снижает эксплуатационные расходы на отопление и вентиляцию здания. Кроме того, мембранные системы благодаря своей малой массе, транспортабельности и технологичности монтажа имеют преимущества при строительстве в труднодоступных и северных районах, а также в районах с повышенной сейсмичностью. Они обладают также большим разнообразием форм и предоставляют широкие возможности для практического воплощения интересных архитектурных замыслов.

В то же время при проектировании конструкций мембранных покрытий возникает необходимость в комплексном решении многих сложных проблем, в том числе правильного выбора формы поверхности мембраны с учетом очертания конструкции в плане и способа стабилизации деформативной пролетной конструкции; рационального конструирования опорного контура, воспринимающего значительные цепные усилия; гидро- и теплоизоляции и водоотвода; противокоррозионной защиты мембраны и т. п.

Нужно сказать, что с использованием мембранных покрытий построены различные здания, в том числе крупнейшие в Европе крытый стадион «Олимпийский» в г. Москве, универсальный спортивный зал в г. Санкт-Петербурге, велотрек «Крылатское» и Дворец спорта «Измайлово» в г. Москве. Также с применением тонкого металлического листа выполнены покрытия некоторых зданий меньших пролетов [92, 167, 168, 190].

Мембранные конструкции применяют не только в уникальных сооружениях, но и в зданиях массового строительства, таких как киноконцертные и спортивные залы универсального назначения, магазины, крытые рынки и т. п.

Мембранные системы могут быть использованы в покрытиях промышленных зданий с укрупненной сеткой колонн, складских помещений, гаражей и ангаров. Применение тонколистовых покрытий больших пролетов позволяет создавать принципиально новые типы промышленных зданий, в том числе оборудованных напольным транспортом, обладающих высокой планировочно-конструктивной универсальностью. Мембранные системы широко применяются в реконструируемых промышленных зданиях, когда требуется замена покрытий, исчерпавших свой амортизационный срок. Рационально применение тонколистовых конструкций в покрытиях резервуаров, отстойников, шламбассейнов и сгустителей [67, 188, 193].

Дальше важно отметить, что мембранные покрытия по конструктивным особенностям разделяются на мембранные сплошные оболочки, ленточные покрытия и двухпоясные комбинированные тонколистовые покрытия.

Мембранные оболочки выполняют из отдельных тонколистовых полотнищ, объединяемых на монтаже в сплошную пространственную систему. Ими можно перекрывать здания с разнообразными очертаниями в плане – треугольник, прямоугольник, многоугольник, круг, овал, эллипс, а также с более сложным комбинированным очертанием. Мембранные оболочки могут иметь различную форму поверхности: цилиндрические и конические с поверхностью нулевой гауссовой кривизны; сферические, в виде эллиптического параболоида или поверхности вращения с вертикальной осью – с поверхностью положительной гауссовой кривизны; седловидные, в том числе в виде гиперболического параболоида, шатровые – с поверхностью отрицательной гауссовой кривизны; составные поверхности в виде комбинаций оболочек с одинаковыми или различными геометрическими свойствами поверхности.

Ленточные покрытия (из переплетенных лент, двухслойные седловидные) монтируют из отдельных, не соединяемых одна с другой лент. По статической схеме они приближаются к работающим дискретно вантовым системам. Покрытия из переплетенных лент имеют провисающую поверхность положительной гауссовой кривизны и предназначены для зданий с круговым или овальным планом. Такие же покрытия с подкрепляющей системой имеют провисающую составную поверхность и предназначены для зданий, многоугольных в плане (треугольник, прямоугольник и т. д.). Двухслойные ленточные покрытия имеют седловидную форму поверхности и предназначены для зданий с прямоугольным, овальным или более сложным (составным) планом.

Что же касается двухпоясных покрытий, то к ним относятся комбинированные системы, у которых один или два пояса пролетной конструкции выполнены в виде мембраны. Пояса объединяют друг с другом распорками или решеткой. Поверхность мембран может быть выпуклой или вогнутой.

И, наконец, стоит отметить, что мембранные системы на прямоугольном плане могут быть применены в реконструируемых промышленных сооружениях при замене конструкций покрытий над зданием.

Материалы для мембранных конструкций. Для изготовления пролетной конструкции мембранных систем применяют углеродистые, низколегирован-

ные, в особых случаях нержавеющие стали и алюминиевые сплавы, выпускаемые в виде листов или рулонов. Выбор материала определяется конкретными условиями эксплуатации мембранных конструкций, их изготовления, монтажа и экономической целесообразностью. Поверхности металлических мембран должны быть защищены от атмосферной и контактной коррозии с учетом противокоррозионной защиты поверхности мембран со стороны кровли.

Для пролетной конструкции мембранных систем используются полотнища, сворачиваемые в рулоны. Длина полотнища принимается равной всему пролету или для оболочек с круглым и овальным планом, имеющим центральное кольцо, – половине пролета. Ширина полотнища принимается равной 6–18 м и ограничивается габаритными размерами и массой рулона, а также производственными возможностями завода-изготовителя.

Рулонные полотнища толщиной 3 мм и больше изготавливают из отдельных листов размерами 6,0×1,5 м, свариваемых встык на специальных высокомеханизированных установках. Причем само собой разумеется, что стыковые сварные швы должны обладать той же прочностью, что и основной металл. А полотнища толщиной менее 3 мм следует изготавливать из рулонных лент, соединяемых сваркой. Ленточные покрытия выполняют из рулонных лент, поставляемых металлургической промышленностью, с обрезными кромками без какой-либо заводской переделки.

Опорный контур мембранных покрытий проектируют из сборного, сборно-монолитного или монолитного железобетона, в том числе из трубобетона. В отдельных случаях (сложная геометрия опорного контура, сжатые сроки возведения и т. п.) в качестве материала опорного контура мембранных покрытий применяется металл.

Здесь стоит также подчеркнуть, что стальные мембраны допускаются к эксплуатации без специальных мероприятий по огнезащите.

Пролетная конструкция. По способу формообразования мембранные оболочки делятся на покрытия с первоначально заданной стрелой провисания и первоначально плоские покрытия. Покрытия с заданной стрелой провисания монтируют навесным способом укладкой на монтажные элементы («постели») отдельных полотнищ с последующим объединением их в пространственную мембрану. Заметим, что геометрия элементов «постели» определяет начальную форму поверхности мембранной оболочки и должна соответствовать проектной, что и достигается регулировкой длины элементов «постели».

Первоначально плоские мембранные покрытия, собираемые на спланированной площадке или подмостях, после подъема или раскручивания провисают под действием собственного веса. Форма образующейся при этом поверхности и стрела провисания покрытия зависят от избыточной площади мембраны, возникающей из-за сварочных деформаций; начальных погибей, оставшихся после правки листов или рулонов; остаточных деформаций, появляющихся в результате сворачивания и разворачивания рулона и т. п.; податливости опорного контура; упругих деформаций самой мембраны. Причем

начальная стрела провисания обычно принимается не менее $1/60$ меньшей стороны или диаметра покрытия.

Пролетная конструкция мембранных покрытий выполняется из полотнищ максимальной площади (с учетом условий изготовления, перевозки и монтажа), поставляемых на монтажную площадку в рулонах.

В случае же существенной неравномерности распределения цепных усилий в пролетной конструкции с целью снижения расхода материала и обеспечения равнопрочности мембраны возможно местное усиление пролетной конструкции применением листов разной толщины (с учетом технологии изготовления и монтажа тонколистовых полотнищ) или постановкой дополнительных листов, крепящихся к основному полотнищу.

В пролетную конструкцию мембранных покрытий в большинстве случаев включаются элементы «постели», состоящие из направляющих и поперечных элементов. Направляющие элементы располагают вдоль мембранных полотнищ с шагом, равным их ширине, а при ширине полотнищ более 6 м – с шагом, равным половине ширины полотнища. Шаг направляющих увязывают с шагом колонн и с длиной сборных элементов опорного контура.

Отметим, что поперечные элементы «постели», объединяющие отдельные направляющие в пространственную систему, устанавливают с шагом 3–6 м. При монтаже покрытия на подмостях или внизу на спланированной площадке элементы «постели» не требуются.

Направляющие выполняют длиной на пролет из стальной полосы, гнутых, прокатных или сварных элементов (тавр, двутавр, два швеллера), легких висячих ферм с верхней горизонтальной полкой шириной 300...500 мм. А поперечные элементы выполняют из гнутых или прокатных профилей, подбираемых расчетом на нагрузку от собственного веса полотнища мембраны. Допускается поперечные элементы с мембраной не соединять.

Сечение направляющих элементов обычно включают в работу пролетной конструкции при расчетах на эксплуатационные нагрузки. Для этого обеспечивают совместность работы мембраны и направляющих путем надлежащего их соединения между собой и с опорным контуром внахлестку сваркой или высокопрочными болтами. Причем при выполнении стыков односторонним сварным угловым швом обязательна конструктивная постановка сварных точек проплавлением или высокопрочных болтов. При наличии монтажной «постели» соединение отдельных полотнищ обычно осуществляется на направляющих с нахлесткой кромок полотнищ.

Следует заметить, что конструктивное решение узла присоединения мембраны к контуру должно обеспечивать надежную передачу значительных нормальных и касательных усилий с пролетной конструкции на опорный контур. В свою очередь, присоединение мембраны к бортовому элементу контура выполняется с использованием опорного столика.

В связи с незначительной изгибной жесткостью мембранных оболочек необходима их стабилизация, предотвращающая потерю общей устойчивости покрытия (его «выхлоп» в сторону, противоположную провисанию), умень-

шающая повышенную деформативность мембранных систем от неравномерных нагрузок, которая может привести к расстройству кровли и невозможности дальнейшей нормальной эксплуатации здания, и обеспечивающая нормальную работу покрытий на динамические воздействия, в частности ветровые. В некоторых случаях стабилизация необходима также для предотвращения местной потери устойчивости тонкого листа.

Стабилизация тонколистовых покрытий осуществляется одним из следующих способов: увеличением массы покрытия; введением в конструкцию элементов, обладающих изгибной жесткостью; предварительным напряжением (растяжением). Стабилизация покрытия путем увеличения массы достигается применением утеплителей с повышенной плотностью, укладкой цементной или бетонной стяжки, использованием специальных балластных пригрузов, подвеской постоянного технологического оборудования (рис. 2.6, а).

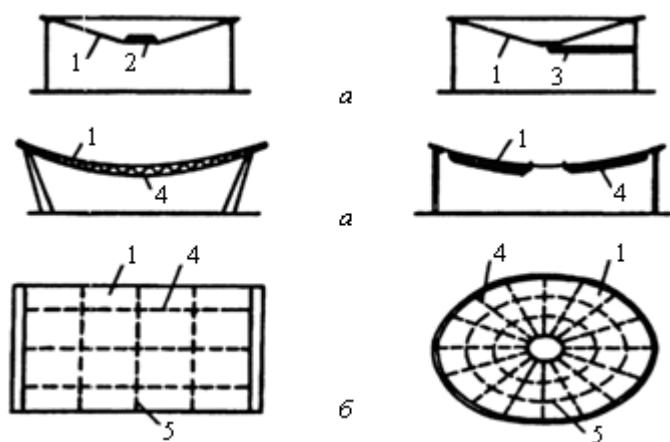


Рис. 2.6. Стабилизация мембранных покрытий:

а – пригрузом; б – с использованием изгибно-жестких элементов; 1 – мембрана; 2 – пригруз; 3 – кольцевой кран; 4 – основные (продольные или радиальные) ребра; 5 – вспомогательные (поперечные или кольцевые) ребра

Такой прием обеспечивает наличие растягивающих напряжений в мембране даже при ветровом отсосе и уменьшает долю неравномерных временных нагрузок. Более того, оказывается, что в большинстве случаев применяемая в настоящее время традиционная кровля совместно с мембраной обеспечивают требуемую для стабилизации массу покрытия.

Стабилизирующие изгибно-жесткие элементы располагают вдоль линий главной кривизны поверхности оболочки и выполняют металлическими из сплошных прокатных или сварных элементов или в виде висячих ферм (рис. 2.6, б). Причем стабилизирующие элементы обычно используют в качестве монтажной «постели».

Предварительное напряжение мембран осуществляется различными способами в зависимости от формы поверхности покрытия (рис. 2.7): прикреплением мембраны к контуру с помощью натяжных устройств или изменением положения опорного контура (оболочки отрицательной гауссовой кривизны); натяжением нижнего пояса, элементов решетки или оттяжек вантовых ферм, включенных в пролетную конструкцию (оболочки нулевой и положительной гауссовой кривизны); притягиванием концов поперечных элементов «постели» к основанию (цилиндрические оболочки).

Необходимая для стабилизации масса покрытия, изгибная жесткость ребер и предварительное напряжение определяются расчетом на нормативные временные нагрузки. При этом способ стабилизации выбирается на основе технико-экономических расчетов с учетом архитектурно-технологических требований, возможности упрощения изготовления и монтажа. В пролетной конструкции мембранных систем можно устраивать проемы для установки зенитных фонарей, пропуска коммуникаций и т. п. Причем проемы обрамляют листом, расположенным в плоскости мембраны и имеющим площадь поперечного сечения не менее половины площади ослабления мембраны. Проемы проектируют круглыми, овальными или многоугольными с радиусом закругления углов не менее 200 мм.

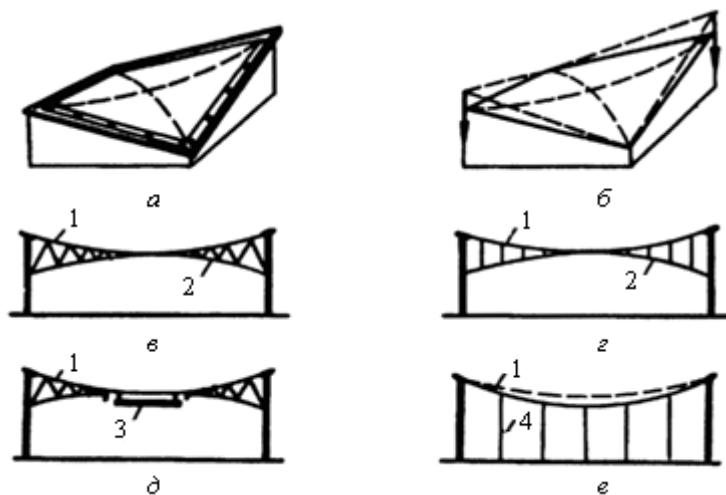


Рис. 2.7. Стабилизация мембранных покрытий предварительным напряжением: *а* – притягиванием мембраны к контуру; *б* – изменением геометрии покрытия; *в–д* – с помощью натяжения вантовых ферм; *е* – притягиванием поперечных балок к основанию; 1 – мембрана; 2 – стабилизирующие ванты; 3 – центральный пригруз; 4 – оттяжки

Технологическое оборудование к мембранному покрытию крепят на гибких подвесках. При наличии элементов «постели» подвески крепят к этим элементам. Также возможно крепление подвесок выполнять непосредственно к мембране с использованием распределительных шайб.

Опорный контур воспринимает цепные усилия, передающиеся с пролетной части покрытия. Различают замкнутый контур, который воспринимает все горизонтальные составляющие цепных усилий в уровне покрытия и на лежащие ниже конструкции передает в основном вертикальные усилия, и разомкнутый опорный контур, в котором усилия с пролетной части покрытия передаются непосредственно на лежащие ниже конструкции (колонны, рамы, пилоны, конструкции трибун, боковых приставок). Поскольку из-за пологости пролетной конструкции распор является весьма существенным, большое значение имеет рациональное конструирование опорного контура, материалоемкость и трудоемкость изготовления которого составляют значительную часть в общих показателях, влияющих на экономичность покрытия.

Рекомендуется применять замкнутый опорный контур. Разомкнутый контур может быть оправдан лишь при наличии конструкций трибун, боковых пристроек и т. п., способных без существенных дополнительных затрат воспринимать значительные распоры. Если опорный контур выполнен в виде нескольких наклонных плоских арок или ломаных балок, не лежащих в одной плоскости, то он оказывается внешне распорным. При этом распоры воспринимаются затяжками или контрфорсами.

Форма опорного контура определяется линией пересечения поверхности покрытия с поверхностью стенового ограждения. Его ось может быть очерчена плоской или пространственной кривой или состоять из отрезков прямых, плоских и пространственных кривых. Криволинейный опорный контур может быть заменен полигональным для упрощения изготовления его элементов.

Наружный опорный контур может лежать на сплошном основании, образованном стенами, или на отдельных колоннах, в том числе расположенных только по углам покрытия. В общем случае опорный контур воспринимает сжатие с изгибом в одной или двух плоскостях. Кроме того, в нем могут возникать крутящие моменты. При проектировании необходимо стремиться к тому, чтобы опорный контур был внешне безраспорным и малоизгибным.

§ 2.3. Мосты и путепроводы

В практике строительства широкое распространение получили мосты и путепроводы с применением вантовых (с различной вантовой системой, а также с одной или двумя плоскостями вант) и висячих (внешнераспорных или с воспринятым распором) систем, пролетные строения которых обладают рядом конструктивных особенностей (рис. 2.8). Общими конструктивными элементами и до некоторой степени общими узлами пролетных строений обеих систем являются балки жесткости, пилоны и узлы крепления к ним вант или подвесок и кабелей растянутых поясов [176, 177].

Следует заметить, что балка жесткости является основным элементом рассматриваемых пролетных строений. Конструктивные решения балки жесткости принимаются практически аналогичными конструкции пролетных строений балочных мостов, причем с точки зрения снижения постоянной

нагрузки и трудоемкости монтажа наиболее целесообразны балки жесткости со стальной ортотропной плитой проезжей части.

Для висячих и вантовых мостов с пролетами свыше 300 м, а тем более превышающих 1 км, критическими становятся аэродинамические воздействия ветрового потока, которые могут вызвать аэроупругую неустойчивость типа галопирования или флаттера. В этом случае применимы только коробчатые сечения, обладающие большой жесткостью на кручение, которым для снижения воздействий ветрового потока придают обтекаемую форму.

Что же касается пилонов в висячих и вантовых мостах, то они сооружаются из металла или железобетона. Рассмотрим металлические пилоны, наиболее характерные конструкции которых в виде поперечных рам, жестко или шарнирно опертых на опоры, или в виде одиночных стоек, жестко закрепленных к опорам, показаны на рис. 2.9.

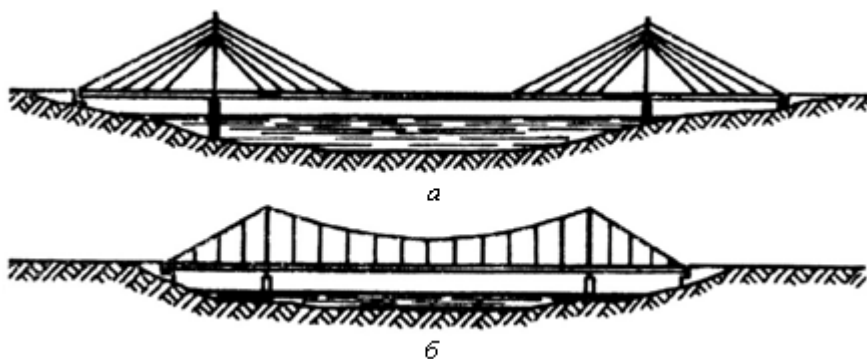


Рис. 2.8. Мосты и путепроводы с применением вантовых (а) и висячих (б) систем

Пилоны висячих мостов и вантовых с радиально расположенными вантами, закрепленными на вершине пилона, работают в одинаковых условиях, воспринимая вертикальную составляющую усилий опирающихся на них канатов или цепи и усилия, вызываемые смещением точки закрепления последних. Чем меньше изгибная жесткость пилона в плоскости несущей системы, тем меньше изгибающие моменты, вызываемые деформацией пилона. Поэтому пилоны висячих и вантовых мостов целесообразно принимать предельно гибкими в плоскости моста с шарнирным опиранием. Пилоны висячих мостов с большими пролетами, в частности превышающими 1 км, из соображений общей устойчивости принимаются с развитым сечением стоек.

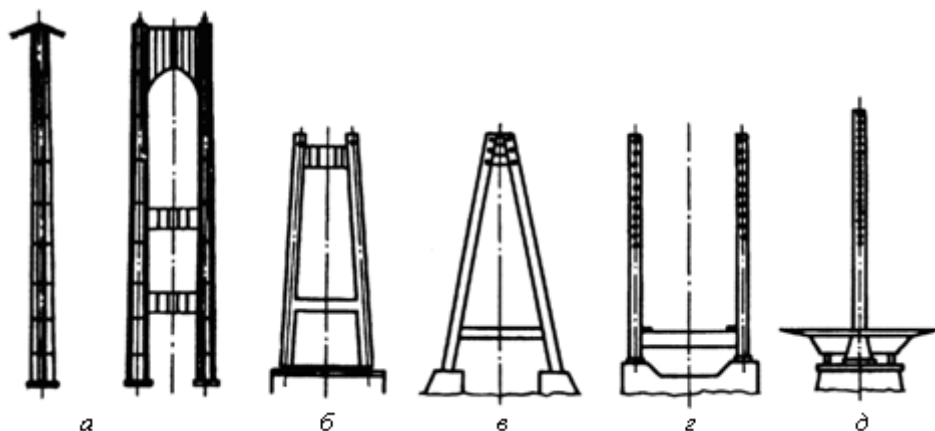


Рис. 2.9. Конструкции металлических пилонов:

а – висячий мост в Ньюпорте; *б, в* – вантовые мосты; *г, д* – многовантовые мосты

Пилоны вантовых мостов с многоярдным расположением вант, в том числе пилоны многовантовых мостов, кроме вертикальной составляющей усилий в канатах и усилий от деформаций пилона, нагружены также усилиями, связанными с перераспределением горизонтальных составляющих распора канатов различных ярусов, но и в этом случае принцип уменьшения гибкости пилона в плоскости моста остается в силе.

В поперечном направлении пилоны висячих и вантовых мостов выполняются в виде П- или А-образных, а также в виде отдельно стоящих стоек. Последнее решение наиболее характерно для вантовых пролетных строений, пилоны которых работают в более благоприятных условиях, создаваемых следящим эффектом силовых воздействий вант. В противовес этому в вантовых мостах, в которых неуравновешенный распор вант передается на пилоны, последние должны быть возможно более жесткими. Именно поэтому такие пилоны обычно решаются в виде пространственной рамы, развитой как в плоскости моста, так и в поперечном направлении.

Поперечные сечения стоек пилонов принимаются коробчатыми с одной или несколькими ячейками, сваренными из листов большой толщины. Как правило, стенки коробчатого сечения стоек пилонов усиливаются продольными ребрами жесткости и поперечными диафрагмами. Причем продольные ребра пропускают через вырезы в стенках поперечных диафрагм.

Стойки пилонов делятся по длине на монтажные блоки, размеры которых определяются грузоподъемностью монтажных механизмов и транспортными габаритами. Поперечные стыки блоков, передающие большие нагрузки, являются ответственными конструктивными деталями. Непосредственная передача усилий через торцы с фрезерованием контактных поверхностей связана с определенными технологическими трудностями обработки с заданными допусками поперечных сечений большой площади. Возможно продольное чле-

нение на блоки с меньшими площадями, подлежащими фрезерованию, но при этом из-за увеличения длины швов увеличивается трудоемкость монтажа.

§ 2.4. Трубопроводные переходы

Прежде всего заметим, что основное количество трубопроводов прокладывается под землей, но часто более экономичной, а иногда и единственно возможной является надземная прокладка (например, в северных и горных районах, через реки, овраги, ущелья, болота, дороги и т. п.). При надземной прокладке трубопроводов из-за естественных и искусственных препятствий в большинстве случаев применяют балочные, реже арочные, а в последнее время все чаще – висячие системы.

В практике строительства получили распространение следующие типы висячих переходов [64, 198]: одно- и двухцепные с вертикальными подвесками (рис. 2.10, *а–в*), радиально-вантовые (рис. 2.10, *г–е*), с решетчатыми вантовыми фермами (рис. 2.10, *ж, з*), в виде провисающей нити (рис. 2.10, *и, м*), с фермами повышенной жесткости (рис. 2.10, *н, о*). Перечисленные типы переходов могут быть как одно-, так и многопролетными. Кроме того отметим, что по характеру статической работы их можно разделить на две группы. К первой относятся переходы, в которых труба работает как балка на упругоподатливых опорах с пролетами, равными расстоянию между подвесками несущего каната или точками крепления наклонных вант, воспринимающих нагрузку от веса трубы, изоляции, продукта, снега, гололеда и т. п. Ко второй группе относятся переходы, в которых труба является единственным несущим элементом, воспринимающим всю нагрузку (в виде провисающей нити).

Известно также, что при пролетах до 100 м целесообразно применять простейшие радиально-вантовые системы. При пролетах 100–300 м достаточно эффективны одноцепные системы с вертикальными подвесками, а при больших пролетах – системы в виде вантовых ферм. Причем почти для всего диапазона пролетов можно применять системы в виде провисающей нити.

Вантовые фермы, применяемые для трубопроводных переходов, имеют ряд характерных особенностей, определяемых их совместной работой с трубами, которые включаются в состав фермы и работают на местный изгиб между ее узлами. С точки зрения суммирования напряжений в трубе как элементе фермы и конструкции, воспринимающей внутреннее давление, целесообразно применять системы с воспринятым распором. Однако по технологическим соображениям и по условиям монтажа более эффективны решения, при которых канаты крепятся к анкерным опорам. При этом возможен навесной монтаж трубопровода без промежуточных опор.

Обратим внимание, что при расчете труб, работающих под высоким давлением, приходится учитывать собственные кольцевые и меридиональные растягивающие напряжения и напряжения, создаваемые реактивным воздействием компенсаторов. Кроме того, при транспортировании жидкостей необ-

ходимо также дополнительно учитывать динамические удары, возникающие в момент включения трубопровода в сеть или выключения его из сети.

Важным является также то, что деформативность несущих трубопроводы вантовых ферм должна соответствовать условиям нормальной эксплуатации (предупреждение расстройств стыков, вывод конденсата и пр.).

Стоит отметить, что с целью уменьшения деформаций пролетной конструкции в многопролетных системах необходимо устройство затяжек – горизонтальных (с малой стрелой провисания) канатов, соединяющих верхушки пилонов, предназначенных для ограничения перемещений последних при несимметричном нагружении перехода.

Сравнительно небольшая поперечная жесткость пролетных строений в переходах требует специальных устройств для восприятия ветровых усилий и ограничения и предупреждения аэродинамических колебаний.

Специфику работы трубопроводных переходов надо учитывать при выборе типа фермы, конструкций крепления стальных канатов к трубам, устройств для восприятия ветровых усилий, конструкций компенсаторов и, наконец, устройств для обеспечения нормальной эксплуатации трубопроводов.

Из перечисленных систем переходов наиболее экономичны переходы в виде провисающей нити. В последние годы опыт проектирования и строительства таких переходов значительно обогатился: был выполнен ряд экспериментально-теоретических исследований, завершено строительство десятков переходов, получены новые технико-экономические данные [190, 199].

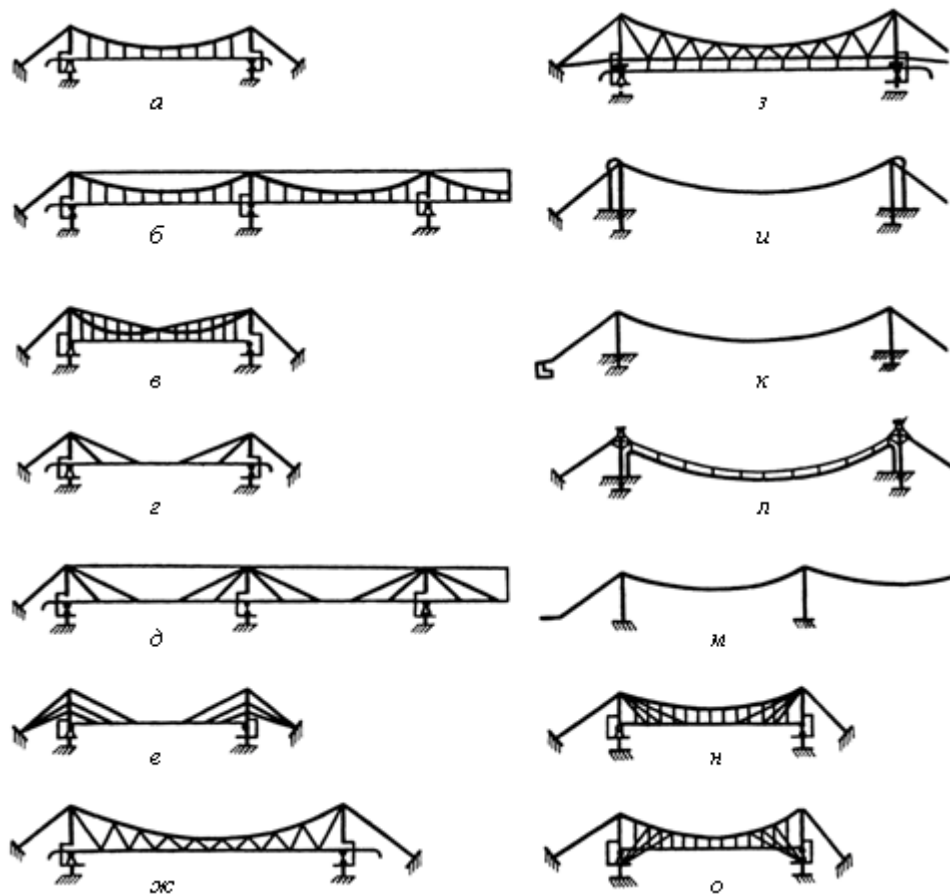


Рис. 2.10. Висячие переходы трубопроводов:

а-в – одно- и двухцепные с вертикальными подвесками; *г-е* – радиально-вантовые; *ж, з* – с решетчатыми вантовыми фермами; *и-м* – в виде провисающей нити (*л* – с поддерживающими канатами); *н, о* – с фермами повышенной жесткости

Впрочем, несмотря на целый ряд преимуществ, переходы в виде провисающей нити не получили массового применения. Последнее связано с тем, что до сих пор некоторые специалисты считают, что такие переходы менее надежны и их следует строить только на отводах и линиях местного значения. Такое мнение сложилось, по-видимому, из-за аварий нескольких сооружений. Они явились следствием ошибок, допущенных при проектировании и строительстве переходов, объективных же причин для разрушения переходов в виде провисающей нити не больше, чем любой другой системы.

Одноцепные переходы состоят из цепи (стального каната или пучка канатов), перекинутой через пилоны, к которой с помощью подвесок прикрепляют трубопровод. Причем последний играет здесь роль балки жесткости,

работающей на изгиб от равномерно распределенных по длине пролета постоянной и временной нагрузок. Кроме того, при несимметричном нагружении трубопровод работает в составе фермы, в результате чего заметно снижается ее деформативность. При этом канаты цепи передают на пилоны вертикальную составляющую распора, а на анкерные опоры – горизонтальную.

Оптимальное значение стрелы провисания цепи находится в пределах $1/8$ – $1/12$ пролета. Расстояние между подвесками определяется возможностью использования трубы при работе ее на изгиб, а также конструктивными соображениями: выбором сечения подвесок, типа натяжных устройств и др.

Нужно сказать, что трубопровод подвешивают как прямолинейно, так и с небольшим подъемом к середине пролета, величина которого определяется возможными изменениями длины цепи от нагрузок, влиянием температуры и другими воздействиями.

Рекомендуется применение цельных на весь переход канатов, закрепляемых на опорных частях пилона накладками на болтах. При этом не требуется сложного стыкования канатов; закрепление их на пилонах несложно, так как обычно сил трения достаточно для сопротивления возможным горизонтальным усилиям. Закрепление болтами выполняется только для восприятия монтажных нагрузок. Если же длина канатов меньше длины перехода, то стыки канатов целесообразно размещать на вершинах пилонов в специально запроектированных конструкциях оголовка.

Опорные части на вершинах пилонов рекомендуется выполнять сварными из толстолистовой стали, поскольку они значительно проще в изготовлении и дешевле литых. Размеры опорных частей зависят от радиуса изгиба опорной поверхности и соответствующей ей длины провисания канатов. Выбор этих параметров существенно влияет на условия работы стальных канатов. На участках перегибов канаты находятся в менее благоприятных условиях, чем на свободных участках, т. к. подвергаются воздействию дополнительных силовых факторов – изгибу и поперечному обжатию. При этом напряжения от изгиба проволок каната могут достигать значений, не только соизмеримых с напряжениями от осевой нагрузки, но и превосходящих их.

Примером целесообразной конструкции опорной части может служить решение, принятое в проектах висячих переходов трубопроводов, разработанных Украинским институтом стальных конструкций им. В.Н. Шимановского. В этом решении опорная часть сваривается из стальных листов, в которых желоба для канатов образуются строжкой. После строжки листы изгибаются по требуемому радиусу. Благодаря этому исключается обработка опорных частей на карусельных станках. Причем для создания плотного опирания по всей длине и исключения шлифовки желобов предусмотрена обертка канатов листом из деформируемого алюминиевого сплава АД-1.

В проектах газопроводов, разработанных институтом «Укрگیпрогаз», для крепления труб приняты поперечные траверсы с седлами. Вертикальные подвески запроектированы без талрепов. Вертикальное положение труб регу-

лируется подтяжкой гаек крепления подвесок к траверсам. Однако эта конструкция более трудоемка в изготовлении и требует большего расхода металла.

В качестве смотровых устройств применяются мостики и тележки. По расходу металла, стоимости и трудоемкости предпочтительнее решение со смотровой тележкой. Однако в эксплуатации более удобны решения со смотровым мостиком. В зависимости от конструкции перехода, количества труб и т. п. смотровой мостик может устраиваться сверху и снизу трубопровода.

Обратим внимание на то, что в практике строительства иногда вместо смотрового мостика устраивают проезд для автомашин. В этом случае конструкция перехода значительно утяжеляется и приближается к конструкции автодорожных мостов. Кроме того, для восприятия подвижной нагрузки приходится проектировать балочную клетку, состоящую из продольных и поперечных балок. Впрочем, при двух и более трубах большого диаметра в качестве продольных балок могут использоваться и сами трубы.

Вообще говоря, наибольшее распространение в практике строительства получили переходы, схемы которых приведены на рис. 2.11. В переходах, приведенных на рис. 2.11, *а, б, д*, участок трубопровода, расположенный между вантами, подвергается дополнительному растяжению под действием горизонтальной составляющей усилий в вантах. Однако поскольку площадь поперечного сечения трубы сравнительно большая, то растягивающие напряжения в ней, как правило, не являются определяющими. На газопроводах диаметром 529–1020 мм расстояние между точками крепления радиальных вант колеблется от 18 до 40 м, а на нефтепроводах – от 12 до 30 м.

С целью уменьшения расхода материала на опоры при сравнительно небольших пролетах целесообразно применять решение, приведенное на рис. 2.11, *е*. В этом случае участок трубопровода, расположенный между смежными вантами, является сжатым. В таких переходах длина пролета несколько меньше, чем в переходах с растянутым участком трубопровода (рис. 2.11, *а–в*). При этом ее следует определять с учетом продольного изгиба трубы.

Стоит отметить, что с увеличением высоты пилонов заметно уменьшаются усилия в несущих (наклонных) вантах и их сечение, но возрастает расход металла на пилоны. Поэтому оптимальную высоту пилонов определяют на основании технико-экономических расчетов.

В радиально-вантовых переходах трубопроводов диаметром 529–1020 мм при пролетах соответственно 60–100 м горизонтальное раскрепление трубопровода не проводится. При больших же пролетах, особенно в районах со значительными ветровыми нагрузками, устраиваются оттяжки.

В простейших радиально-вантовых фермах небольших пролетов (до 70 м) целесообразно применение вант из круглой стали, сваренных из отдельных стержней в монтажные элементы удобной для транспортирования длины. Заводские соединения осуществляются контактной сваркой, а монтажные – обычной сваркой с накладками. На концах тяг привариваются фансонки из листовой стали для крепления к пилонам и трубопроводу.

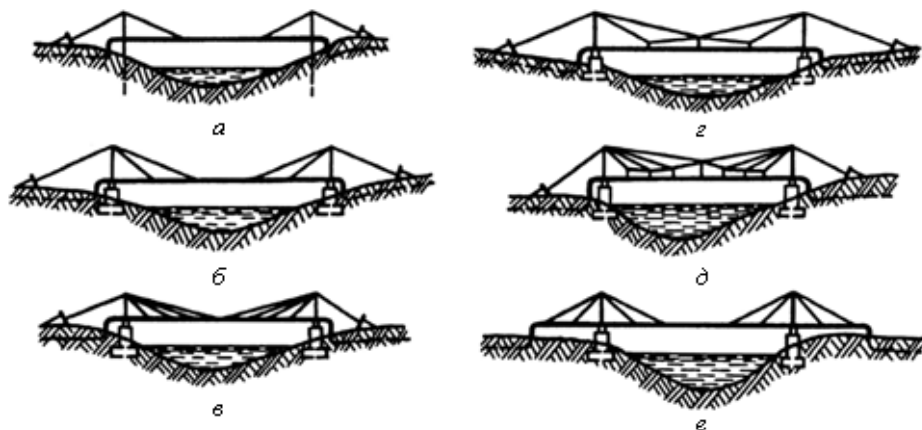


Рис. 2.11. Радиально-вантовые трубопроводные переходы с передачей распора: *a–д* – на анкерные опоры; *e* – на трубопровод

При больших пролетах следует применять ванты из стальных канатов. Причем последние необходимо переводить через пилон и обжимать на опорной части накладками с болтами точно так же, как и в одноцепных фермах.

Также очень характерным является здесь то, что рассматриваемые конструкции во многом аналогичны одно- и двухцепным переходам: по конструкции пилонов, опиранию на них канатов и труб, по деталям крепления канатов, натяжным устройствам и т. п. Поэтому дальше рассматриваются лишь особенности конструкции и отдельные узлы, характерные для таких ферм.

Наибольшее распространение получили вантовые системы с треугольной решеткой как с восходящими, так и с нисходящими опорными раскосами.

По характеру взаимодействия ферм с трубопроводом различают системы, в которых трубопровод подвешивается к двухпоясной вантовой ферме с гибкими верхним и нижним поясами, и системы с гибким верхним и жестким (в виде трубы) нижним поясами.

Следует заметить, что решающее значение для уменьшения кинематических перемещений и, как следствие, прогибов вантовой системы имеет положение связей, препятствующих перемещению несущего элемента вдоль пролета. Именно поэтому этот принцип положен в основу разработки вантовых ферм повышенной жесткости. Схемы некоторых из этих ферм приведены на рис. 2.10, *н, о*. Однако при проектировании таких ферм следует иметь в виду, что решающее значение в уменьшении кинематических перемещений имеют всего лишь одна или две связи. При дальнейшем же увеличении числа связей кинематические перемещения уменьшаются незначительно.

ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ РАСЧЕТА ГИБКИХ НИТЕЙ

§ 3.1. Классификация нитей

Применяемые в строительных конструкциях нити могут быть разделены, с одной стороны, на гибкие и жесткие, а с другой – на нити с малыми и большими стрелами провисания. Кроме того, нити могут быть загружены разнообразными нагрузками, но среди них обязательно присутствует нагрузка от собственного веса, равномерно распределенная по всей длине нити. Причем хорошо известно, что абсолютно гибкая нить при загрузении ее собственным весом искривляется в соответствии с уравнением цепной линии

$$y = \frac{H}{q_0} \left(\operatorname{ch} \frac{q_0}{H} x - 1 \right),$$

где величина q_0 является погонной нагрузкой на единицу длины нити.

Очевидно, что величина нагрузки на единицу пролета (или иными словами на единицу длины горизонтальной проекции l нити) по длине изменяется, как это показано на рис. 3.1. А именно: в середине нити, нагруженной собственным весом, она равна q_0 , а при приближении к опорам будет увеличиваться, достигая значения $q_0 = q_0 / \cos \alpha$, где α – угол наклона касательной к нити по отношению к горизонту (рис. 3.1, *а*).

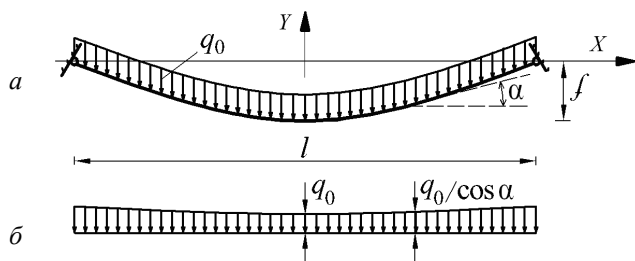


Рис. 3.1. Схема нити (*а*) и распределение действующей нагрузки (*б*)

Обратим внимание на то, что если нить имеет малую стрелу провисания, то углы α будут также небольшими и значения $\cos \alpha$ окажутся мало отличающимися от единицы. Поэтому нагрузка по длине пролета нити почти не будет отличаться от равномерно распределенной. В подобных случаях можно значительно упростить расчет нити, принимая нагрузку q распределенной равномерно по длине пролета (рис. 3.1, *б*), а не по длине самой нити. При этом уравнение кривой провисания нити будет представлять собой уже не уравнение цепной линии, а уравнение параболы.

По этому признаку обычно и разделяют нити – на нити с малыми и

большими стрелами провисания. Точнее говоря, если возможно при расчете нити без больших погрешностей считать действующую на нее нагрузку распределенной по длине пролета, то тогда нить является нитью с малой стрелой провисания, в противном же случае – с большой. Указать точную границу между нитями с малыми и большими стрелами провисания практически невозможно, т. к. эта граница зависит от многих параметров: характера и величины нагрузки, материала и условий работы нити, а также от необходимой степени точности. Обычно для нитей такая граница определяется через отношение пролета к стреле провисания и находится в пределах $l/f = 10 \div 20$.

Естественно, что при таком рассуждении все дальнейшие выводы основаны на предположении равномерного распределения веса нити по длине пролета, т. е. ограничиваются нитями с относительно малыми стрелами провисания. Однако в общем случае нити не всегда должны ограничиваться указанными пределами отношения пролета к стреле провисания, т. к. в строительных конструкциях в большинстве случаев имеется в виду не собственный вес нити, а начальная нагрузка и распределение ее по длине пролета или по длине нити. Эта нагрузка может распределяться подобно собственному весу нити по закону косинуса. Но часто только собственный вес нити распределяется равномерно по ее длине, а остальная часть начальной нагрузки распределяется равномерно по длине пролета. В таких случаях вес нити обычно бывает весьма незначительным по сравнению с остальной нагрузкой и поэтому можно использовать представленные ниже решения для нитей со стрелами провисания, значительно превышающими указанные пределы.

Деление нитей на гибкие и жесткие в такой же степени условно, как и деление на нити с малыми и большими стрелами провисания. Известно, что идеально гибких нитей (за исключением цепей, которые здесь не рассматриваются) не существует, однако для многих систем нитей и случаев их нагружения изгибающие моменты в условиях напряженного состояния нити играют такую малую роль, что ими можно пренебречь и считать нити идеально гибкими. Поэтому изучение расчета висячих систем и их конструктивных элементов следует начинать с рассмотрения теории расчета гибких нитей.

§ 3.2. Вводные замечания. Исходные допущения

В предлагаемой теории расчета рассматриваются нити, удовлетворяющие следующим требованиям:

1. Отношение пролета нити к стреле ее провисания должно находиться в пределах $8 \leq l/f < \infty$, т. е. нить принимается полой. При этом если опоры нити расположены на разных уровнях, то угол наклона к горизонту линии, соединяющей точки ее подвеса, не должен превышать 20° .

2. Жесткость нити на изгиб настолько мала, что ею можно пренебречь, а жесткость нити на растяжение постоянна по ее длине.

3. Материал нити считается однородным, изотропным и абсолютно упругим.

Согласно данным литературных источников подавляющее большинство (около 95 %) гибких нитей, применяемых в висячих конструкциях, отвечают данным требованиям.

При расчете нитей учитываются следующие положения:

1. Перемещения нити считаются не малыми и соизмеримыми со стрелой ее провисания. В связи с этим расчет является нелинейным и ведется по деформированной схеме.

2. Статическая неопределимость относительно распора раскрывается с помощью принципа возможных перемещений. При этом принцип Лагранжа используется в своей строгой постановке, т. е. к перемещениям бесконечно малым, а не конечным.

§ 3.3. Основные зависимости расчета гибких нитей

Начнем рассмотрение с абсолютно гибкой нити, нагруженной произвольной вертикальной нагрузкой (рис. 3.2, а). Для определения усилий, возникающих в нити, необходимо найти ее опорные реакции.

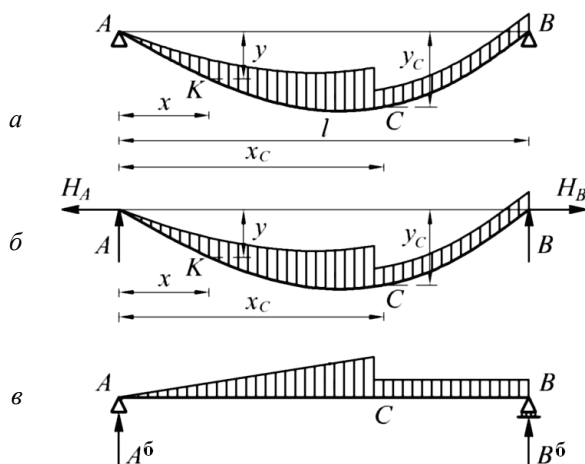


Рис. 3.2. К расчету абсолютно гибкой нити:
а – расчетная схема нити; б – реакции нити;
в – реакции простой балки, подобной нити

Так как нить гибкая и воспринимать изгибающие моменты не может, то в любом ее сечении, в том числе и на опорах, усилия направлены только вдоль нити. Поэтому реакции опор будут направлены по касательным к нити. Разложим теперь реактивные усилия на две составляющие: вертикальную и горизонтальную (рис. 3.2, б), каждую из которых можно определить с применением уравнений статики.

Равенство нулю суммы проекций всех сил на горизонтальную ось дает

$$\sum X = -H_A + H_B = 0.$$

Отсюда следует, что

$$H_A = H_B = H, \quad (3.1)$$

где H – «распор» нити.

Сумма моментов всех сил относительно опоры B дает

$$\sum M_B = -Al + \sum M_{B_0} = 0, \quad (3.2)$$

где M_{B_0} – сумма моментов относительно опоры B всех сил, действующих на нить, за исключением опорных реакций.

Из уравнения (3.2) получим:

$$A = \frac{\sum M_{B_0}}{l}. \quad (3.3)$$

Кстати говоря, эта реакция равна той реакции, которая возникла бы в простой балке AB (рис. 3.2, ϵ), нагруженной точно так же, как и заданная нить. Подобные реакции будем в дальнейшем называть «балочными» реакциями и обозначать той или иной буквой (например A, B, R) с индексом «б» (рис. 3.2, ϵ).

Перейдем теперь к определению формулы для нахождения распора нити. Для этого должны быть известны координаты хотя бы одной точки нити, например точки C (рис. 3.2, a). Так как нить гибкая, то момент в точке C будет равен:

$$\sum M_{Cл} - Hy_C = 0, \quad (3.4)$$

где первый член представляет собой сумму моментов всех вертикальных сил (включая и опорную реакцию), расположенных левее сечения C .

Из рис. 3.2, ϵ также следует, что такая сумма будет представлять собой изгибающий момент в соответствующем сечении простой балки. Подобные моменты по аналогии с реакциями будем называть «балочными» и обозначать буквой M с индексом «б», в данном случае $M_C^б$. Тогда уравнение (3.4) можно представить в виде

$$M_C^б = Hy_C, \quad (3.5)$$

откуда, в свою очередь, имеем:

$$H = \frac{M_C^б}{y_C}, \quad (3.6)$$

где $M_C^б$ и y_C – балочный момент и ордината нити в сечении C .

Заметим, что формула (3.6) позволяет определить распор нити в том случае, если известна ордината y_C в каком-то ее сечении.

Часто необходимо узнать ординаты нити в любой точке по ее длине. После определения распора нити такая задача легко решается с применением

формулы (3.5). Причем эта формула справедлива не только для какой-то определенной точки C , но и для любой точки K по длине нити. При таких условиях формула (3.5) может быть переписана в виде

$$M^6 = Hy, \quad (3.7)$$

где M^6 и y относятся к любому сечению нити.

Отсюда следует важная формула для определения ординаты нити в произвольном ее сечении:

$$y = \frac{M^6}{H}. \quad (3.8)$$

§ 3.4. Общее решение задачи для гибкой нерастяжимой нити

3.4.1. Основное дифференциальное уравнение задачи и его общий интеграл. Предположим, что гибкая нерастяжимая нить (т. е. нить, у которой жесткость на растяжение равна бесконечности $EF = \infty$ и поэтому отсутствуют продольные деформации) длиной L подвешена к расположенным на одном уровне опорам A и B и нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$, заданной в виде непрерывной или прерывной функции от координаты x (рис. 3.3). Требуется найти уравнение линии равновесия нити.

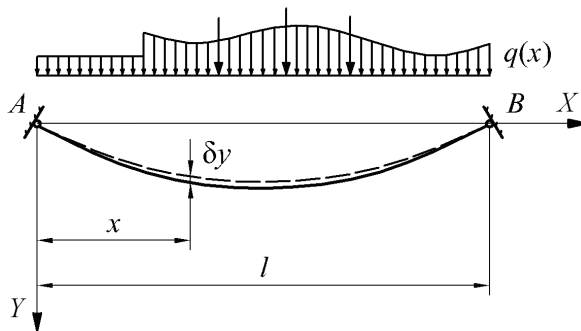
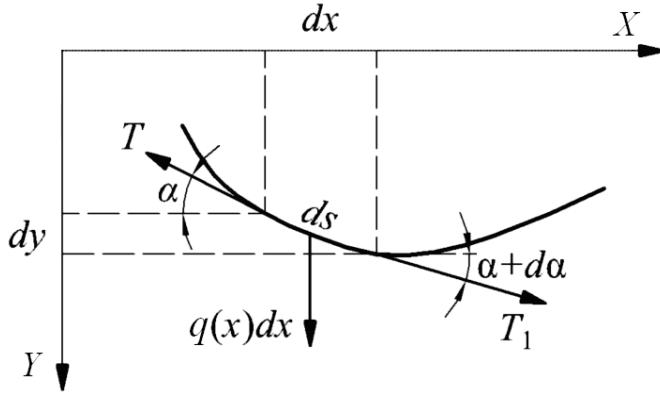


Рис. 3.3. К расчету гибкой нерастяжимой нити

Рассмотрим условия равновесия изображенного на рис. 3.4 элемента нити ds , т. е. приравняем нулю проекции всех сил на горизонтальную и вертикальную оси. Как видно из рис. 3.4 на элемент нити действуют нормальные растягивающие силы T и T_1 и вертикальная нагрузка $q(x)dx$. Суммируя проекции всех сил на ось X , получим следующее уравнение:

$$-T \cos \alpha + T_1 \cos (\alpha + d\alpha) = 0, \quad (3.9)$$

откуда, в свою очередь, следует, что горизонтальная проекция нормальных сил H есть величина постоянная.

Рис. 3.4. К определению равновесия элемента нити ds

Вертикальные составляющие нормальных сил будут равны:

$$-H \operatorname{tg} \alpha = -H \frac{dy}{dx}; \quad H \operatorname{tg} (\alpha + d\alpha) = H \left[\frac{dy}{dx} + d \left(\frac{dy}{dx} \right) \right].$$

Составим второе уравнение равновесия:

$$H \frac{dy}{dx} + H d \left(\frac{dy}{dx} \right) - H \frac{dy}{dx} + q(x)dx = 0, \quad (3.10)$$

откуда имеем:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q(x). \quad (3.11)$$

Полученное равенство есть известное основное дифференциальное уравнение равновесия гибкой нерастяжимой нити, находящейся под действием произвольной вертикальной нагрузки.

Интегрируя уравнение (3.11) один раз, получим:

$$H \frac{dy}{dx} = -\int q(x)dx + C_1 = -\varphi(x) + C_1,$$

а интегрируя вторично, имеем:

$$Hy = -\int \varphi(x)dx + C_1 x + C_2.$$

При этом, используя аналогию с простой балкой, можно записать

$$\left. \begin{aligned} H \frac{dy}{dx} &= Q^6; \\ Hy &= M^6 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

или в иной форме записи

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Q^6}{H}; \\ y &= \frac{M^6}{H}, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

где Q^6 и M^6 – соответственно поперечная сила и изгибающий момент в однопролетной балке пролетом l , нагруженной нагрузкой $q(x)$.

3.4.2. Дифференциальная зависимость между распором и нагрузкой (первый вариант решения). Для того чтобы решение (3.13) было доведено до конца, необходимо определить величину распора нити. Последнее просто сделать при условии, что заранее известна хотя бы одна из ординат линии равновесия нити. Так, например, если нить нагружена равномерно распределенной вдоль оси X нагрузкой q и, кроме того, известна стрела провисания нити в середине пролета f , то в этом случае величину распора можно определить по формуле

$$H = \frac{ql^2}{8f}.$$

Однако в практических задачах, как правило, ни одна из промежуточных ординат линии равновесия заранее не известна. Обычно задаются либо только длиной нити L , либо ее стрелой провисания f при одном из частных случаев нагружения простой нагрузкой. Такой чаще всего является нагрузка, равномерно распределенная вдоль пролета, нагрузка в виде одной сосредоточенной силы либо любая другая несложная нагрузка. Для таких нагрузок известно точное значение величины распора и, следовательно, уравнение линии равновесия нити. Поскольку же здесь рассматривается общий случай работы нити, когда она загружена произвольной нагрузкой, то задача усложняется.

Для решения задачи воспользуемся одним из основных законов механики – принципом возможных перемещений (принципом Лагранжа), согласно которому сумма работ всех внешних U_1 и внутренних U_2 сил на возможных бесконечно малых перемещениях системы из положения равновесия равна нулю

$$U_1 + U_2 = 0. \quad (3.14)$$

Однако поскольку здесь принято, что нить нерастяжима, то сумма работ всех внутренних сил из условия (3.14) выпадает.

Предположим далее, что гибкая нерастяжимая нить с поперечным сечением F нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия. Выберем в качестве независимой переменной величину нагрузки $q(x)$, а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Теперь допустим, что действующая на нить нагрузка $q(x)$ получила очень малое, но конечное приращение своей величины, равное $\delta q(x)$. Тогда нить переместится из своего положения равновесия на величину δy , а распор

H получит некоторое приращение δH (рис. 3.3). Принимая во внимание вторую из формул (3.13), величину δy можно представить следующим образом:

$$\delta y = \frac{H\delta M^6 - M^6\delta H}{H(H + \delta H)}. \quad (3.15)$$

Работа внешних сил вычисляется как интеграл из произведения функции нагрузки $q(x) + \delta q(x)$ на выражение (3.15), распространенный на всю длину пролета l :

$$U_1 = \int_0^l [q(x) + \delta q(x)] \frac{H\delta M^6 - M^6\delta H}{H(H + \delta H)} dx. \quad (3.16)$$

Подставляя последнее выражение в (3.14), а также учитывая, что в рассматриваемом случае, на что уже было указано раньше, работа внутренних сил равна нулю, после некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{q(x)H\delta M^6}{H(H + \delta H)} dx - \int_0^l \frac{q(x)M^6\delta H}{H(H + \delta H)} dx + \\ & + \int_0^l \frac{\delta q(x)H\delta M^6}{H(H + \delta H)} dx - \int_0^l \frac{\delta q(x)M^6\delta H}{H(H + \delta H)} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Деля уравнение (3.17) почленно на δH и учитывая, что выражения для функции изгибающих моментов и ее вариации могут быть однозначно определены в виде $M^6 = M^6(q, x) = q(x)M^6(1, x)$ и $\delta M^6 = \delta M^6(q, x) = M^6(\delta q, x) = \delta q(x)M^6(1, x)$ в связи с линейностью зависимости между изгибающим моментом и нагрузкой, а также переходя к пределу при $\delta q(x) \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, после приведения подобных членов, некоторых других преобразований и разделения переменных получим следующее общее дифференциальное уравнение для определения величины распора в гибкой нерастяжимой нити:

$$\frac{dH}{H} = \frac{q(x)dq(x) \int_0^l M^6(1, x) dx}{[q(x)]^2 \int_0^l M^6(1, x) dx}. \quad (3.18)$$

Отметим, что выражение, стоящее в числителе правой части уравнения (3.18), является половиной дифференциала знаменателя. Поэтому отсюда сразу же вытекает решение задачи о гибкой нерастяжимой нити

$$\ln \frac{H}{C_0} = \frac{1}{2} [q(x)]^2 \int_0^l M^6(1, x) dx, \quad (3.19)$$

где C_0 – постоянная интегрирования.

Внося нагрузку обратно под знак функции изгибающих моментов, окончательное решение задачи о гибкой нерастяжимой нити можно записать в виде

$$H = C_0 \sqrt{D}, \quad (3.20)$$

где положено

$$D = \int_0^l q(x) M^6 dx \quad (3.21)$$

или, что то же самое,

$$D = \int_0^l (Q^6)^2 dx. \quad (3.22)$$

Входящую в выражения (3.21) и (3.22) величину D будем называть «характеристикой нагрузки», т. к. она в интегральном виде отражает величину и характер функции действующей на нить нагрузки, а также условия закрепления ее концов. Значения характеристики нагрузки D могут быть определены в каждом конкретном случае либо непосредственным интегрированием, либо по методу Верещагина [162], либо же по квадратурным формулам Ньютона-Котеса [56, 57]. Если функция нагрузки не является непрерывной на всем пролете, то интегралы, входящие в выражения (3.21) и (3.22), вычисляются отдельно на каждом участке, где функция нагрузки непрерывна, а результаты суммируются. Если же нагрузка представлена в виде сосредоточенных сил, то интеграл в выражении (3.21) заменяется суммой из произведений этих сил на ординаты соответствующей эпюры моментов.

Произвольную постоянную интегрирования C_0 можно легко определить исходя из начальных условий задачи. Например, если задано, что стрела провисания нити равна f и на нить действует равномерно распределенная нагрузка $q(x) = q = \text{const}$ (рис. 3.5, а), то тогда будем иметь:

$$H_0 = \frac{M_{l/2}^6}{f} = \frac{q^2 l^2}{8f}; \quad D_0 = \int_0^l q M^6 dx = \frac{q^2 l^3}{12},$$

что позволяет значение произвольной постоянной интегрирования C_0 на основании (3.20) записать так:

$$C_0 = \frac{H_0}{\sqrt{D_0}} = \frac{ql^2 \sqrt{12}}{8fl \sqrt{l}} = \frac{\sqrt{3}l}{4f}.$$

Тогда, из выражения (3.20) окончательно получим:

$$H = \frac{1}{4f} \sqrt{3lD}. \quad (3.23)$$

Если же задана длина нити L и нить загружена сосредоточенной силой P в середине пролета (рис. 3.5, б), то в этом случае соотношения для f , H_0 и D_0 принимают вид

$$f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - l^2}; \quad H_0 = \frac{M_{l/2}^6}{f_1} = \frac{Pl}{2\sqrt{L^2 - l^2}} \quad \text{и} \quad D_0 = \frac{1}{4} P^2 l.$$

Следовательно, для произвольной постоянной интегрирования C_0 имеем:

$$C_0 = \frac{H_0}{\sqrt{D_0}} = \sqrt{\frac{l}{L^2 + l^2}}, \quad (3.24)$$

а для распора H получим следующее выражение:

$$H = \sqrt{\frac{lD}{L^2 - l^2}}. \quad (3.25)$$

Причем в последнем соотношении, как и в (3.23), значение D определяется с использованием формулы (3.21) или (3.22).

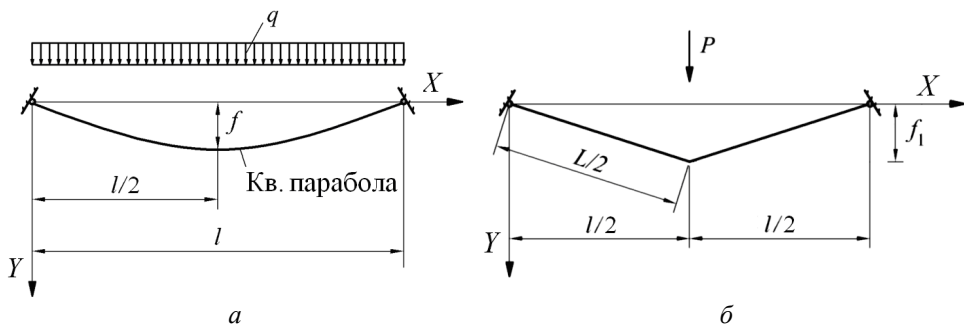


Рис. 3.5. К расчету гибкой нерастяжимой нити:
 а – действие равномерно распределенной нагрузки;
 б – действие сосредоточенной силы в середине пролета

Здесь необходимо отметить, что в самом начале настоящей главы было принято допущение, которое привело к такой чрезвычайно простой форме решения, а именно: величина вертикальной составляющей возможного перемещения не зависит от имеющих место относительно небольших горизонтальных смещений нагрузки. Такое предположение для пологих нитей, которые, как правило, применяются в строительных конструкциях, весьма близко к действительности и дает ничтожную по величине погрешность решения, полностью компенсирующуюся его простотой. Тем не менее, рассмотрим вопрос о приближенности решения задачи о гибкой нерастяжимой нити. В связи с этим заметим, что формула (3.15) выражает величину вертикальной составляющей возможного перемещения приближенно, что объясняется следующим образом.

При решении задачи было принято, что точки приложения нагрузки прикреплены неподвижно к гибкой нити и совершают возможные перемещения вместе с ней. Сообразно с этим в процессе перемещения каждая точка приложения нагрузки перемещается как в вертикальном, так и в горизонталь-

ном направлении. Вертикальная составляющая возможного перемещения выражается через величины изгибающих моментов M^b до и после возможного перемещения. Причем изгибающий момент, действующий после возможного перемещения, в свою очередь, зависит как от величины приращения дополнительной нагрузки, так и от места расположения нагрузки в пролете в конце перемещения.

Горизонтальное смещение нагрузки в процессе возможного перемещения, хотя и весьма незначительно, но все же в некоторой степени отражается на величине конечного изгибающего момента, а, следовательно, и на величине вертикальной составляющей возможного перемещения. Именно поэтому в строгой постановке характер функций M^b и δM^b в (3.15) не будет одинаковым. Однако этим обстоятельством для упрощения задачи можно пренебречь в предположении, что функция изгибающего момента не изменяется от имеющих место небольших горизонтальных смещений нагрузки.

С другой стороны, учет горизонтальных смещений не может существенно отразиться на точности решения еще и потому, что работа вертикальных сил на горизонтальных перемещениях в рассматриваемых задачах равна нулю, поскольку нагрузка здесь имеет постоянное вертикальное направление.

3.4.3. Дифференциальная зависимость между распором и нагрузкой (второй вариант решения). Как это хорошо известно, принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) является не только основным, но и наиболее универсальным инструментом решения задач механики. Этот принцип на практике часто оказывается более простым, наглядным и интуитивно более понятным, чем многие другие методы решения. Кроме того характерная особенность этого принципа заключается в том, что его применение позволяет получать аналогичные разрешающие уравнения вне зависимости от используемых варьируемых параметров. В подтверждение сказанному рассмотрим второй вариант решения задачи для гибкой нерастяжимой нити, в котором, в отличие от изложенного выше первого варианта, в качестве независимой переменной примем не величину нагрузки $q(x)$, а длину пролета нити l . При этом, как и ранее, в качестве искомой функции примем величину распора H .

Допустим, что одна из опор нити, например опора B , переместилась вправо на некоторую, очень малую, но конечную величину δl . При этом длина пролета увеличилась и стала равной $l + \delta l$, величина распора H получила некоторое приращение δH , а каждая точка нити переместилась из своего положения равновесия на величину δu (рис. 3.6). Если при этом пренебречь влиянием весьма малых горизонтальных перемещений точек приложения нагрузки на величину изгибающих моментов M^b , то приращения ординат нити δu с учетом второй формулы из (3.13) можно представить следующим образом:

$$\delta y = -\frac{M^6 \delta H}{H(H + \delta H)}. \quad (3.26)$$

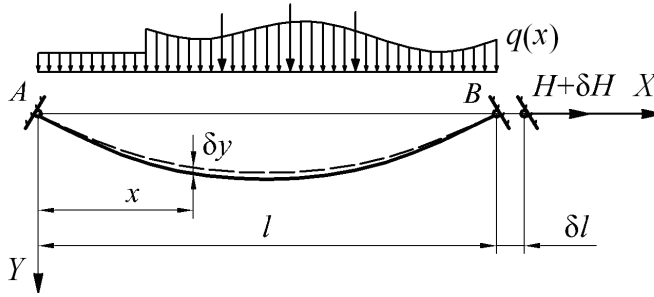


Рис. 3.6. К расчету гибкой нерастяжимой нити

Работа внешних сил состоит из работы горизонтальной составляющей опорной реакции $H + \delta H$ на перемещении δl и работы функции нагрузки $q(x)$ на перемещениях δy , которая вычисляется как интеграл из произведения нагрузки $q(x)$ на выражение (3.26), распространенный на всю длину пролета l :

$$U_1 = (H + \delta H)\delta l - \int_0^l \frac{q(x)M^6 \delta H}{H(H + \delta H)} dx. \quad (3.27)$$

Подставляя полученное выражение в (3.14), а также учитывая, что в рассматриваемом случае по-прежнему работа внутренних сил равна нулю, после несложных преобразований и использования обозначения (3.21) получим:

$$H^3 + 2H^2 \delta H + H \delta^2 H = D \frac{\delta H}{\delta l}. \quad (3.28)$$

Переходя далее в уравнении (3.28) к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta l \rightarrow 0$, получим следующее дифференциальное уравнение для определения величины распора в гибкой нерастяжимой нити:

$$H^3 = D \frac{dH}{dl}. \quad (3.29)$$

В общем случае решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$l = -\frac{D}{2H^2} + C. \quad (3.30)$$

Значение произвольной постоянной интегрирования C можно несложно определить с использованием известных решений для частных задач. Так, например, при начальной стреле провисания нити f и ее загрузке равномерно распределенной нагрузкой $q(x) = q = \text{const}$ (рис. 3.5, а) для величины распора имеем:

$$H = \frac{ql^2}{8f},$$

а значение характеристики нагрузки D , вычисленное по формуле (3.21) или (3.22), будет равно:

$$D = \frac{q^2 l^3}{12}.$$

В результате подстановки найденных значений H и D в (3.30), произвольная постоянная интегрирования определится как

$$C = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}.$$

Используя теперь полученное значение C из (3.30), найдем величину распора

$$H = \frac{1}{4f} \sqrt{3lD}. \quad (3.31)$$

Обратим внимание на следующее. Выполняя сопоставление решения (3.31) с полученным ранее решением (3.23), легко убеждаемся, что эти решения, как и следовало ожидать, являются полностью идентичными.

3.4.4. Основные зависимости расчета гибких нитей с использованием формулы длины дуги. Вначале прежде всего заметим, что расчет основан на использовании известной формулы длины дуги

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

На основании первого выражения из (3.13) эту формулу можно представить следующим образом:

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \frac{(Q^6)^2}{H^2}} dx.$$

Если заменить радикал в последней формуле его разложением в ряд, то выражение для длины дуги оказывается равным

$$L = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Q^6}{H} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{Q^6}{H} \right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{Q^6}{H} \right)^6 - \dots \right] dx.$$

Далее выразим длину дуги приближенно, ограничившись при этом двумя первыми членами разложения:

$$L = \int_0^l \left[\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{(Q^6)^2}{H}} \right] dx = l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l (Q^6)^2 dx.$$

С учетом (3.22) получим следующее равенство:

$$L = l + \frac{D}{2H^2}.$$

Отсюда найдем величину распора

$$H = \sqrt{\frac{D}{2(L-l)}}. \quad (3.32)$$

Точность решения задачи можно повысить, если учесть еще один член ряда, т. е. если воспользоваться тремя первыми членами разложения. В этом случае формула для длины дуги запишется так:

$$L = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Q^6}{H} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{Q^6}{H} \right)^4 \right] dx, \quad (3.33)$$

откуда следует, что

$$L = l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l (Q^6)^2 dx - \frac{1}{8H^4} \int_0^l (Q^6)^4 dx.$$

Если же использовать обозначение (3.22), то формула для длины дуги переписывается в виде

$$L = l + \frac{D}{2H^2} - \frac{D_1}{8H^4},$$

где дополнительно положено, что

$$D_1 = \int_0^l (Q^6)^4 dx.$$

В результате для определения распора получим обыкновенное биквадратное уравнение:

$$H^4 - \frac{D}{2(L-l)} H^2 + \frac{D_1}{8(L-l)} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$H = \sqrt{\frac{D}{4(L-l)}} + \sqrt{\frac{D^2}{16(L-l)^2} - \frac{D_1}{8(L-l)}}. \quad (3.34)$$

Таким образом, зная длину нити L , можно легко определить величину распора, пользуясь решением (3.32) или (3.34). Из структуры полученных выражений также видно, что решение (3.32) дает большее значение распора, а решение (3.34) – меньшее; при этом точное значение распора находится между этими двумя величинами. С другой стороны решение (3.25) дает величину распора меньшую, чем решение (3.32), но все же с некоторым преувеличением. Следовательно, основное решение попадает так же, как и точное, в середину узкого промежутка между значениями распора (3.32) и (3.34) и поэтому весьма близко к точному.

§ 3.5. Действие дополнительных нагружений специального вида

Общая расчетная схема задачи представлена на рис. 3.7. В данном случае $q(x) = q = \text{const}$ и $p(x) = p = \text{const}$, т. е. гибкая нерастяжимая нить загружена равномерно распределенной начальной нагрузкой по всему пролету и участковой равномерно распределенной нагрузкой, расположенной в произвольном месте пролета.

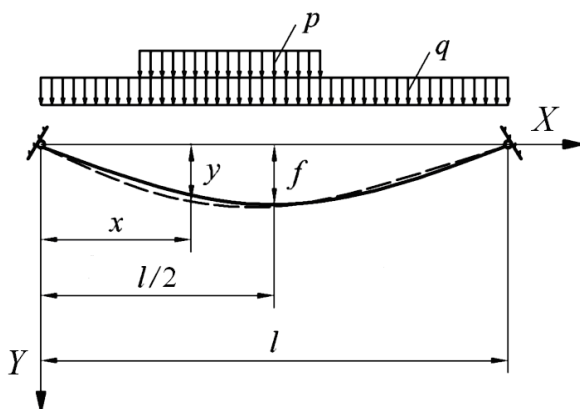


Рис. 3.7. Общая расчетная схема гибкой нерастяжимой нити при действии участковой нагрузки

Используя полученные ранее решения, в дальнейшем в каждом конкретном случае найдем основное неизвестное – величину распора H – и будем считать задачу о расчете гибкой нерастяжимой нити законченной, когда величина распора будет известна.

3.5.1. Случай участковой произвольно расположенной равномерно распределенной нагрузки. Рассмотрим теперь случай, когда участок длиной b , загруженный равномерно распределенной нагрузкой, занимает произвольное положение в пролете. При этом расстояние от начала координат до середины участка обозначим через a (рис. 3.8).

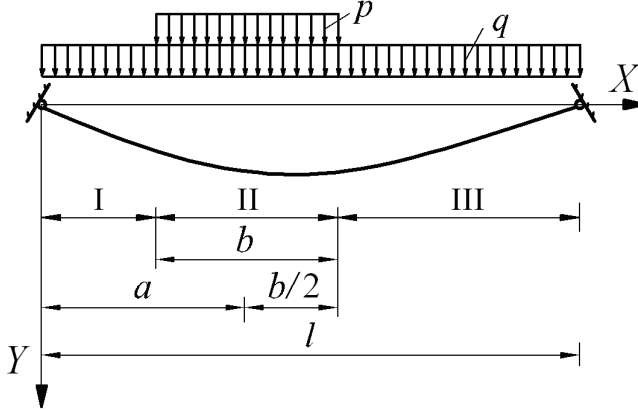


Рис. 3.8. К расчету нити при действии участковой произвольно расположенной равномерно распределенной нагрузки

Уравнение эпюры изгибающих моментов на различных участках будет иметь следующий вид:

$$M_I^6 = -\frac{q}{2}x^2 + \left[\frac{ql}{2} + \frac{b(l-a)p}{l} \right] x; \quad (3.35)$$

$$M_{II}^6 = -\frac{q+p}{2}x^2 + \left[\frac{ql}{2} + \frac{2a(l-b)+bl}{2l}p \right] x - \frac{(2a-b)^2 p}{8}; \quad (3.36)$$

$$M_{III}^6 = -\frac{q}{2}x^2 + \left[\frac{ql}{2} - \frac{pab}{l} \right] x + pab. \quad (3.37)$$

Вычислим характеристику нагрузки D , пользуясь формулой (3.21):

$$D = \int_0^{a-\frac{b}{2}} M_I^6 q dx + \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} M_{II}^6 (q+p) dx + \int_{a+\frac{b}{2}}^l M_{III}^6 q dx. \quad (3.38)$$

Если в формулу (3.38) подставить вместо M_I^6 , M_{II}^6 и M_{III}^6 их выражения из (3.35) – (3.37) и вынести постоянные за знаки интегралов, то формула (3.38) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
D = & -\frac{q^2}{2} \int_0^{a-\frac{b}{2}} x^2 dx + \left[\frac{ql}{2} + \frac{b(l-a)p}{l} \right] q \int_0^{a-\frac{b}{2}} x dx - \\
& -\frac{(q+p)^2}{2} \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} x^2 dx + \left[\frac{ql}{2} + \frac{2a(l-b)+bl}{2l} p \right] (q+p) \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} x dx - \\
& -\frac{(2a-b)^2 (q+p)p}{8} \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} dx - \frac{q^2}{2} \int_{a+\frac{b}{2}}^l x^2 dx + \\
& + \left(\frac{ql}{2} - \frac{pab}{l} \right) q \int_{a+\frac{b}{2}}^l x dx + pqab \int_{a+\frac{b}{2}}^l dx.
\end{aligned}$$

Наконец, после интегрирования, приведения подобных членов и некоторых других промежуточных преобразований, окончательно получим:

$$D = \frac{q^2 l^3}{12} \left[\left(12 \frac{a}{l} - 12 \frac{a^2}{l^2} - 2 \frac{b}{l} \right) \frac{p^2 b^2}{q^2 l^2} + \left(12 \frac{a}{l} - 12 \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{pb}{ql} + 1 \right]. \quad (3.39)$$

Воспользовавшись формулой (3.23), подставим в нее значение D из (3.39). В результате искомая величина распора определится следующим выражением:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{\left(12 \frac{a}{l} - 12 \frac{a^2}{l^2} - 2 \frac{b}{l} \right) \frac{p^2 b^2}{q^2 l^2} + \left(12 \frac{a}{l} - 12 \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{pb}{ql} + 1}. \quad (3.40)$$

Полученную формулу можно несколько упростить, если ввести обозначения $\alpha = a/l$, $\beta = b/l$ и $\gamma = p/q$, тогда

$$H = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{(12\alpha - 12\alpha^2 - 2\beta)\beta^2\gamma^2 + (12\alpha - 12\alpha^2 - \beta^2)\beta\gamma + 1}. \quad (3.41)$$

Если же теперь в решении (3.41) положить $\gamma = 0$, то придем к случаю нити с равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой q , для которого $H = ql^2/8f$. Если кроме того положить, что $\alpha = 0,5$ и $\beta = 1$, то получим:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma + 1} = \frac{ql^2}{8f} (1 + \gamma),$$

что соответствует равномерно распределенной по всему пролету нагрузке с интенсивностью $p + q$.

3.5.2. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета. Рассмотрим случай, когда участковая равномерно распределенная

нагрузка расположена на левой половине пролета (рис. 3.9). В данном случае уравнение эпюры изгибающих моментов на участке I имеет следующий вид:

$$M_I^6 = -\frac{p+q}{2}x^2 + \frac{(3p+4q)l}{8}x, \quad (3.42)$$

а на участке II

$$M_{II}^6 = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{(4q-p)l}{8}x + \frac{pl^2}{8}. \quad (3.43)$$

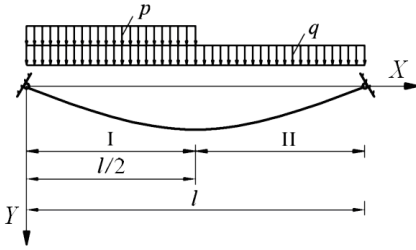


Рис. 3.9. К расчету нити при действии участковой равномерно распределенной нагрузки на левой половине пролета

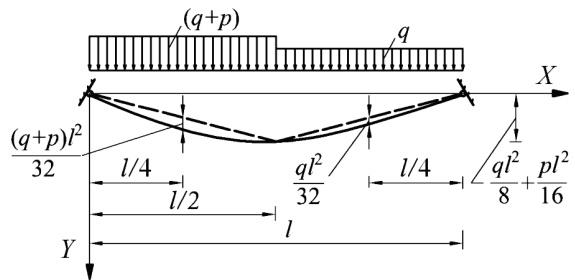


Рис. 3.10. К определению характеристики нагрузки D

Определим характеристику нагрузки D , пользуясь формулой (3.21):

$$D = \int_0^{l/2} M_I^6 (q+p) dx + \int_{l/2}^l M_{II}^6 q dx. \quad (3.44)$$

Если в (3.44) подставить вместо M_I^6 и M_{II}^6 их выражения из (3.42) и (3.43) и вынести постоянные за знаки интегралов, то будем иметь:

$$\begin{aligned} D = & -\frac{(p+q)^2}{2} \int_0^{l/2} x^2 dx + \frac{(3p+4q)(p+q)l}{8} \int_0^{l/2} x dx - \\ & - \frac{q^2}{2} \int_{l/2}^l x^2 dx + \frac{(4q-p)ql}{8} \int_{l/2}^l x dx + \frac{pql^2}{8} \int_{l/2}^l dx. \end{aligned} \quad (3.45)$$

В результате, производя интегрирование и приведение подобных членов, получим:

$$D = \frac{q^2 l^3}{12} + \frac{pql^3}{12} + \frac{5p^2 l^3}{192}. \quad (3.46)$$

Величину D можно найти также с использованием метода Верещагина [162], если произвести соответствующие операции с эпюрой моментов и эпюрой нагрузок (рис. 3.10). Для этого вычислим сумму произведений пло-

щадей отдельных участков эпюры моментов на соответствующие ординаты эпюры нагрузок:

$$D = \left(\frac{ql^2}{8} + \frac{pl^2}{16} \right) \frac{l}{4} (p+q) + \frac{(p+q)^2 l^2 \cdot 2}{32 \cdot 2 \cdot 3} + \\ + \left(\frac{ql^2}{8} + \frac{pl^2}{16} \right) \frac{l}{4} q + \frac{q^2 l^2 \cdot 2}{32 \cdot 2 \cdot 3}, \quad (3.47)$$

что, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, даст то же самое значение D , которое было получено в (3.46). Заметим также, что указанный результат можно получить, если воспользоваться формулой (3.22) и произвести соответствующие операции с эпюрой поперечных сил.

Подставляя найденное значение D в формулу (3.23), получим:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + \frac{p}{q} + \frac{5}{16} \left(\frac{p}{q} \right)^2}. \quad (3.48)$$

Если же использовать введенное выше обозначение $\gamma = p/q$, то выражение (3.48) примет окончательный вид

$$H = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + \gamma + \frac{5}{16} \gamma^2}. \quad (3.49)$$

3.5.3. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки. Теперь рассмотрим нить, представленную на рис. 3.11. В данном случае $\alpha = 0,5$ и распор определится следующим выражением:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{(3 - 2\beta)\beta^2 \gamma^2 + (3 - \beta^2)\beta \gamma + 1}. \quad (3.50)$$

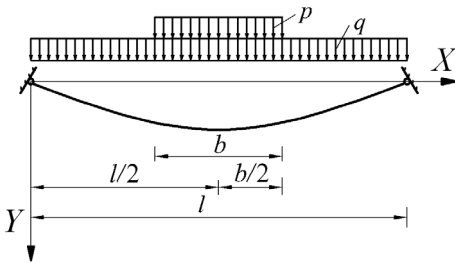


Рис. 3.11. К расчету нити

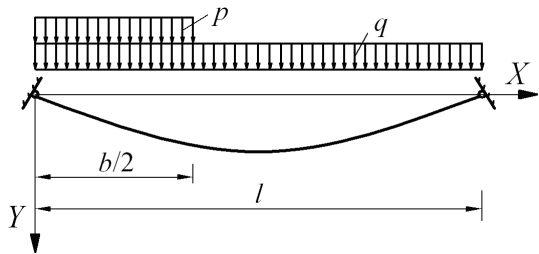


Рис. 3.12. К расчету нити

3.5.4. Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки. Перейдем теперь к рассмотрению нити, изображенной на рис. 3.12, для которой $\alpha = 0,5\beta$. Подставляя это значение в (3.41), получим:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{(4 - 3\beta)\beta^3\gamma^2 + (6 - 4\beta)\beta^2\gamma + 1}. \quad (3.51)$$

Если же в формуле (3.51) положить $\beta = 0,5$, т. е. если принять, что нагрузкой загружена половина пролета, то придем к решению (3.49).

3.5.5. Случай двух участковых несимметричных равномерно распределенных нагрузок. Легко убедиться в том, что при помощи формулы (3.41) можно решить также задачу, изображенную на рис. 3.13. Для этого только необходимо в формуле (3.41) положить $\gamma = -\gamma_2 = p/(p+q)$, а вместо q перед радикалом поставить $p + q$.

Действительно, схему нагрузки, изображенную на рис. 3.13, можно рассматривать как результат совместного действия двух нагрузок – сплошной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $p + q$, направленной вниз, и нагрузки на участке b интенсивностью p , направленной вверх. Последнее приводит задачу к схеме на рис. 3.8, в которой следует принять вместо q и p соответственно $q_2 = p + q$ и $p_2 = -p$. Таким образом, в данном случае формулу для определения распора можно записать в следующем виде:

$$H = \frac{(p+q)l^2}{8f} \times \sqrt{(12\alpha - 12\alpha^2 - 2\beta)\beta^2\gamma_2^2 - (12\alpha - 12\alpha^2 - \beta^2)\beta\gamma_2 + 1}. \quad (3.52)$$

При этом значение p , стоящее в скобках перед радикалом и в формуле для γ_2 , нужно брать с положительным знаком.

3.5.6. Случай произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки. Рассмотрим теперь гибкую нить, одновременно загруженную сплошной равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузками (рис. 3.14).

Вначале обратимся к рис. 3.8. Предположим, что длина участка b стремится к нулю, а полная нагрузка этого участка $P = pb$ при этом остается постоянной. Как и раньше, для данного случая примем обозначение $\alpha = a/l$, но γ теперь уже выразится несколько иначе, а именно: $\gamma_1 = pb/ql = P/ql$.

Используя принятые обозначения, подставим в правую часть формулы (3.40) значение $b = 0$ и в результате получим:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{12\alpha\gamma_1(1 - \alpha)(1 + \gamma_1) + 1}. \quad (3.53)$$

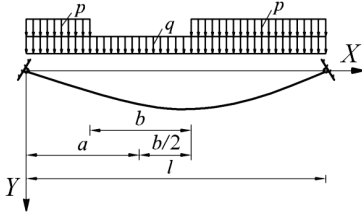


Рис. 3.13. К расчету нити

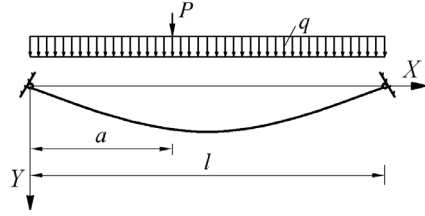


Рис. 3.14. К расчету нити

На этом примере также интересно проследить, какое выражение будет иметь распор при $q = 0$, т. е. при действии сосредоточенной нагрузки P , расположенной в произвольном месте пролета (рис. 3.15). Для этого, введя q под знак радикала, представим формулу (3.53) в следующем виде:

$$H = \frac{l^2}{8f} \sqrt{12\alpha(1-\alpha) \left(\frac{P^2}{l^2} + q \frac{P}{l} + q^2 \right)}.$$

Рис. 3.15. К расчету гибкой нити при действии произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки

Решение получим, если в последней формуле примем $q = 0$; тогда имеем:

$$H = \frac{Pl}{4f} \sqrt{3\alpha(1-\alpha)}. \quad (3.54)$$

Если же сосредоточенная нагрузка приложена в середине пролета, т. е. $\alpha = 0,5$, то формула (3.54) еще более упростится и примет следующий вид:

$$H = \frac{Pl}{8f} \sqrt{3}. \quad (3.55)$$

Сравним выражение (3.55) с результатом, который дает общая формула (3.23). Для данного случая величина характеристики нагрузки D будет равна:

$$D = \frac{P^2 a(l-a)}{l} = P^2 a \left(1 - \frac{a}{l} \right),$$

т. к. определенный интеграл формулы (3.21) здесь заменяется произведением силы P на изгибающий момент в точке ее приложения. Подставляя получен-

ное значение D в формулу (3.23), имеем:

$$H = \frac{P}{4f} \sqrt{3la \left(1 - \frac{a}{l}\right)}.$$

Вынося l из-под знака радикала и учитывая, что $a/l = \alpha$, получим:

$$H = \frac{Pl}{4f} \sqrt{3\alpha(1-\alpha)},$$

что полностью совпадает с формулой (3.54).

§ 3.6. Задача о спрямлении дуги нерастяжимой нити

При решении задачи о гибкой нерастяжимой нити, находящейся под действием произвольной нагрузки, было принято в качестве исходного состояния такое положение равновесия, которое занимает нить при действии на нее сплошной равномерно распределенной нагрузки. При этом кривая провисания нити имеет форму квадратной параболы с вертикальной осью симметрии посередине пролета и стрелой провисания f .

Этот подход является наиболее удобным при решении практических задач, т. к. он приводит к весьма простому выражению (3.23), в котором распор представлен в виде функции от стрелы провисания, величина которой известна заранее для большинства расчетных случаев. Таким образом, длина нити L между точками подвеса может быть определена как длина дуги квадратной параболы, имеющей стрелу провисания f .

Для решения указанной задачи найдем стрелу провисания нити в середине пролета f_1 при действии сосредоточенной силы с учетом выражения (3.55):

$$f_1 = \frac{M^6}{H} = \frac{8Plf}{4Pl\sqrt{3}} = f \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155f. \quad (3.56)$$

Полученный результат также отражен на рис. 3.16.

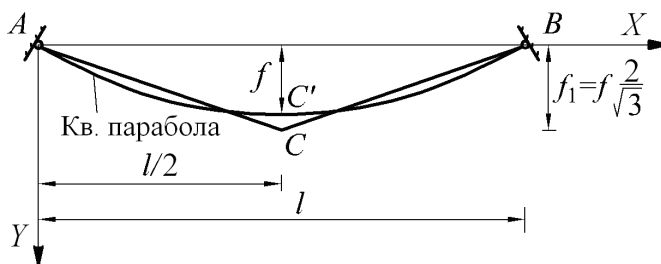


Рис. 3.16. К определению стрелы провисания нити в середине пролета при действии сосредоточенной нагрузки

Поскольку нить нерастяжима, то длина дуги квадратной параболы $AC'B$ равна сумме двух сторон треугольника ACB , т. е.

$$AC'B = \overline{AC} + \overline{BC} = L. \quad (3.57)$$

С учетом последнего соотношения длина дуги квадратной параболы $AC'B$ определится следующим образом:

$$L = 2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}f^2} \quad (3.58)$$

или в иной форме записи

$$L = \sqrt{l^2 + \frac{16}{3}f^2}. \quad (3.59)$$

Таким образом, вычислена длина дуги квадратной параболы как сумма длин двух прямых линий AC и BC , иначе говоря, получено приближенное решение задачи о спрямлении дуги квадратной параболы. При этом приближенность решения является следствием допущения, принятого при решении задачи о гибкой нерастяжимой нити.

Отметим здесь следующее. Поскольку полученный результат является следствием решения задачи о гибкой нерастяжимой нити, то это само по себе уже говорит о достаточной степени точности указанного решения. Также отметим, что решение такой на первый взгляд чисто математической задачи, как задача о спрямлении дуги, получено в результате использования одного из основных законов механики – принципа возможных перемещений, а формула (3.59) является результатом использования равенства произвольных постоянных в решениях (3.23) и (3.25). Действительно, если приравнять между собой формулы (3.23) и (3.25), то приходим к выражению для длины дуги квадратной параболы в виде (3.59).

Кстати говоря, полученному выше результату можно придать более общий смысл и вывести из него следующее математическое следствие: используя аналогию с гибкой нитью и принцип возможных перемещений, можно представить длину дуги плоской кривой в виде суммы отрезков двух прямых, образующих треугольник, построенный на заданном участке.

Придерживаясь этой схемы рассуждений, примем, что дана произвольная полая кривая AB , имеющая кривизну одного знака, и известно либо ее уравнение, либо уравнения отдельных ее составляющих $y = \varphi(x)$. Допустим, что нужно найти длину этой кривой на участке от точки A до точки B . Систему координат принимаем таким образом, чтобы ось X проходила через точки A и B , а ось Y была ей нормальна (рис. 3.17).

Дальше применим аналогию с гибкой нитью. Предположим, что гибкая нерастяжимая нить, подверженная действию какой-то функции вертикальной нагрузки, приняла положение равновесия, совпадающее с кривой нити. Используя уравнение (3.11) и считая, что в данной задаче $H = 1$, получим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -q(x),$$

откуда, с учетом (3.13), следует:

$$\frac{dy}{dx} = Q^6, \quad y = M^6. \quad (3.60)$$

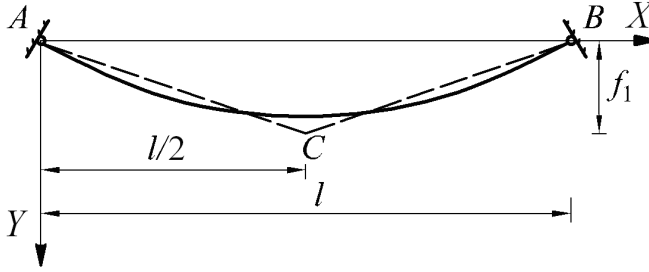


Рис. 3.17. К решению задачи о спрямлении дуги
Применяя далее формулу (3.25), можно написать:

$$H = \sqrt{\frac{ID_s}{L^2 - l^2}} = 1.$$

Отсюда длину дуги можно выразить следующим образом:

$$L = l \sqrt{1 + \frac{D_s}{l}}, \quad (3.61)$$

где D_s определяется из (3.21) или (3.22) с учетом (3.60) в виде

$$D_s = -\int_0^l y \frac{d^2 y}{dx^2} dx \quad \text{или} \quad D_s = \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (3.62)$$

Итак, формулу спрямления произвольной дуги можно записать как

$$L = l \sqrt{1 + \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx}. \quad (3.63)$$

Полученный результат имеет следующую наглядную геометрическую интерпретацию: длина кривой вычислена как равная ей сумма длины двух сторон равнобедренного треугольника ABC , построенного на основании l , т. е. $L = AC + BC$. При этом высота f_1 треугольника ABC будет равна:

$$f_1 = \sqrt{\left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{l(l + D_s)}{4} - \frac{l^2}{4}}$$

или в иной форме записи

$$f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{ID_s}. \quad (3.64)$$

Причем само собой разумеется, что полученное решение является приближенным, однако степень этого приближения весьма высока и тем выше, чем меньше отношение L/l .

Кроме того следует отметить, что формулой (3.63) можно пользоваться для вычисления длины не только гладких кривых, но также в случаях, когда кривая имеет переломы. При этом подынтегральная функция в (3.63) будет иметь разрывы и интеграл заменится суммой интегралов, из которых каждый вычисляется отдельно на своем участке.

Формула (3.59) является частным случаем решения (3.63). Действительно, если рассматриваемая кривая представляет собой квадратную параболу с уравнением

$$y = \frac{4f}{l}x - \frac{4f}{l^2}x^2,$$

то тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l} - \frac{8f}{l^2}x \quad \text{и} \quad \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l \left(\frac{4f}{l} - \frac{8f}{l^2}x \right)^2 dx = \frac{16}{3} \frac{f^2}{l}.$$

Подставляя найденное значение интеграла в формулу (3.63), получим:

$$L = l \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2}},$$

что полностью совпадает с формулой (3.59).

Таким образом, пользуясь аналогией с гибкой нитью, можно найти и другие решения задачи о спрямлении дуги, однако полученный результат по своей простоте и степени точности является вполне удовлетворительным.

§ 3.7. Общее решение задачи для гибкой упругой нити

Начнем рассмотрение с предположения о том, что гибкая упругая нить с поперечным сечением F и модулем упругости E нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия. Выберем в качестве независимой переменной жесткость нити на растяжение $\omega = EF$, а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Допустим далее, что жесткость ω получила очень малое, но конечное приращение своей величины, равное $\delta\omega$. Тогда распор H получит некоторое приращение δH , а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy (рис. 3.18). Эта величина с учетом второй формулы из (3.13) может быть выражена так:

$$\delta y = \frac{M^6}{H + \delta H} - \frac{M^6}{H} = -\frac{M^6 \delta H}{H(H + \delta H)}. \quad (3.65)$$

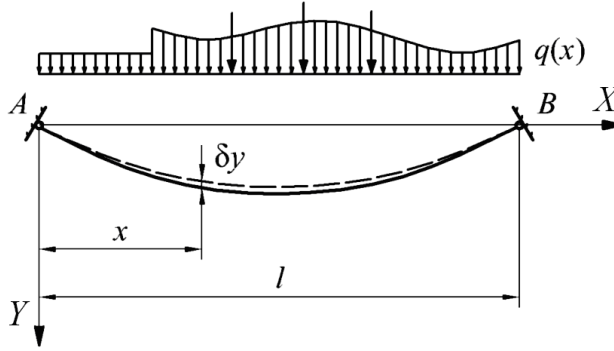


Рис. 3.18. К расчету гибкой упругой нити

Найдем работу внешних сил, т. е. нагрузки $q(x)$, на перемещениях δy :

$$U_1 = - \int_0^l \frac{q(x) M^6 \delta H}{H(H + \delta H)} dx = - \frac{D \delta H}{H(H + \delta H)}. \quad (3.66)$$

Определим теперь работу внутренних сил. Упругое удлинение бесконечно малого элемента нити ds можно выразить следующим образом:

$$\delta ds = \left(\frac{T + \delta T}{\omega + \delta \omega} - \frac{T}{\omega} \right) ds = \frac{\omega \delta T - T \delta \omega}{\omega(\omega + \delta \omega)} ds, \quad (3.67)$$

где T – продольное усилие в нити, а δT – приращение величины этого усилия.

Элементарная работа внутренних сил определится как произведение с обратным знаком упругого удлинения δds на величину действующего в элементе усилия, равную $T + \delta T$, а полная работа – как интеграл этого произведения, распространенный на всю длину нити L :

$$U_2 = - \int_0^L \frac{(\omega \delta T - T \delta \omega)(T + \delta T)}{\omega(\omega + \delta \omega)} ds. \quad (3.68)$$

Подставляя сюда значения

$$T = \frac{H}{\cos \alpha}, \quad \delta T = \frac{\delta H}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad ds = \frac{dx}{\cos \alpha}, \quad (3.69)$$

где по-прежнему под α понимается угол наклона касательной к нити по отношению к горизонту, получим:

$$U_2 = - \frac{(\omega \delta H - H \delta \omega)(H + \delta H)}{\omega(\omega + \delta \omega)} \int_0^l \frac{dx}{\cos^3 \alpha}. \quad (3.70)$$

Для пологих нитей с достаточной степенью точности можно считать, что

$$\int_0^l \frac{dx}{\cos^3 \alpha} \approx lm^3 = \text{const}, \quad (3.71)$$

где $1/m$ – среднее значение $\cos \alpha$, равное l/L .

С учетом (3.71) выражение для работы внутренних сил примет вид

$$U_2 = - \frac{(\omega \delta H - H \delta \omega)(H + \delta H)lm^3}{\omega(\omega + \delta \omega)}. \quad (3.72)$$

Тогда, подставляя (3.66) и (3.72) в соотношение (3.14) и переходя затем к пределу при $\delta \omega \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, получим следующую дифференциальную зависимость между величинами распора и жесткости нити:

$$\frac{d\omega}{dH} - \frac{\omega}{H} - \frac{D\omega^2}{lm^3 H^4} = 0. \quad (3.73)$$

Полученная зависимость является одним из частных случаев дифференциального уравнения Бернулли, общий интеграл которого имеет вид

$$\frac{1}{\omega} = \frac{C}{H} + \frac{D}{2lm^3 H^3}. \quad (3.74)$$

Произвольную постоянную интегрирования можно найти, если учесть, что в случае, когда нить нерастяжима, т. е. когда $\omega = \infty$, величина распора определяется выражением (3.23) или (3.25). Если воспользоваться выражением (3.23), то решение поставленной задачи получим в следующем виде:

$$H^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H^2 = \frac{D\omega}{2lm^3}, \quad (3.75)$$

где $n = l/f$ и $m = L/l$, причем коэффициенты n и m вычисляются здесь без учета упругих деформаций нити, т. е. по ее исходной геометрии до нагружения.

Этот результат был установлен впервые Р.Н. Мацелинским [95, 97].

§ 3.8. Частные случаи решения задачи для гибкой упругой нити

3.8.1. Расчет струны. Из уравнения (3.75) нетрудно найти решение для частного случая, когда первоначальная длина нити равна длине пролета, т. е. для струны, которая не подвергнута предварительному натяжению. В данном случае $n = \infty$ и $m = 1$. Подставляя указанные значения в (3.75), получим:

$$H = \sqrt[3]{\frac{D\omega}{2l}}. \quad (3.76)$$

При действии же равномерно распределенной нагрузки решение (3.76) совпадает с общеизвестной формулой

$$H = \sqrt[3]{\frac{q^2 l^2 EF}{24}}. \quad (3.77)$$

3.8.2. Расчет предварительно напряженной струны. Теперь предположим, что струна находится под действием силы предварительного натяжения N и произвольной поперечной нагрузки $q(x)$ (рис. 3.19). Причем первоначальная длина струны до ее натяжения и нагружения поперечной нагрузкой была меньше расстояния между точками подвеса, т. е. величины пролета l . Через H в данном случае обозначим горизонтальную составляющую усилия, возникающего в струне при одновременном действии предварительного натяжения и поперечной нагрузки. При этом величина горизонтальной опорной реакции на каждой опоре будет также равна H , а сила N будет входить в состав этой реакции.

Если сила N получила очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δN , то тогда струна получит некоторое дополнительное удлинение $\delta \Delta l$ и переместится из своего положения равновесия на величину δy . При этом величина распора H будет иметь некоторое приращение δH .

Выражение для приращения δy по-прежнему будет равно (3.65), а соотношение для приращения удлинения струны, соответствующего приращению силы N , можно записать в виде

$$\delta \Delta l = \frac{l \delta N}{\omega}. \quad (3.78)$$

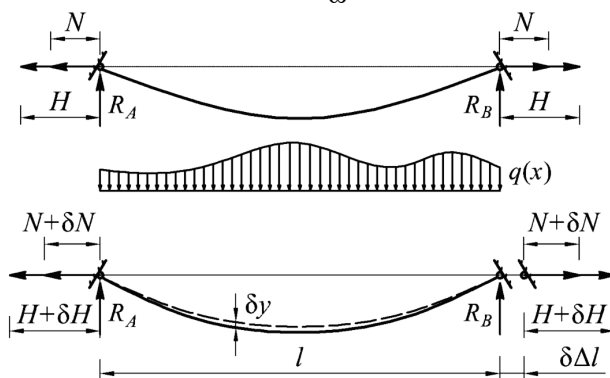


Рис. 3.19. К расчету предварительно напряженной струны

Запишем теперь выражения, описывающие работу внешних и внутренних сил на возможных перемещениях струны из положения равновесия. Работа внешних сил складывается из работы нагрузки $q(x)$ на перемещениях δy и работы горизонтальной составляющей опорной реакции $(H + \delta H)$ на приращении удлинения струны $\delta \Delta l$

$$U_1 = \frac{(H + \delta H) l \delta N}{\omega} - \frac{\delta H}{H(H + \delta H)} \int_0^l q(x) M^6 dx$$

или в несколько другой форме

$$U_1 = \frac{(H + \delta H) l \delta N}{\omega} - \frac{D \delta H}{H(H + \delta H)}. \quad (3.79)$$

Работу внутренних сил представим следующим образом:

$$U_2 = -\frac{l(H + \delta H)}{\omega}. \quad (3.80)$$

Обращаясь далее к уравнению Лагранжа (3.14) и переходя затем к пределу при δN и δH , стремящихся к нулю, получим следующую дифференциальную зависимость между силой предварительного натяжения и внутренним усилием в струне:

$$lH^3 = (lH^3 + D\omega) \frac{dH}{dN}. \quad (3.81)$$

Интегрируя последнее уравнение и определяя произвольную постоянную интегрирования из условия, что при $q(x) = 0$, $H = N$, получим:

$$H^3 - NH^2 = \frac{D\omega}{2l}. \quad (3.82)$$

Если же здесь принять $N = 0$, то придем к решению (3.76), полученному для струны, не подвергнутой предварительному натяжению.

§ 3.9. Учет влияния температурных воздействий

Большое влияние на напряженно-деформированное состояние гибкой нити оказывают температурные воздействия. Изменение температуры на Δt° вызывает изменение длины нити, что, в свою очередь, вызывает изменения стрелы провисания и, следовательно, внутренних усилий (рис. 3.20).

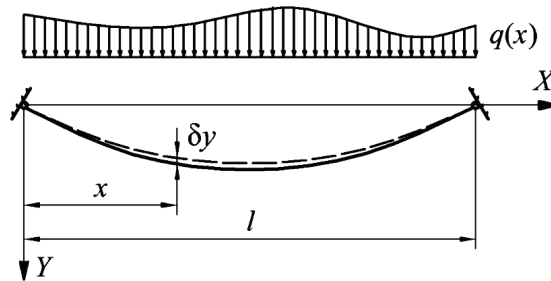


Рис. 3.20. Деформация нити при изменении температуры

Определим эти величины. Для этого воспользуемся описанным ранее методом расчета. Только в данном случае вместо принятой в параграфе 3.7

независимой переменной $\omega = EF$ возьмем приращение температуры Δ_t .

Как уже отмечалось раньше, если температура получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное $\delta\Delta_t$, то изменится напряженно-деформированное состояние нити. Распор H получит некоторое приращение δH , а нить переместится из своего положения на величину δy .

Отметим, что выражение для приращения δy по-прежнему будет равно (3.65), а соотношение для приращения δdx можно записать в виде

$$\delta dx = \frac{\delta H}{\omega} dx + \alpha_t \delta\Delta_t dx, \quad (3.83)$$

где α_t – коэффициент линейного температурного расширения материала нити.

Запишем соотношения, описывающие работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузки $q(x)$ на перемещении δy и находится по формуле (3.66). Работа внутренних сил состоит из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx

$$U_2 = - \int_0^l \left(\frac{\delta H}{\omega} + \alpha_t \delta\Delta_t \right) (H + \delta H) dx. \quad (3.84)$$

Подставляя уравнения (3.66) и (3.84) в формулу (3.14), а затем деля полученное выражение почленно на δH и переходя к пределу при $\delta\Delta_t \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, приходим к дифференциальному уравнению, связывающему распор в гибкой нити с изменением температуры,

$$\frac{d\Delta_t}{dH} = - \frac{D}{\alpha_t l H^3} - \frac{1}{\alpha_t \omega}. \quad (3.85)$$

Зависимость (3.85) является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Общий интеграл (3.85) примет вид

$$\Delta_t = \frac{D}{2\alpha_t l H^2} - \frac{H}{\alpha_t \omega} - C. \quad (3.86)$$

Произвольную постоянную интегрирования C определим из условия, что при $\Delta_t = 0$ распор $H = H_1$, т. е. равен распору в нити при действии начальной и дополнительной нагрузок. Подставляя значение C в выражение (3.86), получим окончательное решение рассматриваемой задачи в виде

$$H^3 + \left(\frac{8y_0^2}{3l^2} + \alpha_t \Delta_t \right) \omega H^2 = \frac{D\omega}{2l}. \quad (3.87)$$

Если здесь принять, что $\Delta_t = 0$, то уравнение (3.87) преобразуется в известное соотношение, полученное в работе [158] для гибкой упругой нити.

§ 3.10. Учет влияния смещения и осадки опор

Большое влияние на напряженно-деформированное состояние гибкой

нити, кроме изменения температуры окружающей среды, может оказать также смещение и осадка опор. Допустим теперь, что одна из опор нити сместилась по оси X на величину u , по оси Y – на v и по оси Z – на w (рис. 3.21).

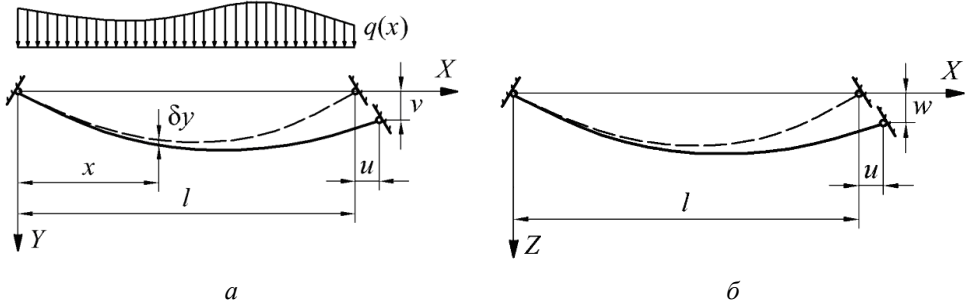


Рис. 3.21. Деформация нити при смещении и осадке опоры:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

Общее изменение пролета нити составит:

$$\Delta_l = u + \frac{v^2}{l} + \frac{w^2}{l}. \quad (3.88)$$

В свою очередь, длина пролета нити станет равной $l + \Delta_l$. Поэтому интегрирование при определении работ внешних и внутренних сил должно быть формально распространено не на длину l , а на новую длину $l + \Delta_l$. Но, как это отмечено в работе [111], поскольку изменение пролета Δ_l очень мало по сравнению с l , то интегрировать по-прежнему можно по длине l .

Теперь определим приращения параметров напряженно-деформированного состояния гибкой нити, возникающие в результате увеличения пролета нити на очень малую, но конечную величину $\delta\Delta_l$. Как и в случае с изменившейся температурой, соотношение для приращения δu примем в виде (3.65).

Упругое удлинение бесконечно малого элемента нити вычисляется по формуле

$$\delta dx = \frac{\delta H}{\omega} dx. \quad (3.89)$$

Работу внешней нагрузки запишем в виде (3.66), а для работы распора $H + \delta H$ на приращении пролета Δ_l будем иметь:

$$U_1^2 = (H + \delta H) \delta\Delta_l. \quad (3.90)$$

Работу усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx выразим следующим образом:

$$U_2 = - \int_0^l \frac{\delta H}{\omega} (H + \delta H) dx. \quad (3.91)$$

Подставляя эти выражения для работ внешних и внутренних сил в урав-

нение (3.14), получим:

$$-\int_0^l \frac{q(x)M^6 \delta H}{H(H + \delta H)} dx + (H + \delta H) \delta \Delta_l - \int_0^l \frac{\delta H}{\omega} (H + \delta H) dx = 0. \quad (3.92)$$

Разделив далее уравнение (3.92) почленно на δH и перейдя затем к пределу при $\delta \Delta_l \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, получим дифференциальную зависимость между распором и приращением пролета упругой гибкой нити

$$\frac{d\Delta_l}{dH} = \frac{D}{H^3} + \frac{l}{\omega}. \quad (3.93)$$

Полученная зависимость является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, общий интеграл которого имеет вид

$$\Delta_l = -\frac{D}{2H^2} + \frac{Hl}{\omega} + C. \quad (3.94)$$

Произвольную постоянную интегрирования C в уравнении (3.94) определим из условия, что при $\Delta_l = 0$ распор $H = H_1$, т. е. равен распору в нити при действии начальной и дополнительной нагрузок. Подставляя затем значение произвольной постоянной интегрирования C в выражение (3.94), окончательно получим:

$$H^3 + \left(\frac{8y_0^2}{3l^2} - \frac{\Delta_l}{l} \right) \omega H^2 = \frac{D\omega}{2l}. \quad (3.95)$$

Отметим, что здесь, как и в случае с изменяющейся температурой, при $\Delta_l = 0$ уравнение (3.95) преобразуется в известное соотношение [158] для гибкой упругой нити, нагруженной произвольной вертикальной нагрузкой.

§ 3.11. Расчет многопролетной гибкой упругой нити на упруго-податливых опорах

Прежде всего заметим, что задачи расчета многопролетных нитей наиболее часто возникают при проектировании покрытий линейно-протяженных промышленных зданий и инженерных сооружений типа трубопроводных переходов, висячих мостов и т. п. Поэтому остановимся подробнее на решении указанной задачи.

Предположим, что многопролетная гибкая нить с поперечным сечением F , модулем упругости E , пролетами $l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_n$ подвешена к упруго-податливым опорам с коэффициентами жесткости $k_0, k_1, \dots, k_i, \dots, k_n$. Известно также, что нить нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия. Причем в отличие от предшествующего изложения выберем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

Если площадь поперечного сечения увеличится на бесконечно малую величину δF , то изменится напряженное состояние нити и ее геометрия. Тогда в i -м пролете распор H_i получит некоторое приращение δH_i , а нить пере-

местится из положения равновесия на величину δy_i (рис. 3.22). При этом опоры получают некоторые перемещения $\delta \Delta_{i-1}$ и $\delta \Delta_i$. Само собой разумеется, что последние хотя и будут небольшими, но могут оказать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние нити, в частности, на перераспределение усилий в смежных пролетах.

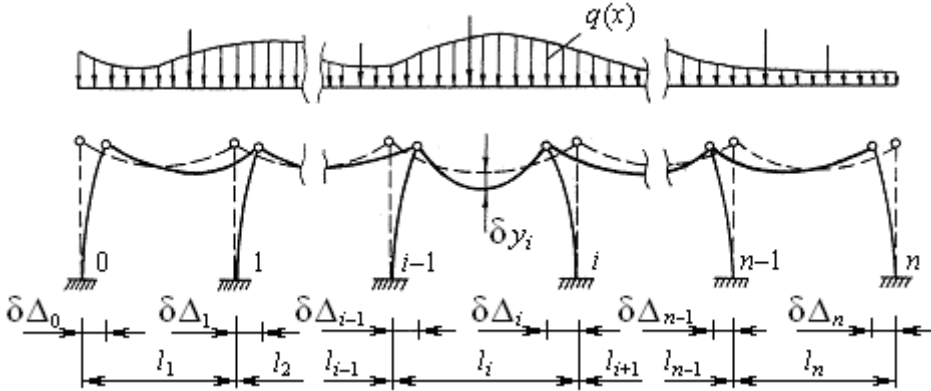


Рис. 3.22. К расчету многопролетной нити на упруго-податливых опорах

Представим приращения ординат провисания и упругого удлинения бесконечно малого элемента нити в виде

$$\delta y_i = -\frac{M_i^6 \delta H_i}{H_i (H_i + \delta H_i)}; \quad (3.96)$$

$$\delta dx_i = \frac{E_i F_i \delta H_i - H_i E_i \delta F_i}{E_i F_i (E_i F_i + E_i \delta F_i)} dx. \quad (3.97)$$

Виртуальные перемещения опор могут быть записаны следующим образом:

$$\delta \Delta_{i-1} = \pm k_{i-1}^{-1} (\delta H_{i-1} - \delta H_i); \quad (3.98)$$

$$\delta \Delta_i = \pm k_i^{-1} (\delta H_i - \delta H_{i+1}), \quad (3.99)$$

при этом знак «+» соответствует перемещению опоры наружу, а знак «-» — внутрь пролета.

Определим работу внешних сил, т. е. нагрузки $q_i(x)$ на перемещениях δy_i

$$U_{li}^1 = - \int_0^{l_i} \frac{q_i(x) M_i^6 \delta H_i}{H_i (H_i + \delta H_i)} dx \quad (3.100)$$

и возникающих в упруго-податливых опорах реакций на виртуальных перемещениях опор по направлению этих реакций

$$U_{li}^2 = \pm k_{i-1}^{-1} (\delta H_{i-1} - \delta H_i) (H_{i-1} + \delta H_{i-1} - H_i - \delta H_i) \pm$$

$$\pm k_i^{-1}(\delta H_i - \delta H_{i+1})(H_i + \delta H_i - H_{i+1} - \delta H_{i+1}). \quad (3.101)$$

Для работы внутренних сил имеем:

$$U_{2i} = - \int_0^{l_i} \frac{(E_i F_i \delta H_i - H_i E_i \delta F_i)(H_i + \delta H_i)}{E_i F_i (E_i F_i + E_i \delta F_i)} dx. \quad (3.102)$$

Применим теперь для решения задачи принцип Лагранжа. Подставляя (3.100)–(3.102) в (3.14) и переходя в полученном выражении к пределу при $\delta F_i \rightarrow 0$ и $\delta H_i \rightarrow 0$, после некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению, описывающему напряженно-деформированное состояние многопролетной гибкой нити на упруго-податливых опорах,

$$\begin{aligned} & \frac{dF_i}{dH_i} - \frac{F_i}{H_i} + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i} (\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}) + \\ & + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}) - \frac{D_i E_i F_i^2}{l_i H_i^4} = 0. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Указанная зависимость является одним из частных случаев дифференциального уравнения Бернулли. Общий интеграл уравнения (3.103) будет:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_i F_i} &= \frac{C}{H_i} + \frac{D_i}{2l_i H_i^3} + \frac{\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}}{l_i} + \\ &+ \frac{\ln H_i}{l_i H_i} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Произвольную постоянную интегрирования C найдем из условия, что при $E_i F_i = \infty$ и $k_{i-1} = k_i = \infty$ распор в нити определяется по формуле (3.23). Затем, подставив найденное значение произвольной постоянной C в выражение (3.104), окончательно получим:

$$\begin{aligned} H_i^3 + \frac{8E_i F_i l_i + 3n_i^2 (\pm k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \pm k_i^{-1} H_{i+1}) \ln H_i}{3n_i^2 [l_i + E_i F_i (\mp k_{i-1}^{-1} \mp k_i^{-1})]} H_i^2 = \\ = \frac{D_i E_i F_i}{2[l_i + E_i F_i (\mp k_{i-1}^{-1} \mp k_i^{-1})]}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Здесь принято, что $n_i = l_i/f_i$ – коэффициент, значение которого вычисляется без учета упругих деформаций нити, т. е. по ее исходным геометрическим размерам до загрузки, а f_i – стрела провисания нерастяжимой гибкой нити в середине пролета при равномерно распределенной нагрузке.

Записав затем выражение (3.105) для каждого пролета, придем к системе уравнений, в результате решения которой, например, одним из численных методов [171], найдем искомые значения распоров $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$. При этом ординаты провисания в пролетах нити определяются при помощи второй формулы из (3.13). Отметим, что соотношение (3.105) может быть названо

уравнением трех распоров.

Если теперь предположить, что нить имеет только один пролет и, соответственно, в полученном уравнении положить $i = 1$, то придем к случаю гибкой нити на упруго-податливых опорах, для которого выражение (3.105) запишется в виде

$$H^3 + \frac{8EF l}{3n^2[l + EF(\mp k_0^{-1} \mp k_1^{-1})]} H^2 = \frac{DEF}{2[l + EF(\mp k_0^{-1} \mp k_1^{-1})]}. \quad (3.106)$$

Обратим здесь внимание на то, что эта формула впервые была получена Е.М.Сидоровичем и представлена в его работе [144].

§ 3.12. Оценка исходных допущений и полученных решений

Положенные в основу настоящей теории расчета гибких нитей исходные допущения можно условно разделить на три группы:

- допущения, связанные с условиями работы рассматриваемых конструкций (пологость нити, упругая работа материала, пренебрежимо малая изгибная жесткость нити);
- предпосылки, связанные с характером деформирования поперечных сечений нити (одноосное напряженное состояние продольных волокон нити);
- допущения, отражающие приближенность теории (например, пренебрежение влиянием горизонтальных составляющих возможных перемещений при выводе уравнения (3.20), приближенное определение произвольных постоянных интегрирования при отыскании его частных решений и пр.).

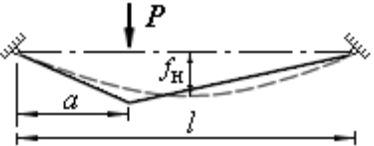
Первые две группы предпосылок являются общепринятыми и широко используются при построении различных теорий расчета балок. В связи с этим их область применения и вносимая в результаты расчетов величина погрешности достаточно подробно исследованы многими авторами в большом количестве публикаций [23, 62, 84, 132, 162, 172]. В этих работах показано, что использование указанных допущений обеспечивает для параметров напряженно-деформированного состояния рассчитываемых конструкций весьма точные результаты. Поэтому в настоящей работе оценка погрешности данных предпосылок не производилась.

Что же касается третьей группы допущений, то оценка погрешности при определении усилий, действующих в гибкой нити, проведена путем сравнения с результатами, полученными точным способом для различных случаев нагружения нити одной сосредоточенной силой, т. е. для самой неблагоприятной схемы нагружения. При этом учитывалось влияние минимальных и максимально возможных упругих удлинений нити в диапазоне относительных деформаций от 0 до 0,0083, что удовлетворяет условиям применения нитей из высокопрочной стальной проволоки.

Результаты оценки погрешности при определении максимальных усилий по формуле $T = \sqrt{H^2 + (Q^6)^2}$ приведены в табл. 3.1. Эти же данные проиллюстрированы на рис. 3.23, где показаны кривые зависимости погрешности

определения усилия в нити от параметра $\alpha = a/l$ при различных стрелах провисания и модулях упругости. При этом в указанную формулу подставлялись значения распра, определенные из соотношений (3.23), (3.75) и (3.76).

Таблица 3.1

	Величина погрешности $\Delta T_{\max}$ в % при α					
	0,5	0,25	0,1	0,05	0,01	0
$f_n = 0,125l, E = \infty$	-0,7	+0,4	+3,1	+4,8	+3,7	0
$f_n = 0,125l,$ $E = 1,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$	$\frac{-0,5}{905}$	$\frac{+0,5}{1052}$	$\frac{+3,2}{830}$	$\frac{+4,9}{1310}$	$\frac{+3,4}{1405}$	0
$f_n = 0,$ $E = 1,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$	$\frac{+0,3}{997}$	$\frac{+0,3}{910}$	$\frac{+0,8}{970}$	$\frac{+1,4}{1020}$	$\frac{+3,2}{840}$	0
<i>Примечание.</i> В числителе приведена величина погрешности в %, а в знаменателе – соответствующие величины напряжений в наиболее напряженном поперечном сечении нити в МПа.						

Из табл. 3.1 и рис. 3.23 видно, что величина погрешности во всех случаях не превышает 0,7 % в сторону преуменьшения и 4,9 % – в сторону преувеличения усилий, действующих в нити. Наибольшая же величина погрешности возникает при расположении сосредоточенной нагрузки вблизи точек подвеса нити. Впрочем, при перемещении этой нагрузки к центру пролета погрешность быстро уменьшается и становится меньше 1 %.

При уменьшении стрелы провисания величина погрешности также существенно падает и при расчете струны становится минимальной. Вполне очевидно, что для предварительно напряженной струны эта погрешность будет еще меньше.

Кроме того оценка погрешности показала, что формула (3.8) применима для определения ординат линии равновесия нити во всех случаях, когда значение тангенса угла наклона нити на опоре не превышает 0,9. В этом предельном случае погрешность составляет около 6 % в сторону преуменьшения ординат. Этот предельный случай соответствует расположению сосредоточенной нагрузки на расстоянии $0,1l$ от опоры при $n = 8$ и $0,01l$ при $n = \infty$, т. е. при расчете струны. Более близкое расположение сосредоточенной нагрузки к опоре практического значения не имеет, а при ее перемещении по направлению к центру пролета погрешность быстро уменьшается.

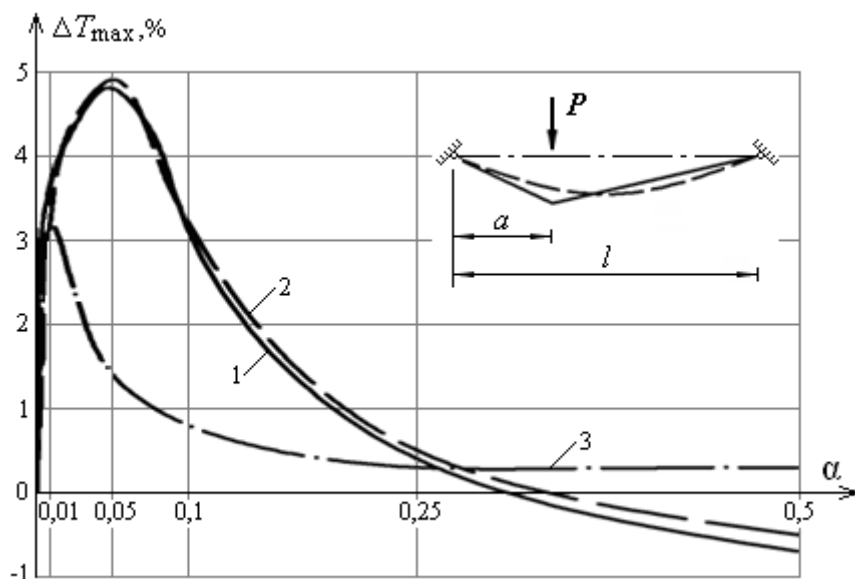


Рис. 3.23. Зависимость между погрешностью определения максимальных усилий в нити $\Delta T_{\max}$ и параметром α при различных стрелах провисания и модулях упругости:

1 – $f_n = 0,125/$ и $E = \infty$; 2 – $f_n = 0,125/$ и $E = 1,7 \cdot 10^5$ МПа; 3 – $f_n = 0$ и $E = 1,7 \cdot 10^5$ МПа

И, наконец, в завершение этого раздела следует отметить, что здесь рассмотрены самые неблагоприятные для принятых допущений схемы нагружения нити, поскольку при несимметричном нагружении одной сосредоточенной нагрузкой горизонтальные перемещения нити, которыми в расчете пренебрегается, получаются наибольшими. При всех других видах нагружения эти горизонтальные перемещения значительно уменьшаются, а, следовательно, точность решения повышается.

ГЛАВА 4

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 4.1. Предварительные замечания. Предпосылки расчета

В предыдущей главе была отмечена относительная условность разделения нитей на нити, во-первых, с малыми и большими стрелами провисания и, во-вторых, на гибкие и конечной изгибной жесткости. Также было указано, что поскольку любая нить имеет хотя бы некоторую степень изгибной жесткости, то по этой причине идеально гибких нитей не существует. Тем не менее, во многих практических случаях представляется возможным рассчитывать нити как абсолютно гибкие. В связи с этим, а также принимая во внимание то, что методы расчета гибких нитей резко отличаются от методов расчета нитей конечной изгибной жесткости, возникает необходимость в определении границы, показывающей, в каких случаях следует применять теорию гибких нитей, а в каких – теорию нитей конечной изгибной жесткости. Указанную границу наиболее удобно построить, используя для оценки жесткости нити показатель, связанный с отношением напряжений изгиба к напряжениям растяжения $\sigma_{\text{и}}/\sigma_{\text{р}}$, возникающих в поперечных сечениях нити при ее деформировании под нагрузкой. Таким образом, если при выполнении расчетов возможно принять ошибку в α процентов, то для гибкой нити будет справедливо условие $\sigma_{\text{и}}/\sigma_{\text{р}} \leq \alpha$. При этом, как показано в работах [62, 67, 198, 199], величину ошибки α вполне обоснованно можно принять равной $\alpha = 5\%$.

Обратим здесь внимание также на следующее. Предложение об использовании показателя $\sigma_{\text{и}}/\sigma_{\text{р}}$ для такого частного случая, как оценка жесткости нитей, в общем случае представляет собой достаточно универсальный инструмент для определения области существования и установления градации в этой области не только для нитей, но также и для любых других конструктивных систем. Так, например, если принять, что величина напряжений растяжения $\sigma_{\text{р}}$ есть величина отрицательная, то тогда, с учетом априорной положительной определенности величины напряжения изгиба $\sigma_{\text{и}}$, будем иметь $\sigma_{\text{и}}/\sigma_{\text{р}} < 0$. Последнее свидетельствует о том, что рассматриваемая конструктивная система представляет собой арку. В свою очередь, если величина напряжений растяжения $\sigma_{\text{р}}$ принимает значение равное нулю, то тогда имеем $\sigma_{\text{и}}/\sigma_{\text{р}} = \infty$ и рассматриваемая конструктивная система является балкой. Если же показатель $\sigma_{\text{и}}/\sigma_{\text{р}}$ является величиной достаточно большой, причем его значение находится в пределах полуинтервала от $(\infty - \alpha)$ до ∞ , то рассматриваемая конструктивная система соответствует криволинейному стержню.

Опираясь на предшествующие соображения, можно сформулировать область существования и установить градацию в этой области для разных типов конструктивных систем следующим образом:

- если $\sigma_p < 0$, то $\sigma_n/\sigma_p < 0$ и конструктивная система представляет собой арку;
- если $\sigma_p > 0$ и $0 \leq \sigma_n/\sigma_p \leq 0,05$, то конструктивная система представляет собой абсолютно гибкую нить;
- если $\sigma_p > 0$ и $0,05 < \sigma_n/\sigma_p < (\infty - 0,05)$, то конструктивная система представляет собой нить конечной изгибной жесткости;
- если $\sigma_p > 0$ и $(\infty - 0,05) \leq \sigma_n/\sigma_p < \infty$, то конструктивная система представляет собой криволинейный стержень;
- если $\sigma_p = 0$, то $\sigma_n/\sigma_p = \infty$ и конструктивная система представляет собой балку.

Принимая во внимание сказанное, дополнительно отметим, что в предлагаемой теории расчета будем рассматривать нити конечной изгибной жесткости (для которых в дальнейшем применяется несколько иное название – нити конечной жесткости), удовлетворяющие следующим требованиям:

1. Отношение пролета нити к стреле ее провисания должно находиться в пределах $8 \leq l/f < \infty$, т. е. нить принимается пологой. При этом если опоры нити расположены на разных уровнях, то угол наклона к горизонту линии, соединяющей точки ее подвеса, не должен превышать 20° .

2. Отношение напряжений изгиба к напряжениям растяжения должно находиться в пределах $0,05 < \sigma_n/\sigma_p < (\infty - 0,05)$, т. е. нить принимается конечной жесткости.

3. Материал нити считается однородным, изотропным и абсолютно упругим.

Следует сказать, что согласно данным литературных источников подавляющее большинство (а именно около 95%) нитей конечной жесткости, применяемых в висячих конструкциях, отвечают данным требованиям.

Дальше обратим внимание на то, что в предлагаемой теории расчета нитей конечной жесткости используются следующие положения:

1. Гипотеза плоских сечений, предполагающая, что плоские до изгиба поперечные сечения, нормальные к оси нити, после изгиба остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси. Использование этого допущения позволяет свести исследование деформированного состояния нити к рассмотрению изгиба ее оси.

2. Допущение о том, что продольные волокна нити не давят одно на другое, т. е. находятся в одноосном напряженном состоянии – позволяет считать нормальное напряжение в поперечных сечениях нити функцией только относительного удлинения волокна.

3. Допущение о том, что кривизна изогнутой оси нити зависит только от величины изгибающего момента – позволяет пренебречь влиянием перерезывающей силы на кривизну оси нити вследствие ее незначительности.

4. Так как перемещения нити считаются не малыми и соизмеримыми со стрелой ее провисания, то расчет является нелинейным и ведется по деформированной схеме.

5. Статическая неопределимость относительно распора раскрывается с помощью принципа возможных перемещений. При этом принцип Лагранжа

используется в своей строгой постановке, т. е. к перемещениям бесконечно малым, а не конечным. Это приводит задачу к дифференциальным зависимостям, которые, в отличие от имеющихся решений, дают более точные результаты при определении параметров напряженно-деформированного состояния нити и позволяют представить решение в замкнутом виде.

Первые три положения являются общепринятыми и составляют основу технической теории изгиба, успешно применяемой при рассмотрении деформирования балок и нитей конечной жесткости. Степень их точности хорошо изучена – обычно при расчете балок, у которых отношение пролета к высоте поперечного сечения более пяти, погрешность не превышает нескольких процентов. При расчете же нитей конечной жесткости величина погрешности гораздо меньше, поскольку в данных системах отношение пролета к высоте поперечного сечения во много раз более пяти.

§ 4.2. Общий случай деформации нити.

Основные дифференциальные уравнения задачи

Прежде всего, рассмотрим расчет нитей конечной жесткости на произвольную вертикальную и горизонтальную поперечные нагрузки, т. е. общий случай расчета несущих элементов висячих систем.

Рассмотрение начнем с предположения о том, что работающая с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок нить конечной жесткости с поперечным сечением площадью F , моментом инерции I и модулем упругости E нагружена произвольной вертикальной $q(x)$ и горизонтальной $p(x)$ нагрузками* и находится в состоянии равновесия. При выводе разрешающих уравнений выберем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Если площадь поперечного сечения нити F получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δF , то изменятся величины действующих в нити внутренних усилий и ее геометрия. В вертикальной плоскости изгибающий момент M_z получит некоторое приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения на величину δu . Аналогично в горизонтальной плоскости изгибающий момент M_y получит приращение δM_y , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити ψ – приращение $\delta\psi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δz (рис. 4.1).

Кроме того, распор H получит некоторое приращение своей величины, равное δH . Выразим теперь эти величины через балочный изгибающий момент M_z^0 и M_y^0 , балочный прогиб y^0 и z^0 и искомый распор H . Для этого воспользуемся хорошо известными зависимостями [62]

* Под $q(x)$ подразумевается сумма всех нагрузок, действующих на нить в вертикальной плоскости, а под $p(x)$ – сумма всех нагрузок, действующих на нить в горизонтальной плоскости.

$$H = \frac{M^6 - M}{f}; \quad (4.1)$$

$$M = M^6 \frac{f}{f^6}. \quad (4.2)$$

Здесь необходимо обратить внимание на то, что формула (4.1) абсолютно точна, поскольку отражает условия равновесия нити. Формула же (4.2) – приближенна, т. к. она получена на базе предпосылки о пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке. Впрочем хорошо известно, что точность данной формулы достаточно высока, а ее использование вносит в расчет погрешность, сопоставимую с погрешностью допущения о пологости нити [62, 103].

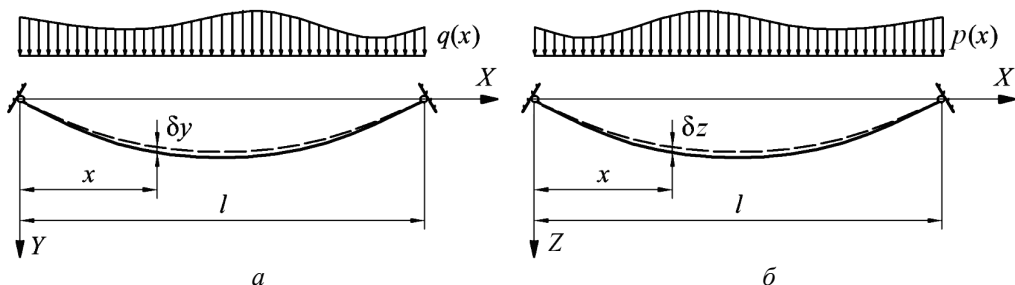


Рис. 4.1. К выводу дифференциального уравнения:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

С учетом (4.1) и (4.2) выражения для прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости можно записать в следующем виде:

$$y = \frac{M_z^6 y^6}{Hy^6 + M_z^6}; \quad (4.3)$$

$$z = \frac{M_y^6 z^6}{Hz^6 + M_y^6}; \quad (4.4)$$

$$M_z = \frac{(M_z^6)^2}{Hy^6 + M_z^6}; \quad (4.5)$$

$$M_y = \frac{(M_y^6)^2}{Hz^6 + M_y^6}; \quad (4.6)$$

а приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити определяются по формулам:

$$\delta y = -\frac{M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (4.7)$$

$$\delta z = -\frac{M_y^6 (z^6)^2 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)}; \quad (4.8)$$

$$\delta M_z = -\frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (4.9)$$

$$\delta M_y = -\frac{(M_y^6)^2 z^6 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)}; \quad (4.10)$$

$$\delta dx = \frac{EF\delta H - HE\delta F}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (4.11)$$

$$\delta d\varphi = -\frac{(M_z^6)^2 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (4.12)$$

$$\delta d\psi = -\frac{(M_y^6)^2 (z^6 \delta HEI + z^6 HE\delta I + z^6 \delta HE\delta I + M_y^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx. \quad (4.13)$$

Работа внешних сил вычисляется как интеграл из произведения функции нагрузки $q(x)$ и $p(x)$ на выражение (4.7) и (4.8) соответственно, распространенный на всю длину пролета l :

$$U_1^1 = -\int_0^l \frac{q(x)M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (4.14)$$

$$U_1^2 = -\int_0^l \frac{p(x)M_y^6 (z^6)^2 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx. \quad (4.15)$$

Перейдем теперь к определению работы внутренних сил, которая состоит из работы усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx и работы изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ соответственно:

$$U_2^1 = -\int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (4.16)$$

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad (4.17)$$

$$U_2^3 = \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 (z^6 \delta HEI + z^6 HE\delta I + z^6 \delta HE\delta I + M_y^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)^2} dx. \quad (4.18)$$

Обратимся дальше к принципу Лагранжа, согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю

$$U_1 + U_2 = 0. \quad (4.19)$$

Тогда, подставляя (4.14) – (4.18) в соотношение (4.19), получим:

$$\begin{aligned} & -\int_0^l \frac{q(x)M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\ & -\int_0^l \frac{p(x)M_y^6 (z^6)^2 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\
& + \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \\
& + \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 (z^6 \delta HEI + z^6 HE\delta I + z^6 \delta HE\delta I + M_y^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)^2} dx = 0. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Выразим y^6 и z^6 следующим образом:

$$y^6 = \frac{1}{EI}(y^6 EI) = \frac{m}{EI}; \quad (4.21) \quad z^6 = \frac{1}{EI}(z^6 EI) = \frac{n}{EI}. \quad (4.22)$$

Разделив уравнение (4.20) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$ с учетом (4.21) и (4.22), после некоторых преобразований получим следующее общее дифференциальное уравнение для определения величины распора в упругой нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned}
& \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{p(x)M_y^6 n^2}{(Hn + EIM_y^6)^2} dx + \\
& + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 n}{(Hn + EIM_y^6)^3} dx = 0. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Интегральные составляющие уравнения (4.23) зависят от вида приложения к нити нагрузки и условий закрепления ее концов. Их значения могут быть определены в каждом конкретном случае либо непосредственным интегрированием, либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса [56, 57].

Если теперь в уравнении (4.23) положить $p(x) = 0$, то придем к случаю изгиба нити конечной жесткости только в вертикальной плоскости. Тогда уравнение (4.23) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \\
& + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx = 0. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Если же допустить далее, что действующая на нить нагрузка является равномерно распределенной, а концы нити закреплены шарнирно, то после некоторых преобразований и упрощений получим уравнение:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{25q^2 l^6 EF^2}{12H^2(5l^2 H + 48EI)^2} + \frac{120q^2 l^6 E^2 F^2 I}{H^2(5l^2 H + 48EI)^3} = 0. \quad (4.25)$$

И, наконец, если рассмотреть предельный случай работы нити конечной жесткости и в последнем уравнении положить $I = 0$, то придем к известному

решению, полученному Р.Н. Мацелинским [95, 97] для гибкой упругой нити,

$$\frac{d\omega}{dH} - \frac{\omega}{H} - \frac{q^2 l^2 \omega^2}{12H^4} = 0, \quad (4.26)$$

где $\omega = EF$ – жесткость нити на растяжение.

Таким образом, и на это стоит обратить особое внимание, задача расчета гибких упругих нитей представляет собой частный случай рассматриваемой здесь теории расчета нитей конечной жесткости.

Теперь перейдем к рассмотрению, останавливаясь только на наиболее характерных моментах, нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузки. Вполне понятно, что для этого случая исходные соотношения (4.1) и (4.2) могут быть переписаны так:

$$H = \frac{M^6 - M}{f + f_0}; \quad (4.27) \quad M = M^6 \frac{f}{f^6}, \quad (4.28)$$

где f_0 – стрела провисания нити при действии начальной нагрузки.

С учетом последних представлений соотношения для y , z , M_z и M_y можно записать в следующем виде:

$$y = \frac{(M_z^6 - Hy_0)y^6}{Hy^6 + M_z^6}; \quad (4.29)$$

$$z = \frac{(M_y^6 - Hz_0)z^6}{Hz^6 + M_y^6}; \quad (4.30)$$

$$M_z = \frac{(M_z^6 - Hy_0)M_z^6}{Hy^6 + M_z^6}; \quad (4.31)$$

$$M_y = \frac{(M_y^6 - Hz_0)M_y^6}{Hz^6 + M_y^6}. \quad (4.32)$$

Выполнив дальше необходимые действия и другие преобразования, о которых уже было упомянуто при рассмотрении нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, получим общее дифференциальное уравнение для определения величины распора:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m(m + El y_0)}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{p(x)M_y^6 n(n + El z_0)}{(Hn + EIM_y^6)^2} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0)(m + El y_0)}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_y^6)^3 (M_y^6 - Hz_0)(n + El z_0)}{(Hn + EIM_y^6)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Здесь стоит подчеркнуть, что если в последнем уравнении положить $y_0 = z_0 = 0$, то придем к ранее полученному выражению (4.23).

§ 4.3. Действие дополнительных нагружений специального вида

Теперь рассмотрим нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной равномерно распределенной на всем пролете нагрузки q_1 и дополнительной равномерно распределенной на части пролета нагрузки q_2 , с площадью поперечного сечения F , моментом инерции I и модулем упругости E (рис. 4.2). При выводе расчетных зависимостей в качестве независимой переменной, о чем уже говорилось раньше, примем площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

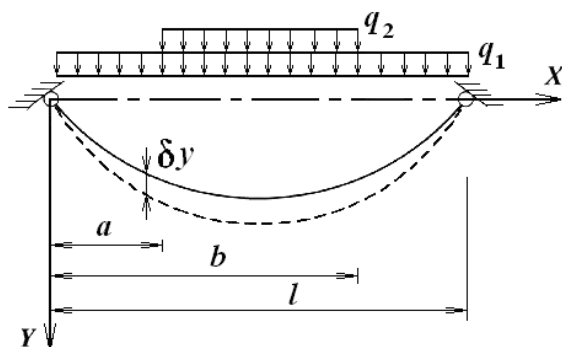


Рис. 4.2. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной на всем пролете нагрузки q_1 и дополнительной равномерно распределенной на части пролета нагрузки q_2

В данном случае выражения для прогибов, изгибающих моментов и приращений параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости определяются по формулам (4.3) – (4.13), в которых значения y^6 и M^6 имеют вид:

- при $0 \leq x \leq a$

$$y_1^6 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x}{24} (x^3 + l^3) + \frac{q_2 x(b-a)^3}{24} + \right. \\ \left. + \frac{q_2 x(b^2 - a^2)}{48l} (6l(a+b) - 2(a^2 + b^2) - 8l^2) \right];$$

$$M_1^6 = - \left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) x + \frac{q_1 x^2}{2},$$

- при $a \leq x \leq b$

$$y_2^6 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x}{24} (x^3 + l^3) + \frac{q_2 x(b-a)^3}{24} + \right.$$

$$+ \frac{q_2 x(b^2 - a^2)}{48l} (6l(a+b) - 2(a^2 + b^2) - 8l^2) - \frac{q_2(x-a)^4}{24} \Big];$$

$$M_2^6 = - \left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) x + \frac{q_1 x^2}{2} + \frac{q_2(x-a)^2}{2}$$

• и, наконец, при $b \leq x \leq l$

$$y_3^6 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{q_1 x}{24} (x^3 + l^3) + \frac{q_2(b-a)(b+a)}{48} + \right. \\ \left. + \frac{q_2(b^2 - a^2)}{48l} (6l(a+b) - 2(a^2 + b^2) - 8l^2) - \frac{q_2(b-a)}{48} (2x - (b+a))^3 \right];$$

$$M_3^6 = - \left(\frac{q_1 l}{2} + q_2(a+b) - \frac{q_2(b^2 - a^2)}{2l} \right) x + \frac{q_1 x^2}{2} + \frac{q_2(b-a)}{2} (2x - (b+a)).$$

Работу внешних сил представим как

$$U_1 = - \int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2 \delta H}{(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6) (Hy_1^6 + M_1^6)} dx - \\ - \int_a^b \frac{(q_1 + q_2) M_2^6 (y_2^6)^2 \delta H}{(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6) (Hy_2^6 + M_2^6)} dx - \\ - \int_b^l \frac{q_1 M_3^6 (y_3^6)^2 \delta H}{(Hy_3^6 + \delta Hy_3^6 + M_3^6) (Hy_3^6 + M_3^6)} dx. \quad (4.34)$$

Работу внутренних сил запишем следующим образом: $U_2 = U_2^1 + U_2^2$,

где

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{(EF \delta H - HE \delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E \delta F)} dx; \quad (4.35)$$

$$U_2^2 = \int_0^a \frac{(M_1^6)^4 (y_1^6 \delta HEI + y_1^6 HE \delta I + y_1^6 \delta HE \delta I + M_1^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_1^6 + M_1^6) (Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \\ + \int_a^b \frac{(M_2^6)^4 (y_2^6 \delta HEI + y_2^6 HE \delta I + y_2^6 \delta HE \delta I + M_2^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_2^6 + M_2^6) (Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx + \\ + \int_b^l \frac{(M_3^6)^4 (y_3^6 \delta HEI + y_3^6 HE \delta I + y_3^6 \delta HE \delta I + M_3^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I)(Hy_3^6 + M_3^6) (Hy_3^6 + \delta Hy_3^6 + M_3^6)^2} dx. \quad (4.36)$$

Как это уже отмечалось ранее, согласно принципу Лагранжа сумма работ всех внутренних и внешних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю; тогда, подставляя соотношения (4.34) – (4.36) в (4.19), получим:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2 \delta H}{(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6) (Hy_1^6 + M_1^6)} dx - \\
& - \int_a^b \frac{(q_1 + q_2) M_2^6 (y_2^6)^2 \delta H}{(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6) (Hy_2^6 + M_2^6)} dx - \\
& - \int_b^l \frac{q_1 M_3^6 (y_3^6)^2 \delta H}{(Hy_3^6 + \delta Hy_3^6 + M_3^6) (Hy_3^6 + M_3^6)} dx - \int_0^l \frac{(EF \delta H - HE \delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E \delta F)} dx + \\
& + \int_0^a \frac{(M_1^6)^4 (y_1^6 \delta HEI + y_1^6 HE \delta I + y_1^6 \delta HE \delta I + M_1^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I) (Hy_1^6 + M_1^6) (Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \\
& + \int_a^b \frac{(M_2^6)^4 (y_2^6 \delta HEI + y_2^6 HE \delta I + y_2^6 \delta HE \delta I + M_2^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I) (Hy_2^6 + M_2^6) (Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx + \\
& + \int_b^l \frac{(M_3^6)^4 (y_3^6 \delta HEI + y_3^6 HE \delta I + y_3^6 \delta HE \delta I + M_3^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I) (Hy_3^6 + M_3^6) (Hy_3^6 + \delta Hy_3^6 + M_3^6)^2} dx = 0. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Разделив уравнение (4.37) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для определения величины распора в упругой нити конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки на части пролета:

$$\begin{aligned}
& \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{IH^2} \left[\int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2}{(Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \int_a^b \frac{(q_1 + q_2) M_2^6 (y_2^6)^2}{(Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx + \right. \\
& \left. + \int_b^l \frac{q_1 M_3^6 (y_3^6)^2}{(Hy_3^6 + M_3^6)^2} dx \right] + \frac{F^2}{IH^2 I} \left[\int_0^a \frac{(M_1^6)^4 y_1^6}{(Hy_1^6 + M_1^6)^3} dx + \right. \\
& \left. + \int_a^b \frac{(M_2^6)^4 y_2^6}{(Hy_2^6 + M_2^6)^3} dx + \int_b^l \frac{(M_3^6)^4 y_3^6}{(Hy_3^6 + M_3^6)^3} dx \right] = 0. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 и дополнительной сосредоточенной нагрузки P (рис. 4.3). Примем, что нить имеет поперечное сечение площадью F и момент инерции I , а также модуль упругости E . Как и ранее, в качестве независимой переменной примем площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

Выражения для прогибов, изгибающих моментов и приращений параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости в данном случае также определяются формулами (4.3) – (4.13), в которых значения y^6 и M^6 имеют вид:

- при $0 \leq x \leq a$

$$y_1^6 = \frac{Pbx}{6EI}(l^2 - b^2 - x^2) + \frac{q_1 x}{24}(x^3 - 2lx^2 + l^3);$$

$$M_1^6 = \frac{Pbx}{l} + \frac{q_1 x}{2}(l - x),$$

- при $a \leq x \leq l$

$$y_2^6 = \frac{Pbx}{6EI}(l^2 - b^2 - x^2) + \frac{P}{6EI}(x - a)^3 + \frac{q_1 x}{24}(x^3 - 2lx^2 + l^3);$$

$$M_2^6 = \frac{Pbx}{l} - P(x - a) + \frac{q_1 x}{2}(l - x).$$

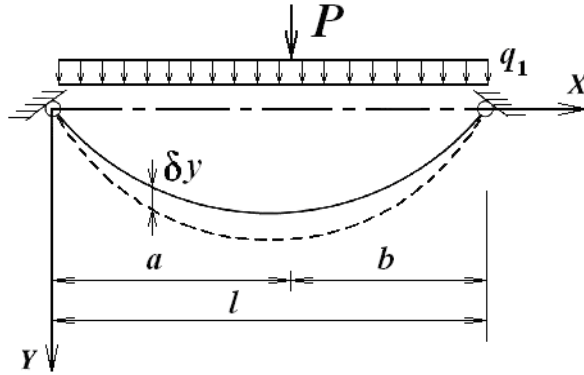


Рис. 4.3. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 и дополнительной сосредоточенной нагрузки P

Работу внешних сил представим как $U_1 = U_1^1 + U_1^2$, где

$$U_1^1 = - \int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2 \delta H}{(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6) (Hy_1^6 + M_1^6)} dx - \int_a^l \frac{q_1 M_2^6 (y_2^6)^2 \delta H}{(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6) (Hy_2^6 + M_2^6)} dx; \quad (4.39)$$

$$U_1^2 = - \frac{PM_a^6 (y_a^6)^2 \delta H}{(Hy_a^6 + \delta Hy_a^6 + M_a^6) (Hy_a^6 + M_a^6)}, \quad (4.40)$$

а M_a^6 , y_a^6 – значения изгибающего момента и прогиба в шарнирно опертой балке пролетом l при действии сосредоточенной нагрузки P в точке $x = a$.

Работу внутренних сил запишем следующим образом: $U_2 = U_2^1 + U_2^2$, причем члены, стоящие в правой части этого равенства, записываются так:

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (4.41)$$

$$U_2^2 = \int_0^a \frac{(M_1^6)^4 (y_1^6 \delta HEI + y_1^6 HE\delta I + y_1^6 \delta HE\delta I + M_1^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \\ + \int_a^l \frac{(M_2^6)^4 (y_2^6 \delta HEI + y_2^6 HE\delta I + y_2^6 \delta HE\delta I + M_2^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx. \quad (4.42)$$

Поскольку в соответствии с принципом Лагранжа сумма работ всех внутренних и внешних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, подставляя соотношения (4.39) – (4.42) в (4.19), получим:

$$- \int_0^a \frac{gM_1^6 (y_1^6)^2 \delta H}{(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + M_1^6)} dx - \int_a^l \frac{gM_2^6 (y_2^6)^2 \delta H}{(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + M_2^6)} dx - \\ - \frac{PM_a^6 (y_a^6)^2 \delta H}{(Hy_a^6 + \delta Hy_a^6 + M_a^6)(Hy_a^6 + M_a^6)} - \int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\ + \int_0^a \frac{(M_1^6)^4 (y_1^6 \delta HEI + y_1^6 HE\delta I + y_1^6 \delta HE\delta I + M_1^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy_1^6 + M_1^6)(Hy_1^6 + \delta Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \\ + \int_a^l \frac{(M_2^6)^4 (y_2^6 \delta HEI + y_2^6 HE\delta I + y_2^6 \delta HE\delta I + M_2^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy_2^6 + M_2^6)(Hy_2^6 + \delta Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx = 0. \quad (4.43)$$

Разделив уравнение (4.43) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для определения величины распора в упругой нити конечной жесткости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\frac{PM_a^6 (y_a^6)^2}{(Hy_a^6 + M_a^6)^2} + \int_0^a \frac{q_1 M_1^6 (y_1^6)^2}{(Hy_1^6 + M_1^6)^2} dx + \int_a^l \frac{q_1 M_2^6 (y_2^6)^2}{(Hy_2^6 + M_2^6)^2} dx \right] + \\ + \frac{F^2}{lH^2 I} \left[\int_0^a \frac{(M_1^6)^4 y_1^6}{(Hy_1^6 + M_1^6)^3} dx + \int_a^l \frac{(M_2^6)^4 y_2^6}{(Hy_2^6 + M_2^6)^3} dx \right] = 0. \quad (4.44)$$

4.3.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета. Допустим, что начальная равномерно распределенная нагрузка q_1 действует на всем пролете нити, а дополнительная равномерно распределенная нагрузка q_2 – на половине пролета (рис. 4.4). Тогда уравнение (4.38) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\int_0^{l/2} \frac{(q_1 + q_2)M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx + \int_{l/2}^l \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx \right] + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \left[\int_0^{l/2} \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx + \int_{l/2}^l \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

В данном случае выражения для y^6 и M^6 можно записать таким образом:

- при $0 \leq x \leq l/2$

$$M^6 = \frac{(q_1 + q_2)x}{2}(l - x);$$

$$y^6 = \frac{(q_1 + q_2)x}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

- при $l/2 \leq x \leq l$

$$M^6 = \frac{q_1 x}{2}(l - x),$$

$$y^6 = \frac{q_1 x}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3).$$

Подставляя последние выражения в (4.45), производя интегрирование и некоторые преобразования, приходим к дифференциальному уравнению для определения распора в упругой нити конечной жесткости

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{[q_1^2 + (q_1 + q_2)^2]l^6 EF^2}{32H^2} \times \\ \times \left[361(19Hl^2 + 192EI)^{-2} + \frac{25}{3}(5Hl^2 + 48EI)^{-2} \right] + \frac{[q_1^2 + (q_1 + q_2)^2]l^6 E^2 F^2 I}{H^2} \times \\ \times [2052(19Hl^2 + 192EI)^{-3} + 15(5Hl^2 + 48EI)^{-3}] = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

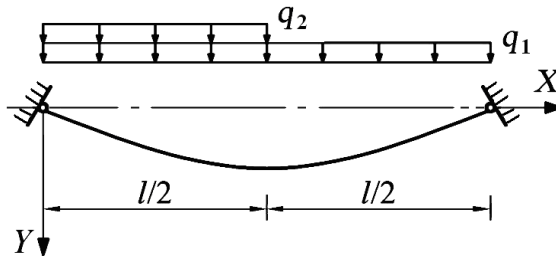


Рис. 4.4. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 на всем пролете и дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 на половине пролета

4.3.2. Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета. Рассмотрим теперь случай нагружения нити конечной жесткости начальной равномерно распределенной нагрузкой q_1 на всем пролете и сосредоточенной дополнительной нагрузкой P посредине пролета (рис. 4.5).

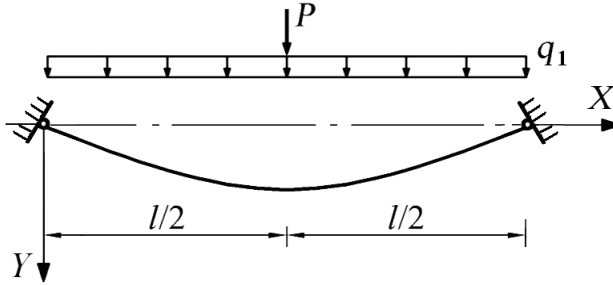


Рис. 4.5. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 на всем пролете и дополнительной сосредоточенной нагрузки P посредине пролета

В этом случае дифференциальное уравнение (4.44) можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\frac{PM_p^6 (y_p^6)^2}{(Hz_p^6 + M_p^6)^2} + \right. \\ & \left. + \int_0^{l/2} \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx + \int_{l/2}^l \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx \right] + \\ & + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \left[\int_0^{l/2} \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx + \int_{l/2}^l \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

В рассматриваемом случае соотношения для изгибающих моментов M^6 и прогибов y^6 будут иметь вид:

- при $0 \leq x \leq l/2$

$$M^6 = \frac{Px}{2} + \frac{q_1 x}{2}(l - x);$$

$$y^6 = \frac{Px}{12EI} \left(\frac{3}{4} l^2 - x^2 \right) + \frac{q_1 x}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

- при $l/2 \leq x \leq l$

$$M^6 = \frac{Px}{2} - P \left(x - \frac{l}{2} \right) + \frac{q_1 x}{2}(l - x);$$

$$y^6 = \frac{Px}{12EI} \left(\frac{3}{4}l^2 - x^2 \right) + \frac{P}{6EI} \left(x - \frac{l}{2} \right)^3 + \frac{q_1 x}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

а для изгибающих моментов M_p^6 и прогибов y_p^6 запишутся так:

$$M_p^6 = \frac{q_1 l^2}{8} + \frac{Pl}{4}; \quad y_p^6 = \frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{EI} + \frac{Pl^3}{48EI}.$$

После подстановки указанных выражений в уравнение (4.47), проведения интегрирования и некоторых преобразований, получим дифференциальное уравнение для определения распора в упругой нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{1}{48} \cdot \frac{k_1 k_2 l^4 EF^2}{H^2 (k_2 H l^2 + 48 k_1 EI)^2} \left[k_6 - 144 \cdot \frac{k_1^2 k_3 EI}{k_2 H l^2 + 48 k_1 EI} \right] - \\ - \frac{1}{48} \cdot \frac{k_4 k_5 l^4 EF^2}{H^2 (k_5 H l^2 + 192 k_4 EI)^2} \left[k_5 q_1 l - 576 \cdot \frac{k_3 k_4^3 EI}{k_5 H l^2 + 192 k_4 EI} \right] = 0, \quad (4.48) \end{aligned}$$

где $k_1 = q_1 l + 2P$; $k_2 = 5q_1 l + 8P$; $k_3 = 1 + q_1$;

$k_4 = 3q_1 l + 4P$; $k_5 = 57q_1 l + 88P$; $k_6 = q_1 l + 6P$.

4.3.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета. В случае нагружения нити конечной жесткости начальной равномерно распределенной нагрузкой q_1 на всем пролете и сосредоточенной дополнительной нагрузкой P в четверти пролета (рис. 4.6) дифференциальное уравнение (4.44) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\frac{PM_p^6 (y_p^6)^2}{(Hz_p^6 + M_p^6)^2} + \int_0^{l/4} \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx + \int_{l/4}^l \frac{q_1 M^6 m^2}{(Hm + EIM^6)^2} dx \right] + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \left[\int_0^{l/4} \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx + \int_{l/4}^l \frac{(M^6)^4 m}{(Hm + EIM^6)^3} dx \right] = 0. \quad (4.49) \end{aligned}$$

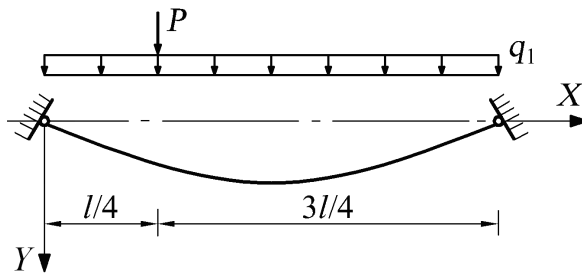


Рис.4.6. Деформирование нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки q_1 на всем пролете и дополнительной сосредоточенной нагрузки P в четверти пролета

Здесь выражения для M^6 и y^6 примут вид:

- при $0 \leq x \leq l/4$

$$M^6 = \frac{3}{4}Px + \frac{q_1x}{2}(l-x);$$

$$y^6 = \frac{Px}{8EI} \left(\frac{7}{16}l^2 - x^2 \right) + \frac{q_1x}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

- при $l/4 \leq x \leq l$

$$M^6 = \frac{3}{4}Px - P \left(x - \frac{l}{4} \right) + \frac{q_1x}{2}(l-x);$$

$$y^6 = \frac{Px}{8EI} \left(\frac{7}{16}l^2 - x^2 \right) + \frac{P}{6EI} \left(x - \frac{l}{4} \right)^3 + \frac{q_1x}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3),$$

а для M_p^6 и y_p^6 запишутся так:

$$M_p^6 = \frac{3}{32}q_1l^2 + \frac{3}{16}Pl; \quad y_p^6 = \frac{19}{2048} \frac{q_1l^4}{EI} + \frac{3}{256} \frac{Pl^3}{EI}.$$

Подставляя указанные выражения в (4.49) и выполняя далее интегрирование и некоторые преобразования, получим дифференциальное уравнение для определения распора в упругой нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{1}{64} \cdot \frac{k_1k_7l^4EF^2}{H^2(k_7Hl^2 + 192k_1EI)^2} \left[k_6k_7 - 564 \cdot \frac{k_1^3EI}{k_7Hl^2 + 192k_1EI} \right] - \\ - \frac{1}{768} \cdot \frac{k_8k_9l^4EF^2}{H^2(k_9Hl^2 + 768k_8EI)^2} \left[k_9q_1l - 4068 \cdot \frac{k_8^3EI}{k_9Hl^2 + 768k_8EI} \right] - \\ - \frac{3}{256} \cdot \frac{k_{10}k_{11}l^4EF^2}{H^2(k_{11}Hl^2 + 768k_{10}EI)^2} \left[k_{11}q_1l - 13824 \cdot \frac{k_{10}^3EI}{k_{11}Hl^2 + 768k_{10}EI} \right] + \\ + \frac{441}{2} \cdot \frac{k_{12}^4k_{13}l^4E^2F^2I}{H^2(k_{13}Hl^2 + 768k_{12}EI)^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $k_7 = 19q_1l + 24P$; $k_8 = 7q_1l + 12P$; $k_9 = 497q_1l + 648P$; $k_{10} = 5q_1l + 4P$; $k_{11} = 395q_1l + 408P$; $k_{12} = q_1l + 4P$; $k_{13} = 71q_1l + 88P$.

§ 4.4. Решение дифференциальных уравнений

Решение дифференциальных уравнений (4.23), (4.33), (4.38), (4.44), (4.46), (4.48) и (4.50) можно получить, воспользовавшись разложением искомой функции в ряд Тейлора

$$H = H_0 + H'_0(F - F_0) + \frac{1}{2!} H''_0(F - F_0)^2 + \dots, \quad (4.51)$$

где H_0 и F_0 – начальные условия.

Коэффициенты ряда Тейлора находятся путем последовательного дифференцирования уравнений (4.23), (4.33), (4.38), (4.44), (4.46), (4.48) и (4.50)

$$H'_0 = \frac{dH}{dF}; \quad (4.52)$$

$$H''_0 = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{dH}{dF} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{dH}{dF} \right) \frac{dH}{dF}. \quad (4.53)$$

Перейдем теперь к определению начальных условий. За H_0 можно принять значение распора, возникающего в недеформируемой нити под действием начальной и дополнительной нагрузок, а за F_0 – площадь поперечного сечения нити, в которой при распоре H_0 напряжения от изгиба минимальны.

Методику определения F_0 покажем на примере нити конечной жесткости, находящейся под действием вертикальной нагрузки. Рассмотрим нить кольцевого сечения (в виде трубы) с толщиной стенки t и средним радиусом r_0 ($r_0 = (R + r)/2$, где R – наружный, а r – внутренний радиусы трубы). Для такого поперечного сечения имеем:

$$I = \frac{F^3}{8\pi^2 t^2}; \quad (4.54) \quad W = \frac{F^2}{4\pi t}, \quad (4.55)$$

где $F = 2\pi r_0 t$ – площадь, а W – момент сопротивления поперечного сечения.

Напряжения от изгиба в нити вычисляются по формуле

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{M_z}{W}, \quad (4.56)$$

которая с учетом (4.5), (4.54) и (4.55) приводится к виду

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{4\pi t M_z^6 F}{8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3}, \quad (4.57)$$

где принято, что $\alpha = I \frac{y^6}{M_z^6}$. После дифференцирования (4.57) по F находим:

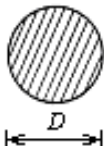
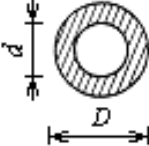
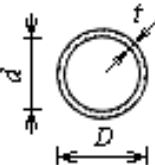
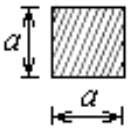
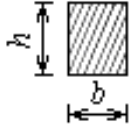
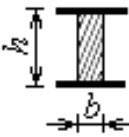
$$\frac{d\sigma_{\text{и}}}{dF} = \frac{4\pi t M_z^6 (8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3) - 12\pi t M_z^6 F^3}{(8\pi^2 t^2 \alpha H_0 + F^3)^2}. \quad (4.58)$$

Приравняв правую часть этого равенства нулю, после некоторых преобразований, получим соотношение для F_0 :

$$F_0 = \sqrt[3]{4\pi^2 t^2 \alpha H_0}. \quad (4.59)$$

Геометрические характеристики и начальное значение площади поперечного сечения F_0 для некоторых наиболее характерных поперечных сечений приведены в табл. 4.1. Причем при составлении табл. 4.1 толщина полок двутавра полагалась малой по сравнению с прочими размерами сечения.

Таблица 4.1

Тип поперечного сечения	Эскиз поперечного сечения	Геометрические характеристики			Начальное значение площади F_0
		площадь F	момент инерции I	момент сопротивления W	
Круг		$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{F^2}{4\pi}$	$\frac{F}{4} \sqrt{\frac{F}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{4}{3} \pi \alpha H_0}$
Толстостенное кольцо		$\frac{\pi D^2}{4} (1 - \gamma^2)$ $\gamma = \frac{d}{D}$	$\frac{F^2}{4\pi} \cdot \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2}$	$\frac{F(1 + \gamma^2)}{4} \times \sqrt{\frac{F}{\pi(1 - \gamma^2)}}$	$\sqrt{\frac{4\pi(1 - \gamma^2)}{3(1 + \gamma^2)}} \alpha H_0$
Тонкостенное кольцо (труба)		$\pi d_0 t$ $d_0 = \frac{D + d}{2}$	$\frac{F^3}{8\pi^2 t^2}$	$\frac{F^2}{4\pi t}$	$\sqrt[3]{4\pi^2 t^2 \alpha H_0}$
Квадрат		a^2	$\frac{F^2}{12}$	$\frac{F}{6}$	$\sqrt{12 \alpha H_0}$
Прямоугольник		bh	$\frac{F^3}{12b^2}$	$\frac{F^2}{6b}$	$\sqrt[3]{6b^2 \alpha H_0}$
Двутавр		$bh + 2f$	$\frac{F^3 + 6F^2 f}{12b^2}$ $F = bh$	$\frac{F^2 + 6Ff}{6b}$	$\sqrt[3]{\beta + \sqrt{\beta^2 - f^6}} + \sqrt[3]{\beta - \sqrt{\beta^2 - f^6}} - f$ $\beta = 3b^2 \alpha H_0 - f^3$
Примечание. В таблице приняты следующие обозначения: H_0 – начальное значение распора в нити; f – площадь полки двутавра; $\alpha = (I y^6) / M_z^6$.					

Продemonстрируем теперь применение предлагаемой методики расчета на примере, изображенном на рис. 4.7. В примере принято, что нить конечной жесткости представляет собой круглую стальную трубу наружным диаметром $D = 720$ мм с толщиной стенки $t = 10$ мм. Труба шарнирно подвешена к двум опорам, расположенным на одном уровне.

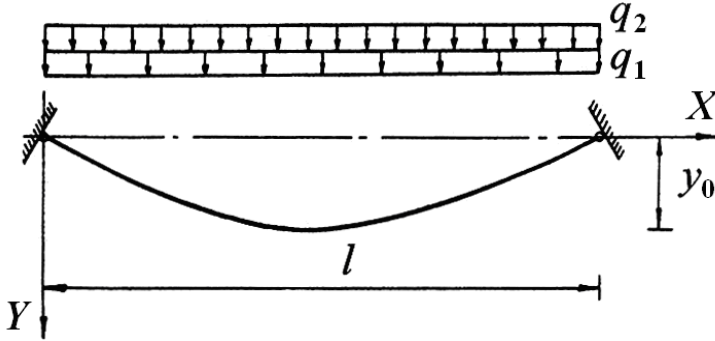


Рис. 4.7. К примеру расчета

Пролет трубы равен $l = 150$ м. Начальная равномерно распределенная нагрузка (собственный вес трубы) $q_1 = 1,716$ кН/м и дополнительная равномерно распределенная нагрузка $q_2 = 1,961$ кН/м расположены на всем пролете. Стрела провисания нити при начальной нагрузке достигает $y_0 = 6$ м. Модуль упругости материала стенок трубы составляет $E = 20,59 \cdot 10^7$ кН/м². Нить работает с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок.

Определяем H_0 , считая нить недеформируемой,

$$H_0 = \frac{M_{z,x=l/2}^6 (y_{x=l/2}^6 - y_0)}{y_{x=l/2}^6 y_0} = \frac{10350 \cdot (83,71 - 6)}{83,71 \cdot 6} = 1600,05 \text{ кН.}$$

Вычисляем значение F_0 по формуле (4.59)

$$F_0 = \sqrt[3]{4\pi^2 t^2 \alpha H_0} = \sqrt[3]{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,01^2 \cdot 11,383 \cdot 10^{-6} \cdot 1600,05} = 0,0416 \text{ м}^2$$

и значение I_0 по формуле (4.54)

$$I_0 = \frac{F_0^3}{8\pi^2 t^2} = \frac{0,0416^3}{8 \cdot 3,14^2 \cdot 0,01^2} = 90,935 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

Далее из уравнения (4.25) определяем величину производной от H по F

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dF} &= \left[\frac{F_0}{H_0} + \frac{25(q_1 + q_2)^2 l^6 E F_0^2}{12 H_0^2 (5 l^2 H_0 + 48 E I_0)^2} - \frac{120(q_1 + q_2)^2 l^6 E^2 F^2 I_0}{H_0^2 (5 l^2 H_0 + 48 E I_0)^3} \right]^{-1} = \\ &= \left[\frac{0,0416}{1600,05} + \frac{25 \cdot (1,716 + 1,961)^2 \cdot 150^6 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 0,0416^2}{12 \cdot 1600,05^2 (5 \cdot 150^2 \cdot 1600,05 + 48 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4})^2} - \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{120 \cdot (1,716 + 1,961^2) \cdot 150^6 \cdot (20,59 \cdot 10^7)^2 \cdot 0,0416^2 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4}}{1600,05^2 \cdot (5 \cdot 150^2 \cdot 1600,05 + 48 \cdot 20,59 \cdot 10^7 \cdot 90,935 \cdot 10^{-4})^3} \Big]^{-1} =$$

$$= 2527,359 \text{ кН/м}^2.$$

И, наконец, по формуле (4.51) находим распор в нити

$$H = H_0 + H'_0 (F - F_0) =$$

$$= 1600,05 + 2527,359 \cdot (0,02231 - 0,0416) = 1551,3 \text{ кН}.$$

При трех членах ряда величина распора равна $H = 1583,28$ кН. С увеличением же числа членов ряда точность решения практически не изменяется, т. е. уже при трех членах ряда получаем достаточно точный результат.

Изгибающий момент и стрелу провисания в середине пролета нити конечной жесткости определяем по формулам (4.3) и (4.5) соответственно:

$$M_z = \frac{(M_z^6)^2}{Hy^6 + M_z^6} = \frac{10350^2}{1583,28 \cdot 83,71 + 10350} = 748,64 \text{ кНм};$$

$$y = \frac{M_z^6 y^6}{Hy^6 + M_z^6} = \frac{10350 \cdot 83,71}{1583,28 \cdot 83,71 + 10350} = 6,06 \text{ м}.$$

Напряжения в середине пролета нити находим по известной формуле

$$\sigma = \frac{H}{F} \pm \frac{M_z}{W} = \frac{1583,28}{0,02231 \cdot 10} \pm \frac{748,64}{0,003905 \cdot 10} =$$

$$= 7096,73 \pm 19171,32 = \begin{cases} + 26268,05 & \text{Н/см}^2 \\ - 12074,59 & \text{Н/см}^2 \end{cases}.$$

§ 4.5. Учет влияния температурных воздействий

Хорошо известно, что при эксплуатации висячих систем большое влияние на их напряженно-деформированное состояние оказывают температурные воздействия. Изменение температуры на Δt° вызывает изменение длины нити, что, в свою очередь, вызывает изменения стрелы провисания и, следовательно, внутренних усилий (рис. 4.8).

Определим эти величины, для чего воспользуемся изложенным ранее методом расчета. Только в данном случае вместо независимой переменной F примем значение приращения температуры Δt .

Как это уже отмечалось выше, если температура получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное $\delta \Delta t$, то изменится напряженно-деформированное состояние нити. Распор H получит некоторое приращение δH . В вертикальной плоскости изгибающий момент M_z получит приращение δM_z , а угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta \varphi$. При этом нить переместится из своего по-

ложения на величину δy . Соответственно, в горизонтальной плоскости изгибающий момент M_y получит приращение δM_y , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити ψ – приращение $\delta\psi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δz .

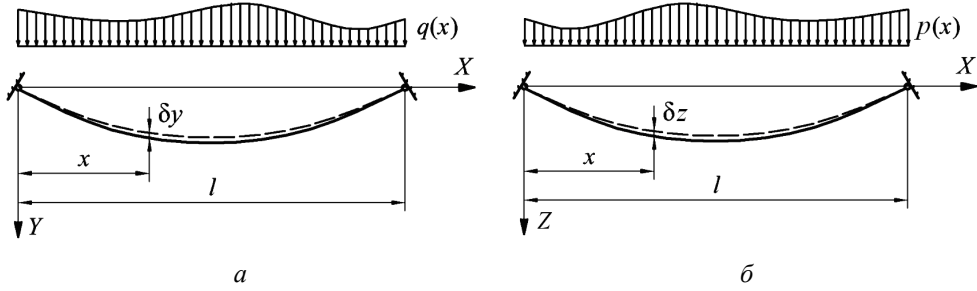


Рис. 4.8. Деформация нити при изменении температуры:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

Отметим, что приращения δy , δz , δM_z и δM_y по-прежнему могут быть представлены выражениями (4.7) – (4.10), а соотношения для приращений δdx , $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ можно выразить в виде

$$\delta dx = \frac{\delta H}{EF} dx + \alpha_t \delta \Delta_t dx; \quad (4.60)$$

$$\delta d\varphi = - \frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{EI(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (4.61)$$

$$\delta d\psi = - \frac{(M_y^6)^2 z^6 \delta H}{EI(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx, \quad (4.62)$$

где α_t – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Запишем соотношения, описывающие работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузок $q(x)$ и $p(x)$ на перемещениях δy и δz соответственно, которые находятся по формулам (4.14) и (4.15). Работа внутренних сил состоит из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx

$$U_2^1 = - \int_0^l \left(\frac{\delta H}{EF} + \alpha_t \delta \Delta_t \right) (H + \delta H) dx \quad (4.63)$$

и работы изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ соответственно

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{EI(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (4.64)$$

$$U_2^3 = \int_0^l \frac{(M_y^6)^2 z^6 \delta H}{EI(Hz^6 + \delta H z^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx. \quad (4.65)$$

Подставляя далее (4.14), (4.15) и (4.63) – (4.65) в (4.19), деля полученное выражение почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta \Delta_t \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, приходим к дифференциальному уравнению, связывающему распор в нити конечной жесткости с изменением температуры,

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_t}{dH} + \frac{1}{\alpha_t EF} + \frac{1}{\alpha_t l H} \int_0^l \frac{q(x) M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \frac{1}{\alpha_t l H} \int_0^l \frac{p(x) M_y^6 n^2}{(Hn + EIM_y^6)^2} dx - \\ - \frac{EI}{\alpha_t l H} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx - \frac{EI}{\alpha_t l H} \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 n}{(Hn + EIM_y^6)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

При этом, как уже указывалось выше, интегральные компоненты, входящие в последнее уравнение, зависят от вида приложенной к нити нагрузки и условий закрепления ее концов. Их значения по-прежнему можно вычислять либо непосредственным интегрированием, либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса.

Для решения дифференциального уравнения (4.66) можно воспользоваться двумя способами. При сложных нагружениях (например, равномерно распределенная и несколько сосредоточенных или участковых нагрузок) решение полученного уравнения удобно получить, используя разложение искомой функции в ряд Маклорена

$$H = H_1 + H_1' \Delta_t + \frac{1}{2!} H_1'' \Delta_t^2 + \dots, \quad (4.67)$$

где H_1 – распор в нити при действии начальной и дополнительной нагрузок. Коэффициенты ряда Маклорена получаются путем последовательного дифференцирования уравнения (4.66)

$$H_1' = \frac{dH}{d\Delta_t}; \quad (4.68)$$

$$H_1'' = \frac{\partial}{\partial \Delta_t} \left(\frac{dH}{d\Delta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{dH}{d\Delta_t} \right) \frac{dH}{d\Delta_t}. \quad (4.69)$$

При простых нагружениях решение рассматриваемого уравнения можно получить в общем виде. Например, для случая вертикальной равномерно распределенной нагрузки и шарнирного закрепления концов нити уравнение (4.66) примет вид

$$\frac{d\Delta_t}{dH} + \frac{1}{\alpha_t EF} + \frac{25q^2 l^6}{12\alpha_t H(5l^2 H + 48EI)^2} - \frac{120q^2 l^6 EI}{\alpha_t H(5l^2 H + 48EI)^3} = 0. \quad (4.70)$$

Общий интеграл уравнения (4.70) с учетом того, что $\omega = 5q^2 l^6 / 12$, равен:

$$\alpha_i \Delta_i = \frac{\omega}{(48EI)^2} \ln \frac{5l^2 H}{5l^2 H + 48EI} + \\ + \frac{\omega}{48EI} \cdot \frac{5l^2 H + 192EI}{(5l^2 H + 48EI)^2} - \frac{5l^2 H + 48EI}{5l^2 EF} + C. \quad (4.71)$$

Значение произвольной постоянной интегрирования C можно определить исходя из условия, что при $\Delta_i = 0$ распор $H = H_1$. Подставляя затем значение произвольной постоянной C в выражение (4.71), придем к искомому решению, описывающему напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости при изменении температуры.

Следует отметить, что полученные выше решения для нитей конечной жесткости в равной мере описывают поведение и гибкой упругой нити. При этом необходимо только иметь в виду, что зависимости для гибкой нити получаются из соответствующих зависимостей для нити конечной жесткости путем учета условия $I = 0$. Например, для гибкой упругой нити вместо уравнения (4.66) в случае действия только вертикальной нагрузки будем иметь:

$$\frac{d\Delta_i}{dH} = -\frac{D}{\alpha_i l H^3} - \frac{1}{\alpha_i EF}. \quad (4.72)$$

Причем ранее уже упоминалось о том, что параметр $D = \int_0^l q(x) M_z^6 dx$ является характеристикой нагрузки.

Зависимость (4.72) – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Поэтому общий интеграл (4.72) примет вид

$$\Delta_i = \frac{D}{2\alpha_i l H^2} - \frac{H}{\alpha_i EF} - C. \quad (4.73)$$

Произвольную постоянную интегрирования C , как и в случае нити конечной жесткости, определим из условия, что при $\Delta_i = 0$ распор $H = H_1$. Подставляя значение произвольной постоянной C в выражение (4.73), получим решение рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$H^3 + \left(\frac{8y_0^2}{3l^2} EF + \alpha_i \Delta_i EF \right) H^2 = \frac{DEF}{2l}. \quad (4.74)$$

Если же здесь принять $\Delta_i = 0$, то уравнение (4.74) преобразуется к известному соотношению, полученному в работе [97] для гибкой упругой нити.

§ 4.6. Учет влияния деформации основания

Большое влияние на напряженно-деформированное состояние висячих систем повышенной жесткости, кроме изменения температуры окружающей среды, может оказать также деформация основания. Допустим, что в результате такой деформации одна из опор нити сместилась по оси X на величину u , по оси Y – на величину v и по оси Z – на величину w (рис. 4.9).

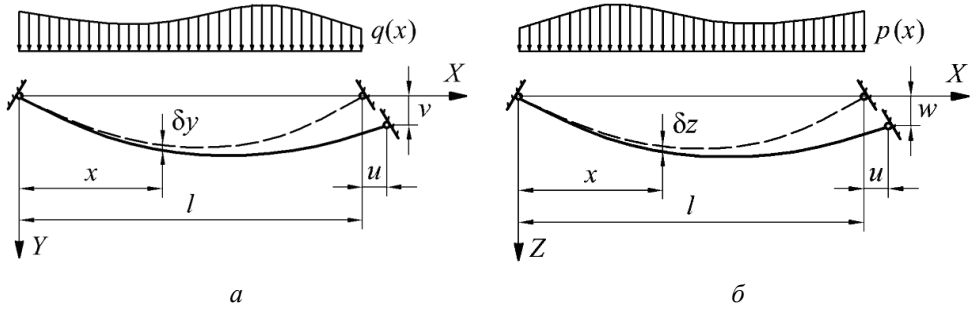


Рис. 4.9. Деформация нити при смещении и осадке опоры:
а – вертикальная проекция; б – горизонтальная проекция

Общее изменение пролета нити составит:

$$\Delta_l = u + \frac{v^2}{l} + \frac{w^2}{l}, \quad (4.75)$$

а длина пролета будет уже равна $l + \Delta_l$. В связи с этим интегрирование при определении работ внешних и внутренних сил в строгой постановке должно быть распространено не на длину l , а на новую длину $l + \Delta_l$. Но, как отмечено в [62], величина изменения пролета Δ_l всегда очень мала по сравнению с l и интегрировать по-прежнему можно по длине l .

Определим теперь приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости, возникающие в результате увеличения пролета нити на очень малую, но конечную величину $\delta\Delta_l$. Как и в случае с изменившейся температурой, соотношения для приращений δy , δz , δM_z , δM_y , $\delta d\varphi$, $\delta d\psi$ примем в виде (4.7) – (4.10), (4.61), (4.62). А упругое удлинение бесконечно малого элемента нити вычисляется по формуле

$$\delta dx = \frac{\delta H}{EF} dx. \quad (4.76)$$

Работу внешней нагрузки запишем в виде (4.14) и (4.15), а для работы распора $H + \delta H$ на приращении пролета Δ_l будем иметь:

$$U_1^3 = (H + \delta H) \delta\Delta_l. \quad (4.77)$$

Работу действующих в элементе dx изгибающих моментов $M_z + \delta M_z$ и $M_y + \delta M_y$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$ запишем в виде (4.64) и (4.65), а работу усилия $H + \delta H$ на упругом перемещении δdx выразим следующим образом:

$$U_2^1 = - \int_0^l \frac{\delta H}{EF} (H + \delta H) dx. \quad (4.78)$$

Подставляя дальше полученные выражения для работ внешних и внутренних сил в уравнение (4.19), получим:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l \frac{q(x)M_z^6(y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_0^l \frac{p(x)M_y^6(z^6)^2 \delta H}{(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + M_y^6)} dx + \\
& + (H + \delta H) \delta \Delta_l - \int_0^l \frac{\delta H}{EF} (H + \delta H) dx + \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 y^6 \delta H}{EI(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \\
& + \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 z^6 \delta H}{EI(Hz^6 + M_y^6)(Hz^6 + \delta Hz^6 + M_y^6)^2} dx = 0. \quad (4.79)
\end{aligned}$$

Разделив уравнение (4.79) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta \Delta_l \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, получим следующую дифференциальную зависимость между величинами распора и приращения пролета упругой нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Delta_l}{dH} - \frac{l}{EF} - \frac{1}{H} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx - \frac{1}{H} \int_0^l \frac{p(x)M_y^6 n^2}{(Hn + EIM_y^6)^2} dx - \\
& - \frac{EI}{H} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx - \frac{EI}{H} \int_0^l \frac{(M_y^6)^4 n}{(Hn + EIM_y^6)^3} dx = 0. \quad (4.80)
\end{aligned}$$

Решение уравнения (4.80), как и в предшествующем случае, можно выполнить двумя способами: либо численным (разложением искомой функции в ряд Маклорена), либо аналитическим.

Если в полученном уравнении положить $p(x) = 0$ и $I = 0$, то придем к дифференциальному уравнению для работающей только в вертикальной плоскости гибкой упругой нити

$$\frac{d\Delta_l}{dH} = \frac{D}{H^3} + \frac{l}{EF}. \quad (4.81)$$

Полученная зависимость является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, общий интеграл которого имеет вид

$$\Delta_l = -\frac{D}{2H^2} + \frac{Hl}{EF} + C. \quad (4.82)$$

Произвольную постоянную интегрирования в решении (4.82) определим из условия, что при Δ_l распор $H = H_1$. Подставляя затем значение произвольной постоянной интегрирования в выражение (4.82), получим решение в следующем виде:

$$H^3 + EF \left(\frac{8y_0^2}{3l^2} - \frac{\Delta_l}{l} \right) H^2 = \frac{DEF}{2l}. \quad (4.83)$$

Обратим внимание на то, что здесь, как и в случае с изменяющейся температурой, при $\Delta_l = 0$ уравнение (4.83) преобразуется к известному соотношению [97] для гибкой упругой нити, нагруженной произвольной вертикальной нагрузкой.

§ 4.7. Расчет многопролетной нити на упруго-податливых опорах

Задачи, связанные с расчетом многопролетных нитей, часто возникают при проектировании покрытий линейно-протяженных промышленных зданий и инженерных сооружений типа трубопроводных переходов, висячих мостов и т. п. Рассмотрим поэтому решение указанной задачи.

Предположим, что многопролетная нить конечной жесткости с поперечным сечением F , моментом инерции I , модулем упругости E , пролетами $l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_n$ подвешена к упруго-податливым опорам с коэффициентами жесткости $k_0, k_1, \dots, k_i, \dots, k_n$ и работает с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Пусть также известно, что нить нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия. Выберем, как и ранее, в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Если площадь поперечного сечения увеличится на бесконечно малую величину δF , то изменится напряженное состояние нити и ее геометрия. Тогда в i -м пролете распор H_i получит некоторое приращение δH_i , изгибающий момент M_{zi} – приращение δM_{zi} , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити ϕ_i – приращение $\delta \phi_i$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy_i (рис. 4.10). При этом опоры нити получают некоторые перемещения $\delta \Delta_{i-1}$ и $\delta \Delta_i$. Указанные перемещения хотя и будут небольшими, но могут оказать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние нити, в частности, на перераспределение усилий в смежных пролетах.

Представим приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити в виде

$$\delta y_i = -\frac{M_{zi}^6 (y_i^6)^2 \delta H_i}{(H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)(H_i y_i^6 + M_{zi}^6)}; \quad (4.84)$$

$$\delta M_{zi} = -\frac{(M_{zi}^6)^2 y_i^6 \delta H_i}{(H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)(H_i y_i^6 + M_{zi}^6)}; \quad (4.85)$$

$$\delta dx_i = \frac{E_i F_i \delta H_i - H_i E_i \delta F_i}{E_i F_i (E_i F_i + E_i \delta F_i)} dx; \quad (4.86)$$

$$\delta d\phi_i = -\frac{(M_{zi}^6)^2 (y_i^6 \delta H_i E_i I_i + y_i^6 H_i E_i \delta I_i + y_i^6 \delta H_i E_i \delta I_i + M_{zi}^6 E_i \delta I_i)}{E_i I_i (E_i I_i + E_i \delta I_i)(H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)(H_i y_i^6 + M_{zi}^6)} dx. \quad (4.87)$$

Виртуальные перемещения опор могут быть выражены так:

$$\delta \Delta_{i-1} = \pm k_{i-1}^{-1} (\delta H_{i-1} - \delta H_i), \quad (4.88)$$

$$\delta \Delta_i = \pm k_i^{-1} (\delta H_i - \delta H_{i+1}), \quad (4.89)$$

при этом знак «плюс» соответствует перемещению опоры наружу, а знак «минус» – внутрь пролета.

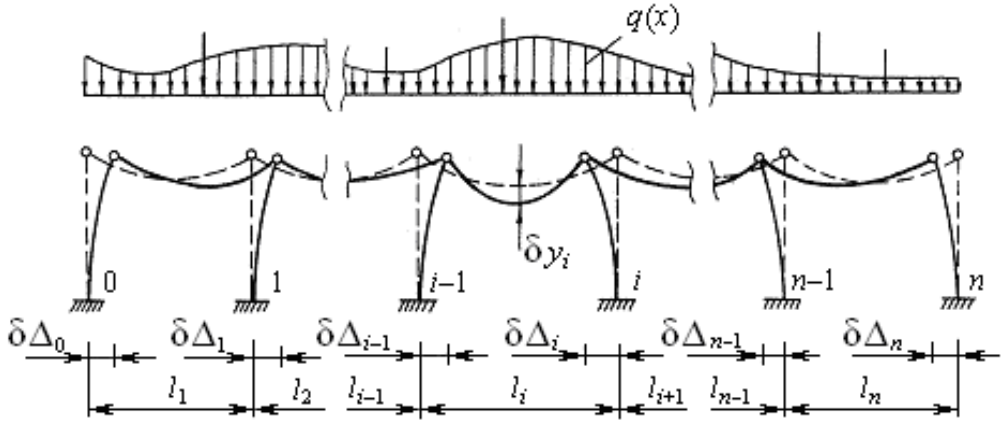


Рис. 4.10. К расчету многопролетной нити на упруго-податливых опорах

Определим работу внешних сил, т. е. нагрузки $q_i(x)$, на перемещениях δy_i

$$U_{li}^1 = - \int_0^{l_i} \frac{q_i(x) M_{zi}^6 (y_i^6)^2 \delta H_i}{(H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)(H_i y_i^6 + M_{zi}^6)} dx \quad (4.90)$$

и возникающих в упруго-податливых опорах реакций на виртуальных перемещениях опор по направлению этих реакций

$$U_{li}^2 = \pm k_{i-1}^{-1} (\delta H_{i-1} - \delta H_i) (H_{i-1} + \delta H_{i-1} - H_i - \delta H_i) \pm \pm k_i^{-1} (\delta H_i - \delta H_{i+1}) (H_i + \delta H_i - H_{i+1} - \delta H_{i+1}). \quad (4.91)$$

В свою очередь, для работы внутренних сил имеем:

$$U_{2i}^1 = - \int_0^{l_i} \frac{(E_i F_i \delta H_i - H_i E_i \delta F_i)(H_i + \delta H_i)}{E_i F_i (E_i F_i + E_i \delta F_i)} dx; \quad (4.92)$$

$$U_{2i}^2 = \int_0^{l_i} \frac{(M_{zi}^6)^4 (y_i^6 \delta H_i E_i I_i + y_i^6 H_i E_i \delta I_i + y_i^6 \delta H_i E_i \delta I_i + M_{zi}^6 E_i \delta I_i)}{E_i I_i (E_i I_i + E_i \delta I_i) (H_i y_i^6 + M_{zi}^6) (H_i y_i^6 + \delta H_i y_i^6 + M_{zi}^6)^2} dx. \quad (4.93)$$

Применим далее для решения задачи принцип Лагранжа. Подставляя (4.90) – (4.93) в (4.19) и переходя в полученном выражении к пределу при $\delta F_i \rightarrow 0$ и $\delta H_i \rightarrow 0$, после некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению, описывающему напряженно-деформированное состояние многопролетной нити конечной жесткости на упруго-податливых опорах,

$$\begin{aligned} & \frac{dF_i}{dH_i} - \frac{F_i}{H_i} + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i} (\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}) + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}) - \\ & - \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} \int_0^{l_i} \frac{q_i(x) M_{zi}^6 m_i^2}{(H_i m_i + E_i I_i M_{zi}^6)^2} dx + \frac{E_i F_i^2 I_i}{l_i H_i^2} \int_0^{l_i} \frac{(M_{zi}^6)^4 m_i}{(H_i m_i + E_i I_i M_{zi}^6)^3} dx = 0, \end{aligned} \quad (4.94)$$

где по-прежнему считается, что $m_i = E_i I_i y_i^6$.

Записав затем выражение (4.94) для каждого пролета, получим систему дифференциальных уравнений. В результате решения данной системы, например, одним из численных методов [171], найдем искомые значения распоров $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$. Причем ординаты провисания и изгибающие моменты в пролетах нити определяются из зависимостей (4.3) и (4.5).

Отметим, что по аналогии с уравнением трех моментов соотношение (4.94) может быть названо уравнением трех распоров.

Решение задачи для нити конечной жесткости, подвешенной на упруго-податливых опорах, можно получить из (4.94), если принять количество пролетов равным $i = 1$. Итак, в данном случае будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} + \frac{EF^2}{lH} (\pm k_0^{-1} \pm k_1^{-1}) - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \\ + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.95)$$

В свою очередь, если рассмотреть предельный случай работы нити конечной жесткости и в уравнении (4.94) положить $I_i = 0$, то придем к решению для многопролетной гибкой нити на упруго-податливых опорах

$$\begin{aligned} \frac{dF_i}{dH_i} - \frac{F_i}{H_i} + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i} (\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}) + \\ + \frac{E_i F_i^2}{l_i H_i^2} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}) - \frac{D_i E_i F_i^2}{l_i H_i^4} = 0, \end{aligned} \quad (4.96)$$

где по-прежнему D_i – характеристика нагрузки. Последняя зависимость является одним из частных случаев дифференциального уравнения Бернулли. Общий интеграл уравнения (4.96) будет:

$$\frac{1}{E_i F_i} = \frac{C}{H_i} + \frac{D_i}{2l_i H_i^3} + \frac{\pm k_{i-1}^{-1} \pm k_i^{-1}}{l_i} + \frac{\ln H_i}{l_i H_i} (\mp k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \mp k_i^{-1} H_{i+1}). \quad (4.97)$$

Значение произвольной постоянной интегрирования C найдем из условия, что при $E_i F_i = \infty$ и $k_{i-1} = k_i = \infty$ величина распора в нити определяется по известной формуле

$$H_i = \frac{\sqrt{3l_i D_i}}{4f_i}, \quad (4.98)$$

где f_i – стрела провисания нерастяжимой гибкой нити в середине пролета при равномерно распределенной нагрузке.

Подставив (4.98) в (4.97), определим значение C . Затем, в свою очередь, подставив найденное значение произвольной постоянной в выражение (4.97), получим:

$$H_i^3 + \frac{8E_i F_i l_i + 3n_i^2 (\pm k_{i-1}^{-1} H_{i-1} \pm k_i^{-1} H_{i+1}) \ln H_i}{3n_i^2 [l_i + E_i F_i (\mp k_{i-1}^{-1} \mp k_i^{-1})]} H_i^2 = \frac{D_i E_i F_i}{2 [l_i + E_i F_i (\mp k_{i-1}^{-1} \mp k_i^{-1})]}. \quad (4.99)$$

Здесь принято, что $n_i = l_i/f_i$ – коэффициент, значение которого вычисляется без учета упругих деформаций нити, т. е. по ее исходным геометрическим размерам до нагружения.

Если же в полученном уравнении положить $i = 1$, то придем к известному случаю гибкой нити на упруго-податливых опорах, для которого выражение (4.99) запишется в виде

$$H^3 + \frac{8EF l}{3n^2[l + EF(\mp k_0^{-1} \mp k_1^{-1})]} H^2 = \frac{DEF}{2[l + EF(\mp k_0^{-1} \mp k_1^{-1})]}. \quad (4.100)$$

Стоит отметить, что данный результат, на что уже указывалось раньше в параграфе 3.11, впервые был получен Е.М. Сидоровичем [144].

§ 4.8. Расчет двухпоясной висячей системы

Висячие системы с развитым в вертикальной плоскости поперечным сечением (называемые также висячими фермами), сохраняя все преимущества висячих конструкций в части рационального использования прочностных свойств материалов, способности перекрывать практически неограниченные пролеты, архитектурной выразительности сооружений в целом и пр., вместе с тем обладают повышенной жесткостью на изгиб в плоскости провисания. Последнее позволяет значительно уменьшить кинематические перемещения при действии сосредоточенных и несимметричных нагрузок. Висячие фермы обычно различают по виду воспринимаемых поясами усилий (гибкие или конечной жесткости) и по типу решетки (соединительных элементов). Если различие вида соединительных элементов практически не сказывается на методах расчета висячих ферм, поскольку распорки или подвески принимают обычно абсолютно жесткими, то различие типов поясов предопределяет и различные методы статического расчета рассматриваемых конструкций [41]. Расчет висячих ферм с гибкими поясами достаточно полно представлен в работах [85, 88, 117]. Однако расчет ферм с одним или двумя поясами, выполненными из нитей конечной жесткости, еще не получил должного развития.

Прежде всего, рассмотрим висячую ферму, пояса которой выполнены из нитей конечной жесткости и связаны между собой по длине посредством подвесок или распорок (рис. 4.11). При рассмотрении напряженно-деформированного состояния такой системы примем, в дополнение к предпосылкам расчета нитей конечной жесткости, следующие допущения:

- соединительные элементы являются абсолютно жесткими, что исключает взаимное смещение поясов фермы в горизонтальной плоскости;
- связи между поясами расположены непрерывно по длине фермы, что позволяет использовать дифференциальную, а не дискретную форму записи уравнений равновесия.

Вспомним теперь, что геометрию висячей фермы однозначно определяет расстояние между ее поясами $h = f(x)$, например, при $h = \text{const}$ имеем систему с параллельными поясами, в противном случае – с непараллельными

поясами. Причем некоторая линия $y = f(x)$ является осью фермы, если для нее соблюдается условие

$$F_1 h_1 - F_2 h_2 = 0, \quad (4.101)$$

в котором принято, что F_1 и F_2 – площади поперечных сечений соответственно нижнего и верхнего поясов; а h_1 и h_2 – расстояния от нейтральной оси до осей соответствующих поясов.

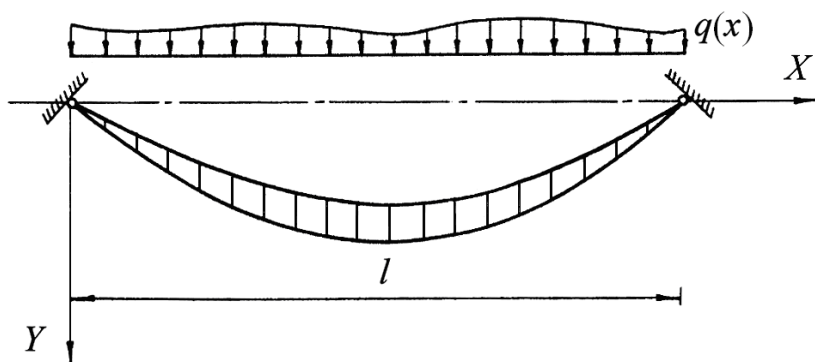


Рис. 4.11. К расчету двухпоясной висячей системы

Расчетную схему висячей фермы примем в виде нити конечной жесткости с приведенными характеристиками поперечного сечения. В общем случае приведенная изгибная жесткость фермы с непараллельными поясами будет величиной переменной

$$EI(x) = E_1 I_1 + E_1 F_1 h_1^2 + E_2 I_2 + E_2 F_2 h_2^2, \quad (4.102)$$

а приведенная жесткость на растяжение – величиной постоянной

$$EF = E_1 F_1 + E_2 F_2, \quad (4.103)$$

где $E_1 I_1$ и $E_2 I_2$ – жесткость на изгиб соответственно нижнего и верхнего поясов фермы; E_1 и E_2 – модули упругости материала поясов.

Применяя в дальнейшем к расчету висячей фермы, работающей с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, изложенный ранее подход, получим для определения распора в системе дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x) M_z^6 m^2}{[Hm + EI(x) M_z^6]^2} dx + \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{EI(x) (M_z^6)^4 m}{[Hm + EI(x) M_z^6]^3} dx = 0. \quad (4.104)$$

В случае же работы фермы без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной вертикальных нагрузок уравнение для определения распора имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{q(x)M_z^6 m[m + EI(x)y_0]}{[Hm + EI(x)M_z^6]^2} dx + \\ & + \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{EI(x)(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0)[m + EI(x)y_0]}{[Hm + EI(x)M_z^6]^3} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Причем методика решения дифференциальных уравнений (4.104) и (4.105) является подобной приведенной ранее методике решения дифференциальных уравнений для нитей конечной жесткости.

Прогибы и изгибающие моменты в расчетной нити определяются из выражений, получаемых на основе статических соотношений (4.3), (4.5) или (4.29), (4.31) в зависимости от условий работы нити.

Перейдем теперь к определению усилий в поясах фермы. Запишем выражения для распора и изгибающего момента, которые действуют в изображенной на рис. 4.12 системе в виде

$$\left. \begin{aligned} H &= H_1 + H_2, \\ M_z &= M_{z1} + H_1 h_1 + M_{z2} - H_2 h_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.106)$$

Далее обратим внимание на то, что во второе уравнение (4.106), а именно в уравнение для M_z , входят неизвестные изгибающие моменты, действующие в поясах фермы. Для их определения воспользуемся условием совместности деформаций для поясов в отдельности и фермы в целом

$$y(x) = y_1(x) = y_2(x). \quad (4.107)$$

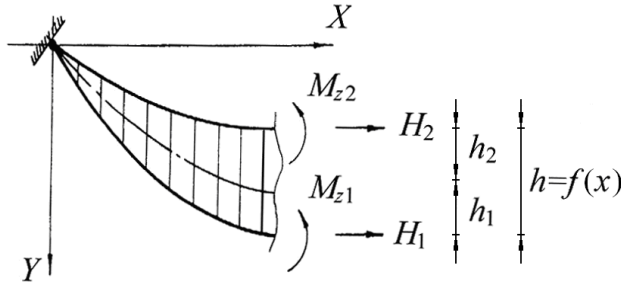


Рис. 4.12. Схема усилий, действующих в висячей системе

Обращаясь к соотношению (4.2) и учитывая условие (4.107) для висячей фермы, работающей с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, получим:

$$M_{z1} = M_{z1}^6 \frac{y}{y_1^6}, \quad M_{z2} = M_{z2}^6 \frac{y}{y_2^6}. \quad (4.108)$$

Далее, подставляя выражения (4.108) в (4.106) и приводя подобные члены, получаем для определения распоров в поясах висячей фермы следующие

зависимости:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H \frac{h_2}{h} + \frac{M_z}{h} - \frac{yM_{z1}^6}{hy_1^6} - \frac{yM_{z2}^6}{hy_2^6}, \\ H_2 &= H \frac{h_1}{h} - \frac{M_z}{h} + \frac{yM_{z1}^6}{hy_1^6} + \frac{yM_{z2}^6}{hy_2^6}. \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

Анализ полученных соотношений позволяет заключить, что применение нитей конечной жесткости в висячих фермах приводит к уменьшению распора в нижнем и увеличению его в верхнем поясе.

Аналогичным образом можно получить расчетные зависимости и для висячей фермы, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной вертикальных нагрузок. Кроме того следует отметить, что напряженно-деформированное состояние висячих ферм с одним или двумя гибкими поясами также описывается уравнениями (4.108) и (4.109). Только в этом случае необходимо учесть, что величина изгибающего момента, определяемая по формулам (4.108), для соответствующего пояса равна нулю. В частном случае висячей фермы с двумя гибкими поясами из уравнений (4.109) получается известное решение, приведенное в работе [41].

Рассмотрим теперь практически важный случай работы висячей фермы, подверженной одновременному действию вертикальной и горизонтальной нагрузок. Не задерживаясь здесь на всех возможных вариантах условий опирания фермы, остановимся подробнее только на двух основных случаях граничных условий, а именно:

- шарнирное опирание на опорах (при свободном повороте системы от вертикальной и горизонтальной нагрузок);
- жесткое защемление на опорах.

Легко убедиться в том, что в первом случае граничных условий ферма при действии горизонтальной нагрузки повернется относительно вертикальной оси на угол η (рис. 4.13, а), величину которого можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{P}{q_1 + q_2}, \quad (4.110)$$

при этом равнодействующая нагрузок по-прежнему будет действовать в плоскости провисания системы, которая, однако, уже не будет вертикальной. Поэтому в соответствии с представленной на рис. 4.13, б схемой величина равнодействующей определяется по формуле

$$R = \sqrt{(q_1 + q_2)^2 + P^2}. \quad (4.111)$$

В данном случае определение усилий в ферме производится подобно случаю, когда на нее действует начальная и дополнительная вертикальные нагрузки. Только теперь за начальную надо взять сумму начальной и дополнительной вертикальных нагрузок $q_1 + q_2$, а за дополнительную – разность между равнодействующей и начальной нагрузками $R - (q_1 + q_2)$.

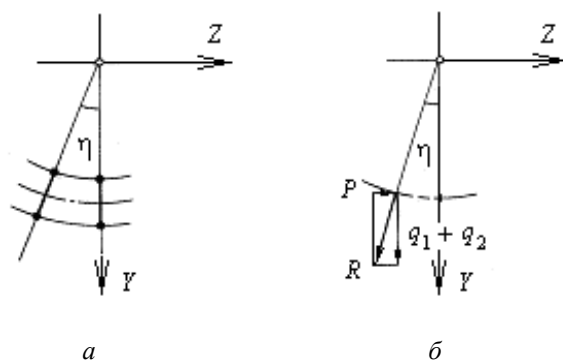


Рис. 4.13. К расчету системы на горизонтальную нагрузку при шарнирном закреплении ее концов:
а – схема деформирования системы; *б* – схема нагрузок на систему

Во втором случае граничных условий висячая ферма под действием горизонтальной нагрузки искривляется в пространстве и задача резко усложняется. Помимо изменения усилий в системе, меняется также ее изгибная жесткость как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях, являясь функцией угла отклонения системы от вертикальной плоскости. В этом случае для определения усилий в ферме приходится использовать либо метод последовательных приближений [37, 171], либо какой-нибудь численный метод, например, метод конечных элементов [27, 139].

§ 4.9. Оценка предпосылок расчета и полученных решений.

Пределы применимости

Раньше уже говорилось о том, что положенные в основу настоящей теории исходные положения можно условно разделить на три группы:

- допущения, связанные с условиями работы рассматриваемых конструкций (пологость нити, упругая работа материала, ограничение пределов отношения напряжений изгиба к напряжениям растяжения);
- предпосылки, связанные с характером деформирования поперечных сечений нити (гипотеза плоских сечений, одноосное напряженное состояние продольных волокон нити);
- допущения, отражающие характерные особенности работы нитей конечной жесткости (пропорциональная зависимость между прогибами и изгибающими моментами в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке).

Первые две группы предпосылок являются общепринятыми и широко используются при построении различных теорий расчета балок, гибких нитей и нитей конечной жесткости. В связи с этим их область применения и вноси-

мая в результаты расчетов величина погрешности достаточно подробно исследована многими авторами в большом количестве публикаций [23, 62, 84, 103, 132, 162, 172]. В этих работах показано, что использование указанных допущений обеспечивает для параметров напряженно-деформированного состояния рассчитываемых конструкций весьма точные результаты. Поэтому в настоящей работе оценка погрешности данных предпосылок не производилась.

Что же касается третьей группы допущений, то следует отметить, что применительно к висячим системам повышенной жесткости какие-либо исследования погрешности ранее практически не выполнялись. Между тем этот вопрос сам по себе представляет значительный интерес.

Оценка погрешности допущения о пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке была проведена путем сравнения с результатами, полученными точным способом для различных случаев нагружения нитей конечной жесткости. В первую очередь были выбраны варианты действия равномерно распределенной нагрузки, приложенной по всему пролету, и сосредоточенной силы, приложенной посередине пролета, т. е. самая благоприятная и самая неблагоприятная схемы нагружения. Кроме того, дополнительно были рассмотрены два других варианта нагружения, а именно: равномерно распределенной нагрузкой, приложенной на половине пролета, и сосредоточенной нагрузкой, приложенной в четверти пролета.

С.П. Тимошенко в работе [162] для разных нагрузок вывел соотношения, характеризующие отличие параметров напряженно-деформированного состояния растянуто-изгибаемого стержня от аналогичных параметров балки без осевой силы. Для середины пролета эти соотношения имеют вид:

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по всему пролету,

$$\varphi_1 = \frac{y}{y^6} = \frac{\frac{1}{chu} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4}, \quad (4.112)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной посередине пролета,

$$\varphi_2 = \frac{y}{y^6} = \frac{u - \frac{1}{3}u^3}{\frac{1}{3}u^3}, \quad (4.113)$$

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на половине пролета,

$$\varphi_3 = \frac{y}{y^6} = \frac{\frac{1}{chu} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24}u^4}, \quad (4.114)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной в четверти пролета,

$$\varphi_4 = \frac{y}{y^6} = \frac{24}{11u^2} \left[1 - 2 \frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{\frac{3}{2}u}}{u(e^{2u} + 1)} \right], \quad (4.115)$$

где $u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}}$.

В соответствии с предложенным подходом эти же зависимости для координаты $x = l/2$ с учетом формул (4.1) и (4.2), в которые вместо f^6 и M^6 подставляются их значения, после некоторых преобразований можно представить так:

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по всему пролету,

$$\varphi'_1 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{5}{12}u^2}, \quad (4.116)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной посередине пролета,

$$\varphi'_2 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}u^2}, \quad (4.117)$$

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на половине пролета,

$$\varphi'_3 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{5}{12}u^2}, \quad (4.118)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной в четверти пролета,

$$\varphi'_4 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{11}{24}u^2}. \quad (4.119)$$

Аналогично для координаты $x = l/4$ вместо формул (4.112) – (4.115) имеем:

- при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по всему пролету,

$$\varphi_5 = \frac{y}{y^6} = \frac{16}{19u^2} \left[3 - \frac{8}{u^2} \left(1 - \frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{\frac{3}{2}u}}{e^{2u} + 1} \right) \right], \quad (4.120)$$

- при сосредоточенной нагрузке, приложенной посередине пролета,

$$\varphi_6 = \frac{y}{y^6} = \frac{24}{11u^2} \left[1 - 2 \frac{e^{\frac{u}{2}}(e^u - 1)}{u(e^{2u} + 1)} \right], \quad (4.121)$$

• при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на половине пролета,

$$\varphi_7 = \frac{y}{y^6} = \frac{96}{31u^2} \left\{ 1 - \frac{2}{u^2} \left[\frac{2}{e^{2u} + 1} \left(1 + \frac{e^{3u} - e^{\frac{3}{2}u} - 1}{e^u + 1} \right) + \frac{2 - 3e^{\frac{u}{2}}}{e^u + 1} \right] \right\}, \quad (4.122)$$

• при сосредоточенной нагрузке, приложенной в четверти пролета,

$$\varphi_8 = \frac{y}{y^6} = \frac{4}{u^2} \left[1 + \frac{4(1 - e^{3u})}{3u(1 + e^u + e^{2u} + e^{3u})} \right]. \quad (4.123)$$

С использованием предложенного подхода зависимости (4.120) – (4.123) для координаты $x = l/4$ с учетом формул (4.1) и (4.2), в которые вместо f^6 и M^6 подставляются их значения, после некоторых преобразований представим так:

• при равномерно распределенной нагрузке, приложенной по всему пролету,

$$\varphi'_5 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{19}{48}u^2}, \quad (4.124)$$

• при сосредоточенной нагрузке, приложенной посредине пролета,

$$\varphi'_6 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{11}{24}u^2}, \quad (4.125)$$

• при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на половине пролета,

$$\varphi'_7 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{31}{96}u^2}, \quad (4.126)$$

• при сосредоточенной нагрузке, приложенной в четверти пролета,

$$\varphi'_8 = \frac{y}{y^6} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}u^2}. \quad (4.127)$$

С помощью представленных выше формул вычислены параметры φ_1 ; φ'_1 ; φ_2 ; φ'_2 ... φ_8 ; φ'_8 для ряда значений u , которые приведены в таблицах 4.2 – 4.5. Кроме этого, в таблицах даны величины погрешности определения параметров напряженно-деформированного состояния нити $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, ..., $\Delta\varphi_8$. Эти же решения иллюстрируются рисунками 4.14 и 4.15.

Таблица 4.2

u	φ_1	φ'_1	$\Delta\varphi_1 = \frac{\varphi'_1 - \varphi_1}{\varphi_1} \cdot 100\%$	φ_2	φ'_2	$\Delta\varphi_2 = \frac{\varphi'_2 - \varphi_2}{\varphi_2} \cdot 100\%$
0	1	1	0	1	1	0
1	0,7107	0,7059	-0,67	0,7152	0,7500	4,86
2	0,3797	0,3750	-1,25	0,3885	0,4286	10,32
3	0,2133	0,2105	-1,29	0,2228	0,2500	12,21
4	0,1319	0,1304	-1,14	0,1407	0,1579	12,22
5	0,0884	0,0876	-0,94	0,0960	0,1071	11,56
6	0,0629	0,0625	-0,75	0,0695	0,0769	10,64
7	0,0469	0,0467	-0,61	0,0525	0,0577	9,91
8	0,0363	0,0362	-0,48	0,0411	0,0447	9,02
9	0,0289	0,0288	-0,41	0,0329	0,0357	8,51
10	0,0235	0,0234	-0,33	0,0269	0,0291	8,12

Таблица 4.3

u	φ_3	φ'_3	$\Delta\varphi_3 = \frac{\varphi'_3 - \varphi_3}{\varphi_3} \cdot 100\%$	φ_4	φ'_4	$\Delta\varphi_4 = \frac{\varphi'_4 - \varphi_4}{\varphi_4} \cdot 100\%$
0	1	1	0	1	1	0
1	0,7107	0,7059	-0,67	0,7082	0,6857	-3,18
2	0,3797	0,3750	-1,25	0,3751	0,3529	-5,92
3	0,2133	0,2105	-1,29	0,2082	0,1951	-6,29
4	0,1319	0,1304	-1,14	0,1273	0,1200	-5,73
5	0,0884	0,0876	-0,94	0,0844	0,0803	-4,86
6	0,0629	0,0625	-0,75	0,0596	0,0571	-4,19
7	0,0469	0,0467	-0,61	0,0441	0,0426	-3,40
8	0,0363	0,0362	-0,48	0,0339	0,0330	-2,65
9	0,0289	0,0288	-0,41	0,0269	0,0262	-2,20
10	0,0235	0,0234	-0,33	0,0218	0,0214	-1,83

Таблица 4.4

u	φ_5	φ'_5	$\Delta\varphi_5 = \frac{\varphi'_5 - \varphi_5}{\varphi_5} \cdot 100\%$	φ_6	φ'_6	$\Delta\varphi_6 = \frac{\varphi'_6 - \varphi_6}{\varphi_6} \cdot 100\%$
0	1	1	0	1	1	0
1	0,7125	0,7164	0,55	0,7082	0,6857	– 3,18
2	0,3832	0,3871	1,02	0,3751	0,3529	– 5,92
3	0,2170	0,2192	1,01	0,2082	0,1951	– 6,29
4	0,1352	0,1364	0,89	0,1273	0,1200	– 5,73
5	0,0912	0,0918	0,66	0,0844	0,0803	– 4,86
6	0,0652	0,0656	0,61	0,0596	0,0571	– 4,19
7	0,0488	0,0490	0,41	0,0441	0,0426	– 3,40
8	0,0379	0,0380	0,26	0,0339	0,0330	– 2,65
9	0,0302	0,0302	0	0,0269	0,0262	– 2,10
10	0,0246	0,0246	0	0,0218	0,0214	– 1,83

Таблица 4.5

u	φ_7	φ'_7	$\Delta\varphi_7 = \frac{\varphi'_7 - \varphi_7}{\varphi_7} \cdot 100\%$	φ_8	φ'_8	$\Delta\varphi_8 = \frac{\varphi'_8 - \varphi_8}{\varphi_8} \cdot 100\%$
0	1	1	0	1	1	0
1	0,7282	0,7559	3,80	0,7368	0,8000	8,58
2	0,4096	0,4364	6,54	0,4248	0,5000	17,70
3	0,2415	0,2560	6,00	0,2568	0,3077	19,82
4	0,1549	0,1622	4,71	0,1682	0,2000	18,91
5	0,1065	0,1102	3,47	0,1176	0,1379	17,26
6	0,0772	0,0792	2,59	0,0865	0,1000	15,61
7	0,0583	0,0594	1,89	0,0661	0,0755	14,22
8	0,0455	0,0462	1,54	0,0521	0,0588	12,86
9	0,0364	0,0368	1,10	0,0421	0,0471	11,88
10	0,0297	0,0300	1,01	0,0347	0,0385	10,95

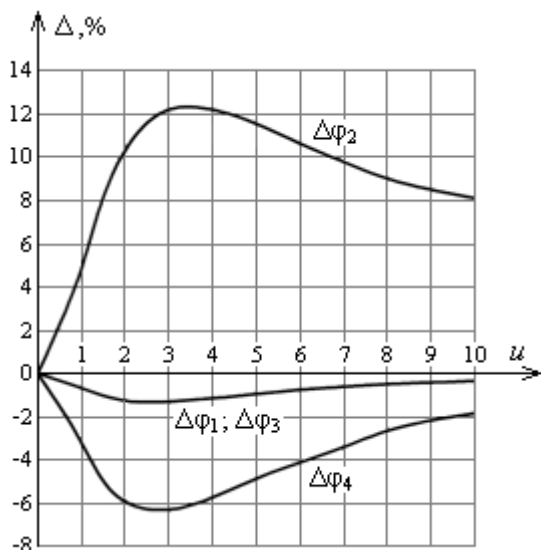


Рис. 4.14. Зависимость между погрешностью исходных предпосылок и параметром u для координаты $x = l/2$ при различных видах нагрузки:

$\Delta\varphi_1$ – распределенной по всему пролету; $\Delta\varphi_2$ – сосредоточенной посредине пролета; $\Delta\varphi_3$ – распределенной на половине пролета; $\Delta\varphi_4$ – сосредоточенной в четверти пролета

Как следует из представленных на рис. 4.14 графиков, кривые $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, $\Delta\varphi_3$ и $\Delta\varphi_4$ с увеличением параметра u асимптотически стремятся к нулю. Из анализа полученных результатов также видно, что максимальная погрешность при вычислении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости для $x = l/2$ с использованием формул (4.1) и (4.2) наблюдается, как этого и следовало ожидать, при действии сосредоточенной силы посредине пролета и составляет 12,22 % в сторону преувеличения. Причем отрезок, на котором погрешность превышает 10 %, представляет собой достаточно узкий интервал изменения параметра u – от 2 до 6,5.

В случае приложения сосредоточенной нагрузки в четверти пролета погрешность для $x = l/2$ составляет только 6,29 % в сторону преуменьшения, а отрезок, на котором погрешность превышает 4 %, соответствует незначительному интервалу изменения параметра u – от 1,2 до 6.

При действии же равномерно распределенной нагрузки по всему или половине пролета наибольшая возможная погрешность составляет 1,29 %. Здесь стоит подчеркнуть, что ошибка при этом происходит в сторону преуменьшения результатов.

При рассмотрении графиков на рис. 4.15 видно, что представленные на нем кривые $\Delta\varphi_5$, $\Delta\varphi_6$, $\Delta\varphi_7$ и $\Delta\varphi_8$ с увеличением параметра u также асимптотически стремятся к нулю. Причем наибольшая погрешность при определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости для $x = l/4$ наблюдается при нагружении нити сосредоточенной нагруз-

кой в четверти пролета и достигает значения 19,82 % в сторону преувеличения. С возрастанием параметра u величина погрешности уменьшается до 10,95 % при $u = 10$.

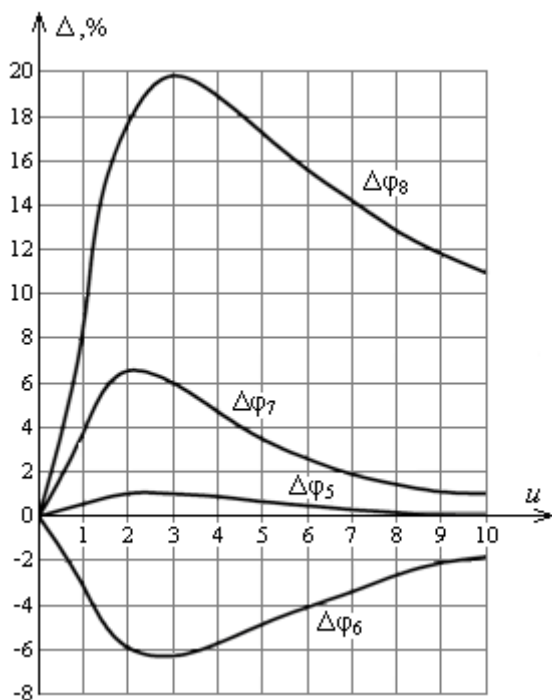


Рис.4.15. Зависимость между погрешностью исходных предпосылок и параметром u для координаты $x = l/4$ при различных видах нагрузки:

$\Delta\phi_5$ – распределенной по всему пролету; $\Delta\phi_6$ – сосредоточенной посредине пролета; $\Delta\phi_7$ – распределенной на половине пролета; $\Delta\phi_8$ – сосредоточенной в четверти пролета

При других видах нагружений погрешность в четверти пролета значительно уменьшается. В частности, при нагружении нити сосредоточенной нагрузкой в середине пролета погрешность $\Delta\phi_6$ достигает максимального значения 6,29 % в сторону преуменьшения результатов. А при параметре $u > 6$, что соответствует реальным висячим системам [62, 63, 103, 199], погрешность становится даже меньше 4,19 %.

Также следует отметить, что если в случаях нагружения нити равномерно распределенными нагрузками по всему и половине пролета для $x = l/2$ их погрешности идентичны, то для $x = l/4$ – они уже существенно отличаются, а их максимальные значения составляют 1,02 % и 6,54 % соответственно. Кроме того заметим, что в обоих случаях ошибка происходит в сторону преувеличения результатов. С увеличением же параметра u погрешности $\Delta\phi_5$ и $\Delta\phi_7$ также уменьшаются и при $u > 6$ уже не превышают 0,61 % и 2,59 % для равномерно распределенной нагрузки по всему и половине пролета соответственно.

В связи с тем, что в практических задачах по расчету висячих конструкций схема нагружения нити представляет собой сочетание разнотипных нагрузок (как правило, три-пять распределенных и несколько относительно не очень больших сосредоточенных), то реальная величина погрешности в результате их взаимоналожения всегда будет намного меньше максимальной. Кроме того, у реальных висячих систем параметр u в большинстве случаев изменяется в пределах $6 \leq u \leq 14$ [62, 63, 103, 199]. Таким образом, как это видно из таблиц 4.2 – 4.5, при указанных значениях u даже максимальная ошибка в определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости весьма мала. Последнее свидетельствует не только о высокой степени точности исходных предпосылок (4.1) и (4.2), но и о точности полученного решения в целом.

Отметим также следующее. В большинстве существующих методов расчета как гибких нитей, так и нитей конечной жесткости для определения величины распора применяется уравнение неразрывности деформаций, связывающее длины нити до и после приложения дополнительной нагрузки с упругим удлинением ее, вызванным этой нагрузкой [62, 104, 139]. При этом кроме принятых нами исходных предпосылок используют еще два допущения: вместо точных выражений длины и упругого удлинения нити принимаются приближенные значения, полученные разложением их в ряд Тейлора с удержанием только двух первых членов этого ряда. Вносимая этими допущениями погрешность хотя и невелика, но, как показано в работах [62, 96, 206], составляет при действии равномерно распределенной нагрузки от 8,3 % при $l/y_0 = 8$ до, например, 2,1 % при $l/y_0 = 16$ в сторону преувеличения. Поэтому общая погрешность еще несколько увеличивается.

Раньше уже говорилось о том, что в предлагаемой теории эти два допущения не применяются, поскольку статическая неопределимость относительно распора раскрывается с помощью принципа возможных перемещений. При этом, как уже отмечалось выше, принцип Лагранжа используется в своей строгой постановке, что приводит задачу не к алгебраическим уравнениям, а к дифференциальным зависимостям. Последние, в отличие от имеющихся решений, дают более точные результаты при определении параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости.

§ 4.10. Расчет нитей конечной жесткости с помощью рядов Фурье

При рассмотрении деформирования нитей конечной жесткости иногда очень удобно представить кривую провисания нити в виде ряда Фурье. Использование такого подхода имеет то преимущество, что позволяет накладывать минимальные ограничения на гладкость разрешающих функций и приводит к единому для всего пролета математическому выражению изогнутой оси нити. Последнее позволяет свести решение к простым расчетным зависимостям, весьма удобным для практического применения [25].

4.10.1. Точное решение задачи. Случай нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной нагрузки. Будем считать, что задана нить конечной жесткости с поперечным сечением F , моментом инерции I , модулем упругости E и шарнирным закреплением на опорах. Пусть, кроме того, известно, что пролет нити l , начальная длина L_0 , уравнение кривой провисания в исходном состоянии $y_0(x)$, а нить работает с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, являющихся произвольными непрерывными или прерывными функциями координаты x .

В соответствии с принципом возможных перемещений равновесное состояние нити конечной жесткости описывается уравнением (4.19), которое может быть также записано в виде

$$\delta\mathfrak{E} = \delta W - \delta A = 0, \quad (4.128)$$

где $\delta\mathfrak{E}$ – вариация полной энергии нити, состоящая из двух слагаемых: δW – вариации потенциальной энергии упругой деформации при каком-либо возможном перемещении нити конечной жесткости из положения равновесия и δA – виртуальной работы внешних сил на этом же перемещении. Здесь было учтено, что работа внутренних сил на возможном перемещении равна взятой со знаком минус вариации потенциальной энергии упругой деформации.

На основании [24, 163] для потенциальной энергии деформации нити имеем выражение:

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2\beta \right]^2 + \\ + \int_0^l M_{z0} \frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} \right]^2 dx, \quad (4.129)$$

где H_0 и M_{z0} – распор и изгибающий момент в нити, находящейся под действием начальной нагрузки; $y(x)$ – уравнение кривой провисания в деформированном состоянии; EF и EI – жесткость нити на растяжение и изгиб; $\beta = L_0 - l$.

Первый и третий члены в правой части выражения (4.129) представляют собой приращение потенциальной энергии от усилий в начальном состоянии на соответствующих перемещениях, вызванных дополнительной нагрузкой, а второй и четвертый – увеличение потенциальной энергии нити при растяжении и изгибе.

Работу внешних сил определим из соотношения

$$A = \int_0^l q(x) [y(x) - y_0(x)] dx, \quad (4.130)$$

где $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ – сумма начальной и дополнительной нагрузок.

Решение поставленной вариационной задачи о минимуме функционала полной энергии нити конечной жесткости выполним так называемым пря-

мым методом [176]. Для этого представим функцию кривой провисания нити в исходном и деформированном состояниях в виде рядов Фурье по синусам

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad (4.131)$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.132)$$

Такое представление отличается тем, что входящие в него функции непосредственно удовлетворяют граничным условиям задачи, т. е. при $x = 0$ и $x = l$ величины $y(x)$ и $d^2y(x)/dx^2$ обращаются в нуль и при надлежащем выборе коэффициентов a_i ($i = 1, \infty$) позволяют представить деформированную ось нити при любой нагрузке. После подстановки соотношений (4.131) и (4.132) в функционал полной энергии $\mathcal{E}(y(x))$ последний преобразуется в функцию неизвестных коэффициентов разложения a_i ($i = 1, \infty$), слагаемые которого будут выглядеть следующим образом:

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right]^2 + \\ + \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 [a_n^2 - (a_n^0)^2]; \quad (4.133)$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} h_n (a_n - a_n^0), \quad (4.134)$$

где $\frac{2}{l} h_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ – коэффициенты разложения внешней нагрузки в ряд Фурье по синусам.

Заметим, что при выводе соотношения (4.133) вместо M_{z0} было принято его представление через вторую производную функции прогиба нити конечной жесткости в начальном состоянии.

Поскольку в данном случае полная энергия нити оказывается зависящей от параметров прогиба a_n , то вариацию $\delta\mathcal{E}$ можно при этом представить как сумму вариаций, соответствующих возможным изменениям параметров a_n ,

$$\delta\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial a_n} \delta a_n. \quad (4.135)$$

Так как рассматриваемые деформированные состояния являются равновесными, то вариация $\delta\mathcal{E}$ в соответствии с (4.128) должна быть равна нулю

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial a_n} \delta a_n = 0. \quad (4.136)$$

Но вариации δa_n можно считать независимыми друг от друга, поэтому

равенство (4.136) будет иметь место, если каждый из множителей при δa_n будет равен нулю

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_n} = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.137)$$

Иначе говоря, отыскание коэффициентов a_i производится из условий минимизации функции $\mathfrak{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \frac{i\pi x}{l} \right)$, представленной в виде (4.128). Указанные условия выражаются соотношением (4.137) и представляют собой бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений вида

$$a_n = \frac{2lh_n}{n^2 \pi^2 (H_0 + S + n^2 P_{\text{кр}})}, \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (4.138)$$

где $S = \frac{\pi^2 EF}{4lL_0} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 - \frac{EF \beta}{L_0}$ – приращение распора в нити конечной жесткости от дополнительной нагрузки; $P_{\text{кр}} = \pi^2 EI / l^2$ – эйлерова сила для балки с шарнирно опертыми концами.

Введем для краткости записи следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{H}{P_{\text{кр}}}; \\ \alpha^2 &= \frac{\pi^8 r^2 E^2 I^2 L_0}{l^7}, \end{aligned} \right\} \quad (4.139)$$

где $H = H_0 + S$ – распор; r – радиус инерции поперечного сечения нити.

Учитывая при преобразовании выражения (4.138) введенные обозначения (4.139), получим уравнение для определения параметра u :

$$\alpha^2 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \alpha^2 \frac{EF \beta}{P_{\text{кр}} L_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^2 (u^2 + n^2)^2}. \quad (4.140)$$

Перепишем теперь уравнение (4.140) в несколько ином виде

$$\alpha^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \alpha^2 \frac{EF \beta}{P_{\text{кр}} L_0} u^4 = R - G(u) + \frac{u}{2} G'(u). \quad (4.141)$$

Здесь стоит обратить внимание на то, что при нахождении вида (4.141) уравнения (4.140) были приняты следующие обозначения:

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2}; \quad (4.142)$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n^2, \quad (4.143)$$

причем под функцией R , по аналогии с [62, 103], понимается характерная

функция нагрузки.

4.10.2. О характерной R -функции нагрузки. Здесь необходимо подчеркнуть следующее. Если функция внешней нагрузки $q(x)$ не является непрерывной на всем пролете, то интегралы, определяющие коэффициенты разложения в выражении для R , вычисляются отдельно на каждом интервале, где функция нагрузки непрерывна, а результаты суммируются. Если же нагрузка представлена в виде сосредоточенных сил, то интегралы заменяются суммами из произведений этих сил на соответствующие значения тригонометрических функций. Значения R -функции при шарнирном и жестком закреплении концов нити на опорах и наиболее распространенных типах нагружения приведены в табл. 4.6

Для решения уравнения (4.141) необходимо просуммировать входящие в него ряды. Для этого предварительно докажем следующее утверждение.

4.10.3. Лемма о сумме ряда $G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2}$. Сумма ряда (4.142)

однозначно определяется интегральным выражением вида

$$G(u) = \frac{l}{2} \int_0^l q(x) \varphi(x) dx, \quad (4.144)$$

где функция $\varphi(x)$ является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{\pi^2}{l^2} u^2 \varphi + \frac{\pi^2}{l^2} q = 0 \quad (4.145)$$

с граничными условиями, соответствующими условию задачи.

Для доказательства данного утверждения воспользуемся следующей схемой рассуждений. Разложим функцию нагрузки в ряд Фурье по синусам

$$q(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.146)$$

Подставляя дальше выражение (4.146) в (4.144), будем иметь:

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (4.147)$$

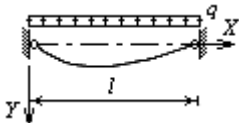
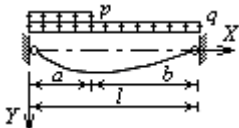
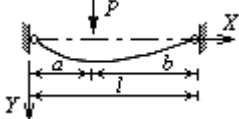
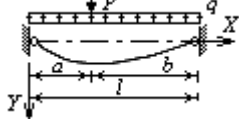
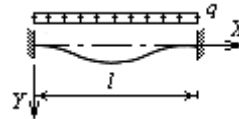
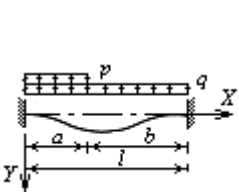
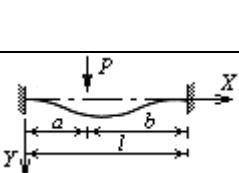
Интегральный член, входящий в соотношение (4.147), после интегрирования по частям с учетом граничных условий для функции $\varphi(x)$ примет вид

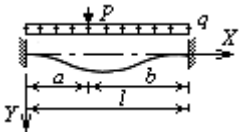
$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l^2}{n^2 \pi^2} \int_0^l \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (4.148)$$

который, воспользовавшись уравнением (4.145), после некоторых преобразований можно представить в несколько иной форме записи:

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{h_n}{n^2} - \frac{u^2}{n^2} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (4.149)$$

Таблица 4.6

Схема нагружения	$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n^2$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24}$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a^2}{12l} (l+2b) + \frac{\pi^2 P^2 a^3}{24l^2} (l+3b)$
	$\frac{\pi^2 P^2 ab}{2l^2}$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P ab}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 ab}{2l^2}$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24}$
	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a^2}{12l} (l+2b) + \frac{\pi^2 P^2 a^3}{12l}, \left(a \leq \frac{l}{2} \right)$ $\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a^2}{12l} (l+2b) +$ $+\frac{\pi^2 P^2}{24l} (l^3 - 6ab^2), \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$
	$\frac{\pi^2 P^2 a}{4l}, \left(a \leq \frac{l}{2} \right); \quad \frac{\pi^2 P^2 b}{4l}, \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$

	$\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a b}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 a}{4l}, \quad \left(a \leq \frac{l}{2} \right)$ $\frac{\pi^2 q^2 l^2}{24} + \frac{\pi^2 q P a b}{2l} + \frac{\pi^2 P^2 b}{4l}, \quad \left(a \geq \frac{l}{2} \right)$

откуда, в свою очередь, вытекает следующая формула:

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{h_n}{n^2 + u^2}. \quad (4.150)$$

И, наконец, после подстановки (4.150) в (4.147), окончательно имеем:

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2},$$

что и доказывает наше утверждение. И теперь ясно, что полученный результат позволяет просуммировать ряды в уравнении (4.141), тем самым существенно упростив процедуру его решения.

Общий интеграл дифференциального уравнения (4.145) запишется так:

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l} - \frac{\pi}{ul} f_1 \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} + \frac{\pi}{ul} f_2 \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l}, \quad (4.151)$$

где $f_1 = \int q(x) \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l} dx$; $f_2 = \int q(x) \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} dx$.

Вполне понятно, что произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 общего интеграла (4.151) при шарнирном закреплении концов нити на опорах определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi}{ul} \{ f_1(l) - [f_2(l) - f_2(0)] \operatorname{cth} \pi u \}; \\ C_2 &= -\frac{\pi}{ul} f_2(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.152)$$

Тогда в случае действия на нить равномерно распределенных начальной и дополнительной вертикальных нагрузок интенсивности q_1 и q_2 , общий интеграл (4.151) с учетом (4.152) примет вид

$$\varphi(x) = \frac{q_1 + q_2}{u^2} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{\pi u x}{l} + \frac{\operatorname{ch} \pi u - 1}{\operatorname{sh} \pi u} \operatorname{sh} \frac{\pi u x}{l} \right). \quad (4.153)$$

Подставляя теперь (4.153) в (4.144) и интегрируя полученное выражение, придем к соотношению

$$G(u) = \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{u^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \operatorname{ch} \pi u}{\pi u \operatorname{sh} \pi u} \right). \quad (4.154)$$

В результате уравнение (4.141) для данного типа нагружения и граничных условий запишется так:

$$\alpha^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \alpha^2 \frac{EF \beta}{P_{\text{кр}} L_0} u^4 + \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{2u^2} \times \\ \times \left[3 - \frac{\text{ch} \pi u - 1}{\pi u \text{sh} \pi u} (5 + \pi u \text{cth} \pi u) \right] = \frac{\pi^2 (q_1 + q_2)^2 l^2}{24}. \quad (4.155)$$

Полученное уравнение можно решить с помощью известных численных методов [37, 176]. Имея значение параметра u , по первой из формул (4.139) определяем величину распора H , а по формуле (4.138) – выражение для любого коэффициента a_n ряда (4.132)

$$a_n = \frac{2lh_n}{\pi^2 n^2 P_{\text{кр}} (u^2 + n^2)}. \quad (4.156)$$

Подставляя дальше это значение в (4.132), придадим уравнению кривой провисания нити конечной жесткости следующий вид:

$$y(x) = \frac{2l}{\pi^2 P_{\text{кр}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^2 (u^2 + n^2)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.157)$$

Величину же изгибающего момента в нити можно определить путем двукратного дифференцирования выражения (4.157)

$$M_z(x) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{u^2 + n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.158)$$

Однако здесь необходимо отметить, что полученный ряд Фурье, описывающий изгибающие моменты в нити конечной жесткости, сходится несколько медленнее ряда (4.157). Поэтому для определения значений изгибающих моментов в некоторых случаях удобно применять выражение (4.5).

Предлагаемая методика применима и при других условиях опирания нитей конечной жесткости. Необходимо только в каждом конкретном случае задаваться соответствующими аппроксимационными формулами для представления оси нити в начальном и деформированном состояниях.

4.10.4. Точное решение задачи. Случай нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной нагрузки. Начнем с напоминания, что данный случай отличается от предшествующего тем, что при действии начальной нагрузки в поперечных сечениях нити не возникают напряжения от изгиба, а кривая ее провисания приобретает вид квадратной параболы. Учитывая сказанное, вместо уравнения (4.129) для потенциальной энергии упругой деформации нити будем иметь:

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - 2\beta \right]^2 +$$

$$+ \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (4.159)$$

при этом работа внешних сил по-прежнему определяется формулой (4.130).

Считая концы нити опертыми шарнирно и принимая для аппроксимации ее кривой провисания в исходном и деформированном состояниях ряды Фурье в форме (4.131) и (4.132), для W находим выражение

$$W = \frac{H_0}{2} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right] + \frac{EF}{8L_0} \left[\frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - 2\beta \right]^2 + \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n - a_n^0)^2, \quad (4.160)$$

а для A остается справедливой зависимость (4.134).

Применяя далее изложенную выше методику поиска неизвестных значений коэффициентов a_n разложения (4.132), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$a_n = \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0}{n^2 (H_0 + S + n^2 P_{\text{кр}})}, \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.161)$$

Отметим, что в отличие от (4.138) второй член числителя учитывает форму провисания нити при действии начальной нагрузки.

Принимая далее для краткости записи обозначения

$$u^2 = \frac{H}{P_{\text{кр}}}, \quad \gamma^2 = \frac{4\pi^4 r^2 E^2 I^2 L_0}{l^5} \quad (4.162)$$

и учитывая их при преобразовании выражения (4.161), получим уравнение для определения параметра u :

$$\gamma^2 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \gamma^2 \frac{EF\beta}{P_{\text{кр}} L_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (u^2 + n^2)^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0 \right)^2 \quad (4.163)$$

или, в несколько иной форме записи,

$$\gamma^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \gamma^2 \frac{EF\beta}{P_{\text{кр}} L_0} u^4 = R - G(u) + \frac{u}{2} G'(u). \quad (4.164)$$

Причем здесь, в отличие от (4.142) и (4.143), значения функций G и R равны

$$G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u^2 + n^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0 \right)^2; \quad (4.165)$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0 \right)^2. \quad (4.166)$$

Для решения уравнения (4.164) необходимо просуммировать входящие в него ряды. По аналогии с предыдущим и в этом случае можно показать, что сумма ряда (4.165) однозначно определяется интегральным выражением вида

$$G(u) = \frac{l}{2} \int_0^l \Phi(x) \varphi(x) dx, \quad (4.167)$$

где $\Phi(x) = \frac{2l}{\pi^2} [q(x) + Ely_0''(x)]$ – функция, характеризующая начальное состояние нити (именуемая в дальнейшем функцией начального состояния), а функция $\varphi(x)$ является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{\pi^2}{l^2} u \varphi + \frac{\pi^2}{l^2} \Phi = 0 \quad (4.168)$$

с соответствующими граничными условиями [190].

Общий интеграл этого уравнения будет:

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi i x}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{\pi i x}{l} - \frac{\pi}{ul} f_1 \operatorname{sh} \frac{\pi i x}{l} + \frac{\pi}{ul} f_2 \operatorname{ch} \frac{\pi i x}{l}, \quad (4.169)$$

где $f_1 = \int \Phi(x) \operatorname{ch} \frac{\pi i x}{l} dx$; $f_2 = \int \Phi(x) \operatorname{sh} \frac{\pi i x}{l} dx$.

Произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 общего интеграла (4.169), а также значения функций $\varphi(x)$ и $G(u)$ в случае нагружения нити конечной жесткости равномерно распределенными начальной и дополнительной нагрузками, как и ранее, найдем по формулам (4.152) – (4.154). Тогда уравнение для определения параметра u принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 u^4 \left(u^2 - \frac{H_0}{P_{\text{кр}}} \right) + \gamma^2 \frac{EF \beta}{P_{\text{кр}} L_0} u^4 + \frac{(q_1 + q_2)^2 l^2}{2u^2} \times \\ & \times \left[3 - \frac{\operatorname{ch} \pi u - 1}{\pi u \operatorname{sh} \pi u} (5 + \pi u \operatorname{cth} \pi u) \right] = \frac{\pi^2 (q_1 + q_2)^2 l^2}{24}. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Зная величину параметра u , по первой из формул (4.162) можно найти значение распора в нити H , а по формуле (4.161) – выражение для любого коэффициента a_n ряда (4.132)

$$a_n = \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0}{n^2 P_{\text{кр}} (u^2 + n^2)}. \quad (4.171)$$

Таким образом, подставляя (4.171) в разложение (4.132), получим следующее выражение для оси нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной нагрузки в деформированном состоянии:

$$y(x) = \frac{1}{P_{\text{кр}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0}{n^2(u^2 + n^2)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.172)$$

Соответственно для изгибающего момента путем двукратного дифференцирования последнего выражения находим:

$$M_z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2l}{\pi^2} h_n + n^4 P_{\text{кр}} a_n^0}{u^2 + n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.173)$$

Из анализа последних выражений видно, что они отличаются от соответствующих соотношений для работающей с изгибом от начальной нагрузки нити конечной жесткости тем, что в числителях (4.172) и (4.173) появляется новый член, учитывающий состояние безмоментности нити при действии начальной нагрузки и соответствующую данному состоянию форму кривой ее провисания.

Приведем далее без вывода еще один интересный результат применения метода рядов Фурье. Если принять $I = 0$, т. е. рассмотреть случай гибких нитей, то вместо (4.171) и (4.172) будем соответственно иметь:

$$a_n = \frac{2lL_0 h_n}{\pi^2 n^2 tEF}; \quad (4.174)$$

$$y(x) = \frac{2lL_0}{\pi^2 tEF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.175)$$

Значение входящего в эти соотношения параметра $t = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 - \beta$ определяется из следующего кубического уравнения:

$$t + \beta = \frac{lL_0^2 R}{\pi^2 E^2 F^2 t^2}. \quad (4.176)$$

Неизвестное же значение распора в нити можно найти из уравнения

$$H^3 + \frac{\beta EF}{L_0} H^2 = \frac{REFl}{\pi^2 L_0}, \quad (4.177)$$

структура которого практически идентична известным решениям [62, 95].

4.10.5. Приближенное решение задачи. Известно, что кривую изгиба балки с шарнирным закреплением на опорах также можно представить в виде ряда Фурье по синусам (4.132), который после нахождения с помощью предложенного С.П. Тимошенко энергетического метода [161] неизвестных зна-

чений коэффициентов разложения a_n преобразуется следующим образом:

$$y^6 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.178)$$

С другой стороны, прогиб нити конечной жесткости определяется известным выражением [17, 163, 199]

$$y = ky^6, \quad (4.179)$$

где y^6 – прогиб балки, имеющей такие же граничные условия и несущей такую же нагрузку, как и нить; k – коэффициент.

Для нахождения значения коэффициента k воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси нити [67, 104]

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_z^6 + Hy. \quad (4.180)$$

Подстановка (4.178) и (4.179) в уравнение (4.180) дает:

$$\begin{aligned} \frac{4ql^2}{\pi^3} k \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{4ql^4}{EI\pi^5} Hk \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (4.181)$$

откуда, принимая обозначение $u = 0,5l(H/EI)^{1/2}$ и производя некоторые преобразования, получим:

$$k = \frac{1}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2}}. \quad (4.182)$$

Воспользуемся теперь полученным результатом при рассмотрении напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости.

4.10.5.1. Действие начальной нагрузки. Примем, что нить работает с изгибом от начальной равномерно распределенной нагрузки (собственного веса), а ее концы закреплены шарнирно (рис. 4.16).

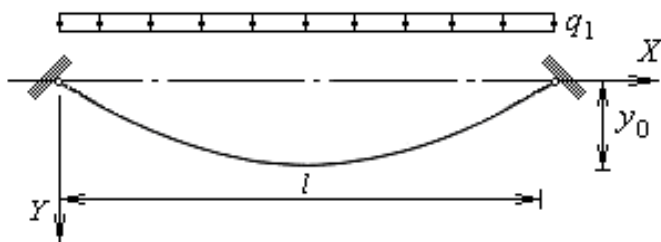


Рис. 4.16. К расчету нити на начальную нагрузку
при шарнирном закреплении концов

В этом случае расчетные формулы для определения ординат упругой линии y , углов поворота $\text{tg } \alpha$, изгибающих моментов M_z и поперечных сил Q_z с учетом (4.182) будут:

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (4.183)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (4.184)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (4.185)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (4.186)$$

В формулы (4.183) – (4.186) входит неизвестный параметр u_0 . Его значение можно определить из соотношения

$$y_0 = \frac{y_0^6}{1 + \left(\frac{2u_0}{\pi}\right)^2}, \quad (4.187)$$

где y_0 – заданный прогиб нити конечной жесткости; y_0^6 – прогиб балки под действием начальной нагрузки.

Отметим, что в последних формулах вместо ряда $\sum_{n=1,3,5,\dots} n^{-2}$ учтен только его первый член. Такое допущение вполне приемлемо, т. к. по данным численных исследований установлено, что точность результата при использовании двух членов ряда повышается на 0,5 %, а при 10 членах – на 0,7 % по сравнению с использованием одного члена.

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах (рис. 4.17) расчетные формулы примут следующий вид:

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (4.188)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (4.189)$$

$$M_z = \frac{q_1}{24} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}; \quad (4.190)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (4.191)$$

Значение входящего в эти зависимости параметра u_0 вычисляется по формуле

$$y_0 = \frac{y_0^6}{1 + \left(\frac{u_0}{\pi}\right)^2}. \quad (4.192)$$

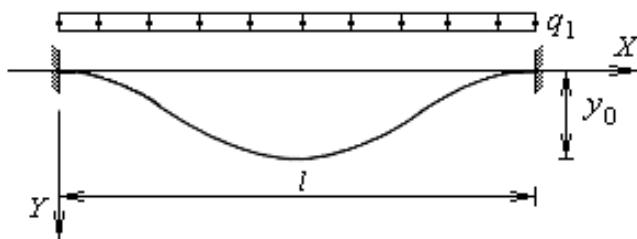


Рис. 4.17. К расчету нити на начальную нагрузку при жестком закреплении концов

Если же в поперечных сечениях нити при начальной нагрузке не возникают напряжения от изгиба, то нить работает как абсолютно гибкая. В этом случае уравнение оси нити приобретает вид квадратной параболы с ординатами [96, 103]

$$y = \frac{4y_0 x(l-x)}{l^2}.$$

В соответствии с теорией гибких нитей величина начального распора равна:

$$H_0 = \frac{M_z^6}{y} = \frac{q_1 l^2}{8y_0},$$

а начальная длина находится из выражения

$$L_0 = l \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

Приложение к нити конечной жесткости дополнительной нагрузки вызывает изменение параметров ее напряженно-деформированного состояния, методика определения которых приведена ниже.

4.10.5.2. Действие дополнительной нагрузки. В случае шарнирного закрепления концов нити конечной жесткости на опорах и действия дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис. 4.18), при условии работы нити с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, расчетные зависимости можно записать в виде:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (4.193)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (4.194)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}; \quad (4.195)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2}. \quad (4.196)$$

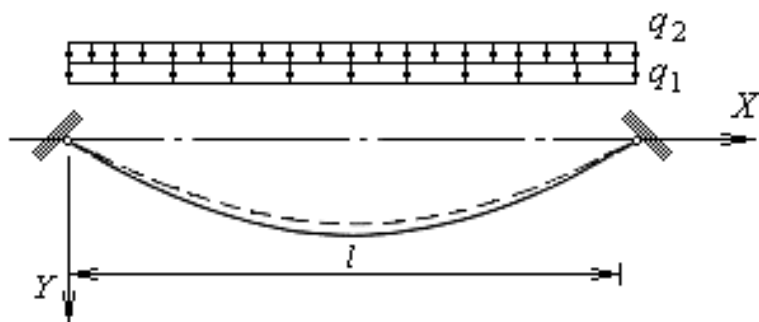


Рис. 4.18. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную по всему пролету, при шарнирном закреплении концов

В соотношения (4.193) – (4.196) входит неизвестный параметр u . Его значение определяется из уравнения

$$\frac{\beta}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \frac{\beta_0}{(\pi^2 + 4u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (4.197)$$

где обозначено

$$\beta_0 = \frac{1632\pi^4}{2625} \left(\frac{y_0^6}{r} \right)^2; \quad \beta = \frac{1632\pi^4}{2625} \left(\frac{y^6}{r} \right)^2.$$

Напомним, что r – радиус инерции поперечного сечения нити.

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах (рис. 4.19) для расчетных формул имеем:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (4.198)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (4.199)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{24} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi} \right)^2}; \quad (4.200)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}, \quad (4.201)$$

а значение параметра u находится из соотношения

$$\frac{\gamma}{(\pi^2 + u^2)^2} - u^2 = \frac{\gamma_0}{(\pi^2 + u_0^2)^2} - u_0^2. \quad (4.202)$$

Причем здесь принято, что $\gamma_0 = \frac{64\pi^4}{105} \left(\frac{y_0^6}{r}\right)^2$; $\gamma = \frac{64\pi^4}{105} \left(\frac{y^6}{r}\right)^2$.

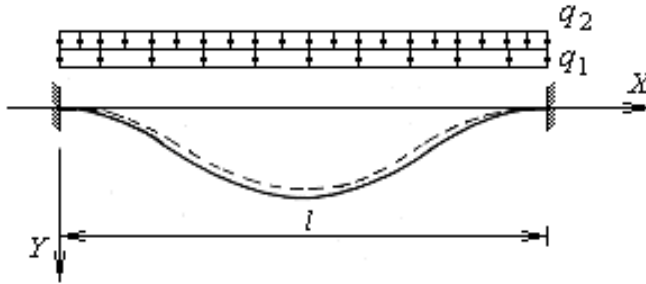


Рис. 4.19. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную по всему пролету, при жестком закреплении концов

При действии дополнительной нагрузки в виде сосредоточенной силы и при шарнирном закреплении концов нити конечной жесткости на опорах (рис. 4.20) расчетные формулы можно записать в следующем виде:

- на участке $0 \leq x \leq a$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{x^4 - 2lx^3 + l^3x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.203)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{4x^3 - 6lx^2 + l^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.204)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.205)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l-2x}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.206)$$

• на участке $a \leq x \leq l$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{x^4 - 2lx^3 + l^3x}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6EI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{6EI} \cdot \frac{(x-a)^3}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.207)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{4x^3 - 6lx^2 + l^3}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6EI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{2EI} \cdot \frac{(x-a)^2}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.208)$$

$$M_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{P(x-a)}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.209)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l-2x}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{P}{1+\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}. \quad (4.210)$$

Неизвестный параметр u , входящий в формулы (4.203) – (4.210), вычисляется из уравнения

$$\frac{\beta_0 + \mu}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \frac{\beta_0}{(\pi^2 + 4u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (4.211)$$

где принято следующее обозначение:

$$\mu = \left(\frac{\pi^2}{24rEI} \right)^2 \left[\frac{q_1 Plb}{5} (3l^5 - 5l^3b^2 + 3lb^4 - b^5) + \right. \\ \left. + \frac{P^2b^2}{5} (8l^4 - 40l^2b^2 + 66lb^3 - 16b^4) \right].$$

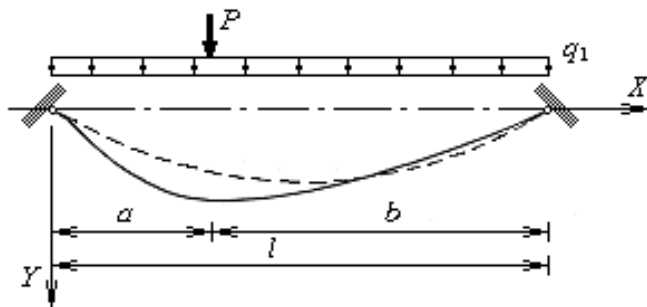


Рис. 4.20. К расчету нити на начальную и дополнительную сосредоточенную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при шарнирном закреплении концов

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах (рис. 4.21) для расчетных зависимостей имеем:

- на участке $0 \leq x \leq a$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{x^4 - 2lx^3 + l^2x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pabx}{6l^3EI} \cdot \frac{3lbx - x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.212)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{4x^3 - 6lx^2 + 2l^2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pab}{6l^3EI} \cdot \frac{6lbx - 3x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.213)$$

$$M_z = \frac{q_1}{24} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \cdot \frac{lb - x(b-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.214)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \cdot \frac{a - b}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.215)$$

- на участке $a \leq x \leq l$

$$y = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{x^4 - 2lx^3 + l^2x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pbx}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pabx}{6l^3EI} \times \frac{3lbx - x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{6EI} \cdot \frac{(x-a)^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.216)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{24EI} \cdot \frac{4x^3 - 6lx^2 + 2l^2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{6lEI} \cdot \frac{l^2 - b^2 - 3x^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pab}{6l^3EI} \times$$

$$\times \frac{6lbx - 3x^2(b-a) - 2l^2b - l^2a}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{P}{2EI} \cdot \frac{(x-a)^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.217)$$

$$M_z = \frac{q_1}{24} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \cdot \frac{lb - x(b-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{P(x-a)}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}; \quad (4.218)$$

$$Q_z = \frac{q_1}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{Pab}{l^3} \cdot \frac{a - b}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{P}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}. \quad (4.219)$$

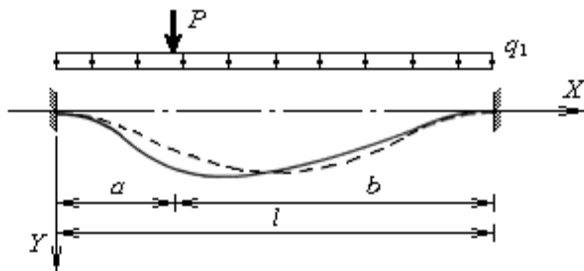


Рис. 4.21. К расчету нити на начальную и дополнительную сосредоточенную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при жестком закреплении концов

Уравнение для определения значения неизвестного параметра u , входящего в зависимости (4.212) – (4.219), имеет следующий вид:

$$\frac{\gamma_0 + \eta}{(\pi^2 + u^2)^2} - u^2 = \frac{\gamma_0}{(\pi^2 + u_0^2)^2} - u_0^2, \quad (4.220)$$

где обозначено

$$\eta = \left(\frac{\pi^2}{24rlEI} \right)^2 \left[\frac{q_1 Pl^3 b}{10} (l^5 - l^4 a - 5l^2 b^3 + 6lb^4 l - 2b^5) + \frac{P^2 b^2}{10} \times \right. \\ \left. \times (4l^6 - 8l^4 a^2 - 7l^4 ab - 20l^4 b^2 + 24l^3 b^3 + 4l^2 a^4 + 7l^2 a^3 b + \right. \\ \left. + 24l^2 a^2 b^2 + 10l^2 ab^3 - 8l^2 b^4 - 15la^2 b^3 + 3a^2 b^4 - 3ab^5) \right].$$

Для нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузки, в случае шарнирного закрепления концов нити на опорах и действии равномерно распределенной дополнительной нагрузки (рис. 4.18) параметры напряженно-деформированного состоя-

ния вычисляются по формулам:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^3 x - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0 x(l-x)}{l^2 \left\{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right\}}; \quad (4.221)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^3 - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0(l-2x)}{l^2 \left\{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right\}}; \quad (4.222)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{lx - x^2}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{16Elu^2 y_0 x(l-x)}{l^4 \left\{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right\}}; \quad (4.223)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l-2x}{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} - \frac{16Elu^2 y_0(l-2x)}{l^4 \left\{1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2\right\}}. \quad (4.224)$$

Для определения входящего в зависимости (4.221) – (4.224) неизвестного параметра u имеем уравнение:

$$\frac{\beta_2}{(\pi^2 + 4u^2)^2} - u^2 = \beta_1 - u_0^2, \quad (4.225)$$

где для сокращения записи приняты следующие обозначения:

$$\beta_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{y_0}{r} \right)^2, \quad \beta_2 = \left(\frac{l\pi^2}{2r} \right)^2 \left[\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6}{40320 \cdot (EI)^2} + \frac{(q_1 + q_2)y_0 l^2}{15EI} + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах (рис. 4.19) расчетные соотношения приобретают следующий вид:

$$y = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0 x(l-x)}{l^2 \left\{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right\}}; \quad (4.226)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1 + q_2}{24EI} \cdot \frac{2l^2 x - 6lx^2 + 4x^3}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} + \frac{4y_0(l-2x)}{l^2 \left\{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right\}}; \quad (4.227)$$

$$M_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{12lx - 12x^2 - 2l^2}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{16Elu^2 y_0 x(l-x)}{l^4 \left\{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2\right\}}; \quad (4.228)$$

$$Q_z = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l - 2x}{1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2} - \frac{16Elu^2 y_0 (l - 2x)}{l^4 \left\{ 1 + \left(\frac{u}{\pi}\right)^2 \right\}}. \quad (4.229)$$

Уравнение для нахождения неизвестного параметра u приводится к виду

$$\frac{\gamma_2}{(\pi^2 + u^2)} - u^2 = \gamma_1 - u_0^2. \quad (4.230)$$

Причем здесь принято, что

$$\gamma_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{y_0}{r} \right)^2;$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{l\pi^2}{2r} \right)^2 \left[\frac{(q_1 + q_2)^2 l^6}{60480 \cdot (EI)^2} + \frac{(q_1 + q_2) y_0 l^2}{90EI} + \frac{8}{3} \left(\frac{y_0}{l} \right)^2 \right].$$

Расчетные зависимости для других схем нагружения при работе нити без изгиба от начальной нагрузки не приводятся. Методика их получения аналогична рассмотренной выше.

ГЛАВА 5

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 5.1. Вводные замечания. Принятые допущения

При рассмотрении плоской формы изгиба нити конечной жесткости в качестве исходного принимаем деформированное состояние нити, нагруженной начальной и дополнительной вертикальными нагрузками. Кроме того, считаем, что ось нити до потери устойчивости является плоской кривой.

Пусть X, Y, Z являются неподвижными координатными осями, а x, y, z – подвижными координатными осями для искривленного (выпученного) состояния нити, причем оси y и z направлены по главным центральным осям инерции поперечного сечения, а ось x – по касательной к осевой линии нити.

Допустим, что под действием возрастающей дополнительной нагрузки нить теряет устойчивость. При этом ее поперечные сечения получают поступательные смещения v в горизонтальной плоскости XOY и поворачиваются на угол θ в плоскости сечения (рис. 5.1). Отметим, что в бесконечно близком выпученном состоянии нити данные перемещения считаются бесконечно малыми величинами и рассматриваются как «возмущения».

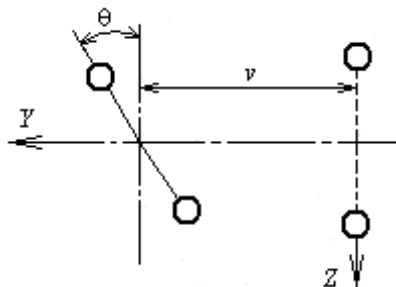


Рис. 5.1. Деформирование поперечного сечения нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба

При таком искривлении оси нити в пространстве на повернутые поперечные сечения будут действовать начальные напряжения, т. е. напряжения, возникающие в нити в момент потери устойчивости от начальной и дополнительной нагрузок. Причем составляющие начальных напряжений принимают следующий вид: продольные $\sigma_N = N/F$, нормальные $\sigma_M = M_y z / I_y$ и касательные $\tau = Q_z S_y / I_y \delta$. В этих формулах принято, что Q_z – поперечная сила в сечении; M_y – изгибающий момент, действующий в нити в плоскости XOZ ; I_y и S_y – момент инерции и статический момент поперечного сечения в плоскости XOZ . При этом само собой разумеется, что напряжения σ_N являются постоянными, а напряжения σ_M и τ – переменными по длине нити.

§ 5.2. Определение дополнительных погонных нагрузок

Прежде всего обратим внимание на тот очевидный факт, что при потере нитью конечной жесткости плоской формы деформирования, действующие на ее повернутые поперечные сечения начальные напряжения создадут по ее длине горизонтальные составляющие в плоскости XOY и крутящие моменты относительно оси X . В дальнейшем, для определения этих дополнительных погонных силовых воздействий (а именно, поперечной нагрузки и крутящего момента) воспользуемся известной и хорошо апробированной методикой, предложенной А.Р. Ржаницыным [134] при рассмотрении им изгибно-крутильных деформаций двутавровых балок.

Вначале рассмотрим смещение нити в плоскости XOY (рис. 5.2). Проектируя продольное усилие N на неподвижную ось OY , получим величину поперечной составляющей $dN_y^{(1)}$ в виде

$$dN_y^{(1)} = -\sigma_N \sin \varphi_z dF + \sigma_N \sin(\varphi_z + d\varphi_z) dF \approx \sigma_N d\varphi_z dF.$$

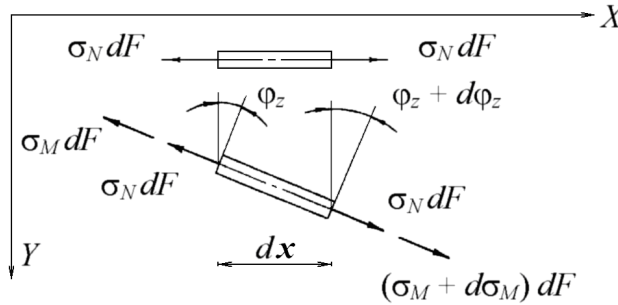


Рис. 5.2. Схема усилий в элементарном участке нити при ее смещении в плоскости XOY

Следует отметить, что при выводе этой формулы с учетом допущения о пологости нити было принято, что $\sin(\varphi_z + d\varphi_z) - \sin \varphi_z = d\varphi_z$. Воспользовавшись далее этим результатом, имеем возможность определить погонную поперечную нагрузку от $dN_y^{(1)}$, величина которой найдется по формуле

$$dq_y^{(1)} = \frac{dN_y^{(1)}}{dx} = \sigma_N dF \frac{d\varphi_z}{dx} = \sigma_N dF v''.$$
(5.1)

В свою очередь, проектирование нормальных напряжений σ_M на ось OY (см. рис. 5.2) позволяет представить поперечную составляющую так:

$$\begin{aligned} dN_y^{(2)} &= -\sigma_M \sin \varphi_z dF + (\sigma_M + d\sigma_M) \sin(\varphi_z + d\varphi_z) dF = \\ &= \sigma_M d\varphi_z dF + d\sigma_M \varphi_z dF + d\sigma_M d\varphi_z dF \end{aligned}$$

или, если здесь пренебречь членом $d\sigma_M d\varphi_z dF$ как величиной высшего порядка малости по сравнению с оставшимися членами, то можно придать поперечной составляющей следующий вид:

$$dN_y^{(2)} = \sigma_M d\varphi_z dF + d\sigma_M \varphi_z dF = \frac{M_y z}{I_y} d\varphi_z dF + \frac{dM_y z}{I_y} \varphi_z dF,$$

где принято, что $\sigma_M = \frac{M_y z}{I_y}$, а их дифференциал – $d\sigma_M = \frac{dM_y z}{I_y}$.

Погонная поперечная нагрузка от $dN_y^{(2)}$ вычисляется по формуле

$$dq_y^{(2)} = \frac{dN_y^{(2)}}{dx} = \frac{M_y z}{I_y} \frac{d\varphi_z}{dx} dF + \frac{dM_y}{dx} \frac{z}{I_y} \varphi_z dF = \frac{M_y z}{I_y} v'' dF + \frac{M_y' z}{I_y} v' dF. \quad (5.2)$$

Сложим дальше поперечные нагрузки (5.1) и (5.2) и проинтегрируем найденное выражение по площади поперечного сечения нити F . В результате после несложных преобразований, приведения подобных и некоторых упрощений окончательно получим суммарную погонную поперечную нагрузку от перемещения v в таком достаточно простом представлении:

$$q_y^v = \int_F \left(\sigma_N v'' + \frac{M_y z}{I_y} v'' + \frac{M_y' z}{I_y} v' \right) dF = N v''. \quad (5.3)$$

Отметим, что при выводе соотношения (5.3) было учтено, что интеграл $\int_F z dF = 0$, поскольку y и z – центральные оси поперечного сечения нити.

Поперечные нагрузки $dq_y^{(1)}$ и $dq_y^{(2)}$ в соответствии с представленной на рис. 5.3 схемой их приложения создают в нити крутящий момент, формула для определения которого может быть записана так:

$$dm_x = - (dq_y^{(1)} + dq_y^{(2)}) z. \quad (5.4)$$

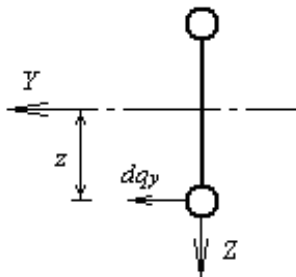


Рис.5.3. Схема создания крутящего момента в сечении нити

Подставляя (5.1) и (5.2) в (5.4) и интегрируя результирующее выражение по площади поперечного сечения нити F , для m_x^v , находим:

$$m_x^v = - \int_F \left(\sigma_N v'' + \frac{M_y z}{I_y} v'' + \frac{M_y' z}{I_y} v' \right) z dF = -M_y v'' - M_y' v', \quad (5.5)$$

причем здесь учтено, что интеграл $\int_F z^2 dF = I_y$.

Действующие в сечениях нити касательные напряжения дают вертикальную равнодействующую Q_z (рис. 5.4), которая, в свою очередь, создает дополнительный крутящий момент

$$m_x^v dx = (Q_z + dQ_z) v' dx \approx Q_z v' dx ,$$

откуда, следовательно, имеем:

$$m_x^v = \frac{Q_z v' dx}{dx} = M_y' v' . \quad (5.6)$$

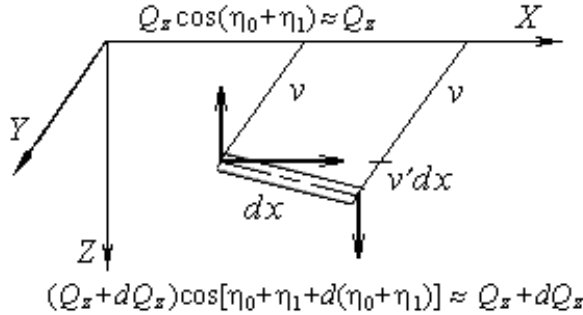


Рис. 5.4. К определению дополнительного крутящего момента от равнодействующей касательных напряжений при смещении нити в плоскости XOY

Теперь рассмотрим влияние поворота поперечного сечения нити на угол θ (рис. 5.1). В этом случае волокна нити смещаются в горизонтальной плоскости на величину $-z \sin \theta \approx -z\theta$. В результате такого смещения напряжения σ_N и σ_M дадут дополнительные поперечные нагрузки $dq_\theta^{(1)}$ и $dq_\theta^{(2)}$. Значения этих нагрузок можно найти по формулам (5.1) и (5.2), предварительно заменив в них параметр v на $-z\theta$. Тогда получим:

$$dq_\theta^{(1)} = -\sigma_N z \theta'' dF ; \quad (5.7)$$

$$dq_\theta^{(2)} = \frac{M_y z^2}{I_y} \theta'' dF - \frac{M_y' z^2}{I_y} \theta' dF . \quad (5.8)$$

Также легко убедиться в том, что касательные напряжения τ дают при повороте поперечного сечения нити на угол θ дополнительную погонную поперечную нагрузку (рис. 5.5), значение которой определяется из следующего соотношения:

$$dq_\theta^{(3)} = \frac{-(Q_z + dQ_z)(\theta + d\theta) + Q_z \theta}{dx} = -Q_z \theta' - Q_z' \theta . \quad (5.9)$$

Интегрируя (5.7) и (5.8) по площади поперечного сечения нити F и складывая найденный результат с (5.9), для суммарной погонной поперечной нагрузки от поворота θ имеем:

$$q_\theta = -M_y \theta'' - M_y' \theta' - Q_z \theta' - Q_z' \theta = -(M_y \theta)'' . \quad (5.10)$$

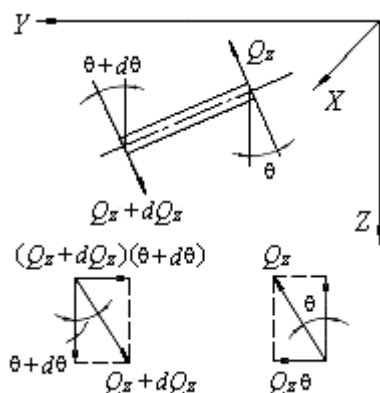


Рис. 5.5. К определению дополнительной погонной поперечной нагрузки от равнодействующей касательных напряжений при повороте нити в плоскости сечения

В свою очередь, поперечные нагрузки $dq_0^{(1)}$ и $dq_0^{(2)}$ создают в сечении дополнительный погонный крутящий момент

$$m_x^0 = - \int_F (dq_0^{(1)} + dq_0^{(2)}) z dF = \frac{N I_y}{F} \theta'' . \quad (5.11)$$

Причем при нахождении выражения (5.11) было учтено, что $\int_F z^3 dF = 0$.

При повороте поперечного сечения на угол θ касательные напряжения не вызовут крутящего момента, поскольку внешняя нагрузка $q = q_1 + q_2$ действует в плоскости симметрии поперечного сечения нити. И вполне понятно, что крутящий момент от приращений касательных напряжений будет возникать только в том случае, если нагрузка приложена не по оси нити. Поэтому предположим, что начальная нагрузка q_1 приложена на расстоянии e_1 от центра изгиба сечения, а дополнительная q_2 – на расстоянии e_2 (рис. 5.6).

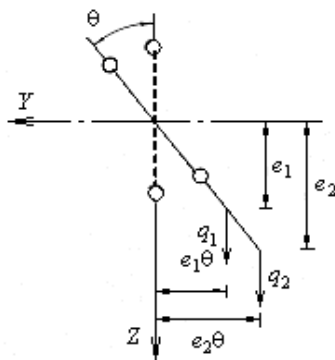


Рис. 5.6. Схема расположения начальной и дополнительной нагрузок по высоте поперечного сечения нити

В соответствии с отмеченным при повороте поперечного сечения нити на угол θ возникает дополнительный крутящий момент, равный:

$$m_x^\theta = -q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta. \quad (5.12)$$

И поэтому с учетом последнего соотношения, а также формулы (5.11) выражение для суммарного погонного крутящего момента от поворота сечения на угол θ можно записать в следующем виде:

$$m_x^\theta = \frac{NI_y}{F} \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta. \quad (5.13)$$

Суммируя далее (5.3) и (5.10), получаем полную величину погонной дополнительной поперечной нагрузки от перемещения v и поворота θ

$$q_y = N v'' - (M_y \theta)'', \quad (5.14)$$

а суммируя зависимости (5.5), (5.6) и (5.13) – полную величину дополнительного погонного крутящего момента

$$m_x = -M_y v'' + \frac{NI_y}{F} \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta. \quad (5.15)$$

Обратим здесь внимание на то, что в силу принятого ранее предположения о пологости нити конечной жесткости распор H в ней мало отличается от продольного усилия N [67, 103]. Тогда, учитывая данное допущение в формулах (5.14) и (5.15), окончательно получим:

$$q_y = H v'' - (M_y \theta)''; \quad (5.16)$$

$$m_x = -M_y v'' + H r^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta, \quad (5.17)$$

где $r^2 = I_y / F$ – радиус инерции поперечного сечения нити.

Воспользуемся в дальнейшем полученными соотношениями при рассмотрении устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости.

§ 5.3. Общие уравнения устойчивости нитей конечной жесткости

В соответствии с работами [24, 115, 204, 207] энергию упругой деформации нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2] dx, \quad (5.18)$$

где EI_ω – секториальная жесткость поперечного сечения нити; GI_d – крутильная жесткость; EI_z – изгибная жесткость нити в плоскости XOY .

А работу внешних сил при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба определим из выражения

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l (q_y v + m_x \theta) dx, \quad (5.19)$$

откуда, с учетом (5.16) и (5.17), получим:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l [Hv v'' - (M_y \theta)'' v - M_y \theta v'' + H r^2 \theta \theta'' - q_1 e_1 \theta^2 - q_2 e_2 \theta^2] dx. \quad (5.20)$$

Так как рассматриваемое отклоненное (выпученное) состояние нити конечной жесткости является равновесным, то в соответствии с энергетическим критерием устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле [24] уравнение устойчивости с учетом (5.18) и (5.20) принимает вид

$$\int_0^l [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - H v v'' + (M_y \theta)'' v + M_y \theta v'' - H r^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2 + q_2 e_2 \theta^2] dx = 0. \quad (5.21)$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах граничные условия можно представить в виде

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } x = 0 & v = v'' = \theta = \theta'' = 0, \\ \text{при } x = l & v = v'' = \theta = \theta'' = 0. \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

В качестве функций v и θ , удовлетворяющих граничным условиям (5.22), принимаем:

$$\left. \begin{array}{l} v = A \sin \lambda x, \\ \theta = B \sin \lambda x, \end{array} \right\} \quad (5.23)$$

где принято, что $\lambda = \pi/l$.

Подставляя значения v и θ из (5.23) в уравнение устойчивости (5.21) и интегрируя полученное выражение, после некоторых преобразований и упрощений приходим к уравнению

$$(P_z + H)A^2 - \frac{4}{l}AB \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx + \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] r^2 B^2 = 0, \quad (5.24)$$

где $P_z = EI_z \lambda^2$ – эйлерова сила при продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega = (EI_\omega \lambda^2 + GI_d)/r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

Вполне понятно, что коэффициенты A и B в уравнении (5.24) необходимо подобрать такими, чтобы дополнительная нагрузка, приложенная к нити, имела наименьшее значение. И поэтому, согласно общепринятой схеме рассуждений, обозначим выражение, стоящее в левой части уравнения (5.24), через Π , составим от него производные по каждому из коэффициентов и в результате получим систему однородных уравнений вида

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial A} = 2(P_z + H)A - \frac{4}{l}B \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial B} = -\frac{4}{l}A \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx + 2r^2 \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] B = 0. \end{array} \right\} \quad (5.25)$$

Как хорошо известно, потеря устойчивости становится возможной, если указанная система уравнений может дать решения для коэффициентов A и B , отличные от нуля. Этому условию соответствует равенство нулю определителя полученной системы уравнений. Приравнявая его нулю, имеем:

$$\begin{vmatrix} P_z + H & -\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx \\ -\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx & r^2 \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (5.26)$$

Раскрывая этот определитель, приходим к уравнению устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости

$$r^2 (P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx \right]^2 = 0. \quad (5.27)$$

Интеграл, входящий в уравнение (5.27), зависит от вида нагрузки, приложенной к нити и условий закрепления ее концов. Для нахождения изгибающего момента, действующего в нити, можно воспользоваться формулами уточненного (4.5) или приближенного (4.195) методов. Причем применение приближенного метода для вычисления действующих в нити изгибающих моментов позволяет существенно упростить расчетные зависимости и практически не сказывается на точности расчетов. Так, например, разница между значениями изгибающих моментов в середине пролета, вычисленных по уточненному и приближенному методам при действии равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету, составляет не более 3,0%.

Начнем рассмотрение с нити, работающей с изгибом от начальной нагрузки. В этом случае изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ и определяемый по формуле (4.195), можно представить в виде

$$M_y = \frac{M_y^6}{1 + kH}, \quad (5.28)$$

где M_y^6 – изгибающий момент в плоскости XOZ для балки с геометрическими характеристиками нити конечной жесткости; $k = 1/(EI_y \lambda^2)$ – коэффициент.

Подставляя (5.28) в (5.27) и производя интегрирование, после несложных преобразований и упрощений приходим к уравнению

$$r^2 (P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12 \lambda^2} \right)^2 \left(\frac{q_1 + q_2}{1 + kH} \right)^2 = 0. \quad (5.29)$$

Полученное уравнение содержит две неизвестные величины – критическую нагрузку q_2 и критический распор H . Для связи между критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение неразрывности деформаций

$$L = L_0 + \Delta L, \quad (5.30)$$

где L – длина нити после приложения критической нагрузки; L_0 – длина нити при начальной нагрузке; ΔL – упругое приращение длины нити, вызванное критической нагрузкой.

После подстановки в уравнение (5.30) значений длин нити, приходим к уравнению (4.197). Перепишем его в несколько измененном виде

$$\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6 EF}{40320 (EI_y)^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320 (EI_y)^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (5.31)$$

Определяя дальше из уравнения (5.31) величину q_2 и подставляя ее значение в выражение (5.29), приходим к следующему уравнению относительно критического распора H :

$$r^2 (P_z + H) \left\{ P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} \left[q_1 (e_1 - e_2) + e_2 (1 + kH) \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} \right] \right\} - \left(\frac{3 + \pi^2}{12 \lambda^2} \right)^2 (a_1^2 H + a_2^2) = 0, \quad (5.32)$$

коэффициенты которого находятся по следующим формулам:

$$a_1^2 = \frac{40320 (EI_y)^2}{17 l^6 EF}; \quad a_2^2 = \frac{q_1^2}{(1 + kH_0)^2} - \frac{40320 (EI_y)^2}{17 l^6 EF} H_0.$$

Решая уравнение (5.32), определяем значение критического распора H , а подставляя его значение в уравнение (5.31) – величину критической дополнительной нагрузки q_2 .

В случае же работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (5.28) будем иметь:

$$M_y = \frac{M_y^6}{1 + kH} - \frac{4y_0 x (l - x) H}{l^2 (1 + kH)}, \quad (5.33)$$

где y_0 – стрела провисания нити при действии начальной нагрузки.

В свою очередь, вместо уравнения (5.31) получаем:

$$\frac{EF}{(1 + kH)^2} \left[\frac{17(q_1 + q_2)^2 l^6}{40320 (EI_y)^2} + \frac{(q_1 + q_2) y_0 l^2}{15 EI_y} + \frac{8 y_0^2}{3 l^2} \right] = \frac{8 y_0^2 EF}{3 l^2} + H - H_0, \quad (5.34)$$

а вместо уравнения (5.29) –

$$r^2 (P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left(\frac{6 + 2\pi^2}{3\pi^2} \right)^2 \frac{y_0^2}{(1 + kH)^2} \left(\frac{q_2 l^2}{8 y_0} + H_0 - H \right)^2 = 0. \quad (5.35)$$

Уравнение для определения значения критического распора H примет вид

$$\begin{aligned}
& r^2(P_z + H)(1 + kH)^2 \left[P_\omega + H + \frac{e_1 - e_2}{r^2 \lambda^2} q_1 - \frac{e_2 b_2}{2b_3 r^2 \lambda^2} + \right. \\
& \left. + \frac{e_2}{2b_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} \right] - \left(\frac{6 + 2\pi^2}{24\lambda^2} \right)^2 \times \\
& \times \left[\frac{1}{2b_3} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{b_2}{2b_3} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0, \quad (5.36)
\end{aligned}$$

где обозначено

$$b_1 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2}; \quad b_2 = \frac{l^2 y_0 EF}{15EI_y}; \quad b_3 = \frac{17l^6 EF}{40320(EI_y)^2}; \quad b_4 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} - H_0.$$

При жестком закреплении концов нити на опорах граничные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned}
& \text{при } x = 0 & v = v' = \theta = \theta' = 0, \\
& \text{при } x = l & v = v' = \theta = \theta' = 0.
\end{aligned} \quad (5.37)$$

При таких граничных условиях в качестве функций v и θ можно принять

$$\begin{aligned}
& v = A(1 - \cos 2\lambda x), \\
& \theta = B(1 - \cos 2\lambda x).
\end{aligned} \quad (5.38)$$

Подставив значения v и θ из (5.38) в уравнение устойчивости (5.21), получим выражение

$$\begin{aligned}
& (P_z^* + H)A^2 + \frac{4}{l} AB \int_0^l M_y \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \\
& + \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] r^2 B^2 = 0, \quad (5.39)
\end{aligned}$$

где $P_z^* = 4EI_z \lambda^2$ – эйлерова сила при продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega^* = (4EI_\omega \lambda^2 + GI_d)/r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости.

Выполняя последующие действия, как и в предшествующем случае шарнирного закрепления концов нити, придем к уравнению устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости

$$\begin{aligned}
& r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \\
& - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]^2 = 0. \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Если же нить работает с изгибом от начальной нагрузки, то изгибающий момент, действующий в нити, можно представить так:

$$M_y = \frac{M_y^6}{1 + 0,25kH}. \quad (5.41)$$

Подставляя выражение для изгибающего момента M_y из (5.41) в (5.40), получаем уравнение устойчивости:

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2}(q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \frac{49}{256\lambda^4} \left(\frac{q_1 + q_2}{1 + 0,25kH} \right)^2 = 0. \quad (5.42)$$

Для связи между критическим распором H и критической дополнительной нагрузкой q_2 используем уравнение неразрывности деформаций (4.202). Перепишем его в несколько измененном виде

$$\frac{(q_1 + q_2)^2 l^6 EF}{60480(EI_y)^2 (1 + 0,25kH)^2} - H = \frac{q_1^2 l^6 EF}{60480(EI_y)^2 (1 + 0,25kH_0)^2} - H_0. \quad (5.43)$$

Заимствуя из уравнения (5.43) дополнительную критическую нагрузку q_2 и подставляя ее в формулу (5.42), приходим к уравнению критического распора H

$$r^2(P_z^* + H) \left\{ P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2} [q_1(e_1 - e_2) + e_2(1 + 0,25kH)\sqrt{c_1^2 H + c_2^2}] \right\} - \frac{49}{256\lambda^4} (c_1^2 H + c_2^2) = 0, \quad (5.44)$$

где приняты следующие обозначения:

$$c_1^2 = \frac{60480(EI_y)^2}{l^6 EF}; \quad c_2^2 = \frac{q_1^2}{(1 + 0,25kH_0)^2} - \frac{60480(EI_y)^2}{l^6 EF} H_0.$$

Причем из уравнения (5.44) определяется значение критического распора H , а из выражения (5.43) – критическая дополнительная нагрузка q_2 .

В случае же работы нити без изгиба от начальной нагрузки изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , можно представить в виде

$$M_y = \frac{M_y^6}{1 + 0,25kH} - \frac{4y_0 x(l-x)H}{l^2(1 + 0,25kH)}. \quad (5.45)$$

Подставляя (5.45) в (5.40), получаем уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити конечной жесткости

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{3}{4r^2\lambda^2}(q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \left(\frac{3 + \pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \frac{1}{(1 + 0,25kH)^2} \left[\frac{21(q_1 + q_2)}{4(3 + \pi^2)} + \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0. \quad (5.46)$$

Для связи между критическим распором H и дополнительной критической нагрузкой q_2 используем уравнение неразрывности деформаций нити конечной жесткости

$$\frac{EF}{(1+0,25kH)^2} \left[\frac{(q_1+q_2)^2 l^6}{60480(EI_y)^2} + \frac{(q_1+q_2)y_0 l^2}{90EI_y} + \frac{8y_0^2}{3l^2} \right] = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0. \quad (5.47)$$

Решая уравнение (5.47) относительно критической нагрузки q_2 и подставляя полученное значение в выражение (5.46), приходим к уравнению, содержащему одно неизвестное – критический распор H :

$$\begin{aligned} & r^2(P_z^* + H)(1+0,25kH)^2 \left[P_\omega^* + H + \frac{3(e_1 - e_2)}{4r^2\lambda^2} q_1 - \frac{3e_2 d_2}{8d_3 r^2 \lambda^2} + \right. \\ & \left. + \frac{3e_2}{8d_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{d_2^2 + 4d_3(d_4 + H)(1+0,25kH)^2 - 4d_1 d_3} \right] - \left(\frac{3+\pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \times \\ & \times \left[\frac{21}{8d_3(3+\pi^2)} \sqrt{d_2^2 + 4d_3(d_4 + H)(1+0,25kH)^2 - 4d_1 d_3} - \right. \\ & \left. - \frac{2ld_2}{8d_3(3+\pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где обозначено

$$d_1 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2}; \quad d_2 = \frac{l^2 y_0 EF}{90EI_y}; \quad d_3 = \frac{l^6 EF}{60480(EI_y)^2}; \quad d_4 = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} - H_0.$$

Итак, определяя из уравнения (5.48) критический распор H и подставляя его в выражение (5.47), находим дополнительную критическую нагрузку q_2 .

Перейдем теперь к рассмотрению практически важной задачи, касающейся устойчивости плоской формы изгиба раскрепленных нитей конечной жесткости. Из практики строительства хорошо известно, что такие нити достаточно часто раскрепляют в горизонтальной плоскости какими-либо связями. Причем эти связи, препятствуя смещению нити в горизонтальной плоскости, не препятствуют повороту ее поперечного сечения вокруг некоторой оси, в общем случае не совпадающей с центральной осью нити (рис. 5.7). В связи с этим будем считать, что линия раскрепления нити находится на расстоянии e_c от центральной оси Y , а начальная q_1 и дополнительная q_2 нагрузки приложены соответственно на расстояниях e_1 и e_2 от той же оси. Примем также, что расстояния e_c , e_1 и e_2 постоянны по длине нити.

Из рис. 5.7 легко понять, что при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба горизонтальное перемещение оси нити определится так:

$$v = e_c \theta. \quad (5.49)$$

Причем возникающая в связях горизонтальная реакция q_c создает дополнительную крутящую нагрузку $m_c = q_c e_c$ относительно оси нити X . Кроме того дополнительный крутящий момент возникает и от внецентренного приложения нагрузок q_1 и q_2 при повороте поперечного сечения нити на угол θ . И поэтому легко убедиться в том, что его величина будет равна:

$$m_q = -q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta. \quad (5.50)$$

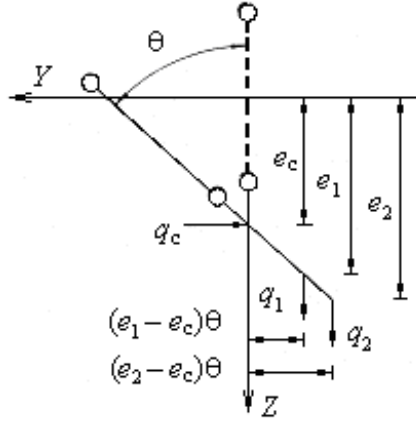


Рис. 5.7. Поворот поперечного сечения нити конечной жесткости, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости

Добавляя далее эти вновь установленные члены в выражения для дополнительной погонной поперечной нагрузки (5.16) и дополнительного погонного крутящего момента (5.17), получаем:

$$q_y = H v'' - (M_y \theta)'' - q_c; \quad (5.51)$$

$$m_x = -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 (e_1 - e_c) \theta - q_2 (e_2 - e_c) \theta + q_c e_c. \quad (5.52)$$

Подставляя в уравнения (5.51) и (5.52) вместо v его значение из (5.49), будем иметь:

$$q_y = H e_c \theta'' - (M_y \theta)'' - q_c; \quad (5.53)$$

$$m_x = -M_y e_c \theta'' + Hr^2 \theta'' - q_1 (e_1 - e_c) \theta - q_2 (e_2 - e_c) \theta + q_c e_c. \quad (5.54)$$

Тогда уравнение устойчивости плоской формы изгиба примет вид

$$\int_0^l [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z e_c^2 (\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)'' e_c \theta + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 (e_1 - e_c) \theta^2 + q_2 (e_2 - e_c) \theta^2] dx = 0. \quad (5.55)$$

В случае шарнирного закрепления концов нити в качестве функции, аппроксимирующей поворот θ , принимаем ее представление в виде (5.23). Подставляя теперь значение θ из (5.23) в уравнение устойчивости нити, раскрепленной связями по всей длине (5.55), интегрируя полученное выражение, после несложных преобразований приходим к следующему уравнению:

$$B^2 \left(EI_\omega \lambda^2 + GI_d + Hr^2 + EI_z e_c^2 \lambda^2 + He_c^2 + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin \lambda x dx \right) = 0. \quad (5.56)$$

Поскольку здесь $B \neq 0$, то уравнение устойчивости плоской формы изгиба нити, шарнирно раскрепленной связями по всей длине, примет вид

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin^2 \lambda x dx = 0. \quad (5.57)$$

В случае нити, работающей с изгибом от начальной нагрузки, уравнение (5.57) после некоторых преобразований запишется следующим образом:

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{(q_1 + q_2)e_c}{1 + kH} = 0. \quad (5.58)$$

Уравнение (5.58) содержит две неизвестные величины – критический распор H и дополнительную критическую нагрузку q_2 . Как обычно, для связи между критической нагрузкой и критическим распором используем уравнение (5.31). Определяя из уравнения (5.31) величину q_2 и подставляя ее значение в выражение (5.58), придем к уравнению, в котором неизвестным будет только критический распор H :

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_2}{\lambda^2} q_1 + \frac{1}{\lambda^2} \left[(e_2 - e_c)(1 + kH) - \frac{3 + \pi^2}{6} e_c \right] \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} = 0. \quad (5.59)$$

Решая уравнение (5.59), определяем значение критического распора H , а подставляя его значение в уравнение (5.31) – величину критической дополнительной нагрузки q_2 .

В случае же работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (5.58) будем иметь:

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \frac{3 + \pi^2}{3\pi^2} \cdot \frac{4y_0 e_c}{1 + kH} \left(\frac{q_2 l^2}{8y_0} + H_0 - H \right) = 0. \quad (5.60)$$

Связь между дополнительной нагрузкой q_2 и распором H задается уравнением (5.34). Определяя из него значение q_2 и подставляя его в уравнение (5.60), получаем уравнение с одним неизвестным – критическим распором H :

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z + H) + \frac{e_1 - e_2}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} \cdot \frac{b_2}{2b_3} + \frac{e_2 - e_c}{2b_3 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{e_c}{1 + kH} \times \times \left[\frac{1}{2b_3} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} - \frac{b_2}{2b_3} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (5.61)$$

Вычисляя из уравнения (5.61) значение критического распора H и подставляя его в выражение (5.34), определяем величину критической дополнительной нагрузки q_2 .

§ 5.4. Действие дополнительных нагружений специального вида

5.4.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета. Прежде всего рассмотрим нить, шарнирно закрепленную на опорах и нагруженную начальной равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой q_1 и дополнительной равномерно распределенной на левой половине пролета нагрузкой q_2 . Будем считать, что при начальной нагрузке q_1 устойчивость плоской формы изгиба нити обеспечена. При возрастании дополнительной нагрузки q_2 в какой-то момент плоская форма изгиба нити перестанет быть устойчивой и, при определенной величине нагрузки q_2 , нить теряет устойчивость и изгибается по пространственной кривой.

В этом случае выражения для дополнительной погонной поперечной нагрузки q_y и дополнительного погонного крутящего момента m_x , возникающих от заданного напряженного состояния нити при изменении ее деформированного состояния, можно представить в виде

$$q_y = H v'' - (M_y \theta)'', \quad (0 \leq x \leq l); \quad (5.62)$$

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta - q_2 e_2 \theta, & (0 \leq x \leq l/2); \\ m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta, & (l/2 \leq x \leq l). \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

Теперь, с использованием ранее изложенного подхода, имеем возможность выписать уравнение устойчивости нити конечной жесткости при дополнительной равномерно распределенной на левой половине пролета нагрузке q_2 :

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - H v v'' + (M_y \theta)'' v + \\ & \quad + M_y \theta v'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2 + q_2 e_2 \theta^2] dx + \\ & + \int_{l/2}^l [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - H v v'' + (M_y \theta)'' v + \\ & \quad + M_y \theta v'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2] dx = 0. \end{aligned} \quad (5.64)$$

При шарнирном закреплении концов нити на опорах граничные условия примут вид (5.22). Поэтому в качестве функций v и θ , удовлетворяющих граничным условиям задачи, примем:

$$\left. \begin{aligned} v &= A \sin 2\lambda x, \\ \theta &= B \sin 2\lambda x. \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

Подставляя значения v и θ из (5.65) в уравнение устойчивости и выполняя интегрирование полученного выражения, придем к уравнению

$$r^2 (P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{1}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + 0,5 q_2 e_2) \right] - \left[\frac{2}{l} \int_0^l M_y \sin^2 2\lambda x dx \right]^2 = 0. \quad (5.66)$$

Рассмотрим дальше нить, работающую с изгибом от начальной нагрузки. Выражая изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , по формуле (5.28) и подставляя его значение, вычисленное для данного случая нагружения, в уравнение (5.66), находим следующее выражение:

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{1}{4r^2\lambda^2}(q_1 e_1 + 0,5q_2 e_2) \right] - \left(\frac{3 + 4\pi^2}{48\lambda^2} \right)^2 \left(\frac{q_1 + 0,5q_2}{1 + kH} \right)^2 = 0. \quad (5.67)$$

Для связи между критической дополнительной нагрузкой и критическим распором используем уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{17(q_1 + 0,5q_2)^2 l^6 EF}{40320 (EI_y)^2 (1 + kH)^2} - H = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320 (EI_y)^2 (1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (5.68)$$

Определяя из уравнения (5.68) значение дополнительной нагрузки q_2 и подставляя его в выражение (5.67), получаем уравнение для определения критического распора H :

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1 - e_2}{4r^2\lambda^2} q_1 + \frac{e_2}{4r^2\lambda^2} (1 + kH) \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} \right] - \left(\frac{3 + 4\pi^2}{48\lambda^2} \right)^2 (a_1^2 H + a_2^2)^2 = 0. \quad (5.69)$$

В случае же работы нити без изгиба от начальной нагрузки вместо уравнения (5.67) будем иметь:

$$r^2(P_z^* + H) \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1}{4r^2\lambda^2} q_1 + \frac{e_2}{8r^2\lambda^2} q_2 \right] - \left(\frac{3 + 4\pi^2}{12\lambda^2} \right)^2 \frac{1}{(1 + kH)^2} \left[\frac{(3 + 4\pi^2)(q_1 + 0,5q_2)}{4(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0, \quad (5.70)$$

а вместо уравнения (5.68) –

$$\frac{EF}{(1 + kH)^2} \left[\frac{17l^6 (q_1 + 0,5q_2)^2}{40320 (EI_y)^2} + \frac{(q_1 + 0,5q_2)y_0 l^2}{15EI_y} + \frac{8y_0^2}{3l^2} \right] = \frac{8y_0^2 EF}{3l^2} + H - H_0. \quad (5.71)$$

Уравнение для определения значения критического распора примет вид

$$r^2(P_z^* + H)(1 + kH)^2 \left[P_\omega^* + H + \frac{e_1 - e_2}{4r^2\lambda^2} - \frac{e_2 b_2}{8b_3 r^2 \lambda^2} + \frac{e_2}{8b_3 r^2 \lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1 b_3} \right] -$$

$$-\left(\frac{3+\pi^2}{12\lambda^2}\right)^2 \left[\frac{3+4\pi^2}{8b_3(3+\pi^2)} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4+H)(1+kH)^2 - 4b_1b_3} - \frac{b_2(3+4\pi^2)}{8b_3(3+\pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right]^2 = 0. \quad (5.72)$$

Перейдем теперь к нахождению уравнения пространственной устойчивости нити конечной жесткости, раскрепленной в горизонтальной плоскости. Примем, что линия раскрепления нити проходит на расстоянии e_c от центральной оси поперечного сечения нити Y . Расположение же начальной q_1 и дополнительной q_2 нагрузок по высоте сечения показано на рис. 5.7.

Как и в случае с равномерно распределенной нагрузкой, горизонтальный прогиб оси нити при повороте поперечного сечения вокруг точки закрепления определяется формулой (5.49), погонная горизонтальная реакция, возникающая в связях, равна q_c , а погонный крутящий момент, возникающий от этой реакции, $-m_c = q_c e_c$.

Тогда величина дополнительной погонной поперечной нагрузки q_y будет равна (5.51), а величина дополнительного погонного крутящего момента

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta - q_2(e_2 - e_c)\theta + q_c e_c, & (0 \leq x \leq l/2), \\ m_x &= -M_y v'' + Hr^2 \theta'' - q_1(e_1 - e_c)\theta + q_c e_c, & (l/2 \leq x \leq l). \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

Заменяя в формулах (5.51) и (5.73) горизонтальный прогиб оси нити v в соответствии с его представлением (5.49) и подставляя полученные выражения в (5.18) и (5.20), находим уравнение устойчивости нити конечной жесткости в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z e_c^2(\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)'' e_c \theta + \\ & + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1(e_1 - e_c)\theta^2 + q_2(e_2 - e_c)\theta^2] dx + \\ & + \int_{l/2}^l [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z e_c^2(\theta'')^2 - He_c^2 \theta \theta'' + (M_y \theta)'' e_c \theta + \\ & + M_y e_c \theta \theta'' - Hr^2 \theta \theta'' + q_1(e_1 - e_c)\theta^2] dx = 0. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Считая, что концы нити шарнирно закреплены, примем в качестве аппроксимирующей функции θ функцию (5.65).

Подставляя далее значение θ в выражение (5.74), получаем уравнение устойчивости нити, шарнирно закрепленной связями по всей длине:

$$\begin{aligned} & r^2(P_\omega^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \\ & - \frac{4e_c}{l} \int_0^l M_y \sin^2 2\lambda x dx = 0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Если нить работает с изгибом от начальной нагрузки, то уравнение устойчивости преобразуется к виду

$$r^2(P_{\omega}^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \frac{3 + 4\pi^2}{24\lambda^2} \cdot \frac{(q_1 + 0,5q_2)e_c}{1 + kH} = 0. \quad (5.76)$$

Уравнение неразрывности деформаций будет иметь вид (5.68), а уравнение для определения критического распора H –

$$r^2(P_{\omega}^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{1}{4\lambda^2} \left[(e_2 - e_c)(1 + kH) - \frac{3 + 4\pi^2}{6} e_c \right] \sqrt{a_1^2 H + a_2^2} = 0. \quad (5.77)$$

После определения из уравнения (5.77) критического распора H из соотношения (5.68) находим дополнительную критическую нагрузку q_2 .

Если же нить работает без изгиба от начальной нагрузки, то вместо уравнения (5.76) будем иметь:

$$r^2(P_{\omega}^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2} q_2 - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{e_c}{1 + kH} \left[\frac{(3 + 4\pi^2)(q_1 + 0,5q_2)}{4(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (5.78)$$

В качестве уравнения, связывающего критический распор с критической нагрузкой, воспользуемся уравнением (5.71).

Уравнение для определения критического распора будет иметь вид

$$r^2(P_{\omega}^* + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_2}{4\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{4\lambda^2} \cdot \frac{b_2}{2b_3} + \frac{e_2 - e_c}{8b_3\lambda^2} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1b_3} - \frac{3 + \pi^2}{6\lambda^2} \cdot \frac{e_c}{1 + kH} \times \left[\frac{3 + 4\pi^2}{8b_3(3 + \pi^2)} \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_4 + H)(1 + kH)^2 - 4b_1b_3} - \frac{b_2(3 + 4\pi^2)}{8b_3(3 + \pi^2)} - \frac{8y_0}{l^2} H \right] = 0. \quad (5.79)$$

После определения из уравнения (5.79) значения критического распора H находим критическую нагрузку q_2 из выражения (5.71).

5.4.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета. Рассмотрим нить, шарнирно закрепленную на опорах и нагруженную начальной нагрузкой q_1 , равномерно распределенной по всему пролету, и дополнительной сосредоточенной нагрузкой P , действующей посередине пролета. Допу-

стим, что при начальной нагрузке q_1 устойчивость плоской формы изгиба нити обеспечена. При возрастании дополнительной нагрузки P в какой-то момент плоская форма изгиба нити перестанет быть устойчивой и, при определенной величине нагрузки P , нить теряет устойчивость плоской формы изгиба.

В этом случае от заданного напряженного состояния в нити возникают дополнительные нагрузки:

$$q_y = H v'' - (M_y \theta)'' ; \quad (5.80)$$

$$m_x = -M_y v'' + H r^2 \theta'' - q_1 e_1 \theta ; \quad (5.81)$$

$$m_p = P e_p \theta , \quad (5.82)$$

где e_p – эксцентриситет приложения сосредоточенной нагрузки P от центра изгиба сечения; m_p – дополнительный крутящий момент, возникающий в нити от нагрузки P , приложенной с эксцентриситетом e_p , при повороте поперечного сечения на угол θ .

Поступая сообразно тому, как это было сделано во всех предшествующих случаях, получим уравнение устойчивости нити конечной жесткости при дополнительной сосредоточенной нагрузке посредине пролета:

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - H v v'' + (M_y \theta)'' v + \\ & \quad + M_y \theta v'' - H r^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2] dx + \\ & + \int_{l/2}^l [EI_\omega (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z (v'')^2 - H v v'' + (M_y \theta)'' v + \\ & \quad + M_y \theta v'' - H r^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2] dx + P e_p \theta^2 = 0 . \end{aligned} \quad (5.83)$$

Функции v и θ , удовлетворяющие граничным условиям задачи, будут определяться формулами (5.23). Причем здесь следует отметить, что при рассматриваемом виде нагрузки указанные формулы дадут погрешность, величина которой не превышает 1,50% [161]. Внося далее эти формулы в уравнение устойчивости (5.83), получим:

$$\begin{aligned} & r^2 (P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} \left(q_1 e_1 + 2 \frac{P e_p}{l} \sin^2 \lambda x \right) \right] - \\ & - \left[\frac{2}{l} \left(\int_0^{l/2} M_y \sin^2 \lambda x dx + \int_{l/2}^l M_y \sin^2 \lambda x dx \right) \right]^2 = 0 . \end{aligned} \quad (5.84)$$

Для выражения изгибающего момента, действующего в плоскости XOZ , используем зависимость (5.28). Подставив значение изгибающего момента, вычисленное для случая дополнительной сосредоточенной нагрузки посредине пролета, в уравнение (5.84), будем иметь:

$$r^2 (P_z + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} \left(q_1 e_1 + 2 \frac{P e_p}{l} \sin^2 \lambda x \right) \right] -$$

$$-\left(\frac{1}{24} \cdot \frac{2(3 + \pi^2)q_1 l + 3(4 + \pi^2)P}{\pi^2(1 + kH)} l\right)^2 = 0. \quad (5.85)$$

Уравнение неразрывности деформаций, связывающее дополнительную критическую нагрузку и критический распор, примет вид

$$\frac{(136q_1^2 l^2 + 427q_1 Pl + 588P^2)l^4 EF}{322560(EI_y)^2(1 + kH)^2} - H = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320(EI_y)^2(1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (5.86)$$

Решив последнее уравнение совместно с уравнением (5.85), найдем критическую дополнительную нагрузку и критический распор.

5.4.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета. Теперь рассмотрим нить, шарнирно закрепленную на опорах и нагруженную начальной нагрузкой q_1 , равномерно распределенной по всему пролету, и дополнительной сосредоточенной нагрузкой P в четверти пролета. Как и ранее, будем считать, что при начальной нагрузке q_1 устойчивость нити обеспечена. При увеличении дополнительной нагрузки P в какой-то момент нить перестает быть устойчивой и при некоторой величине нагрузки P теряет устойчивость плоской формы изгиба.

Вполне понятно, что в этом случае дополнительные нагрузки, возникающие от заданного напряженного состояния в нити, будут определяться соотношениями (5.80) – (5.82).

Тогда уравнение устойчивости нити конечной жесткости при дополнительной сосредоточенной нагрузке в четверти пролета примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/4} [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(v'')^2 - H v v'' + (M_y \theta)'' v + \\ & + M_y \theta v'' - H r^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2] dx + \\ & + \int_{l/4}^l [EI_\omega(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2 + EI_z(v'')^2 - H v v'' + (M_y \theta)'' v + \\ & + M_y \theta v'' - H r^2 \theta \theta'' + q_1 e_1 \theta^2] dx + P e_p \theta^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Функции v и θ , удовлетворяющие граничным условиям задачи, выразим следующим образом:

$$v = A \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \lambda x + \frac{1}{16} \sin 2\lambda x \right), \quad \theta = B \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \lambda x + \frac{1}{16} \sin 2\lambda x \right). \quad (5.88)$$

Отметим, что формулы (5.88) дают погрешность, не превышающую 1,58% [161].

Подставив значения v и θ из (5.88) в зависимость (5.87) и выполнив интегрирование полученного выражения, придем к уравнению

$$\begin{aligned}
1089r^2(P_z + H) & \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2\lambda^2} \left(q_1 e_1 + \frac{1}{66} \frac{Pe_p}{l} (8\sqrt{2} \sin \lambda x + \sin 2\lambda x)^2 \right) \right] - \\
& - \left[\frac{2}{l} \left(\int_0^{l/4} M_y (32 \sin^2 \lambda x + 10\sqrt{2} \sin \lambda x \sin 2\lambda x + \sin^2 2\lambda x) dx + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{l/4}^l M_y (32 \sin^2 \lambda x + 10\sqrt{2} \sin \lambda x \sin 2\lambda x + \sin^2 2\lambda x) dx \right) \right]^2 = 0. \quad (5.89)
\end{aligned}$$

Выразив изгибающий момент, действующий в плоскости XOZ , по формуле (5.28) и подставив его значение, вычисленное для случая сосредоточенной нагрузки в четверти пролета, в уравнение (5.89), получим:

$$\begin{aligned}
1089r^2(P_z + H) & \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2\lambda^2} \left(q_1 e_1 + \frac{1}{66} \frac{Pe_p}{l} (8\sqrt{2} \sin \lambda x + \sin 2\lambda x)^2 \right) \right] - \\
& - \left[\frac{1}{288} \cdot \frac{-18(129 + 44\pi^2)q_1 l - (3730 + 891\pi^2)P}{\pi^2(1 + kH)} l \right]^2 = 0. \quad (5.90)
\end{aligned}$$

Для связи между критической дополнительной нагрузкой и критическим распором воспользуемся уравнением неразрывности деформаций

$$\begin{aligned}
& \frac{(8704q_1^2 l^2 + 19341q_1 Pl + 11592P^2)l^4 EF}{20643840(EI_y)^2(1 + kH)^2} - H = \\
& = \frac{17q_1^2 l^6 EF}{40320(EI_y)^2(1 + kH_0)^2} - H_0. \quad (5.91)
\end{aligned}$$

Решив совместно уравнения (5.90) и (5.91), получим критическую дополнительную нагрузку и критический распор.

ГЛАВА 6

РАБОТА ГИБКИХ НИТЕЙ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

§ 6.1. Исходные допущения

Начнем рассмотрение с упоминания о том, что теория деформирования пластических гибких нитей базируется практически на тех же допущениях, что и теория расчета нитей при работе материала в пределах упругости. Единственная дополнительная предпосылка связана с идеализацией диаграммы напряжение-деформация реальных материалов, которая в действительности оказывается достаточно сложной для непосредственного применения при расчете конструкций. В теории пластичности такая идеализация диаграммы сводится к отказу от учета присущих пластическому деформированию специфических эффектов, в том числе ползучести, гистерезиса и др. [35, 54, 59, 155]. Именно поэтому реальная зависимость между напряжениями и деформациями заменяется некоей аналитической кривой. Обычно эту диаграмму представляют в виде ломаной линии с двумя участками, реже применяются полигональная, параболическая и другие степенные аппроксимации [8, 35, 59, 79, 123].

Чаще других используются четыре модели работы материала: жестко-пластическая, жестко-пластическая с линейным упрочнением, упруго-пластическая и упруго-пластическая с линейным упрочнением (рис. 6.1).

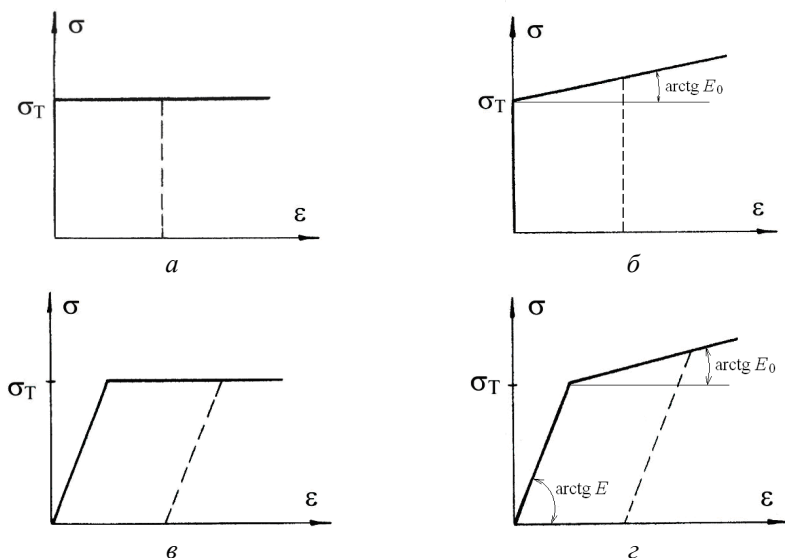


Рис. 6.1. Идеализированные диаграммы напряжение-деформация материала:
а – жестко-пластического; б – то же, с линейным упрочнением;
в – упруго-пластического; г – то же, с линейным упрочнением

Из указанных моделей наиболее широко применяется модель идеального упруго-пластического материала (материала Прандтля). Как показали многочисленные исследования [6, 59, 109, 120, 131, 175], такая аппроксимация в целом вполне удовлетворительно отражает работу многих реальных материалов и позволяет более полно по сравнению с упругой стадией работы проанализировать поведение и определить дополнительные резервы прочности конструкции. Поэтому в начале изучения напряженно-деформированного состояния гибких нитей за пределом упругости будем считать материал этих нитей идеальным упруго-пластическим (рис. 6.1, в).

§ 6.2. Гибкие нити из идеального упруго-пластического материала

6.2.1. Работа поперечного сечения нити. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние произвольного поперечного сечения упруго-пластической нити (рис. 6.2, а). Прежде всего, установим вид зависимости между текущим значением распора в нити и его предельной величиной, описывающей наступление в поперечном сечении предельного состояния. Для ее вывода спроектируем действующие в плоскости сечения нити элементарные силы (эпюра распределения которых показана на рис. 6.2, б) на горизонтальную ось z - z :

$$\int_F \sigma dF = H, \quad (6.1)$$

где σ – нормальное напряжение; F – площадь сечения нити; H – распор.

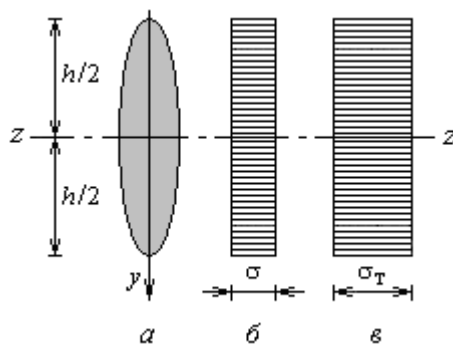


Рис. 6.2. Работа поперечного сечения гибкой упруго-пластической нити:
а – поперечное сечение нити; б – эпюра напряжений в упругой
стадии работы; в – эпюра напряжений в предельном состоянии

Входящее в выражение (6.1) нормальное напряжение σ является функцией относительного удлинения ϵ , вид которой устанавливается в соответствии с принятой диаграммой растяжения материала. В рассматриваемом случае идеального упруго-пластического материала (рис. 6.1, в) для первого – упругого участка диаграммы, эту функцию можно представить в виде

$$\sigma = E\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad \sigma < \sigma_T, \quad (6.2)$$

где E – модуль упругости; ε_0 – относительное удлинение оси нити; σ_T – напряжение текучести.

Если действующий в гибкой нити распор не вызывает напряжений текучести, то поперечное сечение работает в упругой стадии (рис. 6.2, б). Тогда, подставляя (6.2) в уравнение равновесия (6.1), приходим к выражению, определяющему относительное удлинение оси нити в этой стадии работы:

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{H}{H_{\text{пр}}}, \quad (6.3)$$

где параметр $H_{\text{пр}} = \sigma_T F$ является предельным распором нити.

Упругая стадия работы сечения закончится, когда распор в нити H достигнет своего предельного значения $H_{\text{пр}}$, а напряжения достигнут предела текучести σ_T . После этого в соответствии с принятой диаграммой растяжения материала их величина возрастать не будет (рис. 6.2, в).

Условие появления пластических деформаций можно установить с помощью уравнения равновесия (6.1), приравняв в нем $\sigma = \sigma_T$. С учетом сказанного будем иметь:

$$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0. \quad (6.4)$$

Обратим внимание здесь на следующее. Во-первых, появление в поперечном сечении гибкой нити пластических деформаций означает реализацию в нем предельного состояния. А, во-вторых, реализация предельного состояния в любом произвольном поперечном сечении гибкой упруго-пластической нити приводит к распространению пластических деформаций по всей длине нити. Отсюда следует, что процесс деформирования нити протекает в следующей последовательности: при $\sigma < \sigma_T$ все поперечные сечения нити работают в упругой стадии, а при $\sigma = \sigma_T$ – все они переходят в предельное состояние.

6.2.2. Основные зависимости расчета нитей из идеального упруго-пластического материала. Используем полученные в предшествующем параграфе результаты для составления уравнений теории деформирования гибких упруго-пластических нитей (рис. 6.3, а). Первая фаза деформирования гибкой упруго-пластической нити является упругой и представлена на рис. 6.3, б. Напомним, что при работе нити в этой фазе значения параметров ее напряженно-деформированного состояния аналогичны соответствующим параметрам гибкой упругой нити, которые представлены в § 3.7.

Упругая фаза работы заканчивается, когда с ростом нагрузки действующий в нити распор H достигает своего предельного значения $H_{\text{пр}}$. Тогда в поперечных сечениях нити, во-первых, удовлетворяется условие (6.4) и, во-вторых, пластические деформации распространяются по всей длине нити (рис. 6.3, в), реализуя тем самым в ней предельное состояние. Иначе говоря,

условие окончания первой (упругой) фазы работы нити является одновременно условием начала и окончания второй – пластической фазы ее работы, поскольку пластические деформации охватывают всю нить. Таким образом, расчет гибкой нити, обладающей идеальной упруго-пластической диаграммой растяжения материала, позволяет найти только величину ее предельной нагрузки. Причем для этого можно воспользоваться известным решением для гибких нитей (3.75), положив в нем $H = H_{пр}$.

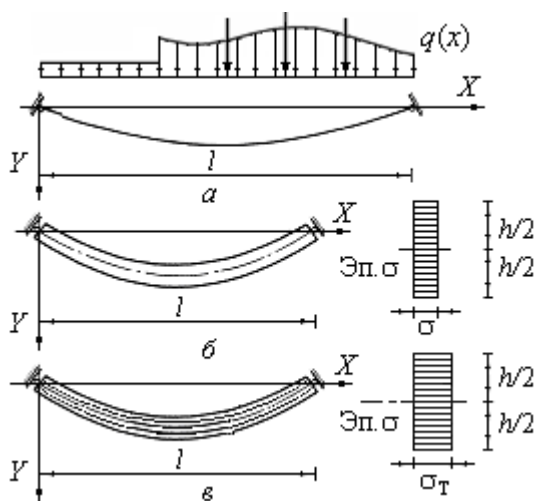


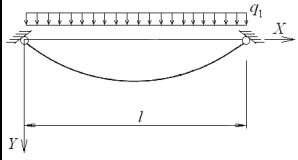
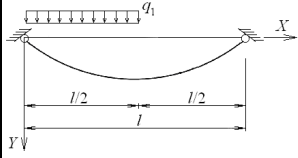
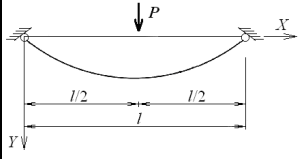
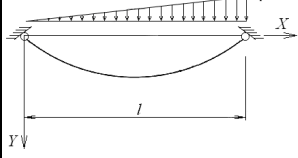
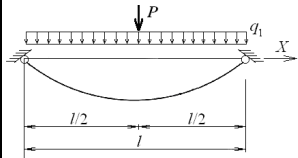
Рис. 6.3. Схема работы упруго-пластической гибкой нити:
a – расчетная схема нити; *б* – упругая фаза работы;
в – пластическая фаза работы

Соответствующие зависимости, характеризующие условие окончания первой и начала второй фазы работы, а также определяющие величину предельной нагрузки гибкой упруго-пластической нити, для некоторых наиболее распространенных типов нагрузок приведены в табл. 6.1.

§ 6.3. Гибкие нити из идеального упруго-пластического материала с упрочнением

Учет упрочнения в задачах пластического деформирования позволяет не только лучше учесть особенности действительного характера работы материала, но и одновременно дает возможность выявить неучтенные ранее запасы прочности конструкции. В целом ряде практических случаев расчета эти запасы могут быть достаточно велики, поэтому такое уточнение диаграммы σ - ϵ приводит к более достоверным решениям по сравнению с теми, которые получаются при использовании идеальной упруго-пластической диаграммы растяжения.

Таблица 6.1

Схема нагружения	Вид зависимости для условия окончания первой и начала второй фазы работы гибкой упруго-пластической нити	Величина предельной нагрузки гибкой упруго-пластической нити
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$q_{1,\text{пр}} = \left[\frac{24m^3}{\omega l^2} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$q_{1,\text{пр}} = \left[\frac{384m^3}{5\omega l^2} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$P_{\text{пр}} = \left[\frac{8m^3}{\omega} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$q_{1,\text{пр}} = \left[\frac{90m^3}{\omega l^2} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$P_{\text{пр}} = \left[\frac{8m^3}{\omega} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) - \frac{q_1^2 l^2}{12} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{q_1 l}{2}$

Примечание. В таблице принято, что в случае действия начальной и дополнительной нагрузок разного типа величина предельной нагрузки приведена для дополнительной нагрузки.

Работа гибких нитей из упрочняющегося материала может быть рассмотрена с использованием допущений и предпосылок, принятых при изучении работы идеально-пластических нитей.

Также отметим, что общая последовательность построения решения для нитей из упрочняющегося материала практически не отличается от аналогичных задач для упруго-пластических нитей. Однако решение, как правило, получается более сложным. В связи с этим рассмотрим здесь наиболее простую, после идеально-пластической, аппроксимацию диаграммы работы материала, а именно примем материал упрочняющимся линейно (рис. 6.1, з).

6.3.1. Работа поперечного сечения нити. Рассмотрим работу поперечного сечения гибкой нити, считая материал упруго-пластическим с линейным упрочнением. Для этого обратимся к составленному ранее условию равновесия (6.1) и рассмотрим на его основе работу произвольного поперечного сечения гибкой нити (рис. 6.4, а). Теперь вспоминаем, что входящие в уравнение (6.1) напряжение σ и деформация ε связаны известным условием [6]

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon && \text{при } \sigma \leq \sigma_T, \\ \sigma &= \sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E}\right) + E_0\varepsilon && \text{при } \sigma \geq \sigma_T, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где E_0 – модуль упрочнения.

В данном случае необходимо рассмотреть две стадии работы сечения: первую – упругую, и вторую – пластическую. Заметим, что работа поперечного сечения нити в первой стадии будет одинакова независимо от свойств материала в пластической области, и была рассмотрена ранее. И поэтому здесь только напомним, что выражение, характеризующее условие окончания упругой стадии работы поперечного сечения, имеет вид (6.4).

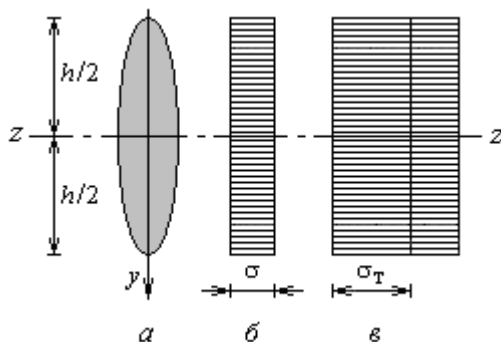


Рис. 6.4. Работа поперечного сечения гибкой нити из упруго-пластического материала с линейным упрочнением:

а – поперечное сечение нити; б – эпюра напряжений в упругой стадии работы; в – эпюра напряжений в пластической стадии работы

Перейдем теперь к рассмотрению второй стадии работы поперечного сечения нити, когда все сечение охвачено пластическими деформациями (рис. 6.4, *в*). Подставляя условие (6.5) в уравнение равновесия (6.1), определим соотношение для относительного удлинения оси нити ε_0 во второй стадии работы в следующем виде:

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{E}{E_0} \left(\frac{H}{H_{пр}} - 1 \right) + 1. \quad (6.6)$$

Таким образом, рассмотрены все возможные стадии работы поперечного сечения гибкой нити из упруго-пластического материала с линейным упрочнением, а также получены зависимости, связывающие действующий в нити распор с относительным удлинением ее оси.

6.3.2. Вывод расчетных зависимостей. Используем полученные в предыдущем разделе результаты для вывода расчетных зависимостей уточненной теории деформирования упруго-пластических гибких нитей с линейным упрочнением материала. Предположим, что гибкая нить с поперечным сечением F , а также модулями упругости E и линейного упрочнения E_0 , нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия (рис. 6.5, *а*). Выберем в качестве независимой переменной жесткость нити на растяжение в упругой $\omega = EF$ и в пластической $\omega_0 = E_0F$ фазах работы, а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Поведение гибкой нити в первой фазе деформирования (рис. 6.5, *б*), когда все ее поперечные сечения работают в упругой стадии, было подробно рассмотрено ранее в главе 3. Поэтому здесь на этом останавливаться не будем, а только напомним, что упругая фаза работы нити заканчивается, когда удовлетворяется условие (6.4) и величина распора достигает своей предельной величины.

По достижении внешней нагрузкой значения, определяемого выражением (6.4), начинается вторая – пластическая фаза деформирования, когда вся нить охватывается пластическими деформациями (рис. 6.5, *в*). Определим расчетные зависимости при работе гибкой нити в этой фазе деформирования. Для этого обратимся к принципу возможных перемещений.

В соответствии с этим принципом примем, что жесткость ω_0 получила очень малое, но конечное приращение своей величины, равное $\delta\omega_0$. Тогда распор H получит некоторое приращение δH , а нить переместится из своего положения равновесия на величину $\delta y(x)$. При этом соотношения, определяющие изогнутую ось нити $y(x)$, перемещения нити $\delta y(x)$ и работу внешних сил, т. е. нагрузки $q(x)$ на перемещениях $\delta y(x)$, по-прежнему будут иметь вид (3.13), (3.65) и (3.66). Заметим, что поскольку эти выражения получены с использованием только условий равновесия, то они являются справедливыми при любой диаграмме σ - ε .

Определим теперь работу внутренних сил. Во второй фазе работы нити удлинение ее бесконечно малого элемента ds можно представить следующим образом:

$$\delta ds = \left(\frac{T + \delta T - T_{\text{пр}}}{\omega_0 + \delta \omega_0} - \frac{T - T_{\text{пр}}}{\omega_0} \right) ds = \frac{\omega_0 \delta T - T \delta \omega_0 + T_{\text{пр}} \delta \omega_0}{\omega_0 (\omega_0 + \delta \omega_0)} ds, \quad (6.7)$$

где T – продольное усилие в нити, δT – приращение величины этого усилия, а $T_{\text{пр}}$ – предельное продольное усилие в нити.

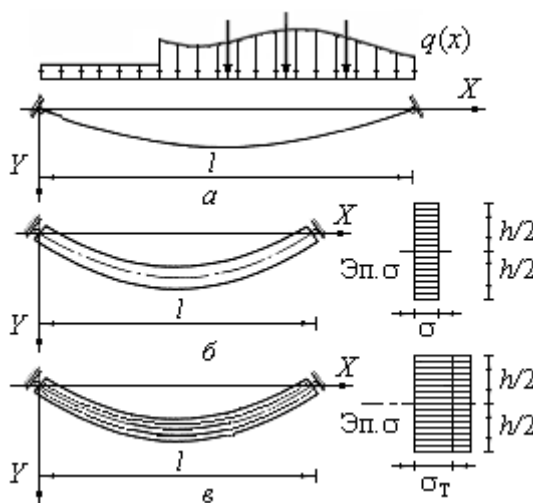


Рис. 6.5. Деформирование гибкой нити из упруго-пластического материала с линейным упрочнением:

a – расчетная схема нити; b – упругая фаза работы;

v – пластическая фаза работы с линейным упрочнением материала

Элементарная работа внутренних сил определится как произведение с обратным знаком удлинения δds на величину действующего в элементе усилия, равную $T + \delta T$, а полная работа – как интеграл этого произведения, распространенный на всю длину нити L :

$$U_2 = - \int_0^L \frac{(\omega_0 \delta T - T \delta \omega_0 + T_{\text{пр}} \delta \omega_0)(T + \delta T - T_{\text{пр}})}{\omega_0 (\omega_0 + \delta \omega_0)} ds. \quad (6.8)$$

Подставляя сюда значения

$$T = \frac{H}{\cos \alpha}, \quad T_{\text{пр}} = \frac{H_{\text{пр}}}{\cos \alpha}, \quad \delta T = \frac{\delta H}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad ds = \frac{dx}{\cos \alpha}, \quad (6.9)$$

где α – угол наклона касательной к нити по отношению к горизонту, получим

$$U_2 = - \frac{(\omega_0 \delta T - T \delta \omega_0 + T_{\text{пр}} \delta \omega_0)(T + \delta T - T_{\text{пр}})}{\omega_0 (\omega_0 + \delta \omega_0)} \int_0^l \frac{dx}{\cos^3 \alpha}. \quad (6.10)$$

Как следует из (3.71), значение интеграла в последнем соотношении для

пологих нитей с достаточной степенью точности можно принять равным lm^3 , где $1/m$ – среднее значение $\cos \alpha$, равное l/L . Тогда выражение для работы внутренних сил окончательно можно представить так:

$$U_2 = - \frac{(\omega_0 \delta H - H \delta \omega_0 + H_{\text{пр}} \delta \omega_0)(H + \delta H - H_{\text{пр}})lm^3}{\omega_0(\omega_0 + \delta \omega_0)}. \quad (6.11)$$

Согласно принципу возможных перемещений сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, т. е.

$$U_1 + U_2 = 0. \quad (6.12)$$

Подставляя (3.66) и (6.11) в выражение (6.12), переходя затем к пределу при $\delta \omega_0 \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, после некоторых преобразований придем к следующей дифференциальной зависимости:

$$\frac{d\omega_0}{dH} - \frac{\omega_0}{H - H_{\text{пр}}} - \frac{D\omega_0^2}{lm^3 H^2 (H - H_{\text{пр}})^2} = 0. \quad (6.13)$$

Полученная зависимость является одним из частных случаев дифференциального уравнения Бернулли, общий интеграл которого имеет вид

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{C}{H - H_{\text{пр}}} + \frac{D \left[H \ln H - H \ln (H - H_{\text{пр}}) - H_{\text{пр}} \right]}{lm^3 H H_{\text{пр}}^2 (H - H_{\text{пр}})}. \quad (6.14)$$

Значение произвольной постоянной интегрирования C можно найти, если учесть, что в случае, когда модуль линейного упрочнения E_0 равен модулю упругости E (что приводит также к равенству жесткостей ω_0 и ω), т. е. когда гибкая нить является упругой, величина распора H_1 может быть определена из уравнения (3.75). Подставляя затем значение C в выражение (6.14), придем к искомому решению, описывающему работу упруго-пластических гибких нитей с линейным упрочнением материала:

$$\begin{aligned} \frac{H - H_{\text{пр}}}{\omega_0} - \frac{H_1 - H_{\text{пр}}}{\omega} = & \frac{D}{lm^3 H_{\text{пр}}^2} \left[\frac{H \ln H - H \ln (H - H_{\text{пр}}) - H_{\text{пр}}}{H} - \right. \\ & \left. - \frac{H_1 \ln H_1 - H_1 \ln (H_1 - H_{\text{пр}}) - H_{\text{пр}}}{H_1} \right], \end{aligned} \quad (6.15)$$

причем величина m вычисляется здесь без учета упругих и пластических деформаций нити, т. е. по ее исходной геометрии.

Таким образом, полностью определено поведение упруго-пластической гибкой нити с линейным упрочнением материала и установлены зависимости для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах ее работы.

§ 6.4. Гибкие нити из идеального жестко-пластического материала

Всеобъемлющий учет пластических свойств материала позволяет получить наиболее точные данные о величине фактического запаса прочности конструкции. Известно, что располагая сведениями о поведении конструкции в упругой, и даже упруго-пластической стадии работы, не всегда удастся составить правильное представление о ее состоянии при действии нагрузок, превышающих расчетные. Поэтому развитие методов расчета, позволяющих правильно отобразить работу конструкции в области пластических деформаций, является актуальной задачей. Наиболее просто решить указанную задачу можно путем введения дополнительных допущений в предпосылки упруго-пластического расчета, а именно: в диаграмму напряжение-деформация путем ее дальнейшей схематизации. При наличии возможности полного отказа от учета упругой стадии работы материала может быть использована получившая в последнее время значительное применение диаграмма жестко-пластического тела (рис. 6.1, *а*). Еще более существенно схематизировать вид этой зависимости можно, если дополнительно принять, что материал является идеально пластическим (т. н. тело Мизеса). При этом для модуля упругости принимается бесконечное значение при переходе от кривой деформации с упругим участком к кривой деформации с одной лишь площадкой текучести. В этом случае тело остается совершенно недеформируемым, или иными словами жестким, пока напряженное состояние в нем не станет где-либо удовлетворять условию текучести. Таким образом, расчет конструкции, материал которой является идеальным жестко-пластическим, позволяет найти значение ее предельной нагрузки и одновременно получить представление о ее работе в предельном состоянии.

6.4.1. Работа поперечного сечения нити. Рассмотрим работу произвольного поперечного сечения гибкой жестко-пластической нити (рис. 6.6, *а*). Как и в предшествующем случае упруго-пластической нити определим вид зависимости между текущим значением распора и его предельной величиной, описывающей наступление в поперечном сечении нити предельного состояния. При этом общая последовательность вывода искомой зависимости будет практически аналогична той, которая представлена в § 6.2 для упруго-пластической нити. Единственное отличие непосредственно связано с различием в применяемых для упруго- и жестко-пластической нитей моделях материала, а именно: в наличии и отсутствии упругого участка на диаграммах напряжение-деформация. Таким образом, если действующий в гибкой нити распор не вызывает напряжений текучести, то поперечное сечение упруго-пластической нити, как это было показано в § 6.2, работает в упругой, а жестко-пластической нити – жесткой стадии, т. е. по определению является недеформируемым (рис. 6.6, *б*).

Жесткая стадия работы сечения заканчивается, когда распор в нити H достигнет своего предельного значения $H_{пр}$, а напряжения достигнут предела текучести σ_T . После этого в соответствии с принятой диаграммой растяжения материала их величина возрастать не будет.

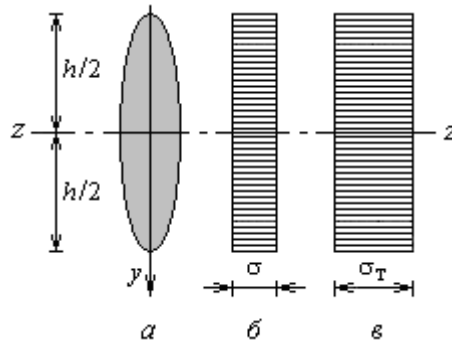


Рис. 6.6. Работа поперечного сечения гибкой жестко-пластической нити:
 а – поперечное сечение нити; б – эпюра напряжений в жесткой
 стадии работы; в – эпюра напряжений в предельном состоянии

Вполне очевидно, что условие появления пластических деформаций и, как следствие, реализации в поперечном сечении нити предельного состояния (рис. 6.6, в) можно установить с помощью уравнения равновесия (6.1), приравняв в нем $\sigma = \sigma_T$. В результате получим следующее выражение:

$$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0. \quad (6.16)$$

Сопоставляя условие появления пластических деформаций в поперечном сечении жестко-пластической нити (6.16) с аналогичным условием для упруго-пластической нити (6.4), нетрудно убедиться в абсолютной тождественности этих зависимостей. Последнее позволяет заключить, что появление в сечении гибкой нити пластических деформаций эквивалентно реализации в нем предельного состояния независимо от используемой модели материала. Из этого утверждения также вытекает, что реализация предельного состояния в любом произвольном поперечном сечении гибкой жестко-пластической (также как и упруго-пластической) нити приводит к распространению пластических деформаций по всей ее длине. Поэтому гибкая жестко-пластическая нить работает в следующей последовательности: при $\sigma < \sigma_T$ все поперечные сечения нити работают в жесткой стадии и являются недеформируемыми, а при $\sigma = \sigma_T$ – все они переходят в предельное состояние.

6.4.2. Основные зависимости расчета нитей из идеального жестко-пластического материала. Перейдем теперь к рассмотрению поведения гибкой нити, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = q_1 + q_2$ и находящейся в состоянии равновесия (рис. 6.7, а). Будем считать, что материал нити является идеальным жестко-пластическим.

Работа гибкой жестко-пластической нити в первой – жесткой фазе (рис. 6.7, б), когда нить является недеформируемой, подобна рассмотренной ранее в § 3.4 работе нерастяжимой нити. Поэтому здесь на этом останавливаться не будем.

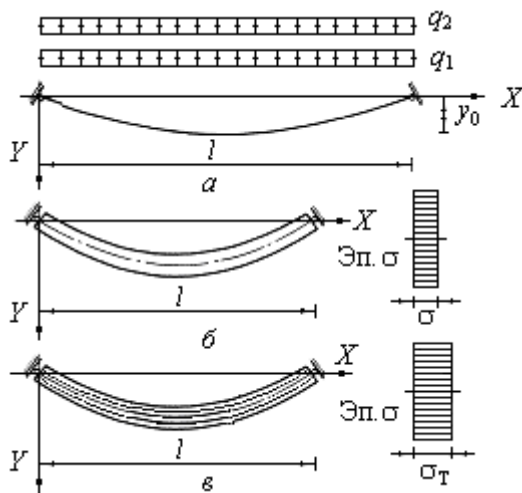


Рис. 6.7. Схема работы гибкой жестко-пластической нити:
a – расчетная схема нити; *б* – жесткая (недеформируемая) фаза работы;
в – пластическая фаза работы

Жесткая фаза работы нити заканчивается, когда распор в ней достигает значения, соответствующего появлению пластических деформаций. При этом должно удовлетворяться условие (6.16), которое, как уже было показано выше, является полностью идентичным ранее полученному условию появления пластических деформаций в упруго-пластической гибкой нити (6.4). Определив в соответствии с положениями теории нерастяжимых нитей распор и подставив его в соотношение (6.16), получим условие появления в нити пластических деформаций:

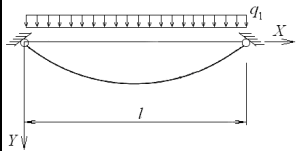
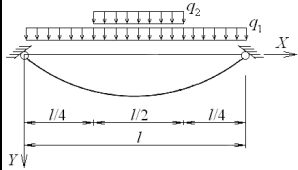
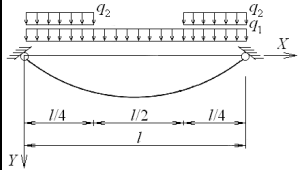
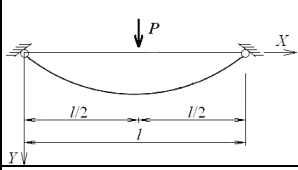
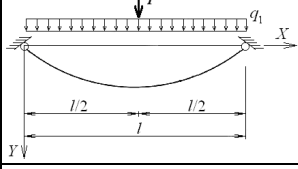
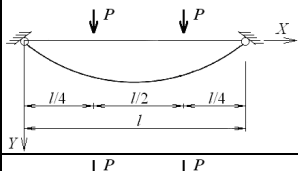
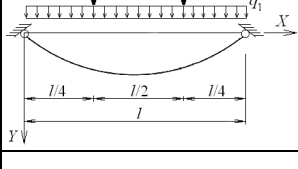
$$\frac{ql^2}{8y_0H_{пр}} - 1 = 0. \quad (6.17)$$

Когда внешняя нагрузка достигнет величины, удовлетворяющей условию (6.17), наступает вторая – пластическая фаза работы нити, когда возникшие в момент окончания первой фазы пластические деформации охватывают всю нить, тем самым реализовав в ней предельное состояние (рис. 6.7, *в*).

Зависимости, определяющие условия окончания первой и начала второй фазы работы гибкой жестко-пластической нити, а также величину ее предельной нагрузки для других типов нагрузок могут быть найдены аналогичным путем. Для некоторых наиболее распространенных типов нагрузок эти зависимости представлены в табл. 6.2.

Таким образом, полностью определено поведение гибкой жестко-пластической нити за пределом упругости и установлены зависимости для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах ее работы.

Таблица 6.2

Схема нагружения	Вид зависимости для условия окончания первой и начала второй фазы работы жестко-пластической нити	Величина предельной нагрузки жестко-пластической нити
	$\frac{q_1 l^2}{8 y_0 H_{\text{нп}}} - 1 = 0$	$q_{1, \text{нп}} = \frac{8 y_0 H_{\text{нп}}}{l^2}$
	$\frac{1}{y_0 H_{\text{нп}}} \left(\frac{q_1 l^2}{8} + \frac{3 q_2 l^2}{32} \right) - 1 = 0$	$q_{2, \text{нп}} = \frac{32}{3} \left(\frac{y_0 H_{\text{нп}}}{l^2} - \frac{q_1}{8} \right)$
	$\frac{4}{3 y_0 H_{\text{нп}}} \left(\frac{3 q_1 l^2}{32} + \frac{q_2 l^2}{32} \right) - 1 = 0$	$q_{2, \text{нп}} = 24 \left(\frac{y_0 H_{\text{нп}}}{l^2} - \frac{q_1}{8} \right)$
	$\frac{Pl}{4 y_0 H_{\text{нп}}} - 1 = 0$	$P_{\text{нп}} = \frac{4 y_0 H_{\text{нп}}}{l}$
	$\frac{1}{y_0 H_{\text{нп}}} \left(\frac{q_1 l^2}{8} + \frac{Pl}{4} \right) - 1 = 0$	$P_{\text{нп}} = \frac{4 y_0 H_{\text{нп}}}{l} - \frac{q_1 l}{2}$
	$\frac{Pl}{3 y_0 H_{\text{нп}}} - 1 = 0$	$P_{\text{нп}} = \frac{3 y_0 H_{\text{нп}}}{l}$
	$\frac{4}{3 y_0 H_{\text{нп}}} \left(\frac{3 q_1 l^2}{32} + \frac{Pl}{4} \right) - 1 = 0$	$P_{\text{нп}} = 3 \left(\frac{y_0 H_{\text{нп}}}{l} - \frac{q_1 l}{8} \right)$

Примечание. В таблице принято, что в случае действия начальной и дополнительной нагрузок разного типа величина предельной нагрузки приведена для дополнительной нагрузки.

§ 6.5. Гибкие нити из идеального жестко-пластического материала с упрочнением

6.5.1. Работа поперечного сечения нити. Как обычно начнем изложение с рассмотрения работы произвольного поперечного сечения гибкой нити, считая материал жестко-пластическим с линейным упрочнением (рис. 6.1, б). Вполне понятно, что при использовании данной модели работы материала напряжение σ и деформация ε связаны известным условием [6]

$$\sigma = \sigma_T \operatorname{sign} \varepsilon + E_0 \varepsilon, \quad (6.18)$$

где E_0 – модуль упрочнения.

Отметим, что указанное условие справедливо только в том случае, если величина напряжения σ превышает предел текучести материала σ_T ; в противном же случае (т. е. при $\sigma < \sigma_T$) развитие деформаций в жестко-пластическом материале по определению невозможно и $\varepsilon = 0$.

Обратимся теперь к составленному ранее условию равновесия (6.1) и рассмотрим на его основе работу произвольного поперечного сечения гибкой нити (рис. 6.8, а). В случае жестко-пластического материала с линейным упрочнением необходимо рассмотреть две стадии работы сечения: первую – жесткую (рис. 6.8, б) и вторую – пластическую, когда сечение находится в состоянии линейного упрочнения (рис. 6.8, в).

Работа поперечного сечения нити в первой – жесткой – стадии была рассмотрена ранее. Поэтому здесь только напомним, что соотношение, характеризующее условие появления пластических деформаций в произвольном поперечном сечении, имеет вид (6.16). При этом реализация предельного состояния в любом произвольном поперечном сечении упрочняющейся жестко-пластической гибкой нити приводит к распространению пластических деформаций по всей ее длине. Итак, значит, условие окончания жесткой стадии работы сечения является одновременно условием начала пластической стадии его работы.

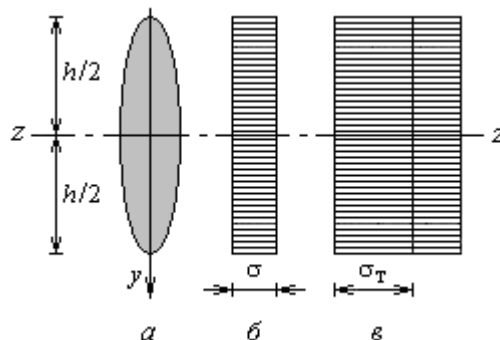


Рис. 6.8. Работа поперечного сечения гибкой нити из жестко-пластического материала с линейным упрочнением:

а – поперечное сечение нити; б – эпюра напряжений в жесткой стадии работы; в – эпюра напряжений в пластической стадии работы

Определим теперь вид зависимости для относительного удлинения оси нити во второй стадии работы поперечного сечения (рис. 6.8, в). Подставляя в уравнение равновесия (6.1) условие (6.18) эту зависимость, после интегрирования и несложных преобразований, представим в следующем виде:

$$\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{пр}} + 1 = 0. \quad (6.19)$$

Таким образом, рассмотрены все возможные стадии работы произвольного поперечного сечения гибкой нити из жестко-пластического материала с линейным упрочнением, а также получены зависимости, связывающие действующий в нити распор с относительным удлинением ее оси.

6.5.2. Вывод расчетных зависимостей. Используем полученные в предыдущем разделе результаты для вывода расчетных зависимостей уточненной теории деформирования гибких жестко-пластических нитей с линейным упрочнением материала в пластической фазе работы. Для этого применим принцип возможных перемещений.

Предположим теперь, что гибкая нить из жестко-пластического материала с линейным упрочнением с поперечным сечением F и модулем линейного упрочнения E_0 нагружена произвольной вертикальной нагрузкой $q(x)$ и находится в состоянии равновесия. Выберем в качестве независимой переменной жесткость нити на растяжение в пластической фазе работы $\omega_0 = E_0 F$, а в качестве искомой функции примем величину распора H .

Поведение гибкой нити в жесткой фазе будет одинаковым во всех расчетных случаях независимо от свойств материала в пластической области, что было изложено ранее и поэтому здесь не рассматривается. Жесткая фаза работы заканчивается, когда распор в нити достигнет значения, при котором появляются пластические деформации. Напомним, что для этого должно удовлетворяться условие (6.16). По достижении внешней нагрузкой значения, удовлетворяющего этому условию, наступает вторая – пластическая фаза работы, характеризующаяся тем, что материал нити работает с линейным упрочнением. Для дальнейшего решения задачи определим расчетные зависимости при деформировании гибкой нити во второй фазе ее работы.

Пусть жесткость ω_0 получила очень малое, но конечное приращение своей величины, равное $\delta\omega_0$. Тогда распор H получит некоторое приращение δH , а нить переместится из своего положения равновесия на величину $\delta y(x)$. Напомним, что в данном случае, как и ранее, при рассмотрении упруго-пластических гибких нитей с линейным упрочнением материала соотношения, определяющие изогнутую ось нити $y(x)$, перемещения нити $\delta y(x)$ и работу внешних сил, т. е. нагрузки $q(x)$ на перемещениях $\delta y(x)$, по-прежнему будут иметь вид (3.13), (3.65) и (3.66). Также вспомним, что поскольку эти выражения получены с использованием только условий равновесия, то они справедливы при любой диаграмме σ - ε .

Но оказывается, что в данном случае, в связи с идентичностью поведения гибких упруго- и жестко-пластических нитей в пластической фазе при работе материала с линейным упрочнением (из-за тождественности вторых участков диаграммы напряжение-деформация, в чем легко убедиться путем сравнения рис. 6.1, б и рис. 6.1, з), совпадения на этом не исчерпываются. А поэтому здесь важно обратить внимание на то, что для указанных типов нитей совпадает не только последовательность вывода разрешающих уравнений и все остальные промежуточные решения и соотношения, полученные при установлении искомой дифференциальной зависимости (6.13), но также и ее общий интеграл (6.14).

Отличие же между окончательным решением задачи для гибких упрочняющихся упруго- и жестко-пластических нитей при работе материала с линейным упрочнением, заключается только в способе определения входящей в общее решение (6.14) произвольной постоянной интегрирования C . Сообразно сказанному, для данной задачи значение произвольной постоянной интегрирования можно найти, если принять, что в случае, когда гибкая упрочняющаяся жестко-пластическая нить нерастяжима, т. е. когда жесткость $\omega_0 = \infty$, величина распора H_1 определяется выражением (3.23) или (3.25). Если использовать выражение (3.23) и подставить затем значение C в выражение (6.14), то получим искомое решение, описывающее работу гибких жестко-пластических нитей с линейным упрочнением материала, в следующем виде:

$$H - H_{\text{пр}} = \frac{D\omega_0}{lm^3 H_{\text{пр}}^2} \left[\frac{H \ln H - H \ln (H - H_{\text{пр}}) - H_{\text{пр}}}{H} - \frac{H_1 \ln H_1 - H_1 \ln (H_1 - H_{\text{пр}}) - H_{\text{пр}}}{H_1} \right], \quad (6.20)$$

причем величина m вычисляется здесь без учета упругих и пластических деформаций нити, т. е. по ее исходной геометрии.

Таким образом, полностью определено поведение гибкой жестко-пластической нити с линейным упрочнением материала и установлены зависимости для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах ее работы.

§ 6.6. Оценка влияния моделей работы материала на поведение гибких нитей. Качество и близость решений. Пределы применимости

Как это хорошо известно, модели идеального упруго-пластического материала без учета и с учетом его упрочнения широко используются при построении различных теорий расчета балок, стержней и нитей. Естественно (о чем сказано не только в монографиях [6, 59, 109, 120, 131, 175], но и было показано раньше) такие аппроксимации в целом вполне удовлетворительно отражают работу многих реальных материалов. Кроме того эти аппроксима-

ции позволяют более полно по сравнению с упругой стадией деформирования (особенно при применении модели упрочняющегося упруго-пластического материала) проанализировать поведение и определить дополнительные резервы прочности конструкции.

Заметим также, что в упомянутых публикациях представлены весьма подробные результаты экспериментальных и теоретических исследований в части области применения указанных моделей работы материала и вносимой в результаты расчетов величины погрешности. Одновременно отмечен и тот факт, что использование этих моделей обеспечивает для параметров напряженно-деформированного состояния рассчитываемых конструкций весьма точные результаты. Только поэтому в данном параграфе оценка влияния моделей идеального упруго-пластического материала на работу гибких нитей не производилась.

Применение же диаграмм жестко-пластического материала без учета и с учетом его упрочнения связано с целым рядом затруднений. Во-первых, данная схематизация диаграмм приближенно отображает свойства реальных материалов. Именно поэтому решения, построенные по этим диаграммам, направлены на определение предельных состояний конструкции и получение предельных величин действующих нагрузок и, как правило, не совпадают с решениями таких же упруго-пластических задач при $E \rightarrow \infty$, поскольку приводят к верхней оценке величины предельной нагрузки, а решения упруго-пластических задач – к нижней оценке. Во-вторых, отсутствуют теоремы, которые позволили бы оценить близость решений упруго-пластических и жестко-пластических задач. В-третьих, напряжения в недеформируемых частях конструкции должны иметь приемлемый характер при продолжении их из пластической зоны и не достигать предела текучести. Однако это условие трудно проверить, т. к. в недеформируемых частях распределение напряжений согласно принятым диаграммам работы материала является неопределенным. И, наконец, четвертое, самое главное – результаты, полученные с использованием диаграмм жестко-пластического материала, являются надежными лишь в области больших пластических деформаций, когда их упругой составляющей по сравнению с пластической можно пренебречь.

Резюмируя изложенное, отметим, что все перечисленные сложности использования диаграмм жестко-пластического материала объясняют на первый взгляд такой неожиданный факт, как практически полное отсутствие не только количественных, но даже качественных исследований сходимости решений рассматриваемых задач. Между тем этот вопрос применительно к жестко-пластической гибкой нити сам по себе представляет не только практический, но и теоретический интерес. При этом необходимо иметь в виду, что в отличие от случая жестко-пластической гибкой нити без учета упрочнения материала, в котором устанавливается только величина предельной нагрузки, повышенный интерес вызывает исследование сходимости решения задачи для упрочняющейся жестко-пластической гибкой нити, поскольку именно в этом случае можно не только дополнительно отследить поведение

нити на всем диапазоне изменения нагрузки, но и выполнить сопоставление с решением аналогичной задачи для упрочняющейся упруго-пластической гибкой нити.

Таким образом, оценка сходимости представленных в параграфах 6.3 и 6.5 разрешающих соотношений и близости полученных численных решений была проведена путем сопоставления результатов решения задачи для упрочняющейся упруго- и жестко-пластической гибкой нити. Для этого исследовано напряженно-деформированное состояние гибкой нити пролетом $l = 60$ м с начальной стрелой провисания $f_0 = 4$ м, что соответствует 1/15 пролета, загруженной равномерно распределенной нагрузкой на всем пролете. Кроме того, нить принята круглого поперечного сечения, площадь которого составляет $F = 1,2 \cdot 10^{-3}$ м². Рассматривалась работа гибких нитей из идеального упруго- и жестко-пластического материала с упрочнением. Модуль упругости при работе материала в упругой стадии равен $E = 1,67 \cdot 10^5$ МПа, а величина модуля линейного упрочнения E_0 при работе материала за пределом упругости варьировалась в пределах 1/10 – 1/40 модуля упругости. Предел текучести материала принят равным $\sigma_T = 335$ МПа.

Однако, прежде чем непосредственно приступить к исследованию сходимости и близости полученных численных решений, обратим внимание на сами эти решения с целью выявления и уточнения особенностей поведения упрочняющейся жестко-пластической гибкой нити под нагрузкой. Для этого с помощью представленных в параграфах 6.3 и 6.5 определяющих выражений и расчетных зависимостей вычислены приведенные значения перемещений в середине пролета нити и распора в ней при различных отношениях модулей упрочнения и упругости E_0/E для ряда значений безразмерного параметра интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q^2/M_{пр}$ ($M_{пр} = \sigma_T F d / 2$, где d – диаметр поперечного сечения нити), которые даны в таблицах 6.3 и 6.4, а их графики отображены на рис. 6.9 и 6.10. Кроме того, в таблицах указано относительное расхождение значений параметров напряженно-деформированного состояния нити: перемещений Δ_v и распора Δ_H , характеризующее близость полученных решений между результатами для упрочняющейся упруго- и жестко-пластической гибкой нити (причем в таблицах приняты следующие обозначения: результаты для упруго-пластической гибкой нити имеют индекс “уп”, а для жестко-пластической – “жп”). Эти решения иллюстрируют рис. 6.11 и 6.12, где представлены зависимости между параметром близости решений и величиной нагрузки.

Из приведенных на рис. 6.9 кривых видно, что модель работы материала заметно влияет на поведение нити под нагрузкой. Так, при прочих равных условиях, гибкая нить из упрочняющегося жестко-пластического материала менее деформативна, чем из упруго-пластического с линейным упрочнением. При этом до появления пластических деформаций в полном соответствии с принятой диаграммой работы материала жестко-пластическая нить остается недеформируемой в отличие от упруго-пластической, перемещения которой с увеличением нагрузки постепенно нарастают.

Таблица 6.3

$\frac{ql^2}{M_{\text{пр}}} \cdot 10^3$	$\frac{E_0}{E}$	$\frac{v_{\text{уп}} H_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}}$	$\frac{v_{\text{жп}} H_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}}$	$\Delta_v = \frac{v_{\text{уп}} - v_{\text{жп}}}{v_{\text{уп}}} \cdot 100\%$
0	1/10	0	0	0
	1/20			
	1/40			
2	1/10	-21,0	0	100
	1/20			
	1/40			
4	1/10	-40,6	0	100
	1/20			
	1/40			
6	1/10	-59,0	0	100
	1/20			
	1/40			
6,55*	1/10	-63,7	0	100
	1/20			
	1/40			
7,09**	1/10	-68,4	-4,6	93,3
	1/20		-8,5	87,6
	1/40		-14,5	78,8
8	1/10	-82,9	-22,5	72,9
	1/20	-88,7	-37,5	57,7
	1/40	-97,0	-57,6	40,6
10	1/10	-136,2	-82,2	39,6
	1/20	-167,0	-125,6	24,8
	1/40	-206,3	-176,7	14,3
12	1/10	-196,7	-146,6	25,5
	1/20	-252,2	-214,7	14,9
	1/40	-318,5	-292,2	8,3

Примечание. Величина предельной нагрузки для жестко-пластической гибкой нити обозначена одной звездочкой (*), а для упруго-пластической гибкой нити – двумя звездочками (**).

Таблица 6.4

$\frac{ql^2}{M_{\text{пр}}} \cdot 10^3$	$\frac{E_0}{E}$	$\frac{H_{\text{уп}}}{H_{\text{пр}}}$	$\frac{H_{\text{жп}}}{H_{\text{пр}}}$	$\Delta_H = \frac{H_{\text{уп}} - H_{\text{жп}}}{H_{\text{уп}}} \cdot 100\%$
0	1/10	0	0	0
	1/20			
	1/40			
2	1/10	0,298	0,306	-2,7
	1/20			
	1/40			
4	1/10	0,582	0,611	-5,0
	1/20			
	1/40			
6	1/10	0,855	0,917	-7,3
	1/20			
	1/40			
6,55*	1/10	0,928	1,0	-7,8
	1/20			
	1/40			
7,09**	1/10	1,0	1,078	-7,8
	1/20		1,073	-7,3
	1/40		1,066	-6,6
8	1/10	1,110	1,190	-7,2
	1/20	1,103	1,168	-5,9
	1/40	1,092	1,141	-4,5
10	1/10	1,310	1,389	-6,0
	1/20	1,269	1,325	-4,4
	1/40	1,221	1,257	-2,9
12	1/10	1,478	1,555	-5,2
	1/20	1,401	1,452	-3,6
	1/40	1,320	1,351	-2,3

Примечание. Величина предельной нагрузки для жестко-пластической гибкой нити обозначена одной звездочкой (*), а для упруго-пластической гибкой нити – двумя звездочками (**).

Как следует из анализа полученных результатов и сопоставления кривых на рис. 6.9, после перехода нити в пластическую с упрочнением фазу работы ее перемещения в независимости от модели работы материала начинают резко возрастать по кривой, очертание которой близко к гиперболическому виду. При этом чем меньше модуль линейного упрочнения материала E_0 , тем быстрее увеличиваются перемещения. Необходимо также отметить, что на всем диапазоне изменения нагрузки перемещения всегда больше у упрочняющейся упруго-пластической нити по сравнению с жестко-пластической, однако с увеличением величины нагрузки кривые перемещений, соответствующие пластической с упрочнением фазе работы нити, все более сближаются. Причем при дальнейшем увеличении нагрузки приращение перемещений уменьшается.

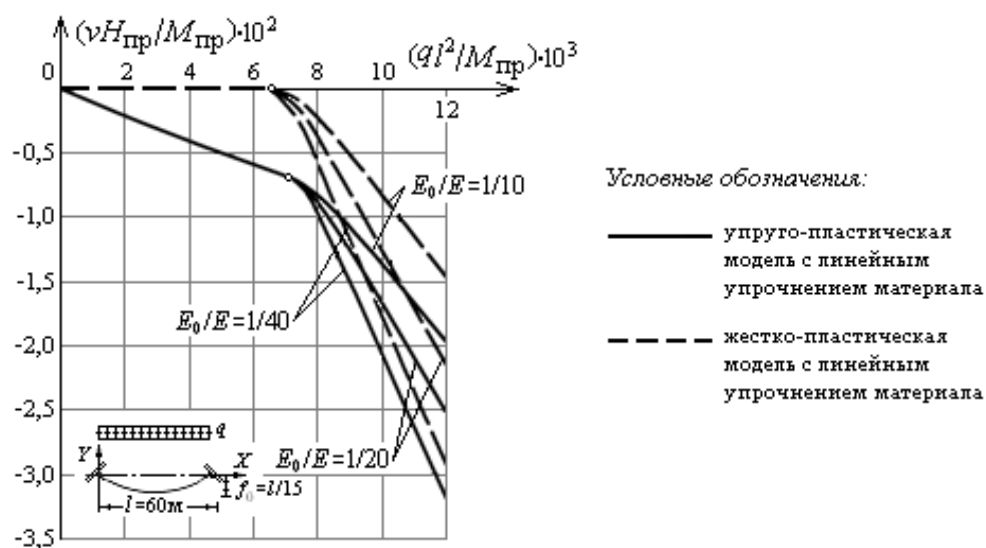


Рис. 6.9. Зависимость между перемещениями гибкой нити в середине пролета от интенсивности равномерно распределенной нагрузки при различных моделях работы материала: $\circ$ — изменение фаз работы нити

Из рис. 6.10 видно, что до появления пластических деформаций в гибкой нити независимо от диаграммы работы материала зависимость распора от интенсивности действующей нагрузки близка к линейной. Когда же распор H достигает своего предельного значения $H_{пр}$ и нить становится полностью пластичной, происходит излом кривых и распор в нити с увеличением величины нагрузки начинает возрастать по параболической зависимости для обоих рассматриваемых видов материалов. При этом, чем меньше значение модуля упрочнения материала E_0 , тем медленнее увеличивается распор в нити и тем более пологой является соответствующая кривая. Здесь также следует особо подчеркнуть, что при одинаковой величине нагрузки распор в

упрочняющейся жестко-пластической гибкой нити имеет большее значение, чем в упруго-пластической с линейным упрочнением. Данный вывод хорошо согласуется с отмеченным ранее фактом, согласно которому использование в расчете диаграмм жестко-пластического материала приводит к верхней оценке не только предельных величин действующих нагрузок, но и значений внутренних усилий.

Что же касается близости полученных численных решений при определении перемещений и распора в упрочняющейся упруго- и жестко-пластической гибкой нити (величина которой приведена в таблицах 6.3 и 6.4 и отображена в виде кривой «параметр близости – нагрузка» на рис. 6.11 и 6.12) при различных отношениях модулей упрочнения и упругости E_0/E , то можно отметить следующее.

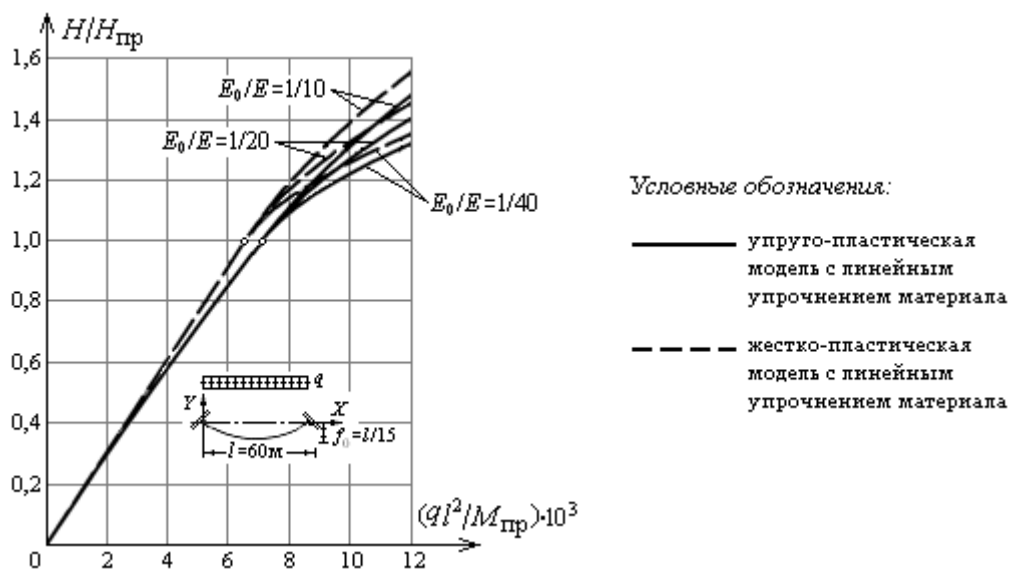


Рис. 6.10. Зависимость между распором в гибкой нити от интенсивности равномерно распределенной нагрузки при различных моделях работы материала:
○ – изменение фаз работы нити

Примечательно, что величина параметра близости решений при определении перемещений Δ_v для первых фаз работы упруго- и жестко-пластической гибкой нити имеет на первый взгляд парадоксально большое расхождение в 100%. А поэтому сразу возникает вопрос: в чем же причина такого расхождения? Впрочем, ответ на этот вопрос является абсолютно ожидаемым, поскольку вытекает из особенностей используемых в этих случаях диаграмм работы материала нити, начальные участки которых имеют противоположный с физической точки зрения смысл. Ведь если здесь обратиться к рис. 6.1, то можно увидеть, что первый участок диаграммы упруго-пласти-

ческого материала является упругим, что приводит к перемещениям нити под нагрузкой, а в диаграмме жестко-пластического материала – жестким, что обеспечивает недеформируемость нити.

Как видно из представленных на рис. 6.11 графиков, кривые Δ_v , после достижения нагрузкой своей предельной величины и перехода нити в пластическую с упрочнением фазу работы, при дальнейшем увеличении нагрузки асимптотически стремятся к нулю независимо от отношения модулей упрочнения и упругости E_0/E . Причем каждая из этих кривых на достаточно узком промежутке $6,55 \cdot 10^3 \leq ql^2/M_{пр} \leq 10,0 \cdot 10^3$ имеет круто падающий участок (в пределах которого решения сближаются от 100% до 14,3 – 39,6% в зависимости от величины отношения E_0/E), переходящий затем в пологую бесконечную ветвь с асимптотой $\Delta_v = 0$.

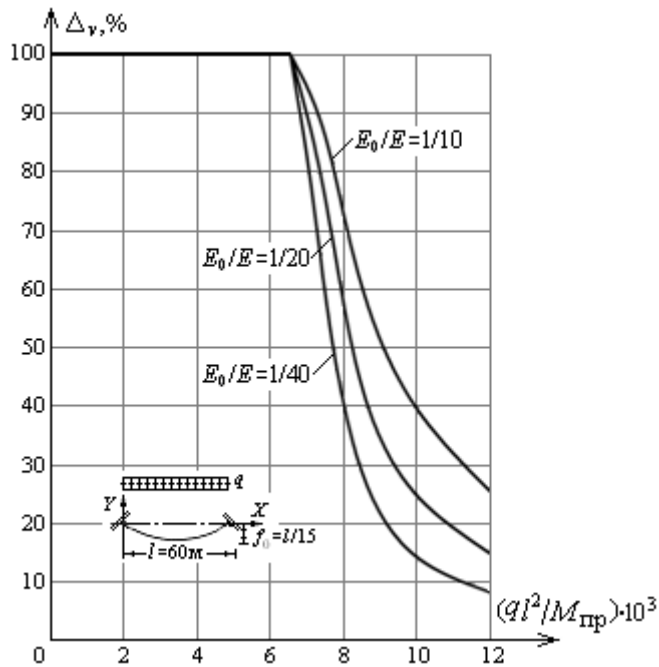


Рис. 6.11. Зависимость между параметром близости решений при определении перемещений в упрочняющейся упруго- и жестко-пластической гибкой нити от интенсивности равномерно распределенной нагрузки при различном E_0/E

Здесь необходимо обратить внимание также на такой интересный факт, что зависимость $E_0/E = f(\Delta_v)$ носит почти линейный характер. Подтверждением сказанному является то, что, например, при значении безразмерного параметра нагрузки $ql^2/M_{пр} = 12 \cdot 10^3$ уменьшение отношения E_0/E в два раза, с $1/10$ до $1/20$, приводит к сближению решений в 1,71 раза. Дальнейшее же уменьшение отношения E_0/E в два раза, с $1/20$ до $1/40$, приводит к сближе-

нию решений в 1,79 раза. Таким образом, отмеченная закономерность подтверждает тот непреложный факт, что при больших величинах нагрузки, превышающих ее предельное значение в десять и более раз, использование как упруго-, так и жестко-пластической с упрочнением модели работы материала нити позволяет получать практически одинаковые значения перемещений.

Что же касается величины параметра близости решений при определении распора Δ_H , то здесь наблюдается во многом отличная от рассмотренного ранее случая закономерность (рис. 6.12).

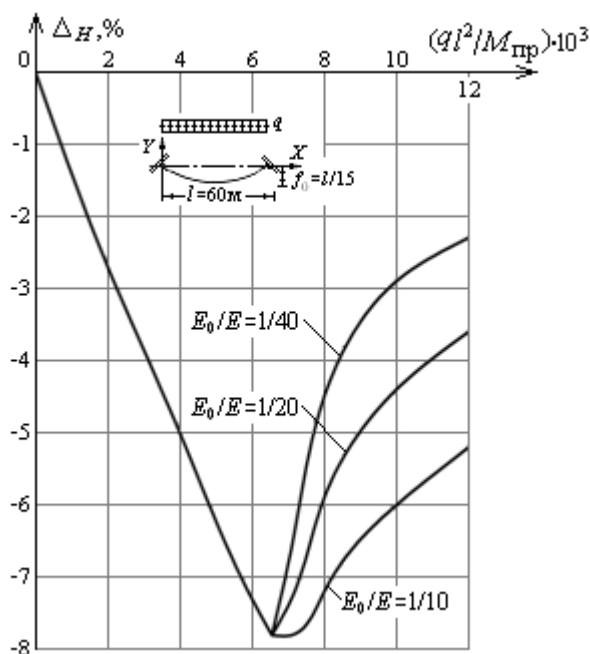


Рис. 6.12. Зависимость между параметром близости решений при определении распора в упрочняющейся упруго- и жестко-пластической гибкой нити от интенсивности равномерно распределенной нагрузки при различном E_0/E

В немногих словах объяснение этого отличия может быть охарактеризовано тем, что жестко-пластическая гибкая нить в пределах начального участка диаграммы работы материала является недеформируемой (отсутствуют перемещения), но напряженной, т. е. воспринимает распор, возникающий одновременно с приложением к нити нагрузки. При этом значение распора определяется из выражений (3.23) или (3.25), полученных для нерастяжимой нити с использованием условий равновесия. И именно поэтому даже для первых фаз работы упруго- и жестко-пластической гибкой нити расхождение решений есть величина достаточно малая, причем даже ее максимальное значение достигает всего 7,8 % при действии на нить предельной

нагрузки.

В дальнейшем, также как и в рассмотренном ранее случае для Δ_v , с ростом нагрузки кривые Δ_H асимптотически стремятся к нулю независимо от отношения модулей упрочнения и упругости E_0/E . Причем каждая из этих кривых на уже упоминавшемся ранее достаточно узком промежутке $6,55 \cdot 10^3 \leq ql^2/M_{\text{пр}} \leq 10,0 \cdot 10^3$ имеет круто падающий участок (в пределах которого решения сближаются от 7,8% до 2,9 – 6,0% в зависимости от величины отношения E_0/E), который затем переходит в пологую бесконечную ветвь с асимптотой $\Delta_H = 0$.

Следует заметить, что зависимость $E_0/E = f(\Delta_H)$ здесь также носит почти линейный характер. Так, например, при значении безразмерного параметра нагрузки $ql^2/M_{\text{пр}} = 12 \cdot 10^3$ уменьшение отношения E_0/E в два раза, с 1/10 до 1/20, приводит к сближению решений в 1,44 раза. Дальнейшее же уменьшение отношения E_0/E в два раза, с 1/20 до 1/40, приводит к сближению решений в 1,56 раза.

Резюмируя изложенное применительно к пределам применимости решающих соотношений для упрочняющихся упруго- и жестко-пластических гибких нитей, можно сделать следующее заключение. Если величина действующей нагрузки лежит в пределах $1 \leq q/q_{\text{пр}} \leq 10$, то для получения приемлемых по точности решений для обоих типов нитей необходимо использовать разные диаграммы работы материала. В случае же превышения действующей нагрузкой десятикратного значения предельной нагрузки нити, т. е. если $q/q_{\text{пр}} > 10$, искомая точность решения может быть достигнута путем применения любой модели работы упрочняющегося материала (как упруго-пластической, так и жестко-пластической) в связи с незначительным отличием значений параметров (или, иными словами, близостью результатов) напряженно-деформированного состояния гибкой нити.

ГЛАВА 7

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 7.1. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального упруго-пластического материала

Начнем рассмотрение с общего случая напряженно-деформированного состояния упруго-пластической нити конечной жесткости с поперечным сечением идеального профиля* (рис. 7.1, *a*). Как показано в работах [8, 38, 87, 164], использование поперечного сечения нити такого профиля несколько облегчает решение задачи и относительно упрощает расчетные зависимости. Однако принципиальные изменения в соотношения при этом не вносятся, что позволяет на данном примере показать последовательность решения и вид разрешающих уравнений, соответствующих предлагаемой теории расчета.

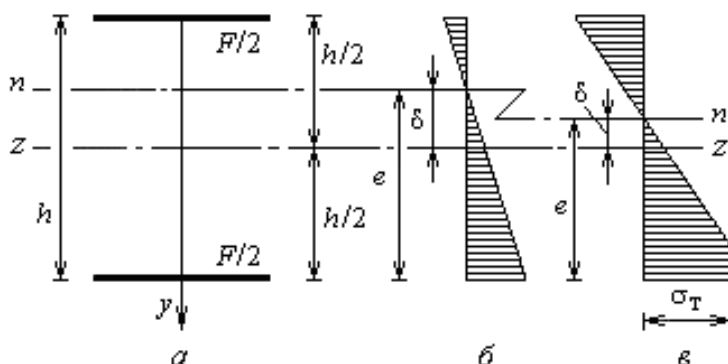


Рис. 7.1. Работа идеального профиля
упруго-пластической нити конечной жесткости:
a – сечение профиля нити; *б*, *в* – эпюры напряжений
в двух стадиях работы поперечного сечения нити

Поведение поперечного сечения нити конечной жесткости на всех стадиях работы материала характеризуется зависимостью между распором, изгибающим моментом и кривизной нити. Для ее вывода спроектируем действующие в плоскости сечения элементарные силы на горизонтальную ось z - z и составим сумму моментов этих сил относительно нейтральной оси n - n :

* Идеальным называется абстрактный профиль, все элементы которого работают в совершенно одинаковых условиях. В данном случае под идеальным понимается профиль, состоящий из двух одинаковых, имеющих суммарную площадь F , тонких поясов, которые отстоят один от другого на расстоянии h .

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma dF &= H, \\ \int_F \sigma y dF &= M_z + H\delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Входящее в эти зависимости нормальное напряжение σ является известной функцией относительного удлинения ϵ , вид которой устанавливается диаграммой растяжения материала. Однако в соответствии с гипотезой плоских сечений напряжения в волокне материала можно также представить как функцию кривизны оси нити k и расстояния y от нейтральной оси до рассматриваемого волокна. Записывая далее площадь элемента сечения dF в виде $dF = b(y)dy$, где $b(y)$ – ширина профиля нити на расстоянии y от оси $n-n$, преобразуем равенства (7.1) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \sigma(ky)b(y)dy &= H, \\ \int_{y_1}^{y_2} \sigma(ky)b(y)ydy &= M_z + H\delta, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

пределы интегрирования в которых равны $y_1 = -(h - e)$, $y_2 = e$.

Для нити идеального профиля (рис. 7.1, а) имеем:

$$\left. \begin{aligned} b(y) &= 0 \quad \text{при } (h - e) < y < e, \\ b(y) &= \frac{F}{2} \frac{1}{dy} \quad \text{при } y = -(h - e), y = e. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Подставляя указанные условия в уравнения равновесия (7.2), получим:

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma[-k(h - e)] + \sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= H, \\ \{-(h - e)\sigma[-k(h - e)] + e\sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Закон изменения входящего в последние соотношения нормального напряжения σ в рассматриваемом случае идеального упруго-пластического материала можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= Eky \quad \text{при } |y| \leq \frac{\sigma_T}{Ek}, \\ \sigma &= \sigma_T \text{sign } y \quad \text{при } |y| \geq \frac{\sigma_T}{Ek}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

где $\text{sign } y = 1$ при $y > 0$ и $\text{sign } y = -1$ при $y < 0$.

Если действующие в нити конечной жесткости усилия не вызывают ни в одном элементе поперечного сечения напряжений текучести, то сечение работает в упругой стадии (рис. 7.1, б). Тогда, подставляя первое выражение из (7.5) в уравнения равновесия (7.4), получим:

$$\left. \begin{aligned} [-Ek(h-e) + Eke] \frac{F}{2} &= H, \\ [Ek(h-e)^2 + Eke^2] \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Учитывая, что параметр e можно записать в виде

$$e = \frac{h}{2} + \delta, \quad (7.7)$$

а δ выразить известной формулой [16, 88]

$$\delta = \frac{\varepsilon_0}{k}, \quad (7.8)$$

где ε_0 – относительное удлинение оси нити, после некоторых преобразований формул (7.6) получим два уравнения, определяющие соответственно кривизну и относительное удлинение оси нити:

$$\left. \begin{aligned} \frac{EI k}{M_{\text{пр}}} &= \frac{M_z}{M_{\text{пр}}}, \\ \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} &= \frac{H}{H_{\text{пр}}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Здесь принято, что $I = Fh^2/4$ – момент инерции, $M_{\text{пр}} = \sigma_T Fh/2$ – предельный изгибающий момент и $H_{\text{пр}} = \sigma_T F$ – предельный распор нити идеального профиля.

Упругая стадия работы профиля закончится, когда напряжения в нижнем (наиболее удаленном от нейтральной оси) волокне достигнут предела текучести. После этого в соответствии с принятой диаграммой растяжения материала их величина возрастать не будет. Поэтому при дальнейшем увеличении усилий в нити в ее поперечном сечении наступает вторая – упруго-пластическая стадия работы, когда в нижнем волокне появляется и по мере роста изгибающих моментов и распора утолщается пластический слой.

Само собой разумеется, что условие появления первых пластических деформаций можно определить с помощью первого выражения из (7.5), устанавливающего распределение напряжений по сечению в упругой области. Если положить в нем $y = e$ и $\sigma = \sigma_T$, то получим:

$$Eke = \sigma_T, \quad (7.10)$$

откуда после исключения величин e и k и использования формул (7.7), (7.8) и первого выражения из (7.9) условие появления первых пластических деформаций приводится к виду

$$\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0. \quad (7.11)$$

По достижении внешней нагрузкой величины, при которой начинает

выполняться последнее равенство, начинается вторая – упруго-пластическая стадия деформирования, когда в поперечном сечении развивается область, охваченная пластическими деформациями (рис. 7.1, в). Тогда, подставив формулы (7.5) в уравнения равновесия (7.4), найдем:

$$\left. \begin{aligned} [-Ek(h-e) + \sigma_T] \frac{F}{2} &= H, \\ [Ek(h-e)^2 + \sigma_T e] \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Преобразовывая далее равенства (7.12) аналогично соотношениям (7.6), придем к зависимостям, характеризующим кривизну и относительное удлинение оси нити:

$$\frac{M_z}{M_{пр}} + \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0; \quad (7.13)$$

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{Elk}{M_{пр}} + 2 \frac{H}{H_{пр}} - 1. \quad (7.14)$$

Отметим следующее. Если сопоставить соотношения (7.11) и (7.13), первое из которых отражает условия появления пластических деформаций в поперечных сечениях, а второе характеризует кривизну нити в упруго-пластической фазе деформирования (вырождающееся в данном случае в зависимость между изгибающим моментом и распором), то увидим их полную тождественность. Это свидетельствует о том, что появление в сечениях нити конечной жесткости идеального профиля первых пластических деформаций означает реализацию в нем предельного состояния. Отсюда, в свою очередь, следует, что деформирование нити идеального профиля сопровождается образованием в ее пролете только двух типов участков: упругих и пластических. Последнее, как указывалось выше, несколько облегчает дальнейшее решение задачи, т. к. позволяет избежать рассмотрения упруго-пластических участков нити конечной жесткости, не внося при этом принципиальных изменений в расчетные зависимости.

Отметим также, что работа поперечных сечений балок за пределом упругости изучалась ранее Л.М. Беленьким [8], И.Л. Диковичем [38], С.Д. Лейтесом [87] и некоторыми другими авторами. Причем полученные ими результаты, хотя и отличаются по форме представления, но, тем не менее, достаточно хорошо согласуются с полученными в данном параграфе.

§ 7.2. Вывод общих дифференциальных уравнений

Используем полученные результаты для вывода уточненной теории деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости. Для этого предположим, что нить, работающая с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, с поперечным сечением площадью F , моментом инерции I и модулем упругости E нагружена равномерно распределенной

нагрузкой интенсивности $q = q_1 + q_2$ и находится в состоянии равновесия (рис. 7.2, а). Будем также считать, что нить на опорах закреплена шарнирно, ее материал является идеальным упруго-пластическим, а поперечное сечение имеет идеальный профиль. Выберем, как и ранее, в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения F , а в качестве искомой функции примем распор H .

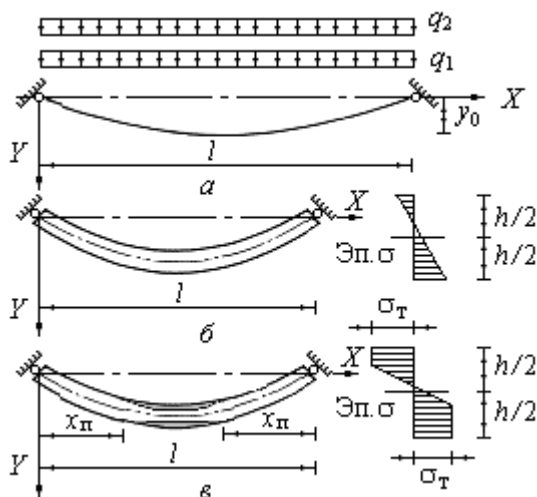


Рис. 7.2. Деформирование упруго-пластической нити конечной жесткости:
 а – расчетная схема нити; б – упругая фаза работы;
 в – упруго-пластическая фаза работы

Поведение нити конечной жесткости в первой фазе деформирования (рис. 7.2, б), когда все ее поперечные сечения работают в упругой стадии, было подробно рассмотрено ранее. Поэтому на этой фазе работы нити здесь останавливаться не будем.

Упругая фаза работы нити заканчивается, когда в наиболее нагруженном ее сечении изгибающий момент и распор достигают значений, при которых появляются первые пластические деформации. Вполне понятно, что для этого значения момента и распора должны удовлетворять условию (7.11). Тогда, определив из уравнения (4.5) изгибающий момент в наиболее нагруженном сечении нити, в данном случае в середине пролета, и подставив его в (7.11), окончательно получим условие появления в нити первых пластических деформаций:

$$\frac{6\mu EI}{5l^2 H + 48EI} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0, \quad (7.15)$$

где обозначено $\mu = ql^2/M_{\text{пр}}$ – безразмерный параметр поперечной нагрузки.

По достижении внешней нагрузкой значения, определяемого последним выражением, начинается вторая фаза деформирования, когда образовавшийся

в момент окончания первой фазы в середине пролета нити пластический шарнир трансформируется в пластический участок конечной протяженности (рис. 7.2, в). Определим теперь расчетные зависимости при работе нити конечной жесткости в этой фазе деформирования. Для этого, как обычно, используем принцип возможных перемещений.

Пусть площадь поперечного сечения нити получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δF . Это означает, что также изменятся внутренние усилия, действующие в нити, и ее геометрия. Изгибающий момент M_z получит некоторое приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy . Кроме того распор получит некоторое приращение своей величины, равное δH .

Здесь стоит отметить, что выражения, определяющие изогнутую ось нити и распределение изгибающих моментов для упругих участков ($0 \leq x \leq x_n$, $l - x_n \leq x \leq l$), по-прежнему будут иметь вид (4.3) и (4.5), а для пластического участка ($x_n \leq x \leq l - x_n$) с учетом уравнения (7.13) их можно записать так:

$$y = \frac{M_z^6}{H} - \frac{M_{np}}{H} \left(1 - \frac{H}{H_{np}} \right); \quad (7.16)$$

$$M_z = M_{np} \left(1 - \frac{H}{H_{np}} \right). \quad (7.17)$$

Причем здесь принято, что x_n является координатой границы между упругим и пластическим участками. Соответственно приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков также сохраняют свой вид (4.7), (4.9), (4.11) и (4.12), а для пластического участка получим следующие выражения:

$$\delta y = -\frac{M_z^6 - M_{np}}{H(H + \delta H)} \delta H; \quad (7.18)$$

$$\delta M_z = -\frac{M_{np}}{H_{np}} \delta H; \quad (7.19)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{E} \left[\frac{q}{M_{np}} \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] dx; \quad (7.20)$$

$$\delta d\varphi = \frac{M_{np}(HE\delta I - EI\delta H - H_{np}E\delta I)}{EIH_{np}(EI + E\delta I)} dx. \quad (7.21)$$

При этом относительное удлинение оси пластического участка нити конечной жесткости идеального профиля определялось по формуле (7.14), где было принято, что кривизна оси пластического участка равна $k = q/H$ [38].

Перейдем теперь к определению работы внешних и внутренних сил. Поскольку на нить действует только равномерно распределенная нагрузка, то для работы внешних сил имеем:

$$U_1 = 2 \int_0^{x_n} q \delta y dx + \int_{x_n}^{l-x_n} q \delta y dx. \quad (7.22)$$

В свою очередь, работа внутренних сил нити конечной жесткости состоит из двух слагаемых: работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменение угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$:

$$U_2^1 = -2 \int_0^{x_n} (H + \delta H) \delta dx - \int_{x_n}^{l-x_n} (H + \delta H) \delta dx; \quad (7.23)$$

$$U_2^2 = -2 \int_0^{x_n} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_{x_n}^{l-x_n} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi. \quad (7.24)$$

Подставляя в уравнения (7.22) – (7.24) необходимые представления для внешних и внутренних сил и возможных перемещений, приводя подобные члены и применяя принцип Лагранжа (4.19), согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, получим:

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^{x_n} \frac{q M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)} dx - 2 \int_0^{x_n} \frac{EF \delta H - HE \delta F}{EF(EF + E \delta F)} (H + \delta H) dx - \\ & - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_n}^{l-x_n} \left[\frac{q}{M_{np}} \frac{HE \delta I - EI \delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{q(M_z^6 - M_{np}) \delta H}{H(H + \delta H)} dx + \\ & + 2 \int_0^{x_n} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE \delta I + y^6 \delta HE \delta I + M_z^6 E \delta I)}{EI(EI + E \delta I) (Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx - \\ & - \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{M_{np} (HE \delta I - \delta HEI - H_{np} E \delta I)}{EI H_{np}^2 (EI + E \delta I)} [M_{np} H_{np} - M_{np} (H + \delta H)] dx = 0. \quad (7.25) \end{aligned}$$

Разделив далее уравнение (7.25) почленно на δH и перейдя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости:

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{x_n H^2} \left(I_1 + \frac{1}{H^2} I_2 - I_3 \right) - \frac{F^2}{H^2} \left(1 - \frac{l}{2x_n} \right) \times \\ & \times \left[\frac{qEI H_{np}}{HFM_{np}} - \frac{M_{np}^2}{IH_{np}^2} (H - H_{np}) - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \quad (7.26) \end{aligned}$$

вид интегральных компонентов I_1 , I_2 и I_3 в котором таков:

$$I_1 = q \int_0^{x_n} \frac{M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx;$$

$$I_2 = \frac{q}{2} \int_{x_n}^{l-x_n} (M_z^6 - M_{np}) dx;$$

$$I_3 = EI \int_0^{x_n} \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx,$$

а параметр m по-прежнему находится из формулы (4.21).

Решив последнее уравнение совместно с зависимостью (7.13), представление которой в данном случае имеет вид

$$\frac{6\mu EI(l x_n - x_n^2)^2}{l^2 H(l^3 x_n - 2l x_n^3 + x_n^4) + 12EI l^2 (l x_n - x_n^2)} + \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0, \quad (7.27)$$

найдем распор и координату границы между упругими и пластическим участками нити при конкретных размерах поперечного сечения и величине внешней нагрузки. Уравнение (7.26) будем решать путем разложения искомой функции (распора) в ряд Тейлора, а ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов будем находить по формулам (4.3) и (4.5) для упругого и (7.16), (7.17) для пластического участков соответственно.

Вполне понятно, что нить будет работать во второй фазе до тех пор, пока длина упругого участка не обратится в нуль. Приравнявая поэтому в выражении (7.27) $x_n = 0$, найдем распор в момент окончания фазы: $H = H_{np}$. При этом нить конечной жесткости начинает работать как пластическая система, подобная гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному. Тогда предельную поперечную нагрузку можно легко определить, воспользовавшись известным решением для гибких нитей [95]

$$\mu_{np} = \frac{H_{np} l}{M_{np}} \sqrt{24 \frac{H_{np} L_0^3}{EFl^3} + 64 \frac{y_0^2}{l^2}}. \quad (7.28)$$

Форму изогнутой оси полностью пластической нити конечной жесткости можно представить зависимостью (7.16), приняв, что $H = H_{np}$. В частности, в середине пролета ордината кривой провисания нити принимает значение

$$y = \frac{\mu_{np} M_{np}}{8H_{np}}. \quad (7.29)$$

Таким образом, полностью определено поведение нити конечной жесткости с идеальным поперечным сечением за пределом упругости и установлены зависимости для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах ее работы. Рассмотрение других типов поперечных сечений, как уже отмечалось, не вносит в решение принципиальных изменений. В этом случае общий путь решения задачи будет таким же, необхо-

дим только дополнительно рассмотреть упруго-пластическую фазу изгиба и ввести соответствующие члены в уравнение для определения распора.

Необходимо также отметить характерную особенность предлагаемого метода, заключающуюся в автоматическом соблюдении условий неразрывности в местах сопряжения смежных участков по длине нити, поскольку формулы (4.1), (7.16) и (7.17) получены исходя из условий равновесия, справедливых как для упругих, так и для пластических участков. Используемое же при выводе соотношений (4.3) и (4.5) выражение (4.2) вносит в решение погрешность, не превышающую нескольких процентов.

§ 7.3. Действие дополнительных нагружений специального вида

7.3.1. Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки. Прежде всего, рассмотрим нить конечной жесткости с идеальным поперечным сечением площадью F и моментом инерции I , работающую с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Материал нити с модулем упругости E считаем упруго-пластическим. Нить нагружена равномерно распределенными нагрузками: начальной на всем пролете q_1 и дополнительной на части пролета q_2 (рис. 7.3, а). При выводе расчетных зависимостей примем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

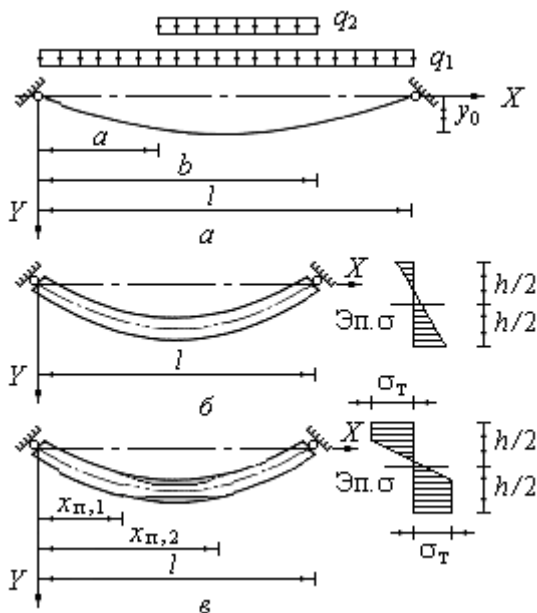


Рис. 7.3. Деформирование упруго-пластической нити конечной жесткости при действии дополнительной участковой равномерно распределенной нагрузки, несимметричной относительно середины пролета:

а – расчетная схема; б – упругая фаза работы; в – упруго-пластическая фаза работы

Начнем с напомним о том, что работа нити конечной жесткости в первой – упругой фазе деформирования (рис. 7.3, б) уже была рассмотрена раньше. При этом прогибы, изгибающие моменты и приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити определяются полученными решениями (4.3), (4.5), (4.7), (4.9), (4.11) и (4.12).

Также отметим, что в момент достижения внешними нагрузками величины, при которой удовлетворяется условие (7.11) и появляются первые пластические деформации, начинается вторая – упруго-пластическая фаза работы нити (рис. 7.3, в). При этом изогнутая ось нити и распределение изгибающих моментов для упругих участков ($0 \leq x \leq x_{n,1}$; $x_{n,2} \leq x \leq l$) по-прежнему будут иметь вид (4.3) и (4.5), а для пластического участка ($x_{n,1} \leq x \leq x_{n,2}$) в случае его развития по длине нити в пределах участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 их можно представить с использованием формул (7.16) и (7.17). Приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити также сохраняют свой вид как для упругих участков (4.7), (4.9), (4.11) и (4.12), так и для пластического участка (7.18) – (7.21). При этом в формуле (7.20) по-прежнему считаем, что $q = q_1 + q_2$.

Дальше согласно установленной последовательности рассуждений определим работу внешних и внутренних сил. Как обычно, работа внешних сил состоит из работы нагрузок $q_1 + q_2$ на перемещении δy :

$$\begin{aligned}
 U_1 = & - \int_0^a \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\
 & - \int_a^{x_{n,1}} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\
 & - \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{(q_1 + q_2)(M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \int_{x_{n,2}}^b \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \\
 & - \int_b^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx, \quad (7.30)
 \end{aligned}$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta \phi$:

$$\begin{aligned}
 U_2 = & - \int_0^{x_{n,1}} \frac{(EF \delta H - HE \delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E \delta F)} dx - \\
 & - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \left[\frac{q_1 + q_2}{M_{np}} \frac{HE \delta I - EI \delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\
 & - \int_{x_{n,2}}^l \frac{(EF \delta H - HE \delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E \delta F)} dx; \quad (7.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2^2 = & \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta H E I + y^6 H E \delta I + y^6 \delta H E \delta I + M_z^6 E \delta I)}{E I (E I + E \delta I) (H y^6 + M_z^6) (H y^6 + \delta H y^6 + M_z^6)^2} dx - \\
& - \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{M_{np} (H E \delta I - \delta H E I - H_{np} E \delta I)}{E I H_{np}^2 (E I + E \delta I)} [M_{np} H_{np} - M_{np} (H + \delta H)] dx + \\
& + \int_{x_{n,2}}^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta H E I + y^6 H E \delta I + y^6 \delta H E \delta I + M_z^6 E \delta I)}{E I (E I + E \delta I) (H y^6 + M_z^6) (H y^6 + \delta H y^6 + M_z^6)^2} dx. \quad (7.32)
\end{aligned}$$

Обращаясь теперь к принципу Лагранжа, согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, подставляя (7.31) и (7.32) в формулу (4.19), получим:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^a \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(H y^6 + \delta H y^6 + M_z^6) (H y^6 + M_z^6)} dx - \\
& - \int_a^{x_{n,1}} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(H y^6 + \delta H y^6 + M_z^6) (H y^6 + M_z^6)} dx - \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{(q_1 + q_2) (M_z^6 - M_{np})}{H (H + \delta H)} \delta H dx - \\
& - \int_{x_{n,2}}^b \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(H y^6 + \delta H y^6 + M_z^6) (H y^6 + M_z^6)} dx - \\
& - \int_b^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(H y^6 + \delta H y^6 + M_z^6) (H y^6 + M_z^6)} dx - \int_0^{x_{n,1}} \frac{(E F \delta H - H E \delta F) (H + \delta H)}{E F (E F + E \delta F)} dx - \\
& - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \left[\frac{q_1 + q_2}{M_{np}} \frac{H E \delta I - E I \delta H}{H (H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\
& - \int_{x_{n,2}}^l \frac{(E F \delta H - H E \delta F) (H + \delta H)}{E F (E F + E \delta F)} dx + \\
& + \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta H E I + y^6 H E \delta I + y^6 \delta H E \delta I + M_z^6 E \delta I)}{E I (E I + E \delta I) (H y^6 + M_z^6) (H y^6 + \delta H y^6 + M_z^6)^2} dx - \\
& - \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{M_{np} (H E \delta I - \delta H E I - H_{np} E \delta I)}{E I H_{np}^2 (E I + E \delta I)} [M_{np} H_{np} - M_{np} (H + \delta H)] dx + \\
& + \int_{x_{n,2}}^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta H E I + y^6 H E \delta I + y^6 \delta H E \delta I + M_z^6 E \delta I)}{E I (E I + E \delta I) (H y^6 + M_z^6) (H y^6 + \delta H y^6 + M_z^6)^2} dx = 0. \quad (7.33)
\end{aligned}$$

При дальнейшем росте пластического участка по длине нити и превышении его длины над длиной участка приложения дополнительной равно-

мерно распределенной нагрузки q_2 выражения для параметров и приращений параметров напряженно-деформированного состояния пластического участка сохраняют свой вид и описываются равенствами (7.16) – (7.19), (7.21). Исключение составляет только перемещение δdx , которое для участков $x_{n,1} \leq x \leq a$ и $b \leq x \leq x_{n,2}$ определится по формуле

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{E} \left[\frac{q_1}{M_{np}} \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] dx, \quad (7.34)$$

а для участка $a \leq x \leq b$ по-прежнему будет иметь вид (7.20). Причем здесь тоже принято, что $x_{n,1}$, $x_{n,2}$ – координаты границ между упругими и пластическим участками.

Найдем теперь работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузок q_1 и $q_1 + q_2$ на перемещениях δy :

$$U_1 = \int_0^{x_{n,1}} q_1 \delta y dx + \int_{x_{n,1}}^a (q_1 + q_2) \delta y dx + \int_a^b (q_1 + q_2) \delta y dx + \int_b^{x_{n,2}} q_1 \delta y dx + \int_{x_{n,2}}^l q_1 \delta y dx, \quad (7.35)$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta d\varphi$:

$$U_2^1 = \int_0^{x_{n,1}} (H + \delta H) \delta dx + \int_{x_{n,1}}^a (H + \delta H) \delta dx + \int_a^b (H + \delta H) \delta dx + \\ + \int_b^{x_{n,2}} (H + \delta H) \delta dx + \int_{x_{n,2}}^l (H + \delta H) \delta dx; \quad (7.36)$$

$$U_2^2 = - \int_0^{x_{n,1}} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_{x_{n,1}}^a (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_a^b (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \\ - \int_b^{x_{n,2}} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_{x_{n,2}}^l (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi. \quad (7.37)$$

Приравнявая далее в соответствии с принципом Лагранжа работу внешних (7.35) и внутренних (7.36), (7.37) сил с учетом формул (4.7), (4.9), (4.11) и (4.12), а также (7.18) – (7.21) и (7.34) к нулю, получим:

$$- \int_0^{x_{n,1}} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_{x_{n,1}}^a \frac{q_1 (M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \\ - \int_a^b \frac{(q_1 + q_2)(M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \int_b^{x_{n,2}} \frac{q_1 (M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \\ - \int_{x_{n,2}}^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_0^{x_{n,1}} \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sigma_T}{E} \int_{x_{n,1}}^a \left[\frac{q_1}{M_{np}} \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\
& -\frac{\sigma_T}{E} \int_a^b \left[\frac{q_1 + q_2}{M_{np}} \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\
& -\frac{\sigma_T}{E} \int_b^{x_{n,2}} \left[\frac{q_1}{M_{np}} \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\
& - \int_{x_{n,2}}^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx + \\
& + \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta SHE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx - \\
& - \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{M_{np} (HE\delta I - \delta HEI - H_{np} E\delta I)}{EI H_{np}^2 (EI + E\delta I)} [M_{np} H_{np} - M_{np} (H + \delta H)] dx + \\
& + \int_{x_{n,2}}^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta SHE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx = 0. \quad (7.38)
\end{aligned}$$

Разделив уравнения (7.33) и (7.38) почленно на δH и переходя затем в полученных выражениях к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, после интегрирования и некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости

$$\begin{aligned}
& \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} + \frac{EF^2 \sum_{i=1}^{i=7} I_i}{H^2(l + x_{n,1} - x_{n,2})} - \\
& - \frac{F^2(x_{n,2} - x_{n,1})}{H^2(l + x_{n,1} - x_{n,2})} \left[\frac{(q_1 + q_2)EI H_{np}}{HFM_{np}} - \frac{M_{np}^2}{IH_{np}^2} (H_{np} - H) - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \quad (7.39)
\end{aligned}$$

интегральные составляющие которого, в случае развития пластического участка по длине нити в пределах участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 ($x_{n,1} \leq x \leq x_{n,2}$), имеют вид

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \int_0^a \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; & I_2 &= - \int_a^{x_{n,1}} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \\
I_3 &= - \frac{1}{H^2} \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} (q_1 + q_2) (M_z^6 - M_{np}) dx; & I_4 &= - \int_{x_{n,2}}^b \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx;
\end{aligned}$$

$$I_5 = - \int_b^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad I_6 = \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI(Hy^6 + M_z^6)^3} dx;$$

$$I_7 = \int_{x_{n,1}}^l \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI(Hy^6 + M_z^6)^3} dx,$$

а в случае превышения длины пластического участка над длиной участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 ($x_{n,1} \leq x \leq a$; $b \leq x \leq x_{n,2}$) их можно записать так:

$$I_1 = - \int_0^a \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad I_2 = - \frac{1}{H^2} \int_{x_{n,1}}^a q_1 (M_z^6 - M_{np}) dx;$$

$$I_3 = \frac{1}{H^2} \int_a^b (q_1 + q_2) (M_z^6 - M_{np}) dx; \quad I_4 = - \frac{1}{H^2} \int_b^{x_{n,2}} q_1 (M_z^6 - M_{np}) dx;$$

$$I_5 = - \int_{x_{n,2}}^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \quad I_6 = \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI(Hy^6 + M_z^6)^3} dx;$$

$$I_7 = \int_{x_{n,1}}^l \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI(Hy^6 + M_z^6)^3} dx.$$

Решив последнее уравнение совместно с уравнением (7.13), найдем распор и координаты границы между упругими и пластическими участками нити при конкретных размерах поперечного сечения и значении внешней нагрузки. При этом ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов будем находить по формулам (4.3), (4.5) для упругих и (7.16), (7.17) для пластического участка соответственно.

Также нужно сказать, что если при каком-то значении дополнительной участковой равномерно распределенной нагрузки q_2 координаты границы между упругими и пластическими участками примут значения $x_{n,1} = 0$, $x_{n,2} = l$, то это, во-первых, означает, что длина упругих участков обратилась в нуль и, во-вторых, свидетельствует об окончании упруго-пластической фазы работы нити. Вполне понятно, что в этом случае значение распора H будет равно H_{np} , а нить конечной жесткости начинает работать как пластическая система подобно гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному.

7.3.2. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки. При нагружении нити дополнительной участковой равномерно распределенной симметричной относительно середины пролета нагрузкой ($a = l/4$, $b = 3l/4$) дифференциальные уравнения для определения распора имеют следующий вид:

- в случае упругой фазы работы нити

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{IH^2} \left[2 \int_0^{l/4} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \int_{l/4}^{3l/4} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx \right] + \\ + \frac{F^2}{IH^2 I} \left[2 \int_0^{l/4} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx + \int_{l/4}^{3l/4} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx \right] = 0; \end{aligned} \quad (7.40)$$

- в случае упруго-пластической фазы работы нити

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} + \frac{EF^2 \sum_{i=1}^{i=4} I_i}{H^2 (l + x_{n,1} - x_{n,2})} - \\ - \frac{F^2 (x_{n,2} - x_{n,1})}{H^2 (l + x_{n,1} - x_{n,2})} \left[\frac{(q_1 + q_2) E I H_{\text{пр}}}{H F M_{\text{пр}}} - \frac{M_{\text{пр}}^2}{I H_{\text{пр}}^2} (H_{\text{пр}} - H) - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.41)$$

интегральные компоненты которого при развитии пластического участка по длине нити в пределах участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 ($x_{n,1} \leq x \leq x_{n,2}$) имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= -2 \int_0^{l/4} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; & I_2 &= -2 \int_{l/4}^{x_{n,1}} \frac{(q_1 + q_2) M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; \\ I_3 &= -\frac{1}{H^2} \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} (q_1 + q_2) (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx; & I_4 &= 2 \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI (Hy^6 + M_z^6)^3} dx, \end{aligned}$$

а в случае превышения длины пластического участка над длиной участка приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки q_2 ($x_{n,1} \leq x \leq a$; $b \leq x \leq x_{n,2}$) их можно записать так:

$$\begin{aligned} I_1 &= -2 \int_0^{x_{n,1}} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx; & I_2 &= -\frac{2}{H^2} \int_{x_{n,1}}^{l/4} q_1 (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx; \\ I_3 &= \frac{1}{H^2} \int_{l/4}^{3l/4} (q_1 + q_2) (M_z^6 - M_{\text{пр}}) dx; & I_4 &= 2 \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{EI (Hy^6 + M_z^6)^3} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, полностью определена работа нити конечной жесткости с идеальным поперечным сечением в пределах и за пределами упругости и установлены зависимости для определения параметров напряженно-деформированного состояния во всех фазах ее работы при действии дополнительной участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки.

7.3.3. Случай произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки.

Теперь рассмотрим нить конечной жесткости с идеальным поперечным сечением площадью F и моментом инерции I , работающую с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Материал нити с модулем упругости E счи-

таем упруго-пластическим. Нить нагружена начальной равномерно распределенной на всем пролете нагрузкой q_1 и дополнительной произвольно расположенной сосредоточенной нагрузкой P (рис. 7.4, а). При выводе расчетных зависимостей по-прежнему примем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения нити F , а в качестве искомой функции – распор H .

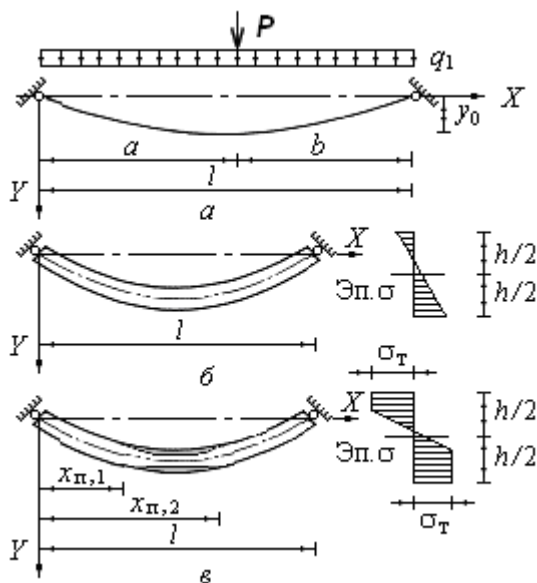


Рис. 7.4. Деформирование нити конечной жесткости при действии дополнительной произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки: а – расчетная схема; б – упругая фаза работы; в – упруго-пластическая фаза работы

Поведение нити конечной жесткости в первой – упругой – фазе работы (рис. 7.4, б) уже было подробно рассмотрено раньше и поэтому здесь на этом останавливаться не будем.

При удовлетворении же в какой-то момент условия (7.11) и появлении первых пластических деформаций начинается вторая – упруго-пластическая фаза деформирования (рис. 7.4, в). При этом изогнутая ось нити и распределение изгибающих моментов для упругих участков ($0 \leq x \leq x_{п,1}$; $x_{п,2} \leq x \leq l$) по-прежнему будут иметь вид (4.3) и (4.5), а для пластических участков ($x_{п,1} \leq x \leq a$ и $a \leq x \leq x_{п,2}$) их можно представить с использованием формул (7.16) и (7.17). Приращенные параметров напряженно-деформированного состояния нити также сохраняют свой вид как для упругих участков (4.7), (4.9), (4.11) и (4.12), так и для пластического участка (7.18) – (7.21). При этом в формуле (7.20) считаем, что $q = q_1$.

Найдем теперь работу внешних и внутренних сил. Как обычно, работа внешних сил состоит из работы начальной равномерно распределенной на всем пролете нагрузки q_1 на перемещении δu и работы сосредоточенной

нагрузки P на перемещении δy_a :

$$U_1^1 = - \int_0^{x_{n,1}} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_{x_{n,1}}^a \frac{q_1 (M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \\ - \int_a^{x_{n,2}} \frac{q_1 (M_z^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H dx - \int_{x_{n,2}}^l \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx; \quad (7.42)$$

$$U_1^2 = - \frac{P(M_a^6 - M_{np})}{H(H + \delta H)} \delta H, \quad (7.43)$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta \varphi$:

$$U_2^1 = - \int_0^{x_{n,1}} \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx - \\ - \frac{\sigma_T}{E} \int_{x_{n,1}}^a \left[\frac{q_1}{M_{np}} \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\ - \frac{\sigma_T}{E} \int_a^{x_{n,2}} \left[\frac{q_1}{M_{np}} \frac{HE\delta I - EI\delta H}{H(H + \delta H)} + 2 \frac{\delta H}{H_{np}} \right] (H + \delta H) dx - \\ - \int_{x_{n,2}}^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (7.44)$$

$$U_2^2 = \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx - \\ - \int_{x_{n,1}}^a \frac{M_{np}(HE\delta I - \delta HEI - H_{np}E\delta I)}{EIH_{np}^2(EI + E\delta I)} [M_{np}H_{np} - M_{np}(H + \delta H)] dx - \\ - \int_a^{x_{n,2}} \frac{M_{np}(HE\delta I - \delta HEI - H_{np}E\delta I)}{EIH_{np}^2(EI + E\delta I)} [M_{np}H_{np} - M_{np}(H + \delta H)] dx + \\ + \int_{x_{n,1}}^l \frac{(M_z^6)^4 (y^6 \delta HEI + y^6 HE\delta I + y^6 \delta HE\delta I + M_z^6 E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx. \quad (7.45)$$

Подставляя далее соотношения (7.42) – (7.45) в формулу (4.19), деля полученное уравнение почленно на δH , переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, после интегрирования, несложных преобразований и упрощений

придем к дифференциальному уравнению для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости при действии дополнительной произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки P

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2[P(M_a^6 - M_{np}) + I_1 + I_2]}{H^4[l - (x_{n,2} - x_{n,1})]} - \frac{F^2(x_{n,2} - x_{n,1})}{H^2[l - (x_{n,2} - x_{n,1})]} \left[\frac{M_{np}^2}{IH_{np}^2} (H - H_{np}) - \frac{q_1 H_{np} EI}{HFM_{np}} - 2 \frac{H}{F} \right] = 0, \quad (7.46)$$

интегральные составляющие которого I_1 и I_2 получаются следующими:

$$I_1 = \int_0^{x_{n,1}} \frac{H^2 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \int_{x_{n,2}}^l \frac{H^2 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx,$$

$$I_2 = -\frac{H^2}{EI} \left[\int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx + \int_{x_{n,2}}^l \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx \right].$$

Решив уравнение (7.46) совместно с уравнением (7.13), которое в данном случае примет вид:

- при $x_{n,1} \leq x \leq a$

$$\frac{6Elx_{n,1}[2Pb + q_1 l(l - x_{n,1})]^2}{M_{np} l \{H[4Pbx_{n,1}(l^2 - b^2 - x_{n,1}^2) + q_1 l(l^3 - 2lx_{n,1}^2 + x_{n,1}^3)] +$$

$$\times \frac{1}{+ 12EI[2Pb + q_1 l(l - x_{n,1})]\} + \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0,$$

- при $a \leq x \leq x_{n,2}$

$$\frac{6Elx_{n,2} \{2P[bx_{n,2} - l(x_{n,2} - a)] + q_1 lx_{n,2}(l - x_{n,2})\}^2}{M_{np} l \{H[4Pbx_{n,2}(l^2 - b^2 - x_{n,2}^2) + 4Pl(x_{n,2} - a)^3 + q_1 lx_{n,2}(l^3 - 2lx_{n,2}^2 + x_{n,2}^3)] +$$

$$\times \frac{1}{+ M_{np} l \{12EI[2P[bx_{n,2} - l(x_{n,2} - a)] + q_1 lx_{n,2}(l - x_{n,2})]\} + \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0,$$

найдем распор и координаты границы между упругими и пластическими участками нити при конкретных размерах поперечного сечения и значении внешней нагрузки. При этом ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов будем находить по формулам (4.3), (4.5) для упругих и (7.16), (7.17) для пластических участков соответственно.

Если же координаты границы между упругими и пластическими участками примут значения $x_{n,1} = 0$, $x_{n,2} = l$, то это естественно означает, что длина упругих участков обратилась в нуль, а также свидетельствует об окончании упруго-пластической фазы работы нити. Из этого также следует, что значение распора H равно H_{np} , а нить конечной жесткости начинает работать как пластическая система подобно гибкой нити, значение распора в которой неиз-

менно и равно предельному.

7.3.4. Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета. При нагружении нити дополнительной сосредоточенной нагрузкой посредине пролета дифференциальные уравнения для определения распора будут:

- в случае упругой фазы работы нити

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \left[\frac{PM_{l/2}^6 (y_{l/2}^6)^2}{(Hy_{l/2}^6 + M_{l/2}^6)^2} + 2 \int_0^{l/2} \frac{q_1 M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx \right] + \frac{2F^2}{lH^2 I} \int_0^{l/2} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx = 0; \quad (7.47)$$

- в случае упруго-пластической фазы работы нити

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2 [P(M_{l/2}^6 - M_{np}^6) + I_1 + I_2]}{H^4 (l - 2x_n)} - \frac{F^2}{H^2} \left[2 \frac{H}{EF} + \frac{M_{np}^2}{EIH_{np}^2} (H - H_{np}) - \frac{q_1 H_{np} EI}{HFM_{np}} \right] = 0. \quad (7.48)$$

Интегральные компоненты уравнения (7.48) определяются выражениями

$$I_1 = 2H^2 \int_0^{x_n} \frac{M_z^6 (y^6)^2}{(Hy^6 + M_z^6)^2} dx, \quad I_2 = -\frac{2H^2}{EI} \int_0^{x_n} \frac{(M_z^6)^4 y^6}{(Hy^6 + M_z^6)^3} dx.$$

Таким образом, полностью определена работа нити конечной жесткости с идеальным поперечным сечением в пределах и за пределами упругости и установлены зависимости для определения параметров напряженно-деформированного состояния во всех фазах ее работы при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки посредине пролета.

§ 7.4. Влияние пластических шарниров на работу нити

При выводе уравнения (7.26) считалось, что функция относительного удлинения оси нити конечной жесткости по всей длине нити и во всех фазах ее работы есть величина непрерывная и не претерпевает в процессе своего изменения изломов и разрывов. Теперь однако предположим, что данное допущение не является строгим и функция $\varepsilon_0(x)$ по длине нити терпит разрыв. Иначе говоря, в случае использования модели идеального упруго-пластического материала деформирование нити конечной жесткости при определенных типах нагружения и граничных условиях может сопровождаться образованием в ее поперечных сечениях стационарных пластических шарниров, вызывающих излом оси нити [16, 38, 109]. Вполне понятно, что последнее обстоятельство требует дополнения дифференциального уравнения (7.26) двумя новыми членами, входящими в работу внутренних сил. Причем первый из этих членов отражает работу действующего в нити распора $H + \delta H$ на удлинении

оси в пластическом шарнире, а второй представляет собой работу изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между примыкающими к пластическому шарниру поперечными сечениями нити (т. е. на угле излома оси нити). Найдем теперь значения этих дополнительных членов.

Для решения поставленной задачи, прежде всего, рассмотрим деформированное состояние поперечного сечения нити конечной жесткости в стадии пластического шарнира, которая изображена на рис. 7.5.

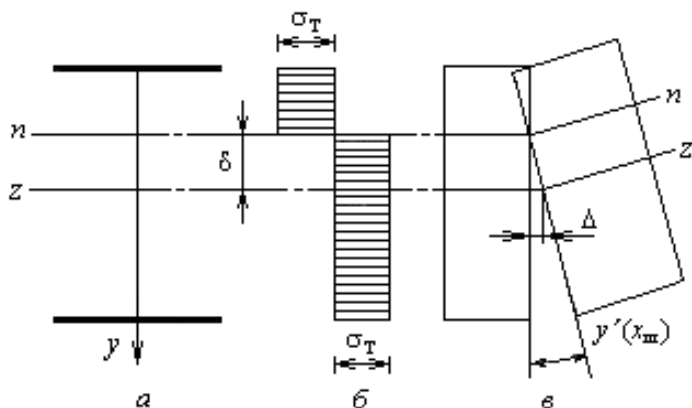


Рис. 7.5. Работа идеального поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости в стадии пластического шарнира:
 а – профиль нити; б – эпюра напряжений; в – деформированный элемент нити

Из рис. 7.5 видно, что в сечениях с пластическими шарнирами относительное удлинение всех волокон нити, кроме волокна $n-n$, равно бесконечности. Точно так же равно бесконечности и относительное удлинение оси нити. Но поскольку расстояние между нейтральной осью и осью $z-z$ равно δ , то абсолютное удлинение оси нити конечной жесткости в пластическом шарнире можно представить так:

$$\Delta = \delta y'(x_{\text{ш}}) = \delta \frac{dy(x_{\text{ш}})}{dx}, \quad (7.49)$$

где $x_{\text{ш}}$ – координата пластического шарнира по длине нити; $y'(x_{\text{ш}})$ – угол излома оси нити в пластическом шарнире.

Так как образование пластического шарнира свидетельствует о реализации в поперечном сечении нити предельного состояния, то для нахождения расстояния между осями $n-n$ и $z-z$ можем применить формулу [8, 38]

$$\delta = -\frac{dM_z}{dH}, \quad (7.50)$$

которая в рассматриваемом случае нити конечной жесткости идеального профиля с учетом (7.13) примет вид

$$\delta = \frac{M_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}}. \quad (7.51)$$

Используя последнюю зависимость, выражения для указанных выше дополнительных членов работы внутренних сил нити запишем следующим образом:

$$U_2^3 = - \sum \frac{M_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} \frac{dy(x_{\text{ш}})}{dx} (H + \delta H); \quad (7.52)$$

$$U_2^4 = - \sum \frac{M_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} \frac{dy(x_{\text{ш}})}{dx} (H_{\text{пр}} - H - \delta H), \quad (7.53)$$

причем количество членов суммы в этих зависимостях равно числу образовавшихся в нити пластических шарниров. При этом необходимо иметь в виду, что величина угла излома оси нити определяется путем однократного дифференцирования уравнения ее кривой провисания (7.16).

Как уже было сказано, учитывая соотношения (7.52) и (7.53) при выводе дифференциального уравнения для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости (7.26), придем к варианту уравнения нити идеального профиля, некоторые сечения которой находятся в предельном состоянии, или, говоря иначе, работают в стадии пластического шарнира. Подобным образом может быть рассмотрено любое другое поперечное сечение и получены выражения для определения дополнительной работы внутренних сил при любой форме профиля нити. Только при нахождении расстояния δ в формулу (7.50) необходимо подставлять соответствующее конкретному профилю уравнение предельной кривой.

§ 7.5. Учет упрочнения материала

Хорошо известно, что одной из наиболее широко применяемых в теории пластичности является диаграмма идеального упруго-пластического материала, использование которой позволяет не только выполнить всесторонний анализ поведения, но и выявить дополнительные резервы прочности конструкции. Но также известно, что уточнить результаты решения задач упруго-пластического деформирования и лучше отразить действительный характер работы материала можно, учитывая его упрочнение. В ряде случаев такое уточнение диаграммы σ - ε приводит к более достоверным решениям и дает возможность выявить неучтенные ранее запасы прочности конструкции.

Как и в случае упруго-пластической нити конечной жесткости, теория расчета нити из упрочняющегося материала также базируется на допущениях и предпосылках, принятых при рассмотрении работы нитей в пределах упругости. Однако далее при исследовании деформирования нити конечной жесткости используется другая модель материала, у которой зависимость напряжение-деформация представляется диаграммой идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением (рис. 6.1, з). При этом необходимо отметить, что общая схема расчета нити, обладающей упрочнением,

практически не отличается от пути решения задачи деформирования идеально-пластических нитей конечной жесткости и основана на применении при выводе расчетных зависимостей принципа возможных перемещений.

7.5.1. Работа поперечного сечения нити. Рассмотрим теперь общий случай работы поперечного сечения нити конечной жесткости, считая материал упруго-пластическим с линейным упрочнением. Для этого, прежде всего, обратимся к составленным ранее условиям равновесия действующих в поперечном сечении усилий (7.1) и рассмотрим на их основе работу поперечного сечения нити конечной жесткости идеального профиля (рис. 7.6, а). Кроме того, для придания дальнейшему изложению большей целостности напомним, что уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma[-k(h-e)] + \sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= H, \\ \{-(h-e)\sigma[-k(h-e)] + e\sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

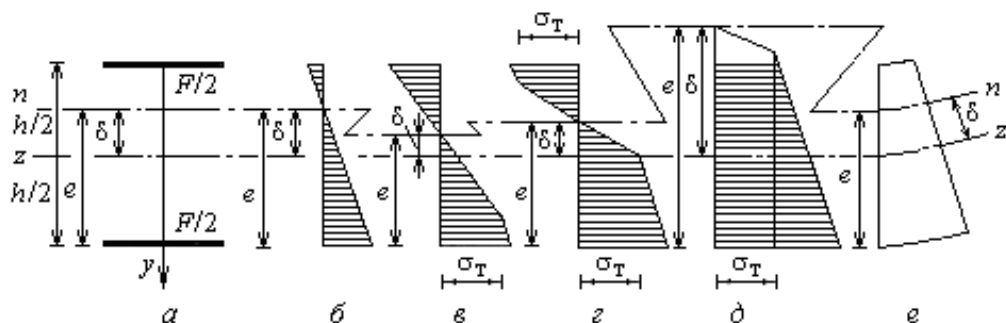


Рис. 7.6. Работа поперечного сечения идеального профиля нити конечной жесткости из упруго-пластического материала с линейным упрочнением: а – общий вид профиля нити; б – д – эпюры напряжений в четырех стадиях работы профиля нити; е – деформированный элемент нити

Также отметим, что представление входящего в соотношения (7.54) нормального напряжения σ в случае упруго-пластического материала с линейным упрочнением определяется по хорошо известным формулам [6]

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= Eky \text{ при } |y| \leq \frac{\sigma_T}{Ek}, \\ \sigma &= \sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \text{sign } y + E_0ky \text{ при } |y| \geq \frac{\sigma_T}{Ek}, \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

где принято, что E и E_0 – соответственно модули упругости и упрочнения; а $\text{sign } y = 1$ при $y > 0$ и $\text{sign } y = -1$ при $y < 0$.

Дальше обратим внимание на то, что в общем случае необходимо рас-

смотреть четыре стадии работы сечения (упругую, упруго-пластическую с одной областью пластичности, упруго-пластическую с двумя областями пластичности и полностью пластическую) в разных фазах деформирования нити.

Работа нити в первой (упругой) фазе деформирования будет одинаковой, независимо от свойств материала в пластической области. И поэтому в данном случае соотношения, характеризующие кривизну и относительное удлинение оси нити, будут иметь вид аналогичный виду (7.9), а условие окончания упругой стадии работы поперечного сечения – вид (7.11).

Перейдем теперь к рассмотрению второй фазы работы нити, когда ее деформирование сопровождается развитием в сечении участка, охваченного пластическими деформациями (рис. 7.6, в). Подставляя условия (7.55) в уравнения равновесия (7.54), перепишем их следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \left[-Ek(h-e) + \sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0 ke \right] \frac{F}{2} &= H, \\ \left[Ek(h-e)^2 + \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0 ke^2 \right] \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.56)$$

Обращаясь дальше к формулам (7.7), (7.8) и учитывая их в последних зависимостях, получим выражения для кривизны и относительного удлинения оси нити во второй фазе ее деформирования при работе сечения во второй стадии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Elk}{M_{пр}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_z}{M_{пр}} - \frac{H}{H_{пр}} + 1 \right) + \frac{E}{E_0} \left(\frac{M_z}{M_{пр}} + \frac{H}{H_{пр}} - 1 \right) \right], \\ \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} &= \frac{1}{1 + E_0/E} \left[\left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \left(\frac{Elk}{M_{пр}} - 1 \right) + 2 \frac{H}{H_{пр}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

Заметим, что вторая стадия работы поперечного сечения продолжается до тех пор, пока пластические деформации локализуются в районе нижнего пояса нити. При еще большем возрастании внутренних усилий напряжение достигнет предела текучести в ее верхнем поясе. Принимая во внимание, что знак этих напряжений обратен знаку напряжений с противоположной стороны поперечного сечения, составим условие окончания второй стадии его работы. Для этого используем первое из выражений (7.55), полагая в нем $y = -(h-e)$ и $\sigma = -\sigma_T$. Тогда имеем:

$$Ek(h-e) = \sigma_T, \quad (7.58)$$

откуда с учетом (7.7), (7.8) и (7.57) находим:

$$\frac{M_z}{M_{пр}} - \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0. \quad (7.59)$$

В дальнейшем в третьей стадии работы сечения пластические деформа-

ции развиваются на двух участках, расположенных по разные стороны как от нейтральной оси, так и от оси симметрии поперечного сечения (рис. 7.6, *з*). В этом случае уравнения (7.54) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} [-E_0 k(h-e) + E_0 k e] \frac{F}{2} &= H, \\ \left[\sigma_T(h-e) \left(1 - \frac{E_0}{E}\right) + E_0 k(h-e)^2 + \right. \\ \left. + \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E}\right) + E_0 k e^2 \right] \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

Исключая из данных зависимостей величины e и δ и используя формулы (7.7) и (7.8), выражения, определяющие кривизну и относительное удлинение оси нити при работе сечения в третьей стадии, можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{EIk}{M_{\text{пр}}} &= \frac{E}{E_0} \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} - \frac{E}{E_0} + 1, \\ \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} &= \frac{E}{E_0} \frac{H}{H_{\text{пр}}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Теперь обратим внимание на то, что если материал является упруго-пластическим с линейным упрочнением, то вместо уже рассмотренной третьей стадии возможна еще и четвертая стадия работы поперечного сечения. Суть этой стадии состоит в том, что сечение полностью охватывается пластическими деформациями, причем и у нижнего, и у верхнего его пояса напряжения имеют один и тот же знак (рис. 7.6, *д*). Сообразно с этим выпишем расчетные зависимости для указанной стадии работы поперечного сечения.

Прежде всего, получим условие окончания второй и начала четвертой стадии работы поперечного сечения, которое легко устанавливается при помощи первого выражения из (7.55), если в нем положить

$$y = (y - e), \quad \sigma = \sigma_T, \quad Ek(e - h) = \sigma_T, \quad (7.62)$$

что, с учетом формул (7.7), (7.8) и соотношения (7.57), после несложных преобразований и упрощений позволяет записать

$$\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 = 0. \quad (7.63)$$

Тогда зависимости (7.54) после подстановки в них второго условия из (7.55), соответствующего данной стадии работы сечения, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \left[E_0 k(e-h) + E_0 k e + 2\sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \right] \frac{F}{2} &= H, \\ \left\{ \begin{aligned} &\sigma_T(e-h) \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) + E_0 k(e-h)^2 + \\ &+ \sigma_T e \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) E_0 k e^2 \end{aligned} \right\} \frac{F}{2} &= M_z + H\delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.64)$$

В результате после приведения подобных и некоторых упрощений приходим к следующим зависимостям, которые характеризуют кривизну и относительное удлинение оси нити при работе ее сечения в четвертой стадии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{EIk}{M_{\text{пр}}} &= \frac{E}{E_0} \frac{M_z}{M_{\text{пр}}}, \\ \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} &= \frac{E}{E_0} \left(\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 \right) + 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.65)$$

Таким образом, рассмотрены все возможные стадии работы поперечного сечения нити конечной жесткости идеального профиля и получены зависимости, связывающие действующие в нити изгибающие моменты и распор с кривизной и относительным удлинением ее оси.

7.5.2. Вывод дифференциальных уравнений. Применим установленные в предшествующем параграфе результаты для вывода расчетных зависимостей уточненной теории деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости с линейным упрочнением материала. Для этого, как и ранее, используем принцип возможных перемещений.

Как обычно предположим, что нить конечной жесткости, работающая с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, с идеальным поперечным сечением площадью F и моментом инерции I нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q = q_1 + q_2$ и находится в состоянии равновесия (рис. 7.7, а). Будем также считать, что материал нити является упруго-пластическим с линейным упрочнением. При выводе разрешающих уравнений примем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения F , а в качестве искомой функции – распор H .

Работа нити конечной жесткости в упругой фазе деформирования (рис. 7.7, б), о чем уже неоднократно упоминалось, будет одинаковой для всех расчетных случаев независимо от свойств материала в пластической области. А поэтому перейдем сразу к рассмотрению второй фазы работы, когда деформирование нити сопровождается развитием локализуемой посередине пролета области конечной протяженности, охваченной пластическими деформациями (рис. 7.7, в). Определим теперь расчетные зависимости при работе нити конечной жесткости в этой фазе деформирования.

В соответствии с общей схемой принципа возможных перемещений примем, что площадь поперечного сечения нити получила очень малое, но конечное приращение своей величины δF . При этом изменятся действующие в нити внутренние усилия и ее геометрия. А именно: изгибающий момент M_z получит приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy . Кроме того распор H получит некоторое приращение δH .

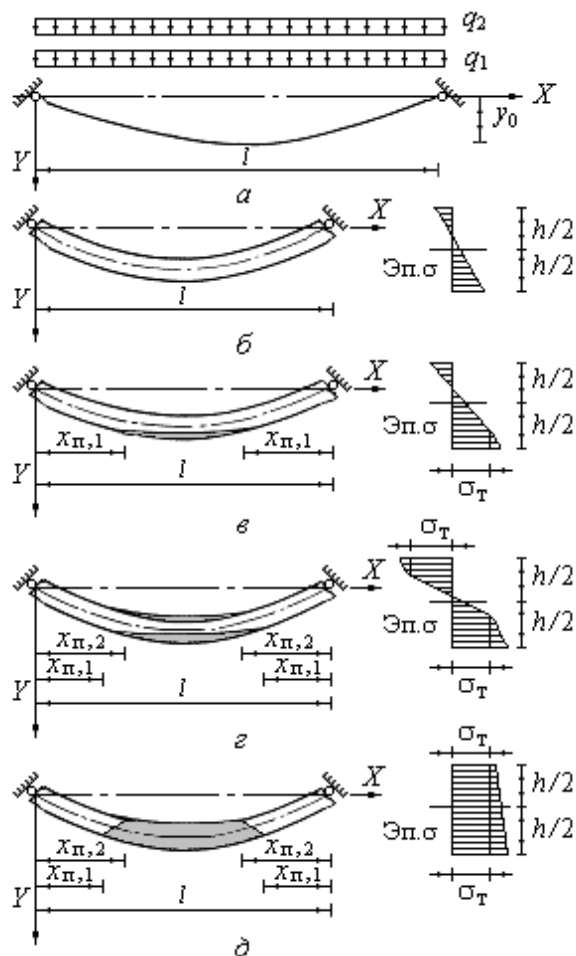


Рис. 7.7. Деформирование нити конечной жесткости из упруго-пластического материала с линейным упрочнением:
 а – расчетная схема нити; б – упругая фаза работы;
 в – фаза работы с зоной односторонней пластичности;
 г – то же, с зонами одно- и двусторонней пластичности;
 д – то же, с зонами односторонней и полной пластичности

Теперь еще раз отметим, что выражения, определяющие изогнутую ось нити и эпюру изгибающих моментов во второй фазе деформирования, сохраняют вид уравнений (4.3) и (4.5), поскольку получены из условий равновесия и пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке, а потому справедливы при любой диаграмме σ - ε . При этом необходимо иметь в виду, что при вычислении y и M_z для упругого и пластического участков вместо y^δ и M_z^δ в формулы (4.3) и (4.5) должны быть подставлены соответствующие данному участку нити зависимости. Тогда приращения параметров напряженно-деформированного состояния для упругих участков ($0 \leq x \leq x_{n,1}$; $l - x_{n,1} \leq x \leq l$) сохранят свой вид (4.7), (4.9), (4.11) и (4.12), а для участка с односторонней пластичностью ($x_{n,1} \leq x \leq l - x_{n,1}$) получим следующие выражения:

$$\delta y = -\frac{M_z^\delta (y^\delta)^2 \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta) (Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (7.66)$$

$$\delta M_z = -\frac{(M_z^\delta)^2 y^\delta \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta) (Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (7.67)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{M_{np}(1+\alpha)} \left[(1-\alpha)(I\delta k + k\delta I + \delta I\delta k) + 2\frac{M_{np}\delta H}{EH_{np}} \right] dx; \quad (7.68)$$

$$\begin{aligned} \delta d\varphi = & -\frac{M_{np}(1-\alpha)}{2H_{np}E_0} \left[\frac{H_{np}(1+\alpha)}{M_{np}(1-\alpha)} \times \right. \\ & \times \frac{(M_z^\delta)^2 (y^\delta \delta HI + y^\delta H\delta I + y^\delta \delta H\delta I + M_z^\delta \delta I)}{I(I+\delta I) (Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta) (Hy^\delta + M_z^\delta)} - \\ & \left. - \frac{I\delta H - H\delta I}{I(I+\delta I)} - \frac{H_{np}\delta I}{I(I+\delta I)} \right] dx, \end{aligned} \quad (7.69)$$

где $x_{n,1}$ – координата границы между упругим и пластическим участками;

$$\alpha = \frac{E_0}{E}; \quad k = \frac{M_{np}(1-\alpha)}{2H_{np}E_0J} \left[\frac{M_z H_{np}(1+\alpha)}{M_{np}(1-\alpha)} + H - H_{np} \right] - \text{кривизна оси пластического}$$

участка нити, определенная с помощью первого из соотношений (7.57). Также здесь обратим внимание на то, что при выводе зависимости для удлинения бесконечно малого элемента участка с односторонней пластичностью δdx относительное удлинение оси нити ε_0 определялось с использованием второго соотношения из (7.57) по формуле

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_T}{E(1+\alpha)} \left[(1-\alpha) \left(\frac{Elk}{M_{np}} - 1 \right) + 2\frac{H}{H_{np}} \right].$$

Найдем теперь работу внешних и внутренних сил. Работа внешних сил состоит из работы нагрузки q на перемещении δu :

$$U_1 = 2 \int_0^{x_{n,1}} q \delta y dx + \int_{x_{n,1}}^{l-x_{n,1}} q \delta y dx, \quad (7.70)$$

а работа внутренних сил – из работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями $\delta d\varphi$:

$$U_2^1 = -2 \int_0^{x_{n,1}} (H + \delta H) \delta dx - \int_{x_{n,1}}^{l-x_{n,1}} (H + \delta H) \delta dx; \quad (7.71)$$

$$U_2^2 = -2 \int_0^{x_{n,1}} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi - \int_{x_{n,1}}^{l-x_{n,1}} (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi. \quad (7.72)$$

Приравнявая в соответствии с принципом Лагранжа работу внешних и внутренних сил с учетом формул (4.7), (4.9), (4.11) и (4.12), а также (7.66) – (7.69) к нулю и переходя затем в полученном выражении к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, после интегрирования и некоторых преобразований получим дифференциальное уравнение для определения распора в упруго-пластической нити конечной жесткости с зоной односторонней пластичности:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{F}{2x_{n,1}H} \left[\frac{1+\alpha}{2\alpha} (l-2x_{n,1}) - I_1 \right] - \frac{EF^2}{x_{n,1}H^2} (I_2 - I_3) = 0. \quad (7.73)$$

Соотношения для входящих в уравнение (7.73) интегральных членов I_1 , I_2 и I_3 имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{EIH_{np}}{2M_{np}} (1-\alpha) \int_{x_{n,1}}^{l-x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^2 m_0}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx \\ I_2 &= \int_0^{x_{n,1}} \frac{q M_z^6 m^2}{(Hm + E I M_z^6)^2} dx + \frac{1}{2} \int_{x_{n,1}}^{l-x_{n,1}} \frac{q M_z^6 m_0^2}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx \\ I_3 &= EI \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + E I M_z^6)^3} dx + \frac{E_0 I}{4} (1+\alpha) \int_{x_{n,1}}^{l-x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 m_0}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx - \\ &\quad - \frac{M_{np}}{4H_{np}} (1-\alpha) \int_{x_{n,1}}^{l-x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^2}{Hm_0 + E_0 I M_z^6} dx, \end{aligned}$$

где принято, что $m_0 = E_0 I y^6$.

Значения же этих членов могут быть определены непосредственным либо численным интегрированием. Отметим также, что при этом должно соблюдаться соответствие между типом участка нити (упругий или пластический) и типом используемых при вычислении интегральных членов функций y^6 и M_z^6 .

Координата границы между упругим участком и участком с односто-

ронной пластичностью $x_{n,1}$ определяется из условия (7.11), куда подставляем вместо M_z и, в том числе M_z^6 , соответствующие данному случаю формулы [38]. Таким образом, окончательно получим:

$$\frac{6\mu EI(l x_{n,1} - x_{n,1}^2)^2}{H l^2(l^3 x_{n,1} - 2l x_{n,1}^3 + x_{n,1}^4) + H l^5 x_{n,1}(\alpha^{-1} - 1)(1 - 8\mu^{-1})^{3/2} + 12EI l^2(l x_{n,1} - x_{n,1}^2)} + \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0. \quad (7.74)$$

Из решения полученной системы двух уравнений (7.73) и (7.74) находятся значения распора и координаты границы между упругим и пластическим участками нити, а затем по формулам (4.3), (4.5) – остальные параметры напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости, работающей в данной фазе деформирования.

Вторая фаза работы продолжается до тех пор, пока пластические деформации локализуются в нижнем поясе нити, и оканчивается, когда напряжения достигнут предела текучести в ее верхнем поясе. Очевидно, что этому моменту соответствует условие (7.59), которое после подстановки вместо M_z его значения, вычисленного для наиболее нагруженного сечения нити (в данном случае в середине пролета), приводится к виду

$$\frac{6\mu EI(\omega + 8\alpha\mu^{-1})^2}{5\alpha^2 l^2 H + \alpha l^2 H(1 - \alpha)(8\omega^{3/2} - 3\omega^2) + 48E_0 I(\omega + 8\alpha\mu^{-1})} - \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0,$$

где принято, что $\omega = 1 - 8/\mu$.

Когда интенсивность внешней нагрузки достигнет величины, определяемой последним условием, начинается третья фаза деформирования нити (рис. 7.7, з), при которой пластические деформации развиваются в районе обоих поясов и в каждой половине нити образуются три участка, в пределах которых поперечные сечения работают в различных стадиях – упругой, упруго-пластической с одной пластической областью и упруго-пластической с двумя пластическими областями.

В данном случае зависимости, определяющие изогнутую ось нити и распределение изгибающих моментов по ее длине, как уже указывалось выше, сохраняют вид (4.3), (4.5). Приращения же параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков и для участков с односторонней пластичностью также будут описываться равенствами (4.7), (4.9), (4.11), (4.12) и (7.66) – (7.69). Изменяются только пределы участка с односторонней пластичностью, которые теперь можно записать как $x_{n,1} \leq x \leq x_{n,2}$; $l - x_{n,2} \leq x \leq l - x_{n,1}$, где $x_{n,2}$ – координата границы между участками с односторонней и двусторонней пластичностью. А для участка с двусторонней пластичностью ($x_{n,2} \leq x \leq l - x_{n,2}$) приращения δy , δM_z , δdx и $\delta d\phi$ определяются так:

$$\delta y = -\frac{M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (7.75)$$

$$\delta M_z = - \frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)}; \quad (7.76)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T \delta H}{E_0 H_{np}} dx; \quad (7.77)$$

$$\delta d\varphi = - \frac{1}{E_0 I} \left[\frac{(M_z^6)^2 (y^6 \delta HI + y^6 H \delta I + y^6 \delta H \delta I + M_z^6 \delta I)}{(I + \delta I) (Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)} - \frac{M_{np} (1 - \alpha) \delta I}{I + \delta I} \right] dx. \quad (7.78)$$

Причем здесь согласно выражениям (7.61) кривизна и относительное удлинение оси участка нити с двусторонней пластичностью принимались равными $k = \frac{1}{E_0 I} [M_z - M_{np} (1 - \alpha)]$ и $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_T}{E_0} \frac{H}{H_{np}}$.

Записывая далее, как и при рассмотрении предыдущих фаз работы нити, выражения для работ внешних и внутренних сил для упругих и пластических участков и составляя затем уравнения принципа возможных перемещений, придем к дифференциальному уравнению для определения величины распора в упруго-пластической нити конечной жесткости с зонами односторонней и двусторонней пластичности

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{F}{2x_{n,1}H} \left[\frac{1 + \alpha}{\alpha} (x_{n,2} - x_{n,1}) + \frac{1}{\alpha} (l - 2x_{n,2}) - I_1 \right] - \frac{EF^2}{x_{n,1}H^2} (I_2 - I_3) = 0. \quad (7.79)$$

Входящие в это выражение интегральные составляющие имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{EI H_{np}}{M_{np}} (1 - \alpha) \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{(M_z^6)^2 m_0}{(Hm_0 + E_0 IM_z^6)^2} dx, \\ I_2 &= \int_0^{x_{n,1}} \frac{qM_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{qM_z^6 m_0^2}{(Hm_0 + E_0 IM_z^6)^2} dx + \frac{1}{2} \int_{x_{n,2}}^{l-x_{n,2}} \frac{qM_z^6 m_0^2}{(Hm_0 + E_0 IM_z^6)^2} dx, \\ I_3 &= EI \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx + \frac{E_0 I}{2} (1 + \alpha) \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{(M_z^6)^4 m_0}{(Hm_0 + E_0 IM_z^6)^3} dx - \\ &\quad - \frac{M_{np}}{2H_{np}} (1 - \alpha) \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{(M_z^6)^2}{(Hm_0 + E_0 IM_z^6)} dx + \frac{E_0 I}{2} \int_{x_{n,2}}^{l-x_{n,2}} \frac{(M_z^6)^4 m_0}{(Hm_0 + E_0 IM_z^6)^3} dx \end{aligned}$$

Координату границы между упруго-пластическими участками $x_{n,2}$ определяем по формуле, полученной из условия (7.59), куда подставляем вместо M_z выражение (4.5), а вместо M_z^6 — соответствующую зависимость из [38]

$$\begin{aligned}
& 6\mu EI \left[(l x_{n,2}^2 - x_{n,2}^2) - \frac{2l^2}{\mu} (1-\alpha) \right]^2 \left\{ \alpha l^2 H \left[l^3 x_{n,2} - 2l x_{n,2}^3 + x_{n,2}^4 - \frac{5l^4}{16} (1-\alpha) \right] + \right. \\
& + \alpha l^4 H (1-\alpha) \left[\frac{12}{\mu} \left(x_{n,2}^2 - l x_{n,2} + \frac{l^2}{4} \right) + \frac{l^2}{16} (8\omega^{3/2} - 3\omega^2) \right] + 12l^2 E_0 I \times \\
& \left. \times \left[(l x_{n,2}^2 - x_{n,2}^2) - \frac{2l^2}{\mu} (1-\alpha) \right] \right\}^{-1} - \frac{H}{H_{np}} - 1 = 0. \quad (7.80)
\end{aligned}$$

Решая уравнение (7.79) совместно с уравнениями (7.74) и (7.80), найдем неизвестную величину распора H и координаты границ между участками по длине нити $x_{n,1}$ и $x_{n,2}$ при конкретных размерах поперечного сечения и величине внешней нагрузки. Причем уравнение (7.79) по-прежнему будем решать путем разложения искомой функции в ряд Тейлора, а ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов – находить по формулам (4.3) и (4.5). При этом только должно соблюдаться соответствие между типом участка нити и видом используемых в вычислениях функций y^6 и M_z^6 .

Если же вместо третьей фазы деформирования нити наступает четвертая фаза ее работы (рис. 7.7, д), то это означает, что на каком-то участке поперечное сечение нити полностью охватывается пластическими деформациями с напряжениями одного знака. Является также вполне очевидным, что этому моменту соответствует условие (7.63), которое после подстановки вместо M_z его значения, вычисленного для наиболее нагруженного сечения нити (в данном случае в середине пролета), приводится к виду

$$\frac{6\mu EI(\omega + 8\alpha\mu^{-1})^2}{5l^2\alpha^2 H + l^2\alpha H(1-\alpha)(8\omega^{3/2} - 3\omega^2) + 48E_0 I(\omega + 8\alpha\mu^{-1})} - \frac{H}{H_{np}} + 1 = 0,$$

причем здесь, как и ранее, принято, что $\omega = 1 - 8/\mu$.

Также обратим внимание на то, что в рассматриваемом случае в каждой половине нити образуются три участка, в пределах которых поперечные сечения работают в различных стадиях – упругой, упруго-пластической с одной пластической областью и полностью пластической.

Для дальнейшего решения задачи определим расчетные зависимости при деформировании нити конечной жесткости в четвертой фазе ее работы.

Прежде всего, укажем на то, что зависимости, определяющие изогнутую ось нити и распределение изгибающих моментов по ее длине, как уже неоднократно упоминалось, сохраняют вид (4.3), (4.5). Приращения же параметров напряженно-деформированного состояния нити для упругих участков и для участков с односторонней пластичностью также будут описываться выражениями (4.7), (4.9), (4.11), (4.12) и (7.66) – (7.69). Кроме того, как видно из рис. 7.7, д, здесь сохраняют свой вид и пределы участка с односторонней пластичностью, а именно: $x_{n,1} \leq x \leq x_{n,2}$; $l - x_{n,2} \leq x \leq l - x_{n,1}$, за исключением того, что теперь под $x_{n,2}$ понимается координата границы между участками с односто-

ронной пластичностью и полностью пластического. А для полностью пластического участка ($x_{n,2} \leq x \leq l - x_{n,2}$) приращения δy , δM_z , δdx и $\delta d\varphi$ определяются так:

$$\delta y = -\frac{M_z^6 (y^6)^2 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)}; \quad (7.81)$$

$$\delta M_z = -\frac{(M_z^6)^2 y^6 \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)}; \quad (7.82)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T \delta H}{E_0 H_{np}} dx; \quad (7.83)$$

$$\delta d\varphi = -\frac{1}{E_0 I} \left[\frac{(M_z^6)^2 (y^6 \delta H I + y^6 H \delta I + y^6 \delta H \delta I + M_z^6 \delta I)}{(I + \delta I) (Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)} \right] dx. \quad (7.84)$$

При этом здесь согласно выражениям (7.65) кривизна и относительное удлинение оси полностью пластического участка нити принимались равными

$$k = \frac{M_z}{E_0 I} \quad \text{и} \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_T}{E_0} \left(\frac{H}{H_{np}} - 1 \right) + \frac{\sigma_T}{E}.$$

Дальше также следуем принятой при рассмотрении предшествующих фаз работы нити схеме рассуждений. А именно: запишем выражения для работ внешних и внутренних сил для упругих и пластических участков, составим уравнения принципа возможных перемещений и придем затем к дифференциальному уравнению для определения величины распора в упруго-пластической нити конечной жесткости с зонами односторонней и полной пластичности

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{F}{2x_{n,1}H} \left[\frac{1+\alpha}{\alpha} (x_{n,2} - x_{n,1}) + \frac{1}{\alpha} (l - 2x_{n,2}) - I_1 \right] - \frac{EF^2}{x_{n,1}H^2} (I_2 - I_3) = 0. \quad (7.85)$$

Входящие в это выражение интегральные составляющие имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{EI H_{np}}{M_{np}} (1 - \alpha) \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{(M_z^6)^2 m_0}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx, \\ I_2 &= \int_0^{x_{n,1}} \frac{q M_z^6 m^2}{(Hm + E I M_z^6)^2} dx + \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{q M_z^6 m_0^2}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx + \frac{1}{2} \int_{x_{n,2}}^{l-x_{n,2}} \frac{q M_z^6 m_0^2}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx, \\ I_3 &= EI \int_0^{x_{n,1}} \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + E I M_z^6)^3} dx + \frac{E_0 I}{2} (1 + \alpha) \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{(M_z^6)^4 m_0}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx - \\ &\quad - \frac{M_{np}}{2H_{np}} (1 - \alpha) \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} \frac{(M_z^6)^2}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)} dx + \frac{E_0 I}{2} \int_{x_{n,2}}^{l-x_{n,2}} \frac{(M_z^6)^4 m_0}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx. \end{aligned}$$

Координату границы между упруго-пластическими участками $x_{n,2}$ опре-

деляем по формуле, полученной из условия (7.63), куда подставляем вместо M_z выражение (4.5), а вместо M_z^6 – соответствующую зависимость из [38]

$$6\mu EI \left[(l x_{n,2}^2 - x_{n,2}^2) - \frac{2l^2}{\mu} (1-\alpha) \right]^2 \left\{ \alpha l^2 H \left[l^3 x_{n,2} - 2l x_{n,2}^3 + x_{n,2}^4 - \frac{5l^4}{16} (1-\alpha) \right] + \right. \\ \left. + \alpha l^4 H (1-\alpha) \left[\frac{12}{\mu} \left(x_{n,2}^2 - l x_{n,2} + \frac{l^2}{4} \right) + \frac{l^2}{16} (8\omega^{3/2} - 3\omega^2) \right] + 12l^2 E_0 I \times \right. \\ \left. \times \left[(l x_{n,2}^2 - x_{n,2}^2) - \frac{2l^2}{\mu} (1-\alpha) \right] \right\}^{-1} - \frac{H}{H_{np}} + 1 = 0. \quad (7.86)$$

Решая уравнение (7.85) совместно с уравнениями (7.74) и (7.86), найдем неизвестную величину распора H и координаты границ между участками по длине нити $x_{n,1}$ и $x_{n,2}$ при конкретных размерах поперечного сечения и величине внешней нагрузки. При этом уравнение (7.85) по-прежнему будем решать путем разложения искомой функции в ряд Тейлора, а ординаты кривой провисания и значения изгибающих моментов – находить по формулам (4.3) и (4.5). При этом, как и ранее, должно соблюдаться соответствие между типом участка нити и видом используемых в вычислениях функций y^6 и M_z^6 .

Сделаем теперь одну интересную ремарку. Если приглядеться внимательнее к третьей и четвертой фазам работы нити, а именно к описывающим эти фазы уравнениям (7.79) и (7.85), а также условиям (7.80) и (7.86), то можно увидеть, что первые два уравнения полностью подобны, а вторые два условия разнятся только знаком последнего члена. И поэтому возникают следующие вопросы: в чем же здесь дело? В чем же причина такого совпадения?

Впрочем, ответ на поставленные вопросы является достаточно очевидным. Оказывается, что отмеченная особенность находит вполне простое объяснение, если вспомнить о физической природе рассматриваемой задачи. В самом деле, достаточно только обратить внимание на тот факт, что третья и четвертая фазы работы нити являются с физической точки зрения практически идентичными, но все же с небольшим качественным отличием. При этом это отличие определяется только типом срединного пластического участка нити, который может быть или с двусторонней пластичностью в случае работы нити в третьей фазе, или полностью пластическим при ее работе в четвертой фазе. Именно указанный фактор и приводит, во-первых, к полному подобию уравнений (7.79) и (7.85) и, во-вторых, к разному знаку последнего члена в условиях (7.80) и (7.86). Кстати говоря, отметим также и то, что последнее обстоятельство полностью соответствует основополагающим условиям возникновения в поперечном сечении нити либо третьей (7.59), либо четвертой (7.63) стадий его работы.

И, наконец, в завершение отметим, что схема и последовательность решения рассмотренной задачи деформирования нити с учетом линейного упрочнения материала является аналогичной и при любом другом виде поперечного сечения, опорных закреплениях и характере внешней нагрузки.

§ 7.6. Определение остаточных прогибов при разгрузке

Конечной целью всех приведенных выше решений задачи о деформировании нити конечной жесткости было получение зависимостей, характеризующих элементы изгиба нити при непрерывном росте внешней нагрузки. Однако не менее важной задачей теории пластичности является задача расчета конструкции при уменьшении действующих на нее нагрузок, т. е. в случае разгрузки. Последнее связано с тем, что при уменьшении нагрузки поведение материала, получившего пластические деформации, описывается законом, отличающимся от закона нагружения. А именно: при разгрузке упруго-пластический материал ведет себя подобно упругому [6, 54, 105, 123]. Работа различных материалов в стадии разгрузки показана на рис. 6.1 пунктирной линией, параллельной начальному участку диаграммы растяжения. Такая разгрузка продолжается до тех пор, пока напряжения не достигнут предела текучести противоположного знака. После чего вновь начинается пластическое течение.

Тут крайне кстати будет отметить следующее. Несовпадение зависимости σ - ϵ при нагрузке и разгрузке приводит к неоднозначности связи между напряжениями и деформациями в пластической области; иначе говоря, одним и тем же напряжениям могут соответствовать разные удлинения. В связи с этим после прекращения действия нагрузки конструкция не возвращается в исходное состояние, а в ней появляются остаточные деформации [109, 131, 175]. Именно поэтому, чтобы найти решение конкретной упруго-пластической задачи, нужно знать не только действующую нагрузку, но и то, что предшествовало рассматриваемому напряженно-деформированному состоянию. Иными словами, в отличие от упругой стадии дополнительно необходима информация об истории нагружения конструкции. Сказанное особенно актуально применительно к висячим системам, у которых даже небольшие остаточные деформации могут внести значительные коррективы в напряженно-деформированное состояние системы при новом нагружении [44, 129, 202].

Нужно сказать, что при решении указанной задачи принимается, что зависимости σ - ϵ при разгрузке и повторном нагружении совпадают вплоть до наибольших напряжений предшествовавшего нагружения, т. е. не учитывается явление гистерезиса. Кроме того, приняв во внимание условия работы рассматриваемых висячих систем, считаем, что они не подвержены переменным и циклическим нагружениям [41, 103, 113, 118, 152]. Отметим также, что такие допущения являются общепринятыми при рассмотрении работы различных строительных конструкций за пределом упругости [8, 38, 109].

В теории пластичности обычно принимается, что при увеличении нагрузки материал последовательно проходит упругую и пластическую стадии работы, а связь между напряжениями и деформациями при этом нелинейна. При разгрузке упруго-пластический материал ведет себя как упругий и его поведение описывается законом Гука. Составим уравнения, характеризующие все элементы деформирования нити конечной жесткости при раз-

грузке.

В случае уменьшения нагрузки на величину Δq изменение изгибающего момента в поперечном сечении работающей за пределом упругости нити будет равно:

$$\Delta M_z = M_{z, \max} - M_z, \quad (7.87)$$

где $M_{z, \max}$ – максимальное значение изгибающего момента.

Величина ΔM_z может быть также найдена из условий равновесия, составленных с учетом упругой работы материала нити при разгрузке

$$M_{z, \max} - M_z = M_{z, \max}^6 - H_{\max} y_{\max} - M_z^6 + Hy, \quad (7.88)$$

где $M_{z, \max}^6$, $H_{\max}$ и $y_{\max}$ – соответственно максимальные значения изгибающего момента в балке с характеристиками нити конечной жесткости, распора и кривой провисания нити.

Перегруппировав далее в выражении (7.88) члены, получим равенство:

$$M_z = (M_{z, \max} - M_{z, \max}^6 + H_{\max} y_{\max}) + M_z^6 - Hy. \quad (7.89)$$

Обратим теперь внимание на то, что в последнем соотношении выражение в скобках совершенно не зависит от изменения нагрузки Δq и представляет собой характерную функцию напряженно-деформированного состояния нити при максимальной нагрузке. Причем значения этой функции равны невязке действующих в упруго-пластической нити изгибающих моментов, величины которых вычислены в предположении упругой работы материала. Вводя для характерной функции обозначение Ω , перепишем (7.89) в виде

$$M_z = \Omega + M_z^6 - Hy, \quad (7.90)$$

что можно также считать условием равновесия для текущего значения изгибающего момента при разгрузке.

Обращаясь далее, как и при упругом изгибе нити, к формулам (4.1) и (4.2), получим выражения для изогнутой оси и изгибающих моментов:

$$y = \frac{M_z^6 y^6 + \Omega y^6}{Hy^6 + M_z^6}; \quad (7.91)$$

$$M_z^6 = \frac{(M_z^6)^2 + \Omega M_z^6}{Hy^6 + M_z^6}. \quad (7.92)$$

В свою очередь, значения приращений параметров напряженно-деформированного состояния нити вычисляются по формулам:

$$\delta y = -\frac{[M_z^6 (y^6)^2 + \Omega (y^6)^2] \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)}; \quad (7.93)$$

$$\delta M_z = -\frac{[(M_z^6)^2 y^6 + \Omega M_z^6 y^6] \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6) (Hy^6 + M_z^6)}; \quad (7.94)$$

$$\delta dx = \frac{EF\delta H - HE\delta F}{EF(EF + E\delta F)} dx; \quad (7.95)$$

$$\delta d\varphi = -\frac{[(M_z^6)^2 + \Omega M_z^6][y^6\delta HEI + E\delta I(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)]}{EI(EI + \delta EI)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx. \quad (7.96)$$

Применяя дальше использованную при рассмотрении деформирования упругих и упруго-пластических нитей схему рассуждений, получаем дифференциальную зависимость для определения распора в нити конечной жесткости при разгрузке:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{qm^2(M_z^6 + \Omega)}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx + \frac{E^2F^2I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^2 m(M_z^6 + \Omega)^2}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx = 0. \quad (7.97)$$

Определяя далее из уравнения (7.97) значение распора, с помощью формул (7.91) и (7.92) можно найти все параметры напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости при разгрузке.

Кстати говоря, сравнение выражений (7.97) и (4.24) позволяет легко убедиться в том, что дифференциальная зависимость для определения величины распора при разгрузке отличается от соответствующей зависимости в случае упругой работы нити только наличием в числителях интегральных компонентов дополнительного члена, представляющего собой характерную функцию напряженно-деформированного состояния нити при максимальной нагрузке.

А поэтому необходимо иметь в виду, что нахождение распора при разгрузке упруго-пластической нити конечной жесткости сводится к решению задачи изгиба упругой нити при соответствующей корректировке значений изгибающих моментов. Также следует отметить, что в данном случае к определению остаточных прогибов нити конечной жесткости неприменима теорема о разгрузке [54, 79], поскольку распор в процессе снятия нагрузки является величиной переменной и связан с ней (нагрузкой) нелинейной зависимостью (7.97).

Учитывая последнее утверждение, остаточные прогибы надо находить как разность между ординатами начальной кривой провисания и ординатами изогнутой оси нити при разгрузке, значения которых вычисляются по формуле (7.91). Кроме того из соотношения (7.92) также вытекает, что при полном снятии нагрузки в сечениях нити появляются остаточные изгибающие моменты, приводящие к ее самонапряжению. И поэтому становится понятно, что остаточные деформации и напряжения будут действовать по всему пролету нити конечной жесткости, а не локализоваться только на участках, получивших в процессе нагружения пластические деформации.

ГЛАВА 8

ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 8.1. Вводные замечания

Является хорошо известным, что учет пластических свойств материала при расчетном обосновании работоспособности конструкции дает возможность определить величину фактического запаса ее прочности. Расчет конструкции при работе материала в области пластических деформаций представляет собой нелинейную задачу и связан со значительными математическими трудностями даже для простейших случаев практических расчетов. Исследования, проведенные путем анализа уравнений равновесия, приведены в [38, 87, 109]. В работах [54, 59, 123, 131] решение получено с помощью энергетических методов, основанных на использовании принципа минимума потенциальной энергии и обобщенной теоремы Кастилиано. Возможность применения уравнения неразрывности деформаций для определения параметров напряженно-деформированного состояния нити рассмотрена в монографиях [38, 202]. Вследствие значительной геометрической и физической нелинейности задачи во всех отмеченных подходах разрешающие уравнения имеют довольно громоздкий вид, а их решение представляет трудоемкий процесс. Именно поэтому является актуальной разработка методов расчета, совмещающих простоту и удобство в практическом применении с правильным отображением специфики работы конструкции в области пластических деформаций. Наиболее просто указанная задача может быть решена путем введения дополнительных допущений в предпосылки упруго-пластического расчета, а именно: в диаграмму напряжение-деформация путем ее дальнейшей схематизации [6, 38, 120, 155]. Например, при наличии возможности полного отказа от учета упругой стадии работы материала может быть использована представленная на рис. 6.1, *a* диаграмма жестко-пластического тела, позволяющая упростить зависимость между изгибающим моментом и кривизной. Еще более существенно схематизировать вид этой зависимости можно, если дополнительно принять, что материал является идеально пластическим (т. н. тело Мизеса). В этом случае прогиб и кривизна считаются равными нулю, если нагрузка и действующий в поперечном сечении изгибающий момент меньше предельных, а также могут принимать сколь угодно большие значения, если значения нагрузки и изгибающего момента становятся равными предельным величинам. Таким образом, расчет несущего элемента, материал которого является идеальным жестко-пластическим, позволяет не только найти его предельную нагрузку, но и имеет определяющую роль при выборе рационального типа или варианта конструкции [59, 87, 109]. Указанное обстоятельство может дать особенно значительный эффект при расчете таких нелинейно деформируемых систем, как висячие, поскольку знание величины предельной нагрузки позволяет предупредить развитие различных аварийных ситу-

аций.

§ 8.2. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального жестко-пластического материала

Рассмотрим теперь напряженно-деформированное состояние жестко-пластической нити конечной жесткости с поперечным сечением в виде идеального равнополочного профиля (рис. 8.1, *а*). Несмотря на то, что профиль этого типа довольно широко использовался в предшествующем изложении применительно к изучению работы упруго-пластических нитей конечной жесткости, напомним, что он состоит из двух одинаковых, имеющих суммарную площадь F тонких поясов, отстоящих друг от друга на расстояние h . При этом ось $z-z$ проходит через центр тяжести профиля, а ось $n-n$ является нейтральной. Также напомним, что использование поперечного сечения нити такого профиля несколько облегчает решение задачи и относительно упрощает расчетные зависимости. Однако принципиальные изменения в соотношения при этом не вносятся, что позволяет на данном примере показать последовательность решения и вид разрешающих уравнений, соответствующих предлагаемому методу расчета.

8.2.1. Работа поперечного сечения нити. Найдем общий вид зависимости между изгибающим моментом и распором, при совместном действии которых в сечении наступает предельное состояние. Для ее вывода спроектируем действующие в плоскости сечения элементарные силы (эпюра распределения которых показана на рис. 8.1, *б*) на горизонтальную ось $z-z$ и составим сумму моментов этих сил относительно нейтральной оси $n-n$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T \int_F dF &= H ; \\ \sigma_T \int_F y dF &= M_z + H\delta , \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где σ_T – граница текучести материала; M_z , H – соответственно изгибающий момент и распор в нити; y – расстояние между волокном и нейтральной осью; δ – расстояние между осями $n-n$ и $z-z$.

Представляя площадь элемента сечения dF в виде $dF = b(y)dy$, где $b(y)$ – ширина профиля нити на расстоянии y от оси $n-n$, преобразуем выражения (8.1) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T \left[-\int_{y_1}^0 b(y)dy + \int_0^{y_2} b(y)dy \right] &= H ; \\ \sigma_T \left[-\int_{y_1}^0 yb(y)dy + \int_0^{y_2} yb(y)dy \right] &= M_z + H\delta , \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

где пределы интегрирования приняты равными $y_1 = -(h - e)$, $y_2 = e$.

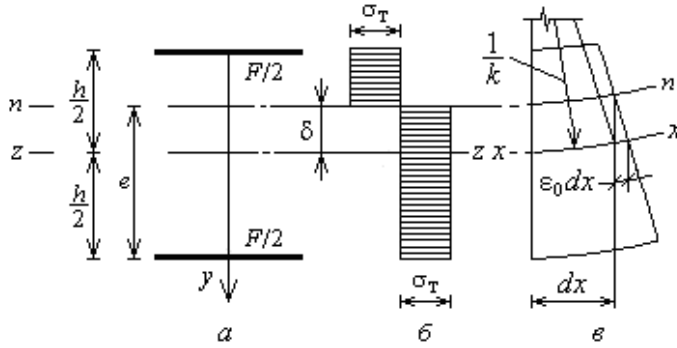


Рис. 8.1. Работа идеального поперечного сечения жестко-пластической нити конечной жесткости: а – поперечное сечение нити; б – эпюра напряжений в предельном состоянии; в – деформированный элемент нити

Обозначая предельный изгибающий момент сечения нити при отсутствии распора через $M_{пр} = \sigma_T W_{пр}$, где $W_{пр}$ – предельный момент сопротивления профиля, и предельный распор нити, т. е. распор, вызывающий в сечении нити напряжения, равные пределу текучести, через $H_{пр} = \sigma_T F$, а также записывая параметр e в виде $e = h/2 + \delta$, уравнения (8.2) можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{H}{H_{пр}} &= \frac{2}{F} \int_0^{\delta} b(y) dy, \\ \frac{M_z}{M_{пр}} &= 1 - \frac{2}{W_{пр}} \int_0^{\delta} y b(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Исключая дальше из выражений (8.3) величину δ , получим уравнение, устанавливающее соотношение между изгибающим моментом и распором, совместное действие которых приводит поперечное сечение нити в предельное состояние

$$\frac{M_z}{M_{пр}} = 1 - f\left(\frac{H}{H_{пр}}\right). \quad (8.4)$$

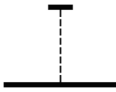
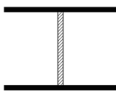
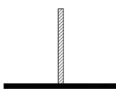
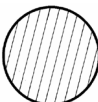
Подставляя условия (7.3), определяющие геометрические параметры рассматриваемого идеального равнополочного профиля, в уравнения (8.3), после интегрирования и некоторых преобразований полученных выражений, вместо соотношения (8.4) придем к уравнению кривой предельного состояния идеального равнополочного профиля нити, или к предельной кривой

$$\frac{M_z}{M_{пр}} + \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0. \quad (8.5)$$

Указанным способом могут быть найдены зависимости изгибающий момент-распор в предельном состоянии любого другого поперечного сечения нити конечной жесткости, некоторые из которых для наиболее распространенных типов профилей приведены в табл. 8.1, а соответствующие им гра-

фики представлены на рис. 8.2, а.

Таблица 8.1

Поперечное сечение		Вид зависимости изгибающий момент-распор в предельном состоянии поперечного сечения
Наименование профиля	Схема профиля	
Идеальный равнополочный		$\frac{M_z}{M_{пр}} + \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0$
Идеальный неравнополочный		$\frac{M_z}{M_{пр}} - \left(\frac{F}{f_1} - 1 \right) \left(\frac{H}{H_{пр}} + 1 \right) = 0, \quad -1 \leq \frac{H}{H_{пр}} \leq -1 + 2 \frac{f_1}{F};$ $\frac{M_z}{M_{пр}} + \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0, \quad -1 + 2 \frac{f_1}{F} \leq \frac{H}{H_{пр}} \leq 1$
Двутавровый		$\frac{M_z}{M_{пр}} + \frac{1}{\frac{f}{F} \left(2 - \frac{f}{F} \right)} \left(\frac{H}{H_{пр}} \right)^2 - 1 = 0, \quad 0 \leq \frac{H}{H_{пр}} \leq \frac{f}{F};$ $\left(1 - \frac{f}{2F} \right) \frac{M_z}{M_{пр}} + \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0, \quad \frac{f}{F} \leq \frac{H}{H_{пр}} \leq 1$
Тавровый		$\frac{M_z}{M_{пр}} - \left(1 + \frac{H}{H_{пр}} \right) \left(1 - \frac{2H}{H_{пр}} \right) = 0, \quad -1 \leq \frac{H}{H_{пр}} \leq 0;$ $\frac{M_z}{M_{пр}} + \frac{H}{H_{пр}} - 1 = 0, \quad 0 \leq \frac{H}{H_{пр}} \leq 1$
Прямоугольный		$\frac{M_z}{M_{пр}} + \left(\frac{H}{H_{пр}} \right)^2 - 1 = 0$
Кольцевой		$\frac{M_z}{M_{пр}} - \cos \frac{\pi}{2} \frac{H}{H_{пр}} = 0$
Круглый		$\sqrt[3]{\frac{M_z}{M_{пр}}} \sqrt{1 - \left(\frac{M_z}{M_{пр}} \right)^{2/3}} + \arccos \sqrt[3]{\frac{M_z}{M_{пр}}} - \frac{\pi}{2} \frac{H}{H_{пр}} = 0$

Примечание. В таблице принято, что F – площадь поперечного сечения, f – площадь стенки, а f_1 – площадь меньшего пояса; в тавровом профиле площадь стенки принята равной площади пояса.

Предельные кривые, при необходимости, могут быть продолжены в область отрицательных значений как изгибающего момента, так и распора, что приведет к построению замкнутых графиков, ограничивающих определенную внутреннюю область. Иллюстрацией сказанному является рис. 8.2, б, на котором предельные кривые продолжены в область отрицательных значений распора. Кстати говоря, обратим внимание на то, что все предельные кривые имеют свойство центральной симметрии, а кривые симметричных профилей кроме того являются симметричными относительно координатных осей.

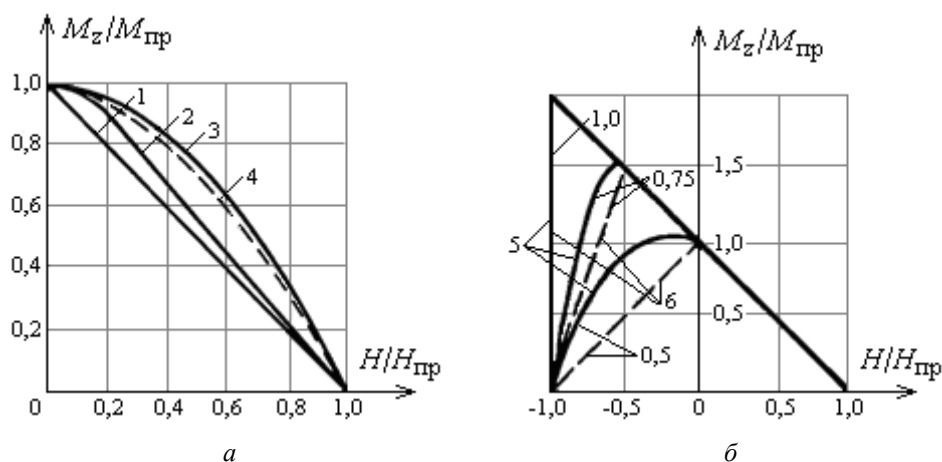


Рис. 8.2. Предельные кривые для симметричных (а) и несимметричных (б) поперечных сечений:

- 1 – идеальное равнополочное; 2 – двутавровое; 3 – прямоугольное; 4 – кольцевое;
- 5 – тавровое (при отношении площади полки к площади профиля от 0,5 до 1,0);
- 6 – идеальное неравнополочное (при отношении площади большей полки к площади профиля от 0,5 до 1,0)

Если теперь внимательно взглянуть на рис. 8.2, то можно увидеть, что точки, принадлежащие внутренней области предельных кривых, соответствуют сочетанию изгибающего момента и распора, при котором сечение не может быть приведено в предельное состояние. Точки же, лежащие на этой кривой, соответствуют сочетанию рассматриваемых внутренних усилий, когда напряжения по всему поперечному сечению становятся равными пределу текучести. При этом отметим, что, как следует из условия (8.5) и рис. 8.2, распор существенно влияет на величину изгибающего момента, которая вызывает в сечении предельное состояние. А именно увеличение распора практически при всех типах сечения приводит к уменьшению изгибающего момента, тем не менее, в случае некоторых типов несимметричных профилей его увели-

чение может привести не только к уменьшению, но и к увеличению момента.

Определим теперь вид зависимости, связывающей кривизну нити k и относительное удлинение ее оси ε_0 с полученным раньше уравнением предельной кривой (8.5). Из подобия треугольников на рис. 8.1, *в* следует, что $\varepsilon_0/k = \delta$. Представляя тогда расстояние δ между осями n - n и x - x в виде $\delta = -dM_z/dH$, искомую зависимость можно записать так:

$$\frac{\varepsilon_0}{k} = -\frac{dM_z}{dH}. \quad (8.6)$$

В заключение обратим внимание на следующее. Несмотря на то, что применение диаграммы жестко-пластического тела связано с целым рядом затруднений, гипотеза жестко-пластической работы материала позволяет получить ряд новых хорошо подтвержденных опытами решений и более правильно формулировать постановку многих практически важных (особенно нахождения значений предельных нагрузок) задач расчета конструкций. Отметим также, что работа поперечных сечений балок за пределом упругости с использованием диаграммы жестко-пластического тела изучалась ранее Л.М. Беленьким [8], И.Л. Диковичем [38], С.Д. Лейтесом [87] и некоторыми другими авторами. Причем полученные ими результаты, хотя несколько и отличаются по форме представления, но, тем не менее, достаточно хорошо согласуются с полученными в данном параграфе.

8.2.2. Основные зависимости расчета жестко-пластических нитей.

Используем полученные в предшествующем параграфе результаты для составления уравнений уточненной теории деформирования жестко-пластических нитей конечной жесткости. Прежде всего отметим, что схема работы этих нитей значительным образом отличается от рассмотренных ранее упруго-пластических нитей. Так, если упруго-пластические нити могут работать как с изгибом, так и без изгиба от начальной нагрузки, то жестко-пластические нити, являясь недеформируемыми по предположению, работают без изгиба как от начальной, так и от дополнительной нагрузки. В связи с этим жестко-пластические нити воспринимают только распор и не воспринимают изгибающих моментов. Отсюда, в свою очередь, следует, что при рассмотрении деформирования жестко-пластических нитей могут быть применены представленные в третьей главе соотношения теории нерастяжимых нитей.

Сказанное означает, что не только схема работы, но и поведение жестко-пластической нити конечной жесткости во всех фазах ее работы значительно отличается от рассмотренной ранее упруго-пластической нити. В первой – недеформируемой – фазе (рис. 8.3, *б*) значения действующих в поперечном сечении нити усилий отвечают точке, расположенной внутри предельной кривой, вследствие чего возникающие напряжения σ не превышают предела текучести материала σ_T (т. е. $\sigma < \sigma_T$). При этом в соответствии с определением жестко-пластического материала поперечное сечение нити является жестким (т. е. работает в пределах начального участка диаграммы σ - ε); элемент жестко-пластической нити – недеформируемым, а приращение кри-

визны и относительного удлинения оси нити равны нулю.

Недеформируемая фаза работы заканчивается, когда усилия в нити достигают значений, при которых создаются условия для реализации предельного состояния. Для этого значения усилий должны удовлетворять условию (8.5), общий вид которого является полностью идентичным полученному ранее условию появления первых пластических деформаций в упруго-пластической нити конечной жесткости (7.11). Однако, в отличие от последней, реализация предельного состояния в любом произвольном поперечном сечении жестко-пластической нити конечной жесткости приводит (в связи с восприятием нитью распора и невосприятием изгибающих моментов) к распространению пластических деформаций по всей ее длине. Иными словами, условие окончания первой – недеформируемой фазы работы нити, является одновременно условием начала и окончания второй – пластической фазы ее работы, поскольку пластические деформации охватывают всю нить. Таким образом, расчет нити конечной жесткости, обладающей идеальной жестко-пластической диаграммой растяжения материала, позволяет найти только величину ее предельной нагрузки.

Перейдем теперь к рассмотрению напряженно-деформированного состояния жестко-пластической нити конечной жесткости с поперечным сечением площадью F , моментом инерции I и пределом текучести материала σ_T , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = q_1 + q_2$ и находящейся в состоянии равновесия (рис. 8.3, а). Будем также считать, что нить на опорах закреплена шарнирно, ее материал является идеальным жестко-пластическим, а поперечное сечение имеет идеальный профиль.

Поведение нити конечной жесткости в первой – недеформируемой фазе (рис. 8.3, б), когда все ее поперечные сечения остаются жесткими, является статически идентичным рассмотренной ранее работе нерастяжимых нитей. Поэтому на этом здесь останавливаться не будем.

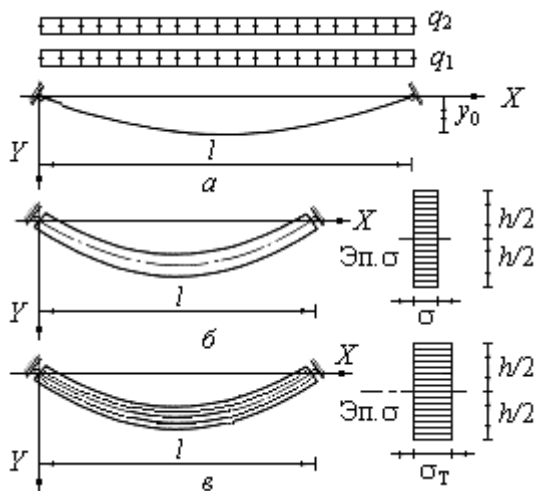


Рис. 8.3. Схема работы жестко-пластической нити конечной жесткости:
a – расчетная схема нити; *б* – недеформируемая фаза работы;
в – пластическая фаза работы

Недеформируемая фаза работы заканчивается, когда усилия в нити достигают значений, при которых появляются пластические деформации. Для этого должно удовлетворяться условие (8.5), в котором в связи с безмоментностью жестко-пластической нити конечной жесткости первый член левой части равен нулю. Определив далее в соответствии с положениями теории нерастяжимых нитей распор в нити и подставив его в соотношение (8.5), получим условие появления в нити пластических деформаций:

$$\frac{ql^2}{8y_0H_{пр}} - 1 = 0. \quad (8.7)$$

По достижении внешней нагрузкой значения, удовлетворяющего условию (8.7), наступает вторая – пластическая фаза работы нити, когда возникшие в момент окончания первой фазы пластические деформации охватывают всю нить, тем самым реализовав в ней предельное состояние (рис. 8.3, *в*).

Соответствующие зависимости, характеризующие условия окончания первой и начала второй фазы работы жестко-пластической нити конечной жесткости и величину ее предельной нагрузки для других типов нагрузок могут быть найдены изложенным выше способом. Для некоторых наиболее распространенных типов нагрузок эти зависимости приведены в табл. 8.2.

Таким образом, полностью определено поведение жестко-пластической нити конечной жесткости с идеальным поперечным сечением за пределом упругости и установлены зависимости для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах ее работы. Рассмотрение других типов поперечных сечений, как уже отмечалось раньше, не вносит в решение принципиальных изменений. В этом случае общий путь решения задачи будет аналогичным, необходимо только ввести соответствующие члены в уравнение для определения распора.

§ 8.3. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального жестко-пластического материала с упрочнением

Вначале отметим, что работа нитей конечной жесткости из упрочняющегося материала может быть рассмотрена с использованием допущений и предпосылок, принятых при изучении работы идеально-пластических (как упругих, так и жестких) нитей. Более того, здесь могут быть применены полученные ранее условия равновесия поперечного сечения нити в форме (7.1) или (8.1), поскольку никаких ограничений на характер связи между напряжениями и деформациями при выводе этих уравнений не накладывалось.

Также отметим, что общая последовательность построения решения для нитей конечной жесткости из упрочняющегося материала практически не отличается от подобных задач для жестко-пластических нитей. Однако решение, как правило, получается более сложным. В связи с этим рассмотрим

здесь наиболее простую, после идеально-пластической, аппроксимацию диаграммы работы материала, а именно: примем материал упрочняющимся линейно.

Таблица 8.2

Схема нагружения	Вид зависимости для условия окончания первой и начала второй фазы работы жестко-пластической нити	Величина предельной нагрузки жестко-пластической нити
	$\frac{q_1 l^2}{8y_0 H_{np}} - 1 = 0$	$q_{1, np} = \frac{8y_0 H_{np}}{l^2}$
	$\frac{1}{y_0 H_{np}} \left(\frac{q_1 l^2}{8} + \frac{3q_2 l^2}{32} \right) - 1 = 0$	$q_{2, np} = \frac{32}{3} \left(\frac{y_0 H_{np}}{l^2} - \frac{q_1}{8} \right)$
	$\frac{4}{3y_0 H_{np}} \left(\frac{3q_1 l^2}{32} + \frac{q_2 l^2}{32} \right) - 1 = 0$	$q_{2, np} = 24 \left(\frac{y_0 H_{np}}{l^2} - \frac{q_1}{8} \right)$
	$\frac{Pl}{4y_0 H_{np}} - 1 = 0$	$P_{np} = \frac{4y_0 H_{np}}{l}$
	$\frac{1}{y_0 H_{np}} \left(\frac{q_1 l^2}{8} + \frac{Pl}{4} \right) - 1 = 0$	$P_{np} = \frac{4y_0 H_{np}}{l} - \frac{q_1 l}{2}$
	$\frac{Pl}{3y_0 H_{np}} - 1 = 0$	$P_{np} = \frac{3y_0 H_{np}}{l}$
	$\frac{4}{3y_0 H_{np}} \left(\frac{3q_1 l^2}{32} + \frac{Pl}{4} \right) - 1 = 0$	$P_{np} = 3 \left(\frac{y_0 H_{np}}{l} - \frac{q_1 l}{8} \right)$

Примечание. В таблице принято, что в случае действия начальной и дополнительной нагрузок разного типа величина предельной нагрузки приведена для дополнительной нагрузки.

8.3.1. Работа поперечного сечения нити. Рассмотрим общий случай работы поперечного сечения нити конечной жесткости, считая ее материал жестко-пластическим с линейным упрочнением (рис. 6.1, б). В этом случае напряжение σ и деформация ε связаны известным условием [6]

$$\sigma = \sigma_T \text{sign } \varepsilon + E_0 \varepsilon, \quad (8.8)$$

где параметр E_0 является модулем упрочнения материала.

Напомним, что указанное условие справедливо только в том случае, если величина напряжения σ превышает предел текучести материала σ_T ; в противном же случае (т. е. при $\sigma < \sigma_T$) развитие деформаций в жестко-пластическом материале по определению невозможно и $\varepsilon = 0$.

Обратимся теперь к составленным ранее условиям равновесия поперечного сечения нити (7.1) или (8.1) и рассмотрим на их основе работу поперечного сечения нити конечной жесткости идеального профиля (рис. 8.4, а). При этом заметим, что для жестко-пластического материала с линейным упрочнением в общем случае необходимо рассмотреть три стадии работы сечения: первую – жесткую (рис. 8.4, б), а также вторую и третью пластические – когда нейтральная ось проходит внутри (рис. 8.4, в) и вне (рис. 8.4, г) поперечного сечения нити.

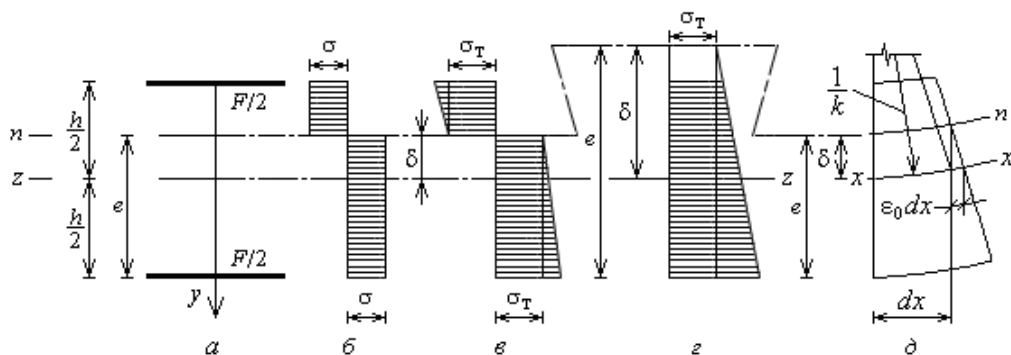


Рис. 8.4. Работа поперечного сечения идеального профиля нити конечной жесткости из жестко-пластического материала с линейным упрочнением: а – поперечное сечение нити; б – эпюра напряжений в жесткой стадии; в, г – эпюры напряжений в пластических стадиях; д – деформированный элемент нити

Работа поперечного сечения нити в первой – жесткой – стадии (рис. 8.4, б) была рассмотрена ранее. Поэтому здесь отметим, что соотношение, характеризующее условие окончания жесткой стадии работы, а также уравнение кривой предельного состояния идеального профиля имеет вид (8.5).

Определим теперь вид расчетных зависимостей во второй стадии работы

поперечного сечения нити (рис. 8.4, в). Подставляя в соотношения (7.1) или (8.1) выражение (8.8), а также представляя площадь элемента сечения dF в виде $dF = b(y)dy$, где $b(y)$ – ширина профиля нити на расстоянии y от оси $n-n$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T \left[-\int_{y_1}^0 b(y)dy + \int_0^{y_2} b(y)dy \right] + E_0 k \int_{y_1}^{y_2} y b(y)dy &= H; \\ \sigma_T \left[-\int_{y_1}^0 y b(y)dy + \int_0^{y_2} y b(y)dy \right] + E_0 k \int_{y_1}^{y_2} y^2 b(y)dy &= M_z + H\delta, \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

причем здесь пределы интегрирования приняты равными $y_1 = -(h - e)$, $y_2 = e$.

Записывая далее параметр e в виде $e = h/2 + \delta$, выполним преобразования уравнений (8.9). В результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{H}{H_{\text{пр}}} &= \frac{2}{F} \int_0^{\delta} b(y)dy + \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} \cdot \frac{W_{\text{пр}}}{I} \delta; \\ \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} &= 1 - \frac{2}{W_{\text{пр}}} \int_0^{\delta} y b(y)dy + \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

После интегрирования, исключения из выражений (8.10) величины δ и приведения подобных получим соотношение, устанавливающее зависимость между значениями изгибающего момента, распора и кривизны, приводящих поперечное сечение нити в предельное состояние, общий вид которой удобно представить следующим образом:

$$\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} = f\left(\frac{H}{H_{\text{пр}}}, \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}\right). \quad (8.11)$$

Для рассматриваемого случая зависимость (8.11) в развернутом виде представляет собой уравнение предельной кривой идеального равнополочного профиля нити во второй стадии его работы, которое будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} - \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{\text{пр}}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}; \\ 1 + 2 \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} - \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{\text{пр}}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Отметим здесь следующее. Если допустить, что материал нити конечной жесткости не обладает линейным упрочнением (т. е. считать, что $E_0 = 0$), то из второго уравнения (8.12) вытекает ранее полученная формула (8.5), определяющая кривую предельного состояния идеального равнополочного профиля нити из идеального жестко-пластического материала.

Подобным же образом можно получить выражение, определяющее относительное удлинение оси нити ϵ_0 , в случае работы ее сечения во второй

стадии. Если из первого уравнения системы (8.10) найти расстояние между нейтральной осью $n-n$ и осью нити $x-x$, а также учесть, что $\varepsilon_0/k = \delta$, то для относительного удлинения оси нити ε_0 получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{\text{пр}}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}; \\ \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{\text{пр}}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Вторая стадия работы сечения продолжается до тех пор, пока нейтральная ось проходит внутри поперечного сечения нити. Но при еще большем возрастании внутренних усилий нейтральная ось достигнет верхнего пояса. Составим условие окончания второй стадии работы поперечного сечения. Для этого используем первое из выражений (8.9), учитывая в нем, что $e = h$. Тогда после интегрирования и несложных преобразований будем иметь

$$\frac{H}{H_{\text{пр}}} = 1 + \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}. \quad (8.14)$$

Рассмотрим теперь третью стадию работы поперечного сечения, когда нейтральная ось проходит вне нити (рис. 8.4, z). Уравнения равновесия (7.1) или (8.1) применительно к этому случаю запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T \int_{y_1}^{y_2} b(y) dy + E_0 k \int_{y_1}^{y_2} y b(y) dy &= H; \\ \sigma_T \int_{y_1}^{y_2} y b(y) dy + E_0 k \int_{y_1}^{y_2} y^2 b(y) dy &= M_z + H \delta, \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

где пределы интегрирования по-прежнему равны $y_1 = -(h - e)$, $y_2 = e$.

Выполняя далее преобразования, аналогичные тем, что были произведены с уравнениями для второй стадии работы сечения, вместо соотношений (8.10) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{H}{H_{\text{пр}}} &= 1 + \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} \cdot \frac{W_{\text{пр}}}{I} \delta; \\ \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} &= \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Последнее из соотношений (8.16) является уравнением предельной кривой идеального равнополочного профиля нити в третьей стадии работы ее поперечного сечения; при этом выражение, определяющее относительное удлинение оси нити ε_0 в третьей стадии работы, запишется так:

$$\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 = 0. \quad (8.17)$$

Таким образом, рассмотрены все возможные стадии работы идеального

поперечного сечения нити конечной жесткости из жестко-пластического материала с линейным упрочнением, а также получены зависимости, связывающие действующие в нити изгибающий момент и распор с кривизной и относительным удлинением ее оси.

Соответствующие зависимости, устанавливающие функциональную связь между действующими в нити изгибающими моментами и распором, с одной стороны, и кривизной и относительным удлинением ее оси, с другой стороны, для других профилей нити конечной жесткости могут быть найдены изложенным выше способом. Причем для некоторых наиболее распространенных типов профилей зависимости во второй стадии работы сечения (уравнения предельных кривых) приведены в табл. 8.3, а в табл. 8.4 представлены выражения, определяющие относительное удлинение оси нити.

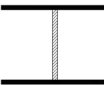
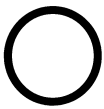
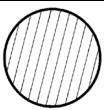
В свою очередь в табл. 8.5 для тех же типов поперечных сечений приведены выражения, характеризующие условия окончания второй и начала третьей стадии работы сечения нити, а также уравнения предельных кривых и относительного удлинения оси нити в третьей стадии работы сечения. Обратим здесь внимание на следующее. Как следует из представленных в табл. 8.5 данных, если условия окончания второй и начала третьей стадии работы сечения нити имеют отличный друг от друга характер для каждого типа поперечного сечения, то выражения для изгибающего момента, распора, кривизны и относительного удлинения оси в третьей стадии работы сечения нити конечной жесткости напротив – полностью идентичны и совпадают с зависимостями для идеального профиля. Последнее служит свидетельством того, что деформирование нити в случае работы ее сечения в третьей стадии не зависит от типа ее поперечного сечения.

На рис. 8.5 и 8.6 представлены предельные кривые для некоторых наиболее распространенных типов поперечных сечений нити при значении $E_0 I k / M_0 = 1$. Причем на рис. 8.5 показаны кривые, расположенные в области положительных значений изгибающего момента и распора. При необходимости эти кривые могут быть продолжены в область отрицательных значений как изгибающего момента, так и распора. Иллюстрацией сказанному является рис. 8.6, на котором предельные кривые продолжены в область отрицательных значений распора. Кстати говоря, обратим внимание на то, что на обоих рисунках граница между стадиями работы поперечного сечения жестко-пластической нити с линейным упрочнением материала соответствует точкам излома графиков.

Здесь также стоит отметить, что все предельные кривые, как и в рассмотренном ранее случае жестко-пластического материала без упрочнения, симметричны относительно начала координат, а при симметричном поперечном сечении нити являются также симметричными относительно координатных осей. Однако, в отличие от представленных на рис. 8.2 кривых для нитей из жестко-пластического материала без упрочнения, в рассматриваемом случае предельные кривые по определению не могут быть замкнутыми. Поэтому они заполняют всю плоскость $M_z / M_{np} - H / H_{np}$ и охватывают все возможные сочетания изгибающего момента и распора. Именно в связи с указанным,

нить конечной жесткости из жестко-пластического материала с линейным упрочнением может воспринять любую величину нагрузки, какой бы большой она не была. При этом само собой разумеется, что кривизна и относительное удлинение оси нити при этом всегда будут конечными.

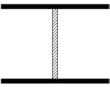
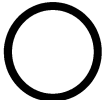
Таблица 8.3

Поперечное сечение		Вид зависимости изгибающий момент-распор-кривизна для жестко-пластической нити с линейным упрочнением во второй стадии работы сечения
Наименование профиля	Схема профиля	
Идеальный равнополочный		$1 + \frac{E_0 I k}{M_{np}} - \frac{M_z}{M_{np}} = 0, \quad \frac{H}{H_{np}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{np}};$ $1 + 2 \frac{E_0 I k}{M_{np}} - \frac{M_z}{M_{np}} - \frac{H}{H_{np}} = 0, \quad \frac{H}{H_{np}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{np}}$
Двутавровый		$\left(\frac{f}{F} + \frac{6-3\frac{f}{F}}{6-4\frac{f}{F}} \frac{E_0 I k}{M_{np}} \right)^2 \left(1 + \frac{E_0 I k}{M_{np}} - \frac{M_z}{M_{np}} \right) - \frac{f}{2-\frac{f}{F}} \left(\frac{H}{H_{np}} \right)^2 = 0,$ $\frac{H}{H_{np}} \leq \frac{f}{F} + \frac{6-3\frac{f}{F}}{6-4\frac{f}{F}} \frac{E_0 I k}{M_{np}};$ $\left(1 - \frac{1}{2} \frac{f}{F} \right) \left(1 + \frac{E_0 I k}{M_{np}} - \frac{M_z}{M_{np}} \right) + \frac{6-3\frac{f}{F}}{6-4\frac{f}{F}} \frac{E_0 I k}{M_{np}} + \frac{1}{2} \frac{f}{F} - \frac{H}{H_{np}} = 0,$ $\frac{H}{H_{np}} \geq \frac{f}{F} + \frac{6-3\frac{f}{F}}{6-4\frac{f}{F}} \frac{E_0 I k}{M_{np}};$
Прямоугольный		$\left(1 + \frac{3}{2} \frac{E_0 I k}{M_{np}} \right)^2 \left(1 + \frac{E_0 I k}{M_{np}} - \frac{M_z}{M_{np}} \right) - \left(\frac{H}{H_{np}} \right)^2 = 0$
Кольцевой		$2 \frac{E_0 I k}{M_{np}} \sqrt{1 - \left(\frac{M_z}{M_{np}} - \frac{E_0 I k}{M_{np}} \right)^2} +$ $+ \arccos \left(\frac{M_z}{M_{np}} - \frac{E_0 I k}{M_{np}} \right) - \frac{\pi}{2} \frac{H}{H_{np}} = 0$
Круглый		$\left(\sqrt[3]{\frac{M_z}{M_{np}} - \frac{E_0 I k}{M_{np}} + \frac{8}{3} \frac{E_0 I k}{M_{np}}} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{M_z}{M_{np}} - \frac{E_0 I k}{M_{np}} \right)^{2/3}} +$

		$+ \arccos \sqrt{\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} - \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}} - \frac{\pi}{2} \frac{H}{H_{\text{пр}}} = 0$

Примечание. В таблице принято, что F – площадь поперечного сечения, а f – площадь стенки.

Таблица 8.4

Поперечное сечение		Вид зависимости для относительного удлинения оси жестко-пластической нити с линейным упрочнением во второй стадии работы сечения
Наименование профиля	Схема профиля	
Идеальный равнополочный		$\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} = 0, \quad \frac{H}{H_{\text{пр}}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}};$ $\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} = 0, \quad \frac{H}{H_{\text{пр}}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}$
Двутавровый		$\left(\frac{6-4 \frac{f}{F} \frac{f}{F} \frac{M_{\text{пр}}}{E_0 I k} + 1}{6-3 \frac{f}{F}} \right) \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} = 0,$ $\frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} \geq \frac{6-4 \frac{f}{F}}{6-3 \frac{f}{F}} \left(\frac{H}{H_{\text{пр}}} - \frac{f}{F} \right);$ $\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{6-3 \frac{f}{F}}{6-4 \frac{f}{F}} \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} = 0, \quad \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} \leq \frac{6-4 \frac{f}{F}}{6-3 \frac{f}{F}} \left(\frac{H}{H_{\text{пр}}} - \frac{f}{F} \right)$
Прямоугольный		$\left(\frac{2}{3} \frac{M_{\text{пр}}}{E_0 I k} + 1 \right) \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} = 0$
Кольцевой		$\arcsin \frac{\pi}{4} \frac{M_{\text{пр}}}{E_0 I k} \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} + \frac{\pi}{2} \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{\pi}{2} \frac{H}{H_{\text{пр}}} = 0$

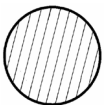
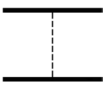
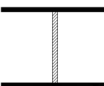
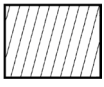
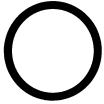
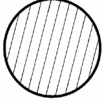
Круглый		$\arcsin \frac{3\pi}{12} \frac{M_{\text{пр}}}{E_0 I k} \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} + \frac{3\pi}{16} \frac{M_{\text{пр}}}{E_0 I k} \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} \sqrt{1 - \left(\frac{3\pi}{16} \frac{M_{\text{пр}}}{E_0 I k} \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} \right)^2} +$ $+ \frac{\pi}{2} \frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{\pi}{2} \frac{H}{H_{\text{пр}}} = 0$
Примечание. В таблице принято, что F – площадь поперечного сечения, а f – площадь стенки.		

Таблица 8.5

Поперечное сечение		Вид зависимости для		
Наименование профиля	Схема профиля	условия окончания второй и начала третьей стадии работы сечения	изгибающего момента, распора и кривизны в третьей стадии работы сечения	относительного удлинения оси нити в третьей стадии работы сечения
Идеальный равнополочный		$\frac{H}{H_{\text{пр}}} = 1 + \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}$	$\frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} - \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} = 0$	$\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 = 0$
Двутавровый		$\frac{H}{H_{\text{пр}}} = 1 +$ $6 - 3 \frac{f}{F} \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} + \frac{6 - 4 \frac{f}{F} M_{\text{пр}}}{F}$	$\frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} - \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} = 0$	$\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 = 0$
Прямоугольный		$\frac{H}{H_{\text{пр}}} = 1 + \frac{3}{2} \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}$	$\frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} - \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} = 0$	$\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 = 0$
Кольцевой		$\frac{H}{H_{\text{пр}}} = 1 + \frac{4}{\pi} \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}$	$\frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} - \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} = 0$	$\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 = 0$
Круглый		$\frac{H}{H_{\text{пр}}} = 1 + \frac{16}{3\pi} \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}$	$\frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} - \frac{M_z}{M_{\text{пр}}} = 0$	$\frac{E_0 \varepsilon_0}{\sigma_T} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 = 0$
Примечание. В таблице принято, что F – площадь поперечного сечения, а f – площадь стенки.				

8.3.2. Вывод расчетных зависимостей. Используем полученные результаты для вывода расчетных зависимостей уточненной теории деформирования жестко-пластических нитей конечной жесткости с линейным упрочнением материала. Для этого применим принцип возможных перемещений.

Предположим, что нить с поперечным сечением площадью F и моментом инерции I нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = q_1 + q_2$ и находится в состоянии равновесия (рис. 8.7, а). Будем также считать, что нить на опорах закреплена шарнирно, ее материал является идеальным жестко-пластическим с линейным упрочнением и пределом текучести σ_T , а поперечное сечение имеет идеальный профиль. При выводе разрешающих уравнений примем в качестве независимой переменной площадь поперечного сечения F , а в качестве искомой функции – распор H .

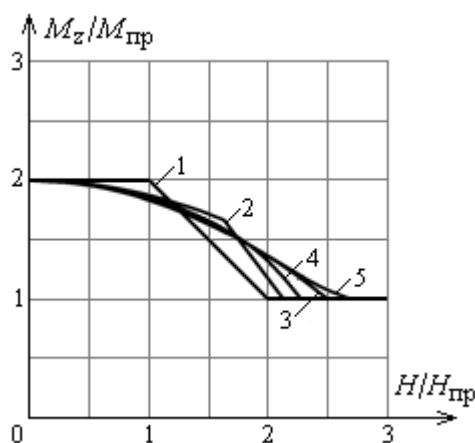


Рис. 8.5. Предельные кривые для некоторых типов поперечных сечений в области положительных значений изгибающего момента и распора: 1 – идеальное равнополочное; 2 – двутавровое; 3 – прямоугольное; 4 – кольцевое; 5 – круглое

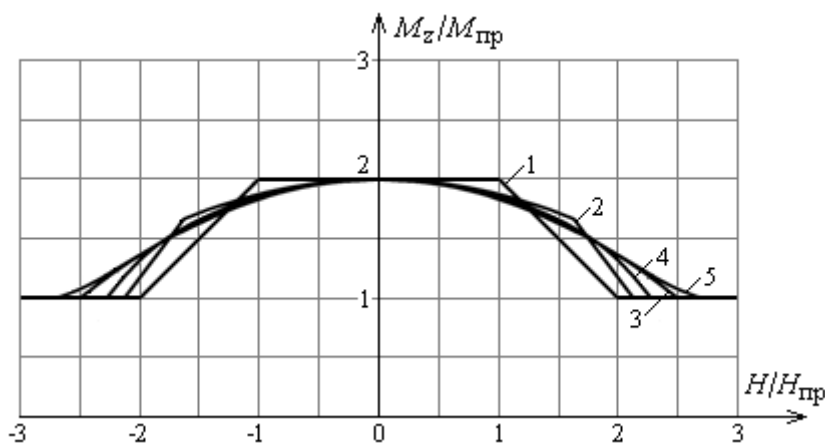


Рис. 8.6. Предельные кривые для некоторых типов поперечных сечений в области

положительных и отрицательных значения распора: 1 – идеальное равнополочное; 2 – двутавровое; 3 – прямоугольное; 4 – кольцевое; 5 – круглое

Поведение нити конечной жесткости в первой фазе будет одинаковым для всех расчетных случаев независимо от свойств материала в пластической области, было изложено ранее и поэтому здесь не рассматривается.

Недеформируемая фаза работы заканчивается, когда распор в нити достигает значения, при котором появляются пластические деформации. Для этого должно удовлетворяться условие (8.5), которое для рассматриваемого случая нагружения нити принимает вид (8.7).

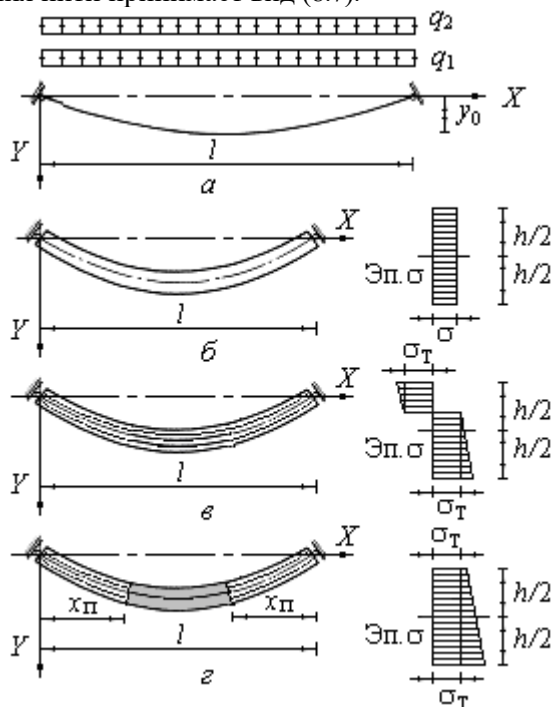


Рис. 8.7. Деформирование нити конечной жесткости из жестко-пластического материала с линейным упрочнением: а – расчетная схема нити; б – недеформируемая фаза работы; в, г – пластические фазы работы

По достижении внешней нагрузкой значения, удовлетворяющего условию (8.7), наступает вторая – пластическая фаза работы, характеризующаяся тем, что материал нити работает с линейным упрочнением, а нейтральная ось находится внутри ее поперечного сечения (рис. 8.7, в). Здесь стоит обратить внимание на то, что последнее обстоятельство является отличным от нитей конечной жесткости из упруго-пластического материала с линейным упрочнением, у которых во второй фазе изгиба в пролете имеется несколько различных по своим свойствам участков. Для дальнейшего решения задачи определим расчетные зависимости при деформировании нити конечной

жесткости во второй фазе ее работы.

Если площадь поперечного сечения нити получит очень малое, но конечное приращение своей величины, равное δF , то изменятся внутренние усилия, действующие в нити, и ее геометрия. Изгибающий момент M_z получит некоторое приращение δM_z , угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити φ – приращение $\delta\varphi$, а нить переместится из своего положения равновесия на величину δy . Кроме того распор получит некоторое приращение своей величины, равное δH .

Во второй фазе работы выражения, определяющие изогнутую ось нити и эпюру изгибающих моментов для пластического участка с упрочнением (в связи с безмоментностью недеформируемой фазы работы нити) сохраняют вид (4.29) и (4.31). Напомним, что поскольку эти выражения получены с учетом условий равновесия, а также пропорциональности прогибов и изгибающих моментов в нити конечной жесткости и аналогичной ей по всем параметрам балке, то они справедливы при любой диаграмме σ - ε . Необходимо только иметь в виду, что при определении указанных параметров в эти формулы должны быть подставлены соответствующие зависимости.

Тогда для приращений параметров напряженно-деформированного состояния нити для пластического участка с упрочнением ($0 \leq x \leq l$) можно написать:

$$\delta y = -\frac{M_z^\delta (y^\delta + y_0) \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (8.18)$$

$$\delta M_z = -\frac{(M_z^\delta)^2 (y^\delta + y_0) \delta H}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)}; \quad (8.19)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T \delta H}{E_0 H_{np}} dx \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{np}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{np}}; \quad (8.20)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_T}{M_{np}} (I \delta k + \delta I k + \delta I \delta k) dx \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{np}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{np}}; \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} \delta d\varphi = & -\frac{1}{E_0 I (I + \delta I)} \left\{ \frac{I \delta H (M_z^\delta)^2 (y^\delta + y_0)}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta I M_z^\delta (M_z^\delta - Hy_0)}{Hy^\delta + M_z^\delta} - \delta I M_{np} \right\} dx \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{np}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{np}}; \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} \delta d\varphi = & -\frac{1}{2E_0 I (I + \delta I)} \left\{ \frac{I \delta H (M_z^\delta)^2 (y^\delta + y_0)}{(Hy^\delta + \delta Hy^\delta + M_z^\delta)(Hy^\delta + M_z^\delta)} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta I M_z^\delta (M_z^\delta - Hy_0)}{Hy^\delta + M_z^\delta} - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{M_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} \left[I\delta H - \delta I(H - H_{\text{пр}}) \right] \Bigg\} dx \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{\text{пр}}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}. \quad (8.23)$$

При этом заметим, что при выводе последних соотношений значения кривизны и относительного удлинения оси нити с учетом выражений (8.12) и

$$(8.13) \text{ принимались равными } k = \frac{M_{\text{пр}}}{E_0 I} \left(\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} - 1 \right) \quad \text{и} \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_T H}{E_0 H_{\text{пр}}} \quad \text{в случае}$$

$$\frac{H}{H_{\text{пр}}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}, \text{ а также } k = \frac{M_{\text{пр}}}{2E_0 I} \left(\frac{M_z}{M_{\text{пр}}} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 \right) \quad \text{и} \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_T I k}{M_{\text{пр}}} \quad \text{при} \quad \frac{H}{H_{\text{пр}}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}}.$$

Найдем теперь работу внешних и внутренних сил. Поскольку на нить действует только равномерно распределенная нагрузка q , то для работы внешних сил имеем:

$$U_1 = \int_0^l q \delta y dx. \quad (8.24)$$

В свою очередь, работа внутренних сил состоит из двух слагаемых: работы действующего в элементе dx усилия $H + \delta H$ на перемещении δdx и работы изгибающего момента $M_z + \delta M_z$ на изменении угла между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями нити $\delta d\varphi$:

$$U_2^1 = - \int_0^l (H + \delta H) \delta dx; \quad (8.25)$$

$$U_2^2 = - \int_0^l (M_z + \delta M_z) \delta d\varphi. \quad (8.26)$$

Подставляя в уравнения (8.24) – (8.26) необходимые соотношения для внешних и внутренних сил и возможных перемещений, приводя подобные члены и применяя принцип Лагранжа (4.19), согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю, получим:

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ при } \frac{H}{H_{\text{пр}}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{\text{пр}}} \\ & - \int_0^l \frac{q M_z^6 y^6 (y^6 + y_0) \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_0^l \frac{\sigma_T \delta H (H + \delta H)}{E_0 H_{\text{пр}}} dx + \\ & + \frac{I \delta H}{E_0 I (I + \delta I)} \int_0^l \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0 - \delta Hy_0) (y^6 + y_0)}{(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \\ & + \frac{\delta I}{E_0 I (I + \delta I)} \int_0^l \frac{(M_z^6)^2 (M_z^6 - Hy_0) (M_z^6 - Hy_0 - \delta Hy_0)}{(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)} dx - \end{aligned}$$

$$-\frac{\delta I M_{\text{np}}}{E_0 I (I + \delta I)} \int_0^l \frac{M_z^6 (M_z^6 - Hy_0 - \delta Hy_0)}{Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6} dx = 0; \quad (8.27)$$

• при $\frac{H}{H_{\text{np}}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{\text{np}}}$

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \frac{q M_z^6 y^6 (y^6 + y_0) \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} dx - \int_0^l \frac{\sigma_T}{M_{\text{np}}} (I \delta k + \delta I k + \delta I \delta k) (H + \delta H) dx + \\ & + \frac{I \delta H}{2 E_0 I (I + \delta I)} \int_0^l \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0 - \delta Hy_0) (y^6 + y_0)}{(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)^2} dx + \\ & + \frac{\delta I}{2 E_0 I (I + \delta I)} \int_0^l \frac{(M_z^6)^2 (M_z^6 - Hy_0) (M_z^6 - Hy_0 - \delta Hy_0)}{(Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)} dx - \\ & - \frac{M_{\text{np}} [I \delta H - \delta I (H - H_{\text{np}})]}{2 E_0 I (I + \delta I) H_{\text{np}}} \int_0^l \frac{M_z^6 (M_z^6 - Hy_0 - \delta Hy_0)}{Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6} dx = 0. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Разделив далее уравнения (8.27) и (8.28) почленно на δH и переходя затем к пределу при $\delta H \rightarrow 0$ и $\delta F \rightarrow 0$, окончательное решение задачи по определению распора в нити конечной жесткости из жестко-пластического материала с линейным упрочнением представим в следующем виде:

• при $\frac{H}{H_{\text{np}}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{\text{np}}}$

$$\begin{aligned} & E_0 I \int_0^l \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0) (m_0 + E_0 I y_0)}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx - \frac{\sigma_T l}{E_0 H_{\text{np}}} H - \\ & - q \int_0^l \frac{M_z^6 m_0 (m_0 + E_0 I y_0)}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx = 0; \end{aligned} \quad (8.29)$$

• при $\frac{H}{H_{\text{np}}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{\text{np}}}$

$$\begin{aligned} & \frac{E_0 I}{2} \int_0^l \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0) (m_0 + E_0 I y_0)}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx + \frac{q \sigma_T l}{H M_{\text{np}}} - \\ & - q \int_0^l \frac{M_z^6 m_0 (m_0 + E_0 I y_0)}{(H m_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx - \frac{M_{\text{np}}}{2 H_{\text{np}}} \int_0^l \frac{M_z^6 (M_z^6 - Hy_0)}{H m_0 + E_0 I M_z^6} dx = 0, \end{aligned} \quad (8.30)$$

где по-прежнему считается, что $m_0 = E_0 I y_0^6$.

Значения входящих в последние уравнения интегральных составляющих зависят от вида приложенной к нити нагрузки и условий закрепления ее концов и могут быть определены непосредственным либо численным интегриро-

ванием, либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса [56, 57].

Вторая фаза работы продолжается до тех пор, пока нейтральная ось нити находится внутри ее поперечного сечения, и оканчивается, когда она достигает верхнего пояса поперечного сечения. Этому моменту соответствует условие (8.14), которое после подстановки вместо кривизны k ее значения, определенного через изгибающие моменты M_z , вычисленные для наиболее нагруженного сечения нити (в данном случае в середине пролета), приводит к виду

$$\frac{6E_0I(ql^2 - 8Hy_0)}{M_{\text{пр}}(5l^2H + 48E_0I)} - \frac{H}{H_{\text{пр}}} + 1 = 0. \quad (8.31)$$

По достижении внешней нагрузки значения, определяемого последним равенством, начинается третья фаза деформирования, когда в середине пролета нити появляется пластический участок конечной протяженности, в котором нейтральная ось проходит вне нити (рис. 8.7, з). Определим расчетные зависимости при работе нити конечной жесткости в этой фазе изгиба.

Заметим, что зависимости, определяющие изогнутую ось нити и распределение изгибающих моментов по ее длине, как уже указывалось выше, сохраняют вид (4.29) и (4.31). В свою очередь, приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити для пластических участков, поперечные сечения которых находятся во второй стадии работы ($0 \leq x \leq x_{\text{п}}$, $l - x_{\text{п}} \leq x \leq l$), также будут описываться равенствами (8.18) – (8.23), а для пластического участка, поперечные сечения которого находятся в третьей стадии ($x_{\text{п}} \leq x \leq l - x_{\text{п}}$), приращения δy , δM_z , δdx и $\delta d\varphi$ определяются по формулам:

$$\delta y = -\frac{M_z^6 y^6 (y^6 + y_0) \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (8.32)$$

$$\delta M_z = -\frac{(M_z^6)^2 (y^6 + y_0) \delta H}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)}; \quad (8.33)$$

$$\delta dx = \frac{\sigma_{\text{т}} \delta H}{E_0 H_{\text{пр}}} dx; \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} \delta d\varphi = & -\frac{1}{E_0 I(I + \delta I)} \left\{ \frac{I \delta H (M_z^6)^2 (y^6 + y_0)}{(Hy^6 + \delta Hy^6 + M_z^6)(Hy^6 + M_z^6)} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta I M_z^6 (M_z^6 - Hy_0)}{(Hy^6 + M_z^6)} \right\} dx. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Здесь принято, что $x_{\text{п}}$ – координата границы между пластическими участками, поперечные сечения которых находятся во второй и третьей стадиях работы. Кроме того согласно второму соотношению (8.16) и выражению

(8.17) кривизна и относительное удлинение оси участка нити с расположенной вне поперечного сечения нейтральной осью принимались равными

$$k = \frac{M_z}{E_0 I}; \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_T}{E_0} \left(\frac{H}{H_{np}} - 1 \right).$$

Записывая далее, как и при рассмотрении предыдущей фазы деформирования нити, выражения для работ внешних и внутренних сил для обоих типов пластических участков и составляя затем уравнение принципа возможных перемещений, придем к уравнению для определения величины распора в третьей фазе работы жестко-пластической нити конечной жесткости с линейным упрочнением материала:

- при соблюдении условия $\frac{H}{H_{np}} \leq \frac{E_0 I k}{M_{np}}$ для пластических участков, в ко-

торых нейтральная ось проходит внутри поперечного сечения:

$$\begin{aligned} & 2E_0 I \int_0^{x_n} \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0)(m_0 + E_0 I y_0)}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx + \\ & + E_0 I \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0)(m_0 + E_0 I y_0)}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx - \frac{\sigma_T l}{E_0 H_{np}} H - \\ & - 2q \int_0^{x_n} \frac{M_z^6 m_0 (m_0 + E_0 I y_0)}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx - q \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{M_z^6 m_0 (m_0 + E_0 I y_0)}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx = 0; \quad (8.36) \end{aligned}$$

- при соблюдении условия $\frac{H}{H_{np}} \geq \frac{E_0 I k}{M_{np}}$ для пластических участков, в ко-

торых нейтральная ось проходит внутри поперечного сечения:

$$\begin{aligned} & E_0 I \int_0^{x_n} \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0)(m_0 + E_0 I y_0)}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx + \frac{\sigma_T}{M_{np}} \left[\frac{qI}{H} x_n - \frac{HM_{np}}{E_0 H_{np}} (l - 2x_n) \right] + \\ & + E_0 I \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{(M_z^6)^3 (M_z^6 - Hy_0)(m_0 + E_0 I y_0)}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^3} dx - 2q \int_0^{x_n} \frac{M_z^6 m_0 (m_0 + E_0 I y_0)}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx - \\ & - q \int_{x_n}^{l-x_n} \frac{M_z^6 m_0 (y^6 + E_0 I y_0)}{(Hm_0 + E_0 I M_z^6)^2} dx - \frac{M_{np}}{H_{np}} \int_0^{x_n} \frac{M_z^6 (M_z^6 - Hy_0)}{Hm_0 + E_0 I M_z^6} dx = 0. \quad (8.37) \end{aligned}$$

Координату границы между пластическими участками x_n определяем по формуле, полученной из условия (8.14) с учетом кривизны k , в свою очередь выраженной через изгибающие моменты M_z и M_z^6 , что в результате позволяет записать:

$$\frac{6E_0 I (l x_n - x_n^2) [q(l x_n - x_n^2) - 2Hy_0]}{M_{np} [H(l^3 x_n - 2l x_n^3 + x_n^4) + 12E_0 I (l x_n - x_n^2)]} - \frac{H}{H_{np}} + 1 = 0. \quad (8.38)$$

Решая уравнение (8.36) или (8.37) совместно с уравнением (8.38), найдем неизвестную величину распора H и координату границы между участками по длине нити x_n при конкретных размерах поперечного сечения и величине внешней нагрузки. При этом, как уже отмечалось, должно соблюдаться соответствие между типом участка нити и видом используемых в вычислениях функций y^6 и M_z^6 .

Подобным же образом можно решить задачу деформирования нити с учетом линейного упрочнения при любом другом виде поперечного сечения, опорных закреплениях и характере внешней нагрузки.

В завершение изложения отметим несколько характерных моментов, связанных с работой жестко-пластической нити конечной жесткости с линейным упрочнением материала. Во-первых, анализ результатов работы как поперечного сечения, так и нити в целом свидетельствует, что распор существенно влияет на величину изгибающего момента, которая вызывает в сечении предельное состояние. Так увеличение распора практически при всех типах сечения приводит к уменьшению изгибающего момента, однако в случае некоторых типов несимметричных профилей его увеличение может привести не только к уменьшению, но и к увеличению момента.

Во-вторых, уменьшение величины изгибающего момента, который способен воспринять сечение, приводит к увеличению прогибов и при малых прогибах превалирует над ними. При больших же прогибах распор оказывает на работу нити очевидное влияние вследствие уменьшения их значений. Если же поперечное сечение нити несимметрично, то взаимовлияние между распором и изгибающим моментом становится уже не столь очевидным, но более сложным и неоднозначным. В некоторых случаях распор может вызывать не только уменьшение, но и увеличение изгибающего момента, который нужно приложить к сечению, чтобы привести его в предельное состояние. Именно поэтому для каждого случая несимметричного поперечного сечения нити необходимо не только находить конкретное решение задачи, но также выполнять анализ полученных результатов.

Таким образом, полностью определено поведение жестко-пластической нити конечной жесткости с линейным упрочнением материала и с идеальным поперечным сечением за пределом упругости и установлены зависимости для нахождения параметров напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах ее работы. Рассмотрение же других типов поперечных сечений, как уже отмечалось ранее, не вносит в решение принципиальных изменений. В этом случае общий путь решения задачи будет аналогичным, необходимо только ввести соответствующие члены в уравнение для определения распора.

ГЛАВА 9

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

§ 9.1. Предварительные замечания. Сущность решения задачи

Рассмотрим задачу устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости за пределом упругости с учетом геометрической и физической нелинейности. Такие задачи вызывают в последнее время большой практический интерес, поскольку при работе современных висячих систем (особенно раскрепленных связями в горизонтальной плоскости) нередко допускаются пластические деформации, а их конструктивные элементы все чаще и чаще рассчитываются по предельным нагрузкам. В том же случае, когда критическая нагрузка меньше предельной, именно вопросы устойчивости определяют работоспособность конструкции.

Рассмотрим теперь нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной и дополнительной вертикальных нагрузок, ось которой до потери устойчивости является плоской кривой. Как и при рассмотрении вопросов устойчивости в пределах упругой работы материала, примем оси X , Y , Z неподвижными, а оси x , y , z — подвижными координатными осями. Направление осей подвижной системы координат выберем таким образом, чтобы ось x располагалась по касательной к оси нити, а оси y и z — по главным центральным осям инерции поперечного сечения.

Как уже упоминалось раньше, при работе материала в упругой стадии потенциальная энергия упругой деформации при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба определяется формулой (5.18), интегрирование в которой распространяется на весь пролет нити конечной жесткости.

Но также хорошо известно, что при работе нити в своей плоскости за пределом упругости по ее длине наряду с упругими участками развиваются области, охваченные пластическими деформациями. Именно поэтому потенциальная энергия деформации нити при потере плоской формы равновесия в таком случае будет состоять из суммы энергий упругих и пластических участков. Потенциальную энергию деформации упругих участков по-прежнему будем определять по формуле (5.18), интегрирование в которой будет выполняться только по длине упругих участков нити. Для определения же потенциальной энергии деформации пластических областей выражение (5.18) неприменимо. Следовательно, для решения задачи устойчивости нити за пределом упругости необходимо установить аналогичное соотношение для участков нити конечной жесткости, испытывающих упруго-пластические деформации.

Указанную задачу будем решать на основе теории пластического течения [35, 54, 120] с помощью энергетического критерия устойчивости в форме Лагранжа-Дирихле [24, 59, 181], применение которого позволяет находить величины критических нагрузок, не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений. В связи с этим разрешающие зависимости принимают

довольно компактный вид и весьма удобны в практическом применении.

§ 9.2. Уточнение выражения потенциальной энергии деформации

Допустим, что до потери плоской формы равновесия в нити конечной жесткости имеются только нормальные напряжения σ_x , обусловленные возникающими в ней распором H и изгибающим моментом M_y . Примем, что материал нити является идеальным упруго-пластическим. При упругом деформировании выполняется закон Гука, а за пределом упругости поведение материала определяется условием текучести Мизеса

$$T^2 = \tau_T^2 = \frac{1}{3} \sigma_T^2, \quad (9.1)$$

где $T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$ – интенсивность касательных напряжений; τ_T – предел текучести при сдвиге; σ_T – предел текучести при растяжении-сжатии.

Будем считать, что решение задачи упруго-пластического деформирования нити конечной жесткости в своей плоскости известно и определяется зависимостями, представленными в главе 7. Допустим теперь, что под действием возрастающей дополнительной нагрузки нить теряет устойчивость. При этом, как и в упругом случае, поперечные сечения нити получают поступательные смещения v в горизонтальной плоскости и поворачиваются на угол θ в плоскости сечения. При таком выпучивании нить конечной жесткости испытывает дополнительные деформации и напряжения. Причем данные возмущения изгиба и кручения накладываются на основное состояние упруго-пластического деформирования нити в своей плоскости. Компонентами напряжений σ_y , τ_{xy} и τ_{yz} можно пренебречь, т. к. боковые поверхности нити свободны от напряжений, а ее толщина обычно намного меньше высоты. Напряжением σ_z также пренебрегаем, поскольку по определению давление продольных волокон друг на друга отсутствует, т. е. они находятся в одноосном напряженном состоянии. Поэтому в соответствии с теорией пластического течения учитываем лишь сдвиг γ_{xz} , характеризующий кручение нити.

Как при упругой, так и при упруго-пластической потере плоской формы изгиба характер деформирования одинаков; поэтому, как показано в работе [59], приращения деформаций можно представить в виде

$$\delta \varepsilon_x = zw'' + yv''; \quad (9.2)$$

$$\delta \gamma_{xz} = -2y\theta'. \quad (9.3)$$

Разумеется, что при потере плоской формы равновесия часть сечения будет испытывать нагружение, а часть – разгрузку. В области нагружения приращение работы пластической деформации $\delta W > 0$, а при $\delta W < 0$ материал выходит из состояния текучести и разгружается по упругому закону. В данном случае в соответствии с принятыми допущениями

$$\delta W = \sigma_x \delta \varepsilon_x. \quad (9.4)$$

Именно поэтому нагружение и разгрузка будут различаться только по знаку $\delta\epsilon_x$, а граница между зонами определится условием $\delta\epsilon_x = 0$, которое в развернутой форме с учетом соотношения (9.2) примет следующий вид:

$$zw'' + yv'' = 0. \quad (9.5)$$

Из последнего равенства легко может быть найден угол наклона границы между зонами нагружения и разгрузки, величина которого равна:

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{v''}{w''}\right). \quad (9.6)$$

Определим теперь вариации напряжений $\delta\sigma_x$ и $\delta\tau_{xz}$. Поскольку в упругой области поперечного сечения нити и в зонах разгрузки справедлив закон Гука, то выражения для $\delta\sigma_x$ и $\delta\tau_{xz}$ могут быть определены так:

$$\delta\sigma_x = E\delta\epsilon_x; \quad (9.7)$$

$$\delta\tau_{xz} = G\delta\gamma_{xz}. \quad (9.8)$$

В зонах нагружения должно выполняться условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_T + \delta\sigma_x)^2 + 3(\delta\tau_{xz})^2 = \sigma_T^2, \quad (9.9)$$

откуда, пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем:

$$\delta\sigma_x = 0. \quad (9.10)$$

В свою очередь, для $\delta\tau_{xz}$ в соответствии с теорией пластического течения и принятыми допущениями будем иметь:

$$\delta\tau_{xz} = G\delta\gamma_{xz}, \quad (9.11)$$

т. е., как и в зонах разгрузки, приращения касательного напряжения и сдвига связаны законом Гука.

Найдем теперь приращения изгибающих и крутящего моментов. С учетом соотношения (9.7) и формулы (9.10) выражения для δM_y и δM_z можно представить в виде

$$\delta M_y = \int_{F_{уп}} \delta\sigma_x z dF; \quad \delta M_z = \int_{F_{уп}} \delta\sigma_x y dF, \quad (9.12)$$

где интегрирование распространяется на упругую область поперечного сечения нити и зоны разгрузки.

Приращение крутящего момента δM_x с учетом зависимостей (9.8) и (9.11) можно записать в виде

$$\delta M_x = 2 \int_F \delta\tau_{xz} y dF, \quad (9.13)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости. Поэтому, как и при упругой работе нити, приращение крутящего момента определяется по известной формуле [23, 60]

$$\delta M_x = G I_d \theta'. \quad (9.14)$$

Тогда, принимая во внимание выражения (9.7) – (9.11), потенциальную энергию деформации упруго-пластических участков нити конечной жесткости при потере устойчивости плоской формы изгиба можно записать в виде

$$W = \int_{V_{\text{уп-пл}}} \left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{T^2}{2G} \right) dv. \quad (9.15)$$

Здесь первый член подынтегрального выражения представляет собой энергию объемного сжатия; второй – энергию изменения формы; $V_{\text{уп-пл}}$ – объем упруго-пластических участков нити; $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – относительное изменение объема; $k = (1 - 2\mu)/E$; μ – коэффициент Пуассона.

Интенсивность касательных напряжений с учетом того, что все компоненты напряженного состояния, кроме $\delta\sigma_x$ и $\delta\tau_{xz}$, в рассматриваемом случае равны нулю, приводится к виду

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta\sigma_x^2 + 3\delta\tau_{xz}^2}. \quad (9.16)$$

Приращение нормального напряжения $\delta\sigma_x$ вычисляем по формуле

$$\delta\sigma_x = E\delta\varepsilon_x = E(u' - zw'' - yv'' - \omega\theta''), \quad (9.17)$$

в которой принято, что ω есть секториальная координата сечения, и которая для данного случая может быть переписана в виде

$$\delta\sigma_x = E(-yv'' - \omega\theta''), \quad (9.18)$$

в связи с тем, что на основании кинематических гипотез теории тонкостенных стержней [23] для случая потери плоской формы равновесия члены u' и zw'' считаются величинами высшего порядка малости по сравнению с членами yv'' и $\omega\theta''$.

Тогда, подставляя соотношение (9.16) с учетом (9.18) в (9.15), принимая во внимание (9.7) – (9.11), а также пренебрегая энергией объемного сжатия для потенциальной энергии деформации, находим:

$$W = \frac{1}{6G} \int_{l_{\text{уп-пл}}} \left\{ \int_{F_{\text{уп}}} [E^2 (-yv'' - \omega\theta'')^2 + 3G^2 \rho^2 (\theta')^2] dF + \right. \\ \left. + \int_{F_{\text{пл}}} 3G^2 \rho^2 (\theta')^2 dF \right\} dx. \quad (9.19)$$

В последнем выражении принято, что $\delta\tau_{xz} = G\rho\theta'$, где ρ – расстояние от оси до центра тяжести элементарной площадки dF . Кроме того, как указывалось выше, $F_{\text{уп}}$ – площадь упругой области поперечного сечения нити и зон разгрузки; $F_{\text{пл}}$ – площадь зон пластической деформации; $l_{\text{уп-пл}}$ – длина упруго-пластических участков нити.

После соответствующих преобразований и отбрасывания членов высшего порядка малости, соотношение (9.19) можно записать так:

$$W = \frac{E^2}{6G} \int_{l_{\text{уп-пл}}} \left[I_{\omega}^* (\theta'')^2 + I_z^* (v'')^2 \right] dx + \frac{GI_d}{2} \int_{l_{\text{уп-пл}}} (\theta')^2 dx, \quad (9.20)$$

где I_{ω}^* и I_z^* – приведенные секториальный момент инерции и момент инерции относительно оси z упруго-пластического поперечного сечения нити конечной жесткости соответственно.

Внося сюда значения $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ и считая $\mu = \frac{1}{2}$, т. е. принимая материал нити несжимаемым, для потенциальной энергии деформации упруго-пластических участков нити конечной жесткости при потере устойчивости плоской формы изгиба окончательно имеем:

$$W = \frac{1}{2} \int_{l_{\text{уп-пл}}} \left[EI_{\omega}^* (\theta'')^2 + GI_d (\theta')^2 + EI_z^* (v'')^2 \right] dx. \quad (9.21)$$

Отметим, что формулой (9.21) можно пользоваться только при вычислении потенциальной энергии деформации упруго-пластических участков нити. Для упругих же участков по-прежнему остается в силе формула (5.18). Таким образом, для решения рассматриваемой задачи становится возможным применение разработанного ранее в главе 5 метода расчета устойчивости плоской формы деформирования упругих нитей конечной жесткости. Только если для упругих участков нити принимаются реальные значения жесткостных характеристик поперечного сечения EI_{ω} и EI_z , то для упруго-пластических – приведенные EI_{ω}^* и EI_z^* . Найдем теперь их значения.

§ 9.3. Определение положения границы раздела зон нагружения и разгрузки поперечного сечения нити

Вообще говоря, при работе нитей конечной жесткости за пределом упругости по их длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с одно- и двусторонней пластичностью. При этом каждому участку будет соответствовать свое значение приведенной жесткости EI_z^* . Выведем зависимости, определяющие положение границы раздела зон нагружения и разгрузки для симметричных и несимметричных поперечных сечений.

9.3.1. Прямоугольное сечение. Рассмотрим нить конечной жесткости, поперечное сечение которой представляет собой вытянутый прямоугольник. В монографиях [38, 87] показано, что при работе нити с прямоугольным поперечным сечением в своей плоскости за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней и двусторонней пластичностью (рис. 9.1). При этом каждому участку будет соответствовать свое значение приведенной жесткости EI_z^* , кроме того,

величина секториального момента инерции для прямоугольного поперечного сечения равна нулю.

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет одну пластичную область (рис. 9.1, *a*). При $-\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1$, где $\varphi_1 = \arctg(\xi_1/b)$, граница раздела (линия *m-m*) лежит в сечении $F_{уп}$ упругого ядра и тогда область пластической деформации полностью находится либо в состоянии нагружения, либо в состоянии разгрузки.

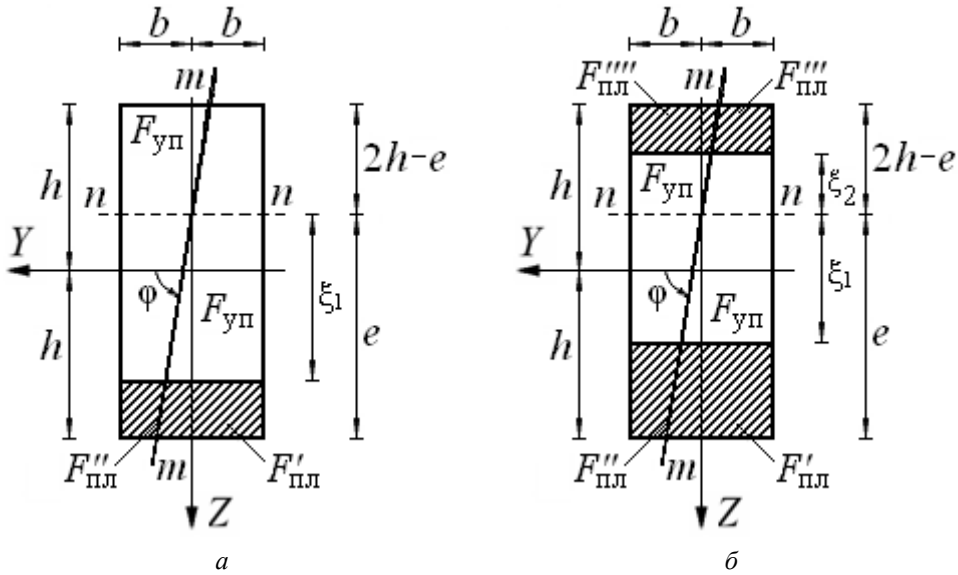


Рис. 9.1. Схема работы прямоугольного поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба: *a* – односторонняя пластичность; *б* – двусторонняя пластичность

При $\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1$ граница раздела пересекает область пластической деформации. В этом случае в зоне $F'_{пл}$ происходит нагружение (разгрузка), а в зоне $F''_{пл}$ – разгрузка (нагружение). Причем легко убедиться в том [59, 60], что первый случай не реализуем и граница раздела всегда пересекает область пластической деформации.

Положение границы раздела можно найти, воспользовавшись известным допущением о том, что при потере плоской формы деформирования перемещения нити в вертикальной плоскости отсутствуют. Следовательно, выпучивание происходит при одном и том же значении действующего в вертикальной плоскости изгибающего момента, т. е. его приращение δM_y равно нулю. Отсюда, принимая во внимание первое из соотношений (9.12), имеем:

$$\int_{F_{\text{уп}}} \delta \sigma_x z dF = 0. \quad (9.22)$$

Предполагая для определенности, что нагружение происходит в $F'_{\text{пл}}$, а разгрузка в $F''_{\text{пл}}$, находим развернутую форму уравнения (9.22):

$$(I_y^{\text{уп}} + I_y'') w'' + I_{yz}'' v'' = 0, \quad (9.23)$$

где $I_y^{\text{уп}}$ и I_y'' – соответственно моменты инерции упругого ядра и зоны разгрузки $F''_{\text{пл}}$ относительно оси y ; I_{yz}'' – центробежный момент инерции зоны разгрузки $F''_{\text{пл}}$; w'' и v'' – соответственно кривизны нити в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Введем дальше в рассмотрение функцию $\omega = \lambda \text{ctg} \varphi = e \text{ctg}(\varphi/b)$, однозначно определяющую положение границы раздела. Тогда значения моментов инерции зоны $F''_{\text{пл}}$ можно записать в следующем виде:

- при $0 \leq \omega \leq 1$

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{4[(\eta^3 - \beta^3) + (3\beta + 1)\zeta_1 + \zeta_1^2] - \\ &\quad - \omega[(2\eta^2 + \beta^2)(1 + \zeta_1) + (4\alpha - 1)\zeta_1^2 + 3\zeta_1^3]\} (1 - \zeta_1); \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(1 - \zeta_1) - \omega^3(1 - \zeta_1^4)]; \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{6(\alpha + \zeta_1) - \omega^2[(2\alpha + 1)(1 + \zeta_1 + \zeta_1^2) + 3\zeta_1^2]\} (1 - \zeta_1); \end{aligned}$$

- при $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3\zeta_1 \omega - 4 + \zeta_1^{-3} \omega^{-3}) \zeta_1^3; \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_1^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega^{-1}) \zeta_1; \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_1^2 \omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2} \omega^{-2}) \zeta_1^2, \end{aligned}$$

где $\eta = h/e$; $\zeta_1 = \xi_1/e$; $\alpha = 2\eta - 1$; $\beta = \eta - 1$.

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают значения

$$\begin{aligned} I_y^{\text{уп}} &= \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 [(\eta + \beta^2) + (\beta - 1)\zeta_1 + \zeta_1^2] (1 + \zeta_1); \\ I_z^{\text{уп}} &= \frac{2}{3} b^4 \lambda (\alpha + \zeta_1). \end{aligned}$$

Подстановка $I_y^{\text{уп}}$, I_y'' и I_{yz}'' в соотношение (9.23) после суммирования

коэффициентов при одинаковых степенях ω приводит к уравнениям

$$A_1\omega^2 - A_2\omega + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (9.24)$$

$$B_1\omega^4 + B_2\omega^3 + B_3\omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), \quad (9.25)$$

где $A_1 = 3(\alpha^2 - 4\beta^2\zeta_1^2 - 4\beta\zeta_1^3 - \zeta_1^4)$; $A_2 = 8[(3\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2\zeta_1 + 3\beta\zeta_1^2 + \zeta_1^3]$; $A_3 = 6(\alpha - 2\beta\zeta_1 - \zeta_1^2)$; $B_1 = 3\zeta_1^4$; $B_2 = 8[(3\eta^3 + \beta^3) + 6\beta^2\zeta_1 + 6\beta\zeta_1^2 + \zeta_1^3]$; $B_3 = 6\zeta_1^2$.

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, поперечное сечение которого имеет две пластичные области (рис. 9.1, б). Здесь, как и в случае участка с зоной односторонней пластичности, можно показать, что граница раздела всегда пересекает область пластической деформации. Будем считать, что нагружение происходит в зонах $F'_{пл}$ и $F'''_{пл}$, а разгрузка – в зонах $F''_{пл}$ и $F'''_{пл}$. Тогда вместо уравнения (9.23) имеем:

$$(I''_{yz} + I''_{yz})w'' + (I''_{yz} + I'''_{yz})v'' = 0. \quad (9.26)$$

Значения моментов инерции, соответствующие нижней и верхней зонам разгрузки при $0 \leq \omega \leq 1$, определяются так:

$$\begin{aligned} I''_y &= \frac{1}{12}b^4\lambda^3 \{4[(\eta^3 - \beta^3) + (3\beta + 1)\zeta_1 + \zeta_1^2] - \\ &\quad - \omega[(2\eta^2 + \beta^2)(1 + \zeta_1) + (4\alpha - 1)\zeta_1^2 + 3\zeta_1^3]\}(1 - \zeta_1); \\ I''_z &= \frac{1}{12}b^4\lambda[4(1 - \zeta_1) - \omega^3(1 - \zeta_1^4)]; \\ I''_{yz} &= \frac{1}{24}b^4\lambda^2 \{6(\alpha + \zeta_1) - \omega^2[(2\alpha + 1)(1 + \zeta_1 + \zeta_1^2) + 3\zeta_1^3]\}(1 - \zeta_1); \\ I'''_y &= \frac{1}{12}b^4\lambda^3 \{4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] - \\ &\quad - \omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3]\}(1 - \zeta_2); \\ I'''_z &= \frac{1}{12}b^4\lambda[4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3(\alpha^4 - \zeta_2^4)]; \\ I'''_{yz} &= \frac{1}{24}b^4\lambda^2 \{6(1 + \zeta_2) - \omega^2[(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha\zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3]\}(\alpha - \zeta_2). \end{aligned}$$

Здесь введены дополнительные обозначения: $\zeta_2 = \zeta_2/e$; $\gamma = 2\eta^2 + 1$. Дальше в зависимости от соотношения между параметрами η , ζ_1 и ζ_2 возможны три попарных варианта прохождения границы раздела через участки пластической деформации поперечного сечения нити, отличающиеся в данном случае друг от друга размерами области изменения функции $\omega = \omega(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$.

В первом из них (подварианты $a_1: 1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$ и $a'_1: 1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$) граница раздела проходит через обе области пластичности и величины моментов

инерции нижней и верхней зон разгрузки определяются из одинаковых выражений, имеющих следующий вид:

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3\zeta_1 \omega - 4 + \zeta_1^{-3} \omega^{-3}) \zeta_1^3 ;$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_1^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega^{-1}) \zeta_1 ;$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_1^2 \omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2} \omega^{-2}) \zeta_1^2 ;$$

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] - \omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3]\} (1 - \zeta_2) ;$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3(\alpha^4 - \zeta_2^4)] ;$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{6(1 + \zeta_2) - \omega^2[(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha\zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3]\} (\alpha - \zeta_2) .$$

Во втором варианте каждому из подвариантов будут соответствовать свои зависимости для нахождения моментов инерции. Последнее связано с тем, что в подварианте a_2 граница раздела проходит только через верхнюю область пластической деформации, а в подварианте a_2' – пересекает обе области пластичности. Тогда будем иметь:

- для подварианта a_2 ($\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1}$)

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 \{4[(\eta + \beta^2) - (\beta - 1)\zeta_2 + \zeta_2^2] - \omega[\gamma(\alpha + \zeta_2) - (\alpha - 4)\zeta_2^2 + 3\zeta_2^3]\} (1 - \zeta_2) ;$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda [4(\alpha - \zeta_2) - \omega^3(\alpha^4 - \zeta_2^4)] ;$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b^4 \lambda^2 \{6(1 + \zeta_2) - \omega^2[(\alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha\zeta_2 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2^3]\} (\alpha - \zeta_2) ;$$

- для подварианта a_2' ($\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$)

$$I_y'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3\zeta_1 \omega - 4 + \zeta_1^{-3} \omega^{-3}) \zeta_1^3 ;$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_1^3 \omega^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega^{-1}) \zeta_1 ;$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_1^2 \omega^2 - 2 + \zeta_1^{-2} \omega^{-2}) \zeta_1^2 ;$$

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3 \zeta_2 \omega - 4 + \zeta_2^{-3} \omega^{-3}) \zeta_2^3 ;$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_2^3 \omega^3 - 4 + 3 \zeta_2^{-1} \omega^{-1}) \zeta_2 ;$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_2^2 \omega^2 - 2 + \zeta_2^{-2} \omega^{-2}) \zeta_2^2 .$$

В третьем варианте (подварианты $a_3 : \alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$ и $a_3' : \zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$) граница раздела пересекает только верхнюю область пластической деформации. И поэтому, как и в первом варианте, моменты инерции будут определяться одинаковыми соотношениями

$$I_y''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda^3 (3 \zeta_2 \omega - 4 + \zeta_2^{-3} \omega^{-3}) \zeta_2^3 ;$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b^4 \lambda (\zeta_2^3 \omega^3 - 4 + 3 \zeta_2^{-1} \omega^{-1}) \zeta_2 ;$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{8} b^4 \lambda^2 (\zeta_2^2 \omega^2 - 2 + \zeta_2^{-2} \omega^{-2}) \zeta_2^2 .$$

Моменты инерции упругого ядра для рассматриваемого случая упруго-пластического участка нити конечной жесткости с зонами двусторонней пластичности запишем в виде

$$I_y^{yn} = \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 [3\beta^2 (\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)] ; I_z^{yn} = \frac{2}{3} b^4 \lambda (\zeta_1 + \zeta_2) .$$

Подставляя I_y^{yn} и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (9.26), приходим к уравнениям для определения ω :

$$C_1 \omega^2 - C_2 \omega + C_3 = 0 , \quad (0 \leq \omega \leq 1) ; \quad (9.27)$$

$$D_1 \omega^4 + D_2 \omega^3 + D_3 \omega^2 - 1 = 0 , \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}) , (1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}) ; \quad (9.28)$$

$$K_1 \omega^2 - K_2 \omega + K_3 = 0 , \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1}) ; \quad (9.29)$$

$$L_1 \omega^4 + L_2 \omega^3 + L_3 \omega^2 - 2 = 0 , \quad (\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}) ; \quad (9.30)$$

$$M_1 \omega^4 + M_2 \omega^3 + M_3 \omega^2 - 1 = 0 , \quad (\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}) , (\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}) , \quad (9.31)$$

коэффициенты которых принимают следующие значения:

$$C_1 = 3[2\alpha^2 - 4\beta^2 (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - 4\beta (\zeta_1^3 - \zeta_2^3) - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)] ;$$

$$C_2 = 8[2\eta^3 + 3\beta^2 (\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)] ;$$

$$C_3 = 6[2\alpha - 2\beta (\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)] ;$$

$$D_1 = 3[-\alpha^2 + 4\beta^2 \zeta_2^2 - 4\beta \zeta_2^3 + (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)] ;$$

$$D_2 = 8[(\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$D_3 = 6[-\alpha - 2\beta\zeta_2 + (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)];$$

$$K_1 = 3(\alpha^2 - 4\beta^2\zeta_2^2 + 4\beta\zeta_2^3 - \zeta_2^4);$$

$$K_2 = 8[(\eta^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$K_3 = 6(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2);$$

$$L_1 = 3(\zeta_1^4 + \zeta_2^4);$$

$$L_2 = 8[6\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 6\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$L_3 = 6(\zeta_1^2 + \zeta_2^2);$$

$$M_1 = 3\zeta_2^4;$$

$$M_2 = 8[6\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 6\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$M_3 = 6\zeta_2^2.$$

Анализ уравнений (9.24), (9.25) и (9.27) – (9.31) показывает, что функция ω на всей своей области изменения является однозначной функцией η , ζ_1 и ζ_2 , причем $\omega \geq 0$. Последнее свидетельствует о том, что зоны нагружения всегда больше зон разгрузки. Заметим также, что при упругом изгибе граница раздела совпадает с осью z , а при упруго-пластическом, как указывалось выше, наклонена на угол φ , тангенс которого определяется отношением кривизны нити в горизонтальной и вертикальной плоскостях. При этом с увеличением областей пластической деформации граница раздела все более приближается к оси y и в предельном случае совпадает с ней.

Если в полученных зависимостях положить $e = h$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, то приходим к потере устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластических балок. В этом случае реализуется только стадия работы с двумя областями пластической деформации поперечного сечения принятого здесь прямоугольного профиля [38]. Причем вместо восьми возможных вариантов прохождения границы раздела через области пластичности поперечного сечения балки будем иметь только два, для которых уравнения (9.27) – (9.31) преобразуются к виду

$$3(1 - \zeta^4)\omega^2 - 8(1 + \zeta^3)\omega + 6(1 - \zeta^2) = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (9.32)$$

$$3\zeta^4\omega^4 + 8\zeta^3\omega^3 + 6\zeta^2\omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}). \quad (9.33)$$

С помощью выражений (9.32) и (9.33) на рис. 9.2, а построена зависимость функции ω от параметра ζ , характеризующего относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения балки, заключенной между нейтральной осью и пластической областью. Заметим, что соотношения

(9.32) и (9.33) полностью совпадают с решением, впервые полученным Л.М. Качановым и приведенным в монографии [59]. Таким образом, задача устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластических балок представляет собой частный случай рассматриваемой здесь задачи устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости.

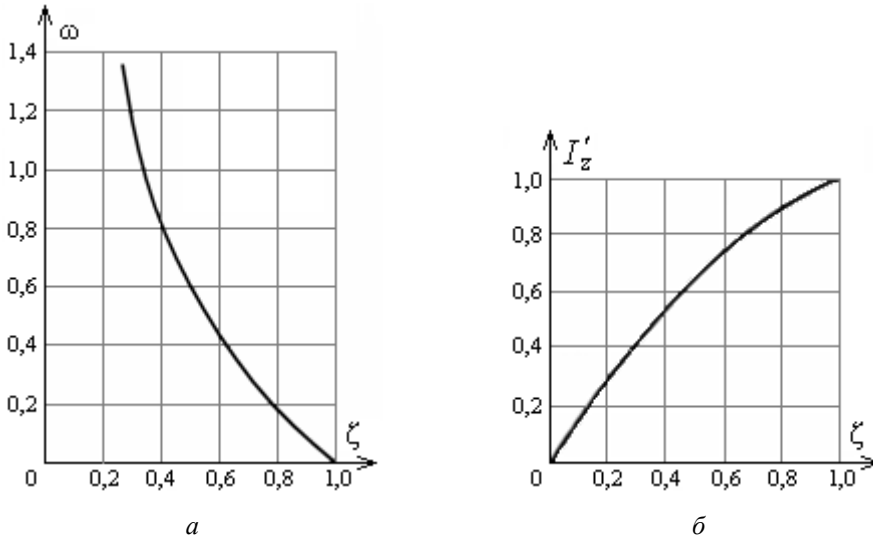


Рис. 9.2. Зависимости между параметром ζ и функциями ω и I'_z для прямоугольного поперечного сечения упруго-пластической балки:

a – график $\omega = \omega(\zeta)$; b – график $I'_z = I'_z(\zeta)$

9.3.2. Двутаверное сечение. Рассмотрим теперь двутаверное поперечное сечение нити конечной жесткости. При этом будем считать, что толщина полок двутавра намного меньше высоты профиля, а его стенка всегда работает в упругой стадии. Тогда в случае односторонней пластичности (рис. 9.3, a) пределы изменения функции ω составят ($0 \leq \omega \leq 1$), а значения моментов инерции зоны $F''_{пл}$ можно представить так:

$$I''_y = \frac{1}{3} b^4 \lambda^3 (1 - \omega) [(\eta^3 - \beta^3) - 3\beta^2 \zeta_1 - 3\beta \zeta_1^2 - \zeta_1^3];$$

$$I''_z = \frac{1}{3} b^4 \lambda (1 - \omega^3) (1 - \zeta_1);$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{4} b^4 \lambda^2 (1 - \omega^2) (\alpha - 2\beta \zeta_1 - \zeta_1^2).$$

Выражения для моментов инерции упругого ядра в данном случае можно записать следующим образом:

$$I_y^{yn} = \frac{4}{3}b_c b^3 \lambda^3 \eta_c^3 + \frac{2}{3}b^4 \lambda^3 (\eta^3 - \eta_c^3) + \frac{2}{3}b^4 \lambda^3 [(\beta^3 - \eta_c^3) + 3\beta^2 \zeta_1 + 3\beta \zeta_1^2 + \zeta_1^3];$$

$$I_z^{yn} = \frac{4}{3}b_c^3 b \lambda \eta_c + \frac{2}{3}b^4 \lambda (\alpha - 2\eta_c + \zeta_1),$$

где дополнительно принято, что $\eta_c = h_c/e$.

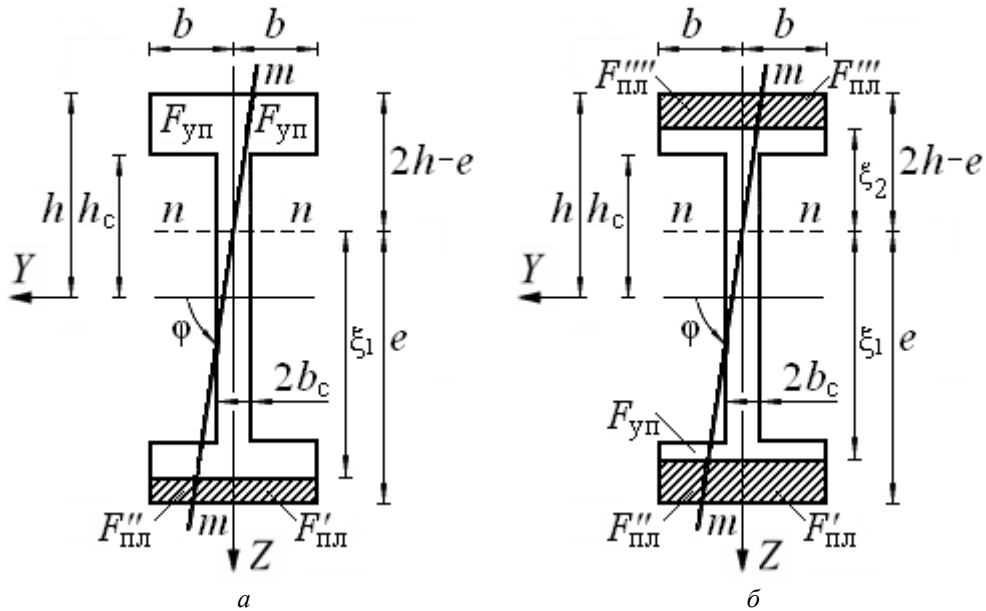


Рис. 9.3. Работа двутаврового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба:
а – односторонняя пластичность; б – двусторонняя пластичность

Проводя далее подстановки и преобразования, аналогичные выполненным ранее для прямоугольного поперечного сечения, получим уравнение для определения значений функции ω :

$$A_1 \omega^2 + A_2 \omega + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1), \quad (9.34)$$

где для его коэффициентов приняты такие обозначения:

$$A_1 = 3\alpha - 4(\eta^3 - \beta^3) + 6\beta(2\beta - 1)\zeta_1 + 3(4\beta - 1)\zeta_1^2 + 4\zeta_1^3;$$

$$A_2 = 16b_c b^{-1} \eta_c^3 + 4[(3\eta^3 - 4\eta_c^3 + \beta^3) + 3\beta^2 \zeta_1 + 3\beta \zeta_1^2 + \zeta_1^3];$$

$$A_3 = -3(\alpha - 2\beta \zeta_1 - \zeta_1^2).$$

Рассмотрим теперь упруго-пластический участок нити конечной жесткости двутаврового поперечного сечения, имеющего две пластичные области (рис. 9.3, б). Будем считать, что нагружение происходит в зонах $F'_{пл}$ и $F''_{пл}$, а

разгрузка – в $F''_{пл}$ и $F'''_{пл}$. Тогда в случае $0 \leq \omega \leq 1$ значения моментов инерции, соответствующие нижней и верхней зонам разгрузки, примут вид

$$I''_y = \frac{1}{3} b^4 \lambda^3 (1 - \omega) [(\eta^3 - \beta^3) - 3\beta^2 \zeta_1 - 3\beta \zeta_1^2 - \zeta_1^3];$$

$$I''_z = \frac{1}{3} b^4 \lambda (1 - \omega^3) (1 - \zeta_1);$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{4} b^4 \lambda^2 (1 - \omega^2) (\alpha - 2\beta \zeta_1 - \zeta_1^2);$$

$$I'''_y = \frac{1}{3} b^4 \lambda^3 (1 - \alpha \omega) [(\eta^3 + \beta^3) - 3\beta^2 \zeta_2 + 3\beta \zeta_2^2 - \zeta_2^3];$$

$$I'''_z = \frac{1}{3} b^4 \lambda (1 - \alpha^3 \omega^3) (\alpha - \zeta_2);$$

$$I'''_{yz} = \frac{1}{4} b^4 \lambda^2 (1 - \alpha^2 \omega^2) (\alpha + 2\beta \zeta_2 - \zeta_2^2).$$

В случае же $1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$ граница раздела проходит только через верхнюю область пластической деформации. Это означает, что разгрузка будет происходить только в зоне $F'''_{пл}$, т. к. вся нижняя область пластичности будет находиться в состоянии нагружения. При этом зависимости для I'''_y , I'''_z и I'''_{yz} будут тождественны приведенным выше.

Выражения для моментов инерции упругого ядра двутаврового поперечного сечения с зонами двусторонней пластичности записываются в виде

$$I_y^{уп} = \frac{4}{3} b_c b^3 \lambda^3 \eta_c^3 + \frac{2}{3} b^4 \lambda^3 [-2\eta_c^3 + 3\beta^2 (\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$I_z^{уп} = \frac{4}{3} b_c^3 b \lambda \eta_c + \frac{2}{3} b^4 \lambda (-2\eta_c + \zeta_1 + \zeta_2).$$

Подставляя $I_y^{уп}$ и соответствующие соотношения для I''_y , I'''_y , I''_{yz} и I'''_{yz} в (9.26), приходим к уравнениям для определения значений функции ω :

$$B_1 \omega^2 + B_2 \omega + B_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (9.35)$$

$$C_1 \omega^2 + C_2 \omega + C_3 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}). \quad (9.36)$$

В уравнениях (9.35) и (9.36) приняты следующие обозначения:

$$B_1 = 3\alpha(\alpha^2 + 1) - 8(\eta^4 + \beta^4) + 12\beta^2(\zeta_1 + \alpha\zeta_2) - 6\beta(\zeta_1 - \alpha^2\zeta_2) + \\ + 12\beta(\zeta_1^2 - \alpha\zeta_2^2) - 3(\zeta_1^2 + \alpha^2\zeta_2^2) + 4(\zeta_1^3 + \alpha\zeta_2^3);$$

$$B_2 = 16b_c b^{-1} \eta_c^3 + 4[(2\eta^3 - 4\eta_c^3) + 3\beta^2(\zeta_1 + \zeta_2) + 3\beta(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$B_3 = -3[2\alpha - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)];$$

$$C_1 = \alpha^2(6\beta - \alpha^2) + 6\alpha\beta(2\alpha - 1)\zeta_2 - 3\alpha(3\alpha - 2)\zeta_2^2 + 4\alpha\zeta_2^3;$$

$$C_2 = 16b_c b^{-1}\eta_c^3 + 4[(\eta^3 - 4\eta_c^3 + \beta^3) + 3\beta^2(2\zeta_1 + \zeta_2) + \\ + 2\beta(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + (2\zeta_1^3 + \zeta_2^3)];$$

$$C_3 = -3(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2).$$

Если в полученных зависимостях положить $e = h$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, то придем к случаю потери устойчивости плоской формы изгиба двутавровой упруго-пластической балки. При этом, как указывалось раньше, реализуется только стадия работы с двумя областями пластической деформации поперечного сечения. Поэтому в рамках принятых допущений, вместо двух возможных вариантов прохождения границы раздела через области пластичности сечения балки будем иметь только один ($0 \leq \omega \leq 1$), для которого вместо уравнений (9.35) и (9.36) получим зависимость

$$(1 + 3\zeta^2 - 4\zeta^3)\omega^3 - 4\left[1 - 2\eta_c^3\left(1 - \frac{b}{b_c}\right) + \zeta^3\right]\omega + 3(1 - \zeta^2) = 0. \quad (9.37)$$

В качестве иллюстрации к данному решению на рис. 9.4, а построена зависимость функции ω от параметра ζ , характеризующего относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения двутавровой балки, заключенной между нейтральной осью и пластической областью. Отметим, что кривые построены для трех значений η_c , равных соответственно 0,9, 0,7 и 0,5. При этом считалось, что отношение ширины стенки двутавра к ширине его полки составляет $b_c/b = 0,1$.

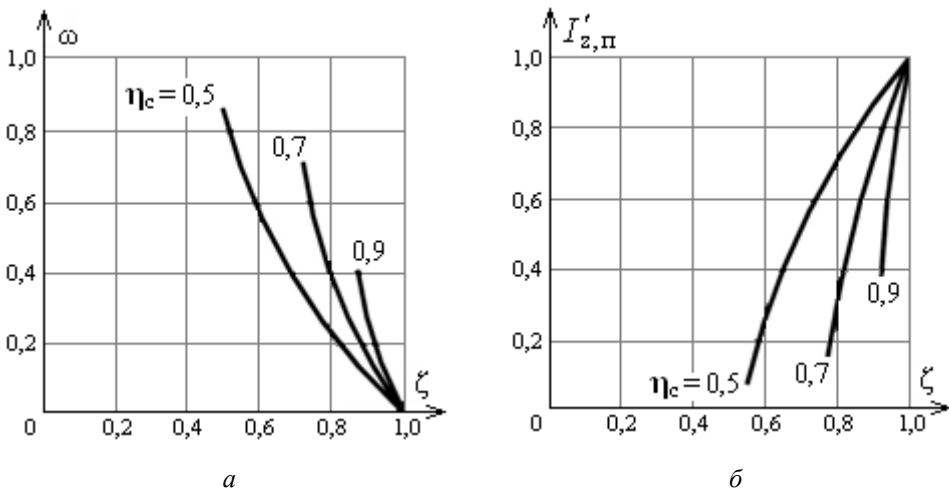


Рис. 9.4. Зависимости между параметром ζ и функциями ω , $I'_{z,\pi}$

для двутаврового поперечного сечения упруго-пластической балки ($b_c/b = 0,1$):

$$a - \text{график } \omega = \omega(\zeta); \quad \bar{b} - \text{график } I'_{z,н} = I'_{z,н}(\zeta)$$

9.3.3. Тавровое сечение. Рассмотрим нить конечной жесткости, имеющую тавровое поперечное сечение. При этом учтем, что его размеры находятся в пределах соотношений сортамента металлопроката, а именно: $11,22 \leq B/T \leq 24,25$; $1,18 \leq B/H \leq 2,42$; $11,2 \leq H/D \leq 22,46$, где B и T – ширина и толщина полки, а H и D – высота и толщина стенки. В случае работы нити с тавровым поперечным сечением в своей плоскости за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней (в стенке или полке) и двусторонней пластичностью.

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, на котором поперечное сечение имеет одну пластичную область в стенке тавра (рис. 9.5).

Введем дальше в рассмотрение функцию $\omega_1 = \lambda_1 \text{ctg} \varphi = e \text{ctg}(\varphi/d)$, однозначно определяющую положение границы раздела. Тогда значения моментов инерции зоны $F''_{пл}$ можно записать так:

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I''_y = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha^2\omega_1 + 2\alpha)\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 - (5\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

$$I''_z = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1 [4(1 - \zeta_1) - \omega_1^3(1 - \zeta_1^4)];$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{24} d^4 \lambda_1^2 [3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega_1^2 - 6(2\alpha - 1)],$$

- при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$

$$I''_y = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha^2\omega_1 + 2\alpha)\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha^2\omega_1^{-1} - 4\alpha\omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}];$$

$$I''_z = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1 (\zeta_1^3 \omega_1^3 - 4 + 3\zeta_1^{-1} \omega_1^{-1}) \zeta_1;$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{24} d^4 \lambda_1^2 (3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 - 8\alpha\omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}),$$

где $\alpha = 1 - \eta_1$; $\zeta_1 = \xi_1/e$; $\eta_1 = h_1/e$.

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{yn} = \frac{2}{3}bd^3\lambda_1(\eta_2^3 - \eta_c^3) + \frac{2}{3}d^4\lambda_1^3(\zeta_1^3 + \eta_1^3 + \eta_c^3 - 1) + 2d^4\lambda_1^3(\eta_1 + \alpha\zeta_1 - \zeta_1^2)\alpha;$$

$$I_z^{yn} = \frac{2}{3}b^3d\lambda_1(\eta_2 - \eta_c) - \frac{2}{3}d^4\lambda_1(\alpha - \eta_c - \zeta_1),$$

где $\eta_2 = h_2/e$; $\eta_c = h_c/e$.

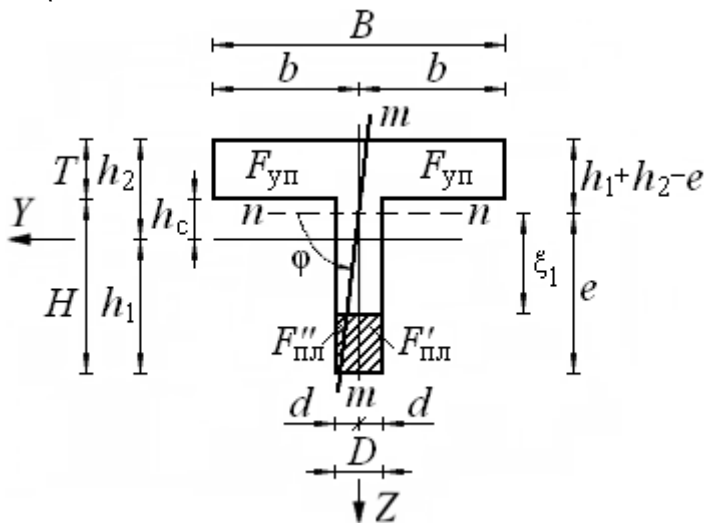


Рис. 9.5. Работа таврового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае односторонней пластичности в стенке

Подстановка I_y^{yn} , I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (9.23) после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω_1 приводит к уравнениям

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_1 + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (9.38)$$

$$B_1\omega_1^4 + B_2\omega_1^3 + B_3\omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}), \quad (9.39)$$

где обозначено

$$A_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 + 4\alpha\eta_1 - 1);$$

$$A_2 = 16bd^{-1}(\eta_2^3 - \eta_c^3) + 8[\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 + 3\alpha\eta_1 + 2(\eta_1^3 + \eta_c^3) - 1];$$

$$A_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 - 2\eta_1 + 1);$$

$$B_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2);$$

$$B_2 = 16bd^{-1}(\eta_2^3 - \eta_c^3) + 8[\zeta_1^3 - 6\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha\eta_1 + 2(\eta_1^3 + \eta_c^3) - 2];$$

$$B_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2).$$

Рассмотрим теперь упруго-пластический участок нити конечной жесткости, на котором поперечное сечение имеет одну пластичную область в полке тавра (рис. 9.6).

Введем дальше в рассмотрение функцию $\omega_2 = \lambda_2 \text{ctg} \varphi = \text{ctg}(\varphi/b)$, однозначно определяющую положение границы раздела. Тогда значения моментов инерции зоны $F''_{\text{пл}}$ можно записать так:

- при $0 \leq \omega_2 \leq \beta^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12}b^4\lambda_2^3[3\omega_2\zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - (\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\eta_2 + 3\eta_2^3)\omega_2 + 4(\eta_1^3 + \eta_2^3 - 1) + 12\alpha\eta_1];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12}b^4\lambda_2[4(\beta - \zeta_2) - \omega_2^3(\beta^4 - \zeta_2^4)];$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24}b^4\lambda_2^2[3\omega_2^2\zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2\zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 - (\alpha + 3\eta_2)\beta^3 + 6(\alpha + \eta_2)\beta];$$

- при $\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12}b^4\lambda_2^3[3\omega_2\zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 + 6\alpha^2\omega_2^{-1} + 4\alpha\omega_2^{-2} + \omega_2^{-3}];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12}b^4\lambda_2(\omega_2^3\zeta_2^3 - 4 + 3\omega_2^{-1}\zeta_2^{-1})\zeta_2;$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24}b^4\lambda_2^2(3\omega_2^2\zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2\zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega_2^{-1} + 3\omega_2^{-2}),$$

где $\beta = \eta_1 + \eta_2 - 1$.

Моменты инерции упругого ядра в этом случае принимают вид

$$I_y^{\text{уп}} = \frac{2}{3}d^4\lambda_1^3(\eta_1^3 + \eta_c^3) + \frac{2}{3}b^4\lambda_2^3(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 - 3\alpha\eta_1 - \eta_1^3 - \eta_c^3 + 1);$$

$$I_z^{\text{уп}} = \frac{2}{3}d^4\lambda_1(\eta_1 + \eta_c) + \frac{2}{3}b^4\lambda_2(\alpha + \zeta_2 - \eta_c).$$

Подстановка $I_y^{\text{уп}}$, I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (9.23) после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω_2 приводит к уравнениям

$$C_1\omega_2^2 + C_2\omega_2 + C_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_2 \leq \beta^{-1}); \quad (9.40)$$

$$D_1\omega_2^4 + D_2\omega_2^3 + D_3\omega_2^2 - 1 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}), \quad (9.41)$$

где принято, что

$$C_1 = 3[\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2 - (\alpha + \eta_2)^2\beta^2];$$

$$C_2 = 16db^{-1}(\eta_1^3 + \eta_c^3) + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \eta_2^3 - \eta_1^3 - 2\eta_c^3 - 3\eta_1 + 1);$$

$$C_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2);$$

$$D_1 = 3[\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2];$$

$$D_2 = 16db^{-1}(\eta_1^3 + \eta_c^3) + 8[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha\eta_1 - 2(\eta_1^3 + \eta_c^3 - 1)];$$

$$D_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2).$$

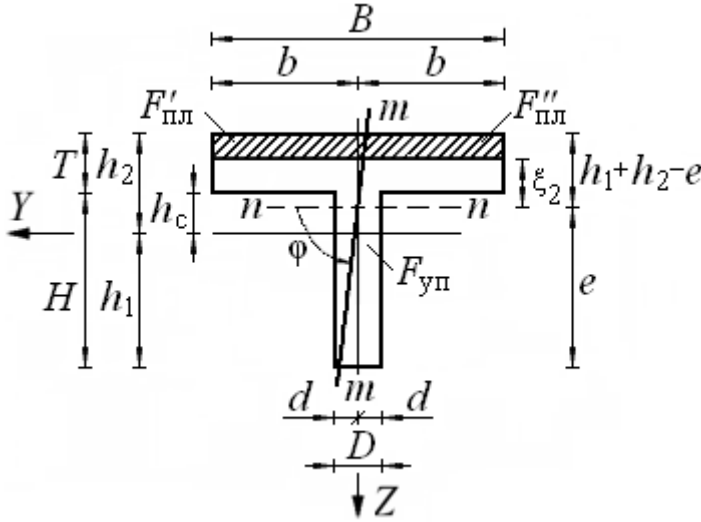


Рис. 9.6. Работа таврового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае односторонней пластичности в полке

Рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости, на котором поперечное сечение имеет две пластичные области (рис. 9.7).

Здесь, как и в случае участка с зоной односторонней пластичности, граница раздела всегда пересекает область пластической деформации. Будем считать, что нагружение происходит в зонах $F'_{пл}$ и $F'''_{пл}$, а разгрузка – в зонах $F''_{пл}$ и $F'''_{пл}$. Тогда вместо уравнения (9.23) используем уравнение (9.26).

Моменты инерции, соответствующие областям пластичности в стенке и полке при $0 \leq \omega_1 \leq 1$, будут:

$$I_y'' = \frac{1}{12} d^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 -$$

$$\begin{aligned}
 & -(5\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)]; \\
 I_z'' &= \frac{1}{12}d^4\lambda_1[4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega_1^3]; \\
 I_{yz}'' &= \frac{1}{24}d^4\lambda_1^2[3\omega_1^2\zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2\zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega_1^2 - 6(2\alpha - 1)]; \\
 I_y''' &= \frac{1}{12}b^4\lambda_2^3[3\omega_2\zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - \\
 & - (\alpha^2 + 2\alpha\eta_2 + 3\eta_2^2)\beta^2\omega_2 + 4(\alpha^2 + \alpha\eta_2 + \eta_2^2)\beta]; \\
 I_z''' &= \frac{1}{12}b^4\lambda_2[\omega_2^3\zeta_2^4 - 4\zeta_2 - \beta^4\omega_2^3]; \\
 I_{yz}''' &= \frac{1}{24}b^4\lambda_2^2[3\omega_2^2\zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2\zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - \\
 & - 12\zeta_2 - (\alpha + 3\eta_2)\beta^3\omega_2^2 - 6(\eta_1^2 - \eta_2^2 + 1)].
 \end{aligned}$$

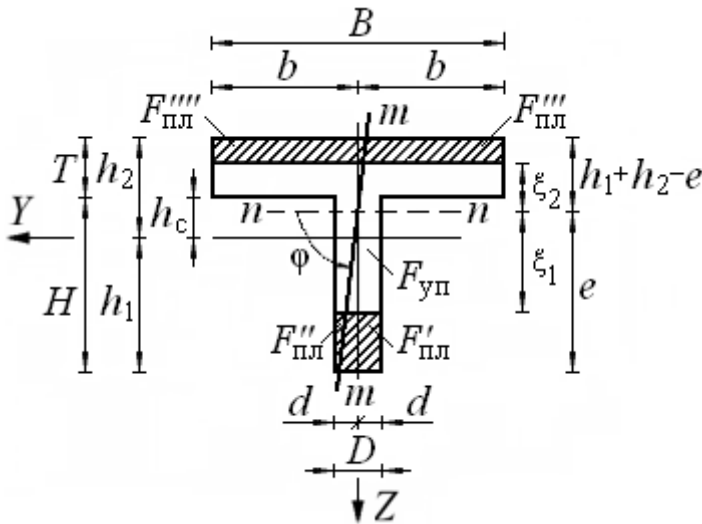


Рис. 9.7. Работа таврового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае двусторонней пластичности

В случае прохождения границы раздела через обе области пластичности при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$ моменты инерции I_y'' , I_z''' и I_{yz}''' зоны разгрузки в полке $F''_{пл}$ будут аналогичными приведенным выше для случая $0 \leq \omega_1 \leq 1$. Выражения моментов инерции зоны разгрузки в стенке $F''_{пл}$ в этом случае примут вид

$$\begin{aligned}
I_y'' &= \frac{1}{12} d^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 + \\
&\quad + 6\alpha^2\omega_1^{-1} - 4\alpha\omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}]; \\
I_z'' &= \frac{1}{12} d^4 \lambda_1 (\omega_1^3 \zeta_1^3 - 4 + 3\omega_1^{-1} \zeta_1^{-1}) \zeta_1; \\
I_{yz}'' &= \frac{1}{24} d^4 \lambda_1^2 (3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 - 8\alpha\omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}).
\end{aligned}$$

В случае же, когда при двусторонней пластичности нити конечной жесткости таврового поперечного сечения граница раздела пересекает только область пластичности в полке, возможны два варианта ее прохождения. В первом из них (при $\zeta_1^{-1} \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \beta^{-1}$) выражения моментов инерции зоны разгрузки в полке можно представить в виде

$$\begin{aligned}
I_y''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - \\
&\quad - (\alpha^2 + 2\alpha\eta_2 + 3\eta_2^2)\beta^2\omega_2 + 4(\alpha^2 + \alpha\eta_2 + \eta_2^2)\beta]; \\
I_z''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda_2 [\omega_2^3 \zeta_2^4 - 4\zeta_2 - \beta^4\omega_2^3]; \\
I_{yz}''' &= \frac{1}{24} b^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\zeta_2 - \\
&\quad - (\alpha + 3\eta_2)\beta^3\omega_2^2 - 6(\eta_1^2 - \eta_2^2 + 1)].
\end{aligned}$$

Во втором же варианте (при $\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}$) моменты инерции определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
I_y''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 1)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 + \\
&\quad + 6\alpha^2\omega_2^{-1} + 4\alpha\omega_2^{-2} + \omega_2^{-3}]; \\
I_z''' &= \frac{1}{12} b^4 \lambda_2 (3\omega_2^3 \zeta_2^4 - 4\omega_2^2 \zeta_2^3 + \omega_2^{-1}); \\
I_{yz}''' &= \frac{1}{24} b^4 \lambda_2^2 (3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2^2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega_2^{-1} + 3\omega_2^{-2}).
\end{aligned}$$

Моменты инерции упругого ядра для рассматриваемого случая упруго-пластического участка нити конечной жесткости с зонами двусторонней пластичности запишем в виде

$$\begin{aligned}
I_y^{yn} &= \frac{2}{3} d^4 \lambda_1^3 (\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_c^3) + \\
&\quad + \frac{2}{3} b^4 \lambda_2^3 (\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - \eta_c^3);
\end{aligned}$$

$$I_z^{yn} = \frac{2}{3}d^4\lambda_1(\zeta_1 - \alpha + \eta_c) + \frac{2}{3}b^4\lambda_2(\zeta_2 + \alpha - \eta_c).$$

Подставляя I_y^{yn} и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в уравнение (9.26), приходим к уравнениям для определения ω_1 , ω_2 :

$$K_1\omega_1^2 + K_2\omega_1 + K_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (9.42)$$

$$L_1\omega_1^4 + L_2\omega_1^3 + L_3\omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}); \quad (9.43)$$

$$M_1\omega_2^2 + M_2\omega_2 + M_3 = 0, \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega_1 \text{ и } \omega_2 \leq \beta^{-1}); \quad (9.44)$$

$$N_1\omega_2^4 + N_2\omega_2^3 + N_3\omega_2^2 - 1 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}), \quad (9.45)$$

коэффициенты которых принимают значения:

$$K_1 = 3(\zeta_1^4 + \zeta_2^4) - 12\alpha(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) + 12\alpha^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \\ - 3(\eta_1^2 - \eta_2^2 + 2\alpha)^2 - 6(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1);$$

$$K_2 = 8bd^{-1}(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - 2\eta_c^3 + \eta_2^3) + \\ + 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_1^3 + 2\eta_c^3);$$

$$K_3 = 6b^2d^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2) + 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + \alpha^2 - \eta_1^2);$$

$$L_1 = 3[(\zeta_1^4 + \zeta_2^4) - 4\alpha(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) + 4\alpha^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - (\beta - 2\eta_2)^2\beta^2];$$

$$L_2 = 8bd^{-1}(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - 2\eta_c^3 + \eta_2^3) + \\ + 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - 2\alpha^3 + 2\eta_c^3);$$

$$L_3 = 6b^2d^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2) + 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2);$$

$$M_1 = 3[\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2 - (\beta - 2\eta_2)^2\beta^2];$$

$$M_2 = 16db^{-1}(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_c^3) + \\ + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 - 2\eta_c^3 + \eta_2^3);$$

$$M_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2);$$

$$N_1 = 3(\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2);$$

$$N_2 = 16db^{-1}(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_c^3) + \\ + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 2\alpha^3 - 2\eta_c^3);$$

$$N_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2).$$

9.3.4. Швеллерное сечение с вертикальной стенкой. Рассмотрим поперечное сечение нити конечной жесткости в виде швеллера с вертикальной стенкой. При этом будем считать, что его размеры находятся в пределах соотношений сортамента металлопроката, а стенка всегда работает в упругой стадии. В случае работы нити с поперечным сечением в виде швеллера с вертикальной стенкой за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней и двусторонней пластичностью. Функция, однозначно определяющая положение границы раздела, в данном случае примет вид $\omega_1 = \lambda_1 \operatorname{ctg} \varphi = e \operatorname{ctg}(\varphi/b_1)$. Тогда в случае односторонней пластичности (рис. 9.8) значения моментов инерции зоны разгрузки $F''_{\text{пл}}$ можно представить так:

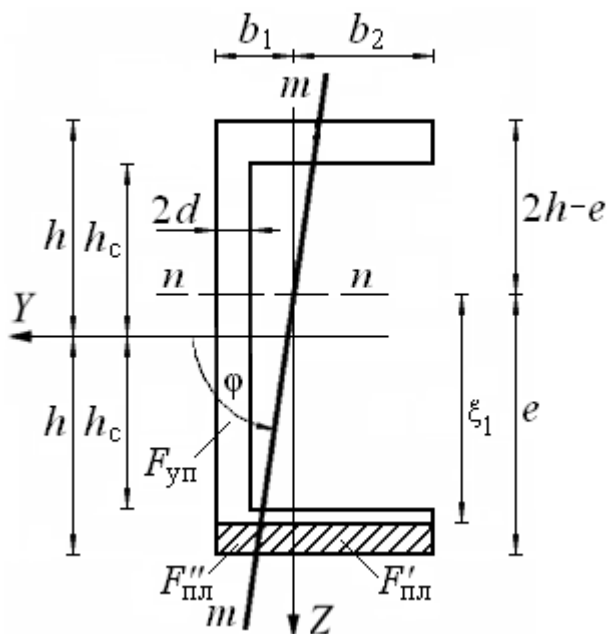


Рис. 9.8. Работа швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае односторонней пластичности

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 - (6\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega_1];$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 [3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha \omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha \zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega_1 - 6(2\alpha - 1)],$$

- при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$

$$I''_y = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha \omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha \omega_1 + 2)\alpha \zeta_1^2 - 12\alpha^2 \zeta_1 + 6\alpha^2 \omega_1^{-1} - 4\alpha \omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}];$$

$$I''_z = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 (\omega_1^3 \zeta_1^3 - 4 + 3\omega_1^{-1} \zeta_1^{-1}) \zeta_1;$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 (3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha \omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha \zeta_1 - 8\alpha \omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}),$$

где $\alpha = 1 - \eta$; $\zeta_1 = \zeta_1/e$; $\eta = h/e$.

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{yn} = \frac{4}{3} db_1^3 \lambda_1^3 \eta_c^3 + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1^3 + b_2^4 \lambda_2^3) (\zeta_1^3 - 3\alpha \zeta_1^2 + 3\alpha^2 \zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3);$$

$$I_z^{yn} = \frac{4}{3} db_1 \lambda_1 \eta_c (4d^2 - 6db_1 + 3b_1^2) + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1 + b_2^4 \lambda_2) (\zeta_1 + \beta - 2\eta_c),$$

где $\eta_c = h_c/e$; $\beta = 2\eta - 1$.

Подставляя I_y^{yn} , I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (9.23), после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω_1 придем к уравнениям:

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_1 + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (9.46)$$

$$B_1 \omega_1^4 + B_2 \omega_1^3 + B_3 \omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}), \quad (9.47)$$

где

$$A_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha \zeta_1^3 + 4\alpha^2 \zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$A_2 = 32b_1^{-1} d \eta_c^3 + 8b_1^{-1} b_2 (\zeta_1^3 - 3\alpha \zeta_1^2 + 3\alpha^2 \zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + 16(\eta^3 - \eta_c^3);$$

$$A_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha \zeta_1 + 2\alpha - 1);$$

$$B_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha \zeta_1^3 + 4\alpha^2 \zeta_1^2);$$

$$B_2 = 32b_1^{-1} d \eta_c^3 + 8b_1^{-1} b_2 (\zeta_1^3 - 3\alpha \zeta_1^2 + 3\alpha^2 \zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + 8(\eta^3 - \alpha^3 - 2\eta_c^3);$$

$$B_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha \zeta_1 + 2\alpha^2).$$

Теперь рассмотрим упруго-пластический участок нити конечной жесткости швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой, имеющего две пластичные области (рис. 9.9), считая, что нагружение происходит в зонах $F'_{пл}$ и $F'''_{пл}$, а разгрузка – в зонах $F''_{пл}$ и $F'''_{пл}$. Тогда в случае $0 \leq \omega_1 \leq 1$ значения моментов инерции, соответствующие нижней и верхней зонам разгруз-

ки, примут вид

$$I_y'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 - (6\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega_1];$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 [3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega_1 - 6(2\alpha - 1)];$$

$$I_y''' = \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - (2\alpha^2 - 4\alpha + 3)\beta^2\omega_2 + 4(\alpha^2 - \alpha + 1)\beta];$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2 [(\zeta_2^4 - \beta^4)\omega_2^3 - 8\alpha + 4(1 - \zeta_2)];$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} b_2^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 - (\beta^4 + 2\beta^3 + \eta^3)\omega_2^2 + 6\beta].$$

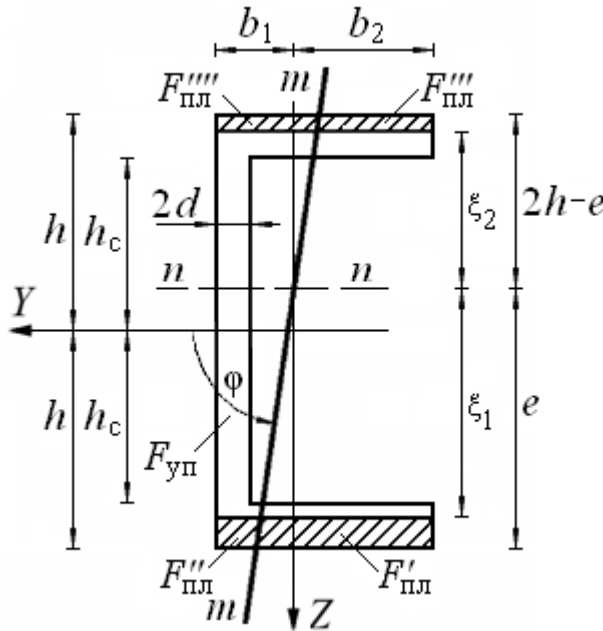


Рис. 9.9. Работа швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае двусторонней пластичности

В случае прохождения границы раздела через обе области пластичности

при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$ моменты инерции I_y'' , I_z'' и I_{yz}'' зоны разгрузки $F_{\text{пл}}''$ будут такими же, как для случая $0 \leq \omega_1 \leq 1$. Выражения моментов инерции зоны $F_{\text{пл}}''$ в этом случае следующие:

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - \\ &\quad - 12\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha^2\omega_1^{-1} - 4\alpha\omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}]; \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 (\omega_1^3 \zeta_1^3 - 4 + 3\omega_1^{-1} \zeta_1^{-1}) \zeta_1; \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 (3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 - 8\alpha\omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}). \end{aligned}$$

В случаях же $\zeta_1^{-1} \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \beta^{-1}$, $\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}$ (причем здесь принято, что $\omega_2 = \lambda_2 \text{ctg} \varphi = \text{ctg} \varphi / b_2$) граница раздела проходит только через верхнюю область пластической деформации. Это говорит о том, что разгрузка будет происходить только в зоне $F_{\text{пл}}''$, т. к. вся нижняя область пластичности будет находиться в состоянии нагружения. Тогда при $\zeta_1^{-1} \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \beta^{-1}$ выражения моментов инерции I_y'' , I_z'' и I_{yz}'' будут:

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 - \\ &\quad - (2\alpha^2 - 4\alpha + 3)\beta^2\omega_2 + 4(\alpha^2 - \alpha + 1)\beta]; \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2 [(\zeta_2^4 - \beta^4)\omega_2^3 - 8\alpha + 4(1 - \zeta_2)]; \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24} b_2^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 - (\beta^4 + 2\beta^3 + \eta^3)\omega_2^2 + 6\beta]. \end{aligned}$$

В том случае, когда $\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}$ соответствующие выражения примут вид

$$\begin{aligned} I_y'' &= \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2^3 [3\omega_2 \zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega_2 - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega_2 - 2)\alpha\zeta_2^2 - 12\alpha^2\zeta_2 + \\ &\quad + 6\alpha^2\omega_2^{-1} + 4\alpha\omega_2^{-2} + \omega_2^{-3}]; \\ I_z'' &= \frac{1}{12} b_2^4 \lambda_2 (\omega_2^3 \zeta_2^3 - 4 + 3\omega_2^{-1} \zeta_2^{-1}) \zeta_2; \\ I_{yz}'' &= \frac{1}{24} b_2^4 \lambda_2^2 [3\omega_2^2 \zeta_2^4 + 4\alpha\omega_2 \zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega_2^{-1} + 3\omega_2^{-2}]. \end{aligned}$$

Выражения для моментов инерции упругого ядра швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой при двусторонней пластичности записываются в виде

$$\begin{aligned}
I_y^{yn} &= \frac{4}{3}db_1^3\lambda_1^3\eta_c^3 + \frac{1}{3}(b_1^4\lambda_1^3 + b_2^4\lambda_2^3) \times \\
&\quad \times [\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3\alpha(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 - 2\eta_c^3]; \\
I_z^{yn} &= \frac{4}{3}db_1\lambda_1\eta_c(4d^2 - 6db_1 + 3b_1^2) + \frac{1}{3}(b_1^4\lambda_1 + b_2^4\lambda_2)(\zeta_1 + \zeta_2 - 2\eta_c).
\end{aligned}$$

Подставляя I_y^{yn} и соответствующие соотношения для I_y'' , I_y''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (9.26), получим уравнения для определения функций ω_1 , ω_2 :

$$C_1\omega_1^2 + C_2\omega_1 + C_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (9.48)$$

$$D_1\omega_1^4 + D_2\omega_1^3 + D_3\omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}); \quad (9.49)$$

$$K_1\omega_2^2 + K_2\omega_2 + K_3 = 0, \quad (\zeta_1^{-1} \leq \omega_1 \text{ и } \omega_2 \leq \beta^{-1}); \quad (9.50)$$

$$L_1\omega_2^4 + L_2\omega_2^3 + L_3\omega_2^2 - 1 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega_2 \leq \zeta_2^{-1}). \quad (9.51)$$

При этом в уравнениях (9.48) – (9.51) обозначено:

$$C_1 = 3[\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4\alpha(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) + 4\alpha^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - 8\alpha^2 + 8\alpha - 2];$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= 32b_1^{-1}d\eta_c^3 + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + \\
&\quad + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3);
\end{aligned}$$

$$C_3 = 6b_1^{-2}b_2^2(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 - \beta) + 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 - \beta);$$

$$D_1 = 3[\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4\alpha(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) + 4\alpha^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1];$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= 32b_1^{-1}d\eta_c^3 + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + \\
&\quad + 8(\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 - 2\eta_c^3);
\end{aligned}$$

$$D_3 = 6b_1^{-2}b_2^2(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 - \beta) + 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2);$$

$$K_1 = 3(\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= 32b_2^{-1}d\eta_c^3 + 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta^3 - 2\eta_c^3) + \\
&\quad + 8b_1b_2^{-1}[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3\alpha(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + 3\alpha^2(\zeta_1 + \zeta_2) - 2\eta_c^3];
\end{aligned}$$

$$K_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 - \beta);$$

$$L_1 = 3(\zeta_2^4 + 4\alpha\zeta_2^3 + 4\alpha^2\zeta_2^2);$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= 32b_2^{-1}d\eta_c^3 + 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - 2\eta_c^3) + \\
&\quad + 8b_1b_2^{-1}[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3\alpha(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) + 3\alpha^2(\zeta_1 + \zeta_2) - 2\eta_c^3];
\end{aligned}$$

$$L_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2).$$

9.3.5. Швеллерное сечение с горизонтальной стенкой. Рассмотрим поперечное сечение нити конечной жесткости в виде швеллера с горизон-

тальной стенкой. При этом будем считать, что его размеры находятся в пределах соотношений сортамента металлопроката. В случае работы нити с поперечным сечением в виде швеллера с горизонтальной стенкой за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней (в стенке или полках) и двусторонней пластичностью. Функции, определяющие положение границы раздела в рассматриваемом случае, примут вид $\omega = \lambda \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ectg}(\varphi/h)$, $\omega_c = \lambda_c \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ectg}(\varphi/h_c)$. Тогда в случае односторонней пластичности в полках (рис. 9.10) значения моментов инерции зоны разгрузки $F''_{\text{пл}}$ можно представить таким образом:

- при $0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}$

$$I''_y = \frac{1}{3}(h_c^4 \lambda_c^4 - h^4 \lambda^4)(\zeta_2^3 + 3\alpha \zeta_2^2 + 3\alpha^2 \zeta_2 + \alpha^3 - \eta_2^3);$$

$$I''_z = \frac{1}{3}(h_c^4 \lambda_c - h^4 \lambda)(\zeta_2 - \beta);$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{4}(h_c^4 \lambda_c^2 - h^4 \lambda^2)(\zeta_2^2 + 2\alpha \zeta_2 + \alpha^3 - \eta_2^2);$$

- при $\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c$

$$I''_y = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha \zeta_2^2 + 12\alpha^2 \zeta_2 - 6\alpha^2 \omega_c^{-1} - 4\alpha \omega_c^{-2} - \omega_c^{-3}) - \\ - \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [4\zeta_2^3 + 12\alpha \zeta_2^2 + 12\alpha^2 \zeta_2 + (\alpha^4 - 4\alpha \eta_2^3 + 3\eta_2^4)\omega + 4(\alpha^3 - \eta_2^3)];$$

$$I''_z = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c (4\zeta_2 - 3\omega_c^{-1}) - \frac{1}{12} h^4 \lambda [\beta^4 \omega^3 - 4(\beta - \zeta_2)];$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{24} h_c^4 \lambda_c^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha \zeta_2 - 8\alpha \omega_c^{-1} - 3\omega_c^{-2}) - \\ - \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [6\zeta_2^2 + 12\alpha \zeta_2 - (\beta - 4\eta_2)\beta^3 \omega^2 + 6(\beta - 2\eta_2)\beta];$$

- при $\beta^{-1} \leq \omega$ и $\omega_c \leq \zeta_2^{-1}$

$$I''_y = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha \zeta_2^2 + 12\alpha^2 \zeta_2 - 6\alpha^2 \omega_c^{-1} - 4\alpha \omega_c^{-2} - \omega_c^{-3}) - \\ - \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha \zeta_2^2 + 12\alpha^2 \zeta_2 - 6\alpha^2 \omega^{-1} - 4\alpha \omega^{-2} - \omega^{-3});$$

$$I''_z = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c (4\zeta_2 - 3\omega_c^{-1}) - \frac{1}{12} h^4 \lambda (4\zeta_2 - 3\omega^{-1});$$

$$I''_{yz} = \frac{1}{24} h_c^4 \lambda_c^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha \zeta_2 - 8\alpha \omega_c^{-1} - 3\omega_c^{-2}) -$$

$$-\frac{1}{24}h^4\lambda^2[6\zeta_2^2+12\alpha\zeta_2-8\alpha\omega^{-1}-\omega^{-2}];$$

- при $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$

$$I_y'' = \frac{1}{12}h^4\lambda^3[3\omega\zeta_2^4+4(2\alpha\omega-1)\zeta_2^3+6(\alpha\omega-2)\alpha\zeta_2^2- \\ -12\alpha^2\zeta_2+6\alpha^2\omega^{-1}+4\alpha\omega^{-2}+\omega^{-3}];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12}h^4\lambda(3\omega^{-1}\zeta_2^{-1}-4+\omega^3\zeta_2^3)\zeta_2;$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24}h^4\lambda^2[3\omega^2\zeta_2^4+4\alpha\omega^2\zeta_2^3-6\zeta_2^2-12\alpha\zeta_2+8\alpha\omega^{-1}+3\omega^{-2}],$$

где $\alpha = 1 - \eta_1$; $\beta = \eta_1 + \eta_2 - 1$; $\zeta_2 = \zeta_2/e$; $\eta_2 = b_2/e$.

Для данного расчетного случая моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{yn} = \frac{2}{3}h^4\lambda^3(\zeta_2^3+3\alpha\zeta_2^2+3\alpha^2\zeta_2+3\alpha^2-3\alpha+1)- \\ -\frac{2}{3}h^4\lambda_c^3[\zeta_2^3+3\alpha\zeta_2^2+3\alpha^2\zeta_2+\alpha^3+(\eta_1-2\eta_d)^3]; \\ I_z^{yn} = \frac{2}{3}h^4\lambda(1+\zeta_2)-\frac{2}{3}h^4\lambda_c(1+\zeta_2-2\eta_d),$$

где $\eta_1 = b_1/e$; $\eta_d = d/e$.

Подставляя I_y^{yn} , I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (9.23), после суммирования коэффициентов при одинаковых степенях ω получим уравнения:

$$A_1\omega + A_2 = 0, \quad (0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}); \quad (9.52)$$

$$B_1\omega^4 + B_2\omega^3 + B_3\omega^2 + B_4 = 0, \quad (\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c); \quad (9.53)$$

$$C_1\omega^3 + C_2\omega^2 + C_3 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega \text{ и } \omega_c \leq \zeta_2^{-1}); \quad (9.54)$$

$$D_1\omega^4 + D_2\omega^3 + D_3\omega^2 - 1 = 0, \quad (\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c). \quad (9.55)$$

$$D_3 = 6(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2).$$

В том случае, когда пластичность возникает в стенке (рис. 9.11) выражения моментов инерции зоны разгрузки $F''_{\text{пл}}$ запишутся следующим образом:

- при $0 \leq \omega \leq 1$

$$I_y'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 - (6\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega^3];$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega^2 - 6(2\alpha - 1)];$$

- при $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 + 6\alpha^2\omega^{-1} - 4\alpha\omega^{-2} + \omega^{-3}];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda (3\omega^{-1}\zeta_1^{-1} - 4 + \omega^3\zeta_1^3)\zeta_1;$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2 \zeta_1^4 - 4\alpha\omega^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha\zeta_1 - 8\alpha\omega^{-1} + 3\omega^{-2}],$$

где $\zeta_1 = \xi_1 / e$.

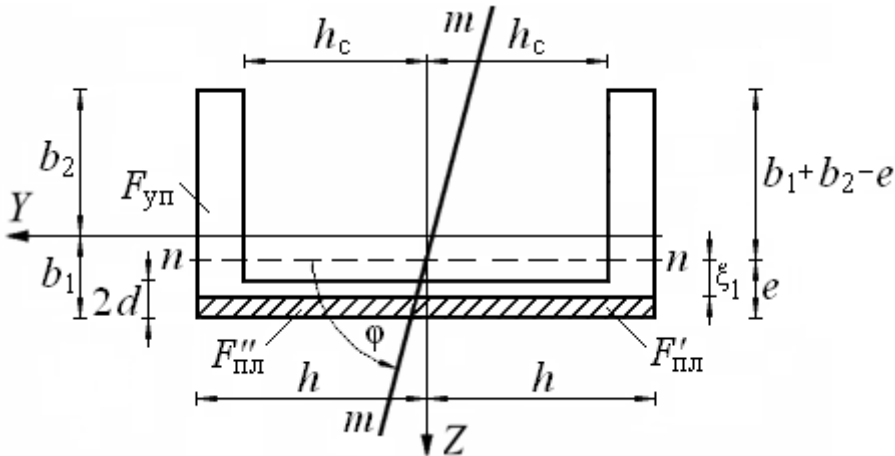


Рис. 9.11. Работа швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае односторонней пластичности в стенке

Моменты инерции упругого ядра для рассматриваемого случая упруго-пластического участка нити конечной жесткости можно представить так:

$$I_y^{yn} = \frac{4}{3}dh_c(4d^2 + 3h_c^2\lambda_c^2\eta_l - 6dh_c\lambda_c\eta_l) - \frac{2}{3}h_c^4\lambda_c^3(\eta_l^3 + \eta_2^3) + \\ + \frac{2}{3}h^4\lambda^3(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_2^3); \\ I_z^{yn} = \frac{4}{3}dh_c^3 - \frac{2}{3}h_c^4\lambda_c(\beta + 1) + \frac{2}{3}h^4\lambda(\beta + \zeta_1).$$

Подставим выражения I_y^{yn} , I_y'' , I_{yz}'' в уравнение (9.23). В результате этого получим уравнения для определения значений функции ω :

$$K_1\omega^2 + K_2\omega + K_3 = 0, \quad (0 \leq \omega \leq 1); \quad (9.56)$$

$$L_1\omega^4 + L_2\omega^3 + L_3\omega^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}), \quad (9.57)$$

коэффициенты которых принимают значения:

$$K_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1); \\ K_2 = 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 + \eta_l^3 + 2\eta_2^3) + \\ + 16h_ch^{-1}[2\eta_d(4\eta_d^2 - 6\eta_l\eta_d + 3\eta_l^2) - \eta_l^3 - \eta_2^3]; \\ K_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha - 1); \\ L_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2); \\ L_2 = 8(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - 2\alpha^3 + 2\eta_2^3) + \\ + 16h_ch^{-1}[2\eta_d(4\eta_d^2 - 6\eta_l\eta_d + 3\eta_l^2) - \eta_l^3 - \eta_2^3]; \\ L_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2).$$

Рассматривая упруго-пластический участок нити конечной жесткости швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой при двусторонней пластичности (рис. 9.12), будем считать, что нагружение происходит в зонах $F_{пл}'$ и $F_{пл}'''$, а разгрузка – в зонах $F_{пл}''$ и $F_{пл}'''$.

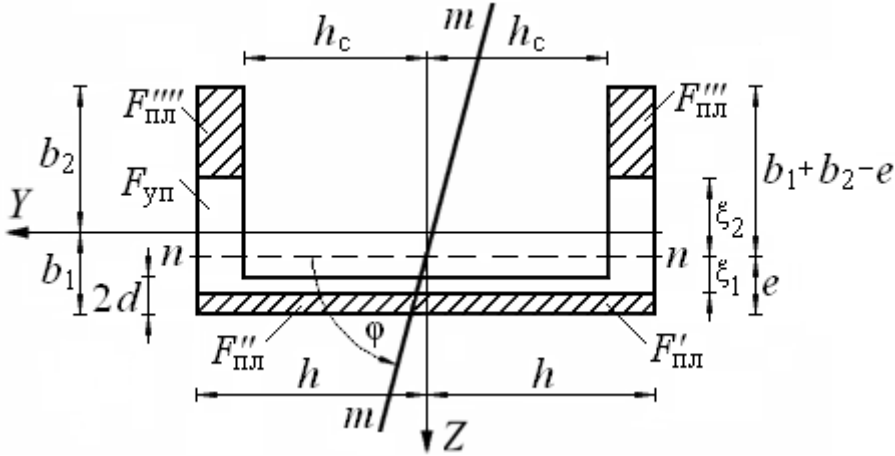


Рис. 9.12. Работа швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае двусторонней пластичности

С помощью функций ω и ω_c , определяющих положение границы раздела в рассматриваемом случае, выразим возможные варианты прохождения границы раздела и соответствующие им выражения моментов инерции, отвечающие нижней и верхней зонам разгрузки:

- при $0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega + 2)\alpha \zeta_1^2 - 12\alpha^2 \zeta_1 - (6\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} h^4 \lambda [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega^3];$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2 \zeta_1^4 - 4\alpha \omega^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha \zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega^2 - 6(2\alpha - 1)];$$

$$I_y''' = \frac{1}{3} (h_c^4 \lambda_c^4 - h^4 \lambda^4) (\zeta_2^3 + 3\alpha \zeta_2^2 + 3\alpha^2 \zeta_2 + \alpha^3 - \eta_2^3);$$

$$I_z''' = \frac{1}{3} (h_c^4 \lambda_c - h^4 \lambda) (\zeta_2 - \beta);$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{4} (h_c^4 \lambda_c^2 - h^4 \lambda^2) (\zeta_2^2 + 2\alpha \zeta_2 + \alpha^3 - \eta_2^2).$$

В случае же двусторонней пластичности швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой при $\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c$; $\beta^{-1} \leq \omega$ и $\omega_c \leq \zeta_2^{-1}$; $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $\omega \leq 1$ моменты инерции I_y'' , I_z'' и I_{yz}'' зоны разгрузки $F''_{пл}$ будут анало-

гичными случаю $0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}$. Выражения моментов инерции зоны $F'''_{пл}$ для этих случаев примут вид:

- при $\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c$

$$I_y''' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega_c^{-1} - 4\alpha\omega_c^{-2} - \omega_c^{-3}) - \\ - \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 + (\alpha^4 - 4\alpha\eta_2^3 + 3\eta_2^4)\omega + 4(\alpha^3 - \eta_2^3)];$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c (4\zeta_2 - 3\omega_c^{-1}) - \frac{1}{12} h^4 \lambda [\beta^4 \omega^3 - 4(\beta - \zeta_2)];$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} h_c^4 \lambda_c^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega_c^{-1} - 3\omega_c^{-2}) - \\ - \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - (\beta - 4\eta_2)\beta^3 \omega^2 + 6(\beta - 2\eta_2)\beta];$$

- при $\beta^{-1} \leq \omega$ и $\omega_c \leq \zeta_2^{-1}$

$$I_y''' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega_c^{-1} - 4\alpha\omega_c^{-2} - \omega_c^{-3}) - \\ - \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 (4\zeta_2^3 + 12\alpha\zeta_2^2 + 12\alpha^2\zeta_2 - 6\alpha^2\omega^{-1} - 4\alpha\omega^{-2} - \omega^{-3});$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} h_c^4 \lambda_c (4\zeta_2 - 3\omega_c^{-1}) - \frac{1}{12} h^4 \lambda (4\zeta_2 - 3\omega^{-1});$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} h_c^4 \lambda_c^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega_c^{-1} - 3\omega_c^{-2}) - \\ - \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 (6\zeta_2^2 + 12\alpha\zeta_2 - 8\alpha\omega^{-1} - \omega^{-2});$$

- при $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $\omega \leq 1$

$$I_y''' = \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega\zeta_2^4 + 4(2\alpha\omega - 1)\zeta_2^3 + 6(\alpha\omega - 2)\alpha\zeta_2^2 - \\ - 12\alpha^2\zeta_2 + 6\alpha^2\omega^{-1} + 4\alpha\omega^{-2} + \omega^{-3}];$$

$$I_z''' = \frac{1}{12} h^4 \lambda (3\omega^{-1}\zeta_2^{-1} - 4 + \omega^3\zeta_2^3)\zeta_2;$$

$$I_{yz}''' = \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2\zeta_2^4 + 4\alpha\omega^2\zeta_2^3 - 6\zeta_2^2 - 12\alpha\zeta_2 + 8\alpha\omega^{-1} + 3\omega^{-2}].$$

Для случая, при котором значения функций, определяющих положение границы раздела, находятся в пределах $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$, выражения моментов инерции I_y''' , I_z''' и I_{yz}''' зоны разгрузки $F'''_{пл}$ будут такими же, как

выше приведенные для случая, при котором $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $\omega \leq 1$. Тогда выражения моментов инерции зоны $F''_{пл}$ при $\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c$ и $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$ можно представить так:

$$\begin{aligned} I''_y &= \frac{1}{12} h^4 \lambda^3 [3\omega \zeta_1^4 - 4(2\alpha\omega + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega + 2)\alpha \zeta_1^2 - \\ &\quad - 12\alpha^2 \zeta_1 + 6\alpha^2 \omega^{-1} - 4\alpha \omega^{-2} + \omega^{-3}]; \\ I''_z &= \frac{1}{12} h^4 \lambda (3\omega^{-1} \zeta_1^{-1} - 4 + \omega^3 \zeta_1^3) \zeta_1; \\ I''_{yz} &= \frac{1}{24} h^4 \lambda^2 [3\omega^2 \zeta_1^4 - 4\alpha \omega^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha \zeta_1 - 8\alpha \omega^{-1} + 3\omega^{-2}]. \end{aligned}$$

Выражения для моментов инерции упругого ядра швеллерного поперечного сечения с горизонтальной стенкой при двусторонней пластичности записываются таким образом:

$$\begin{aligned} I_y^{yn} &= \frac{2}{3} h^4 \lambda^3 [\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2] - \\ &\quad - \frac{2}{3} h_c^4 \lambda_c^3 [\zeta_2^3 + 3\alpha \zeta_2^2 + 3\alpha^2 \zeta_2 + \alpha^3 + (\eta_1 - 2\eta_d)^3]; \\ I_z^{yn} &= \frac{2}{3} h^4 \lambda (\zeta_1 + \zeta_2) - \frac{2}{3} h_c^4 \lambda_c (\zeta_2 - 2\eta_d + 1). \end{aligned}$$

Подставляя I_y^{yn} и соответствующие соотношения для I''_y , I'''_y , I''_{yz} и I'''_{yz} в выражение (9.26), получим уравнения для определения функции ω :

$$M_1 \omega^2 + M_2 \omega + M_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_c \leq \beta^{-1}); \quad (9.58)$$

$$N_1 \omega^4 + N_2 \omega^3 + N_3 \omega^2 + N_4 = 0, \quad (\omega \leq \beta^{-1} \leq \omega_c); \quad (9.59)$$

$$P_1 \omega^4 + P_2 \omega^3 + P_3 \omega^2 + P_4 = 0, \quad (\beta^{-1} \leq \omega \text{ и } \omega_c \leq \zeta_2^{-1}); \quad (9.60)$$

$$S_1 \omega^4 + S_2 \omega^3 + S_3 \omega^2 - 1 = 0, \quad (\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c \text{ и } \omega \leq 1); \quad (9.61)$$

$$T_1 \omega^4 + T_2 \omega^3 + T_3 \omega^2 - 2 = 0, \quad (\omega \leq \zeta_2^{-1} \leq \omega_c \text{ и } 1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}). \quad (9.62)$$

В уравнениях (9.58) – (9.62) обозначено:

$$\begin{aligned} M_1 &= 3(\zeta_1^4 - 4\alpha \zeta_1^3 + 4\alpha^2 \zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1); \\ M_2 &= 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + \eta_1^3 + \eta_2^3] - \\ &\quad - 8h_c h^{-1} [\zeta_2^3 + 3\alpha \zeta_2^2 + 3\alpha^2 \zeta_2 + \alpha^3 + 2(\eta_1 - 2\eta_d)^3 + \eta_2^3]; \\ M_3 &= 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 2\alpha^2 - \eta_1 - \eta_2^2] - \\ &\quad - 6h_c^2 h^{-2} (\zeta_2^2 + 2\alpha \zeta_2 + \alpha^2 - \eta_2^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= 3[\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - (\alpha + \eta_2)^2\beta^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1]; \\
N_2 &= 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + \eta_1^3 + \eta_2^3] - \\
&\quad - 8h_c h^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 2(\eta_1 - 2\eta_d)^3 + 2\alpha^3]; \\
N_3 &= 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 2\alpha^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2] - 6h_c^2 h^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2); \\
N_4 &= h_c^4 h^{-4}; \\
P_1 &= 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1); \\
P_2 &= 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1] - \\
&\quad - 8h_c h^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + 2\alpha^3 + 2(\eta_1 - 2\eta_d)^3]; \\
P_3 &= 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha - 1] - 6h_c^2 h^{-2}(\zeta_2^2 + 2\alpha\zeta_2 + 2\alpha^2); \\
P_4 &= h_c^4 h^{-4} - 1; \\
S_1 &= 3[\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\alpha + 4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1]; \\
S_2 &= 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1] - \\
&\quad - 16h_c h^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + (\eta_1 - 2\eta_d)^3]; \\
S_3 &= 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha - 1]; \\
T_1 &= 3[\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\alpha + 4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\alpha^2]; \\
T_2 &= 8[\zeta_1^3 + \zeta_2^3 - 3(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2] - \\
&\quad - 16h_c h^{-1}[\zeta_2^3 + 3\alpha\zeta_2^2 + 3\alpha^2\zeta_2 + \alpha^3 + (\eta_1 - 2\eta_d)^3]; \\
T_3 &= 6[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2(\zeta_1 - \zeta_2)\alpha + 4\alpha^2].
\end{aligned}$$

9.3.6. Угловое сечение с неравными полками. Рассмотрим поперечное сечение нити конечной жесткости в виде неравнополочного уголка. При этом учтем, что его размеры находятся в пределах соотношений сортамента металлопроката. В случае работы нити с поперечным сечением в виде неравнополочного уголка за пределом упругости по ее длине могут образовываться два типа упруго-пластических участков: с односторонней и двусторонней пластичностью. Функция, однозначно определяющая положение границы раздела в рассматриваемом случае, имеет вид $\omega_1 = \lambda_1 \text{ctg} \varphi = \text{ectg}(\varphi/b_1)$. Тогда в случае односторонней пластичности (рис. 9.13) значения моментов инерции зоны разгрузки $F''_{\text{пл}}$ можно представить так:

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 + 4(2\alpha\omega_1 - 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha\omega_1 + 2)\alpha\zeta_1^2 - 12\alpha^2\zeta_1 -$$

$$-(6\alpha^2 - 8\alpha + 3)\omega_1 + 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 [4(1 - \zeta_1) - (1 - \zeta_1^4)\omega_1^3];$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 [3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha \omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha \zeta_1 + (4\alpha - 3)\omega_1^2 - 6(2\alpha - 1)];$$

- при $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$I_y'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1^3 [3\omega_1 \zeta_1^4 - 4(2\alpha \omega_1 + 1)\zeta_1^3 + 6(\alpha \omega_1 + 2)\alpha \zeta_1^2 -$$

$$-12\alpha^2 \zeta_1 + 6\alpha^2 \omega_1^{-1} - 4\alpha \omega_1^{-2} + \omega_1^{-3}];$$

$$I_z'' = \frac{1}{12} b_1^4 \lambda_1 (3\omega_1^{-1} \zeta_1^{-1} - 4 + \omega_1^3 \zeta_1^3) \zeta_1;$$

$$I_{yz}'' = \frac{1}{24} b_1^4 \lambda_1^2 [3\omega_1^2 \zeta_1^4 - 4\alpha \omega_1^2 \zeta_1^3 - 6\zeta_1^2 + 12\alpha \zeta_1 - 8\alpha \omega_1^{-1} + 3\omega_1^{-2}],$$

где принято, что $\alpha = 1 - \eta_1$; $\eta_1 = h_1/e$; $\zeta_1 = \xi_1/e$.

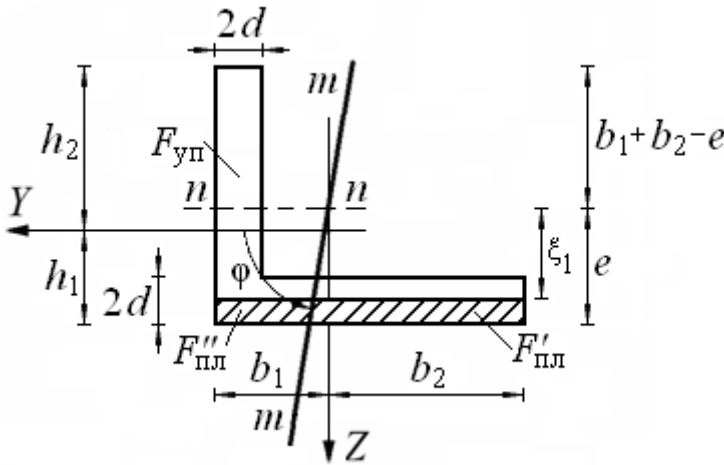


Рис. 9.13. Работа уголкового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае односторонней пластичности

При этом моменты инерции упругого ядра принимают вид

$$I_y^{yn} = \frac{2}{3} b_1^4 \lambda_1^4 (\beta^3 + \eta_2^3) \eta_d + \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1^3 + b_2^4 \lambda_2^3) (\zeta_1^3 - 3\alpha \zeta_1^2 + 3\alpha^2 \zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3);$$

$$I_z^{yn} = \frac{2}{3} b_1^4 \lambda_1^2 (4\eta_d^2 \lambda_1^2 - 6\eta_d \lambda_1 + 3) (\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_d) \eta_d +$$

$$+ \frac{1}{3} (b_1^4 \lambda_1 + b_2^4 \lambda_2) (\zeta_1 - 1 + 2\eta_d),$$

где $\beta = \eta_1 - 2\eta_d$; $\eta_2 = h_2/e$; $\eta_d = d/e$.

Подставив моменты инерции I_y^{yn} , I_y'' , I_{yz}'' в соотношение (9.23), получим уравнения для определения функции ω_1 :

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_1 + A_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (9.63)$$

$$B_1\omega_1^4 + B_2\omega_1^3 + B_3\omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}). \quad (9.64)$$

Коэффициенты этих уравнений имеют вид:

$$A_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$A_2 = 16\lambda_1(\beta^3 + \eta_2^3)\eta_d + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3) + \\ + 16[\beta^2 + 2\eta_1(\eta_1 - \eta_d)]\eta_d;$$

$$A_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha - 1);$$

$$B_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2);$$

$$B_2 = 16\lambda_1(\beta^3 + \eta_2^3)\eta_d + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3) - 8(\alpha^3 + \beta^3);$$

$$B_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2).$$

При рассмотрении двусторонней пластичности в уголкового поперечном сечении (рис. 9.14) отметим, что варианты прохождения границы раздела и соответствующие им выражения моментов инерции зоны разгрузки $F_{\text{пл}}''$ будут аналогичными представленным выше для случая односторонней пластичности. Заметим, что в зонах $F_{\text{пл}}'$ и $F_{\text{пл}}'''$ при этом будет происходить нагружение. Моменты инерции упругого ядра в случае двусторонней пластичности можно записать следующим образом:

$$I_y^{yn} = \frac{2}{3}b_1^4\lambda_1^4(\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2 + 3\zeta_2 - 8\eta_d^3)\eta_d + \\ + \frac{1}{3}(b_1^4\lambda_1^3 + b_2^4\lambda_2^3)(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3); \\ I_z^{yn} = \frac{2}{3}b_1^4\lambda_1^2(4\eta_d^2\lambda_1^2 - 6\eta_d\lambda_1 + 3)(\zeta_2 + 1 - 2\eta_d)\eta_d + \\ + \frac{1}{3}(b_1^4\lambda_1 + b_2^4\lambda_2)(\zeta_1 - 1 + 2\eta_d),$$

где принято, что $\zeta_2 = \zeta_2/e$.

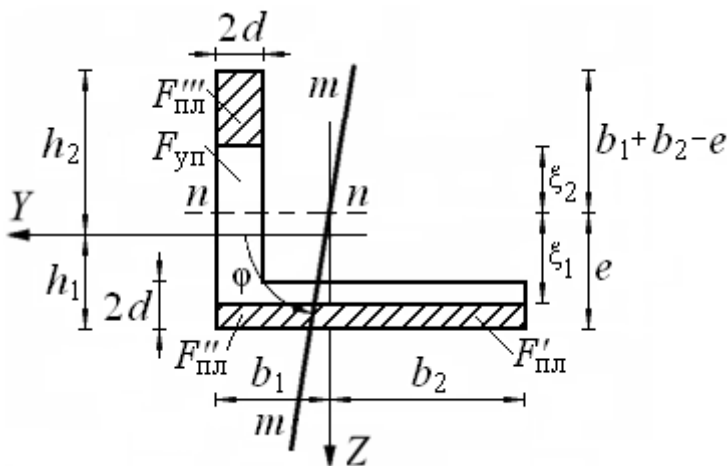


Рис. 9.14. Работа уголкового поперечного сечения упруго-пластической нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба в случае двусторонней пластичности

Используя формулу (9.26), получим уравнения для определения ω_1 :

$$C_1\omega_1^2 + C_2\omega_1 + C_3 = 0, \quad (0 \leq \omega_1 \leq 1); \quad (9.65)$$

$$D_1\omega_1^4 + D_2\omega_1^3 + D_3\omega_1^2 - 1 = 0, \quad (1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}), \quad (9.66)$$

где обозначено:

$$C_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1);$$

$$C_2 = 16\lambda_1(\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2 + 3\zeta_2 - 8\eta_d^3 + 1)\eta_d + \\ + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3) + 16[\beta^2 + 2\eta_1(\eta_1 - \eta_d)]\eta_d;$$

$$C_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha - 1);$$

$$D_1 = 3(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 + 4\alpha^2\zeta_1^2);$$

$$D_2 = 16\lambda_1(\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2 + 3\zeta_2 - 8\eta_d^3 + 1)\eta_d + \\ + 8b_1^{-1}b_2(\zeta_1^3 - 3\alpha\zeta_1^2 + 3\alpha^2\zeta_1 - \alpha^3 - \beta^3) - 8(\alpha^3 + \beta^3);$$

$$D_3 = 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1 + 2\alpha^2).$$

§ 9.4. Определение приведенной жесткости поперечного сечения нити

Для того чтобы найти приведенную жесткость поперечного сечения нити конечной жесткости при потере ею устойчивости плоской формы изгиба за пределами упругости необходимо вначале установить зависимость приращения изгибающего момента δM_z от кривизны нити в горизонтальной плос-

кости v'' . Решение указанной задачи можно получить с использованием второго из соотношений (9.12), куда подставляется вместо $\delta\sigma_x$ соответствующая зависимость. Применим данный подход для вычисления δM_z при различных типах поперечного сечения и вариантах распространения зон пластической деформации по сечению нити.

9.4.1. Прямоугольное сечение. Рассмотрим прямоугольное поперечное сечение нити. Величина приращения изгибающего момента в горизонтальной плоскости с учетом выражения (9.2) и второго из соотношений (9.12) для участка нити с односторонней пластичностью равна:

$$\delta M_z = E(I_z^{yn} + I_z'' - I_{yz}'' \operatorname{ctg} \varphi) v'' . \quad (9.67)$$

Последнюю зависимость можно также представить в виде

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \zeta_1) v'' , \quad (9.68)$$

где $I_z^*(\eta, \zeta_1) = I_z \cdot I'_z(\eta, \zeta_1)$; $I_z = \frac{4}{3} b^4 \lambda \eta$ – момент инерции относительно оси z полностью упругого поперечного сечения нити; $I'_z(\eta, \zeta_1)$ – поправка к упругому моменту инерции, характеризующая изменение его величины в результате развития в сечении зон пластической деформации.

Подставляя соответствующие значения моментов инерции в выражение (9.67), получаем:

$$I'_z(\eta, \zeta_1) = \begin{cases} \frac{1}{32\eta} \{ 8[(2\alpha + 1) + \zeta_1] - 6(\alpha - 2\beta\zeta_1 - \zeta_1^2) \omega + \\ + [(2\alpha - 1) - 4\beta\zeta_1^3 - \zeta_1^4] \omega^3 \}, & (0 \leq \omega \leq 1); \\ \frac{1}{32\eta} [3\omega^{-1} + 8(2\alpha + \zeta_1) + 6\zeta_1^2 \omega - \zeta_1^4 \omega^3], & (1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}), \end{cases}$$

где значение функции ω по-прежнему вычисляется по уравнениям (9.24) и (9.25).

В случае упруго-пластического участка нити конечной жесткости с двусторонней пластичностью вместо соотношения (9.67) будем иметь:

$$\delta M_z = E[I_z^{yn} + I_z'' + I_z''' - (I_{yz}'' + I_{yz}''') \operatorname{ctg} \varphi] v'' , \quad (9.69)$$

которое в силу связи между ω и η , ζ_1 и ζ_2 можно записать так:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2) v'' . \quad (9.70)$$

Аналогично предыдущему величина $I_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$ представляется произведением двух членов

$$I_z^*(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = I_z \cdot I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) ,$$

первый из которых, как и в случае участка нити с односторонней пластично-

стью, представляет собой упругий момент инерции поперечного сечения, а второй – поправку к его значению, зависящую от величины областей пластичности.

Внося дальше I_z^{yn} , I_z'' , I_z''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (9.69), для поправки к упругому моменту инерции имеем:

- при $0 \leq \omega \leq 1$

$$I_z'(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \{ 8[(\alpha + 1) + (\zeta_1 + \zeta_2)] - 6[2\alpha - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]\omega + \\ + [(2\alpha - 1) - \alpha^3(\alpha - 2) - 4\beta(\zeta_1^3 - \zeta_2^3) - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)]\omega^3 \};$$

- при $1 \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$, $1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$

$$I_z'(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \{ 3\omega^{-1} + 8[\alpha + (\zeta_1 + \zeta_2)] - \\ - 6[\alpha + 2\beta\zeta_2 - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]\omega - [\alpha^3(\alpha - 2) - 4\beta\zeta_2^3 + (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)]\omega^3 \};$$

- при $\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \alpha^{-1}$

$$I_z'(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} \{ 8[\alpha + (2\zeta_1 + \zeta_2) - 6(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2)]\omega - \\ - [\alpha^3(\alpha - 2) - 4\beta\zeta_2^3 + \zeta_2^4]\omega^3 \};$$

- при $\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_1^{-1}$

$$I_z'(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} [6\omega^{-1} + 8(\zeta_1 + \zeta_2) + 6(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\omega - (\zeta_1^4 + \zeta_2^4)\omega^3];$$

- при $\alpha^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$, $\zeta_1^{-1} \leq \omega \leq \zeta_2^{-1}$

$$I_z'(\eta, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{32\eta} [3\omega^{-1} + 8(2\zeta_1 + \zeta_2) + 6\zeta_2^2\omega - \zeta_2^4\omega^3].$$

Следует отметить, что входящее в последние зависимости значение функции ω определяется из соответствующих уравнений (9.27) – (9.31).

Как это хорошо известно, при потере устойчивости плоской формы равновесия упруго-пластических балок ($e = h$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$) выражения для $I_z'(\eta, \zeta_1, \zeta_2)$ после упрощений преобразуются к виду

$$I_z'(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{16} [8(1 + \zeta) - 6(1 - \zeta^2)\omega + (1 - \zeta^4)\omega^3], & (0 \leq \omega \leq 1); \\ \frac{1}{16} (8 + 3\zeta^{-1}\omega^{-1} + 6\zeta\omega - \zeta^3\omega^3)\zeta, & (1 \leq \omega \leq \zeta^{-1}), \end{cases}$$

где ω определяется по (9.32) и (9.33) соответственно. На рис. 9.2, б показан график $I_z'(\zeta)$.

9.4.2. Двутаверное сечение. В случае двутаверного поперечного сечения нити зависимость (9.68) при односторонней пластичности преобразуется таким образом:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) v'', \quad (9.71)$$

причем, входящую сюда величину $I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1)$ можно представить так:

$$I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) = I_z^c + I_{z,n}^*(\eta, \eta_c, \zeta_1) = I_z^c + I_z^n \cdot I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1),$$

где $I_z^c = \frac{4}{3} b b_c^3 \lambda \eta_c$ и $I_z^n = \frac{4}{3} b^4 \lambda (1 - \eta_c)$ – упругие моменты инерции относительно оси z соответственно стенки и полка двутавра; $I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1)$ – поправка к упругому моменту инерции полки, характеризующая изменение его величины в результате развития в сечении зон пластичности.

Учитывая необходимые значения моментов инерции в соотношениях (9.67) и (9.71), после несложных преобразований получим поправку к упругому моменту инерции полки:

$$I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1) = \frac{1}{16(1 - \eta_c)} \{ 4(1 + 2\alpha - 4\eta_c + \zeta_1) - 3(\alpha - 2\beta\xi_1 - \xi_1^2)\omega + [3\alpha - 4 - 2(3\beta - 2)\zeta_1 - 3\zeta_1^2]\omega^3 \}, \quad (0 \leq \omega \leq 1).$$

Причем значение входящей в последнюю формулу функции ω определяется из уравнения (9.34).

В случае упруго-пластического участка нити конечной жесткости с двусторонней пластичностью вместо выражения (9.71) будем иметь:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) v'',$$

а зависимость для приведенного момента инерции соответственно примет вид

$$I_z^*(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = I_z^c + I_z^n \cdot I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2).$$

Здесь, как и раньше, I_z^c и I_z^n – упругие моменты инерции стенки и полки двутавра, а $I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2)$ – поправка к упругому моменту инерции полки для случая двусторонней пластичности.

Внося I_z^{yn} , I_z'' , I_z''' , I_{yz}'' и I_{yz}''' в (9.69) и учитывая (9.71), получим следующие выражения для поправки к упругому моменту инерции:

- при $0 \leq \omega \leq 1$

$$I'_{z,n}(\eta, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16(1 - \eta_c)} \{ 4[2(\eta - 2\eta_c) + (\zeta_1 + \zeta_2)] - 3[2\alpha - 2\beta(\zeta_1 - \zeta_2) - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]\omega + [3\alpha(1 + \alpha^2) - 4(1 + \alpha^4) + 4(\zeta_1 + \alpha^3\zeta_2) - 6\beta(\zeta_1 - \alpha^2\zeta_2) - 3(\zeta_1^2 + \alpha^2\zeta_2^2)]\omega^3 \};$$

- при $1 \leq \omega \leq \alpha^{-1}$

$$I'_{z,n}(\eta_c, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16(1-\eta_c)} \{4[\alpha - 4\eta_c + 2\zeta_1 + \zeta_2] - \\ - 3(\alpha + 2\beta\zeta_2 - \zeta_2^2)\omega - \alpha^2[\alpha(8\beta + 1) - 2(7\beta + 2)\zeta_2 + 3\zeta_2^2]\omega^3\}.$$

Входящее в данные соотношения значение функции ω вычисляется из соответствующих уравнений (9.35), (9.36).

В балочном варианте ($e = h$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$) выражение для поправки к упругому моменту инерции полка двутавра после упрощений примет вид

$$I'_{z,n}(\eta_c, \zeta) = \frac{1}{8(1-\eta_c)} [4(1 - 2\eta_c + \zeta) - 3(1 - \zeta^2)\omega - (1 - 4\zeta + 3\zeta^2)\omega^3], \quad (0 \leq \omega \leq 1),$$

где ω определяется из решения уравнения (9.37).

С использованием последнего соотношения на рис. 9.4, б построена серия кривых, связывающих параметр ζ с функцией $I'_{z,n} = f(\eta_c, \zeta)$ при различной величине η_c , для частного случая $b_c/b = 0,1$.

9.4.3. Тавровое сечение. Рассмотрим тавровое поперечное сечение нити конечной жесткости. Величина приращения изгибающего момента в горизонтальной плоскости с учетом выражения (9.6) и второго из соотношений (9.12) для участка нити с односторонней пластичностью будет:

$$\delta M_z = E(I_z^{yn} + I_z'' - I_{yz}'' \operatorname{ctg} \varphi) v'' . \quad (9.72)$$

Последнюю зависимость можно также представить в виде

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1) v'' , \quad (9.73)$$

где $I_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1) = I_z \cdot I'_z(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1)$; $I_z = \frac{2}{3}[d^4\lambda_1(\eta_1 + \eta_c) + b^4\lambda_2(\eta_2 - \eta_c)]$ – момент инерции относительно оси z полностью упругого поперечного сечения нити; $I'_z(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1)$ – поправка к упругому моменту инерции, характеризующая изменение его величины в результате развития в сечении зон пластической деформации.

Подставляя соответствующие значения моментов инерции в выражение (9.72), получаем:

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I'_z(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1) = \frac{1}{16[b^4\lambda_2(\eta_c - \eta_2) - d^4\lambda_1(\eta_c + \eta_1)]} \times \{16b^4\lambda_2(\eta_c - \eta_2) + \\ + d^4\lambda_1[(\zeta_1^4 + 4(1 - \zeta_1^3)\alpha - 1)\omega_1^3 - 6(\zeta_1^2 + 2(1 - \zeta_1)\alpha - 1)\omega_1 - 8(\zeta_1 - 2(\alpha - \eta_c) + 1)]\};$$

- при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$

$$I'_z(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1) = \frac{1}{16[b^4\omega_2(\eta_c - \eta_2) - d^4\omega_1(\eta_c + \eta_1)]} \times [16b^4\omega_2(\eta_c - \eta_2) + d^4\omega_1(\zeta_1^4 - 4\alpha\zeta_1^3 - 6\zeta_1^2) + 8d^4\omega_1(\alpha - 2\eta_c - \zeta_1) + 3d^4(4\alpha\zeta_1\omega_1^2 - 1)],$$

где значение функции ω_1 по-прежнему вычисляется по (9.24) и (9.25).

В случае упруго-пластического участка нити конечной жесткости с двусторонней пластичностью вместо соотношения (9.72) будем иметь:

$$\delta M_z = E[I_z^{yn} + I''_z + I'''_z - (I''_{yz} + I'''_{yz}) \operatorname{ctg} \varphi] v'', \quad (9.74)$$

которое также можно записать следующим образом:

$$\delta M_z = EI_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) v''. \quad (9.75)$$

Аналогично предыдущему, величина $I_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2)$ представляется произведением двух членов

$$I_z^*(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = I_z \cdot I'_z(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2),$$

первый из которых, как и в случае участка нити с односторонней пластичностью, представляет собой упругий момент инерции поперечного сечения, а второй – поправку к его значению, зависящую от величины областей пластичности.

Внося дальше I_z^{yn} , I''_z , I'''_z , I''_{yz} и I'''_{yz} в (9.74), для поправки к упругому моменту инерции имеем:

- при $0 \leq \omega_1 \leq 1$

$$I'_z(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16[b^4\lambda_2(\eta_c - \eta_2) - d^4\lambda_1(\eta_c + \eta_1)]} \times \{2b^4\lambda_2[3(\eta_2^2 - \alpha^2 - 2\alpha\zeta_2 - \zeta_2^2)\omega_2 - 4(\alpha + \eta_2 - 2\eta_c)] + d^4\lambda_1[(\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\alpha + 3\alpha^4 - 8\alpha^3\eta_2 + 6\alpha^2\eta_2^2 + 4\alpha - \eta_2^4 - 1)\omega_1^3 - 6(\zeta_1^2 - 2(\zeta_1 - 1)\alpha - 1)\omega_1 - 8(\zeta_1 - 2(\alpha - \eta_c) + 3)]\};$$

- при $1 \leq \omega_1 \leq \zeta_1^{-1}$

$$I'_z(\eta_1, \eta_2, \eta_c, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{16[b^4\lambda_2(\eta_c - \eta_2) - d^4\lambda_1(\eta_c + \eta_1)]} \times \{2b^4\lambda_2[3(\eta_2^2 - \alpha^2 - 2\alpha\zeta_2 - \zeta_2^2)\omega_2 - 4(\alpha + \eta_2 - 2\eta_c + \zeta_2)] + d^4\lambda_1[(\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 4(\zeta_1^3 - \zeta_2^3)\alpha - (3\alpha + \eta_2)\beta^3)\omega_1^3 - 6(\zeta_1^2 - 2\alpha\zeta_1)\omega_1 + 8(\alpha - 2\eta_c - \zeta_1) - 3\omega_1^{-1}]\}.$$

Здесь нужно отметить, что входящее в последние зависимости значение функции ω_1 определяется из соответствующих уравнений (9.29) и (9.30).

Таким образом, для рассматриваемых задач устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластических нитей конечной жесткости прямоугольного, двутаврового и таврового поперечного сечения получены зависимости для определения приведенных жесткостных характеристик нити при

всех возможных случаях ее работы. Аналогично может быть получено решение задачи также в случаях, когда поперечное сечение принимается в виде швеллера с вертикальной или горизонтальной стенкой и уголка с неравными полками.

§ 9.5. Общие уравнения устойчивости для нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости

Рассмотрим задачу устойчивости плоской формы изгиба упруго-пластической нити конечной жесткости, свободной от связей в горизонтальной плоскости. В данном случае получить уравнение устойчивости в общем виде для произвольного поперечного сечения, подобно тому, как это было сделано в главе 5 при исследовании устойчивости нити в пределах упругой работы материала, в принципе возможно. Однако окончательное выражение не удастся привести к компактному и удобному для практического использования виду. Поэтому целесообразнее выводить уравнение устойчивости специально в каждом конкретном случае поперечного сечения нити.

Используя полученные выше результаты, а также принимая во внимание приведенные в главе 5 решения, можно получить уравнение устойчивости плоской формы деформирования упруго-пластической нити конечной жесткости прямоугольного поперечного сечения. В случае работы нити с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, шарнирного закрепления концов на опорах и загрузки равномерно распределенными нагрузками q_1 и q_2 уравнение устойчивости может быть представлено в виде

$$(P_z^* + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0, \quad (9.76)$$

где P_z^* – приведенная критическая сила при упруго-пластическом продольном изгибе в плоскости XOY ; $P_\omega = GI_d / r^2$ – критическая сила для чисто крутильной формы потери устойчивости; $\Psi(q_1, q_2)$ – характерная функция нагрузки для случая упруго-пластической потери устойчивости; $\lambda = \pi / l$.

Для входящих в зависимость (9.76) функций P_z^* и Ψ имеем выражения:

$$P_z^* = P_z \cdot P'_z = P_z \left[\frac{4}{l} \int_0^{x_1} \sin^2 \lambda x dx + \frac{4}{l} \int_{x_1}^{x_2} I'_z(\eta, \zeta_1) \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{2}{l} \int_{x_2}^{l-x_2} I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) \sin^2 \lambda x dx \right]; \quad (9.77)$$

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr} \left[\int_0^{x_1} M_y \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y \sin^2 \lambda x dx \right], \quad (9.78)$$

где $P_z = EI_z \lambda^2$ – критическая сила при упругом продольном изгибе в плоскости XOY ; P'_z – поправка к значению P_z , зависящая от величины областей пластичности в поперечном сечении нити; x_1 и x_2 – координаты границы между упругим участком и участком с односторонней пластичностью, а также между участками с односторонней и двусторонней пластичностью.

Причем при использовании приведенных формул следует иметь в виду, что координаты x_1 и x_2 определяются в результате решения задачи упруго-пластического деформирования нити конечной жесткости, а поправка к значению изгибающего момента I'_z – в соответствии с рекомендациями, содержащимися в предыдущем параграфе.

Для представления входящих в подынтегральные выражения функции Ψ изгибающих моментов M_y , как и в упругом случае, воспользуемся формулой (5.28). Тогда после некоторых преобразований получим:

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx \right]. \quad (9.79)$$

Само собой разумеется, что здесь необходимо только соблюдать соответствие между типом участка нити конечной жесткости (упругий, упруго-пластический с зоной односторонней пластичности и упруго-пластический с зоной двусторонней пластичности) и видом используемых в данном представлении зависимостей, характеризующих распределение балочных изгибающих моментов. Отметим, что эти соотношения приведены в работах [8, 38]. Значения интегралов в формуле (9.79) могут быть определены либо непосредственным интегрированием, либо по квадратурным формулам Ньютона-Котеса.

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах уравнение (9.76) преобразуется к виду

$$(4P_z^* + H) \left[P_\omega + H + \frac{3}{4r^2 \lambda^2} (q_1 e_1 + q_2 e_2) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0. \quad (9.80)$$

А значение характерной функции нагрузки здесь будет равно:

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{4}{lr(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]. \quad (9.81)$$

Для нити конечной жесткости, загруженной начальной равномерно распределенной по всему пролету и дополнительной равномерно распределенной на левой половине пролета нагрузками, при шарнирном закреплении концов на опорах уравнения устойчивости с учетом (5.66) можно представить

следующим образом:

$$(4P_z^* + H) \left[P_\omega + H + \frac{1}{4r^2\lambda^2} \left(q_1 e_1 + \frac{1}{2} q_2 e_2 \right) \right] - \Psi^2(q_1, q_2) = 0. \quad (9.82)$$

В последнем соотношении функции P_z^* и Ψ , в отличие от своих представлений в (9.77), (9.79) и (9.81), запишутся так:

$$\begin{aligned} P_z^* = P_z \cdot & \left[\frac{2}{l} \int_0^{x_1} \sin^2 2\lambda x dx + \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} I'_z(\eta, \zeta_1) \sin^2 2\lambda x dx + \right. \\ & + \frac{2}{l} \int_{x_2}^{x_3} I'_z(\eta, \zeta_1, \zeta_2) \sin^2 2\lambda x dx + \frac{2}{l} \int_{x_3}^{x_4} I'_z(\eta, \zeta_1) \sin^2 2\lambda x dx + \\ & \left. + \frac{2}{l} \int_{x_4}^{l-x_4} \sin^2 2\lambda x dx \right]; \end{aligned} \quad (9.83)$$

$$\begin{aligned} \Psi(q_1, q_2) = \frac{2}{lr(1+kH)} & \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx + \right. \\ & + \int_{x_2}^{x_3} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx + \int_{x_3}^{x_4} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx + \int_{x_4}^{l-x_4} M_y^6 \sin^2 2\lambda x dx \left. \right]. \end{aligned} \quad (9.84)$$

Здесь принято, что x_1 и x_2 – координаты между участками на левой половине пролета, а x_3 и x_4 – на правой половине пролета нити конечной жесткости.

Зависимости для других расчетных случаев (работа без изгиба от начальной нагрузки, иной вид поперечного сечения и др.) упруго-пластической нити конечной жесткости, свободной от связей в горизонтальной плоскости, здесь не показаны, поскольку могут быть получены аналогично приведенным.

Уравнения (9.76), (9.80) и (9.82) содержат две неизвестные величины – критическую дополнительную нагрузку q_2 (значение начальной нагрузки q_1 считается заданным и неизменным в процессе нагружения) и критический распор H . Для связи между ними используем, как и при упругой работе материала, уравнение неразрывности деформаций (5.30). Очевидно, что данное соотношение вполне правомочно, поскольку, во-первых, нить под действием любой дополнительной, в том числе и критической, нагрузки деформируется в плоскости XOZ , и, во-вторых, оно получено на основании чисто геометрических соображений, поэтому справедливо при любом характере зависимости между напряжением и деформацией. Однако в данном случае уравнение (5.30) должно быть раскрыто несколько иначе.

Полагая, что удлинение нити конечной жесткости происходит за счет растяжения ее оси, ΔL может быть вычислено следующим образом:

$$\Delta L = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx, \quad (9.85)$$

где первый член правой части представляет собой удлинение оси нити от начальной и дополнительной нагрузок, а второй – только от начальной нагрузки.

Тогда, внося с учетом [62, 103] в соотношение (5.30) значения длин нити, а также принимая во внимание (9.85), для уравнения неразрывности деформаций получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l (w'_0)^2 dx = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx, \quad (9.86)$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{1}{2(1+kH)} \int_0^l \left(\frac{dw^\delta}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2(1+kH_0)} \int_0^l \left(\frac{dw_0^\delta}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l \varepsilon dx - \int_0^l \varepsilon_0 dx. \quad (9.87)$$

Подставляя в последнее равенство соответствующие формулы для балочного прогиба w^δ [38] и удлинений оси нити ε и ε_0 (выражения для которых представлены в главе 7), а также решая полученное таким образом уравнение совместно с уравнениями устойчивости (9.76), (9.80) и (9.82), находим значения критического распора H и критической дополнительной нагрузки q_2 непосредственно в каждом конкретном случае работы упруго-пластической нити конечной жесткости. При этом, как неоднократно указывалось раньше, должно соблюдаться соответствие между типом участка нити и видом используемых при интегрировании уравнения (9.87) функций w^δ , ε и ε_0 .

§ 9.6. Общие уравнения устойчивости для нити, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости

Методика, применяемая при выводе уравнений устойчивости упруго-пластической нити конечной жесткости, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости, остается подобной случаю нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости.

Теперь рассмотрим нить конечной жесткости, работающую с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, шарнирно закрепленную на опорах, загруженную равномерно распределенными нагрузками q_1 , q_2 и имеющую прямоугольное поперечное сечение. Тогда, опираясь на формулу (5.57), а также используя приведенные выше решения, уравнение устойчивости после несложных преобразований может быть представлено в виде

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{\lambda^2} q_1 + \frac{e_2 - e_c}{\lambda^2} q_2 - \Psi(q_1, q_2) = 0. \quad (9.88)$$

Здесь, как и прежде, приведенная критическая сила при упруго-пластическом продольном изгибе P_z^* определяется из выражения (9.77), а для характерной функции нагрузки Ψ находим:

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{8e_c}{l(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^6 \sin^2 \lambda x dx \right]. \quad (9.89)$$

Напомним, что в зависимостях (9.88) и (9.89) через e_c обозначено расстояние от точки раскрепления нити до центра тяжести ее поперечного сечения.

В случае жесткого закрепления концов нити на опорах вместо уравнения (9.88) будем иметь:

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(4P_z^* + H) + \frac{3}{4\lambda^2}[(e_1 - e_c)q_1 + (e_2 - e_c)q_2] - \Psi(q_1, q_2) = 0, \quad (9.90)$$

а вместо выражения (9.89) соответственно

$$\Psi(q_1, q_2) = \frac{8e_c}{l(1+kH)} \left[\int_0^{x_1} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \right. \\ \left. + \int_{x_1}^{x_2} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_2}^{l-x_2} M_y^6 \cos 2\lambda x (1 - \cos 2\lambda x) dx \right]. \quad (9.91)$$

В случае действия на раскрепленную в горизонтальной плоскости упруго-пластическую нить конечной жесткости несимметричной нагрузки (начальная нагрузка q_1 равномерно распределена по всему пролету, а дополнительная нагрузка q_2 равномерно распределена только на левой половине пролета) и при шарнирном закреплении концов на опорах уравнение устойчивости приводится к виду

$$r^2(P_\omega + H) + e_c^2(4P_z^* + H) + \frac{e_1 - e_c}{4\lambda^2}q_1 + \frac{e_2 - e_c}{8\lambda^2}q_2 - \Psi(q_1, q_2) = 0, \quad (9.92)$$

причем для приведенной критической силы P_z^* сохраняется вид (9.83), а выражение для характерной функции нагрузки будет отличаться от соответствующей зависимости (9.84) только на постоянный коэффициент $2e_c/r$.

Уравнения устойчивости для других случаев работы упруго-пластических нитей конечной жесткости здесь не приводятся, т. к. методика их получения понятна из предшествующего изложения.

Для связи между содержащимися в зависимостях (9.82), (9.90) и (9.92) критическим распором H и критической дополнительной нагрузкой q_2 будем использовать, как и в случае нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости, уравнение неразрывности деформаций (9.87).

Таким образом, полностью определено поведение нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала при потере устойчивости плоской формы деформирования, а также установлены зависимости для нахождения критического распора и критической дополнительной нагрузки при различных случаях ее работы. Аналогично может быть получено решение задачи при любом другом виде поперечного сечения, опорных закреплениях и характере внешней нагрузки.

ГЛАВА 10

РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ ПОВЫШЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 10.1. Методика расчета висячих систем

Начнем с напоминания о том, что большепролетные пространственные комбинированные висячие системы повышенной жесткости обладают рядом специфических особенностей, связанных с объединением в единую конструкцию элементов различной структуры, мерности и жесткости, например, вантовых сетей, нитей конечной жесткости и мембран и заключающихся в их большой кинематической подвижности и высокой деформативности в процессе нагружения. Поэтому указанные системы и задачи их расчета являются геометрически нелинейными. Методика расчета висячих систем основана на специально построенных нелинейных соотношениях метода конечных элементов и является частным случаем (задача статики) сильнонелинейных эволюционных задач взаимодействия деформируемых тел, решение которых сводится к моделированию изменения свойств и структуры системы при ее нагружении. В такой постановке параметр времени служит параметром продолжения решения и в зависимости от вида задачи может трактоваться как реальное время или как ведущий параметр воздействия [71, 75, 88].

В соответствии с изложенным подходом описание нелинейного деформирования висячих систем повышенной жесткости удобно выполнить аналогично описанию движения сплошной среды в пространстве и во времени [139, 141]. Для получения разрешающих соотношений воспользуемся вариационным принципом Гамильтона [89, 172], с помощью которого вариационное уравнение движения сплошной среды может быть представлено в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_v \delta U dv + \int_v \rho \ddot{\vec{R}} \cdot \delta \vec{R} dv - \int_v \vec{p} \cdot \delta \vec{R} dv \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_s \vec{q} \cdot \delta \vec{R} ds = 0. \quad (10.1)$$

С другой стороны, для любого момента времени t вместо соотношения (10.1) будем иметь:

$$\int_v \delta U dv + \int_v \rho \ddot{\vec{R}} \cdot \delta \vec{R} dv - \int_v \vec{p} \cdot \delta \vec{R} dv - \int_s \vec{q} \cdot \delta \vec{R} ds = 0. \quad (10.2)$$

Обратим здесь внимание на то, что в уравнениях (10.1) и (10.2) первое слагаемое представляет собой вариацию энергии деформации, второе – вариацию работы инерционных сил, а третье и четвертое – вариации работы внешних объемных и поверхностных сил. Кроме того, здесь приняты следующие обозначения: δU – вариация удельной энергии деформации; $\ddot{\vec{R}}$ и $\vec{R}$ – соответственно вектор ускорений и радиус-вектор материальной точки тела; $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – обобщенные векторы объемных и поверхностных сил; v и s – соответственно объем и поверхность тела; ρ – плотность.

Начальные условия задачи (10.2) задаются в момент времени $t = t_0$ так:

$$\vec{R}(t_0) = \vec{R}_0; \quad \vec{\dot{R}}(t_0) = \vec{\dot{R}}_0; \quad \hat{\sigma}(t_0) = \hat{\sigma}_0; \quad \hat{\gamma}(t_0) = \hat{\gamma}_0; \quad \rho(t_0) = \rho_0. \quad (10.3)$$

Следует подчеркнуть, что значительная геометрическая нелинейность рассматриваемых систем при наличии больших перемещений обуславливает необходимость учета в расчетах конечных приращений деформаций. Для этого в соответствии с [143] введем понятие фиксируемых конфигураций сплошной среды как трехмерного тела в зависимости от его состояния. Сообразно с этим рассмотрим три состояния тела в процессе его деформирования:

- *натуральное* – напряжения и деформации отсутствуют;
- *начальное* – тело находится в состоянии равновесия под действием начальных внешних нагрузок и воздействий;
- *конечное* – тело при дополнительных внешних нагрузках и воздействиях приходит в новое состояние равновесия.

Каждому из перечисленных состояний тела соответствует своя фиксируемая конфигурация. А именно: C_0 в момент времени $t = 0$; C_t в момент времени $t = t$; $C_{t+\Delta t}$ в момент времени $t = t + \Delta t$.

Здесь в качестве отсчетной принята конфигурация C_t , соответствующая начальному состоянию тела. Введем далее в рассмотрение две системы координат: глобальную декартовую Z^1, Z^2, Z^3 и местную криволинейную лагранжевую x^1, x^2, x^3 . Тогда положение произвольной точки в фиксируемых конфигурациях задается непрерывными и требуемое число раз дифференцируемыми вектор-функциями

$$\vec{r}^0 = \vec{r}^0(x^1, x^2, x^3); \quad \vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2, x^3); \quad \vec{R} = \vec{R}(x^1, x^2, x^3), \quad (10.4)$$

которые в глобальной системе координат записываются с помощью формул

$$\vec{r}^0 = Z^{i'} \vec{e}_i^0; \quad \vec{r} = Z^{i'} \vec{e}_i; \quad \vec{R} = Z^{i'} \vec{e}_i^*, \quad (10.5)$$

где $\vec{e}_i^0$ – единичные масштабные векторы-орты глобальной системы координат, а функции $Z^{i'}$, $Z^{i'}$ и $Z^{i'}$ определяются соотношением

$$\vec{r}^0 = \vec{r}^0(x^1, x^2, x^3); \quad Z^{i'} = Z^{i'}(x^1, x^2, x^3); \quad Z^{i'} = Z^{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad (10.6)$$

причем однозначность функций (10.6) обеспечивается неравенством нулю их якобианов [89].

Базисные векторы для фиксируемых конфигураций тела запишем в виде

$$\vec{e}_i^0 = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial x^{i'}}; \quad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i'}}; \quad \vec{e}_i^* = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^{i'}}. \quad (10.7)$$

Компоненты метрических тензоров каждого из состояний в свою очередь определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_{ij} &= \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = C_i^{k'} C_j^{m'} \delta_{k'm'} ; \\ G_{ij} &= \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = C_i^{n'} C_j^{s'} \delta_{n's'} ; \\ G_{mn} &= \bar{e}_m \cdot \bar{e}_n = C_m^{t'} C_n^{f'} \delta_{t'f'} , \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

где $C_i^{n'}$ – компоненты тензора преобразования из глобальной в местную систему координат; δ_{mn} – символ Кронекера.

Деформацию сплошной среды можно представить как изменение длин и направлений векторов, отнесенных к отсчетной конфигурации [89]

$$ds^r = d\vec{r} \cdot \hat{G} \cdot d\vec{r} , \quad (10.9)$$

де $d\vec{r} = dx^s d\vec{e}_s$; $\hat{G} = G_{sk} \vec{e}^s \vec{e}^k$ – мера деформации Коши-Грина.

В соответствии с выбранной отсчетной конфигурацией введем вектор приращений перемещений

$$\vec{u} = \vec{R} - \vec{r} . \quad (10.10)$$

В силу сильной геометрической нелинейности рассматриваемых задач используем тензор конечных деформаций Коши-Грина

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2} \left(G_{sk}^* - G_{sk} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T + \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}^T) , \quad (10.11)$$

где $\nabla \vec{u} = \nabla_i u_j \vec{e}^i \vec{e}^j$.

Представим функцию удельной энергии деформации в виде скалярной функции тензорного аргумента второго ранга с учетом ее индифферентности

$$U = U(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{12}^2, \dots, \varepsilon_{31}) . \quad (10.12)$$

Тогда, задавая ε_{ij} бесконечно малые приращения $\delta\varepsilon_{ij}$ при неизменном t , можно получить выражение функции удельной энергии деформации вместо конфигурации C_t в близкой ей конфигурации $C_{t+\Delta t}$. Для этого представим полиномиальную функцию (10.12) разложением в ряд Тейлора с удержанием трех членов ряда [172]

$$U(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) = U(\varepsilon_{ij}) + \hat{U}_{\hat{\varepsilon}} \cdot \delta\varepsilon + \frac{1}{2} \delta\hat{\varepsilon}^T \cdot \hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} \cdot \delta\hat{\varepsilon}^T , \quad (10.13)$$

где члены $\delta\hat{\varepsilon}^T = \delta\varepsilon_{mn} \vec{e}^m \vec{e}^n$ и $\hat{U}_{\hat{\varepsilon}} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{st}} \vec{e}^s \vec{e}^t$ являются тензорами второго ранга,

а член $\hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{st}} \vec{e}^m \vec{e}^n \vec{e}^s \vec{e}^t$ – тензором четвертого ранга.

Представляя далее напряжения и внешние воздействия в приращениях и вводя известные обозначения [89]

$$\hat{U}_{\hat{\varepsilon}} = \hat{\sigma}' ; \hat{U}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \hat{C}' ; \delta\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma} , \quad (10.14)$$

соотношение для вариации удельной энергии деформации относительно отсчетной конфигурации приводится к следующему виду:

$$\delta U = (\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma}) \cdot \delta \hat{\gamma}, \quad (10.15)$$

где $\hat{\sigma}'$ – второй симметричный тензор начальных напряжений Пиола-Кирхгоффа; $\hat{\gamma}$ – тензор конечных деформаций Коши-Грина.

Подставляя затем соотношение (10.15) в формулу (10.2) и учитывая выражение (10.10), приходим к уравнению

$$\int_V (\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma}) \cdot \delta \hat{\gamma} dv + \int_V \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} dv - \int_V \vec{p} \cdot \delta \vec{u} dv - \int_S \vec{q} \cdot \delta \vec{u} ds = 0. \quad (10.16)$$

При статических воздействиях вариация работы инерционных сил равна нулю и принцип Гамильтона сводится к принципу минимума потенциальной энергии сплошной среды (принципу Лагранжа)

$$\delta \Pi = \delta W - \delta A = 0, \quad (10.17)$$

откуда окончательно имеем:

$$\int_V (\hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma}) \cdot \delta \hat{\gamma} dv - \int_V \vec{p} \cdot \delta \vec{u} dv - \int_S \vec{q} \cdot \delta \vec{u} ds = 0. \quad (10.18)$$

Заметим, что последнее выражение является исходным для получения основных соотношений метода конечных элементов.

§ 10.2. Разрешающие уравнения метода конечных элементов

Принимая во внимание допущение о постоянстве объемных и поверхностных сил в пределах конечных элементов [112], выражение вариации полной потенциальной энергии можно представить таким образом:

$$\delta \Pi = \sum_L [(R_L^{k'})_{\text{с.г.}} + (R_L^{k'})_{\text{м.}} + (R_L^{k'})_{\text{с.ж.}} - P_L^{k'} - Q_L^{k'}] \delta u_{k'}^L, \quad (10.19)$$

где $(R_L^{k'})_{\text{с.г.}}$, $(R_L^{k'})_{\text{м.}}$, $(R_L^{k'})_{\text{с.ж.}}$ – коэффициенты матриц реакций соответственно стержня, воспринимающего растяжение-сжатие, мембраны и стержня, воспринимающего растяжение-сжатие с изгибом; $P_L^{k'}$ – компоненты вектора объемных узловых сил; $Q_L^{k'}$ – компоненты вектора поверхностных узловых сил.

Распространяя в (10.19) суммирование по всем конечным элементам дискретной модели висячей системы повышенной жесткости

$$\sum_N \left\{ \sum_L [(R_L^{k'})_{\text{с.г.}} + (R_L^{k'})_{\text{м.}} + (R_L^{k'})_{\text{с.ж.}} - P_L^{k'} - Q_L^{k'}] \delta u_{k'}^L \right\} = 0 \quad (10.20)$$

и, переходя затем от суммирования по элементам к суммированию по всем узлам дискретной модели, получим:

$$\sum_N [(R_N^{k'})_{\text{с.г.}} + (R_N^{k'})_{\text{м.}} + (R_N^{k'})_{\text{с.ж.}} - P_N^{k'} - Q_N^{k'}] \delta u_{k'}^N = 0, \quad (N=1, 2, \dots, M), \quad (10.21)$$

где M – общее число узлов дискретной модели.

Отсюда в силу независимости вариаций перемещений $\delta u_{k'}^N$ получаем систему нелинейных уравнений равновесия:

$$\sum_{N=1}^M [(R_N^{k'})_{\text{с.г.}} + (R_N^{k'})_{\text{м.}} + (R_N^{k'})_{\text{с.ж.}} - P_N^{k'} - Q_N^{k'}] = 0, \quad (10.22)$$

решая которую можно определить неизвестные значения параметров напряженно-деформированного состояния висячей системы повышенной жесткости.

§ 10.3. Алгоритмы решения нелинейных задач

10.3.1. Общие положения. Как было показано в предыдущем параграфе, равновесное состояние конечноэлементной модели висячей конструкции повышенной жесткости описывается системой нелинейных уравнений высокого порядка (10.22). Обычно для решения таких систем используются различные итерационные методы, которые можно трактовать как методы установления решения дифференциального уравнения, описывающего некоторый нестационарный процесс [137]. При таком подходе задача статики висячей системы сводится к задаче отыскания равновесных состояний динамической дискретной модели, уравнение движения которой на данном шаге нагружения имеет вид [69]

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + \{F(u)\} - \{Q(u)\} = 0, \quad (10.23)$$

где $[M]$ и $[C]$ – матрицы, интерпретируемые как матрицы масс и вязкого демпфирования конечноэлементной модели; $\{F(u)\}$ и $\{Q(u)\}$ – векторы обобщенных внутренних и внешних сил дискретной модели конструкции; $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$ – векторы ускорений, скоростей и неизвестных приращений перемещений (точкой обозначена операция дифференцирования по времени t).

Решение уравнения (10.23) считается полученным, когда дискретная модель приходит в равновесное положение, соответствующее значению приложенных внешних нагрузок. Одновременно должны выполняться требования равенства нулю уравнений равновесия и вектора скорости системы

$$\{F(u)\} - \{Q(u)\} = 0; \quad \{\dot{u}\} = 0. \quad (10.24)$$

Скорость решения и, как следствие, общий объем вычислительных операций зависят от многих факторов: демпфирующих свойств модели, эффективности алгоритма численного интегрирования (10.23), выбора матриц $[M]$, $[C]$ и параметров алгоритма интегрирования [139].

Результаты большого количества выполненных численных экспериментов и решения различных сильнонелинейных задач [76, 78, 178, 191-194, 215, 218] показывают, что наиболее целесообразным применительно к исследованию рассматриваемых конструкций является использование не одного, хотя и эффективного итерационного метода, а их комбинации. В этом случае окончательное решение задачи достигается поэтапно на основе ряда последова-

тельных решений, каждое из которых есть не что иное, как начальное приближение к последующему этапу решения. В предлагаемой схеме исследования висячих систем повышенной жесткости в такой взаимодополняющей комбинации используются методы установления, динамической и вязкой релаксации [171], дискретных торможений [69], Ньютона, Ньютона-Рафсона и Ньютона-Канторовича [72], а также их различные модификации.

10.3.2. Особенности построения алгоритмов расчета висячих систем. При построении алгоритмов решения уравнения (10.23) воспользуемся следующими аппроксимационными формулами:

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{u}^{n+1}\} &= \{\dot{u}^n\} + [(1-\alpha)\{\ddot{u}^n\} + \alpha\{\ddot{u}^{n+1}\}]\Delta t, \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \{\dot{u}^n\}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}^n\} + \beta\{\ddot{u}^{n+1}\}\right]\Delta t^2. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

В зависимости от значений параметров α и β можно получить различные неявные и явные разностные схемы. Например, при $\alpha = 1/2$ и $\beta = 1/4$ уравнения (10.25) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\} &= \left\{\dot{u}^{n-\frac{1}{2}}\right\} + \Delta t\{\ddot{u}^n\}; \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \Delta t\left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

что соответствует представлению скоростей и ускорений через центральные разности

$$\left. \begin{aligned} \left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\} &= \frac{\{u^{n+1}\} - \{u^n\}}{\Delta t}; \\ \{\ddot{u}^n\} &= \frac{\left\{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}\right\} - \left\{\dot{u}^{n-\frac{1}{2}}\right\}}{\Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

Как правило, в уравнении (10.23) в качестве матриц $[M]$ и $[C]$ выбираются диагональные матрицы, элементы которых пропорциональны диагональным коэффициентам матрицы жесткости системы уравнений равновесия, представление которых выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} [M] &= \rho[D]; \quad [C] = c[D]; \quad [D] = \text{diag}[K]; \\ [K] &= \left[\frac{\partial(\{F(u)\} - \{Q(u)\})}{\partial\{u\}} \right]_{\{u\}=0}, \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

где ρ – фиктивная плотность системы; c – коэффициент вязкого сопротивления.

Подставляя в (10.27) вычисленные по (10.23) значения компонент век-

тора ускорений в точке n , а также используя (10.28) и среднее значение вектора скоростей вида

$$\{\dot{u}^n\} = \frac{1}{2} \left(\left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\} \right),$$

получим рекуррентные формулы метода динамической релаксации:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} &= \frac{2 - c\Delta t/\rho}{2 + c\Delta t/\rho} \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\} - \frac{2\Delta t/\rho}{2 + c\Delta t/\rho} [D]^{-1} (\{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\}); \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \Delta t \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.29)$$

Известны также другие варианты методов установления. Например, соотношения метода вязкой релаксации [171] могут быть получены из (10.23) при $[M] \equiv 0$, $[C] = c[E]$, $\alpha = 1$ (так называемая неявная разностная схема для параболического уравнения):

$$\left. \begin{aligned} c^{n+1}[E] \{\dot{u}^{n+1}\} + \{F(u^{n+1})\} - \{Q(u^{n+1})\} &= 0; \\ \{\dot{u}^{n+1}\} &= \frac{1}{\Delta t} (\{u^{n+1}\} - \{u^n\}), \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

где $[E]$ – единичная матрица.

Матрица Якоби для нелинейной системы (10.30) в точке n имеет вид

$$\left. \frac{\partial \left(c^{n+1}[E] \frac{1}{\Delta t} (\{u^{n+1}\} - \{u^n\}) + \{F(u^{n+1})\} - \{Q(u^{n+1})\} \right)}{\partial \{u^{n+1}\}} \right|_{(n)} = \frac{c^n}{\Delta t} [E] + [K^n]. \quad (10.31)$$

Тогда решение уравнения (10.30) сводится к итерациям типа Ньютона по формулам

$$\left. \begin{aligned} \left([K^n] + \frac{c^n}{\Delta t} [E] \right) \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\} &= -\{F(u_i^{n+1})\} + \{Q(u_i^{n+1})\} - c^n[E] \{\dot{u}_i^{n+1}\}; \\ \{u_{i+1}^{n+1}\} &= \{u_i^{n+1}\} + \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\}; \quad \{\dot{u}_{i+1}^{n+1}\} = \frac{\{u_{i+1}^{n+1}\} - \{u^n\}}{\Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.32)$$

При решении сильнонелинейных задач численная устойчивость и более высокая скорость сходимости итерационного процесса обеспечиваются в том случае, если пренебречь членом $c^n[E] \{\dot{u}_i^{n+1}\}$ в правой части (10.32). При этом оператором-регуляризатором итерационного процесса является матрица $c^n[E]/\Delta t$. Причем при $\Delta t = 1$ и $c^n = 0$ алгоритм (10.32) сводится к непосред-

ственному решению системы (10.24) методом Ньютона-Рафсона.

В методе дискретных торможений [69] установление решения системы (10.23) обеспечивается не только учетом диссипативных сил, но и введением в процессе численного интегрирования дискретного затухания (торможения) в те моменты времени, когда система «проскакивает» равновесное положение. Иными словами, в моменты торможения, которые характеризуются локальными максимумами кинетической энергии системы, скорости всех точек системы приравняются нулю.

Применительно к расчету висячих систем повышенной жесткости реализованы и исследованы следующие варианты итерационных методов.

1. Метод дискретных торможений на основе явной разностной схемы без дополнительной диссипации:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}} \right\} &= \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\} - \frac{\Delta t}{\rho} [D]^{-1} \left(\{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\} \right); \\ \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} &= H(\Delta T_0^n) \left\{ \dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \left(H(\Delta T_0^n) - 1 \right) \frac{\Delta t [D]^{-1}}{\rho} \left(\{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\} \right); \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \Delta t \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

где $\Delta T_0^n = \left\{ \dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}} \right\}^T [D] \left\{ \dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}} \right\} - \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\} [D] \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\}$ – приращение кинетической энергии системы; $H(\Delta) = \begin{cases} 0, & \Delta < 0 \\ 1, & \Delta \geq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

2. Метод дискретных торможений с использованием соотношений неявной разностной схемы (10.31) в сочетании с методом Ньютона:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \dot{u}_{(0)}^{n+\frac{1}{2}} \right\} &= \left\{ \dot{u}_{(0)}^{n-\frac{1}{2}} \right\} - \frac{\Delta t}{\rho} [K^{(n)}]^{-1} \{h(u^n)\}; \\ \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} &= H(\Delta) \left\{ \dot{u}_{(0)}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \left(H(\Delta) - 1 \right) \frac{\Delta t}{\rho} [K^{(n)}]^{-1} \{h(u^n)\}; \\ \{u^{n+1}\} &= \{u^n\} + \Delta t \left\{ \dot{u}_{(0)}^{n+\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10.34)$$

где $\{h(u^n)\} = \{F(u^n)\} - \{Q(u^n)\}$.

3. Метод дискретных торможений в сочетании с методом динамической

релаксации (10.29):

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}} \right\} &= \frac{2 - c\Delta t / \rho}{2 + c\Delta t / \rho} \left\{ \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} \right\} - \frac{2\Delta t / \rho}{2 + c\Delta t / \rho} [D]^{-1} \left(\left\{ F(u^n) \right\} - \left\{ Q(u^n) \right\} \right); \\ \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} &= H(\Delta T_0^n) \left\{ \dot{u}_0^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \left(H(\Delta T_0^n) - 1 \right) \frac{\Delta t}{2\rho} [D]^{-1} \left(\left\{ F(u^n) \right\} - \left\{ Q(u^n) \right\} \right); \\ \left\{ u^{n+1} \right\} &= \left\{ u^n \right\} + \Delta t \left\{ \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.35)$$

4. Метод дискретных торможений в сочетании с покоординатным дискретным демпфированием, при котором приравняется нулю коэффициент вязкости $c_{(i)}$, соответствующий i -му уравнению в формулах (10.35), при движении точки к своему положению равновесия, а не от него:

$$c_{(i)} = H \left[\left(\dot{u}_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(\dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] c. \quad (10.36)$$

5. Метод Ньютона-Канторовича:

$$\left. \begin{aligned} ([K^n] + c^n[E]) \{ \Delta u_i^{n+1} \} &= \{ Q(u_i^{n+1}) \} - \{ F(u_i^{n+1}) \}; \\ \{ u_{i+1}^{n+1} \} &= \{ u_i^{n+1} \} + \{ \Delta u_{i+1}^{n+1} \}, \end{aligned} \right\} \quad (10.37)$$

где $[K^n]$ – линеаризованная матрица жесткости конечноэлементной модели; $[E]$ – единичная матрица.

Здесь необходимо отметить, что при выводе формул (10.37) было принято, что $\Delta t = 1$, а также что матрица $[K^n]$ совпадает с матрицей Якоби системы (10.24) в начальной точке $n+1$ -го шага нагружения при $\{u_0^{n+1}\} = 0$ и остается постоянной. Сходимость указанных итерационных процессов контролируется по норме вектора невязки $(\{\ddot{u}^{n+1}\})^2$, а итерационный процесс считается законченным, если $(\{\ddot{u}^{(n+1)}\})^2 < \varepsilon$, где ε – некоторая наперед заданная малая величина.

10.3.3. Метод продолжения по параметру возмущения в сочетании с методом Ньютона-Канторовича. Можно показать, что если при решении системы уравнений вида

$$[K] \{u\} - \{R\} = 0 \quad (10.38)$$

на каждой итерации метода динамической релаксации выбрать параметры c , Δt и матрицы $[M]$, $[C]$ такими, чтобы минимизировать потенциальную энергию системы

$$\Pi = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{R\} \quad (10.39)$$

в направлении, определяемом векторами $\{\ddot{u}\}$ и $\{\dot{u}\}$, то метод динамической

релаксации сводится к двухшаговому методу сопряженных градиентов. В этом случае $\{\ddot{u}\}$ определяет направление, противоположное градиенту функции (10.39), а $\{\dot{u}\}$ – сопряженное к нему направление.

Известно, что для хорошей сходимости метода сопряженных градиентов матрица $[K]$ должна быть положительно определенной и хорошо обусловленной [171]. В ином случае итерационный процесс не сходится вследствие накопления ошибок округления. Поэтому один из способов улучшения сходимости метода сопряженных градиентов заключается в том, что после j итераций (где j – порядок системы) предлагается начинать процесс сначала. В такой модификации метод сопряженных градиентов становится аналогичным методу дискретных торможений. Однако в последнем методе моменты торможений определяются по локальным максимумам кинетической энергии, а не назначаются через фиксированное число шагов.

Следует заметить, что для решения нелинейных систем с хорошим начальным приближением более экономичными являются неявные методы типа Ньютона. Путем численных экспериментов [73] установлено, что для задач рассматриваемого класса начальный вектор является приемлемым, если при решении системы модифицированным методом Ньютона-Канторовича с постоянной матрицей Якоби время, затраченное на итерации, не превышает более чем в 1,5–2 раза время, необходимое для ее вычисления и триангуляции. В ином случае необходимо уменьшить шаг нагружения, а при чрезмерном уменьшении шага перейти к методу дискретных торможений.

При решении задач статики висячих систем (в том числе и повышенной жесткости) величины приращений внешнего воздействия обычно принимаются такими, что приращения перемещений, полученные на предыдущих одном-двух шагах, могут служить основой для экстраполяции начального приближения вектора приращений перемещений на новом шаге нагружения. В этом случае естественно предпочтительнее выглядит метод Ньютона. Однако для его сходимости кроме приемлемого начального приближения требуется еще и хорошая обусловленность матрицы $[K]$, что, как известно, не имеет места в начальных стадиях нагружения, когда еще не достигнут достаточный уровень предварительного напряжения висячей системы. Плохой обусловленностью обладают также линеаризованные матрицы жесткости комбинированных висячих систем и систем со специальными дополнительными условиями, исключаемыми с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа.

Вполне понятно, что стремление расширить область применения метода Ньютона привело к необходимости развития алгоритмов, основанных на его комбинации с методами регуляризации, применяемыми при решении некорректно поставленных эллиптических задач, методами расчленения [1] и групповой релаксации [171]. Если в (10.32) принять

$$\frac{c[E]}{\Delta t} \equiv c^{(n)}[E]; \quad \Delta t = 1; \quad (\dot{u}_i^{n+1}) \equiv 0, \quad (10.40)$$

то индекс n становится номером шага по параметру нагружения и рекуррент-

ную формулу итераций на $n+1$ -м шаге продолжения можно записать в виде

$$\left\{ \begin{aligned} ([K^{(n)}] + c^{(n)}[E]) \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\} &= \{Q(u_i^{n+1})\} - \{F(u_i^{n+1})\}; \\ \{u_{i+1}^{n+1}\} &= \{u_i^{n+1}\} + \{\Delta u_{i+1}^{n+1}\}, \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

где $c^{(n)}$ – коэффициент регуляризации на n -м шаге; $[K^{(n)}]$ – линеаризованная матрица жесткости дискретной модели; $\{\Delta u_{i+1}^{n+1}\}$ – приращения перемещений на i -й итерации $n+1$ -го шага. Матрица жесткости системы линеаризованных уравнений равновесия $[K^{(n)}]$ совпадает с матрицей Якоби (10.31) в начальной точке $n+1$ -го шага нагружения при $\{u_0^{n+1}\} = 0$ и остается постоянной.

Сущность различных способов регуляризации сводится к тому, чтобы отфильтровать решения, обуславливающие неустойчивость итерационного процесса, при этом коэффициент регуляризации должен удовлетворять условию

$$\lambda_{\min}^{(n)} \ll c^{(n)} \ll \lambda_{\max}^{(n)}, \quad (10.42)$$

где $\lambda^{(n)}$ – собственные значения матрицы $[K^{(n)}]$.

Значения $\lambda_{\max}^{(n)}$ и $\lambda_{\min}^{(n)}$ можно оценить, анализируя диагональные коэффициенты треугольной матрицы, полученной в результате факторизации $[K^{(n)}]$ методом Холецкого [47].

Увеличение скорости сходимости итерационного процесса метода Ньютона при данном способе регуляризации обеспечивается введением демпфирующего множителя, который согласно принципам построения итерационных процессов можно классифицировать как множитель нижней релаксации. Величину данного множителя определяем по аналогии с методом групповой координатной релаксации [171], когда в качестве группы рассматривается вся исходная система. Управление релаксацией заключается в выборе уравнения с ведущим индексом I_k на каждом шаге продолжения, исходя из результатов предыдущего шага. Для определения ведущего индекса на $n+1$ -м шаге используется условие, аналогичное условию в релаксационной процедуре Гаусса [171], а невязка уравнения с ведущим индексом подчиняется условию

$$\frac{(\mathcal{Q}_{I_k}^{(n-1)} - F_{I_k}^{(n-1)})^2}{(K_{I_k I_k})^2} \geq \frac{(\mathcal{Q}_I^{(n-1)} - F_I^{(n-1)})^2}{(K_{II})^2}, \quad (10.43)$$

где $I = 3(N-1) + i'$; $I_k = 3(N-1) + i'_k$; $i' = 1, 2, 3$; $N = 1, 2, \dots, M$.

Характерным моментом здесь является также то, что значение коэффициента релаксации на $n+1$ -м шаге нагружения для уравнения с ведущим индексом определяется по формуле градиентного метода с минимальными невязками, что соответствует методу нижней релаксации [171]

$$q_{I_k} = \frac{(\{R\}^T [K] \{R\})^2}{(\{R\}^T [K]^T [K] \{R\})(\{R\}^T \{R\})} \leq 1, \quad (10.44)$$

где $\{R\} = \{F(u)\} - \{Q(u)\}$.

Отметим также, что в (10.44) знак равенства возможен только в том случае, если $\{R\}$ будет собственным вектором матрицы $[K]$. Значения же

остальных коэффициентов релаксации определяются по формуле

$$q_I = 1 - (1 - q_{I_k}^{(n)}) \left(\frac{R_I^{(n-1)} K_{I_k I_k}}{R_{I_k}^{(n-1)} K_{II}} \right)^2. \quad (10.45)$$

Таким образом, введенные множители нижней релаксации изменяются в интервале $q_{I_k} \leq q_I \leq 1$, а рекуррентная формула (10.41) в компонентной форме с учетом демпфирующих множителей имеет вид

$$\left. \begin{aligned} [K_{NL}^{ij'j'(n)} + c^{(n)} \delta^{ij'} n_{(N)}^{(i')} \delta_{NL}] \Delta \tilde{u}_{i'}^{L(n,m+1)} &= Q_N^{j'(n,m)} - F_N^{j'(n,m)}; \\ \tilde{u}_{i'}^{L(n,m+1)} &= \tilde{u}_{i'}^{L(n,m)} q_{(i')}^{(L)} \Delta \tilde{u}_{i'}^{L(n,m+1)}; \end{aligned} \right\} \quad (10.46)$$

где $n_{(N)}^{(i')}$ – компоненты вектора единичной нормали к поверхности системы в узле N ; $K_{NL}^{ij'j'(n)}$ – коэффициенты матрицы жесткости конечноэлементной модели; $N = 1, 2, \dots, M$; M – число узлов модели; $q_{(i')}^{(L)} \equiv q_I$, $I = 3(L-1) + i'$.

10.3.4. Комбинированный алгоритм расчета висячих систем. Известно, что метод Ньютона-Канторовича весьма эффективен и обладает высокой скоростью сходимости итерационного процесса при одном условии – ему требуется начальное весьма близкое приближение решения [139]. Данное обстоятельство применительно к висячим системам связано с их большой кинематической подвижностью и высокой деформативностью, что приводит к ухудшению обусловленности и даже в некоторых случаях – к вырожденности матрицы жесткости $[K]$ системы линеаризованных уравнений. Особенно это характерно для начальных этапов расчета, когда еще не достигнут достаточный для увеличения жесткости конструкции уровень напряженного состояния. В этих случаях используется метод дискретных торможений, обеспечивающий достаточно быструю сходимость и высокую гибкость вычислительного процесса относительно вида нелинейности [69]. В указанном методе, о чем уже говорилось раньше, решение системы (10.23) обеспечивается не только учетом диссипативных сил, но и введением в процессе численного интегрирования дискретного затухания (торможения) в те моменты времени, когда система «проскакивает» равновесное положение. Иначе говоря, в моменты торможения, которые характеризуются локальными максимумами кинетической энергии системы, скорости всех точек приравняются нулю. Однако и здесь также желательно предварительное задание параметров начального напряженно-деформированного состояния конструкции, поскольку в противном случае как время счета, так и число итераций вычислительного процесса могут неоправданно возрасти.

Согласно этой схеме рассуждений комбинированный алгоритм исследования деформирования висячих систем повышенной жесткости включает следующие основные этапы:

1) предварительное определение параметров напряженно-деформированного состояния основных несущих элементов висячей системы с использованием решений, представленных в главах 3, 4, 6–8 настоящего издания;

- 2) уточнение полученного на первом этапе напряженно-деформированного состояния для всей висячей системы методом дискретных торможений;
- 3) решение задачи методом Ньютона-Канторовича с учетом определенного на втором этапе напряженно-деформированного состояния системы;
- 4) дополнительный этап, на котором при необходимости производится решение задачи с учетом итогового напряженно-деформированного состояния конструкции от статических нагружений на специфические, неучтенные ранее нагрузки и воздействия, например, ветровые, сейсмические и пр.

§ 10.4. Реализация методики исследования висячих систем

Для решения проблемных задач прочности сильнонелинейных конструкций используется вычислительный комплекс ПАРУС [71, 75, 77, 187, 213], включающий специализированные программы, предназначенные для исследования статики и динамики пространственных систем. Причем ведущим в решениях рассматриваемых задач является метод конечных элементов.

Исследование нелинейного деформирования сложных объектов методом конечных элементов сводится к решению больших систем нелинейных уравнений, что сопряжено со значительными математическими трудностями. Решение данной проблемы реализуется на основе двух подходов: глобальной редукции исходных уравнений равновесия конечноэлементных моделей с помощью энергетических методов [139] и декомпозиции (фрагментации).

Декомпозиция расчетной модели позволяет использовать конечные элементы различной мерности и жесткости, локальные сгущения расчетной сети, а также различные шаги ведущего параметра алгоритма в пределах каждого фрагмента. На самом высоком уровне декомпозиции выделяются взаимодействующие объекты. Последующие уровни реализуются по различным признакам: размерности задачи, структуре объектов, однородности или неоднородности физико-механических свойств, условиям работы отдельных элементов конструкции, топологическим признакам дискретной модели и др. Выбор схемы дискретизации определяется типом фрагмента.

В процессе расчета осуществляется последовательное рассмотрение отдельных фрагментов на основе содержащейся информации о нагрузках, граничных условиях, физико-механических характеристиках и др. Граничные условия фрагментов могут приниматься в виде ограничений на все или некоторые компоненты перемещений, а также в виде уравнений связи в обобщенных неизвестных на границах. Причем одной из основных характеристик фрагмента является тип используемого базового элемента, оптимально моделирующего фрагмент. Информация, идентифицирующая тип базового элемента, содержит следующие характеристики: количество узлов, число неизвестных в узле, тип и число степеней свободы конечного элемента, количество и тип независимых физико-механических констант и пр.

Используемый для расчета висячих систем повышенной жесткости комплекс программ является одной из ветвей вычислительного комплекса ПАРУС и ориентирован на исследование висячих конструкций, включающих фрагменты стержней, воспринимающих растяжение-сжатие (ванты) и растяжение-сжатие с изгибом (нити конечной жесткости), а также мембран. Одна

из основных задач комплекса – исследование напряженно-деформированного состояния указанных конструкций с учетом больших перемещений и деформаций на основе шагового интегрирования уравнений движения дискретных моделей. Эти задачи, как было отмечено в предыдущем параграфе, решаются на основе взаимодополняющей комбинации методов установления, динамической и вязкой релаксации, дискретных торможений, Ньютона, Ньютона-Рафсона и Ньютона-Канторовича, а также их различных модификаций.

Комплекс программ базируется на современных принципах построения системного математического обеспечения, таких как модульная организация основных алгоритмов и программ, универсальность и незамкнутость по отношению к применению новых типов конечных элементов и вычислительных алгоритмов, высокая степень автоматизации всех этапов расчета, а также удобство и наглядность средств подготовки и контроля исходных данных.

Укрупненная блок-структура комплекса программ представлена на рис. 10.1. Блок управления вычислительным процессом осуществляет управление ходом решения задачи, последовательно вызывая программные блоки.

Блок задания исходных данных производит полное определение всех параметров, необходимых для решения задачи: реализует разбивку конструкции на фрагменты, а фрагментов – на конечные элементы и задает информацию об их связях с узлами дискретной модели (иными словами определяет топологическую структуру конструкции), а также выполняет задание геометрических данных, физико-механических и жесткостных характеристик, граничных условий, внешних воздействий и др.

Блок обработки, контроля и отображения исходных данных систематизирует их задание, производит анализ и поиск возможных вкравшихся ошибок по тем или иным формальным критериям, а также по выбору пользователя выдает или не выдает исходные данные на то или иное устройство (экран дисплея, печатающее устройство или графопостроитель).

Блок решения системы нелинейных уравнений равновесия в соответствии с принятой схемой алгоритма исследования деформирования висячих систем повышенной жесткости производит непосредственное решение системы уравнений, определение параметров напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов висячей системы, а также в случае необходимости – учет дополнительных воздействий. При этом из программных модулей, реализующих соотношения метода конечных элементов для стержней и мембран, автоматически выбираются те, которые необходимы для решения данной конкретной задачи.

Блок обработки и анализа результатов расчетов производит их систематизацию и формальный анализ на соответствие тем или иным заранее заданным характерным признакам, соответствующим реальному процессу деформирования висячей системы повышенной жесткости.

Блок отображения результатов расчетов производит запись на магнитные носители и выдачу полученных в результате решения задачи параметров напряженно-деформированного состояния висячей конструкции по желанию пользователя на экран дисплея, печатающее устройство или графопостроитель. Принятые формы выдачи и представления результатов решения задачи

позволяют значительно сократить трудоемкость их обработки и анализа.

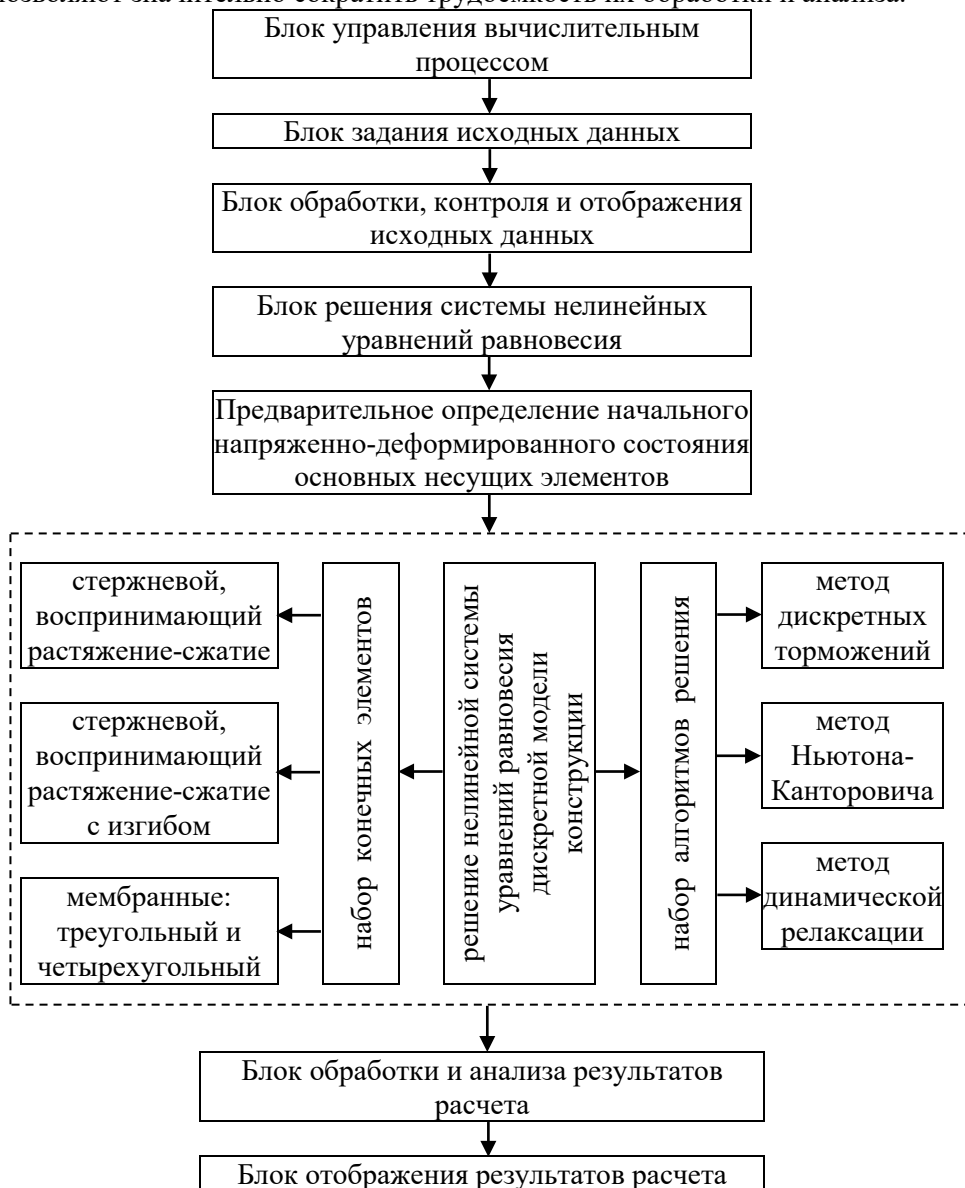


Рис. 10.1. Укрупненная блок-структура комплекса программ расчетов висячих систем повышенной жесткости

ГЛАВА 11

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 11.1. Работа нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций

Напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости зависит от многих факторов: характера и величины дополнительной нагрузки, стрелы провисания, жесткости нити на растяжение и изгиб, способа закрепления концов нити на опорах и др. Для изучения влияния указанных факторов на работу нитей конечной жесткости проводились численные исследования.

В качестве объекта исследований были приняты нити в виде стальных труб пролетом 30 м с шарнирным и жестким закреплением концов на опорах. Наружный диаметр труб равен 26,8; 60,0 и 89,0 мм при толщине стенки соответственно 2,8; 3,5 и 4,0 мм. При исследовании стрела провисания нитей варьировалась в пределах $1/10 - 1/40$ пролета. Модуль упругости материала стенок труб равен $2,1 \cdot 10^7$ Н/см².

11.1.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете.

Ниже приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния нитей при различной стреле провисания и жесткости на изгиб при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки (рис. 11.1–11.4).

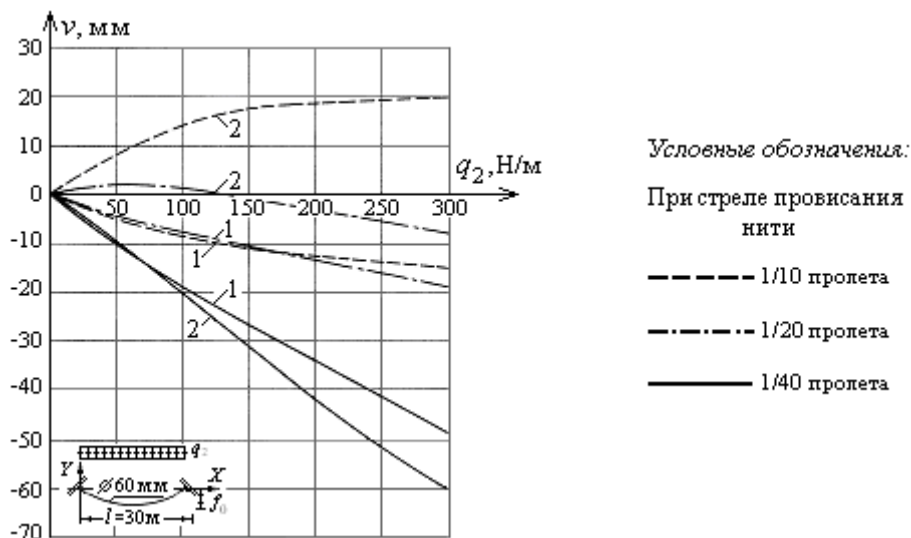


Рис. 11.1. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:
1 — в четверти пролета; 2 — в середине пролета

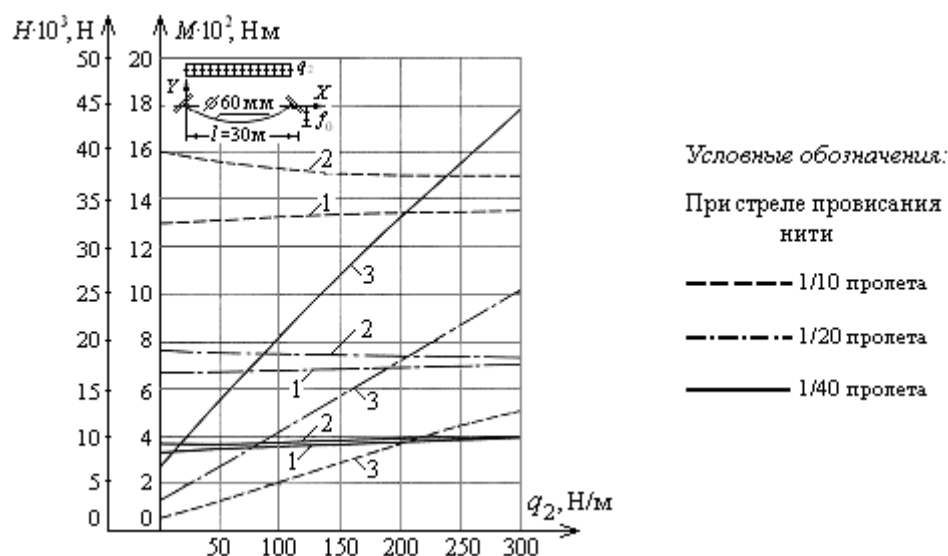


Рис. 11.2. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 – изгибающий момент в четверти пролета;
2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

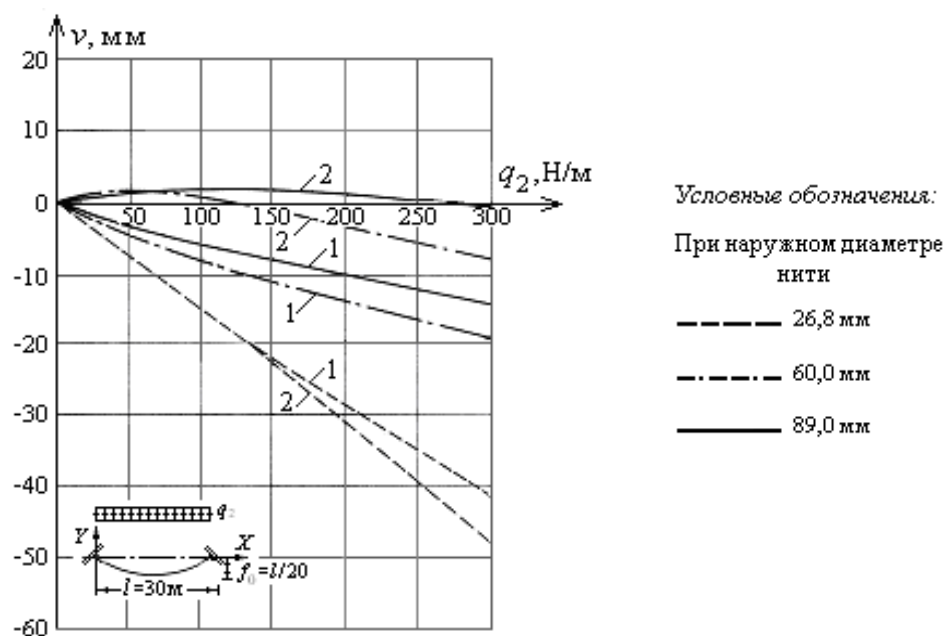


Рис. 11.3. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

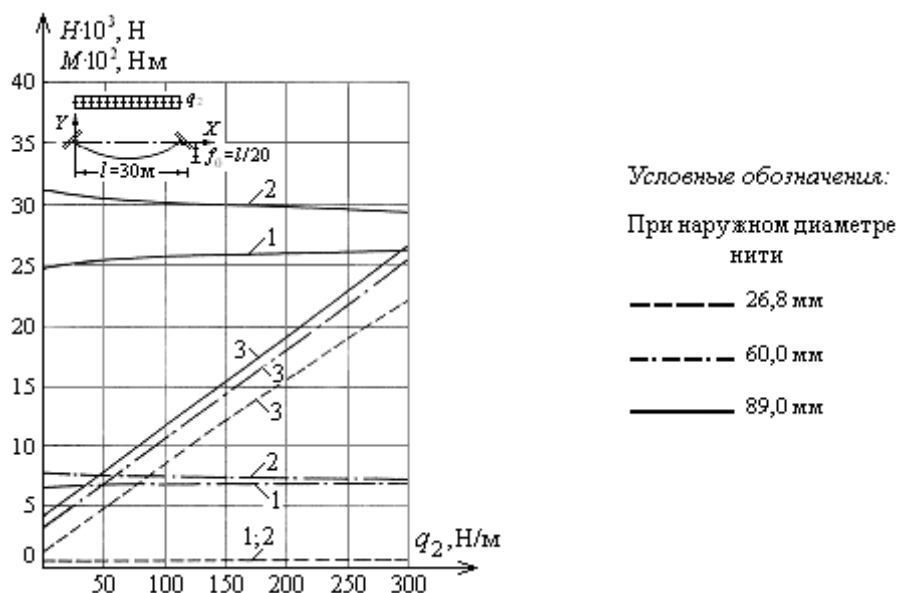


Рис. 11.4. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

- 1 – изгибающий момент в четверти пролета;
 2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

Из рис. 11.1 видно, что изменение стрелы провисания существенно сказывается не только на значениях вертикальных перемещений нити, но и на их направлении. С увеличением стрелы провисания отрицательные перемещения нити уменьшаются, а в середине пролета даже становятся положительными. Если при стреле провисания $1/40$ пролета нить перемещается вниз как в четверти, так и в середине пролета при всех рассмотренных значениях интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки, то при стреле провисания $1/20$ пролета нить в середине пролета перемещается вниз при значении интенсивности дополнительной нагрузки более 130 Н/м . При меньшей дополнительной нагрузке нить в середине пролета перемещается вверх. При стреле провисания $1/10$ пролета нить в середине пролета перемещается вверх при всех рассмотренных значениях интенсивности дополнительной нагрузки, причем с увеличением интенсивности дополнительной нагрузки положительные перемещения нити в середине пролета также увеличиваются. При увеличении стрелы провисания нити с $1/40$ до $1/20$ пролета (при интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) отрицательные перемещения нити в середине пролета уменьшаются в $7,4$ раза, а в четверти пролета – в $2,5$ раза. При увеличении стрелы провисания с $1/20$ до $1/10$ пролета отрицательные перемещения нити в четверти пролета уменьшаются в $1,3$ раза, а в середине пролета изменяют знак.

Такой характер деформирования нити конечной жесткости можно объяснить тем, что при увеличении стрелы кривая провисания нити все более отличается от квадратной параболы, а дополнительная равномерно распреде-

ленная нагрузка, приближая форму нити к параболическому очертанию, способствует приподниманию нити в середине пролета и опусканию в четвертях.

Изменение усилий, действующих в нити, связано с изменением стрелы провисания почти прямо пропорциональной зависимостью (рис. 11.2). Так, увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/20$ пролета приводит к уменьшению распора и увеличению изгибающих моментов в четверти и середине пролета в 1,8 раза. При дальнейшем увеличении стрелы провисания с $1/20$ до $1/10$ пролета происходит уменьшение распора и увеличение изгибающих моментов в четверти и середине пролета в 2 раза. При увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки происходит выравнивание значений изгибающих моментов в четверти и середине пролета. Выравнивание изгибающих моментов объясняется приближением формы кривой провисания нити под нагрузкой к параболическому очертанию.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки близка к линейной. При этом увеличение интенсивности нагрузки в 6 раз (с 50 до 300 Н/м) вызывает увеличение распора в 3,2 раза при стреле провисания $1/40$ пролета, в 3,7 раза – при стреле провисания $1/20$ пролета и в 3,9 раза – при стреле провисания $1/10$ пролета. Причем при увеличении распора действующий в нити изгибающий момент практически не изменяется.

Влияние жесткости нити на ее деформативность показано на рис. 11.3. Как и стрела провисания, жесткость нити влияет не только на перемещения, но и на их направление. С увеличением жесткости отрицательные перемещения нити в четверти и середине пролета уменьшаются. Так, при увеличении наружного диаметра нити с 26,8 до 60,0 мм (при интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) отрицательные перемещения в четверти пролета уменьшаются в 2,2 раза, а в середине – в 5,8 раза. При увеличении наружного диаметра с 60,0 до 89,0 мм уменьшение отрицательных перемещений нити в четверти и середине пролета составило соответственно 1,4 и 16,2 раза.

Кривые изменения распора и изгибающих моментов для нитей различной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки показаны на рис. 11.4. Зависимость распора от интенсивности дополнительной нагрузки близка к линейной. Причем приращение распора для всех трех образцов при увеличении интенсивности нагрузки от 0 до 300 Н/м близко к одному значению. С увеличением жесткости нити увеличиваются действующие в ней изгибающие моменты. Так, изгибающие моменты в нити наружным диаметром 89,0 мм (при интенсивности дополнительной нагрузки 300 Н/м) превышают изгибающие моменты в нити наружным диаметром 60,0 мм в 4 раза. В свою очередь, моменты в нити наружным диаметром 60,0 мм больше моментов в нити наружным диаметром 26,8 мм в 13 раз. При увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки происходит выравнивание действующих в нити изгибающих моментов.

11.1.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета. На рис. 11.5 – 11.8 показаны зависимости перемещений нити и действующих в ней усилий при различной стреле провисания и жесткости нити от дополни-

тельной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета.

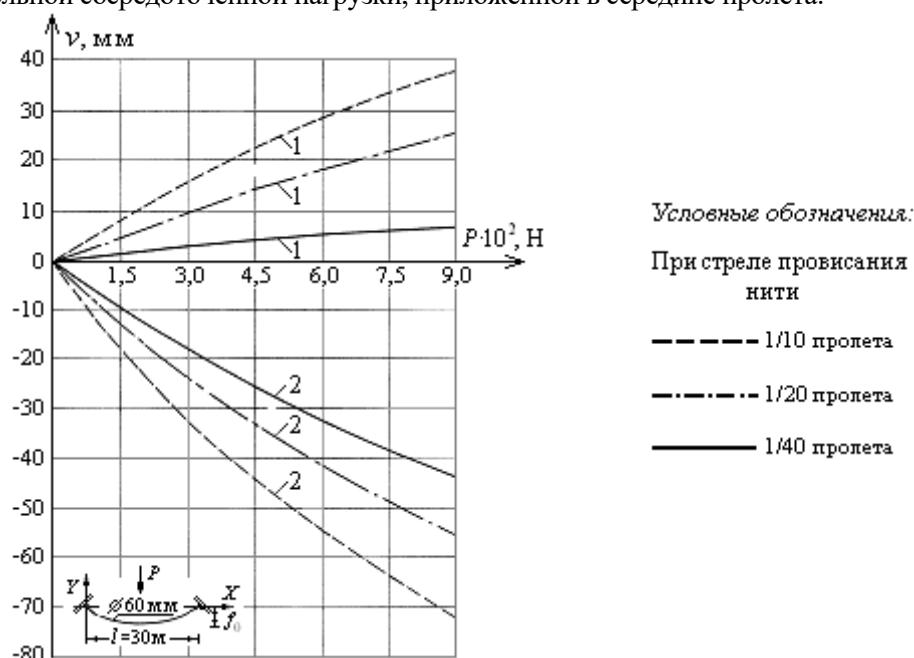


Рис. 11.5. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

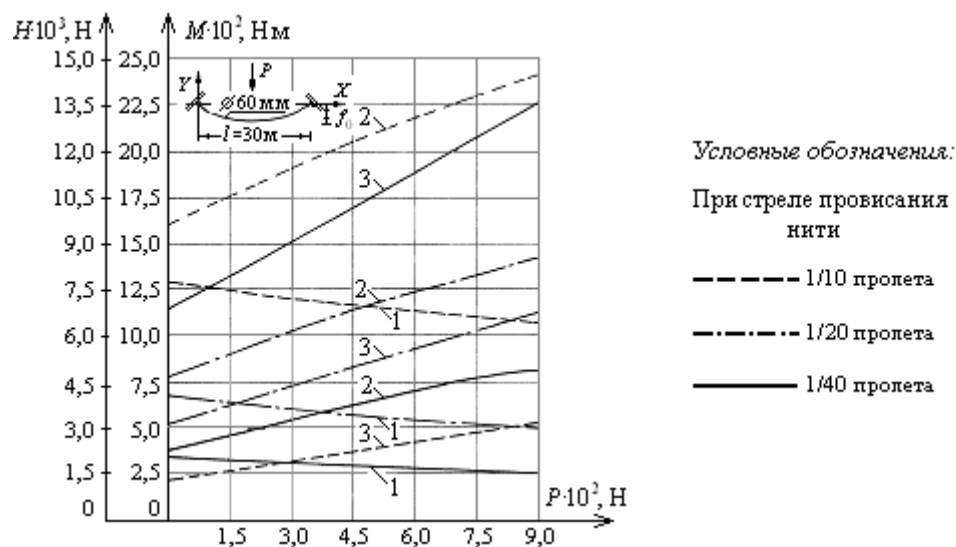


Рис. 11.6. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – изгибающий момент в четверти пролета;

2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

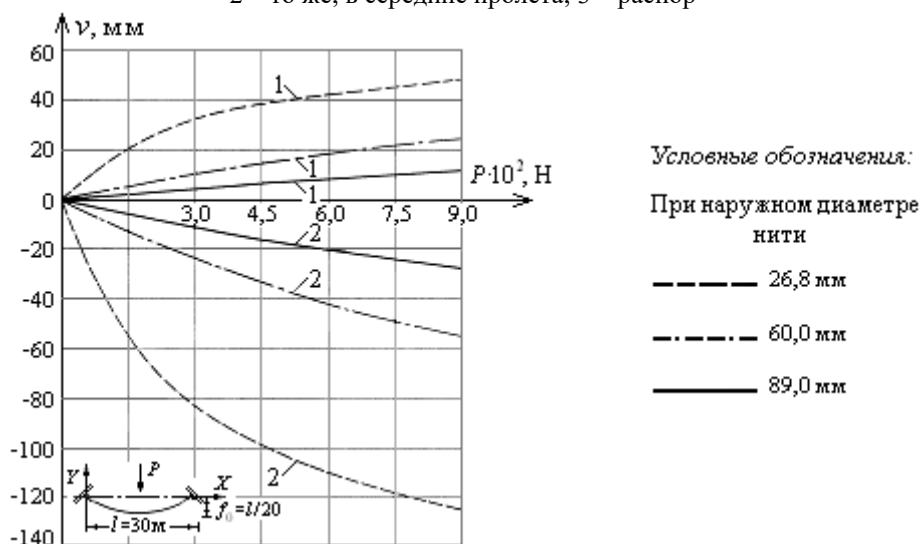


Рис. 11.7. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

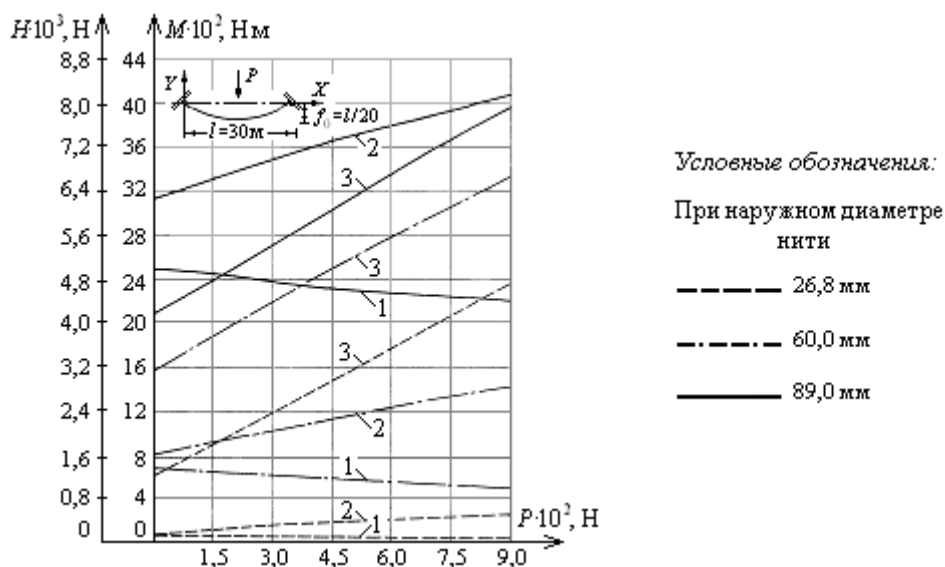


Рис. 11.8. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета:
1 – изгибающий момент в четверти пролета;

2 – то же, в середине пролета; 3 – распор

Из рис. 11.5 видно, что перемещения нити при разных стрелах провисания имеют одинаковый характер, а именно: в середине пролета нить резко опускается, а в четверти пролета – поднимается. С увеличением сосредоточенной силы увеличиваются перемещения как в четверти, так и в середине пролета нити. Так, при увеличении сосредоточенной силы со 150 до 900 Н перемещения нити при стреле провисания $1/40$ пролета увеличились в четверти пролета в 4,1 раза, при стреле провисания $1/20$ пролета – в 5,3 раза и при стреле провисания $1/10$ пролета – в 5 раз. В середине пролета перемещения увеличиваются в 4,5 раза при всех стрелах провисания. Увеличение стрелы провисания при постоянном значении сосредоточенной нагрузки также приводит к увеличению перемещений, несмотря на то, что при этом уменьшаются перемещения, вызванные упругими деформациями нити. Так, при увеличении стрелы провисания с $1/40$ до $1/10$ пролета (при сосредоточенной нагрузке 900 Н) перемещения нити в четверти пролета увеличиваются в 5,7 раза, а в середине пролета – в 1,6 раза. Такой вид деформации нити конечной жесткости можно объяснить большой кинематической податливостью нити, т. е. изменением формы ее равновесия.

Зависимости усилий, действующих в нити, от сосредоточенной нагрузки показаны на рис. 11.6. С увеличением сосредоточенной силы увеличение распора в нити при всех стрелах провисания происходит почти линейно. Изгибающие моменты, действующие в нити в точке приложения сосредоточенной нагрузки, значительно увеличиваются. Они более чем в 2 раза превышают изгибающие моменты, действующие в четверти пролета нити. С увеличением сосредоточенной силы происходит увеличение изгибающих моментов в середине и уменьшение в четверти пролета. С уменьшением стрелы провисания изгибающие моменты уменьшаются. Так, уменьшение стрелы провисания с $1/10$ до $1/20$ пролета приводит к уменьшению изгибающих моментов в четверти и середине пролета соответственно в 4,3 и 3 раза.

На рис. 11.7 изображены зависимости вертикальных перемещений при различных жесткостях нити от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета. Как видно из рис. 11.7, жесткость нити влияет только на величины перемещений, направление же их остается без изменения: в четверти пролета нить перемещается вверх, а в середине – вниз. Наибольшие перемещения получает нить наружным диаметром 26,8 мм. Они превышают перемещения нити наружным диаметром 60,0 мм в 1,9–2,2 раза, а перемещения нити наружным диаметром 89,0 мм – в 4,1–4,7 раза.

Влияние жесткости нити на возникающие в ней усилия при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета, показано на рис. 11.8, откуда видно, что жесткость нити почти не влияет на приращение возникающего в ней распора. Так, при увеличении сосредоточенной силы от 0 до 900 Н распор увеличивается на 3550 Н для всех рассматриваемых образцов.

Большее влияние оказывает жесткость нити на изгибающие моменты и на отношения моментов в середине пролета к моментам в четверти пролета. С увеличением жесткости нити это отношение уменьшается. Так, если для нити наружным диаметром 26,8 мм момент в середине пролета превышает момент в четверти пролета в 17 раз, то для нити наружным диаметром 60,0 мм это превышение со-

ставляет уже 2,8 раза, а для нити наружным диаметром 89,0 мм – 1,9 раза.

11.1.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета. Результаты исследования напряженно-деформированного состояния нитей при различной стреле провисания и жесткости на изгиб при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета, показаны на рис. 11.9 – 11.12.

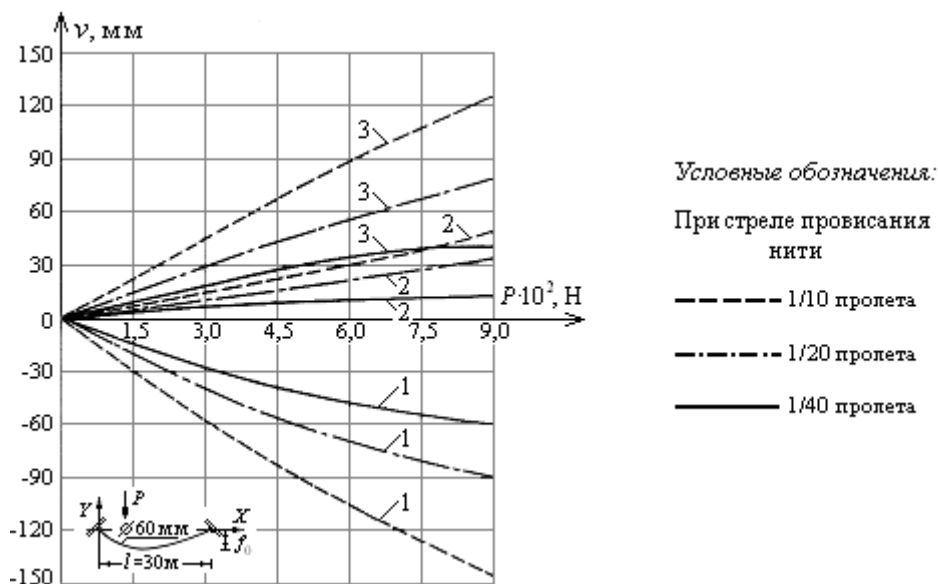


Рис. 11.9. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета:

1 – в загруженной четверти пролета; 2 – в середине пролета;
3 – в незагруженной четверти пролета

Несимметричная нагрузка сильно влияет на характер деформирования нитей конечной жесткости. На рис. 11.9 приведены графики вертикальных перемещений нити при различных стрелах провисания. Из рис. 11.9 видно, что нить в загруженной четверти пролета резко опускается вниз, а в середине и незагруженной четверти пролета – поднимается вверх. Значения отрицательных перемещений в 2 раза, а положительных – в 3 раза превосходят значение соответствующих перемещений нити, находящейся под действием дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета. Перемещения нити с увеличением стрелы провисания увеличиваются. Так, при увеличении стрелы провисания с 1/40 до 1/10 пролета перемещения нити в загруженной четверти пролета увеличиваются в 2,5 раза, а в середине и незагруженной четверти пролета – соответственно в 3,8 и 3,1 раза. При этом перемещения нити в незагруженной четверти пролета превышают перемеще-

ния нити в середине пролета в 2,5 раза при всех стрелах провисания.

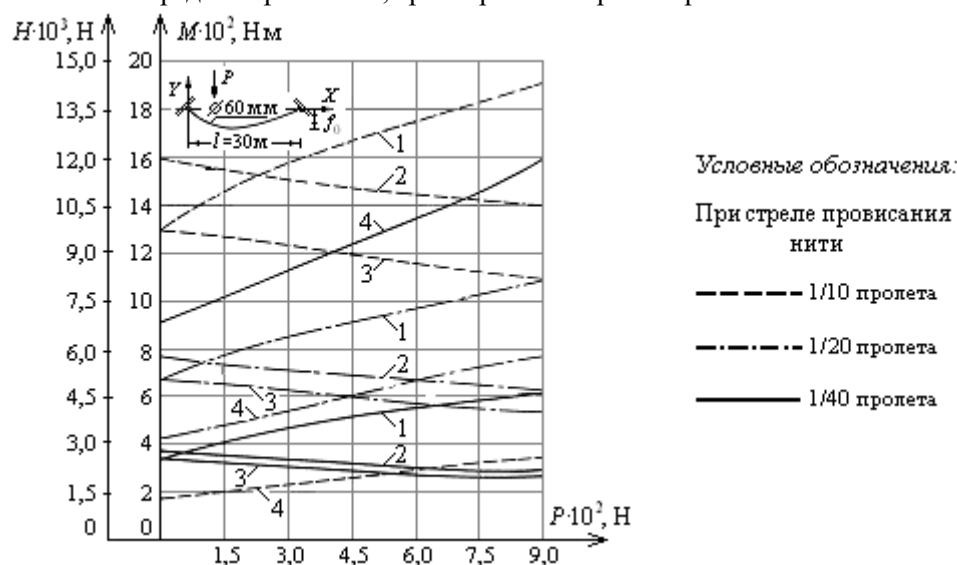


Рис. 11.10. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – изгибающий момент в загруженной четверти пролета; 2 – то же, в середине пролета; 3 – то же, в незагруженной четверти пролета; 4 – распор

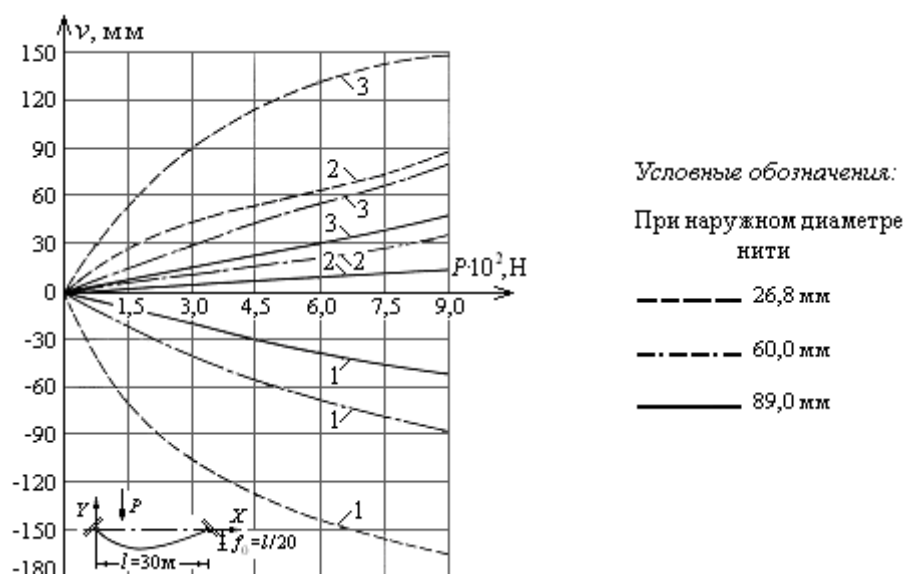


Рис. 11.11. Зависимость перемещений нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – в загруженной четверти пролета; 2 – в середине пролета;

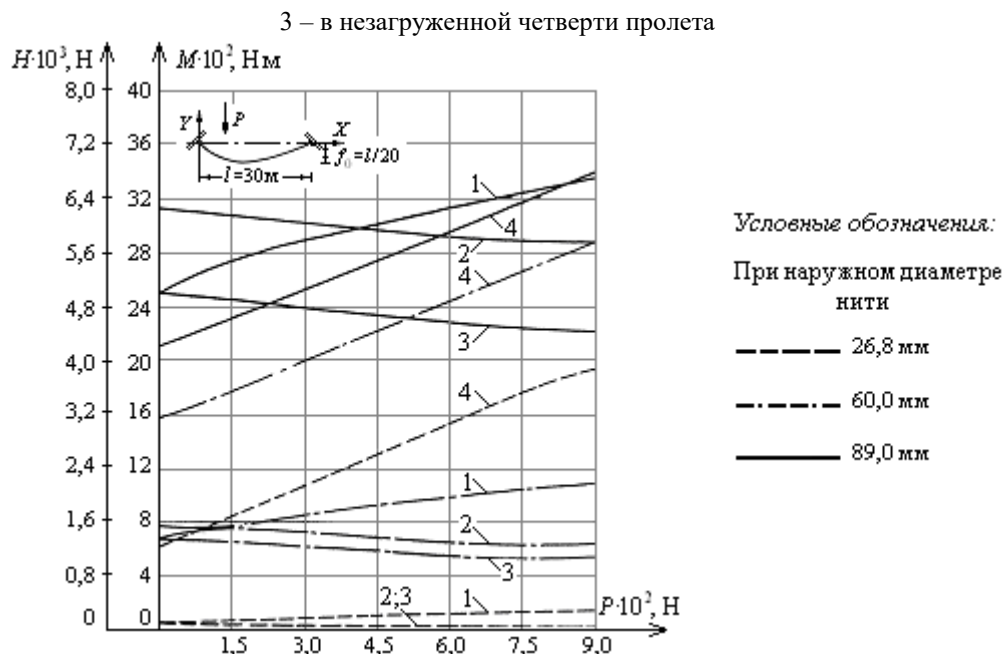


Рис. 11.12. Зависимость усилий в нити конечной жесткости от дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета: 1 – изгибающий момент в загруженной четверти пролета; 2 – то же, в середине пролета; 3 – то же, в незагруженной четверти пролета; 4 – распор

Графики усилий, действующих в нити конечной жесткости, при различных стрелах провисания представлены на рис. 11.10. Зависимость распора от дополнительной сосредоточенной нагрузки при всех стрелах провисания близка к линейной. При этом распор достигает несколько меньшего значения, чем в нити под действием симметричной сосредоточенной нагрузки. Распор уменьшается примерно на 20% при всех стрелах провисания.

При увеличении сосредоточенной нагрузки происходит увеличение изгибающих моментов в загруженной четверти пролета и уменьшение изгибающих моментов в середине и незагруженной четверти пролета. Так, при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н момент в загруженной четверти пролета увеличивается в 1,6 раза, а в середине и незагруженной четверти пролета уменьшается в 1,2 раза. Следует отметить, что при несимметричной нагрузке максимальные значения изгибающих моментов меньше, чем в нити под действием симметричной сосредоточенной нагрузки (при одном и том же значении сосредоточенной силы). Изгибающие моменты уменьшаются примерно на 30% при всех стрелах провисания.

Влияние жесткости нити на перемещения и возникающие в ней усилия при действии сосредоточенной нагрузки, приложенной в четверти пролета, показано на рис. 11.11 и 11.12. Из рис. 11.11 видно, что характер деформиро-

вания для нитей различной жесткости одинаков: в загруженной четверти пролета нить опускается вниз, а в середине и в незагруженной четверти пролета – поднимается вверх. Уменьшение жесткости нити приводит к увеличению перемещений. Так, перемещения нити наружным диаметром 26,8 мм превышают перемещения нити наружным диаметром 60,0 мм в 1,8–2,6 раза, а перемещения нити наружным диаметром 89,0 мм – в 3,2–6,9 раза. По сравнению с нитью, находящейся под действием дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине пролета, отрицательные перемещения нити возрастают в 1,4–2,0 раза, а положительные – в 3,0–3,9 раза. Причем с увеличением жесткости нити разность между перемещениями возрастает.

Зависимость распора от сосредоточенной нагрузки весьма близка к линейной (рис. 11.12). Причем из приведенных на этом рисунке графиков видно, что жесткость нити почти не влияет на распор: при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н распор во всех нитях увеличился на 2600 Н.

Более существенно влияет жесткость нити на изгибающий момент. Так, при увеличении сосредоточенной нагрузки от 0 до 900 Н изгибающий момент в загруженной четверти пролета увеличился в 3,2 раза для нити наружным диаметром 26,8 мм, в 1,6 раза – для нити наружным диаметром 60,0 мм и в 1,3 раза – для нити наружным диаметром 89,0 мм. Одновременно происходит уменьшение изгибающего момента в середине и незагруженной четверти пролета в 2,8 и 2,1 раза – для нити наружным диаметром 26,8 мм, в 1,3 раза – для нити наружным диаметром 60,0 мм и в 1,1 раза – для нити наружным диаметром 89,0 мм.

11.1.4. Анализ результатов исследований. Анализ данных численных исследований позволяет сделать следующие выводы:

- характер дополнительной нагрузки заметно влияет на деформативность нитей конечной жесткости. Если при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки нить перемещается в вертикальной плоскости в основном за счет упругих деформаций, то при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки, приложенной в середине и, в особенности, в четверти пролета, перемещения нити в вертикальной плоскости происходят в основном за счет изменения формы кривой провисания, а именно: нагруженная часть нити (четверть и середина пролета) перемещается вниз, а ненагруженная часть нити и, в особенности, ее четверть пролета – вверх. При этом в ненагруженной части нити наблюдаются также значительные осевые перемещения;

- дополнительная равномерно распределенная нагрузка вызывает значительное увеличение распора при незначительном изменении изгибающего момента. Причем изгибающий момент, действующий в четверти пролета, увеличивается, а в середине пролета – уменьшается;

- дополнительная сосредоточенная нагрузка при незначительном увеличении распора вызывает значительное увеличение изгибающих моментов, действующих в сечениях нити, расположенных непосредственно под нагрузкой. Причем изгибающие моменты быстро уменьшаются при удалении от

места приложения нагрузки;

- удаление дополнительной сосредоточенной нагрузки от середины пролета приводит к увеличению перемещений и уменьшению изгибающих моментов и распора в нити;

- жесткое закрепление концов нити на опорах, мало влияя на общее напряженно-деформированное состояние нити, резко уменьшает перемещения и увеличивает изгибающие моменты в приопорных участках длиной до 0,05 пролета. Влияние жесткого закрепления увеличивается с увеличением жесткости нити и стрелы ее провисания;

- увеличение стрелы провисания увеличивает перемещения и действующие в нити изгибающие моменты при одновременном уменьшении распора;

- жесткость нити практически не сказывается на распоре. С увеличением жесткости уменьшаются перемещения и увеличиваются действующие в нити изгибающие моменты;

- при действии на нить дополнительной равномерно распределенной нагрузки определенной интенсивности в середине пролета наблюдаются положительные перемещения;

- горизонтальные перемещения нити в плоскости ее провисания зависят, в основном, от изменения формы кривой равновесия и достигают максимального значения при действии несимметричной сосредоточенной нагрузки.

§ 11.2. Работа нити конечной жесткости за пределом упругости

11.2.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете.

Исследование напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости за пределом упругости проводилось на примере нити с идеальным поперечным сечением пролетом 30 м с шарнирным и жестким закреплением концов на опорах. Площадь поперечного сечения нити составляла $F = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, а момент инерции $I = 8,64 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$. При исследовании было принято, что нить загружена дополнительной равномерно распределенной нагрузкой на всем пролете, стрела провисания нити варьировалась в пределах $1/10 - 1/40$ пролета, площадь поперечного сечения оставалась постоянной, а жесткость на изгиб изменялась за счет увеличения или уменьшения высоты профиля. Рассматривалась работа нитей из идеального упруго-пластического материала ($\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$).

Графики зависимости перемещений нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при различных стрелах провисания показаны на рис. 11.13.

Из рис. 11.13 видно, что изменение стрелы провисания существенно сказывается на величине и характере перемещений нити на всем интервале изменения дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, при минимальной из принятых стрел провисания $f_0 = 1/40$ перемещения нити в четверти и в середине пролета качественно однородны и близки по значению.

Увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/20$ пролета приводит к уменьшению перемещений нити приблизительно в 2–2,5 раза. Причем в начале упругой фазы работы, как уже отмечалось, в середине пролета нити наблюдаются небольшие положительные перемещения.

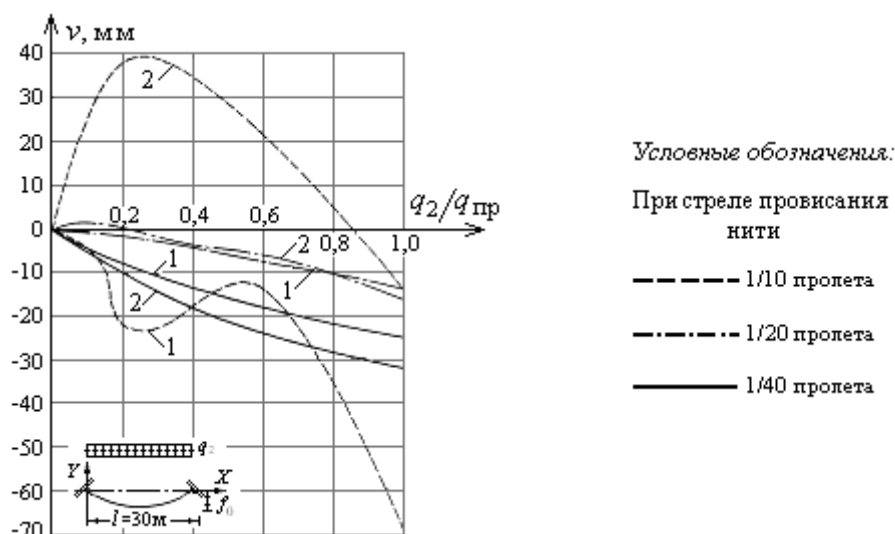


Рис. 11.13. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:
 1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

Наиболее ярко нелинейность работы нити конечной жесткости видна на примере нити со стрелой провисания $1/10$ пролета. Здесь практически на всем интервале изменения интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки ($0 \leq q_2/q_{\text{пр}} \leq 0,85$) перемещения нити в середине пролета положительны, причем максимальное их значение достигает весьма значительной величины $v = 39$ мм, что составляет $1/770$ пролета. И только на самом последнем этапе, когда интенсивность дополнительной нагрузки близка к предельной ($0,85 \leq q_2/q_{\text{пр}} \leq 1$) и пластические деформации охватывают практически всю нить, она в середине пролета начинает перемещаться вниз. Наибольшее значение этого прогиба составляет всего $v = 13$ мм, что в 3 раза меньше полученного ранее нитью положительного перемещения.

Весьма характерно также в этом случае поведение нити, в четверти пролета. До значения интенсивности дополнительной нагрузки, равного $q_2/q_{\text{пр}} = 0,6$, прогибы в этом сечении определяются в основном кинематическими составляющими перемещений, связанными с изменением формы кривой провисания нити – от заданной к параболической. Об этом свидетельствует тот факт, что при непрерывном возрастании интенсивности дополнительной

нагрузки прогибы нити вначале увеличиваются, а затем начинают уменьшаться. И только после того, как форма нити при $q_2/q_{пр} = 0,6$ стабилизируется, при дальнейшем увеличении нагрузки начинается равномерное увеличение перемещений, максимальное значение которых достигает $v = 70$ мм или $1/430$ пролета.

Влияние жесткости нити на ее деформативность при различных значениях параметра жесткости $u = 0,5l(H_{пр}/EI)^{1/2}$ показано на рис. 11.14.

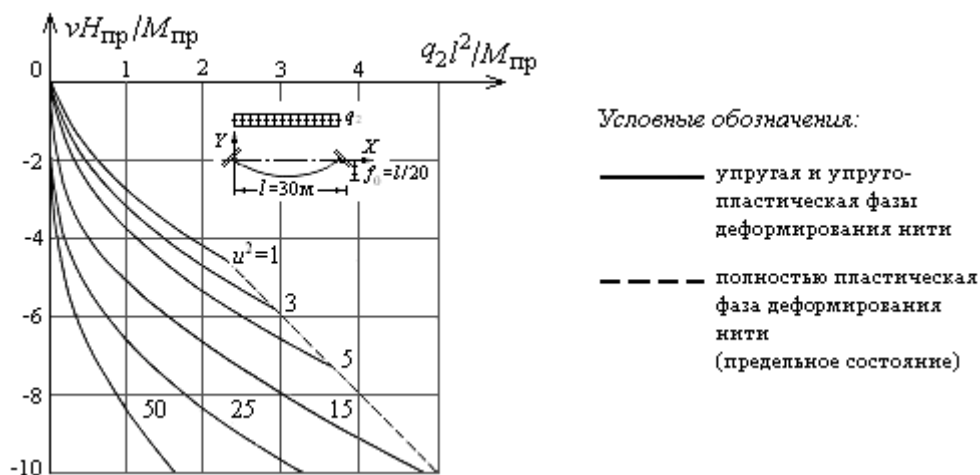


Рис. 11.14. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Из рис. 11.14 видно, что жесткость нити из идеального упруго-пластического материала заметно влияет на ее работу под нагрузкой. Так, при прочих равных условиях нити с большим параметром жесткости оказываются более деформативны, чем нити с меньшим параметром жесткости. При этом увеличение квадрата параметра u от 1 до 5 приводит к увеличению безразмерного прогиба середины пролета нити в 1,3 раза, а увеличение квадрата параметра жесткости от 1 до 25 – только в 2,1 раза. В свою очередь, нити с меньшим значением параметра u быстрее достигают фазы полной пластичности и по своей работе становятся подобны абсолютно гибким нитям.

Следует также отметить, что учет в расчетах возможности пластической работы материала приводит к значительному занижению воспринимаемых нитями нагрузок. В данном случае, например, предельная нагрузка для разных кривых от 2 до 3,5 раза превышает нагрузку, соответствующую появлению текучести в нити конечной жесткости.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при разных стрелах провисания близка к линейной (рис. 11.15). При этом увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/20$ пролета вызывает

уменьшение распора в нити в 1,4 раза, а увеличение стрелы провисания с $1/40$ до $1/10$ пролета – в 2,2 раза. Соответственно увеличивается воспринимаемая нитью предельная нагрузка: в первом случае в 1,6 раза, во втором – в 2,6 раза. Отметим также, что нелинейный характер представленных кривых проявляется сильнее в нитях с малыми стрелами провисания.

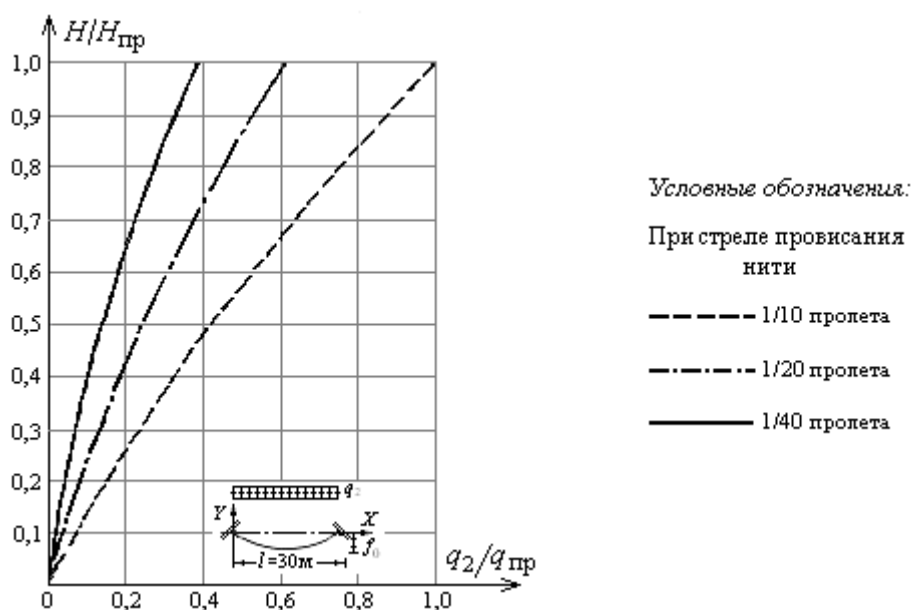


Рис. 11.15. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Кривые изменения изгибающих моментов в середине пролета упруго-пластической нити конечной жесткости изображены на рис. 11.16.

Из рис. 11.16 видно, что как жесткость нити на изгиб, так и стрела ее провисания заметно влияют на изгибающие моменты. При увеличении квадрата параметра жесткости u от 5 до 15 изгибающие моменты уменьшаются в 2 раза. При дальнейшем увеличении квадрата параметра u от 15 до 25 изгибающие моменты также уменьшаются в 2 раза, что свидетельствует о некотором возрастании интенсивности уменьшения изгибающих моментов. Причем такой характер изменения изгибающих моментов в зависимости от параметра жесткости присущ всем рассмотренным стрелам провисания нити.

Из анализа зависимости кривых на рис. 11.16 также следует, что жесткость нити на изгиб влияет не только на значения моментов, но и на характер их изменения при увеличении интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, при $u^2 = 5$ уменьшение изгибающих моментов в нити происходит практически на всем интервале увеличения интенсивности

дополнительной нагрузки. При значениях $u^2 = 15$ и 25 при увеличении отношения $q_2/q_{пр}$ от 0 до $(0,6 - 0,7)$ изгибающие моменты остаются почти постоянными и только на последнем участке интервала при $q_2/q_{пр} > 0,7$, т. е. когда в нити развиваются значительные области пластического деформирования, резко уменьшаются. При этом они перестают влиять на форму кривой провисания нити конечной жесткости, которая становится подобной гибкой нити.

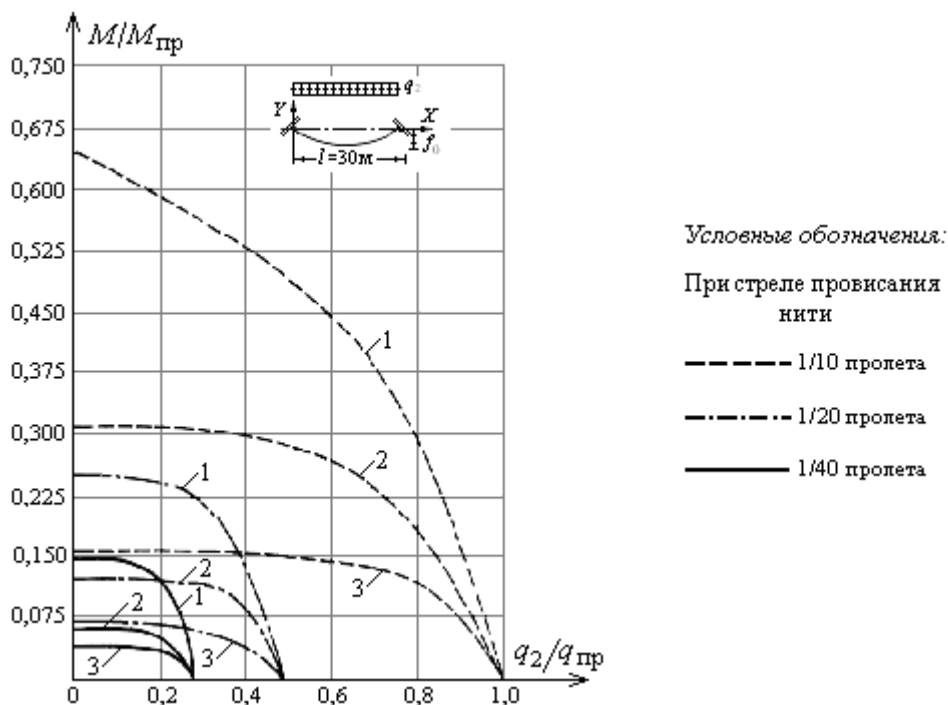


Рис. 11.16. Зависимость изгибающего момента в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:
 1 – $u^2 = 5$; 2 – $u^2 = 15$; 3 – $u^2 = 25$

Стрела провисания нити конечной жесткости влияет только на действующие в ней изгибающие моменты, оставляя неизменной качественную картину их изменения. Например, при уменьшении стрелы провисания с $1/10$ до $1/20$ пролета действующие в нити изгибающие моменты уменьшаются в 2,8 раза. В свою очередь, моменты в нити со стрелой провисания $1/20$ пролета превышают моменты в нити со стрелой провисания $1/40$ пролета в 1,6 раза, т. е. интенсивность их уменьшения несколько замедляется. Отметим, что последнее замечание справедливо как для упругих, так и для упруго-пластических фаз работы нити.

11.2.2. Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета. На рис. 11.17 – 11.20 представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости с шарнирным закреплением концов на опорах от дополнительной сосредоточенной нагрузки P , приложенной в середине пролета. При исследовании (в данном разделе и далее в разделах 11.2.3 и 11.2.4) принято, что стрела провисания нити варьируется в пределах $1/20$ – $1/40$ пролета.

Из рис. 11.17 видно, что увеличение сосредоточенной силы приводит к увеличению распора в нити от его исходного значения до предельного $H_{пр}$ при всех стрелах провисания по близкой к линейной зависимости в пределах каждой фазы изгиба, причем эта кривая имеет характерный излом в момент изменения фазы изгиба. При этом следует отметить, что увеличение стрелы провисания приводит к некоторому замедлению скорости увеличения распора и уменьшению значения дополнительной сосредоточенной нагрузки, при которой появляются первые пластические деформации. Так, например, при стреле провисания $1/40$ пролета первые пластические деформации появляются при соотношении $P/P_{пр} = 0,29$, а при стреле провисания $1/20$ пролета – $P/P_{пр} = 0,09$, т. е. при увеличении стрелы провисания в 2 раза величина дополнительной сосредоточенной нагрузки, при которой появляются первые пластические деформации, уменьшается в 3,22 раза.

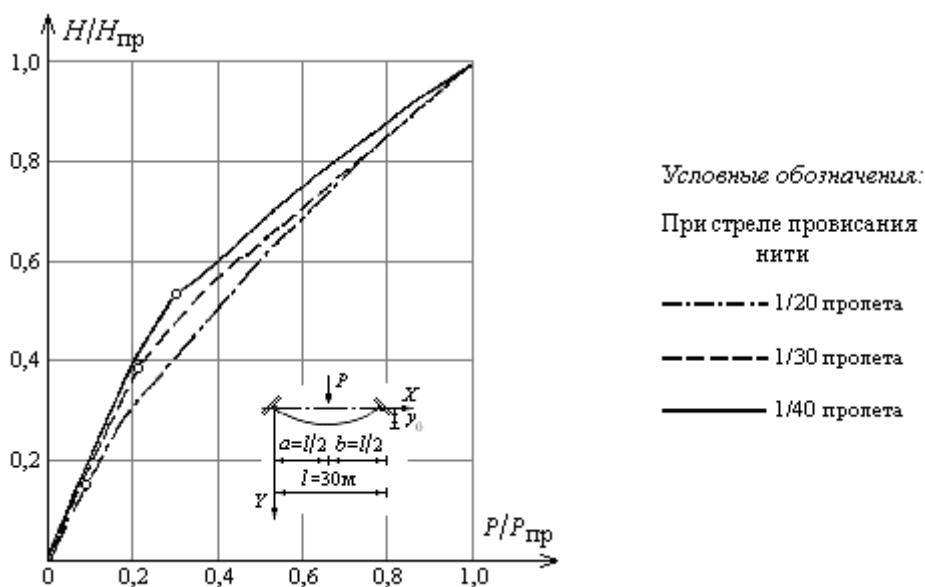


Рис. 11.17. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета: $\circ$ – изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

В отличие от распора, кривые изменения изгибающих моментов в нити конечной жесткости (рис. 11.18) при увеличении дополнительной сосредоточенной нагрузки имеют не только ярко выраженный нелинейный характер, но и при $x = l/2$ и $x = l/4$ – качественно разнородные участки. Так, если при увеличении $P/P_{\text{пр}}$ от 0 до 0,1 значения изгибающих моментов в середине пролета увеличиваются, а в четверти – уменьшаются, то при дальнейшем росте дополнительной нагрузки изгибающие моменты по всему пролету нити постепенно уменьшаются до нуля. При $P/P_{\text{пр}} = 0,1$ значения изгибающих моментов при $x = l/2$ от 2 до 3,2 раза (при различных стрелах провисания) превышают значения изгибающих моментов при $x = l/4$. Последнее объясняется тем, что, во-первых, при действии незначительной по величине сосредоточенной нагрузки нить конечной жесткости является достаточно деформативной системой, в которой форма кривой провисания достаточно сильно влияет на напряженно-деформированное состояние. Во-вторых, нить конечной жесткости в предельном состоянии работает подобно гибкой нити, значение распора в которой равно $H_{\text{пр}}$, а значение изгибающего момента – нулю.

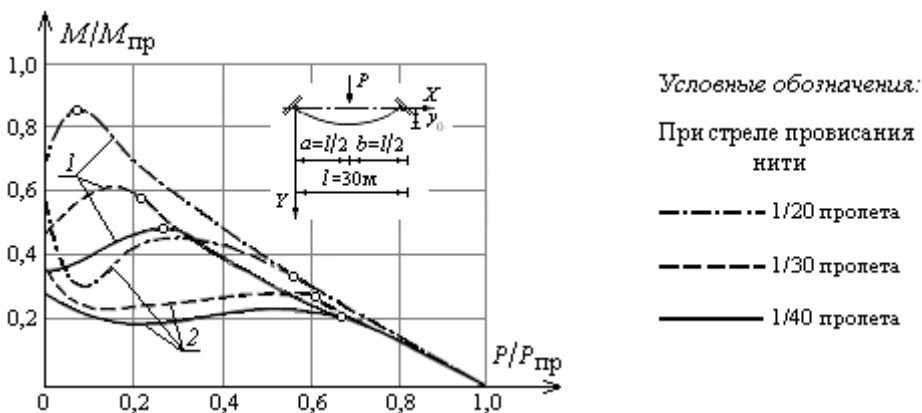


Рис. 11.18. Зависимость изгибающего момента в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета: 1 – $x = l/2$; 2 – $x = l/4$; ○ – изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

Из рис. 11.19 видно, что стрела провисания также существенно влияет на перемещения нити конечной жесткости, находящейся под действием дополнительной сосредоточенной нагрузки. Так, при прочих равных условиях, нити с большей стрелой провисания оказываются более деформативными на всем интервале изменения дополнительной нагрузки. Например, перемещение нити со стрелой провисания 1/20 пролета при $P/P_{\text{пр}} = 0,4$ больше перемещения нити со стрелой провисания 1/30 и 1/40 пролета соответственно в 2,08 и в 2,73 раза. Лучше всего нелинейная работа нити конечной жесткости наблюдается при стреле ее провисания 1/20 пролета. Здесь, почти на всем ин-

тервале изменения интенсивности нагрузки, в середине пролета перемещения нити положительны, чего нельзя сказать о четверти пролета, где перемещения отрицательны. Таким образом, увеличение дополнительной сосредоточенной нагрузки приводит к изменению формы кривой провисания нити, а именно: в середине пролета нить опускается, а обе ее четверти пролета – сначала поднимаются и только потом начинают опускаться.

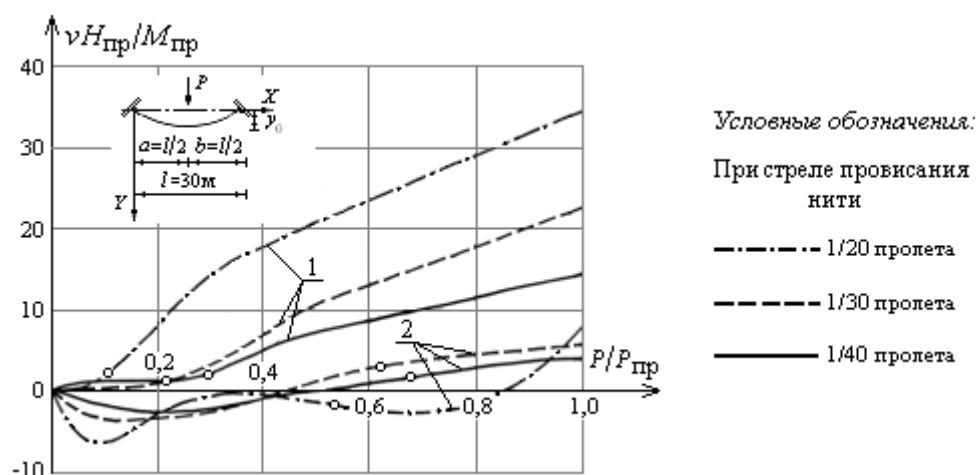


Рис. 11.19. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета: 1 – $x = l/2$; 2 – $x = l/4$;
 ○ – изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

На рис. 11.20 показана зависимость длины пластического участка упруго-пластической нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета. Из рисунка видно, что стрела провисания нити существенно влияет не только на появление первых пластических деформаций, но и на длину образовавшегося пластического участка: чем больше стрела провисания, тем раньше в нити появляются пластические деформации и тем больше длина пластического участка. Уменьшение стрелы провисания с 1/20 до 1/40 пролета приводит к увеличению, во-первых, параметра $P/P_{пр}$, при котором появляются первые пластические деформации, больше чем в 4 раза – с 0,08 до 0,33 и, во-вторых, длин пластических участков от 1,7 до 2,85 раза при значении $P/P_{пр} = 0,4$.

11.2.3. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки. На рис. 11.21 – 11.24 показаны зависимости параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости от дополнительной участковой равномерно распределенной нагрузки q_2 , приложенной симметрично относительно середины пролета нити.

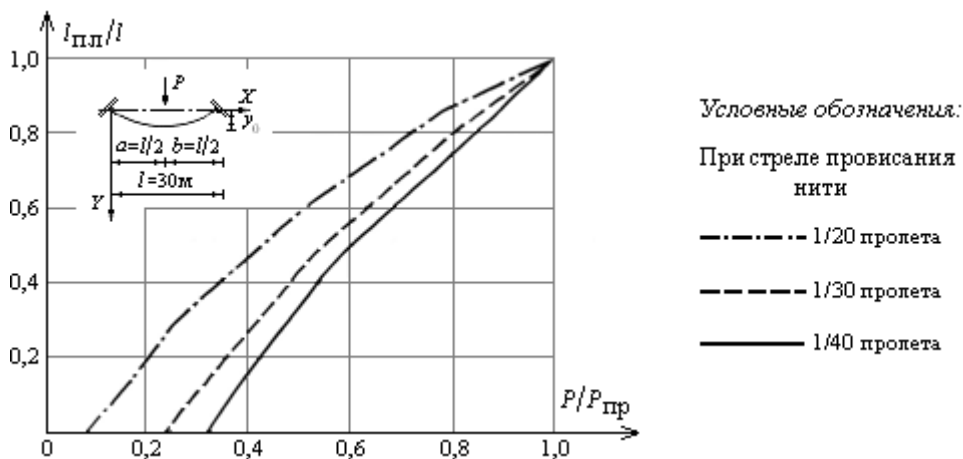


Рис. 11.20. Зависимость длины пластического участка в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета

На рис 11.21 приведена зависимость распора, действующего в нити конечной жесткости, от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки.

Увеличение дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки, как и увеличение дополнительной сосредоточенной нагрузки, действующей в середине пролета, приводит к увеличению распора в нити от исходного значения до предельного $H_{пр}$ при всех стрелах провисания по близкой к линейной зависимости в пределах каждой фазы изгиба. Следует отметить также, что график этой зависимости имеет выраженный излом в момент изменения фазы изгиба. Причем увеличение стрелы провисания приводит к некоторому замедлению скорости роста величины распора и уменьшению величины дополнительной нагрузки, при котором появляются первые пластические деформации. Так, например, при стреле провисания 1/40 пролета первые пластические деформации появляются при соотношении $q_2/q_{пр} = 0,44$, а при 1/20 пролета — $q_2/q_{пр} = 0,18$. То есть при увеличении стрелы провисания в 2 раза, величина дополнительной распределенной нагрузки, при которой появляются первые пластические деформации, уменьшается в 2,44 раза.

Из рис. 11.21 также видно, что зависимость распора в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки качественно аналогична случаю действия дополнительной сосредоточенной нагрузки, но ее значения количественно отличаются. Последнее объясняется тем, что форма кривой провисания нити при действии дополнительной симметричной участковой распределенной нагрузки очень отличается от формы кривой провисания нити при действии сосредоточенной нагрузки. Такое же отличие будет наблюдаться и далее при рассмотрении зависимостей изгибающих моментов $M/M_{пр}$, перемещений $vH_{пр}/M_{пр}$ и длины пластического участка $l_{пл}/l$.

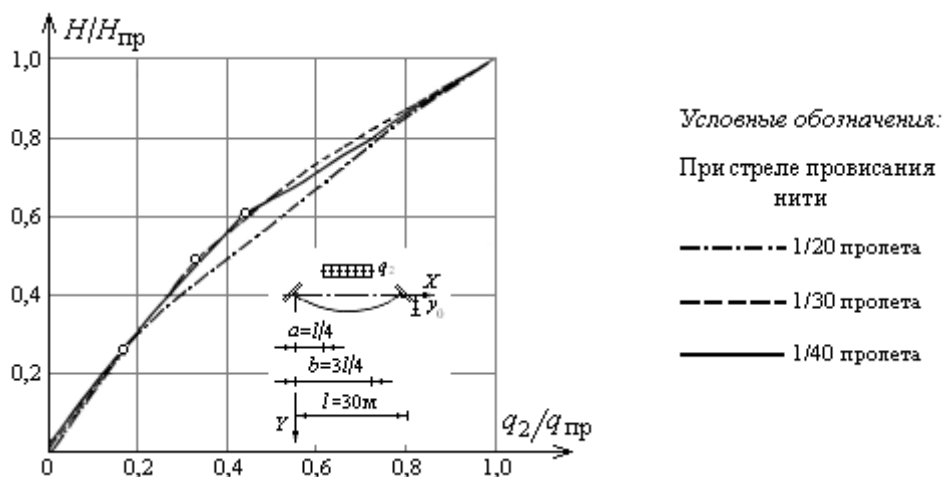


Рис. 11.21. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки:
 ○ — изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

Кривые зависимости изгибающих моментов в нити конечной жесткости от дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки представлены на рис. 11.22. Как видно из рисунка, изначально с возрастанием параметра $q_2/q_{пр}$ от 0 до 0,08 при стреле провисания 1/20 пролета, от 0 до 0,19 при стреле провисания 1/30 пролета и от 0 до 0,25 при стреле провисания 1/40 пролета значения изгибающих моментов по всему пролету уменьшаются, а затем незначительно увеличиваются. При дальнейшем увеличении дополнительной распределенной нагрузки изгибающие моменты по всему пролету нити постепенно уменьшаются до нуля, после чего нить конечной жесткости становится полностью пластичной и начинает работать подобно гибкой нити.

Как уже отмечалось раньше, стрела провисания существенно влияет на перемещения нити конечной жесткости при действии дополнительной нагрузки (рис. 11.23). Так, при прочих равных условиях, нити, имеющие большую стрелу провисания, оказываются более деформативными, чем нити с меньшей стрелой провисания на всем интервале изменения дополнительной нагрузки.

Например, перемещения нити в середине пролета при стреле провисания 1/20 пролета и при $q_2/q_{пр} = 0,8$ больше перемещений нити со стрелой провисания 1/30 и 1/40 пролета соответственно в 1,68 и 2,06 раза, а в четвертях пролета — соответственно в 1,18 и 1,93 раза. Так, в середине пролета при увеличении $q_2/q_{пр}$ от 0 до 2,1 (при стреле провисания 1/20 пролета), от 0 до 0,30 (при стреле провисания 1/30 пролета) и от 0 до 0,21 (при стреле провисания 1/40 пролета) перемещения нити отрицательны, т. е. происходит ее приподнимание, но при дальнейшем росте дополнительной равномерно распределенной нагрузки (до $q_2/q_{пр} = 1,0$) перемещения меняют свой знак на проти-

воположный и становятся положительными. Последнее свидетельствует, что происходит опускание нити конечной жесткости. В четвертых пролета деформирование нити имеет аналогичный характер.

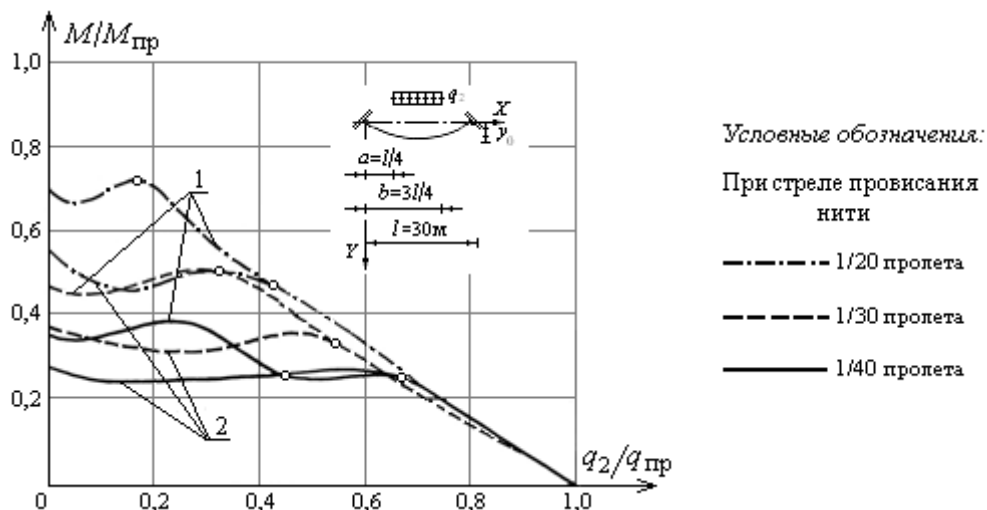


Рис. 11.22. Зависимость изгибающего момента в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки: 1 – $x = l/2$; 2 – $x = l/4$; $\circ$ – изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

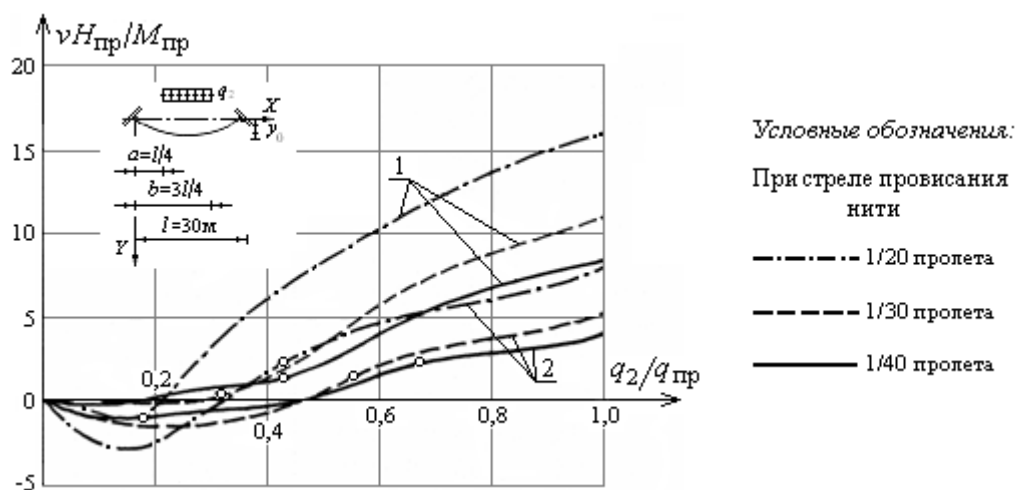


Рис. 11.23. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки: 1 – $x = l/2$; 2 – $x = l/4$; $\circ$ – изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

На рис. 11.24 представлена зависимость длины пластического участка в нити конечной жесткости от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки. Из графика видно, что чем больше стрела провисания, тем раньше в нити появляются пластические деформации и тем больше длина участка пластичности. Уменьшение стрелы провисания в 2 раза с $1/20$ до $1/40$ пролета приводит к увеличению, во-первых, параметра $q_2/q_{пр}$, при котором появляются первые пластические деформации более чем в 2,38 раза – с 0,18 до 0,43, и, во-вторых, увеличению длины пластического участка от 1,16 до 1,67 раза при значении $q_2/q_{пр} = 0,6$.

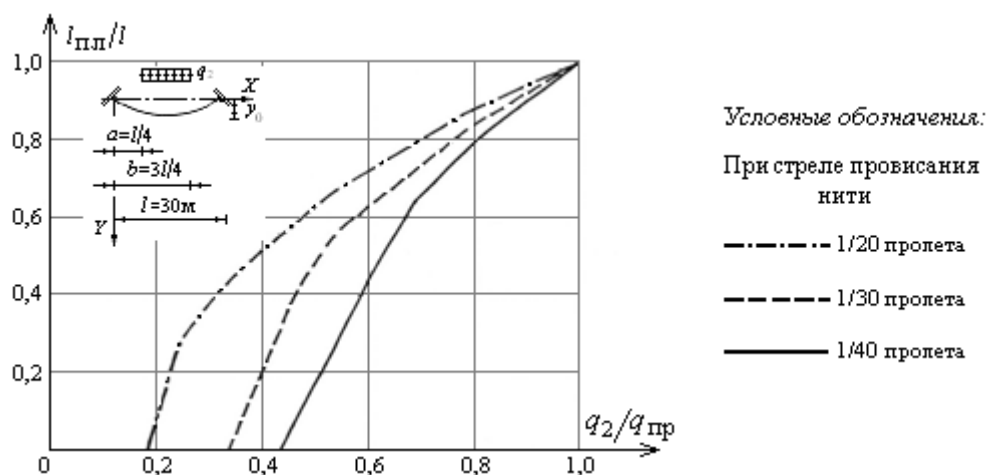


Рис. 11.24. Зависимость длины пластического участка в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной симметричной участковой равномерно распределенной нагрузки

11.2.4. Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки. На рис. 11.25 – 11.27 показаны зависимости параметров напряженно-деформированного состояния нити конечной жесткости от участковой равномерно распределенной нагрузки q_2 , приложенной несимметрично относительно середины пролета нити.

Как видно из рис. 11.25, с увеличением дополнительной несимметричной участковой равномерно распределенной нагрузки распор в нити конечной жесткости при всех стрелах провисания, как и ранее, возрастает по зависимости, близкой к линейной в пределах каждой фазы изгиба, а его график претерпевает излом в момент изменения фазы изгиба.

Графики зависимости изгибающих моментов от интенсивности дополнительной нагрузки (рис. 11.26) имеют ярко выраженный нелинейный характер. Так, при увеличении параметра $q_2/q_{пр}$ от 0 до 0,7 изгибающие моменты в загруженной четверти пролета нити возрастают, а в середине и незагруженной четверти – уменьшаются. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к монотонному уменьшению значений изгибающих моментов, достигающих

нуля по всему пролету нити при достижении нагрузкой своего предельного значения. Последнее объясняется переходом нити конечной жесткости в полностью пластическую фазу работы.

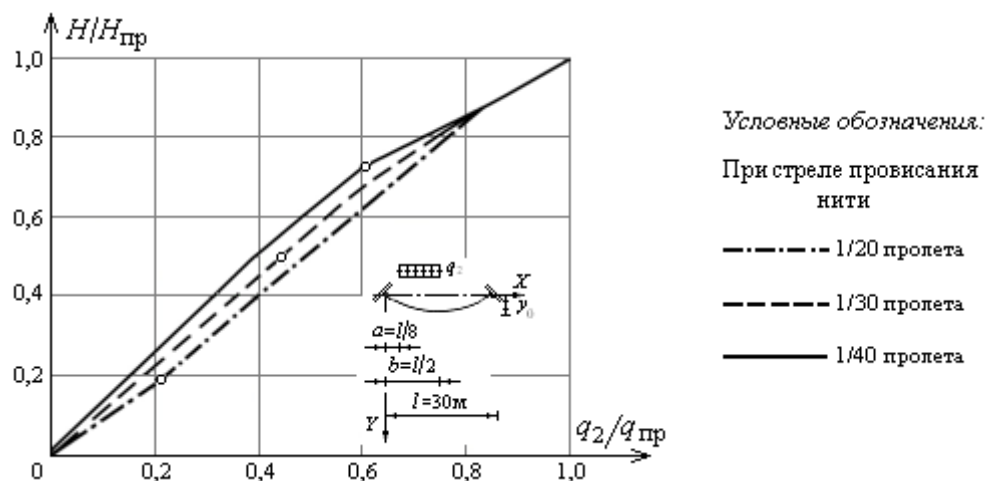


Рис. 11.25. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной несимметричной участковой равномерно распределенной нагрузки: $\circ$ – изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

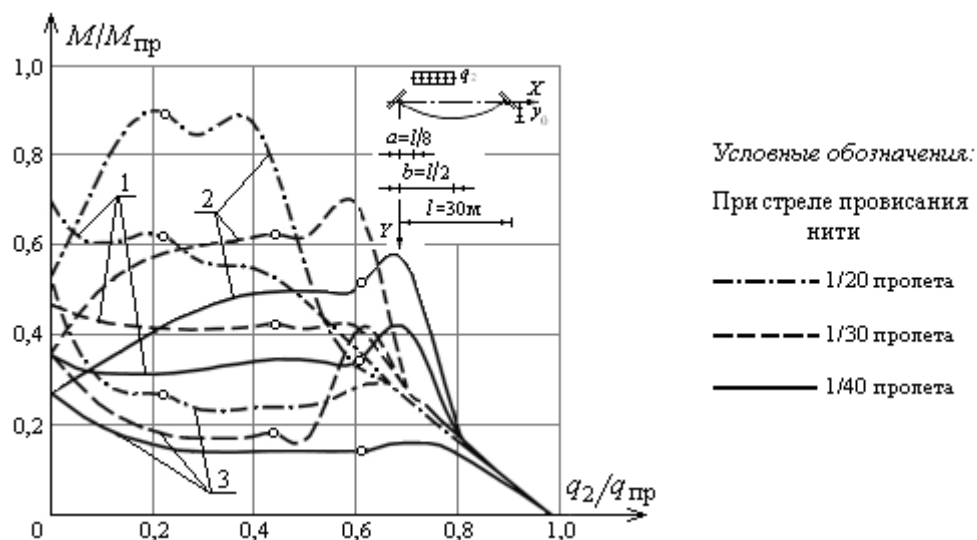


Рис. 11.26. Зависимость изгибающего момента в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной несимметричной участковой равномерно распределенной нагрузки: 1 – $x = l/2$; 2 – $x = l/4$; 3 – $x = 3l/4$; $\circ$ – изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

Из рис. 11.27 следует, что стрела провисания заметно влияет на перемещения нити. Так, при прочих равных условиях, нити с большей стрелой провисания оказываются более деформативными, чем нити с меньшей стрелой провисания на всем интервале изменения дополнительной нагрузки. Если в нагруженной четверти и в середине пролета нить перемещается вниз при всех рассмотренных значениях интенсивности дополнительной нагрузки, то в незагруженной четверти нить перемещается вверх. Причем с увеличением нагрузки абсолютная величина этих перемещений также увеличивается. Например, при увеличении стрелы провисания с $1/40$ до $1/30$ пролета (при интенсивности дополнительной нагрузки $q_2/q_{\text{пр}} = 1$, когда пластические деформации охватывают всю нить) отрицательные перемещения нити увеличиваются в 0,45 раза, а при увеличении стрелы провисания с $1/30$ до $1/20$ пролета – 1,55 раза. Такой характер деформирования нитей конечной жесткости можно объяснить значительной кинематической составляющей перемещений, поскольку увеличение стрелы провисания при действии несимметричных нагрузок в первую очередь приводит к изменению формы кривой провисания нити, а именно: в нагруженной части пролета она перемещается вниз, а в ненагруженной – вверх.

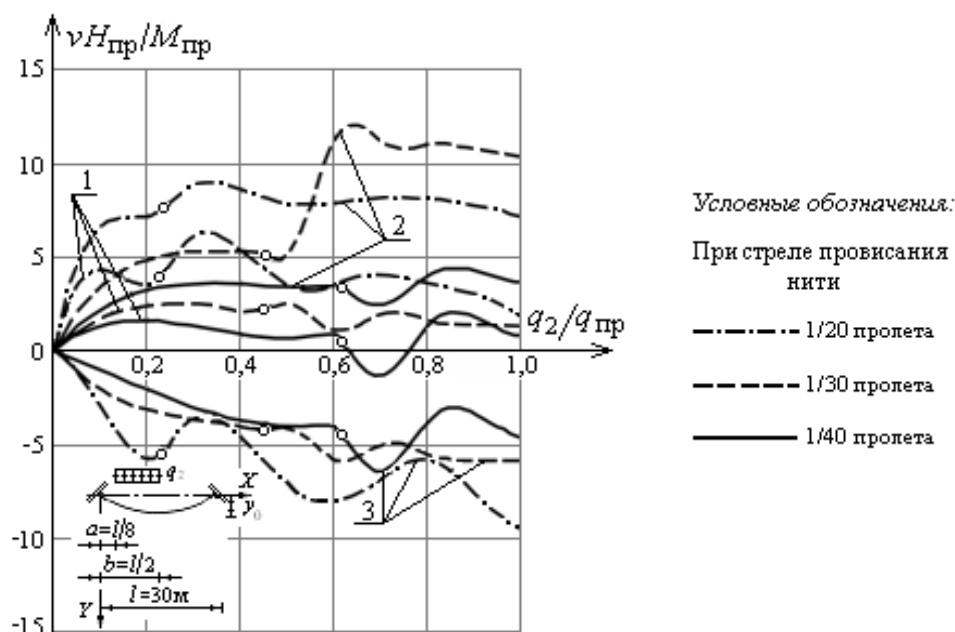


Рис. 11.27. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной несимметричной участковой равномерно распределенной нагрузки: 1 – $x = l/2$; 2 – $x = l/4$; 3 – $x = 3l/4$; $\circ$ – изменение фаз работы нити (появление первых пластических деформаций)

11.2.5. Влияние длины пластического участка на работу нити. Рассмотрим нить конечной жесткости пролетом $l = 150$ м, стрелой провисания при начальной нагрузке $f_0 = 6$ м и с шарнирным закреплением концов на опорах. Нить имеет идеальное поперечное сечение площадью $F = 1,2 \cdot 10^{-2}$ м². Материал нити принят идеальным упруго-пластическим. Модуль упругости материала нити равен $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, а предел текучести $\sigma_T = 345$ МПа. Нить нагружена начальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q_1 = 0,942$ кН/м и двумя видами дополнительных нагрузок: равномерно распределенной на всем пролете и сосредоточенной в середине пролета. Исследуем поведение нити во второй фазе изгиба, когда в ней развивается область конечной протяженности, охваченная пластическими деформациями. На рис. 11.28 – 11.31 показаны зависимости распора в нити, приложенной к нити дополнительной нагрузки, а также ее перемещений от длины пластического участка.

Из приведенных на рис. 11.28 кривых видно, что в случае нагружения нити распределенной нагрузкой пластичность в нити появляется при большей величине распора, чем при ее нагружении сосредоточенной нагрузкой, а именно: при $H/H_{пр} = 0,45$ для распределенной и $H/H_{пр} = 0,40$ для сосредоточенной нагрузки. Отметим также, что зависимости $H = f(l_{пл}/l)$ близки к параболическому виду, независимо от вида действующей нагрузки. С увеличением пластического участка, а соответственно и величины соотношения $l_{пл}/l$, кривые сближаются все больше, пока не пересекутся в точке, где $l_{пл}/l = 1$ и $H/H_{пр} = 1$. Тогда нить конечной жесткости становится полностью пластичной и начинает работать подобно гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному. Отметим также, что при других видах нагружений кривые зависимости $H = f(l_{пл}/l)$ будут иметь аналогичный вид и проходить между представленными на рис. 11.28 графиками.

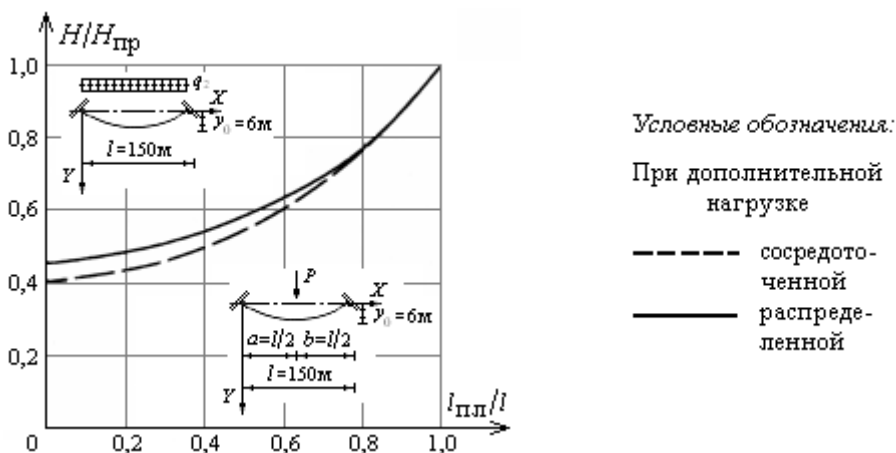


Рис. 11.28. Зависимость распора в нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от длины пластического участка

На рис. 11.29 изображена зависимость дополнительной распределенной и сосредоточенной нагрузок от длины пластического участка нити. В случае распределенной нагрузки пластичность возникает при $q_2/q_{2пр} = 0,41$. С увеличением параметра $l_{пл}/l$ дополнительная распределенная нагрузка увеличивается по зависимости, вид которой близок к параболическому. При $l_{пл}/l = 1$ нагрузка достигает предельного значения, нить становится полностью пластичной, при этом несущая способность нити полностью исчерпывается. В случае нагружения нити сосредоточенной нагрузкой P зависимость также близка к параболической, но кривая при этом имеет более пологий вид. При этом нить работает в упругой фазе до тех пор, пока нагрузка не достигнет величины $P/P_{пр} = 0,36$. Отметим также, что отношение величины дополнительной нагрузки к ее предельному значению, соответствующее появлению первых пластических деформаций, в случае нагружения распределенной нагрузкой в 1,14 раза больше отношения аналогичных параметров для сосредоточенной нагрузки, а несущая способность нити больше в случае действия распределенной нагрузки.

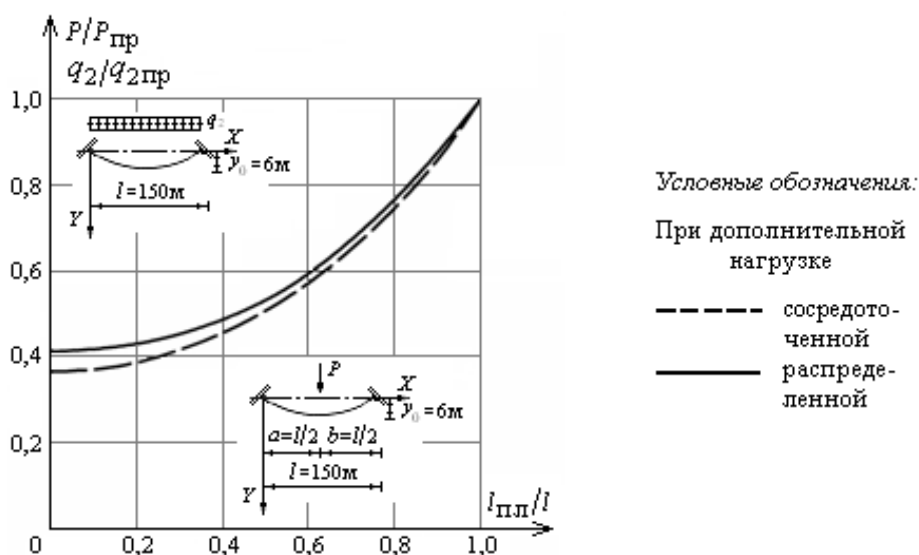


Рис. 11.29. Зависимость приложенной к нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала дополнительной нагрузки от длины пластического участка

На рис. 11.30 показана зависимость перемещений в середине пролета нити конечной жесткости от длины пластического участка для упруго-пластической фазы работы. Как видно из данного рисунка, в случае распределенной нагрузки, пока длина пластического участка не превысит треть длины нити, увеличение перемещений происходит довольно плавно, после

чего – резко возрастает. Для сосредоточенной нагрузки характерно более равномерное увеличение перемещений с возрастанием параметра $l_{пл}/l$. Следует отметить, что при равных длинах пластических участков величина перемещений больше в случае нагружения нити сосредоточенной нагрузкой. В частности, при $l_{пл}/l = 1$ максимальный безразмерный прогиб нити в упруго-пластической фазе работы составляет 0,55 для сосредоточенной и только 0,51 для распределенной нагрузки.

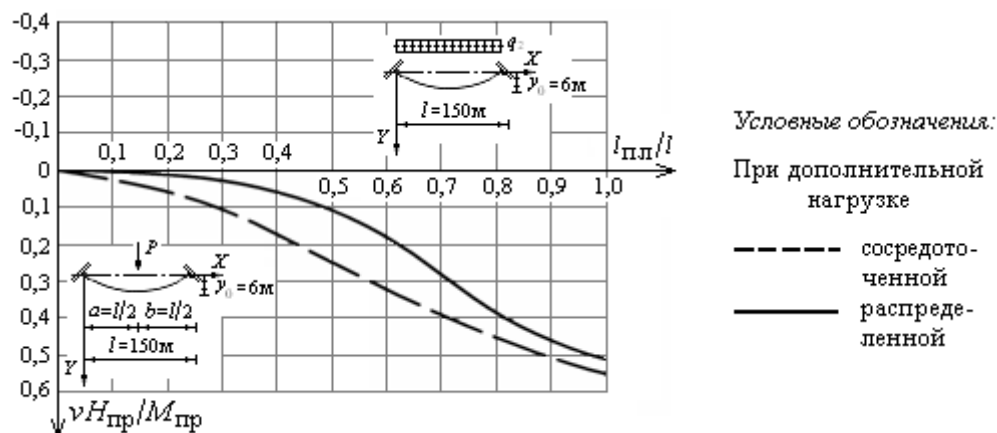


Рис. 11.30. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в середине пролета от длины пластического участка

На рис. 11.31 построена зависимость перемещений в четверти пролета нити конечной жесткости от длины пластического участка также для упруго-пластической фазы работы. Из рисунка видно, что здесь перемещения нити определяются в основном кинематическими составляющими перемещений, связанными с изменением формы кривой провисания. В частности, с увеличением длины пластического участка под действием сосредоточенной нагрузки форма нити стремится к V-образному виду, а под действием распределенной – приближается к параболическому. Последнее объясняется тем, что при непрерывном возрастании длины пластического участка и соответственно величины нагрузки прогибы нити вначале уменьшаются и нить поднимается, затем они начинают увеличиваться, а нить – опускаться. Постоянное же увеличение прогибов начинается только после стабилизации формы нити под нагрузкой. При действии распределенной нагрузки максимальное значение безразмерного прогиба достигает значения 0,44. В случае нагружения нити сосредоточенной нагрузкой даже при достижении нитью полной пластичности (т. е. при $l_{пл}/l = 1$) прогибы остаются отрицательными, а их значение равно – 0,42.

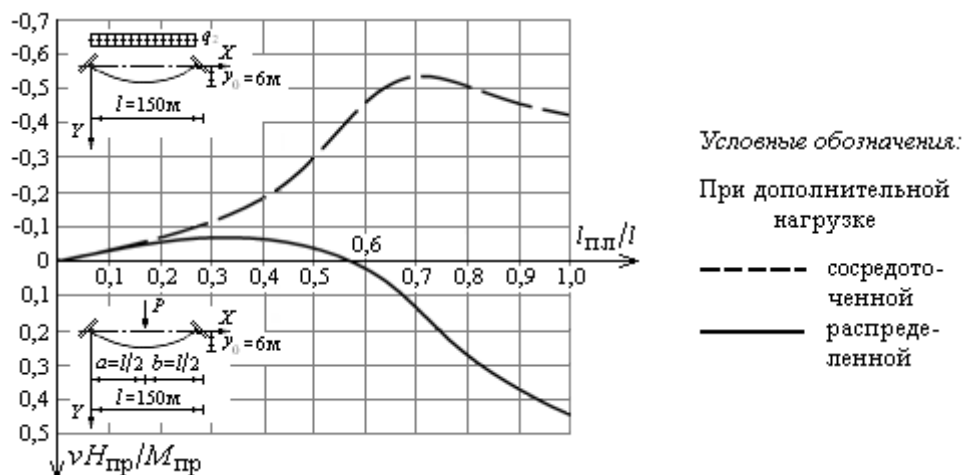


Рис. 11.31. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в четверти пролета от длины пластического участка

11.2.6. Влияние упрочнения материала на работу нити. На рис. 11.32 показана зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при различных значениях параметра жесткости нити $u = 0,5l(H_{\text{пр}}/\alpha EI)^{1/2}$, где коэффициент α по-прежнему представляет собой отношение модулей упрочнения и упругости, т. е. $\alpha = E_0/E$. На рис. 11.32 линии со значениями квадрата параметра жесткости $u = 1, 5, 15, 25$ и 50 построены только до момента начала упрочнения материала, а график со значением $u^2 = 3$ охватывает всю площадь работы нити. Причем каждая из кривых этого графика для последней фазы изгиба нити (когда начинается упрочнение материала) соответствует определенному модулю упрочнения.

Из анализа полученных результатов и сопоставления кривых графиков рис. 11.14 и 11.32 видно, что вплоть до момента начала упрочнения материала нити какая-либо заметная разница в характере деформирования нитей конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала и материала с упрочнением отсутствует. Как и ранее, интенсивность изменения перемещений нити достигает наибольшего значения, когда она входит в пластическую фазу. В дальнейшем же с увеличением нагрузки приращение прогиба уменьшается.

Следует также отметить, что при нагрузке, превышающей предельную для нитей из идеального упруго-пластического материала, напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости практически полностью определяется действующим в них распором, поскольку изгибающие моменты при этом весьма незначительны.

Кроме того, из рис. 11.32 видно, что с уменьшением модуля упрочнения материала характер деформирования нитей все более точно соответствует работе нитей конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала.

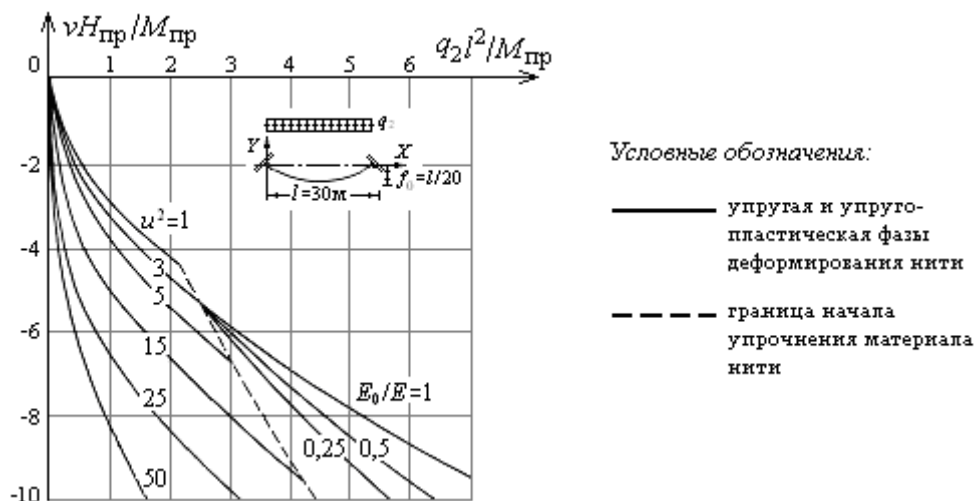


Рис. 11.32. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала с линейным упрочнением в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

На рис. 11.33 приведена зависимость перемещений, а на рис. 11.34 – распора и изгибающих моментов в нити конечной жесткости из идеального жестко-пластического материала с линейным упрочнением от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Исследование напряженно-деформированного состояния нити проводилось на примере нити, концы которой на опорах закреплены шарнирно, пролет равен 30 м, а поперечное сечение имеет идеальный профиль. Исследовано три типа нитей, отличающихся друг от друга только параметрами поперечного сечения, а именно: высота сечения принята равной 26,8; 60,0 и 89,0 мм, при этом площадь сечения соответственно составила 2,11; 6,21 и 10,68 см². Кроме того отношение модуля упрочнения к модулю упругости материала принято равным $\alpha = E_0/E = 0,5$, а предел текучести материала – $\sigma_T = 220$ МПа.

Из рис. 11.33 можно видеть, что в полном соответствии с принятой диаграммой работы материала нить остается недеформируемой вплоть до момента достижения нагрузкой своего предельного значения (причем для нити с высотой поперечного сечения $h = 26,8$ мм значение предельной нагрузки составило $q_{пр} = 0,62 \cdot 10^3$ Н/м, для нити с $h = 60,0$ мм – $q_{пр} = 1,82 \cdot 10^3$ Н/м и, наконец, для нити с $h = 89,0$ мм – $q_{пр} = 3,13 \cdot 10^3$ Н/м). И только после превышения нагрузкой этого показателя нить начинает перемещаться от своего

начального положения. При этом можно указать на две характерные особенности – как качественную (связанную со схемой деформирования), так и количественную (связанную с величинами перемещений) – отличающие поведение нитей из жестко-пластического материала с линейным упрочнением от работы упругих и даже упруго-пластических нитей.

Во-первых, схема деформированного состояния рассматриваемых нитей отличается от схемы деформирования всех других нитей тем, что значения перемещений нити как в четверти, так и в середине пролета практически одинаковы на всем интервале изменения нагрузки. Между тем, величины перемещений упругих и упруго-пластических нитей в четверти пролета, как правило, всегда превышают их значения в середине пролета (особенно на начальных этапах нагружения), а иногда даже имеют противоположный знак. Во-вторых, рассматриваемые нити претерпевают значительно меньшие значения перемещений (в 3, 5 и более раз), чем упругие и упруго-пластические.

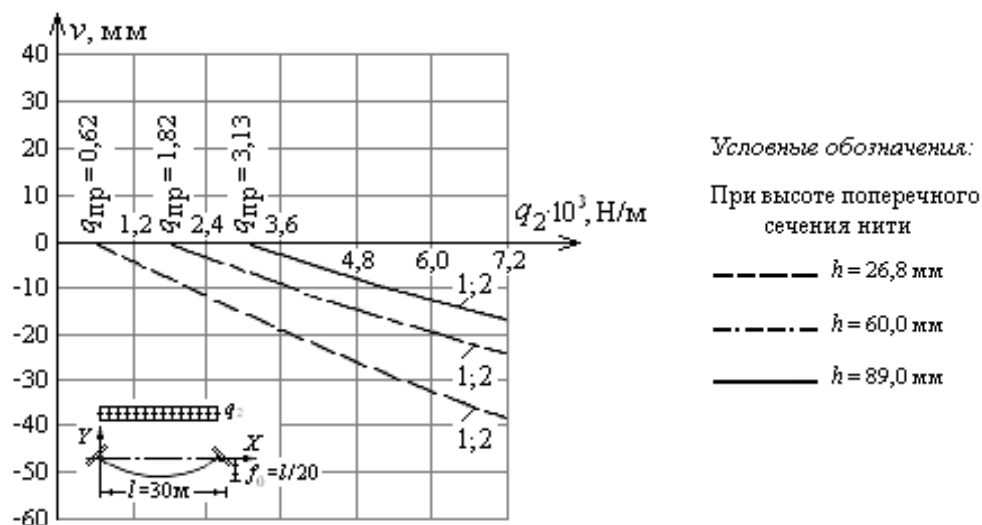


Рис. 11.33. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из жестко-пластического материала с линейным упрочнением от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:
 1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

Отметим, что с физических позиций смысл этих отличий в работе нитей имеет четко выраженное истолкование. Действительно известно, что перемещения упругих и упруго-пластических нитей в связи с практически полным отсутствием начального напряженного состояния являются кинематическими и происходят в целом за счет изменения формы кривой провисания. Перемещения же линейно упрочняющихся жестко-пластических нитей в связи с наличием значительного (а точнее, предельного) напряженного состоя-

ния на момент начала перемещения есть деформационными, т. е. их природа является следствием пластического деформирования материала нити. Обратим внимание здесь также и на то, что именно последний фактор объясняет не только практическое равенство перемещений (и, забегая вперед, скажем, что и изгибающих моментов тоже) рассматриваемых нитей как в четверти, так и в середине пролета, но и те их незначительные значения, которые возникают в нити при ее нагружении.

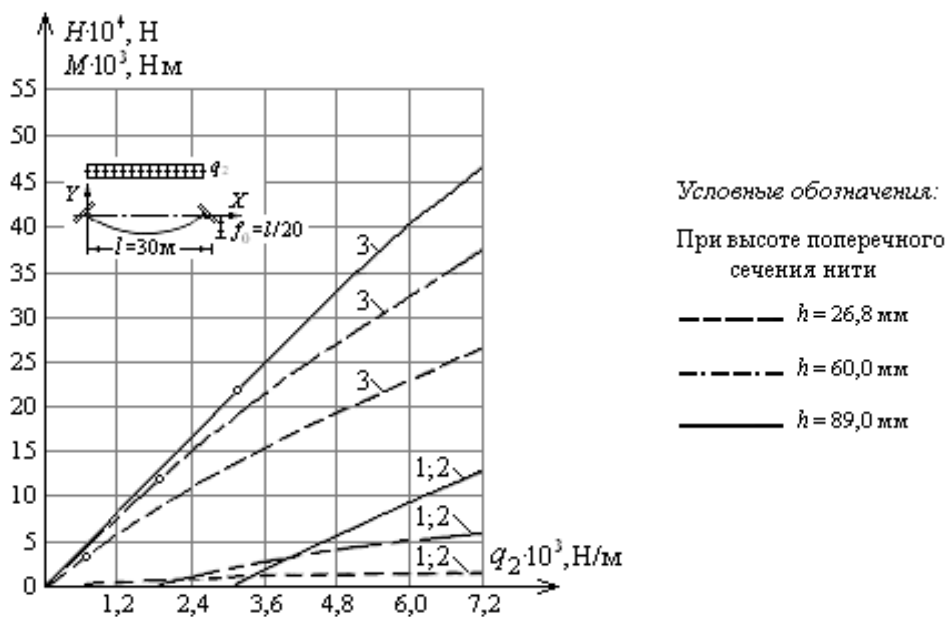


Рис. 11.34. Зависимость усилий в нити конечной жесткости из жестко-пластического материала с линейным упрочнением от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки:

1 – изгибающий момент в четверти пролета; 2 – то же, в середине пролета;
 3 – распор; ○ – изменение фаз работы нити

Что же касается непосредственного влияния жесткости нити на ее деформативность, заметим, что с качественных позиций это влияние одинаково для всех типов нитей (упругих, упруго- и жестко-пластических) и приводит к уменьшению перемещений при увеличении жесткости. Так при интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки $q_2 = 7,2 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ увеличение высоты поперечного сечения нити с 26,8 до 60,0 мм вызывает уменьшение прогибов в 1,6 раза. В свою очередь, при увеличении высоты поперечного сечения нити с 60,0 до 89,0 мм уменьшение перемещений нити составило 1,48 раза.

Кривые изменения распора и изгибающих моментов для нитей различ-

ной жесткости (различной высоты и соответственно площади поперечного сечения) при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки показаны на рис. 11.34. Зависимость распора от интенсивности дополнительной нагрузки близка к линейной в пределах каждой фазы изгиба, причем эта кривая имеет характерный излом в момент изменения фазы. Заметим, что фазы работы нити конечной жесткости из жестко-пластического материала с линейным упрочнением изменяются в том и только в том случае (в отличие от упруго-пластических нитей, изменение фаз в которых происходит в момент появления первых пластических деформаций), когда распор достигает своего предельного значения. В данном случае для нити с высотой поперечного сечения $h = 26,8$ мм предельная величина распора достигает $H_{пр} = 4,64 \cdot 10^4$ Н, для нити с $h = 60,0$ мм – $H_{пр} = 13,66 \cdot 10^4$ Н и, наконец, для нити с $h = 89,0$ мм – $H_{пр} = 23,49 \cdot 10^4$ Н. При этом отметим, что уменьшение жесткости нити приводит при дальнейшем увеличении нагрузки к некоторому замедлению скорости увеличения распора.

С увеличением жесткости нити увеличиваются действующие в ней изгибающие моменты. Так, изгибающие моменты в нити с высотой поперечного сечения 89,0 мм (при интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки $q_2 = 7,2 \cdot 10^3$ Н/м) превышают изгибающие моменты в нити с высотой поперечного сечения 60,0 мм в 2,25 раза. В свою очередь, моменты в нити с высотой поперечного сечения 60,0 мм больше моментов в нити с высотой поперечного сечения 26,8 мм в 5,6 раза. При этом, как уже отмечалось ранее, величины изгибающих моментов в линейно упрочняющихся жестко-пластических нитях практически равны как в четверти, так и в середине пролета.

11.2.7. Особенности работы нити при разгрузке. Характер изменения остаточных прогибов для нити с квадратом параметра жесткости $u = 100$ при разгрузке показан на рис. 11.35.

Как уже отмечалось выше, при данном соотношении геометрических размеров нить в предельном состоянии имеет максимальные прогибы в четвертях пролета. В середине пролета перемещения нити незначительны. При снятии нагрузки нить конечной жесткости ввиду работы ее поперечных сечений в пластической фазе не возвращается в исходное состояние и ее ось остается деформированной. В этом случае распределение остаточных прогибов по пролету нити в какой-то мере остается аналогичным распределению прогибов при активном нагружении: их максимальные значения по-прежнему наблюдаются в четвертях пролета и достигают $v = 42$ мм. При этом стрела провисания нити конечной жесткости после снятия нагрузки оказывается даже меньше, чем при действии начальной нагрузки, поскольку в середине пролета возникают положительные перемещения $v = 23$ мм. Отметим также, что, как следует из рис. 11.33, поведение нити конечной жесткости не только при активном нагружении, но и при разгрузке носит существенно нелинейный характер.

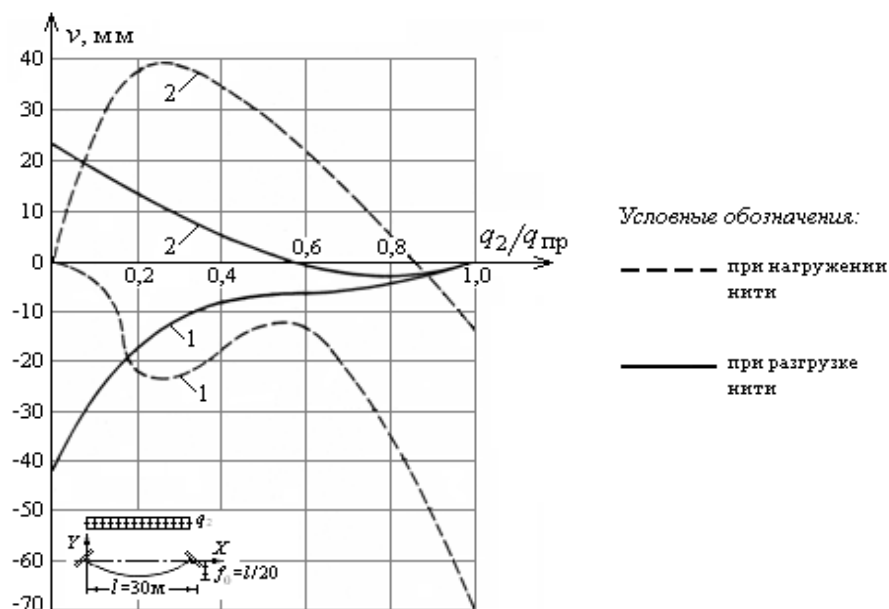


Рис. 11.35. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки при нагружении и разгрузке:
1 – в четверти пролета; 2 – в середине пролета

11.2.8. Анализ результатов исследований. Анализ данных выполненных численных исследований позволяет сделать следующие выводы:

- стрела провисания не только в упругой, но и в упруго-пластической фазе деформирования нити конечной жесткости оказывает существенное влияние на перемещение нити. Если при уменьшении стрелы увеличиваются прогибы в середине, то при ее увеличении – в четвертях пролета. При этом в зависимости от стрелы провисания с увеличением нагрузки интенсивность прогибов может увеличиваться вплоть до предельного состояния нити, а может и уменьшаться;
- увеличение стрелы провисания вызывает значительное уменьшение распора в нити и, наоборот, при уменьшении стрелы провисания распор в нити увеличивается. Причем данная зависимость сохраняется при любом значении дополнительной нагрузки;
- жесткость на изгиб заметно сказывается на перемещениях нити только до момента, пока по ее длине еще не развились значительные области пластического деформирования. При развитых пластических деформациях влияние параметра жесткости на прогибы несколько уменьшается, однако при этом выясняется, что нить с большим параметром жесткости на изгиб является более деформативной, чем нить с меньшим параметром жесткости;

- характер изменения изгибающих моментов в нити конечной жесткости определяется не столько приложенной нагрузкой, сколько размером стрелы провисания и жесткостью на изгиб. С увеличением нагрузки и ростом пластических деформаций изгибающие моменты в нити уменьшаются, а при приближении нагрузки к предельному значению – стремятся к нулю. При этом нить конечной жесткости становится по характеру своей работы подобной гибкой нити;

- жесткое закрепление концов нити на опорах заметное влияние оказывает на напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости только в начальный период нагружения, когда она работает в упругой фазе, и то лишь в случаях большой жесткости на изгиб и значительной стрелы провисания. При увеличении дополнительной нагрузки характер деформирования нити с жестким закреплением аналогичен деформированию нити с шарнирным опиранием;

- пластические деформации, вызывая перераспределение и выравнивание напряжений в нити конечной жесткости, значительно повышают ее несущую способность, которая может в 3,5 и даже 10 раз превышать нагрузку, соответствующую моменту появления текучести;

- влияние упрочнения материала сказывается только на заключительном этапе деформирования, когда нагрузка превышает предельную для нитей из идеального упруго- и жестко-пластического материала. До этого момента существенной разницы в работе этих нитей не отмечается. Кроме того, учет упрочнения существенно (более чем в 5 раз) повышает предельную нагрузку по сравнению с нитями, выполненными из идеального упруго- и жестко-пластического материала;

- в случае снятия нагрузки нить не возвращается в исходное состояние и ее ось остается деформированной, причем оказывается расположенной выше кривой равновесия при действии начальной нагрузки. В связи с этим нагрузка приводит к появлению остаточных перемещений и возникновению в нити состояния самонапряжения.

§ 11.3. Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций

С целью изучения влияния характера и интенсивности дополнительной нагрузки, жесткости на изгиб и кручение, раскрепления нити связями в горизонтальной плоскости, эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки и установки связей на устойчивость плоской формы деформирования нитей конечной жесткости были проведены численные исследования. При этом исходные данные принимались такими, чтобы работа опытных образцов нитей при значениях дополнительных нагрузок, близких к критическим, была характерна для широкого класса висячих систем.

В качестве объекта исследований принимались нити двутаврового поперечного сечения пролетом 30 м, стрелой провисания $f_0 = l/20$, с расположенными на одном уровне опорами, с шарнирным и жестким закреплением на концах. Площадь поперечного сечения нити составляла $F = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, моменты инерции соответственно в плоскостях наибольшей и наименьшей жесткости – $I_y = 1,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ и $I_z = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$, а полярный момент инерции – $I_d = 8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Модуль упругости материала равен $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$. Пространственная устойчивость нитей изучалась при действии дополнительных симметричных и несимметричных равномерно распределенных нагрузок. При этом считалось, что в раскрепленных нитях дополнительная нагрузка всегда была приложена в уровне верхнего пояса.

11.3.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете. На рис. 11.36 – 11.38 приведены результаты исследования устойчивости плоской формы изгиба нитей конечной жесткости при различных значениях начальной равномерно распределенной нагрузки, жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и жесткости нити на кручение при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету.

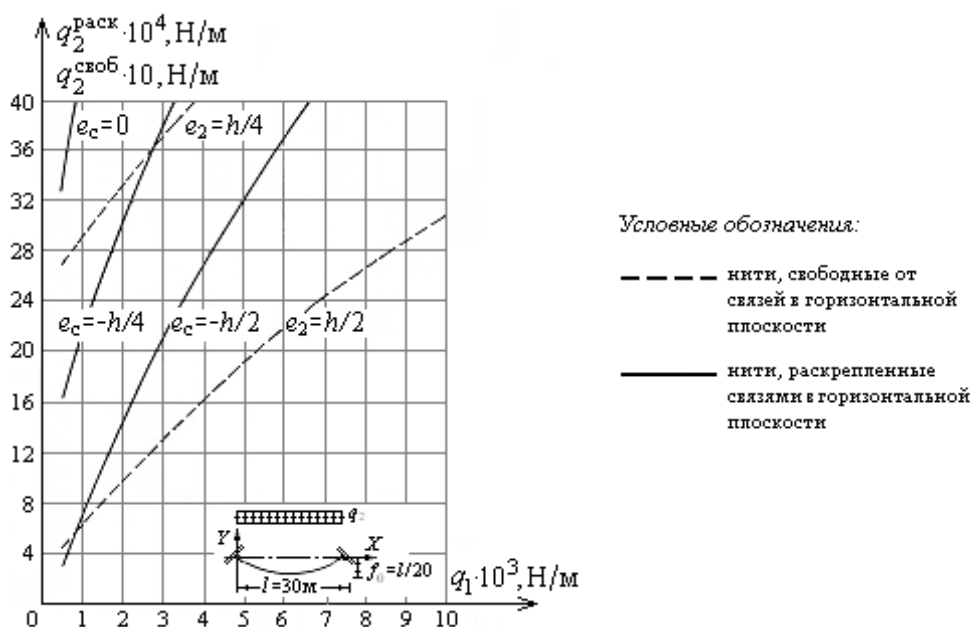


Рис. 11.36. Зависимость между критической дополнительной и начальной равномерно распределенной нагрузками при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

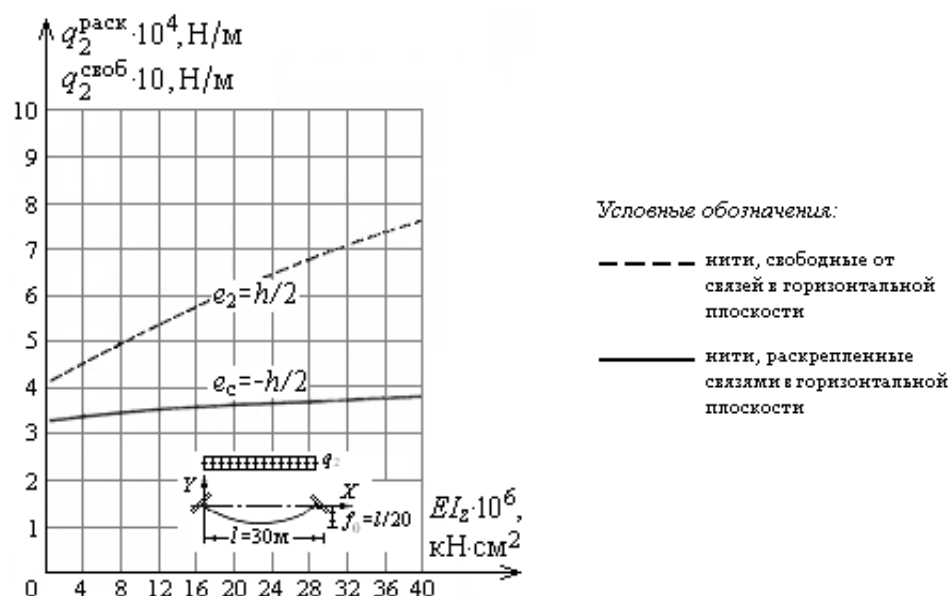


Рис. 11.37. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на изгиб в горизонтальной плоскости при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

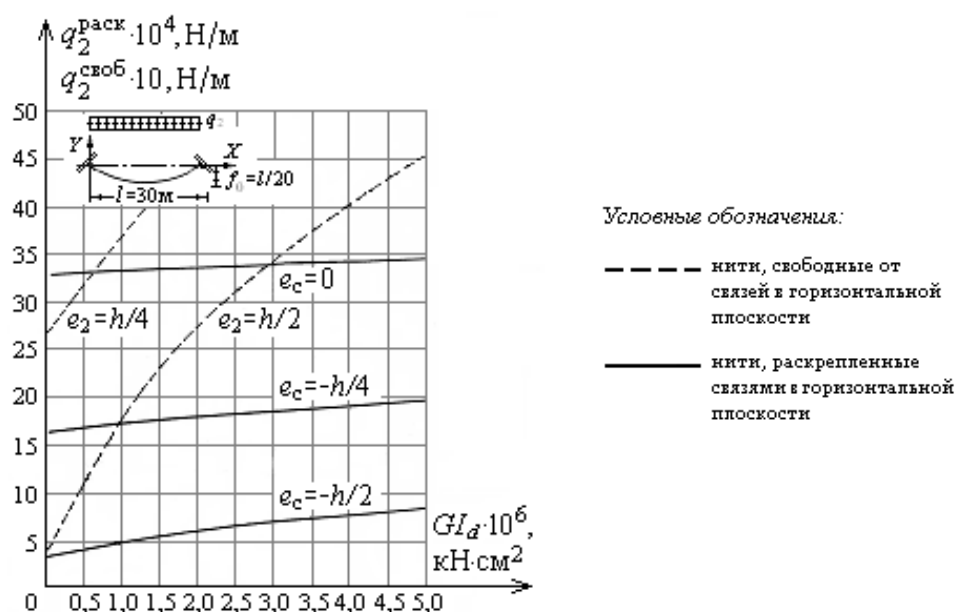


Рис. 11.38. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на кручение при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

Интенсивность начальной равномерно распределенной нагрузки (собственного веса нити) существенно сказывается на критической дополнительной нагрузке как в свободных от связей в горизонтальной плоскости, так и в раскрепленных связями нитях. При прочих равных условиях это влияние гораздо сильнее проявляется в раскрепленных нитях (рис. 11.36). Например, если при увеличении интенсивности начальной нагрузки в 10 раз от 1000 до 10000 Н/м критическая дополнительная равномерно распределенная нагрузка в свободных от связей нитях возрастает в 5,3 раза, то в раскрепленных нитях она увеличивается уже в 9,7 раза. При этом необходимо отметить, что само по себе раскрепление нитей связями в горизонтальной плоскости вызывает рост критической дополнительной нагрузки в 750 раз. Зависимость $q_2 = f(q_1)$, как это видно из рис. 11.36, носит более выраженный нелинейный характер для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости. Для нитей, раскрепленных связями, эта зависимость близка к прямо пропорциональной.

Перемещение уровня раскрепления нити от нижнего пояса к верхнему (т. е. при изменении эксцентриситета установки связей от $e_c = -h/2$ до $e_c = h/2$, где h – высота профиля) вызывает весьма значительный рост интенсивности критической дополнительной нагрузки. Причем эта интенсивность оказывается связанной с эксцентриситетом квадратичной функциональной зависимостью вида $q_2 = f(e_c)$, близкой к гиперболической, кривая которой имеет бесконечную ветвь с асимптотой $e_c = h/2$. Иными словами, при приближении эксцентриситета линии раскрепления нити к верхнему поясу интенсивность критической дополнительной нагрузки неограниченно возрастает. Практически это означает, что при раскреплении нитей конечной жесткости в уровне верхнего пояса устойчивость плоской формы изгиба полностью обеспечена.

Из рис. 11.36 видно также, что понижение уровня приложения дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, оказывает на пространственную устойчивость нитей конечной жесткости такое же воздействие, как и повышение уровня установки связей в раскрепленных нитях. Так, при изменении эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки от верхнего пояса к нижнему дополнительная критическая нагрузка все более возрастает, а при $e_c = -h/2$ стремится к бесконечности. Последнее свидетельствует о том, что при приложении дополнительной нагрузки к нижнему поясу нить устойчивости плоской формы изгиба не теряет.

Увеличение жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки (рис. 11.37) вызывает достаточно значительный рост интенсивности критической дополнительной нагрузки для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и практически не сказывается на раскрепленных нитях. Если для свободных от связей нитей увеличение наименьшей жесткости на изгиб в 10 раз (от $4 \cdot 10^6$ до $40 \cdot 10^6$ кНсм²) вызывает увеличение критической дополнительной нагрузки в 1,6 раза, то для раскрепленных нитей – всего в 1,1 раза. Причем повышение уровня связей в раскрепленных нитях и понижение уровня приложения дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приводит к еще более сильному ослаблению этого влияния, которое в итоге практически полностью исчезает.

Влияние крутильной жесткости нити на интенсивность критической дополнительной нагрузки видно на рис. 11.38. Как и жесткость нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки, жесткость на кручение весьма заметно сказывается на критической дополнительной нагрузке для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и мало влияет на пространственную устойчивость раскрепленных нитей. Об этом свидетельствует то, что при увеличении крутильной жесткости нити в 10 раз (от $0,5 \cdot 10^6$ до $5 \cdot 10^6$ кНсм²) интенсивность критической дополнительной нагрузки для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, увеличивается в 9,2 раза, а для раскрепленных нитей – всего в 1,9 раза. При этом, как и в предыдущем случае (рис. 11.37), соответствующее изменение уровня установки связей и приложения внешней нагрузки в раскрепленных и свободных нитях конечной жесткости приводит к уменьшению воздействия крутильной жесткости нити на ее устойчивость плоской формы деформирования.

11.3.2. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета. Результаты исследования пространственной устойчивости нитей конечной жесткости при различных значениях начальной равномерно распределенной нагрузки, жесткости нити на изгиб в горизонтальной плоскости и жесткости нити на кручение при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной на половине пролета, показаны на рис. 11.39 – 11.41.

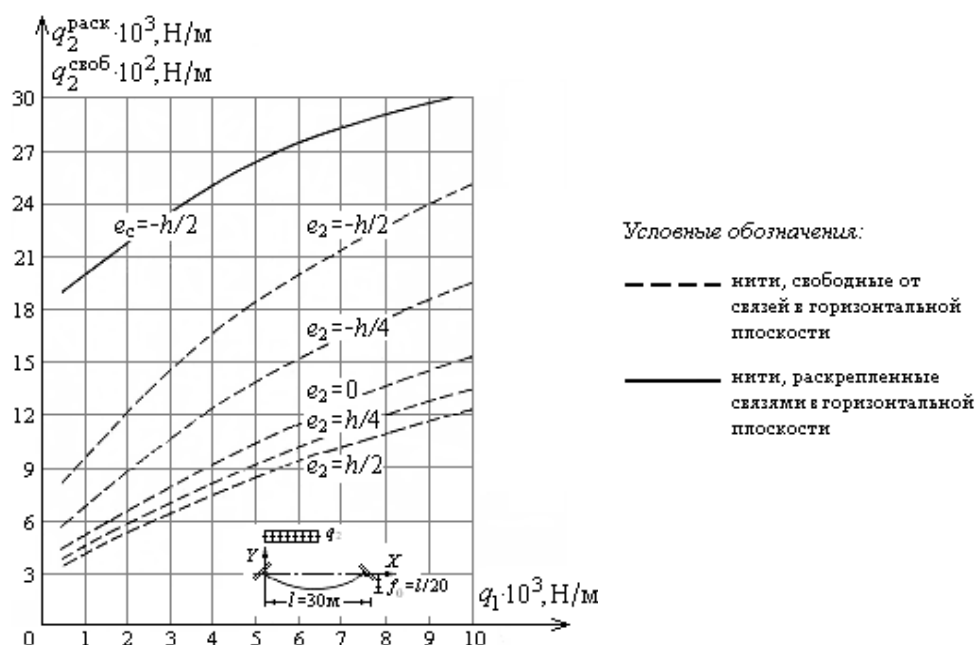


Рис. 11.39. Зависимость между критической дополнительной и начальной равномерно распределенной нагрузками при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

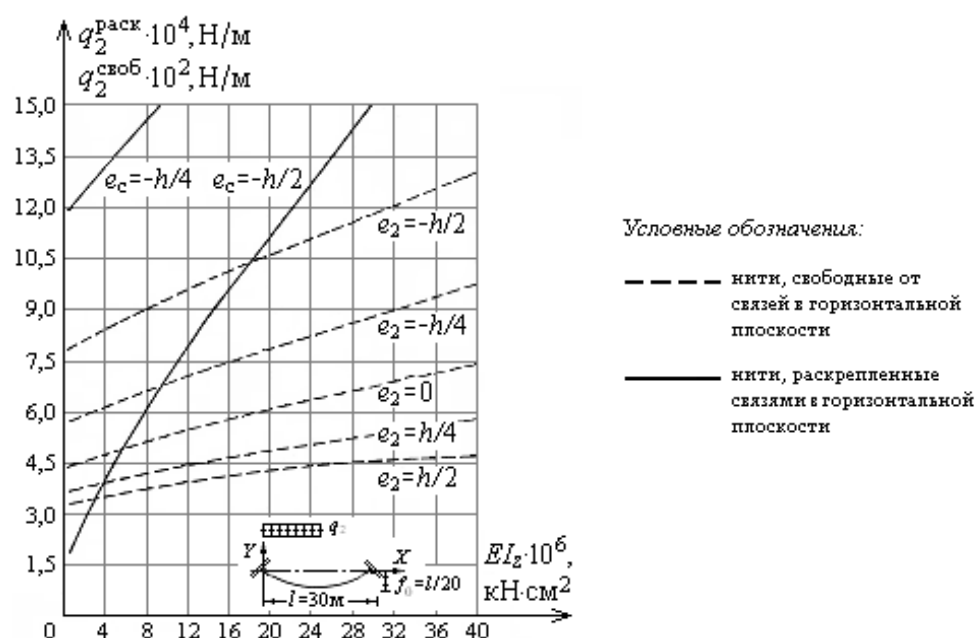


Рис. 11.40. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на изгиб в горизонтальной плоскости при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

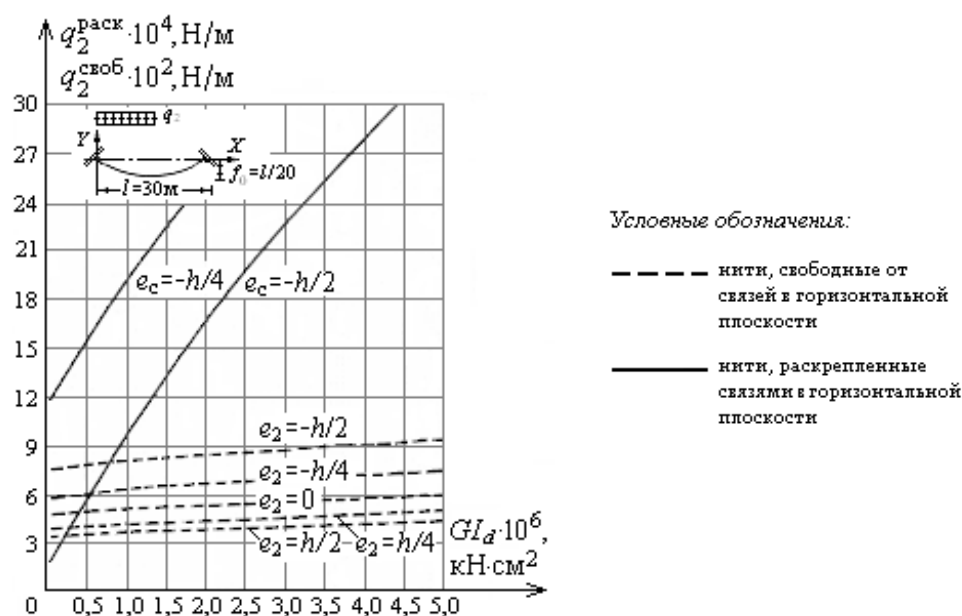


Рис. 11.41. Зависимость между критической дополнительной нагрузкой и жесткостью нити на кручение при различных эксцентриситетах приложения дополнительной нагрузки и установке связей

Изменение характера дополнительной нагрузки (несимметричная вместо симметричной) приводит к качественно иной работе нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и значительно изменяет количественные показатели потери плоской формы изгиба для раскрепленных нитей. Как показано на рис. 11.39, в этом случае свободные от связей нити конечной жесткости теряют пространственную устойчивость не только при приложении внешней нагрузки к верхнему, но и к нижнему поясам. При этом влияние приложенной к нижнему поясу дополнительной нагрузки на деформирование нити оказывается чуть менее значительным, но носит более выраженный нелинейный характер, чем при нагрузке, приложенной к верхнему поясу. Например, при увеличении начальной равномерно распределенной нагрузки в 10 раз от 1000 до 10000 Н/м интенсивность дополнительной критической нагрузки, приложенной к нижнему поясу, увеличивается в 2,6 раза, а приложенной к верхнему поясу – в 3 раза. Отметим также, что по сравнению с рассмотренным ранее симметричным нагружением в данном случае дополнительная критическая нагрузка увеличивается приблизительно в 10 раз. Последнее свидетельствует о более неблагоприятном воздействии симметричного нагружения на висячие системы, свободные от связей в горизонтальной плоскости.

Снижение уровня приложения внешней нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приводит, как и ранее, к повышению интенсивности критической нагрузки (рис. 11.39). Однако теперь этот закон выражается не гиперболической, а параболической зависимостью, кривая которой имеет достаточно большой разворот.

В раскрепленных нитях увеличение начальной нагрузки вызывает более плавное нарастание интенсивности критической дополнительной нагрузки, чем при симметричном нагружении. Так, при увеличении начальной нагрузки в 10 раз от 1000 до 10000 Н/м в данном случае интенсивность критической нагрузки возрастает в 1,6 раза, а при симметричном нагружении – в 9,7 раза. Абсолютная же величина критической дополнительной нагрузки уменьшается при этом в среднем в 1,7 раза, что свидетельствует о более опасном воздействии несимметричного нагружения на раскрепленные висячие системы.

Повышение уровня раскрепления нити от нижнего пояса к верхнему оказывает на работу нитей конечной жесткости такое же воздействие, как и при симметричном нагружении – происходит значительное повышение критической нагрузки. Причем зависимость $q_2 = f(e_c)$ имеет практически тот же гиперболический характер, что и в указанном случае, т. е. при раскреплении нити в уровне верхнего пояса она не теряет устойчивости плоской формы изгиба ни при каких значениях дополнительной нагрузки.

На рис. 11.40 и 11.41 видно, что несимметричная нагрузка совершенно меняет характер влияния жесткостных параметров нити на ее пространственную устойчивость. Так, если при симметричном нагружении увеличение жесткости нити на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и на кручение вызывает увеличение критической дополнительной нагрузки в нитях, свободных от связей

в горизонтальной плоскости, и почти не сказывается на раскрепленных нитях, то здесь наблюдается обратная зависимость, а именно: не очень заметное увеличение критической нагрузки в нераскрепленных и значительное ее увеличение в раскрепленных нитях. Это видно из следующего. При увеличении наименьшей жесткости нити на изгиб (рис. 11.40) в 10 раз от $4 \cdot 10^6$ до $40 \cdot 10^6$ кНсм² интенсивность критической нагрузки возрастает для свободных от связей нитей в 1,5 и 1,2 раза при приложении внешней нагрузки соответственно к нижнему и верхнему поясам, а для раскрепленных нитей – уже в 5,2 раза.

Аналогичный характер имеет также зависимость $q_2 = f(GI_d)$. Например, изменение жесткости на кручение (рис. 11.41) в 10 раз (от $0,5 \cdot 10^6$ до $5 \cdot 10^6$ кНсм²) вызывает увеличение дополнительной критической нагрузки в нитях, свободных от связей в горизонтальной плоскости, в 1,2 раза независимо от эксцентриситета ее приложения, а в раскрепленных нитях – в 5,9 раза. Кроме того отметим, что зависимости $q_2 = f(EI_z)$ и $q_2 = f(GI_d)$ для нераскрепленных нитей весьма близки к линейным, а для раскрепленных нитей носят нелинейный характер.

11.3.3. Анализ результатов исследований. Анализ данных выполненных исследований позволяет сделать следующие выводы:

- характер дополнительной нагрузки заметно влияет на устойчивость плоской формы изгиба нитей конечной жесткости. Если при симметричном нагружении (нагрузка равномерно распределена по всему пролету) интенсивность критической нагрузки у нитей, раскрепленных связями в горизонтальной плоскости, отнесенная к интенсивности критической нагрузки у нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, приблизительно равна 750, то при несимметричном нагружении (нагрузка равномерно распределена на половине пролета) отношение $q_2^{\text{раск}} / q_2^{\text{своб}}$ уменьшается до 60. Это является результатом одновременно происходящего уменьшения критической нагрузки для раскрепленных и увеличения для свободных нитей;
- симметричное нагружение по сравнению с несимметричным оказывается более опасным для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, и, наоборот, для раскрепленных нитей более опасным по сравнению с симметричным будет несимметричное нагружение;
- жесткость нити на изгиб в горизонтальной плоскости и на кручение оказывает достаточно значительное влияние на интенсивность критической нагрузки. Причем при симметричном нагружении это влияние существеннее для нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, а при несимметричном – для раскрепленных нитей;
- начальная равномерно распределенная нагрузка вызывает значительное увеличение критической дополнительной нагрузки как у нитей, свободных от связей в горизонтальной плоскости, так и у раскрепленных. Отметим, что при несимметричном нагружении интенсивность критической нагрузки растет сравнительно медленнее, чем при симметричном;
- жесткое закрепление концов нити на опорах сказывается на интен-

сивности критической дополнительной нагрузки лишь тогда, когда нити имеют значительную жесткость на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки и на кручение. С уменьшением жесткостных параметров разница между значениями критической нагрузки у нитей с жестким и шарнирным закреплением концов становится несущественной;

- раскрепление нити связями в горизонтальной плоскости в уровне нижнего пояса вызывает очень значительное увеличение интенсивности критической дополнительной нагрузки, которая при прочих равных с нераскрепленными нитями условиях возрастает в 750 раз. Повышение уровня установки связей от нижнего пояса нити к верхнему приводит к дальнейшему увеличению критической нагрузки, происходящему по гиперболической зависимости. При раскреплении нити конечной жесткости связями в уровне верхнего пояса устойчивость плоской формы изгиба нити полностью обеспечена как при симметричном, так и при несимметричном нагружении;

- понижение уровня приложения внешней нагрузки от верхнего пояса к нижнему оказывает на работу нитей конечной жесткости, свободных от связей в горизонтальной плоскости, такой же эффект, как и установка связей – происходит увеличение интенсивности критической дополнительной нагрузки. Однако если при симметричном нагружении критическая нагрузка связана с эксцентриситетом своего приложения гиперболической зависимостью, причем при приложении нагрузки к нижнему поясу нить пространственной устойчивости ни при каких условиях не теряет, то при несимметричном нагружении эта зависимость имеет уже параболический характер. Последнее означает, что при несимметричном нагружении нить теряет устойчивость плоской формы изгиба при приложении внешней нагрузки как к верхнему, так и к нижнему поясам нити конечной жесткости.

§ 11.4. Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости за пределом упругости

Рассмотрим упруго-пластическую нить конечной жесткости пролетом $l = 150$ м с идеальным поперечным сечением площадью $F = 1,2 \cdot 10^{-2}$ м². Материал нити принят идеальным упруго-пластическим с модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Нить шарнирно подвешена к двум размещенным на одном уровне опорам и загружена начальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q_1 = 0,942$ кН/м. Стрела провисания нити при начальной нагрузке составляет $y_0 = 6$ м. Нить загружена дополнительной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q_2 по всей ее длине. Эксцентриситеты приложения начальной и дополнительной нагрузок e_1 и e_2 равны нулю.

11.4.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете. На рис. 11.42 показана зависимость перемещений упруго-пластической нити конечной жесткости в середине пролета от интенсивности дополнительной

равномерно распределенной нагрузки на всем пролете при различных значениях предела текучести материала нити σ_T . Из данного рисунка следует, что в упругой фазе работы нить в середине пролета поднимается вверх, что обусловлено изменением формы кривой провисания – от заданной к параболической. С появлением пластических деформаций знак перемещений изменяется на противоположный и нить в середине пролета начинает опускаться. Отметим, что предел текучести материала нити заметно влияет на ее работу под нагрузкой. Так, при прочих равных условиях, нити с меньшим параметром σ_T являются более деформативными. При этом увеличение значения предела текучести материала всего лишь на 3,7% (с 216 до 224 МПа) уменьшает прогиб в середине пролета нити в 2,8 раза и увеличивает критическую нагрузку в 1,1 раза. Кроме этого, увеличение параметра текучести материала приводит к наступлению упруго-пластической фазы работы нити и потере ею устойчивости при больших значениях интенсивности дополнительной нагрузки. При этом с возрастанием σ_T увеличение критической нагрузки происходит почти прямо пропорционально.

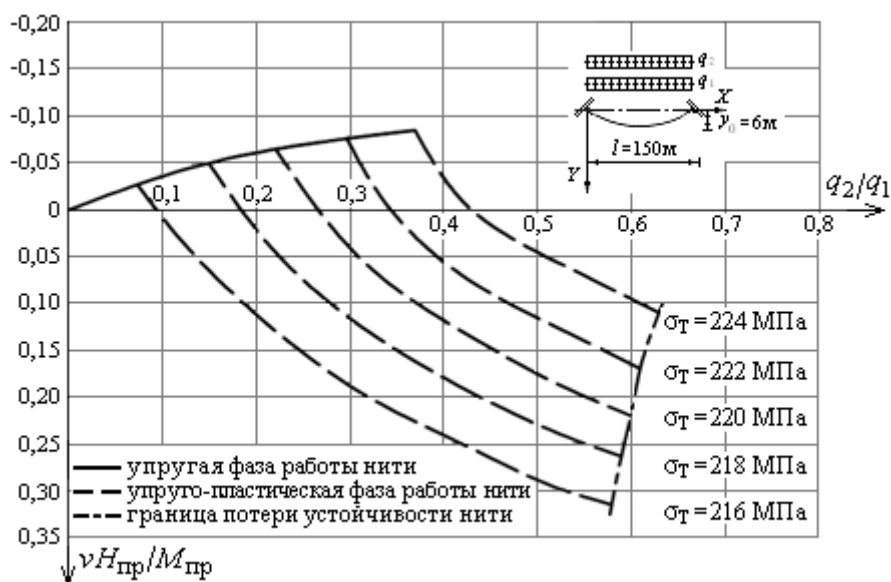


Рис. 11.42. Зависимость перемещений нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала в середине пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

На рис. 11.43 представлены графики зависимости отношения координаты границы раздела пластического и упругих участков нити к длине ее пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки, имеющие ярко выраженный нелинейный характер. Отметим, что предел текучести материала σ_T влияет только на размер участков нити, но при этом

оставляет неизменной качественную картину их изменения. Например, увеличение параметра σ_T на 2 МПа приводит к увеличению отношения q_2/q_1 , соответствующего моменту возникновения первых пластических деформаций, приблизительно на 0,08. С возрастанием дополнительной нагрузки кривые сближаются. Это свидетельствует о том, что для нитей с разными величинами σ_T отличие в размерах участков с возрастанием нагрузки постепенно уменьшается. Также отметим, что увеличение значения σ_T на 3,7% (с 216 до 224 МПа) приводит к уменьшению размера пластического участка в момент потери устойчивости нити в 1,1 раза.

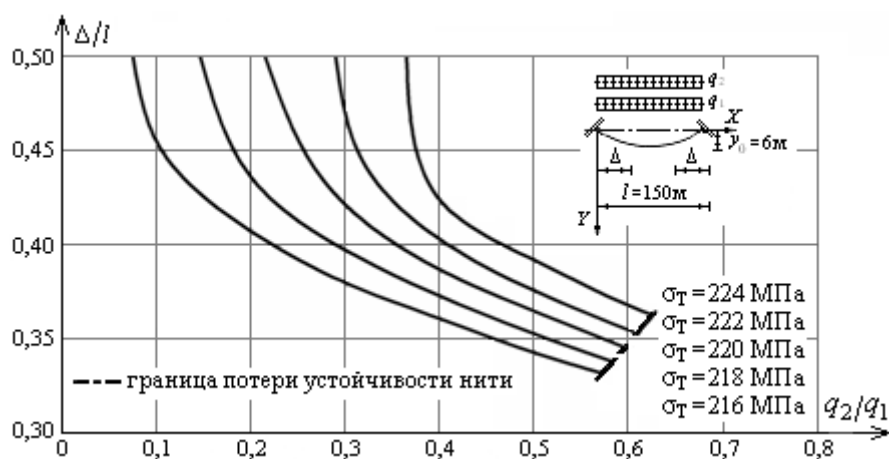


Рис. 11.43. Зависимость отношения координаты границы раздела пластического и упругих участков нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала к длине ее пролета от интенсивности дополнительной равномерно распределенной нагрузки

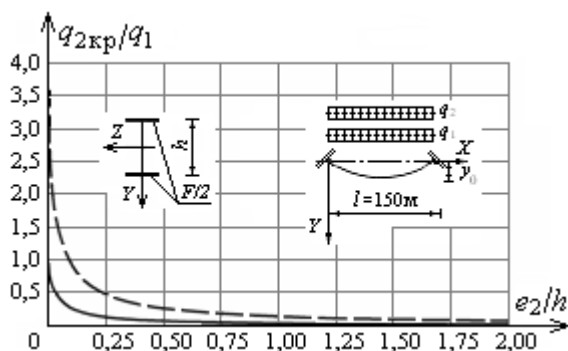
В табл. 11.1 отражены расположение и численные значения размеров упругих и пластических участков по длине нити при различных значениях дополнительной равномерно распределенной нагрузки и σ_T .

На рис. 11.44 приведен график зависимости критической дополнительной равномерно распределенной нагрузки от эксцентриситета ее приложения при различных начальных значениях стрелы провисания y_0 . Из рисунка видно, что эта зависимость имеет вид, близкий к гиперболическому независимо от величины y_0 . При увеличении отношения e_2/h от 0 до 0,25 происходит резкое уменьшение критической нагрузки. Дальнейшее возрастание эксцентриситета приложения нагрузки также сопровождается уменьшением параметра $q_{2кр}$, но интенсивность уменьшения последнего при этом значительно замедляется. Существенно сказывается на величине критической дополнительной равномерно распределенной нагрузки изменение начальной стрелы провисания. В частности, при эксцентриситете $e_2/h = 0$ нить со стрелой провисания $y_0 = 7$ м теряет устойчивость при значении дополнительной

нагрузки $q_{2кр}/q_1 = 3,57$, а с $y_0 = 6$ м – при $q_{2кр}/q_1 = 0,967$. Нужно отметить, что на протяжении всего графика критическая нагрузка для нити со стрелой провисания 7 м приблизительно в 4 раза превышает критическую нагрузку для нити со стрелой провисания 6 м. Последнее свидетельствует о том, что нить с большим параметром y_0 является более устойчивой.

Таблица 11.1

q_2/q_1	Координата границы между упругими и пластическими участками Δ , м				
	$\sigma_T = 216$ МПа	$\sigma_T = 218$ МПа	$\sigma_T = 220$ МПа	$\sigma_T = 222$ МПа	$\sigma_T = 224$ МПа
0,1					
0,2					
0,3					
0,4					
0,5					
0,6	—	—			



Условные обозначения:

При стреле провисания
нити

----- 7 м

————— 6 м

Рис. 11.44. Зависимость критической дополнительной равномерно

распределенной нагрузки от эксцентриситета ее приложения

Рис. 11.45 отражает зависимость критического распора от эксцентриситета приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Из анализа приведенных кривых следует, что характер изменения этой зависимости носит существенно нелинейный характер и по своему виду подобен зависимости, представленной на рис. 11.44. Следует заметить, что в нити с начальной стрелой провисания $y_0 = 7$ м разность критических распоров, соответствующих эксцентриситетам приложения нагрузки $e_2/h = 0$ и $e_2/h = 2$, в 2,43 раза превышает аналогичный параметр для нити со стрелой провисания $y_0 = 6$ м. Это обусловлено тем, что, с одной стороны, у нитей с увеличением стрелы провисания распор уменьшается; поэтому критический распор при $e_2/h = 2$ у нити с $y_0 = 7$ м меньше. Но, с другой стороны, нити с большей стрелой провисания являются более устойчивыми (рис. 11.44) и поэтому с уменьшением эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки критический распор у нити с $y_0 = 7$ м становится больше, чем у нити с $y_0 = 6$ м.

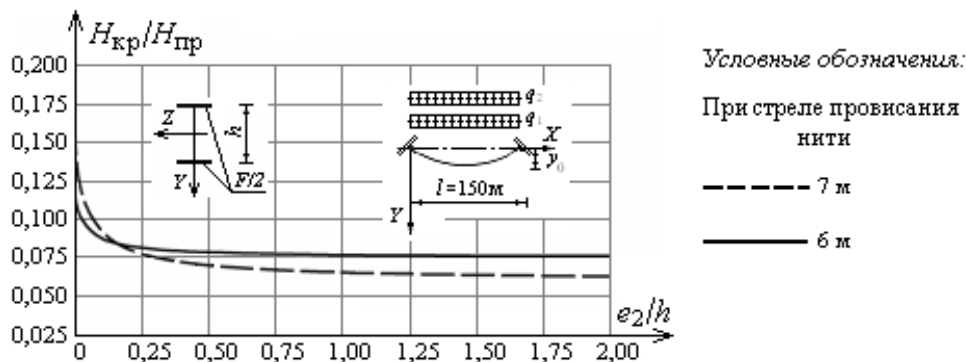


Рис. 11.45. Зависимость критического распора от эксцентриситета приложения дополнительной равномерно распределенной нагрузки

На рис. 11.46 представлены кривые зависимости между пределом текучести материала нити и критической дополнительной равномерно распределенной нагрузкой для нити с начальной стрелой провисания $y_0 = 6$ м. Из рисунка следует, что характер изменения представленных кривых не зависит от эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки. Так, в упруго-пластической нити с увеличением предела текучести материала нити σ_T возрастание интенсивности критической нагрузки происходит почти линейно. Однако когда параметр σ_T достигает значения, при котором в нити в момент потери устойчивости не возникают пластические деформации, в кривых появляется точка излома и увеличение критической дополнительной нагрузки прекращается даже при дальнейшем возрастании σ_T . Это свидетельствует о том, что предел текучести материала не влияет на устойчивость упругих нитей. Также отметим, что кривая претерпевает излом при эксцентриситете приложения нагрузки $e_2/h = 0$, когда критическая дополнительная нагрузка достигает значения $q_{2кр}/q_1 = 0,967$. Для эксцентриситетов $e_2/h = 0,25$ и $e_2/h =$

$= 0,5$ аналогичные значения $q_{2кр}/q_1$ равны 0,133 и 0,072 соответственно.

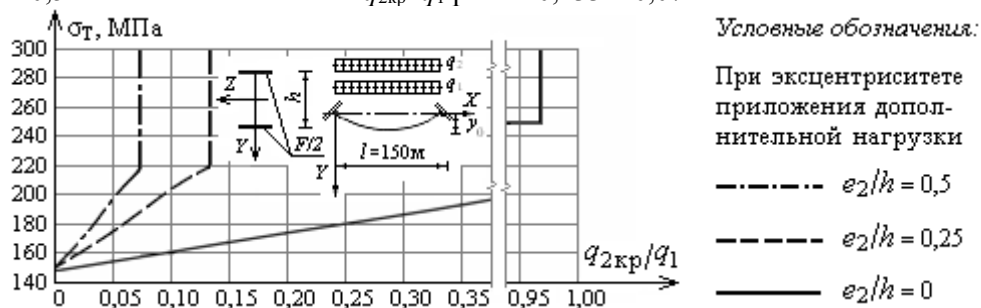


Рис. 11.46. Зависимость между пределом текучести материала нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала и критической дополнительной равномерно распределенной нагрузкой

Графики зависимости между пределом текучести материала нити и длиной пластического участка построены на рис. 11.47. Из рисунка видно, что представленные кривые имеют подобный характер независимо от величины эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки. При величине параметра $\sigma_T = 150$ МПа длина пластического участка нити приблизительно равна $0,614l$ независимо от величины e_2 . С возрастанием предела текучести материала σ_T происходит уменьшение пластического участка по параболической зависимости. Когда σ_T достигает значения 216,6 МПа для $e_2/h = 0,5$, то отношение $l_{пл}/l = 0$, что свидетельствует о том, что при данном значении σ_T пластические деформации в нити в момент потери устойчивости отсутствуют (рис. 11.46). Аналогичное значение предела текучести материала для нитей с $e_2/h = 0$ и $e_2/h = 0,25$ составляют 249,8 и 218,8 МПа соответственно.

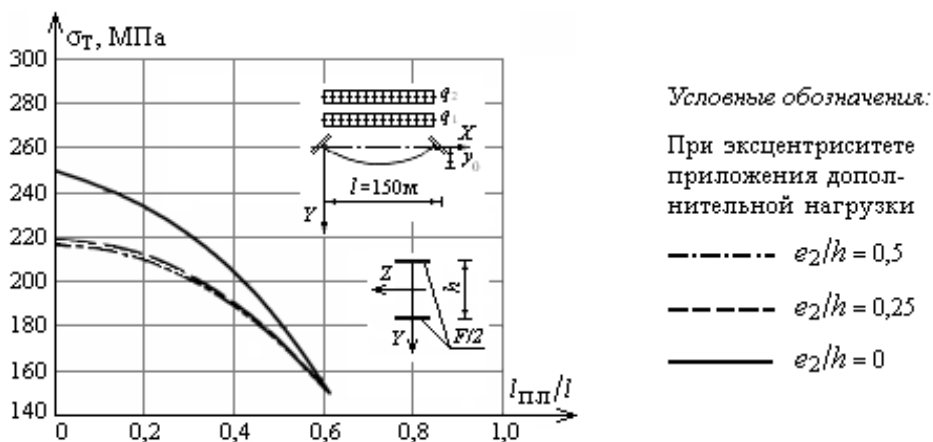


Рис. 11.47. Зависимость между пределом текучести материала нити конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала

и длиной пластического участка

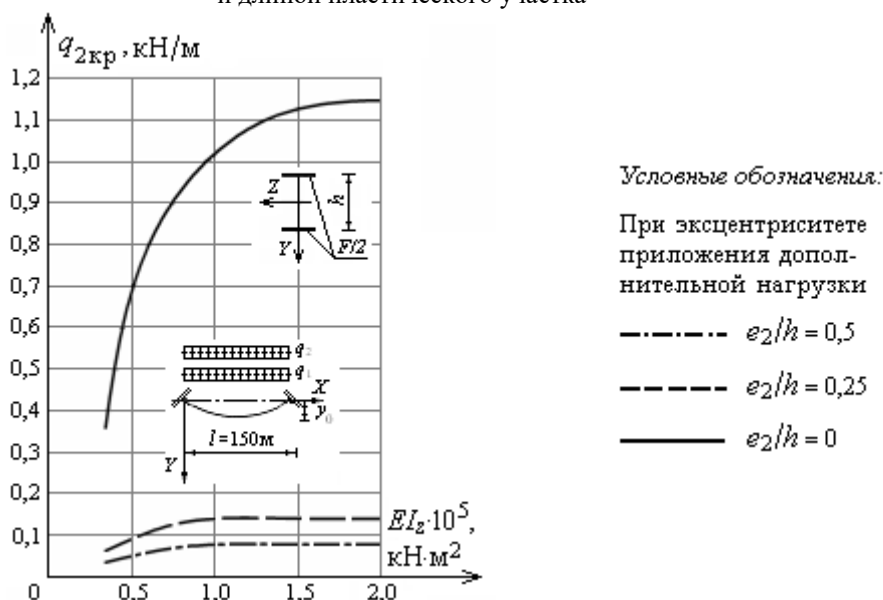


Рис. 11.48. Зависимость между критической дополнительной равномерно распределенной нагрузкой и жесткостью нити из идеального упруго-пластического материала на изгиб из плоскости действия внешней нагрузки

На рис. 11.48 изображен график зависимости критической дополнительной равномерно распределенной нагрузки от изгибной жесткости нити из плоскости действия внешней нагрузки при различных значениях эксцентриситета ее приложения. Из рисунка видно, что увеличение изгибной жесткости нити вызывает значительный рост интенсивности критической дополнительной нагрузки. Так, при $e_2/h = 0$ увеличение изгибной жесткости почти в 6 раз (от $0,34 \cdot 10^5$ до $2 \cdot 10^5$ кНм²) приводит к возрастанию критической дополнительной нагрузки в 3,2 раза. В то же время повышение эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки приводит к ослаблению данного влияния. Так, для случаев $e_2/h = 0,25$ и $e_2/h = 0,5$ аналогичному увеличению изгибной жесткости соответствует возрастание $q_{2кр}$ в 2,3 раза.

11.4.2. Анализ результатов исследований. Анализ данных выполненных исследований позволяет сделать следующие выводы:

- увеличение предела текучести материала упруго-пластической нити приводит к увеличению дополнительной критической нагрузки, т. е. нить становится более устойчивой. В то же время на упругие нити данное утверждение не распространяется;
- повышение уровня приложения дополнительной нагрузки приводит к уменьшению величины критической нагрузки. При этом, чем меньше

начальная стрела провисания упруго-пластической нити, тем менее устойчивой она является. Однако на качественную картину изменения критической нагрузки от эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки начальная стрела провисания не влияет, а отличие заключается лишь в количественных характеристиках;

- изгибная жесткость нити из плоскости действия внешней нагрузки оказывает достаточно значительное влияние на величину интенсивности критической нагрузки. С повышением уровня приложения дополнительной нагрузки данное влияние уменьшается. Нужно отметить, что независимо от величины эксцентриситета приложения дополнительной нагрузки с увеличением изгибной жесткости из плоскости действия внешней нагрузки возрастание интенсивности критической нагрузки происходит по параболической зависимости и отличается только количественными характеристиками.

§ 11.5. Влияние пластических деформаций на работу поперечных сечений нити конечной жесткости при потере устойчивости плоской формы изгиба

Рассмотрим работу поперечных сечений нити конечной жесткости с учетом развивающихся в сечениях областей пластических деформаций при потере нитью устойчивости плоской формы изгиба. Работа поперечных сечений нити зависит от многих факторов: вида и размеров сечения и областей пластических деформаций, жесткости нити на растяжение и изгиб, характера и величины действующих нагрузок, геометрических параметров нити и др. Для изучения влияния указанных факторов на работу поперечных сечений нити проводились численные исследования. При этом исходные данные для поперечных сечений принимались из существующего сортамента металлопроката таким образом, чтобы охватить как можно более широкий класс висячих систем.

11.5.1. Тавровое сечение. В случае тавра 13ШТ1 (рис. 11.49, *а*) можно заметить, что график зависимости угла наклона границы раздела от относительной высоты части упругого ядра при односторонней пластичности в стенке (при чистом изгибе зона пластичности изначально появляется только в стенке) приближается к параболическому виду.

Причем указанный график имеет два ярко выраженных характерных участка: первый (с односторонней пластичностью) на интервале изменения параметра ζ от 1 до 0,234, когда функция ω_1 возрастает достаточно монотонно, и второй (с двусторонней пластичностью) при $\zeta = 0,232 - 0,132$, когда интенсивность увеличения значений функции ω_1 резко возрастает. Отметим, что первый участок отвечает случаю, когда граница раздела проходит через нижнюю горизонтальную грань стенки, а второй – через стенку и полку.

Из рис. 11.49, *а* также видно, что между двумя отмеченными ранее участками находится весьма незначительный по своей протяженности третий участок, ограниченный значениями параметра ζ от 0,234 до 0,232. Причем данный отрезок графика характерен тем, что на этом интервале изменения

параметра ζ угол наклона границы раздела увеличивается до такой степени, что граница раздела начинает пересекать боковую вертикальную грань стенки. При дальнейшем возрастании угла наклона наступает двусторонняя пластичность поперечного сечения, а при угле наклона границы раздела, соответствующему $\omega_1 = 97,62$, полка тавра становится полностью пластичной.

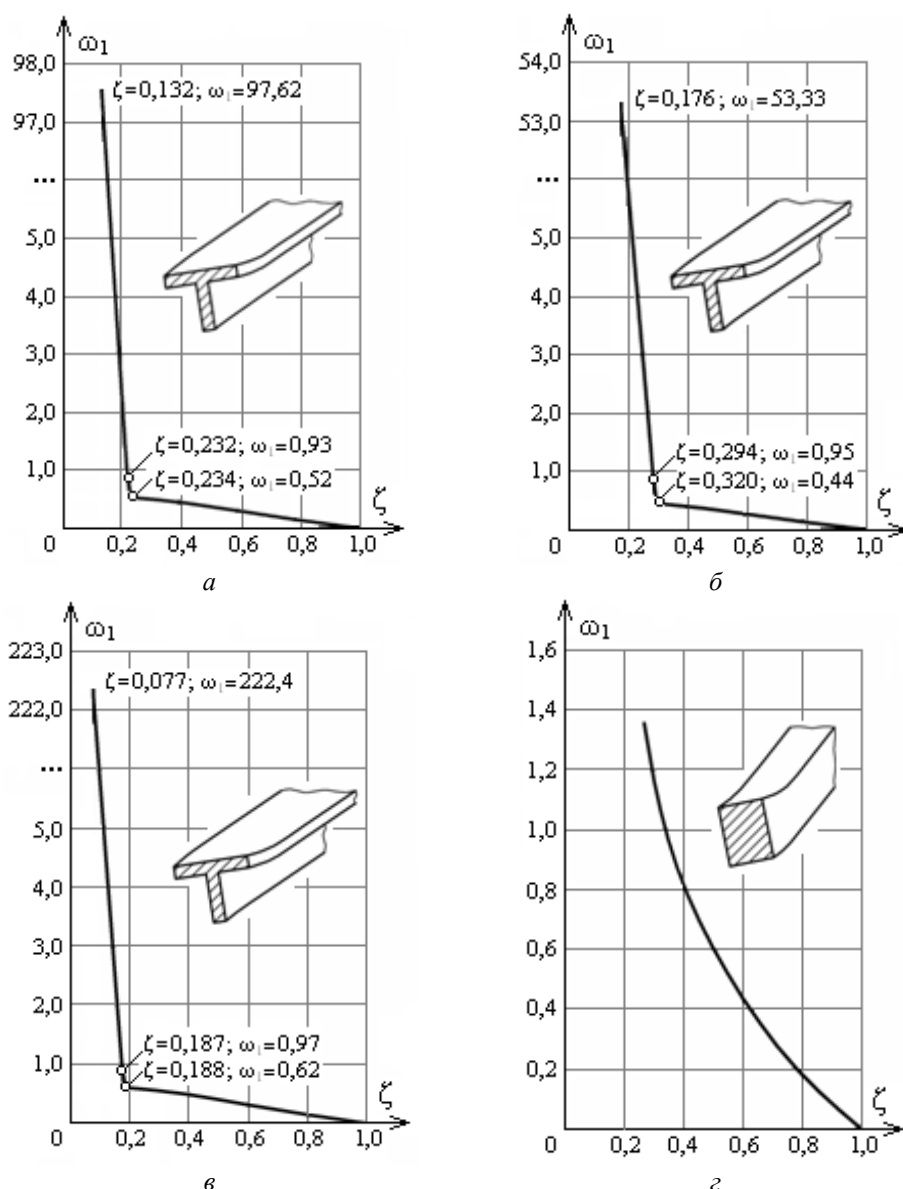


Рис. 11.49. Зависимость между параметром ζ и функцией ω_1 для поперечного сечения: а – тавр 13ШТ1; б – тавр 30ШТ4; в – тавр 15КТ1; г – прямоугольное поперечное сечение; о – изменение условий прохождения границы раздела

через поперечное сечение

Подобные кривые можно получить и для других тавровых сечений (рис. 11.49, б, в). Следует отметить, что кривая зависимости $\omega_1(\zeta)$ для прямоугольного поперечного сечения (рис. 11.49, г) [59] качественно отличается от соответствующих кривых для тавровых поперечных сечений и приближается к гиперболическому виду.

11.5.2. Швеллерное сечение с вертикальной стенкой. Для швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой реализуется стадия работы только с двумя областями пластичной деформации. Для этого случая на рис. 11.50 показаны графики зависимости $\omega_1(\zeta)$, где параметр ζ характеризует относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью. На рисунке для сравнения также представлен аналогичный график, полученный Л. М. Качановым [59] для прямоугольного поперечного сечения.

Из анализа приведенных на рис. 11.50 графиков можно сделать вывод, что для швеллерного поперечного сечения с вертикальной стенкой увеличение площади областей пластичности приводит к достаточно быстрому возрастанию угла наклона границы раздела для больших номеров швеллерного сортамента по сравнению с их меньшими номерами, а также для всех швеллеров по сравнению с прямоугольным поперечным сечением.

При этом для швеллера 5П можно отметить, что угол наклона границы раздела возрастает приблизительно в 2,5 раза быстрее, чем для прямоугольного поперечного сечения. При $\omega_1 = 0,95$ полки данного швеллера становятся полностью пластичными.

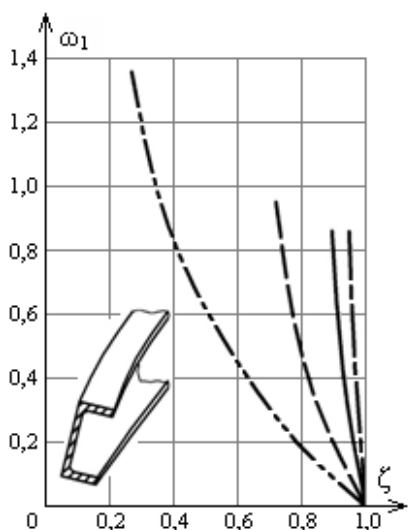


Рис. 11.50. Зависимость между параметром ζ и функцией ω_1 для поперечного сечения из швеллера с вертикальной стенкой:

- — — — швеллер 5П;
- швеллер 16П;
- · - · - швеллер 30Л;
- — — — прямоугольное поперечное сечение

Для швеллеров 16П и 30Л угол наклона тоже возрастает быстрее по сравнению с прямоугольным поперечным сечением, приблизительно в 7 и 12 раз соответственно, а полки этих швеллеров становятся полностью пластичными при $\omega_1 = 0,85$. Также следует отметить, что возрастание угла наклона

границы раздела прямо пропорционально высоте швеллера.

11.5.3. Швеллерное сечение с горизонтальной стенкой. Для случая швеллера с горизонтальной стенкой на рис. 11.51 приведен вид функции $\omega(\zeta)$, в которой параметр ζ , как и раньше, характеризует относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью. Для сравнения здесь также показан график для прямоугольного поперечного сечения, полученный Л. М. Качановым [59].

Анализ результатов, характеризующих работу швеллера с горизонтальной стенкой при развитии пластичных областей, показал следующее. Кривая зависимости угла наклона границы раздела от относительной высоты части упругого ядра при односторонней пластичности в полках (при чистом изгибе зона пластичности изначально появляется только в полках) близка к параболическому виду только на определенных участках. Например, для швеллера 30Л такой вид кривой отмечается на интервале $1 \leq \zeta \leq 3,3$.

При значении же $\zeta = 1$ в кривых присутствует точка излома графика. Именно с этого момента в рассматриваемом поперечном сечении появляется двусторонняя пластичность, угол границы раздела начинает возрастать значительно быстрее, а его зависимость приближается к гиперболическому виду. Можно отметить, что кривая зависимости $\omega(\zeta)$ для прямоугольного поперечного сечения также близка к гиперболическому виду, но угол наклона увеличивается быстрее при поперечном сечении из швеллера с горизонтальной стенкой. В частности, для швеллера 30Л угол наклона границы раздела возрастает приблизительно в 2,3 раза быстрее, чем для прямоугольного сечения. При $\omega = 0,81$ стенка данного швеллера становится полностью пластичной и кривая обрывается. Стенки швеллеров 5П и 16П становятся полностью пластичными при $\omega = 0,65$.

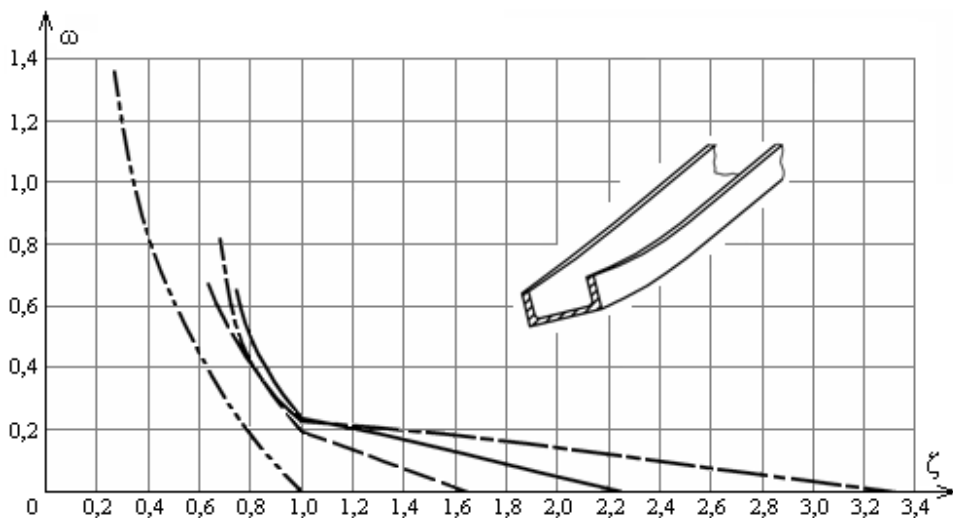


Рис. 11.51. Зависимость между параметром ζ и функцией ω для поперечного сечения из швеллера с горизонтальной стенкой:
 - - - - швеллер 5П; — швеллер 16П; — · — · швеллер 30Л;

— — — — — прямоугольное поперечное сечение

11.5.4. Угловое сечение с неравными полками. На рис. 11.52 представлены кривые зависимости $\omega_1(\zeta)$, где параметр ζ характеризует относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения в виде неравнополочного уголка, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью.

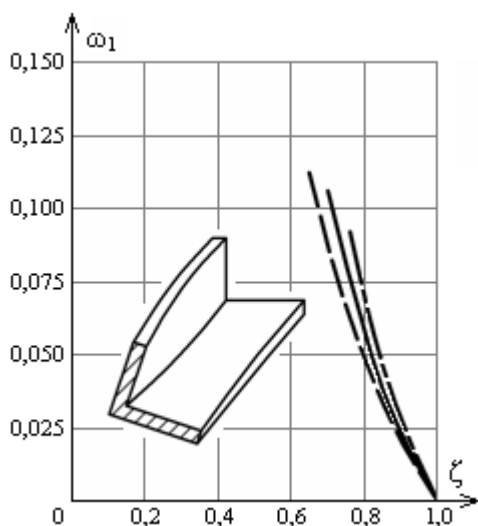


Рис. 11.52. Зависимость между параметром ζ и функцией ω_1 для поперечного сечения из неравнополочного уголка:

- — — — — уголок 25×16×3;
- уголок 100×65×10;
- · - · - · уголок 200×125×16

При рассмотрении рис. 11.52 можно заметить, что представленные на нем кривые зависимости $\omega_1(\zeta)$ имеют нелинейный характер, а их вид приближается к гиперболическому. В кривых, соответствующих более крупным уголкам, угол наклона границы раздела увеличивается быстрее, чем в уголках меньшего сортамента. Точки обрыва кривых соответствуют моменту наступления полной пластичности в горизонтальных полках уголков. Следует отметить, что в более крупных уголках полная пластичность в горизонтальных полках достигается быстрее при меньшем угле наклона границы раздела. В частности, в уголке 25×16×3 горизонтальная полка полностью охватывается пластическими деформациями при $\omega_1 = 0,112$, а в уголках 100×65×10 и 200×125×16 – при $\omega_1 = 0,106$ и $0,092$ соответственно. При этом значение функции ω_1 , при котором в горизонтальной полке развивается полная пластичность, для самого маленького уголка – 25×16×3 в 1,22 раза превышает аналогичный параметр для самого крупного уголка 200×125×16.

11.5.5. Анализ результатов исследований. Анализ данных выполненных исследований поперечных сечений нити конечной жесткости с учетом зон одно- и двусторонней пластичности при выпучивании нити в горизон-

тальной плоскости позволяет сделать следующие выводы:

- с наступлением упруго-пластической фазы работы нити конечной жесткости граница раздела между областями нагружения и разгрузки, образовавшимися в поперечном сечении нити при появлении пластических деформаций, начинает свое отклонение от вертикальной оси, причем с уменьшением параметра, характеризующего относительную высоту части упругого ядра поперечного сечения нити, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью, граница раздела все более приближается к горизонтальной оси и в предельном случае совпадает с ней;

- для рассмотренных типов поперечных сечений нити область нагружения всегда больше области разгрузки, а граница раздела всегда пересекает область пластической деформации за исключением швеллера с горизонтальной стенкой при односторонней пластичности в полках, для которого граница раздела проходит между пластичными областями;

- для таврового поперечного сечения нити темпы роста угла наклона границы раздела малы лишь при односторонней пластичности и только тогда, когда граница пересекает нижнюю горизонтальную грань стенки. Как только граница раздела пересечет боковую вертикальную грань стенки, темпы роста угла наклона многократно увеличиваются. Появление же пластических участков в полке тавра приводит к еще большему увеличению угла наклона границы раздела;

- сопоставление графиков зависимости угла наклона границы раздела от параметра, характеризующего относительную высоту части упругого ядра, заключенной между нейтральной осью и пластичной областью, для поперечных сечений в виде швеллеров с вертикальной стенкой и прямоугольника, показало, что в швеллерных сечениях угол наклона границы раздела увеличивается значительно быстрее. При этом, чем больше номер швеллерного сортамента, тем быстрее увеличивается угол наклона границы раздела. Кроме того отметим, что независимо от размеров поперечного сечения, графики качественно не отличаются, а различие имеет только количественный характер;

- в случае поперечного сечения нити из швеллера с горизонтальной стенкой можно выделить два участка кривой для угла наклона границы раздела. На первом участке при односторонней пластичности в полках происходит монотонное увеличение угла наклона. С появлением же пластических деформаций в стенке швеллера кривая видоизменяется, а темпы роста угла наклона границы раздела резко увеличиваются.

§ 11.6. Сопоставление теоретических результатов с данными экспериментальных исследований

Сравнение результатов расчета с данными экспериментальных исследований проводилось для нити конечной жесткости, подверженной действию дополнительной равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузок, а

также для фермы конечной жесткости, находящейся под действием дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Проводилось также сравнение методов расчета фермы конечной жесткости на устойчивость плоской формы изгиба. Решения этих задач аналитическими и экспериментальными методами приведены в работах [50, 62, 199–201].

Результаты сравнения полученных решений с данными экспериментальных исследований для нити конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки $q_2 = 133$ Н/м (рис. 11.53) приведены в табл. 11.2, из которой видно, что максимальная погрешность при определении распора по уточненной теории составляет 0,2 %, по МКЭ – 0,8 %, по приближенному методу – 0,6 % и по аналитическому решению – 0,3 %. Погрешность при определении стрелы провисания нити в середине пролета составила: по уточненной теории – 1,1 %, по МКЭ – 0,2 %, по приближенному методу – 1,8 % и по аналитическому решению – 1,5 %. При приближении к опорам погрешность при определении стрелы провисания уточненным и приближенным методами возрастает, достигая максимального значения в приопорных участках длиной до 0,15 пролета.

Максимальная погрешность при вычислении изгибающих моментов по уточненной теории составляет 9,4 %, по МКЭ – 8,8 %, по приближенному методу – 10,8 % и по аналитическому решению – 10,7 %. Из табл. 11.2 видно, что изгибающие моменты, определенные по МКЭ, приближенному методу и аналитическому решению, превышают опытные по всему пролету, а определенные по уточненной теории – только на участке 0,25–0,75 пролета. В приопорных участках изгибающие моменты, вычисленные по уточненной теории, меньше, чем определенные экспериментально.

В табл. 11.3 приведены результаты сравнения теоретических и экспериментальных значений распора, стрелы провисания и изгибающих моментов в нити конечной жесткости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки $P = 850$ Н, расположенной в середине пролета (рис. 11.54). Из представленных данных вытекает, что в этом случае наблюдается несколько большая погрешность при определении характеристик напряженно-деформированного состояния нити, чем при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки. Так, погрешность при определении распора по уточненной теории составляет 0,8 %, по МКЭ – 1,1 %, по приближенному методу – 1,3 % и по аналитическому решению – 1,6 %. Погрешность при определении стрелы провисания нити в середине пролета по уточненной теории составляет 1,5 %, по МКЭ – 0,5 %, по приближенному методу – 2,1 % и по аналитическому решению – 1,8 %. При этом, как и в рассмотренном ранее случае с дополнительной равномерно распределенной нагрузкой, погрешность при определении стрелы провисания уточненным и приближенным методами увеличивается при приближении к опорам, а максимального значения достигает в приопорных участках длиной до 0,15 пролета.

Максимальная погрешность при определении изгибающих моментов составляет: по уточненной теории – 12,3 %, по МКЭ – 12,5 %, по приближен-

ному методу – 14,7 % и по аналитическому решению – 16,6 %.

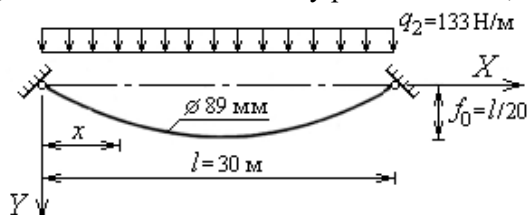


Рис. 11.53. К сопоставлению результатов расчета нити конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Таблица 11.2

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор, $H/\%$	Стрела провисания, см/%	Изгибающий момент, Нм/%
0,0	I	14314,9/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	14343,4/100,2	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	14201,7/99,2	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	14400,8/100,6	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	14361,8/100,3	0,0/100,0	0,0/100,0
0,1	I	14314,9/100,0	48,9/100,0	1531,1/100,0
	II	14343,4/100,2	51,1/103,5	1387,2/90,6
	III	14201,7/99,2	49,0/100,2	1645,0/107,4
	IV	14400,8/100,6	51,6/104,5	1682,0/109,9
	V	14361,8/100,3	49,4/101,0	1694,3/110,7
0,2	I	14314,9/100,0	91,8/100,0	2314,2/100,
	II	14343,4/100,2	93,6/101,9	2182,7/94,3
	III	14201,7/99,2	91,3/99,4	2356,7/101,8
	IV	14400,8/100,6	94,6/103,1	2436,9/105,3
	V	14361,8/100,3	91,7/99,8	2411,4/104,2
0,3	I	14314,9/100,0	124,0/100,0	2568,9/100,0
	II	14343,4/100,2	123,6/99,7	2762,4/107,5
	III	14201,7/99,2	123,3/99,4	2767,2/107,7
	IV	14400,8/100,6	124,6/100,5	2771,6/107,9

	V	14361,8/100,3	123,4/99,5	2764,1/107,6

Окончание табл. 11.2

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор, $H/\%$	Стрела провисания, см/ $\%$	Изгибающий момент, Нм/ $\%$
0,4	I	14314,9/100,0	143,5/100,0	2726,3/100,0
	II	14343,4/100,2	142,2/99,1	2979,8/109,3
	III	14201,7/99,2	143,1/99,7	2964,9/108,8
	IV	14400,8/100,6	142,8/99,5	3020,7/110,8
	V	14361,8/100,3	141,7/98,8	2963,2/108,7
0,5	I	14314,9/100,0	150,1/100,0	2902,6/100,0
	II	14343,4/100,2	148,5/98,9	3039,6/104,7
	III	14201,7/99,2	149,8/99,8	2994,9/103,2
	IV	14400,8/100,6	147,3/98,2	3126,1/107,7
	V	14361,8/100,3	147,8/98,5	3066,1/105,6
Примечание. I – эксперимент [199]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; V – аналитическое решение [62].				

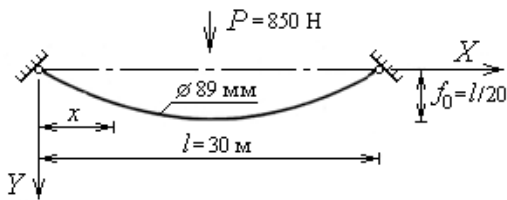


Рис. 11.54. К сопоставлению результатов расчета нити конечной жесткости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки

Таблица 11.3

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор, Н/ $\%$	Стрела провисания, см/ $\%$	Изгибающий момент, Нм/ $\%$
0,0	I	7736,6/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	7796,4/100,8	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	7818,4/101,1	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	7837,2/101,3	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	7861,3/101,6	0,0/100,0	0,0/100,0
0,1	I	7736,6/100,0	46,2/100,0	1030,2/100,0
	II	7796,4/100,8	48,8/104,6	913,8/88,7
	III	7818,4/101,1	46,9/101,5	1135,2/110,2

	IV	7837,2/101,3	49,8/106,2	1147,5/111,4
	V	7861,3/101,6	47,4/102,6	1191,5/115,8

Окончание табл. 11.3

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор, Н/%	Стрела провисания, см/%	Изгибающий момент, Нм/%
0,2	I	7736,6/100,0	88,5/100,0	1790,6/100,0
	II	7796,4/100,8	90,7/102,5	1630,4/91,1
	III	7818,4/101,1	88,8/100,3	1907,4/106,5
	IV	7837,2/101,3	93,0/104,1	1933,3/108,0
	V	7861,3/101,6	89,5/101,1	1917,7/107,1
0,3	I	7736,6/100,0	122,3/100,0	2220,2/100,0
	II	7796,4/100,8	122,3/100,0	2471,5/111,3
	III	7818,4/101,1	122,1/ 99,8	2496,7/112,5
	IV	7837,2/101,3	123,5/101,0	2513,8/113,2
	V	7861,3/101,6	1122,2/ 99,9	2545,9/114,7
0,4	I	7736,6/100,0	144,8/100,0	2890,4/100,0
	II	7796,4/100,8	143,4/ 99,0	3245,9/112,3
	III	7818,4/101,1	144,3/ 99,6	3130,6/108,3
	IV	7837,2/101,3	143,0/ 98,7	3315,3/114,7
	V	7861,3/101,6	142,7/ 98,5	3367,4/116,6
0,5	I	7736,6/100,0	153,2/100,0	3950,1/100,0
	II	7796,4/100,8	152,3/ 99,4	4301,6/108,9
	III	7818,4/101,1	152,9/ 99,5	4127,9/104,5
	IV	7837,2/101,3	150,7/ 98,4	4349,1/110,1
	V	7861,3/101,6	150,4/ 98,2	4399,3/111,4
Примечание. I – эксперимент [199]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; V – аналитическое решение [62].				

Результаты сравнения полученных решений с данными экспериментальных исследований для фермы конечной жесткости с начальной стрелой провисания $f_0 = 2,1$ м при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q_2 = 10080$ Н/м (рис. 11.55) приведены в табл. 11.4. Максимальная погрешность при определении распора в верхнем поясе фермы по уточненной теории составляет 1,3 %, по МКЭ – 1,5 %, по приближенному методу – 2,1 % и по аналитическому решению – 1,5 %. Соответственно для нижнего пояса фермы максимальная погрешность составляет 1,1; 1,3; 1,7 и 1,2 %.

Из табл. 11.4 также видно, что погрешность при определении прогиба в середине пролета составляет: по уточненной теории – 1,0 %, по МКЭ – 0,6 %, по приближенному методу – 1,1 %, по аналитическому решению – 1,2 %.

по приближенному методу – 2,2 % и по аналитическому решению – 1,7 %. Причем максимальная погрешность наблюдается в приопорных участках длиной до 0,15 пролета.

Максимальная погрешность при вычислении изгибающих моментов по уточненной теории составляет 10,7 %, по МКЭ – 9,8 %, по приближенному методу – 12,7 % и по аналитическому решению – 11,9 %.

Анализ приведенных решений показывает, что результаты, полученные по уточненной теории и МКЭ, достаточно близки к экспериментальным данным. Худшее совпадение имеем для результатов, полученных по приближенному методу и аналитическому решению.

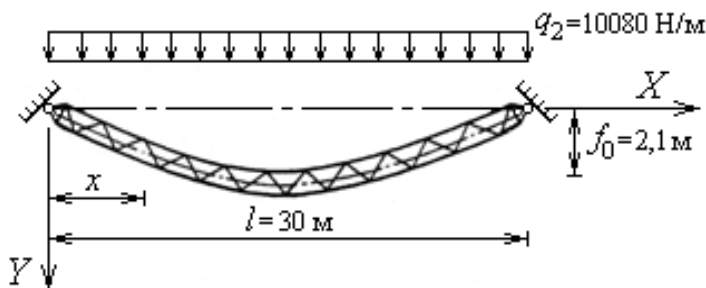


Рис. 11.55. К сопоставлению результатов расчета фермы конечной жесткости при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки

Относительное совпадение результатов, полученных по уточненной и приближенной методикам, а также по МКЭ, с аналитическим решением объясняется выбором расчетных схем нитей конечной жесткости. При увеличении стрелы провисания и сосредоточенной нагрузки, а также при удалении последней от середины пролета погрешность при аналитическом определении усилий и перемещений нити конечной жесткости возрастает.

Таблица 11.4

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор в поясе, Н/%		Прогиб, см/%	Изгибающий момент, Нм/%
		верхнем	нижнем		
0,0	I	191400/100,0	338800/100,0	0,0/100,0	0,0/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	0,0/100,0	0,0/100,0
	III	188529/98,5	334734/98,8	0,0/100,0	0,0/100,0
	IV	195419/102,1	344560/101,7	0,0/100,0	0,0/100,0
	V	194222/101,5	342830/101,2	0,0/100,0	0,0/100,0
	I	191400/100,0	338800/100,0	3,92/100,0	21360/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	4,13/105,3	19073/89,3

0,125	III	188529/98,5	334734/98,8	3,97/101,2	23453/109,8
	IV	195419/102,1	344560/101,7	4,21/107,4	23774/111,3
	V	194222/101,5	342830/101,2	4,05/103,3	23911/111,9

Окончание табл. 11.4

Относительная координата, $\xi = x/l$	Метод решения	Распор в поясе, Н/%		Прогиб, см/%	Изгибающий момент, Нм/%
		верхнем	нижнем		
	I	191400/100,0	338800/100,0	6,99/100,0	32800/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	7,01/100,3	3128/101,0
0,241	III	188529/98,5	334734/98,8	6,93/99,2	34014/103,7
	IV	195419/102,1	344560/101,7	7,21/103,2	35129/107,1
	V	194222/101,5	342830/101,2	6,95/99,4	34571/105,3
0,360	I	191400/100,0	338800/100,0	9,00/100,0	40343/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	8,91/99,0	44337/109,9
	III	188529/98,5	334734/98,8	8,95/99,4	43005/106,6
	IV	195419/102,1	344560/101,7	8,93/99,2	45467/112,7
	V	194222/101,5	342830/101,2	8,91/99,0	44914/111,3
0,5	I	191400/100,0	338800/100,0	9,89/100,0	43380/100,0
	II	193888/101,3	342527/101,1	9,79/99,0	46113/106,3
	III	188529/98,5	334734/98,8	9,83/99,4	45245/104,3
	IV	195419/102,1	344560/101,7	9,67/97,8	47892/110,4
	V	194222/101,5	342830/101,2	9,72/98,3	46417/107,0
Примечание. I – эксперимент [50]; II – уточненная теория; III – МКЭ; IV – приближенный метод; V – аналитическое решение [62].					

На рис. 11.56 показана зависимость дополнительной критической равномерно распределенной нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости плоской формы изгиба фермы конечной жесткости (рис. 11.55), от начальной равномерно распределенной нагрузки. При этом критическая равномерно распределенная нагрузка вычислялась по методике, изложенной в главе 5. Погрешность при определении критической нагрузки достигает 9,3

%. При увеличении начальной нагрузки погрешность несколько уменьшается. Из рис. 11.56 также видно, что график зависимости, построенный с применением предлагаемого метода расчета, носит более выраженный нелинейный характер, чем приведенный в работе [50].

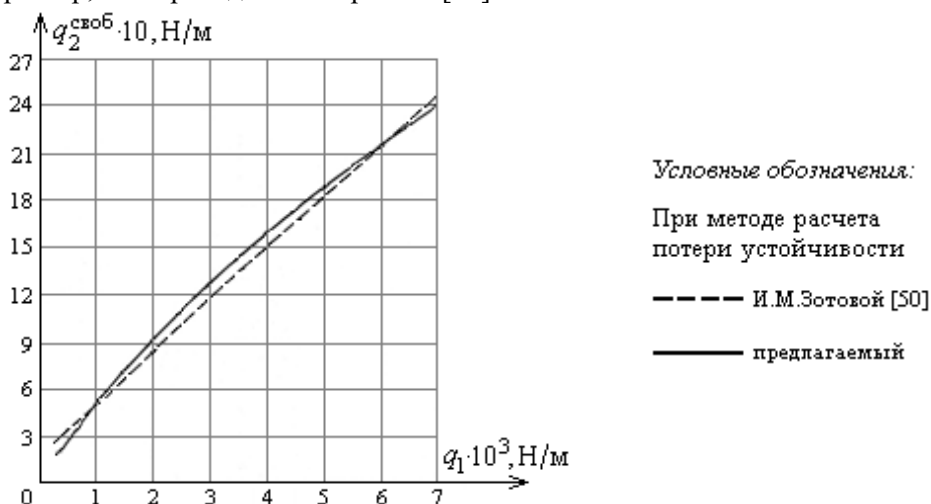


Рис. 11.56. Зависимость дополнительной критической равномерно распределенной нагрузки от начальной равномерно распределенной нагрузки

§ 11.7. Разработка и совершенствование конструктивных решений висячих систем

На основании анализа результатов выполненных исследований и изучения влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости разработаны предложения по совершенствованию конструктивных решений висячих систем повышенной жесткости, включающие вопросы компоновки сооружений, выбора рациональных соотношений геометрических размеров, уменьшения напряжений в конструктивных элементах и пр.

11.7.1. Висячий переход трубопровода. Общеизвестно, что системы висячих переходов трубопроводов имеют недостаточную горизонтальную жесткость пролетного строения. Поэтому при действии ветровой нагрузки могут наблюдаться значительные горизонтальные перемещения трубопровода [63, 64]. Обычно для предупреждения подобного явления конструкция снабжается горизонтальными ветровыми фермами с укрепленными на пилонах консольными ригелями или специальными оттяжками [118]. Однако, недостатком подобного решения является большая материало- и трудоемкость монтажа, обусловленная наличием горизонтальных ветровых конструкций.

Добиться повышения горизонтальной жесткости перехода при одновре-

менном уменьшении его материалоемкости и трудоемкости монтажа можно, располагая поддерживающие канаты под углом как к вертикальной, так и к горизонтальной плоскостям, что позволяет включить их в работу на горизонтальные (ветровые) нагрузки. Указанное расположение поддерживающих канатов в пространстве достигается двумя путями.

1. Канаты выполняются расходящимися от середины пролета к опорам, причем их вертикальная стрела провисания меньше вертикальной стрелы провисания трубопровода (рис. 11.57). При этом соединительные элементы располагаются наклонно в поперечном направлении, а их длина и угол наклона к вертикали увеличиваются от середины пролета к опорам.

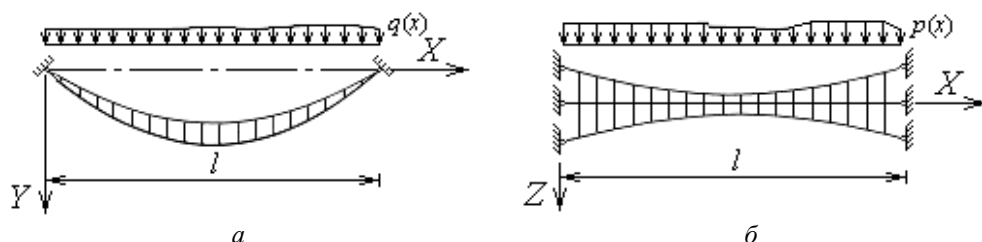


Рис. 11.57. Система с поддерживающими канатами, расходящимися от середины пролета к опорам с повышенной жесткостью на изгиб в горизонтальной плоскости: *а* – вертикальная проекция; *б* – горизонтальная проекция

2. Канаты выполняются расходящимися от опор к середине пролета, где между ними устанавливается балка-распорка, перпендикулярная продольной оси перехода и воспринимающая горизонтальную составляющую распора в канатах (рис. 11.58). При этом соединительные элементы, как и в первом случае, располагаются наклонно, только если угол их наклона к вертикали увеличивается по-прежнему от середины пролета к опорам, то длина увеличивается в противоположном направлении – от опор к середине пролета.

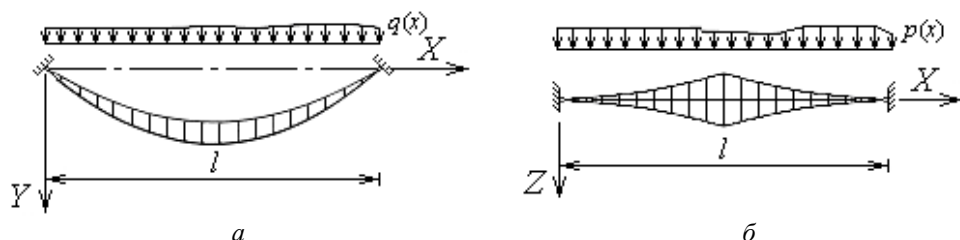


Рис. 11.58. Система с поддерживающими канатами, расходящимися от опор к середине пролета с повышенной жесткостью на изгиб в горизонтальной плоскости: *а* – вертикальная проекция; *б* – горизонтальная проекция

11.7.2. Висячее покрытие повышенной жесткости. Предложена новая

конструкция прямоугольного в плане висячего покрытия повышенной жесткости промышленных и гражданских зданий, отличающаяся от запроектированных малой материалоемкостью и строительной высотой (рис. 11.59). Покрытие содержит наружный и внутренние опорные контуры, стороны которых взаимно параллельны. Внешний опорный контур опирается на угловые колонны, которые выполнены выше уровня покрытия. В углах внутренних опорных контуров установлены пилоны, верхушки которых соединены между собой вдоль диагонали висячего покрытия и прикреплены к верхушкам соответствующих угловых колонн связями.

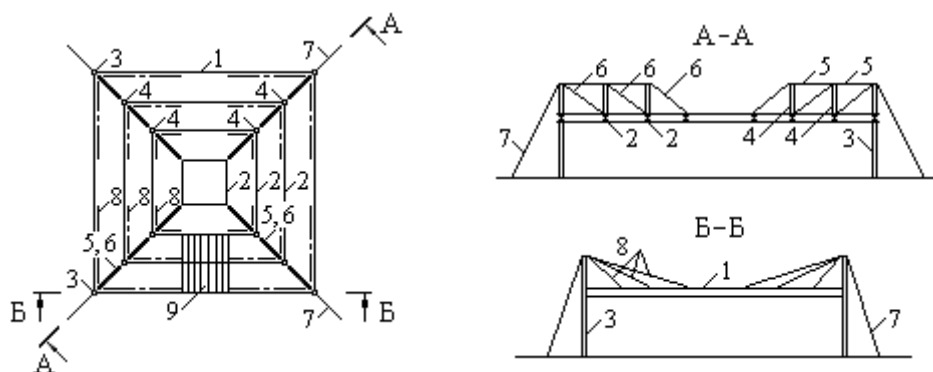


Рис. 11.59. Висячее покрытие:

1 – наружный опорный контур; 2 – внутренний опорный контур; 3 – угловая колонна; 4 – пилон; 5 – связь; 6 – несущий диагональный элемент; 7 – наклонная оттяжка; 8 – подвеска; 9 – плита перекрытия

Для повышения жесткости покрытия в уровне наружного и внутренних опорных контуров могут быть установлены несущие диагональные элементы, выпущенные за пределы здания и заанкеренные к фундаментам угловых колонн наклонными оттяжками. Каждый внутренний опорный контур в углах поддерживается подвеской, нисходящей с верхушки пилона, установленного на предыдущем от наружного внутреннем контуре. Наружный и внутренние опорные контуры поддерживаются в пролете подвесками, нисходящими с верхушки соответствующего пилона или угловой колонны. На верхние пояса наружного и внутренних опорных контуров опираются плиты покрытия.

Предлагаемое висячее покрытие обладает повышенной жесткостью, что допускает устройство подвесного транспорта с эффективной его работой как вдоль, так и поперек здания, а также позволяет осуществить унификацию и типизацию используемых конструктивных элементов.

11.7.3. Способ монтажа висячего покрытия. Предложен способ монтажа висячего покрытия зданий и сооружений, несущими конструкциями которого являются висячие фермы повышенной жесткости. Пояса таких ферм,

как правило, выполняют из элементов достаточно гибких, но обладающих по сравнению с нитями повышенной жесткостью и способных воспринимать сжимающие усилия, не выключаясь из работы [65, 67, 103]. Несмотря на наличие таких элементов, указанные фермы обладают заметной деформативностью, особенно при неравномерных нагрузках. Именно поэтому существуют различные способы обеспечения жесткости рассматриваемых висячих покрытий [41], но они имеют серьезный недостаток – повышенную трудоемкость производства работ. Устранить указанный недостаток можно монтируя фермы участками, в каждом из которых верхние пояса объединяют между собой и с опорами шарнирно, нижние пояса выполняют разрывными, а после пригружения покрытия соединяют участки ферм по нижним поясам жесткими вставками.

Монтаж конструкций покрытия осуществляется в следующей последовательности (рис. 11.60). Участки висячих ферм, соединенных между собой в уровне верхнего пояса шарнирами, поднимают в проектное положение и крепят к опорам (рис. 11.60, *а*). Затем в уровне нижнего пояса ферм устанавливают горизонтальные связи, а на их верхние пояса укладывают и закрепляют плиты перекрытия (рис. 11.60, *б*). После этого выполняется пригружение покрытия (как правило, в уровне нижнего пояса ферм) временной нагрузкой, равной или близкой расчетной (рис. 11.60, *в*). На следующем этапе производится заглушение шарниров путем соединения нижних поясов участков ферм между собой с помощью жестких вставок соответствующей длины (рис. 11.60, *г*). И, наконец, на последнем этапе снимают ранее уложенный пригруз (рис. 11.60, *д*).

Таким образом, наряду с уменьшением трудоемкости монтажа (в частности, отсутствуют такие принятые операции, как предварительное специальное обжатие высокопрочными канатами или замоноличивание стыков плит перекрытия) геометрия висячей фермы оказывается зафиксированной в положении, соответствующем действию временной нагрузки. Тем самым кинематическая податливость фермы оказывается в значительной степени исчерпанной, что благоприятно сказывается на работе висячего покрытия в целом.

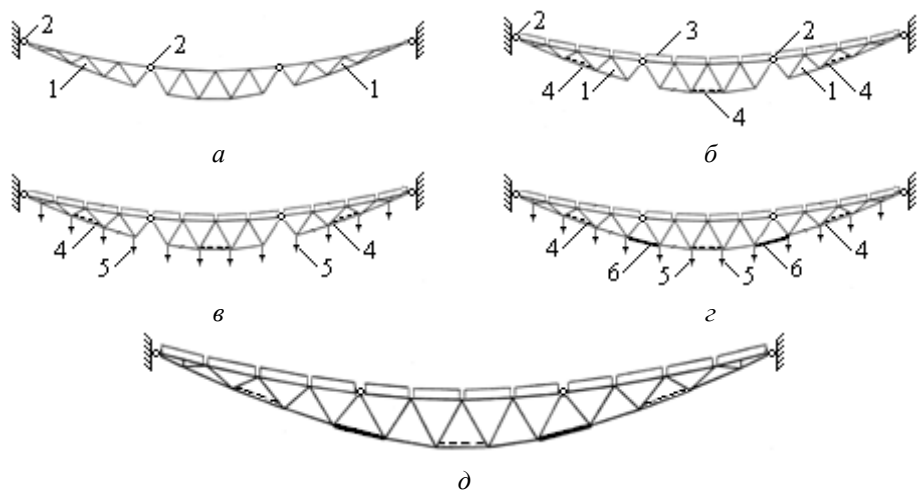


Рис. 11.60. Этапы монтажа (а–д) висячего покрытия повышенной жесткости:

1 – участок висячей фермы; 2 – шарнир; 3 – плита перекрытия;

4 – связь; 5 – временная нагрузка; 6 – жесткая вставка

11.7.4. Подпорная стенка с поперечными гибкими несущими элементами. Наряду со стандартными подходами анализ результатов выполненных исследований позволил также сформулировать нетрадиционные подходы в применении висячих систем (в т. ч. повышенной жесткости) и разработать с их использованием новые конструктивные решения.

Одним из таких предложенных нетрадиционных решений является новая конструкция подпорной стенки, включающая вертикальные опоры, анкерные плиты и прикрепленную к ним соответственно верхними и нижними концами парусную оболочку, пригруженную грунтом обратной засыпки (рис. 11.61).

Подпорная стенка выполнена из сборных железобетонных элементов – анкерных плит и установленной на них вертикальной передней стенки. Верхушка передней стенки и задний конец анкерных плит соединены расположенными вдоль подпорной стенки поперечными гибкими несущими элементами из канатов (круглой стали, полос и т. п.). По несущим элементам уложены с зазором между ними сборные железобетонные плиты. Причем плиты располагаются не по всей длине несущих элементов, а только в пределах призмы обрушения (в зоне воздействия грунта обратной засыпки), что соответствует в зависимости от свойств грунта примерно половине длины несущих элементов. При этом размеры зазоров назначаются предельно допустимыми из условия исключения передачи части распора засыпки на переднюю стенку. С учетом угла внутреннего трения грунта, т. е. геометрии призм обрушения (на рис. 11.61 условно не показаны) в зазорах, размеры имеют такой же порядок, как и высота железобетонных плит. Во избежание сползания плит вниз на несущих элементах устроены упоры. Для максимального обжатия передней стенки угол α между вертикалью и касательной к оси несущего элемента у примыкания к передней стенке принимается минимальным (не

более 10°), а угол β наклона анкерных плит – стандартным (обычно 7°).

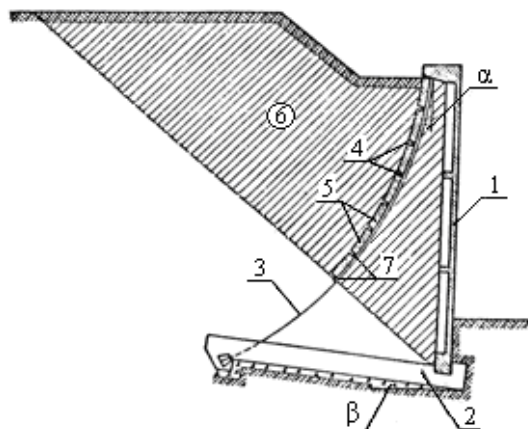


Рис. 11.61. Поперечный разрез подпорной стенки:

1 – передняя стенка; 2 – анкерная плита; 3 – гибкий несущий элемент; 4 – зазор; 5 – сборные железобетонные плиты; 6 – грунт обратной засыпки; 7 – упоры

Подпорная стенка работает следующим образом. Давление массы грунта обратной засыпки через железобетонные плиты передается на несущие элементы и вызывает в них усилия растяжения. Передняя стенка при минимальном значении угла α воспринимает, в основном, вертикальную составляющую распора в несущих элементах и работает на сжатие. Поскольку железобетонные плиты располагаются в пределах призмы обрушения, исключается передача на стенку горизонтальной составляющей нагрузки от распора грунта обратной засыпки. Передняя стенка и анкерные плиты совместно с несущими элементами образуют замкнутый контур, который и воспринимает действующую в них горизонтальную составляющую распорных усилий. Вертикальная составляющая этих усилий через переднюю стенку пригружает анкерные плиты, увеличивая тем самым силы трения бетона по грунту.

Таким образом, в описанной конструкции железобетонные плиты работают преимущественно на сжатие. Отсутствуют значительные сосредоточенные нагрузки. Вертикальная составляющая распора используется для пригружения через переднюю стенку анкерных плит, повышая способность последних воспринимать горизонтальную составляющую распора. Величина самого распора получается существенно меньше благодаря тому, что парусная оболочка выполняется не сплошной, а в виде дискретных нитей, а также в связи с ограничением зоны размещения железобетонных плит с помощью упоров. В результате достигается возможность значительного уменьшения сечения элементов, исключения трудоемких работ при монтаже по забивке мощных свай и повышения степени заводской готовности конструкции.

11.7.5. Резервуар со стенкой в виде цилиндрической оболочки, провисающей подобно нити конечной жесткости. Следующим нетрадицион-

ным решением является новая конструкция резервуара для хранения жидких продуктов, стенка которого представляет собой цилиндрическую оболочку, провисающую в виде нити конечной жесткости (рис. 11.62).

Резервуар является многоугольным в плане. Стенка и днище по каждой стороне многоугольника выполняются из совместно рулонированного на заводе полотна и крепятся, соответственно, к наружному опорному контуру и свободно обхватывающей центральную колонну трубчатой обойме, на оголовке которой устанавливается внутренний опорный контур. К последнему крепятся радиальные ванты, поддерживающие наружный опорный контур. Значение угла α примыкания провисающей по кривой нити конечной жесткости стенки к наружному опорному контуру находится в диапазоне $0,5 < \operatorname{tg} \alpha < 1,5$. По вантам укладывается кровля, а стенки соединяются между собой компенсаторами с целью исключения кольцевых напряжений. Указанное решение обеспечивает повышенную надежность при неравномерных осадках основания за счет приварки полотенц лепестков днища к трубчатой обойме, а при сейсмических воздействиях – за счет возможности изменения геометрической формы резервуара, принимающей такое очертание, при котором усилия в несущих элементах будут минимальными.

Для уменьшения кинематических перемещений рулонированных полотенц стенок при выкачке и закачке жидкости по высоте резервуара в местах наибольших положительных и отрицательных ординат эпюры кинематических перемещений стенок резервуара устанавливаются параллельно днищу два кольца жесткости: наружное и внутреннее. Наружное кольцо крепится к стенкам на расстоянии $1/4 - 1/3$ высоты от днища резервуара до наружного опорного контура в зоне наибольших положительных кинематических перемещений оболочки и работает на растяжение. Конструктивно оно представляет собой полосу, площадь сечения которой определяется из расчета предотвращения кинематических перемещений оболочки наружу резервуара при полной выкачке продукта. Внутреннее кольцо жесткости крепится к стенкам с внутренней стороны резервуара на расстоянии $2/3 - 3/4$ его высоты до наружного опорного контура в зоне наибольших отрицательных кинематических перемещений оболочки и работает на сжатие. Кольцо выполняется коробчатого или двутаврового поперечного сечения, площадь которого принимается из расчета предотвращения кинематических перемещений оболочки внутрь резервуара при полной выкачке продукта.

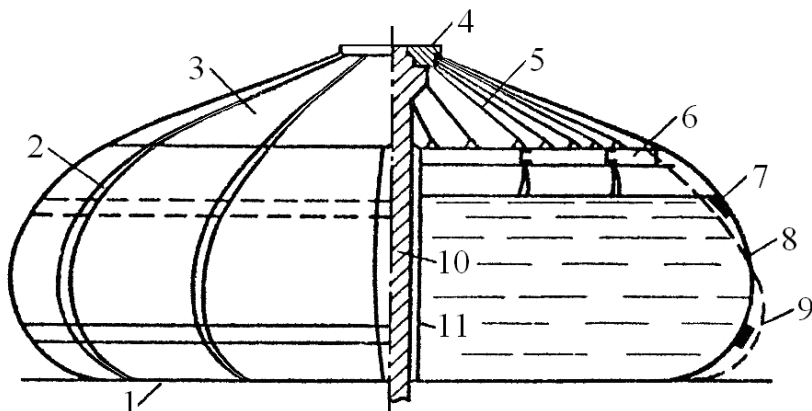


Рис. 11.62. Фасад и поперечное сечение резервуара

с эпюрой кинематических перемещений (штриховая линия):

- 1 – днище; 2 – компенсаторы; 3 – кровля; 4 – внутренний опорный контур;
 5 – радиальная ванта; 6 – наружный опорный контур; 7 – внутреннее кольцо жесткости;
 8 – стенка; 9 – наружное кольцо жесткости; 10 – центральная колонна;
 11 – трубчатая обойма

Каждое из колец жесткости может не крепиться к стенкам, а быть подвешено к наружному опорному контуру на указанной высоте с непосредственным примыканием к стенкам резервуара. Причем в обоих кольцах жесткости возникают сравнительно небольшие усилия, поскольку основная нагрузка на них зависит от кинематических перемещений стенок резервуара при отсутствии в нем продукта. По мере заполнения резервуара продуктом усилия в кольцах жесткости будут уменьшаться.

Также необходимо отметить, что параметры расстановки колец жесткости связаны с положением максимальных положительных (наружу резервуара) и отрицательных (внутри резервуара) ординат эпюры кинематических перемещений цилиндрической оболочки (эпюра показана штриховой линией на рис. 11.62), построенной на основании результатов численного расчета резервуара с учетом жесткости цилиндрической оболочки. Аналогичные результаты были также достигнуты при исследовании нитей конечной жесткости, являющихся расчетной моделью висячей цилиндрической оболочки – стенки резервуара.

Установленные в указанных зонах, кольца жесткости фиксируют проектное положение стенок резервуара при действии расчетной нагрузки, независимо от того закачан или выкачан из резервуара продукт. При этом наружное кольцо жесткости предотвращает кинематические перемещения цилиндрической оболочки наружу резервуара при полной выкачке продукта, а верхнее кольцо – препятствует кинематическим перемещениям оболочки внутрь резервуара.

Таким образом, в резервуаре предлагаемой конструкции за счет установки колец жесткости в указанных зонах достигается возможность суще-

ственно (более чем на порядок) снизить кинематические перемещения стенок при выкачке продукта, т. е. практически зафиксировать проектную геометрию цилиндрической оболочки при расчетной нагрузке (заполненном продуктом резервуаре). Например, установлено, что установка даже одного наружного нижнего кольца жесткости позволяет уменьшить ординаты эпюры кинематических перемещений в верхней части резервуара в 4 – 6 раз. Тем самым появляется возможность значительно упростить конструкцию компенсаторов между стенками резервуара и повысить его надежность.

ГЛАВА 12

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

§ 12.1. Висячий трубопроводный переход нефтепровода

На линии нефтепровода Чимкент – Чарджоу запроектирован двухниточный трубопроводный переход через р. Амударью с пролетом 950 м, стрелой провисания 70 м и диаметром труб 630 мм (рис. 12.1, *а*). Предложенное решение обеспечивает необходимую несущую способность и повышенную жесткость пролетной конструкции. Это достигается тем, что несущие канаты очерчены по пространственным кривым, имеющим наклон как к горизонтальной под углом $56^{\circ}12'$, так и к вертикальной под углом $33^{\circ}88'$ плоскостям. Трубопровод крепится к несущим канатам посредством тросовых стяжек, расположенных с шагом 40 м. Посередине пролета расстояние между канатами составляет 6 м. В поперечном сечении тросовые стяжки располагаются наклонно, причем их длина и угол наклона к вертикали возрастают от середины пролета к опорам. Пилоны приняты V-образными с шарнирным креплением к опорам. Отметка верха пилона над уровнем земли равна 115 м.

В качестве расчетной принята дискретная модель, в которой несущие канаты, оттяжки пилонов, тросовые стяжки и поперечные элементы по верху пилонов представляются растянуто-напряженными стержневыми элементами, пилоны – шарнирно соединяемыми стержнями, способными воспринимать растяжение-сжатие, а трубопровод – стержневыми элементами, воспринимающими усилия растяжения-сжатия и изгиба.

Схема разбивки вантово-стержневой системы трубопроводного перехода нефтепровода на конечные элементы изображена на рис. 12.1, *б*. Порядок нумерации узлов дискретной модели и ориентация осей глобальной системы координат также понятны из рис. 12.1, *б*.

Остановимся теперь на действующих нагрузках и воздействиях. Расчет трубопроводного перехода производился при четырех схемах нагружения:

- 1 – собственный вес перехода ($q_1 = 6,08$ кН/м);
- 2 – несимметричное нагружение: собственный вес, нагрузка от снега ($q_c = 0,33$ кН/м), вес нефти на половине пролета ($q_n = 4,87$ кН/м) и изменение температуры ($\Delta t = 22^{\circ}\text{C}$);
- 3 – симметричное нагружение: собственный вес, нагрузка от снега, вес нефти на всем пролете и изменение температуры;
- 4 – дополнительное сочетание нагрузок: симметричное нагружение плюс ветровая нагрузка ($q_v = 0,99$ кН/м).

Отметим также, что при 1-й схеме нагружения вся нагрузка от собственного веса перехода воспринимается только канатами. При других же

схемах труба и несущие канаты работают как единая конструктивная система.

Далее перейдем к анализу напряженно-деформированного состояния трубопроводного перехода нефтепровода. Значения усилий, возникающих в канатах и в трубе при различных схемах нагружения трубопроводного перехода, приведены в табл. 12.1 и 12.2. Из них видно, что несимметричная нагрузка (2-я схема нагружения), существенно влияя на величины усилий в трубе, почти не сказывается на распределении усилий в несущих канатах. И, наоборот, ветровая нагрузка (4-я схема нагружения), почти не сказываясь на усилиях в трубе, значительно влияет на усилия в канатах. При этом усилия в канатах, расположенных с наветренной стороны, по сравнению с 3-й схемой нагружения увеличиваются, а в канатах, расположенных с подветренной стороны, – уменьшаются.

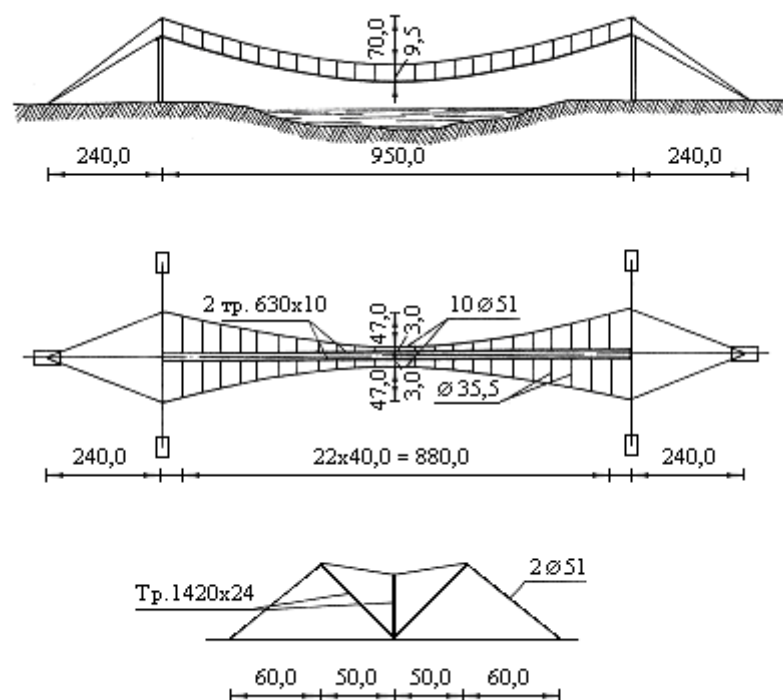
Таблица 12.1

Схема нагружения	Труба					
	продольное усилие, кН			изгибающий момент, кНм		
	середина пролета	узел примыкания к пилону		середина пролета	четверть пролета	
		левому	правому		левая	правая
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	917,71	776,0	1352,94	142,86	96,86	185,85
3	2152,46	2387,63	2387,63	147,95	129,54	129,54
4	2142,09	2374,89	2374,89	144,13	125,17	125,17

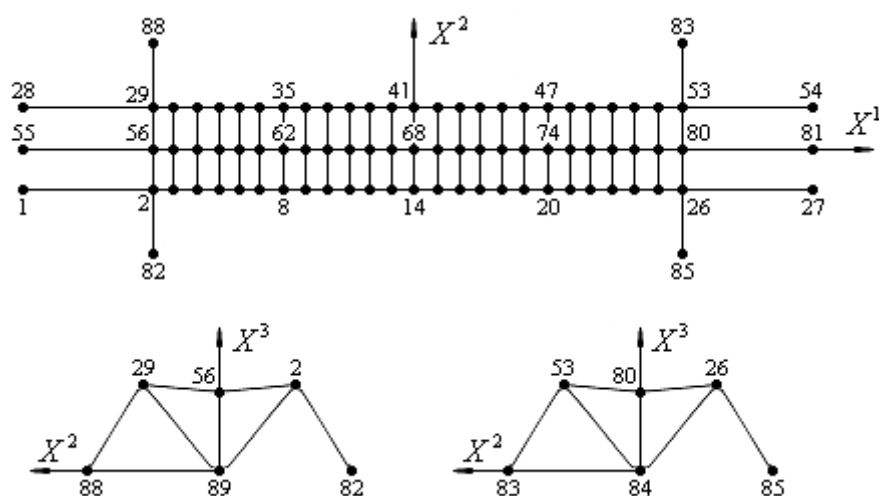
Таблица 12.2

Схема нагрузки	Канаты					
	с наветренной стороны			с подветренной стороны		
	продольные усилия, кН					
	середина пролета	узел примыкания к пилону		середина пролета	узел примыкания к пилону	
		левому	правому		левому	правому
1	5783,37	6218,79	6218,79	5783,37	6218,79	6218,79
2	7238,19	7739,60	7717,44	7238,19	7739,60	7717,44
3	8086,07	8660,45	8660,45	8086,07	8660,45	8660,45

4	9028,0	9678,18	9678,18	7178,27	7684,59	7684,59



a



б

Рис. 12.1. Конструктивная (а) и топологическая с нумерацией узлов (б) схемы висячего трубопроводного перехода нефтепровода

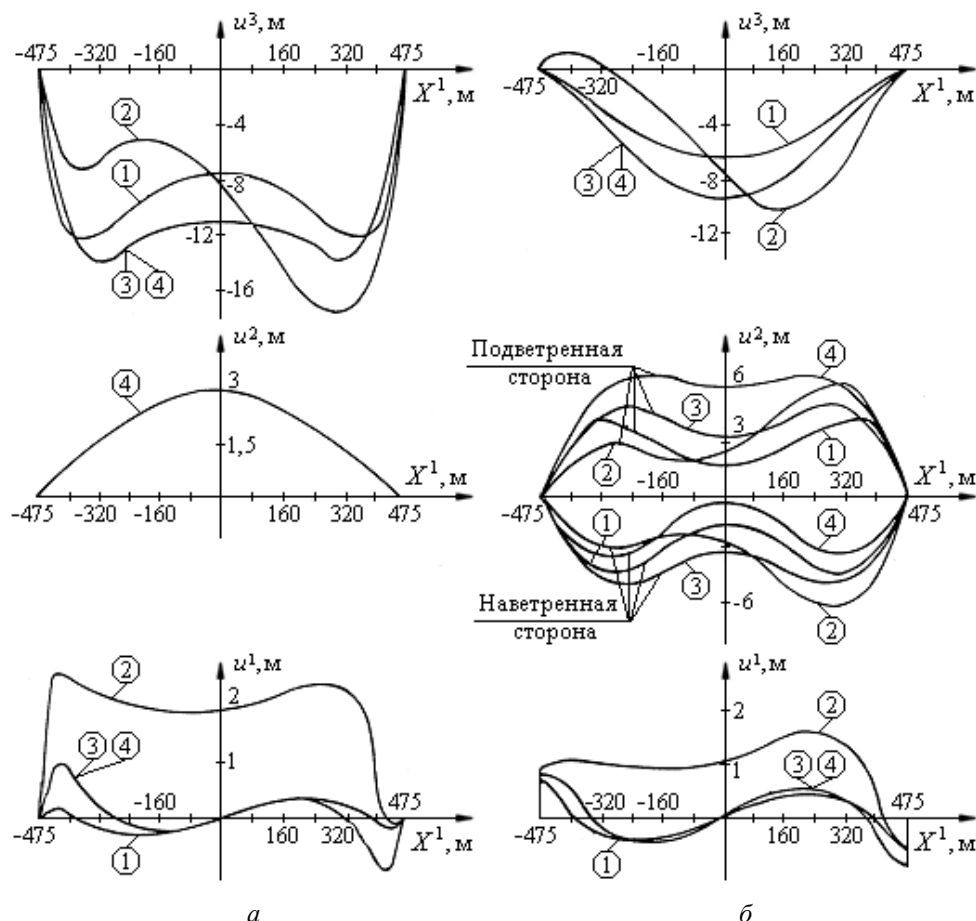


Рис. 12.2. Эпюры перемещений конструктивных элементов висячего трубопроводного перехода нефтепровода при различных схемах нагружения: а – труба; б – канаты; 1 – собственный вес; 2 – несимметричное нагружение; 3 – симметричное нагружение; 4 – дополнительное сочетание нагрузок

Эпюры перемещений конструктивных элементов нефтепровода, полученные в результате расчетов, изображены на рис. 12.2. Из анализа этих эпюр следует, что перемещения трубы в вертикальной плоскости u^3 и вдоль оси трубопроводного перехода u^1 при 3-й и 4-й схемах нагружения совпадают.

Эти же перемещения и при этих же видах нагружения совпадают и для канатов. Кроме того, перемещения трубы и канатов в вертикальной плоскости и вдоль оси трубопровода при 1-й, 3-й и 4-й схемах нагружения имеют одинаковый характер.

Перемещения трубы в вертикальной плоскости и вдоль оси трубопроводного перехода достигают наибольших значений в четвертях пролета для 1-й, 3-й и 4-й схем нагружения. Указанное объясняется тем, что если в середине пролета перемещения зависят в основном от упругих деформаций нити,

то в четвертях пролета велико значение кинематических перемещений, т. е. перемещений за счет изменения формы кривой провисания нити. Это особенно хорошо видно при 2-й схеме нагружения – перемещения трубы вдоль оси перехода u^1 в 5 раз больше (за счет изменения формы равновесия), чем в остальных схемах.

Эпюры перемещений трубы и канатов в горизонтальной плоскости u^2 также показаны на рис. 12.2. Из приведенных эпюр видно, что оба каната при 1-й, 2-й и 3-й схемах нагружения деформируются симметрично относительно оси трубопроводного перехода. При действии же ветровой нагрузки (4-я схема нагружения) величины перемещений обоих канатов в горизонтальной плоскости приблизительно одинаковы, но если абсолютные значения перемещений каната, находящегося с наветренной стороны, уменьшаются, то для каната с подветренной стороны – увеличиваются.

Труба при 1-й, 2-й и 3-й схемах нагружения деформируется только в вертикальной плоскости. При действии ветровой нагрузки максимальное отклонение трубы от вертикали наблюдается посередине пролета и равно 3 м, что составляет 1/317 пролета.

Результаты исследования напряженно-деформированного состояния пространственной вантово-стержневой системы висячего трубопроводного перехода нефтепровода свидетельствуют о том, что предложенное конструктивное решение обеспечивает высокую несущую способность и жесткость пролетной конструкции перехода как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях, а усилия и перемещения при всех четырех схемах нагружения находятся в допустимых пределах.

§ 12.2. Висячее покрытие универсального спортивно-зрелищного зала

С использованием разработанной методики расчета исследовано напряженно-деформированное состояние висячего комбинированного покрытия универсального спортивно-зрелищного зала (УСЗЗ) на 10500 зрительских мест в г. Алматы. Несущая система представляет собой пространственную большепролетную ферменную конструкцию с мембранным покрытием (рис. 12.3).

Ферменная конструкция состоит из двух наклонных под углом 40° рам, каждая из которых включает два пилона и соединяющий их ригель, двух трехгранных ферм и связевых ферм центральной части. При этом пилоны, трехгранные фермы и ригели имеют решетчатое пространственное поперечное сечение. Мембранное покрытие состоит из центральной оболочки и четырех оболочек боковых пролетов, выполненных из стальной мембраны. Оболочка центральной части имеет нулевую, а оболочки боковых пролетов – отрицательную гауссову кривизну. Причем для формообразования последних используется ортогональная сетка, образованная направляющими нитями (висячими нитями конечной жесткости) и поперечными прогонами. Мембранное покрытие боковых пролетов крепится к овальному в плане упруго-податливому внешнему опорному контуру, выполненному из сварного двутавра и опертому на железобетонные консоли трибун.

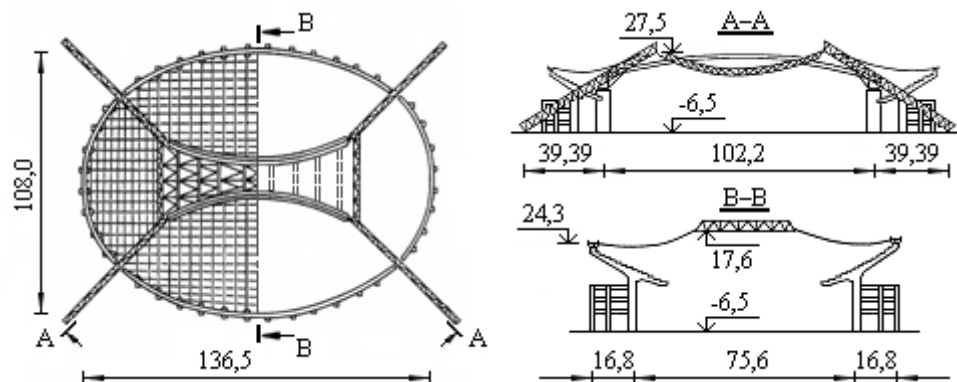


Рис. 12.3. Конструктивная схема покрытия универсального спортивно-зрелищного зала

Две шарнирно подвешенные трехгранные висячие фермы служат внутренними опорными контурами оболочек соответствующих боковых пролетов и наклонены под углом $30^{\circ}40'$ к вертикальной плоскости. Этот конструктивный прием обеспечивает работу внутреннего опорного контура одновременно по двум схемам: по вертикали – висячей фермы конечной жесткости, а по горизонтали – двухшарнирной арки. Для двух других оболочек боковых пролетов внутренними опорными контурами являются соединяющие пилоны ригели. Боковыми же опорными контурами для всех оболочек боковых пролетов служат пилоны.

Ввиду двухсторонней симметрии конструктивной схемы покрытия УСЗЗ, а также учитывая симметрию действующих нагрузок, в качестве расчетной принята 1/4 часть покрытия (рис. 12.4, а). При этом горизонтальная плоскость глобальной системы координат проходит через узлы опирания пилонов на поддерживающие стойки, где конструктивно обеспечены условия работы, эквивалентные жесткому защемлению.

В расчетной схеме мембранная оболочка представляется набором мембранных четырехугольных конечных элементов, толщина которых определяется в результате учета листовой мембраны и «размазывания» прогонов, исходя из эквивалентной цилиндрической жесткости конструкции мембраны с прогонами и гладкой тонкой оболочки. Ферменные элементы несущей системы – пилоны, трехгранные фермы, ригели и связевые фермы, а также направляющие нити и опорный контур представляются стержневыми конечными элементами прямоугольного поперечного сечения, воспринимающими усилия растяжения-сжатия и изгиба. Их параметры устанавливаются с учетом эквивалентного «размазывания» стержневых элементов покрытия. Для каждого типа конечных элементов определяются соответствующие размеры поперечного сечения и эквивалентный модуль упругости, обеспечивающие равенство цилиндрических и изгибных жесткостных характеристик расчетных и реальных конструктивных элементов. По осям симметрии фрагмента наложены связи на соответствующие перемещения узлов, опорный контур покрытия закреплен от смещения по третьему направлению, а узлы опирания пилон закреплены жестко.

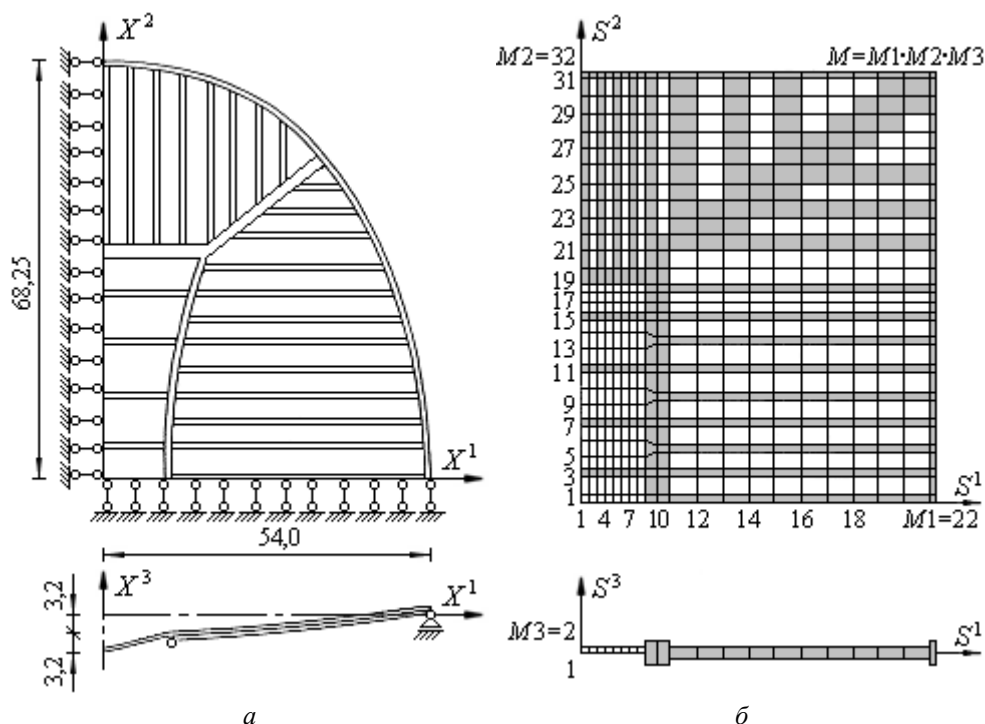


Рис. 12.4. Расчетная (а) и топологическая с нумерацией координатных линий сеточной области (б) схемы покрытия универсального спортивно-зрелищного зала

При описании топологической структуры конечноэлементной модели покрытия расчетная схема отображается на прямоугольную сеточную область с координатами S^1 , S^2 , S^3 и единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов модели: в плане от 1 до $M1 = 22$ и от 1 до $M2 = 32$, по толщине оболочки от 1 до $M3 = 2$, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели ясен из рис. 12.4, б, на котором также участки повышенной жесткости отмечены темным тоном.

Расчет конструкции покрытия проводился на два сочетания нагрузок и воздействий: статическое (собственный вес покрытия с учетом кратковременной и снеговой нагрузок) с суммарной интенсивностью равномерно распределенной нагрузки $q = 4 \text{ кН/м}^2$ и динамическое при расчетной сейсмичности района строительства 9 баллов.

Составляющие сейсмической нагрузки $S_{ij}(x^1, x^2)$ для двухмерной области комбинированного висячего покрытия в ij -м направлении вычислялись согласно работам [83, 145] по формуле

$$S_{ij}(x^1, x^2) = q(x^1, x^2) K_c \mu(x^1, x^2) \eta_{ij}(x^1, x^2) \beta_{ij}, \quad (12.1)$$

где $q(x^1, x^2)$ – функция распределения нагрузки по покрытию; K_c – коэффициент

сейсмичности; $\mu(x^1, x^2)$ – функция распределения переносного движения по покрытию; $\eta_{ij}(x^1, x^2)$ – коэффициент формы колебаний системы; β_{ij} – коэффициент динамичности, характеризующий динамический эффект сейсмического воздействия; i, j – число полуволов в продольном и поперечном направлениях.

Выражение для коэффициента формы колебаний висячего покрытия можно записать в виде

$$\eta_{ij}(x^1, x^2) = \frac{\Phi_{ij}(x^1, x^2) \int_S m(x^1, x^2) \mu(x^1, x^2) \Phi_{ij}(x^1, x^2) dx^1 dx^2}{\mu(x^1, x^2) \int_S m(x^1, x^2) \Phi_{ij}^2(x^1, x^2) dx^1 dx^2}, \quad (12.2)$$

где $m(x^1, x^2)$ – функция распределения массы системы; $\Phi_{ij}(x^1, x^2)$ – функция формы собственных колебаний покрытия, а его значение определяется на основе численного интегрирования инвариантных динамических характеристик для дискретной конечноэлементной модели покрытия.

Функция распределения переносного движения в каждом конкретном случае может быть представлена в соответствии с рекомендациями [83], причем формула для определения коэффициента динамичности имеет вид:

$$\beta_{ij} = \Delta\beta_{ij}/T_{ij} = \Delta\beta_{ij}\omega_{ij}/2\pi, \quad (12.3)$$

где $\Delta\beta_{ij}$ – поправка к коэффициенту динамичности, отражающая уменьшение характеристики затухания висячих мембранно-стрепневых оболочек по сравнению со значением, принятым в действующих нормах [83]; T_{ij} – период собственных колебаний; ω_{ij} – частота собственных колебаний.

Спектр собственных частот и соответствующий им спектр форм собственных колебаний комбинированного висячего покрытия можно найти из решения так называемого векового уравнения, получаемого из соотношения (10.23) при $[C] = 0$ при использовании стандартной схемы. При этом задача вычисления форм собственных колебаний дискретной конечноэлементной модели решается методом итераций подпространства.

Для нахождения максимальной величины сейсмической нагрузки, как показано в работе [83], в формуле (12.1) достаточно удержать только один член, зависящий от низшей формы колебаний, т. е. $S_{11}(x^1, x^2)$. Значение функции $\mu(x^1, x^2) = 1$, поскольку в этом случае ускорение переносного движения для всех точек колеблющейся системы одинаково. Кроме того было также принято, что $K_c = 0,1$ и $\Delta\beta_{ij} = 3,5$.

О характере напряженно-деформированного состояния покрытия при сейсмическом нагружении можно судить по результатам, отраженным на рис. 12.5–12.7. Опорный контур по всей своей длине оказался сжатым и практически безизгибным. Это подтверждается тем, что если максимальные сжимающие усилия равны $N = 5660$ кН, то изгибающие моменты не превышают $M = 192$ кНм и почти не сказываются на его напряженном состоянии. Последнее свидетельствует о том, что очертание опорного контура покрытия

близко к оптимальному. Отметим также, что перемещения контура в горизонтальной плоскости достигают наибольших значений в 43 и в 1365 узлах и соответственно равны $u^1 = -11,4$ см и $u^2 = -4,9$ см.

Наиболее нагруженным элементом несущей системы УСЗЗ является трехгранная ферма, значение продольного усилия в которой находится в пределах от $N = -9910$ кН до $N = 8800$ кН, а изгибающих моментов – от $M = -19430$ кНм до $M = 9020$ кНм. Соответственно сжимающие напряжения в верхнем поясе фермы достигают величины $\sigma_v = 24$ МПа, а растягивающие в нижнем – $\sigma_n = 75,6$ МПа. Перемещения узла опирания фермы на пилон равны $u^1 = -0,58$ см, $u^2 = -16,31$ см и $u^3 = -25,69$ см, а прогиб фермы в центральной точке составляет $u^3 = 77,91$ см.

Возникающие в направляющих нитях продольные усилия и изгибающие моменты почти по всему пролету нити относительно невелики и только в местах примыкания к опорному контуру их значения резко (в 5 – 10 раз) увеличиваются. Максимальные величины растягивающего усилия и изгибающего момента наблюдаются в совпадающей с осью X^1 нити и составляют $N = 1999$ кН и $M = 163$ кНм. Соответствующие данным силовым факторам напряжения в верхнем и нижнем поясах нити $\sigma_v = 413$ МПа, $\sigma_n = -210$ МПа при расчетном сопротивлении материала $R_y = 215$ МПа.

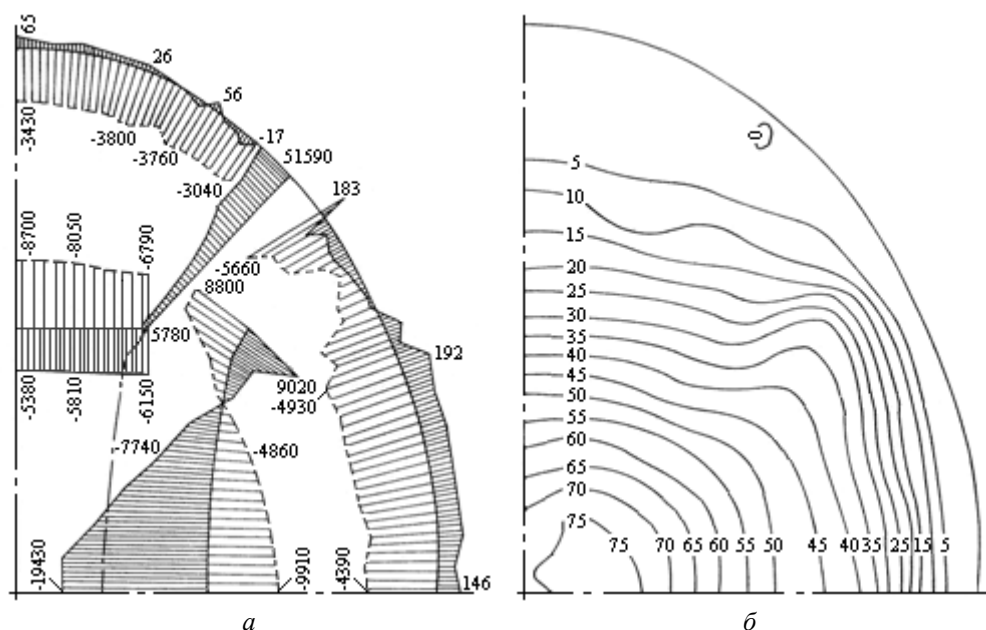


Рис. 12.5. К расчету покрытия универсального спортивно-зрелищного зала при статических и сейсмических нагрузках:

a – эпюры N (---), кН, и M (—), кНм, в несущих элементах покрытия;
 b – изолинии u^3 , см

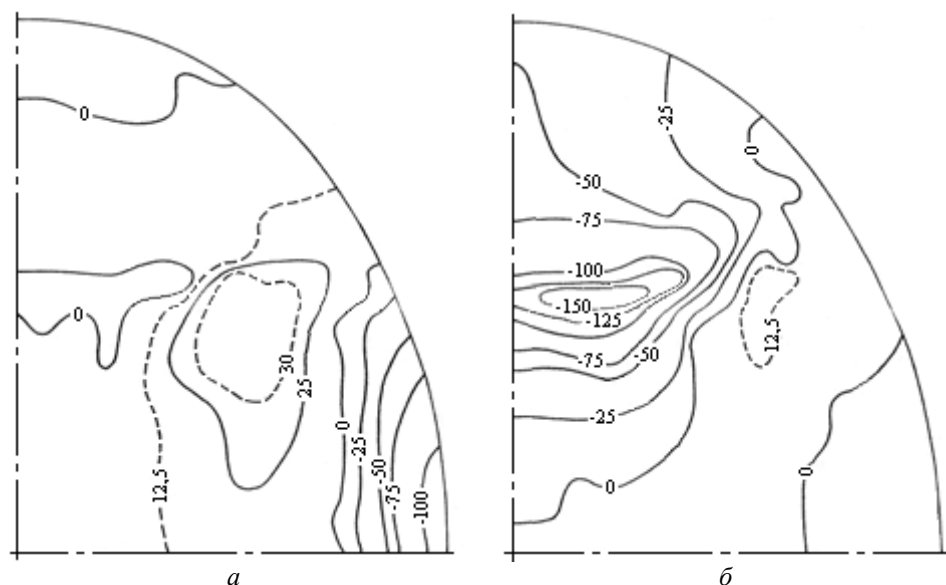


Рис. 12.6. К расчету покрытия универсального спортивно-зрелищного зала при статических и сейсмических нагрузках:

a – изолинии $u^1 \cdot 10^{-1}$, см; b – изолинии $u^2 \cdot 10^{-1}$, см

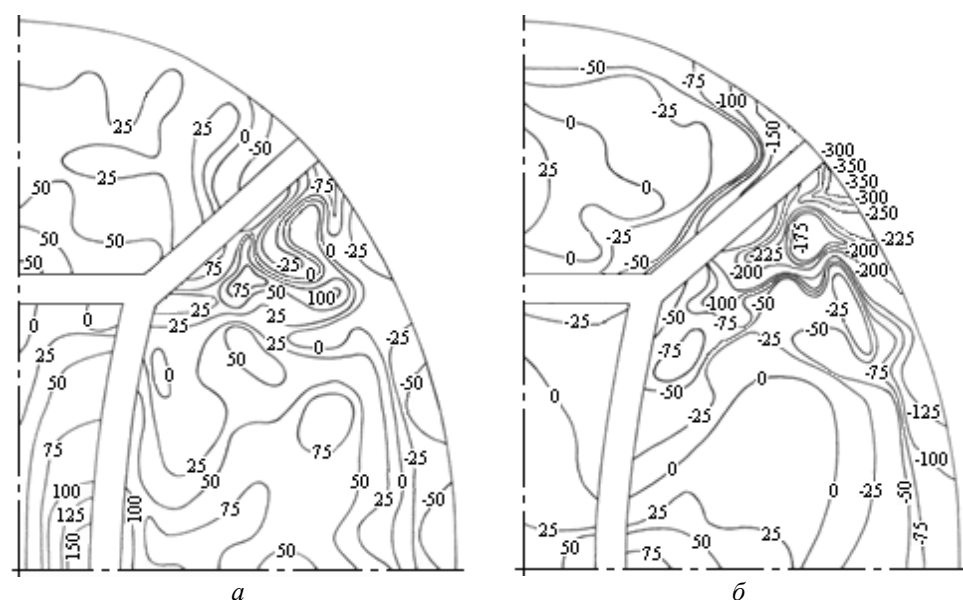


Рис. 12.7. К расчету покрытия универсального спортивно-зрелищного зала при статических и сейсмических нагрузках:

a – изолинии $\sigma_{\max}$, МПа; b – изолинии $\sigma_{\min}$, МПа

Максимальные растягивающие напряжения в мембране составляют $\sigma_m = 186$ МПа. При этом в приконтурных зонах мембрана испытывает небольшое сжатие в пределах $\sigma_m = 50 - 100$ МПа, однако в местах примыкания опорного контура к пилону модуль отрицательного главного напряжения уже достигает величины $\sigma_m = 374$ МПа, что может привести к образованию складок. Характер распределения главных напряжений на срединной поверхности мембранной оболочки показан на рис. 12.7.

Следует также отметить, что анализ результатов расчетов покрытия УСЗЗ на статическую и сейсмическую нагрузки показал, что данное сооружение весьма мало восприимчиво к сейсмическим воздействиям. Учет в расчете сейсмических нагрузок при сейсмичности района строительства 9 баллов позволил уточнить его результаты в пределах 8 % общего напряженно-деформированного состояния, что находится в пределах точности наших сведений о реальных нагрузках и задания исходных данных, а, следовательно, не оказывает решающего влияния на прочностные показатели.

На основании выполненного расчета можно заключить, что несущая система покрытия УСЗЗ обладает в целом достаточно большим запасом прочности. Небольшое перенапряжение наблюдается в направляющих нитях в местах их примыкания к опорному контуру. Здесь же в мембране возникают и складчатые зоны, обусловленные наличием ограниченного одноосного напряженного состояния. Подобные явления практически полностью зависят от начальной формы оболочки и условий ее закрепления, а потому могут быть легко устранены, например, путем установки в приугловых зонах покрытия распорок или жестких вставок.

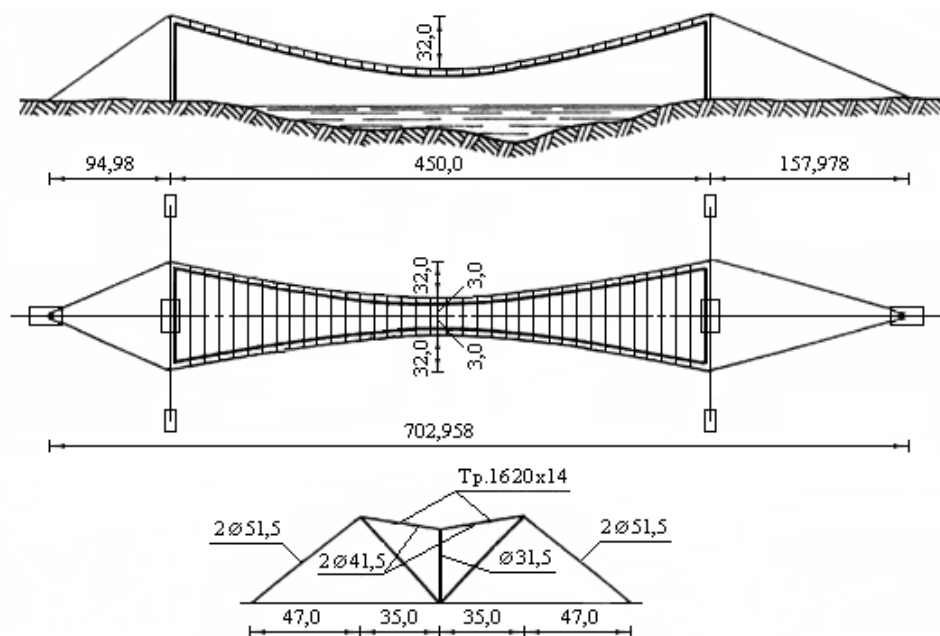
§ 12.3. Висячий трубопроводный переход керосинопровода

На линии керосинопровода в районе г. Ангарска запроектирован двухниточный трубопроводный переход через р. Ангара, представляющий собой комбинированную пространственную вантово-стержневую систему, состоящую из несущих канатов, выполненных из 4 канатов диаметром 71,5 мм каждый, пилонов и соединительных тросовых элементов, каждый из которых выполнен из каната диаметром 19,5 мм (рис. 12.8, *а*). Общая длина перехода составляет 702,958 м, главный пролет равен 450 м, а отметка верха пилон над уровнем земли – 48 м.

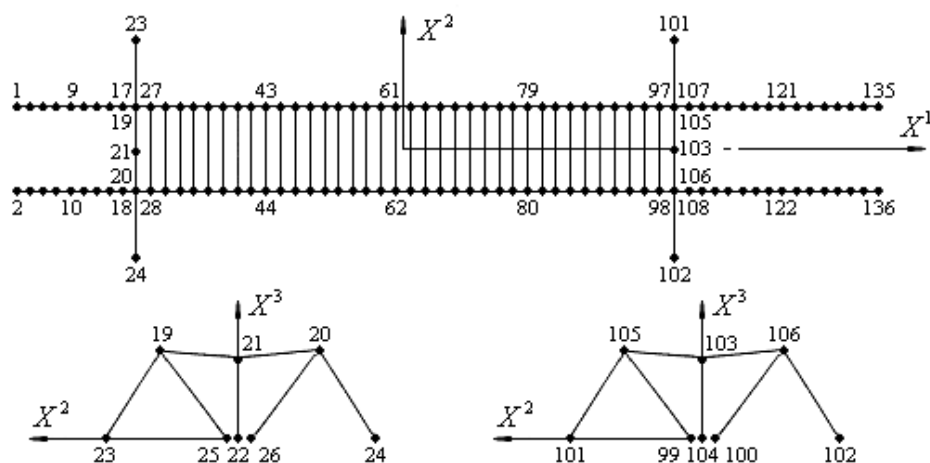
Несущие канаты разведены в плане, образуя пространственную конструкцию из двух наклонно расположенных под углом 45° висячих систем, соединенных между собой тросовыми стяжками с шагом 12 м. Посередине пролета расстояние между канатами составляет 6 м. Причем отметим, что здесь трубы конструктивно исключены из совместной работы с канатами (на рис. 12.8, *а* показаны жирной линией).

В расчетной схеме тросовые элементы представляются набором прямолинейных растянуто-напряженных стержней, а пилоны – прямолинейными сжаты-

ми стержнями, шарнирно соединенными с тросовыми элементами и основанием. Схема разбивки вантово-стержневой системы перехода на конечные элементы изображена на рис. 12.8, б. Порядок нумерации узлов дискретной модели и ориентация осей глобальной системы координат понятны из рис. 12.8, б.



а



б

Рис. 12.8. Конструктивная (а) и топологическая с нумерацией узлов (б) схемы висячего трубопроводного перехода керосинопровода

При расчете трубопроводного перехода была поставлена задача определения начальной формы вантово-стержневой системы, напряженной действием собственного веса, и напряженно-деформированного состояния при действии различных эксплуатационных нагрузок и их комбинаций.

На первом этапе расчета была определена начальная конфигурация вантово-стержневой системы по ее заданным основным геометрическим параметрам. На втором – расчет трубопроводного перехода производился при следующих схемах нагружения:

- 1 – собственный вес ($q_1 = 6,55$ кН/м) и снеговая нагрузка ($q_c = 1,828$ кН/м);
- 2 – собственный вес и отрицательная разность температур ($\Delta t^x = -54^\circ\text{C}$);
- 3 – собственный вес и положительная разность температур ($\Delta t^t = 57^\circ\text{C}$);
- 4 – собственный вес и ветровая нагрузка ($q_w = 1,44$ кН/м);
- 5 – собственный вес, снеговая и ветровая нагрузки;
- 6 – собственный вес, снеговая и ветровая нагрузки, а также отрицательная разность температур.

О характере напряженно-деформированного состояния перехода можно судить по рис. 12.9. Максимальные продольные перемещения наблюдаются в точке крепления к пилону несущего каната, расположенного с наветренной стороны перехода, при 5-й схеме нагружения. Максимальное перемещение достигает $u^1 = 0,148$ м. При остальных нагружениях перемещения вдоль оси трубопроводного перехода относительно малы.

Деформирование несущих канатов в горизонтальном, поперечном к оси трубопровода направлении при 1-й, 2-й и 3-й схемах нагружения происходит симметрично. Максимальное перемещение канатов наблюдается в опорных участках и составляет $u^2 = 0,015$ м. При действии ветровой нагрузки (4-я, 5-я и 6-я схемы нагружения) перемещения обоих канатов в горизонтальной плоскости приблизительно одинаковы. Максимальное отклонение канатов от начального положения наблюдается при 4-й схеме нагружения в середине пролета и равно $u^2 = 1,916$ м, что составляет 1/234 пролета.

Перемещения канатов в вертикальной плоскости при 1-й и 3-й схемах нагружения практически совпадают, а при 4-й и 6-й – имеют одинаковый характер. Максимальные перемещения возникают при 5-й схеме нагружения в несущем канате, расположенном с подветренной стороны перехода, при этом их значения составляют $u^3 = 1,752$ м, что вполне допустимо.

Сопоставление результатов расчетов трубопроводного перехода на действие эксплуатационных нагрузок показало, что наиболее неблагоприятным сочетанием является собственный вес, снеговая и ветровая нагрузки, а также отрицательная разность температур. При этом в несущих канатах величина усилия достигает значения $N = 8,885$ МН, что соответствует величине напряжения $\sigma = 6,117 \cdot 10^2$ МПа.

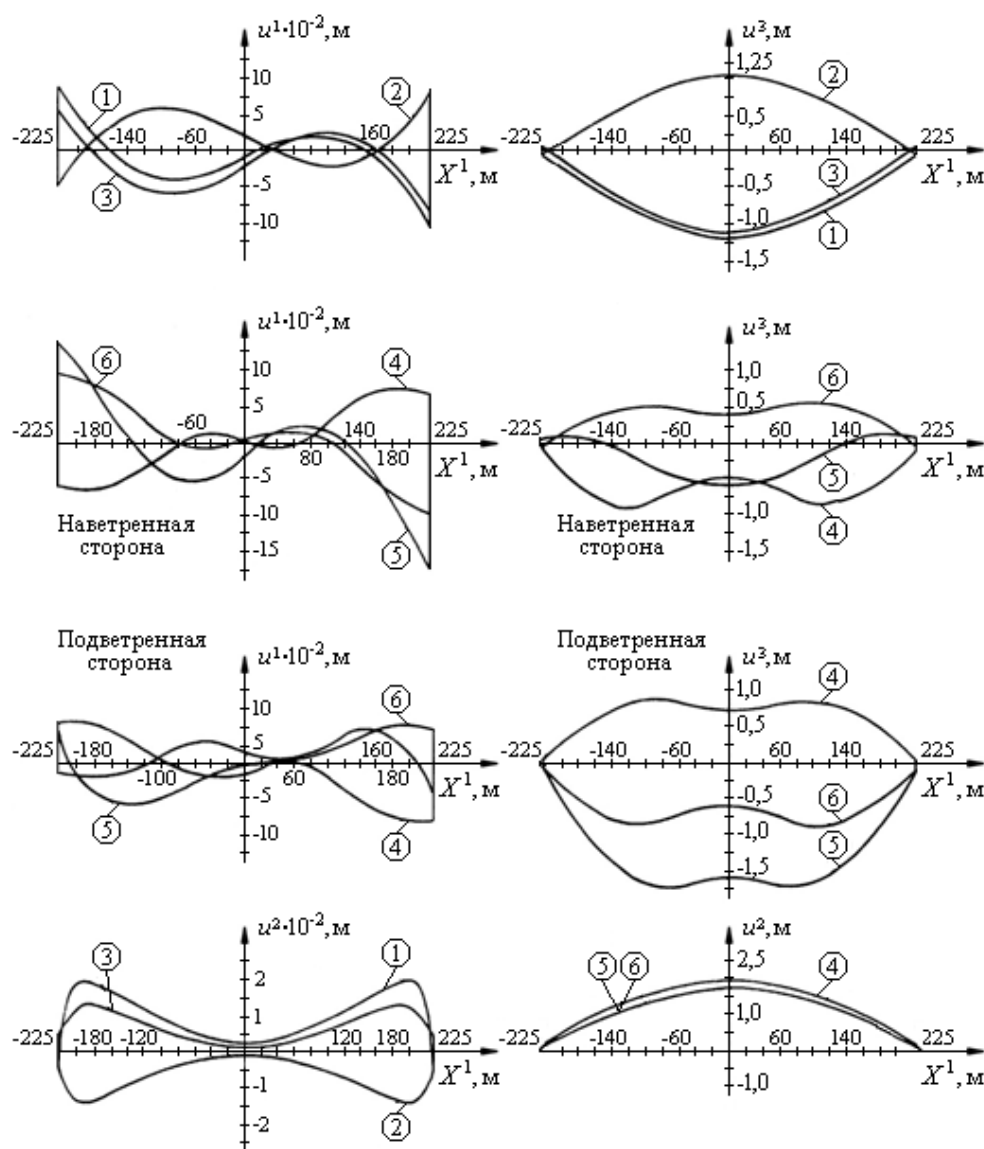


Рис. 12.9. Эпюры перемещений несущих канатов висячего трубопроводного перехода керосинопровода при различных схемах нагружения

Полученные результаты свидетельствуют о том, что рассчитанная конструкция висячего трубопроводного перехода керосинопровода обладает высокой несущей способностью и жесткостью, а усилия и перемещения при наиболее неблагоприятном сочетании эксплуатационных нагрузок находятся в допустимых пределах.

§ 12.4. Облегченная складчатая конструкция ангара для самолетов

В аэропорту г. Донецка запроектирован и рассчитан ангар для самолетов пролетом 48 м и длиной 49 м, представляющий собой бескаркасную тонкостенную складчатую конструкцию, состоящую из 7 одинаковых секций шириной 7 м. Каждая секция образована из жестко защемленной арки полигонального очертания, составленной из 14 однотипных панелей длиной 5 м, выполненных из холодногнутых алюминиевых листов толщиной 2,5 мм (рис. 12.10, а). Высота арки 21,5 м. Поперечное сечение секции здания показано на рис. 12.10, б. В местах изломов арки по всей длине сооружения расположены решетчатые диафрагмы из стальных холодногнутых профилей для придания ему повышенной жесткости. Ангар оборудован подвесным краном грузоподъемностью 50 кН и пролетом 12 м, расположенным в центре здания.

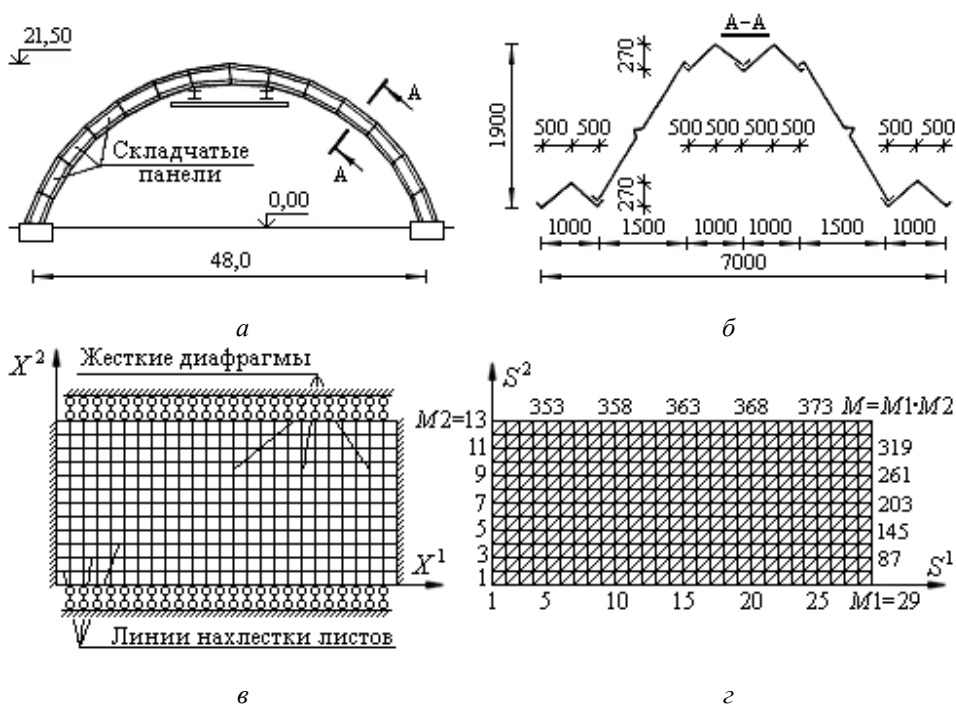


Рис. 12.10. Схемы облегченной складчатой конструкции ангара для самолетов: а – конструктивная поперечного сечения здания; б – то же, складчатой секции; в – расчетная секции; г – топологическая складчатой секции с нумерацией координатных линий и номерами узлов сеточной области

Учитывая двустороннюю симметрию конструкции ангара, а также то, что здание состоит из 7 одинаковых складчатых секций, в качестве расчетной принята одна из этих секций (а именно, средняя). По направлению неучиты-

ваемых в расчете частей сооружения поставлены связи на соответствующие перемещения узлов (рис. 12.10, в).

В расчетной схеме листы секции представляются набором мембранных треугольных конечных элементов. Места стыковки листов секции, представляющие собой зоны повышенной жесткости, и решетчатые диафрагмы аппроксимируются стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения-сжатия. На рис. 12.10, в показана также схема разбивки расчетной секции на конечные элементы.

При описании топологической структуры конструкции расчетная схема секции отображается на прямоугольную сеточную область. Вводится местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 29$ и от 1 до $M2 = 13$ по каждому направлению, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 = 377$, как это показано на рис. 12.10, г. Таким образом, каждый узел дискретной модели определяется номером N с текущими сеточными координатами I, J соответственно по S^1 и по S^2 . При этом величины N, I и J связаны зависимостью

$$N(I, J) = I + M1(J - 1). \quad (12.4)$$

Расчет ангара производился в три этапа. На первом – была определена исходная форма сооружения от действия собственного веса его конструктивных элементов (рис. 12.11, а). На втором – исследовано напряженно-деформированное состояние здания при четырех комбинациях постоянных и временных нагрузок (рис. 12.11, б – д) и определено наиболее неблагоприятное их сочетание, включающее собственный вес сооружения, симметричную снеговую нагрузку и нагрузку от кранового оборудования. И, наконец, на третьем – был произведен расчет здания на действие определенного ранее наиболее неблагоприятного сочетания нагрузок (рис. 12.11, е).

Результаты расчета в виде эпюр напряжений, возникающих в крайних волокнах поперечного сечения складчатой секции, и вертикальных перемещений ее нейтральной оси приведены на рис. 12.12. Причем каждая эпюра на рис. 12.12 соответствует аналогично расположенной на рис. 12.11 схеме нагружения. Из анализа представленных эпюр можно сделать следующие выводы. Наибольшие сжимающие напряжения, возникающие в месте опирания секции, составили $\sigma_{\min} = 146$ МПа, что меньше расчетного сопротивления алюминиевого сплава $R_y = 150$ МПа. Величина максимальных растягивающих напряжений равна $\sigma_{\max} = 91$ МПа. Наибольший прогиб наблюдается в коньке секции, а его значение составило $u^3 = 7,43$ см, что также меньше допускаемого прогиба $[u] = 10,75$ см или $1/200$ высоты сооружения.

Представленные результаты свидетельствуют о том, что рассчитанное сооружение имеет высокую несущую способность и жесткость, а напряжения и перемещения при полной эксплуатационной нагрузке находятся в допустимых пределах. При этом максимальные напряжения возникают в местах опи-

рания секции на фундамент и, хотя не достигают допускаемых значений, – являются весьма близкими к ним.

Поэтому для обеспечения нормальной эксплуатации сооружения было рекомендовано заменить жесткое опирание секции на шарнирное или применить другие специальные способы крепления.

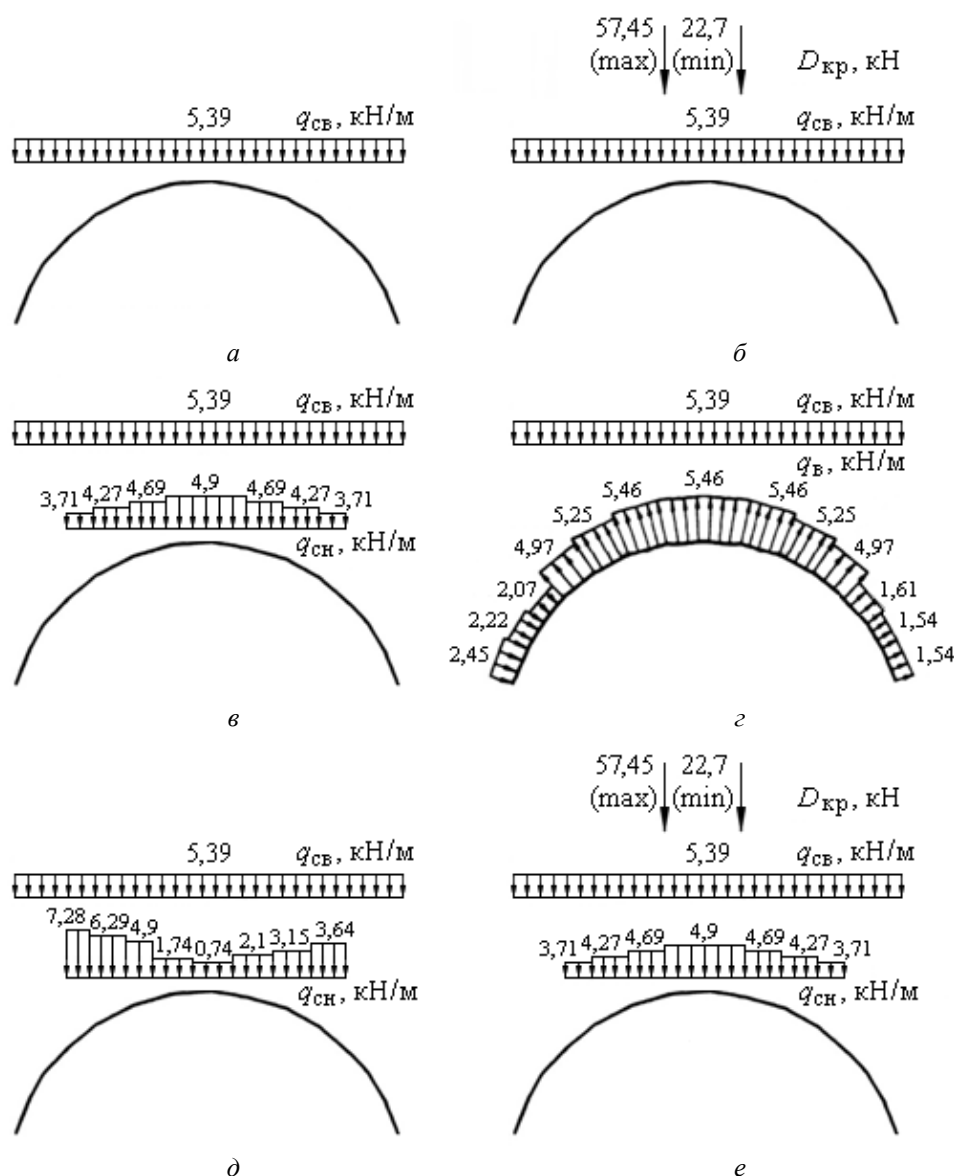


Рис. 12.11. Схемы нагружения (*a – e*) ангара постоянными и временными нагрузками

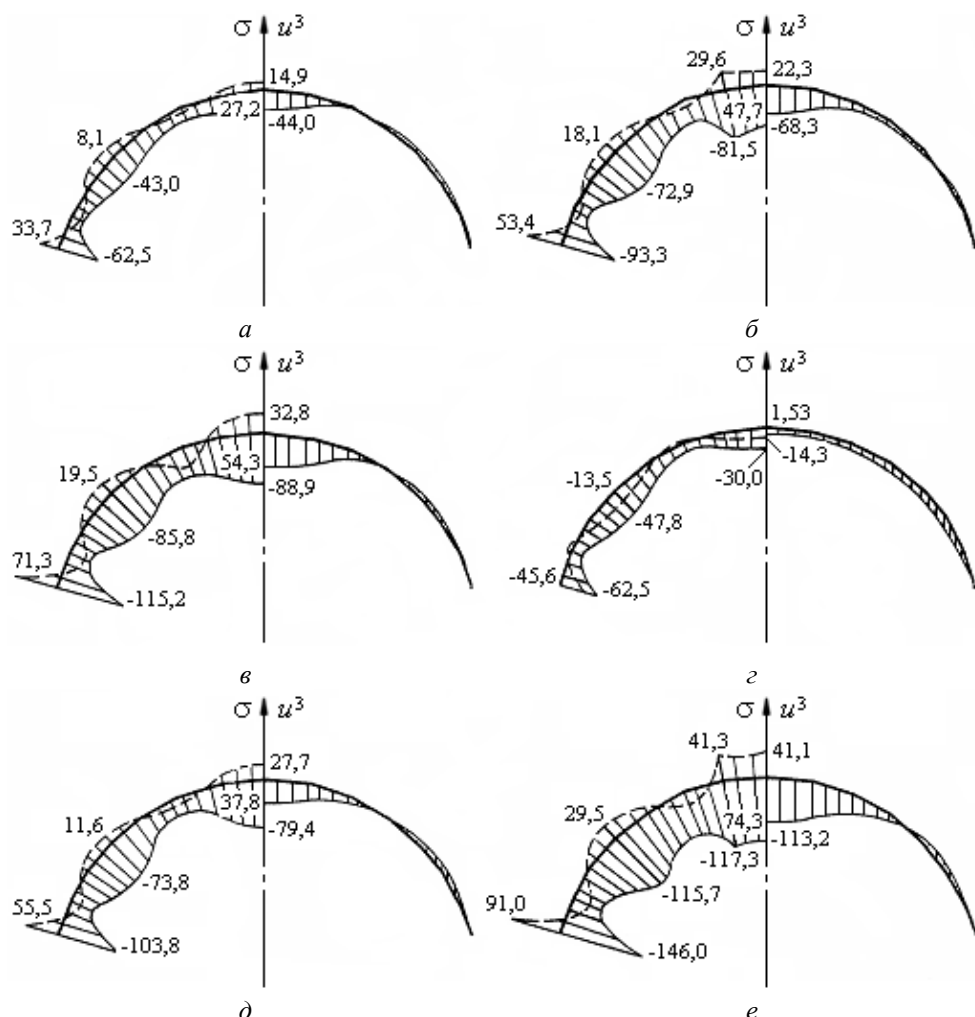


Рис. 12.12. Эпюры напряжений $\sigma_{\max}$ (---) и $\sigma_{\min}$ (—), МПа, и перемещений u^3 , мм, складчатой секции ангара при различных схемах нагружения (а – е)

§ 12.5. Висячая мембранная оболочка покрытия

Рассмотрим покрытие, представляющее собой висячую мембранную оболочку на упруго-податливом замкнутом трубобетонном опорном контуре прямоугольной формы, который поддерживается спаренными железобетонными колоннами. Отличительной чертой данного покрытия является то, что мембрана крепится к опорному контуру по всему периметру.

В процессе монтажа на проектной отметке покрытия из отдельных стальных листов сваривается первоначально плоская мембрана и опорный

контур с дополнительной арматурой. При подъеме в проектное положение оболочка под действием собственного веса, начальных несовершенств при сварке и прогиба контура принимает свободно провисающую форму. После закрепления опорный контур заполняется бетоном. По достижении бетоном расчетной прочности по мембране укладывается стабилизирующий и антикоррозионный слой торкрет-бетона, слой утеплителя и рулонный ковер на мастике.

Постоянной нагрузкой, действующей на покрытие, является собственный вес его несущих и конструктивных элементов. В качестве временной принята снеговая нагрузка. Воздействие ветрового давления на пологую мембрану с учетом стабилизирующего слоя оказывает только разгружающее влияние и поэтому при расчете не принимается во внимание.

Конструктивная схема всячего покрытия показана на рис. 12.13, *а*. Как уже отмечалось раньше, прямоугольная в плане мембранная оболочка подвешена на достаточно гибком ($h/l = 1/50-1/100$) замкнутом опорном трубобетонном контуре. Покрытие является конструктивно анизотропным, состоящим из двух слоев – стальной мембраны толщиной 4 мм и железобетонной тонкой оболочки толщиной 30 мм. Модуль упругости материала мембраны равен $E_m = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, а коэффициент Пуассона – $\nu_m = 0,33$. Для железобетонной оболочки соответственно принимаем $E_{об} = 3 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{об} = 0,18$. Опорный трубобетонный контур приводится к эквивалентному стержню с круглым поперечным сечением площадью $F_k = 1,169$ м² и модулем упругости $E_k = 3,92 \cdot 10^4$ МПа. Исходная форма покрытия определяется по формуле

$$z = -f_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (12.5)$$

где f_0 – начальная стрела провисания; a и b – половина длины и ширины покрытия соответственно.

Ввиду симметрии конструкции и действующих нагрузок расчеты произведены для 1/4 части покрытия. Расчетная схема фрагмента изображена на рис. 12.13, *б*. При описании топологической структуры покрытия расчетная схема фрагмента отображается на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 13$, от 1 до $M2 = 13$ и от 1 до $M3 = 2$ по каждому направлению, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели понятен из рис. 12.13, *б*.

В расчетной схеме оболочка представляется набором мембранных четырехугольных конечных элементов, а контур – стержневыми конечными элементами, воспринимающими растяжение-сжатие с изгибом. По осям симметрии фрагмента наложены связи на соответствующие перемещения узлов, а узел, находящийся в углу опорного контура, закреплён жестко.

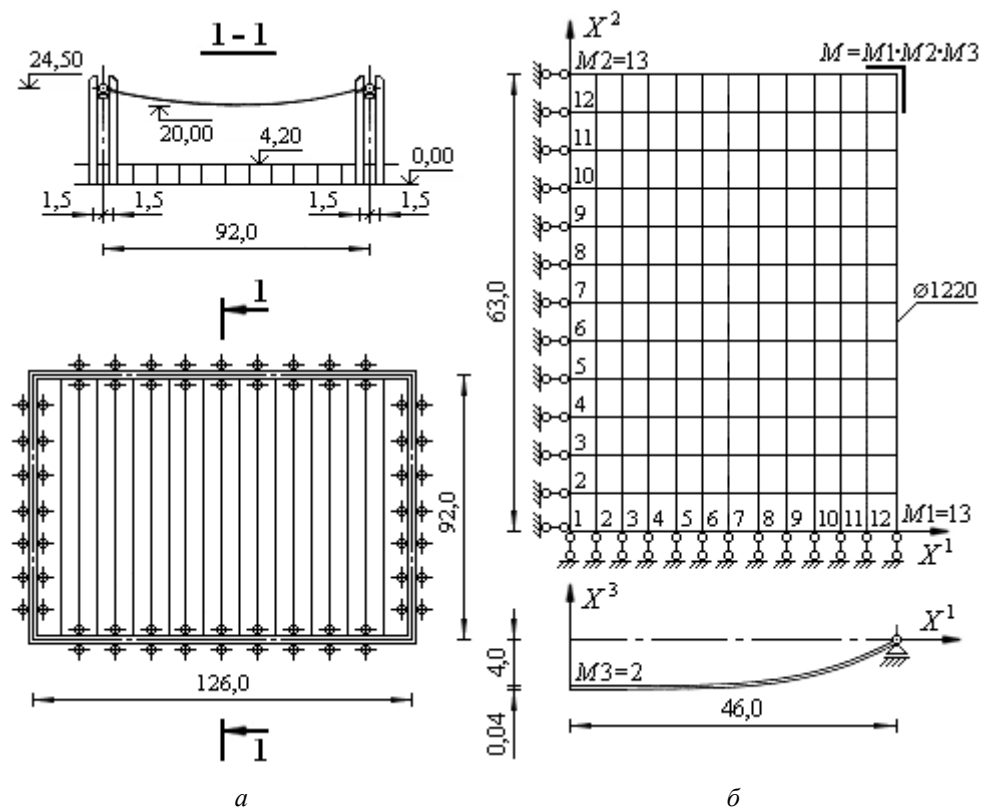


Рис. 12.13. Конструктивная (а) и расчетная с нумерацией координатных линий сеточной области (б) схемы висячего покрытия

Остановимся подробнее на напряженно-деформированном состоянии покрытия. О его характере при полной расчетной нагрузке (2,63 МПа) можно судить по результатам, показанным на рис. 12.14. Опорный контур практически по всей длине оказался сжатым и только в приугловых участках наблюдаются растягивающие усилия. Изгибающие моменты в контуре относительно невелики, за исключением тех же приугловых участков, где момент достигает достаточно большой величины. Максимальные значения сжимающих усилий, изгибающих моментов и прогибов в контуре (в плоскости покрытия) составляют: $N = 4352$ кН, $M = 13383$ кНм, $u^1 = 0,38$ м. Прогиб висячей оболочки в центральной точке равен $u^3 = 1,22$ м.

Значения максимальных мембранных напряжений в оболочке достигают $\sigma_{\max} = 261$ МПа. Некоторые элементы оболочки в приугловых зонах испытывают одноосное напряженное состояние. При этом модуль отрицательного главного мембранного напряжения имеет достаточно большую величину, равную $\sigma_{\min} = 368$ МПа, что может привести к образованию значительных складок. Для предотвращения подобного явления и восприятия сжимающих

напряжений в приугловых зонах покрытия необходимо предусмотреть специальные распорки или жесткие вставки. В этом случае принятая конструкция покрытия обеспечит его нормальную эксплуатацию.

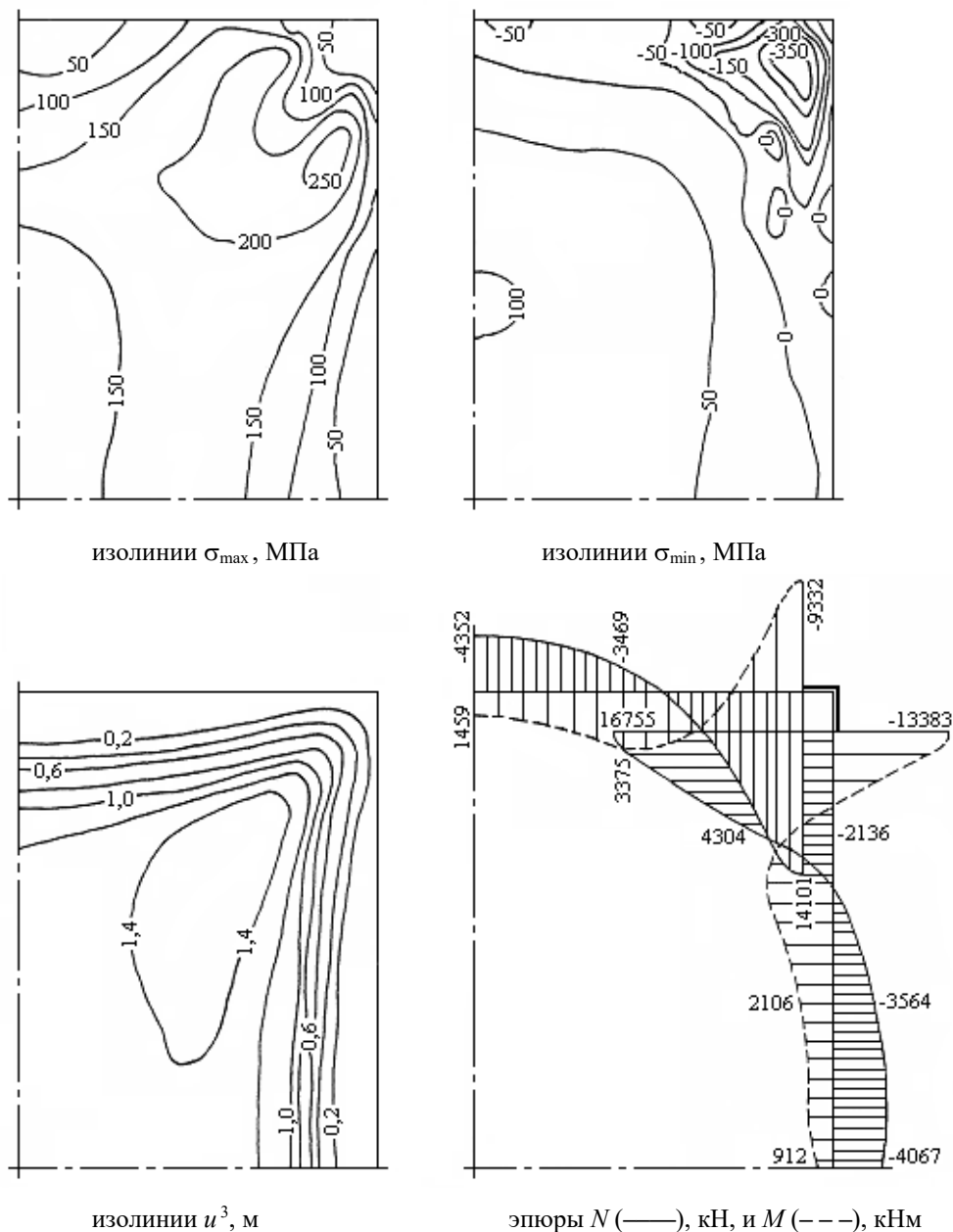


Рис. 12.14. К расчету висячей мембранной оболочки покрытия

§ 12.6. Трансформирующаяся вантово-стержневая оболочка

Выполнен расчет трансформирующейся вантово-стержневой оболочки, которая при освобождении некоторых связей превращается в механизм, изменяющий свои размеры без нарушения целостности узловых соединений. Складывание такой системы производится за счет продавливания половины узлов каркаса к центру кривизны. Обратный процесс – раскрытие осуществляется путем поочередного выдавливания тех же узлов в проектное положение.

Общий вид трансформирующейся вантово-стержневой оболочки пролетом 20,5 м и высотой 4,72 м показан на рис. 12.15, *а*. Ее каркас образован из шестиугольных ячеек, выполненных из элементов двух типов: стержней, способных воспринимать растяжение-сжатие (на рис. 12.15 выделены жирными линиями), и вант, воспринимающих только растягивающие усилия. В исходном недеформированном состоянии стержни предварительно сжаты усилием $N = 500$ Н, а ванты предварительно растянуты усилием $N = 144$ Н.

В связи с несимметричностью конструкции относительно осей координат в качестве расчетной схемы принята вся оболочка с учетом наложенных на нее конструктивных элементов связей. При разбивке трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на составляющие фрагменты было учтено наличие в ее конструкции так называемых «верхних» и «нижних» узлов (на рис. 12.15, *б* «верхние» узлы обозначены точками). Именно по этой причине в отдельные фрагменты были выделены соединяющие «верхние» и «нижние» узлы вантовые сети, а также сжатые стержневые элементы. Схемы разбивки оболочки на фрагменты с нумерацией узлов сеточной области изображены на рис. 12.16 и 12.17. При этом тонкими линиями показаны «фиктивные» стержни и узлы, введенные в топологические схемы вантовых сетей и сжатых стержней с целью придания им большей регулярности.

Указанные фрагменты отображаются на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов по оси S^1 от 1 до $M1 = 9$, по оси S^2 от 1 до $M2 = 9$ и по оси S^3 от 1 до $M3 = 2$, как показано на рис. 12.16 и 12.17, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Таким образом, каждый узел дискретной модели определяется номером N с текущими сеточными координатами I, J, K соответственно по осям S^1, S^2, S^3 . При этом величины N, I, J, K будут связаны зависимостью

$$N(I, J, K) = I + M1(I - 1) + M1 \cdot M2(K - 1). \quad (12.6)$$

Отметим также, что в расчетной схеме ванты представляются набором прямолинейных стержневых конечных элементов, способных воспринимать только растягивающие усилия, а сжатые элементы – прямолинейными стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения-сжатия.

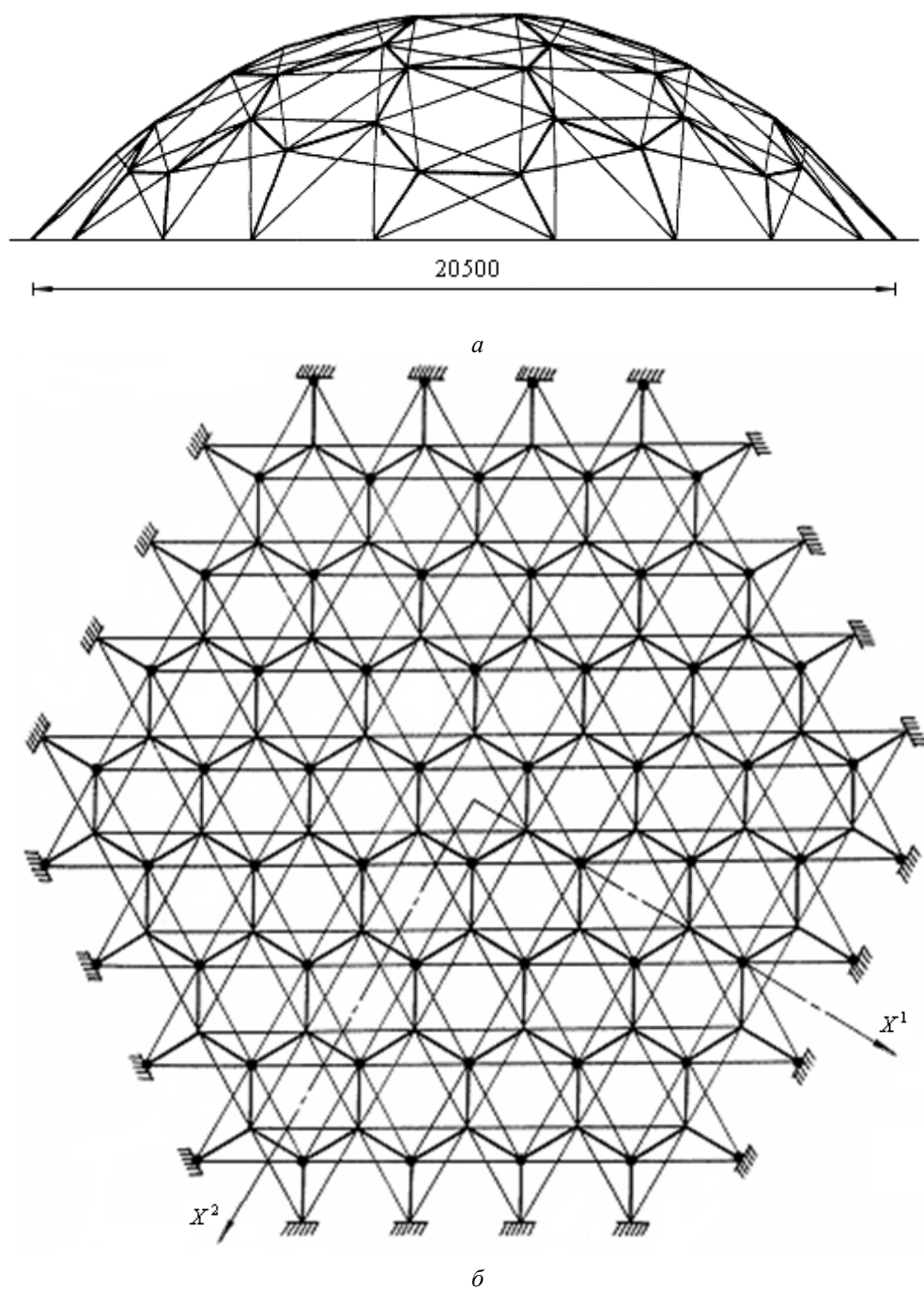


Рис. 12.15. Общий вид (а) и расчетная схема (б) трансформирующейся вантово-стержневой оболочки

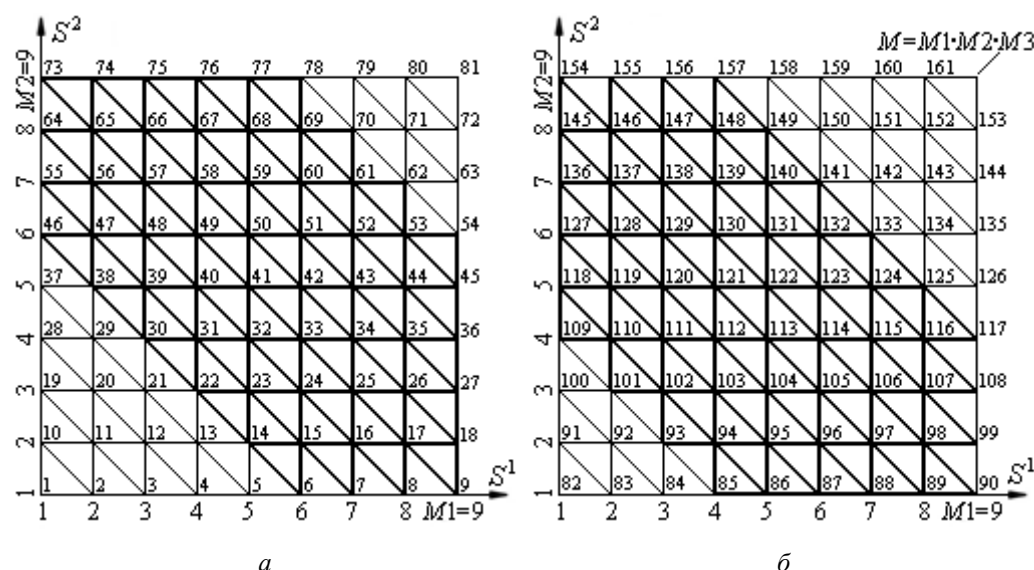


Рис. 12.16. Топологические схемы с нумерацией координатных линий и узлов сеточной области фрагментов вантовых сетей трансформирующей вантово-стержневой оболочки:

a – вантовая сеть, соединяющая «нижние» узлы (при $M_3 = 1$);

б – вантовая сеть, соединяющая «верхние» узлы (при $M_3 = 2$)

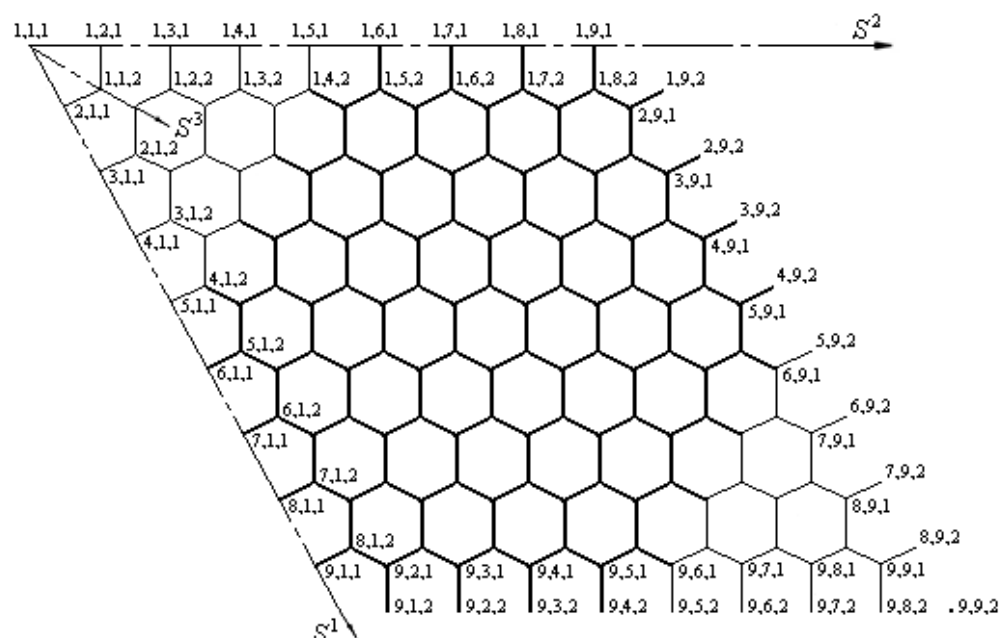


Рис. 12.17. Топологическая схема с нумерацией узлов сеточной области фрагмента сжатых стержней трансформирующей вантово-стержневой оболочки

Расчет трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на общую устойчивость проводился при двух типах нагружения:

- полном – когда направленная по оси X^3 нагрузка прикладывалась во все узлы оболочки;
- неполном – когда направленная по оси X^3 нагрузка прикладывалась только к «верхним» узлам оболочки.

Как в первом, так и во втором случаях в качестве исходного положения для дальнейших расчетов принималось равновесное состояние оболочки, полученное с учетом собственного веса ее конструктивных элементов и заданных усилий преднапряжения.

В результате расчета было установлено, что значение критической нагрузки при первом типе нагружения достигает $P_{кр} = 370$ Н, при втором – $P_{кр} = 170$ Н. На рис. 12.18 изображены кривые «нагрузка-перемещение» для наиболее характерных узлов оболочки. Из анализа представленных результатов видно, что при увеличении нагрузки некоторые узлы оболочки претерпевают положительные перемещения (опускаются), а другие – отрицательные (поднимаются). Причем, если при полном нагружении поднимаются только крайние как «нижние», так и «верхние» узлы, а все остальные опускаются, то при неполном нагружении поднимаются независимо от их расположения исключительно «нижние» узлы, а все «верхние» также независимо от их расположения опускаются.

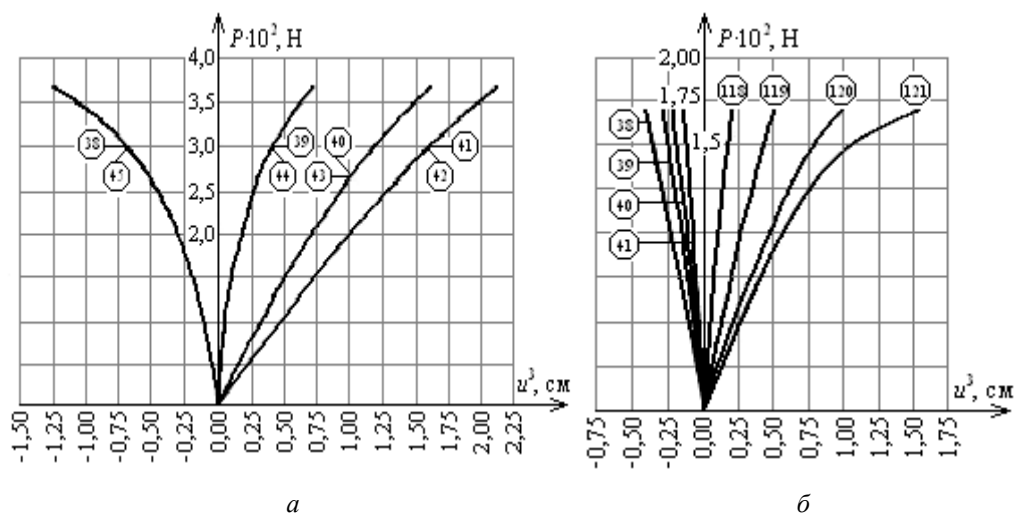


Рис. 12.18. К расчету трансформирующейся вантово-стержневой оболочки на общую устойчивость: кривые «нагрузка-перемещение» соответственно для полного (а) и неполного (б) нагружения

§ 12.7. Висячее покрытие универсального производственного здания

Исследовано напряженно-деформированное состояние висячего покрытия круглого в плане универсального производственного здания диаметром 51,4 м (рис. 12.19, а). Мембранная оболочка подвешена на внешнем упруго-податливом замкнутом кольцевом железобетонном опорном контуре с отношением $H/R = 1/100$. В центре покрытия имеется отверстие диаметром 4,1 м, через которое по технологическим требованиям проходит вентиляционная шахта. В месте примыкания к шахте мембрана опирается на внутренний упруго-податливый контур ($h/r = 1/100$). Материал мембраны – тонкий стальной лист с приведенной толщиной $h_m = 4$ мм, модулем упругости $E_m = 2,1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu_m = 0,3$. Модуль упругости и коэффициент Пуассона материала опорных контуров для приведенного сечения соответственно равны $E_k = 2,273 \cdot 10^4$ МПа и $\nu_k = 0,2$.

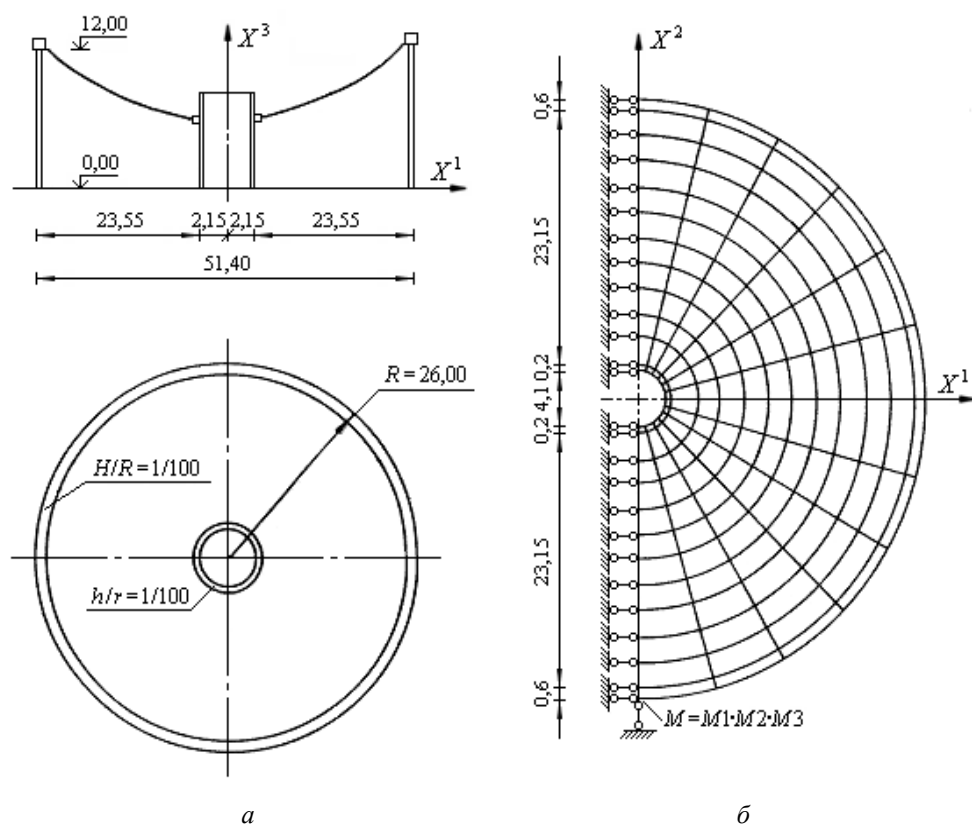


Рис. 12.19. Конструктивная (а) и расчетная (б) схемы висячего покрытия универсального производственного здания

Исходная форма мембранной оболочки задана в виде перевернутого усеченного параболоида вращения диаметром в основании 50,8 м, в вершине – 4,5 м при высоте 5,6 м. Начальные координаты поверхности оболочки определяются по формуле

$$z = \frac{5}{23,15^2} \left(x^2 + y^2 - 4,5\sqrt{x^2 + y^2} + 5,0625 \right) + 0,004. \quad (12.7)$$

При описании топологической структуры конечноэлементной модели покрытия расчетная схема отображается на сеточную область с единичными размерами ячеек, координатными линиями которой по направлению S^1 являются равномерно расположенные концентрические полуокружности, а по направлению S^2 – их радиусы. Вводится местная нумерация узлов модели: в плане по оси S^1 от 1 до $M1 = 13$ и по оси S^2 от 1 до $M2 = 13$, по толщине оболочки по оси S^3 от 1 до $M3 = 2$, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели понятен из рис. 12.19, б. По оси симметрии расчетной схемы наложены связи на перемещения по оси X^1 , а опорные контуры покрытия закреплены от смещения по третьему направлению. Также с целью исключения смещения дискретной модели в горизонтальной плоскости, на один из узлов внешнего опорного контура наложены связи, обеспечивающие его шарнирное закрепление.

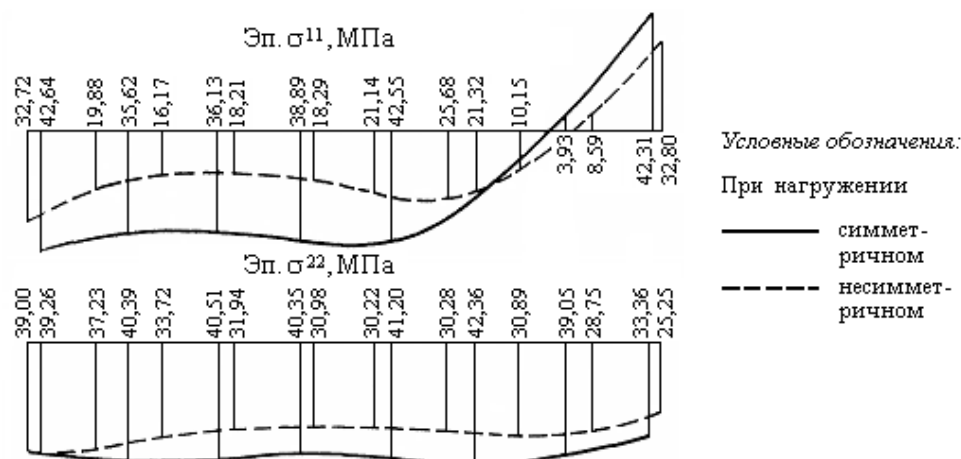
Следует заметить, что расчет конструкции висячего покрытия производился в два этапа: на постоянную (собственный вес) нагрузку интенсивностью $q_1 = 3,8 \text{ кН/м}^2$ с учетом временной (снеговой) как симметричной по всему покрытию, так и несимметричной на половине покрытия нагрузки интенсивностью $q_c = 0,2 \text{ кН/м}^2$. При симметричном нагружении расчет выполнялся для 1/4 покрытия без закрепления внутреннего опорного контура, а при несимметричном – для половины покрытия.

О характере напряженно-деформированного состояния мембранного покрытия можно судить по результатам, показанным на рис. 12.20.

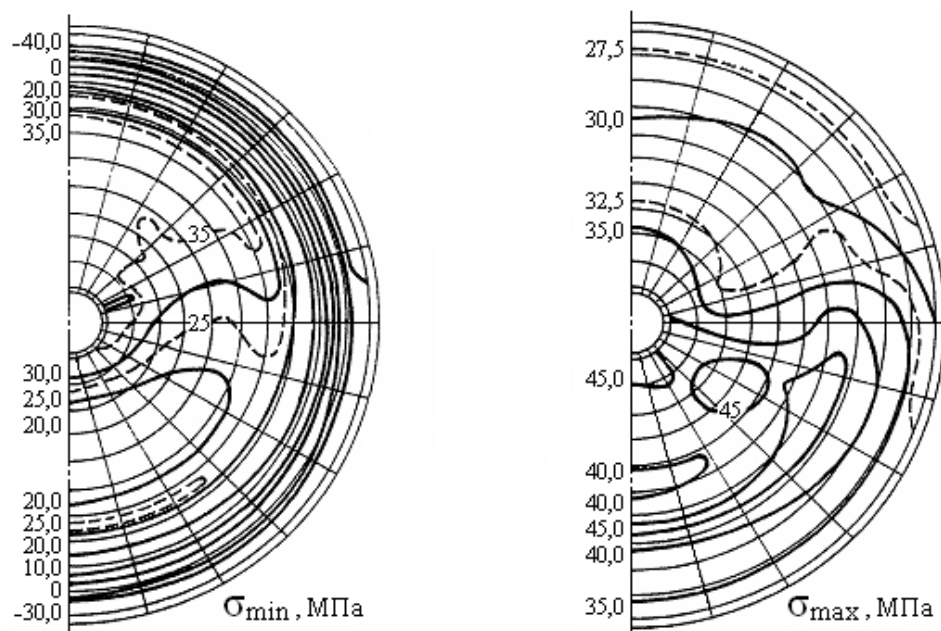
Максимальные растягивающие напряжения в мембране достигают $\sigma^{22} = 42,36 \text{ МПа}$ и возникают при действии симметричной нагрузки в радиальном направлении. Некоторые элементы мембраны в приконтурных зонах испытывают достаточно большое сжатие. При этом модуль отрицательного главного напряжения в кольцевом направлении равен $\sigma^{11} = 42,31 \text{ МПа}$ при симметричном и $\sigma^{11} = 32,8 \text{ МПа}$ при несимметричном нагружениях, что может привести к образованию складок (рис. 12.20, а). Изолинии главных мембранных напряжений в покрытии при несимметричном нагружении показаны на рис. 12.20, б. Максимальные сжимающие усилия в опорных контурах возникают при действии симметричной нагрузки и для внешнего и внутреннего контура соответственно будут $N_1 = 2407,2 \text{ кН}$ и $N_2 = 360,7 \text{ кН}$.

На основании анализа результатов выполненного расчета можно заключить, что висячая мембранная оболочка обладает значительным запасом прочности, поскольку толщина листовой стали первоначально подбиралась не по прочностным, а по конструктивным и технологическим требованиям.

Складчатые зоны, обусловленные наличием ограниченного одноосного напряженного состояния, могут возникать в приконтурной зоне мембранной оболочки и распространяться в пределах $1/6 - 1/5$ длины радиуса в зависимости от условий закрепления оболочки и ее начальной формы.



а



б

Рис. 12.20. К расчету висячего покрытия универсального производственного здания:

а – эпюры главных мембранных напряжений в кольцевом направлении;

б – изолинии главных мембранных напряжений при несимметричном нагружении

§ 12.8. Висячее покрытие выставочного павильона

Исследовано напряженно-деформированное состояние висячего большепролетного комбинированного покрытия выставочного павильона. Покрытие имеет форму гиперболического параболоида с разницей вертикальных отметок углов контура 20 м, расстоянием между осями колонн в плане 94,34 м и длинами диагоналей – 100 и 160 м (рис. 12.21). Основными несущими элементами висячего покрытия являются нити конечной жесткости, опирающиеся с шагом 3,776 м на замкнутый упруго-податливый трубобетонный опорный контур и зафиксированные в проектном положении с помощью распорок из швеллера № 10. По нитям уложен профилированный настил, по которому выполнена мягкая кровля. Предложенная конструкция покрытия обеспечивает максимальное снижение его материалоемкости и наиболее полно отвечает требованиям современной технологии изготовления и монтажа висячих систем.

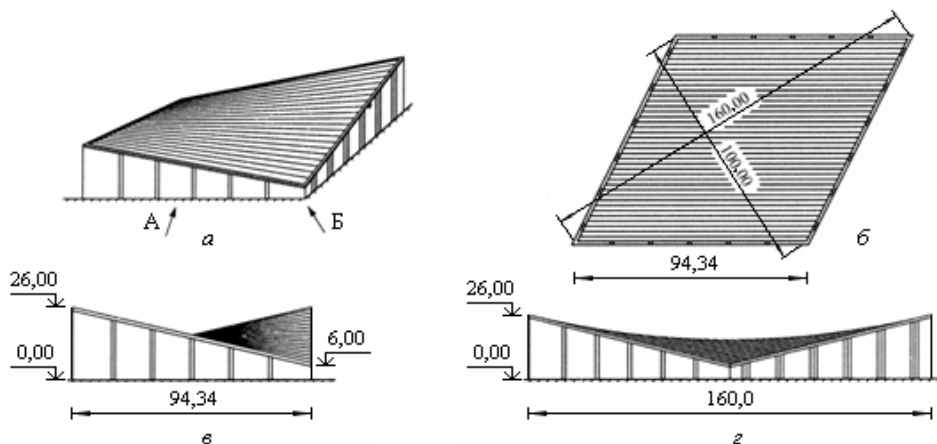


Рис. 12.21. Конструктивная схема покрытия:
а – общий вид; б – план; в – вид А; г – вид Б

На рис. 12.22 представлены поперечные сечения основных несущих элементов покрытия – нитей конечной жесткости из швеллеров № 40 и опорного трубобетонного контура, состоящего из заполненной бетоном металлической трубы $\varnothing 1200 \times 14$ мм с арматурным каркасом из 12 стержней $\varnothing 28$ АШ. Нити конечной жесткости и труба опорного контура выполнены из стали марки С46/33 с пределом текучести $\sigma_t = 330$ МПа, а бетон опорного контура принят класса В45 с предельным значением $\sigma_{пр} = 60$ МПа.

На рис. 12.23 показана расчетная схема покрытия, в которой его основные несущие элементы представлены стержневыми конечными элементами прямоугольного поперечного сечения, воспринимающими усилия растяжения-сжатия и изгиба. Параметры конечных элементов (размеры поперечного

сечения и эквивалентный модуль упругости) установлены с учетом эквивалентного «размазывания» стержневых элементов покрытия таким образом, чтобы обеспечить эквивалентность жесткостных характеристик расчетных и реальных конструктивных элементов.

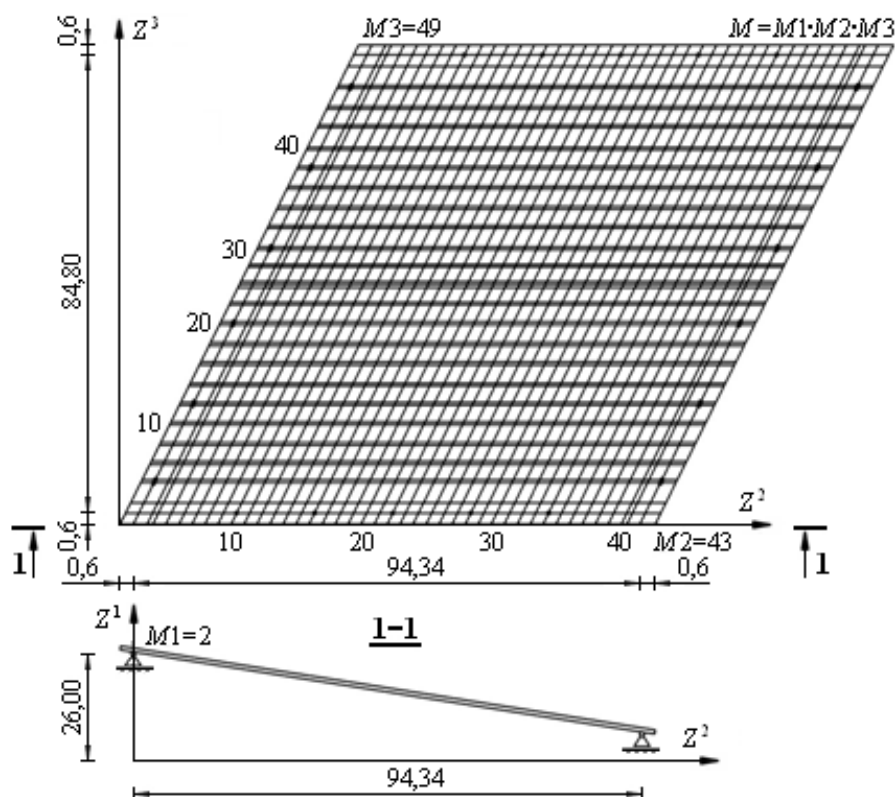


Рис. 12.23. Расчетная схема висячего покрытия с нумерацией координатных линий сеточной области

При описании топологической структуры покрытия его расчетная схема отображается на прямоугольную сеточную область. Вводится местная нумерация узлов от 1 до $M1 = 2$, от 1 до $M2 = 43$ и от 1 до $M3 = 49$, а также сквозная – от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов показан на рис. 12.23.

В качестве внешнего воздействия на покрытие принято равномерно распределенное по его поверхности нагружение от собственного веса конструкций с учетом нагрузок от легкого подвесного потолка и электрооборудования $q_{св} = 2,63 \text{ кН/м}^2$, а также максимальной снеговой нагрузки $q_c = 1,57 \text{ кН/м}^2$.

По результатам расчета построены эпюры перемещений, продольных

сил и изгибающих моментов в средней нити конечной жесткости (рис. 12.24) и боковой (перпендикулярной нитям) стороне опорного контура (рис. 12.25). Анализ полученных результатов показал, что кривая деформирования нити имеет три точки перегиба, а максимальные прогибы весьма значительны и достигают величины $u^1 = 9,689$ м. Эпюры продольных сил N^2 и изгибающих моментов M^3 имеют в средней части плавный характер, а на краях наблюдается знакопеременность и значительные абсолютные значения усилий.

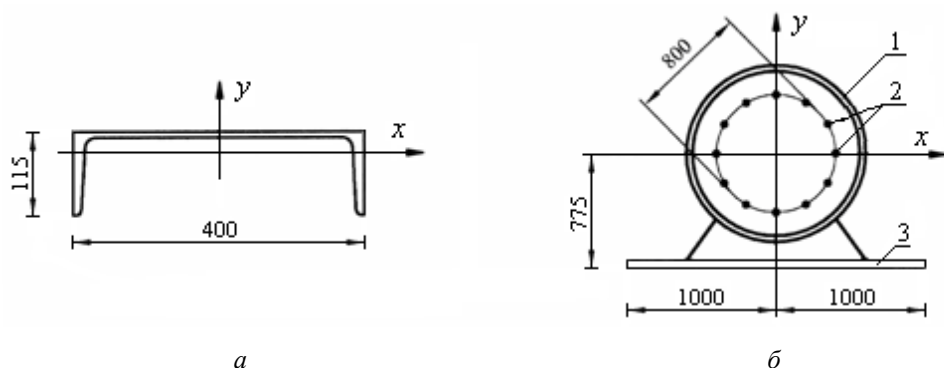


Рис. 12.22. Поперечное сечение: а – нити конечной жесткости; б – опорного трубобетонного контура; 1 – труба $\varnothing 1200 \times 14$; 2 – арматура $\varnothing 28$ АIII; 3 – плита 2000×25

Выполнена проверка несущей способности средней нити конечной жесткости в наиболее нагруженном сечении 1 – 1 (рис. 12.24), где значения растягивающего усилия и изгибающего момента составляют $N^2 = 4,75 \cdot 10^2$ кН и $M^3 = -78,5$ кНм. Соответствующее данным силовым факторам максимальное напряжение в нити равно $\sigma_{\max} = 413,5$ МПа и превышает допустимое значение.

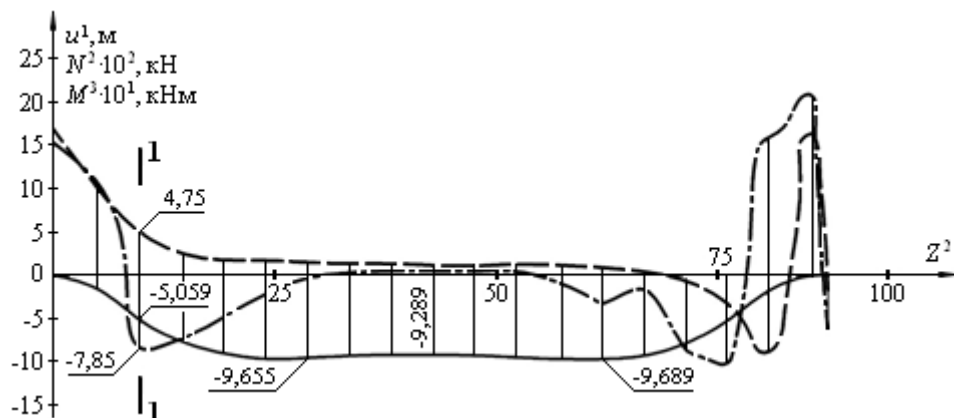


Рис. 12.24. Эпюры в средней нити конечной жесткости:
 — — — — — перемещения u^1 ; — — — — — продольные силы N^2 ;
 — — — — — изгибающие моменты M^3

В соответствии с эпюрами внутренних усилий в опорном контуре (рис. 12.25) наиболее нагруженным является среднее сечение 2 – 2, в котором действуют следующие усилия: $N^3 = -3,604 \cdot 10^3$ кН, $M^1 = -3,089 \cdot 10^4$ кНм и $M^2 = -0,385 \cdot 10^3$ кНм. Поскольку напряжения в поперечном сечении опорного контура перераспределяются между трубой и железобетоном пропорционально их жесткостям, то максимальные напряжения в них составили $\sigma_{\max}^{\text{тр}} = -281$ МПа и $\sigma_{\max}^{\text{жб}} = -59$ МПа. Последнее свидетельствует о том, что нормативные требования по прочности опорного контура выполняются, в отличие от требований по его деформативности, т. к. $u_{\max}^2 / l_k = 2,727 / 94,34 = 1/35 > 1/150$. Таким образом, анализ полученных результатов показал, что принятая конструкция основных несущих элементов покрытия не отвечает нормативным требованиям по прочности и деформативности и подлежит уточнению.

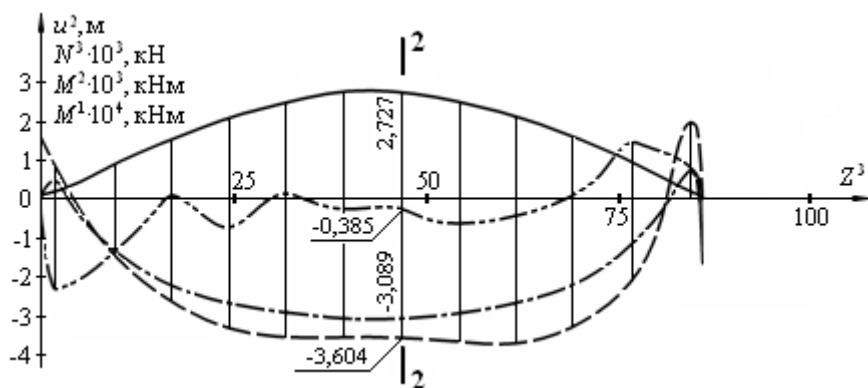


Рис. 12.25. Эпюры в боковой стороне опорного контура:
 — — — — — перемещения u^2 ; — — — — — продольные силы N^3 ;
 — — — — — изгибающие моменты M^2 ; — — — — — изгибающие моменты M^1

Поэтому с целью уменьшения горизонтальных перемещений продольных (параллельных нитям) сторон опорного контура вводим упруго-податливую связь по направлению Z^3 с единичной жесткостью $R^3 = 1260$ кН (рис. 12.26). Принимаем также новый вариант поперечного сечения нити конечной жесткости, включающий швеллер № 40, стальную полосу 540×20 и два уголка 50×5 (рис. 12.27, а). С целью повышения жесткости трубобетонного опорного контура его конструкция развита в горизонтальной плоскости и включает две заполненные бетоном трубы Ø1620×18 с арматурным каркасом из 24 стержней Ø32 АIII в каждой, совместная работа которых обеспечивается двумя трубами Ø600×10 и Ø660×10, плитой основания 4400×40, верхним ли-

трубобетонного контура; 1 – швеллер № 40; 2 – уголок 50×5; 3 – лист 540×20;
 4 – труба Ø1620×18; 5 – труба Ø660×10; 6 – труба Ø600×10; 7 – плита 4400×40;
 8 – лист 2000×20; 9 – стержень Ø32; 10 – арматура Ø32 АП

Анализ результатов расчета большепролетного висячего покрытия свидетельствует, что перемещения опорного контура в горизонтальной плоскости меньше их допустимых нормативных параметров $u_{\max}^2/l_k = 0,474/94,34 = 1/200 < 1/150$, а деформированная поверхность покрытия в сечении по побочной диагонали имеет впадину с амплитудой 0,21 м на длине 50 м, вызывающую обратный уклон поверхности покрытия величиной $i = -0,0084$. Поэтому для его изменения по конструктивным требованиям на положительный уклон $i = +0,005$ под кровлей необходимо выполнить поверхностную облегченную конструкцию с максимальной амплитудой $h = 0,35 - 0,40$ м.

По результатам анализа, представленных на рис. 12.30 и 12.31 данных, определены наиболее нагруженные поперечные сечения в средней нити конечной жесткости (сечение 3 – 3) и боковой стороне опорного контура (сечение 4 – 4).

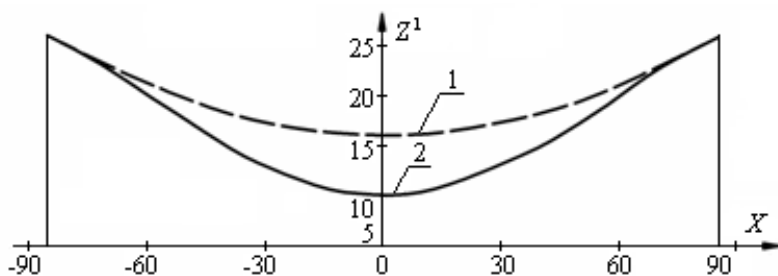


Рис. 12.28. Состояния главной диагонали покрытия:
 1 – исходное; 2 – деформированное

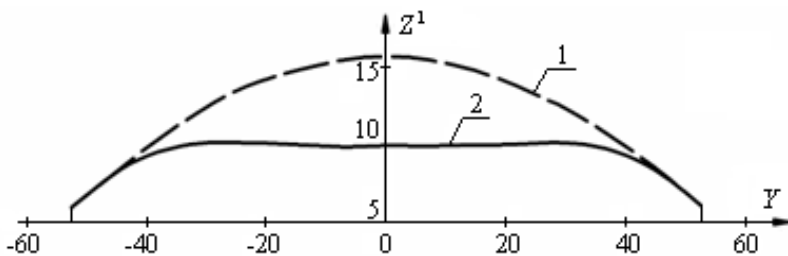


Рис. 12.29. Состояния побочной диагонали покрытия:
 1 – исходное; 2 – деформированное

Для средней нити конечной жесткости в сечении 3 – 3 (рис. 12.30) получены усилия $N^2 = 2,888 \cdot 10^3$ кН и $M^3 = -0,466 \cdot 10^2$ кНм, которые создают мак-

симальное напряжение $\sigma_{\max} = 256,7$ МПа. В то же время, в крайних нитях в средних (наиболее нагруженных) поперечных сечениях действуют усилия $N^2 = 4,170 \cdot 10^3$ кН и $M^3 = -0,419 \cdot 10^2$ кНм, создающие максимальное напряжение $\sigma_{\max} = 318,6$ МПа, которое не превышает предельных значений для стали С46/33. Следует отметить, что в нитях конечной жесткости напряжения от изгиба составляют 25 – 30 % от полных величин напряжений.

Максимальные внутренние усилия в опорном контуре наблюдаются в сечении 4-4 (рис. 12.31) и составляют $N^3 = -1,8047 \cdot 10^4$ кН, $M^1 = -2,1996 \cdot 10^5$ кНм и $M^2 = -0,74 \cdot 10^3$ кНм. С учетом перераспределения напряжений между трубой и железобетоном опорного контура пропорционально их жесткостям максимальные напряжения в них составили $\sigma_{\max}^{\text{тр}} = -195,7$ МПа и $\sigma_{\max}^{\text{жб}} = -41,5$ МПа, что не превышает предельные значения напряжений для принятых бетона класса В45 и стали марки С46/33.

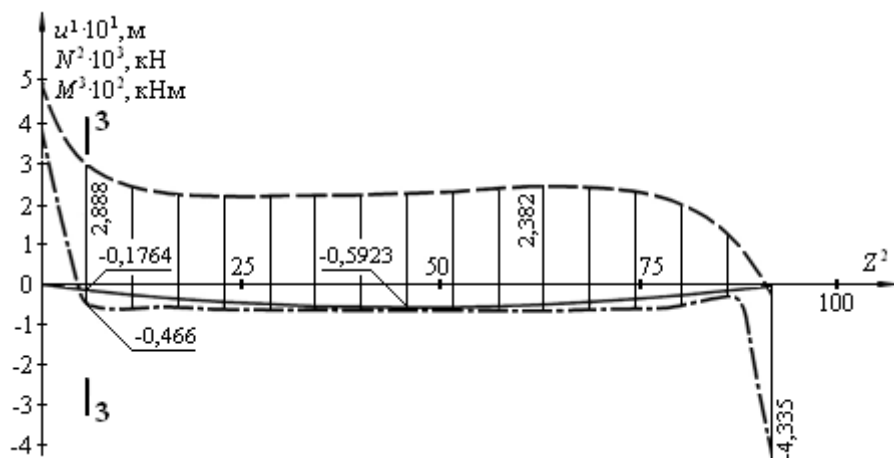
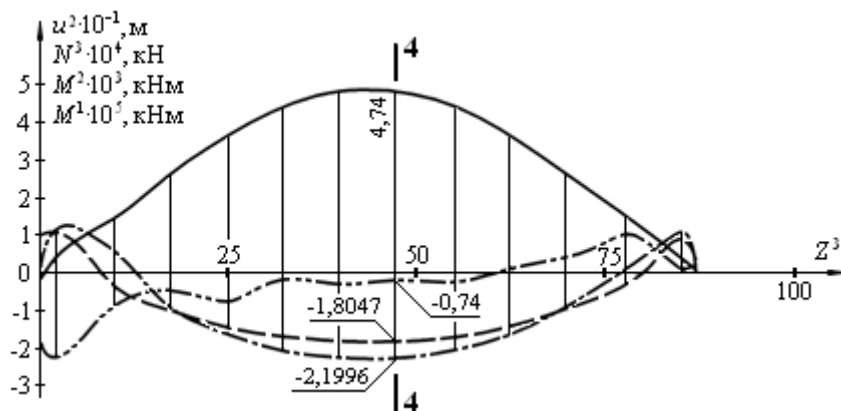


Рис. 12.30. Эпюры в средней нити конечной жесткости: — — — — — перемещения u^1 ; - - - - - продольные силы N^2 ; — · — · — — — — — изгибающие моменты M^3



товыми системами и висячими железобетонными оболочками [113, 188, 193].

В данном примере использована методика, позволяющая смоделировать процесс монтажа круглого в плане висячего комбинированного мембранно-вантового покрытия демонстрационного зала диаметром 70 м и выполнить его расчет на действие постоянных и временных нагрузок. При этом целью исследований являлось:

1. Выявление влияния предварительного напряжения на напряженно-деформированное состояние первоначально плоской мембраны и определение такой его величины, которая обеспечивает допустимые прогибы мембраны при действии постоянных и временных нагрузок.

2. Определение начальной формы провисания вантовой сети, обеспечивающей достаточную жесткость конструкции в процессе предварительного напряжения и действия постоянных и временных нагрузок.

3. Исследование допустимости проведения раздельных расчетов мембраны и вантовой сети на усилия предварительного напряжения путем сопоставления их результатов с расчетом всей комбинированной конструкции при тех же условиях.

4. Выполнение полного расчета комбинированной конструкции на действие постоянных и временных нагрузок с учетом усилий предварительного напряжения.

Конструктивная схема покрытия представлена рис. 12.33 и включает ванты, стойки-распорки и мембрану. Ванты подвешены к жесткому опорному контуру – железобетонному кольцу и образуют вогнутую вантовую сеть. В узлах вантовой сети вертикально установлены стойки-распорки (места их расположения на рис. 12.33 показаны точками), на верхние концы которых опирается жестко защемленная в опорном контуре мембрана. Ванты выполнены из стальных канатов $\varnothing 55$ мм, стойки – из стальных труб $\varnothing 63,5 \times 5$ (РС-2) и $\varnothing 108 \times 4$ (РС-1), а мембрана – из алюминиевого листа толщиной 2 мм.

В качестве расчетной принята дискретная модель, в которой ванты представляются прямолинейными шарнирно-соединенными растянуто-напряженными стержнями, стойки – прямолинейными сжатыми стержнями, шарнирно-соединенными с вантовой сетью и мембраной; а мембрана – набором плоских треугольных элементов. Ввиду симметричности конструкции покрытия и действующих на него нагрузок, в качестве расчетной схемы принята половина покрытия с наложенными на него по оси симметрии связями на перемещения (рис. 12.34). Здесь же точками показаны места установки стоек.

При описании топологической структуры покрытия фрагменты мембраны и вантовой сети отображены на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек. При этом введена местная нумерация узлов от 1 до $M_1 = 9$ и от 1 до $M_2 = 17$ по каждому направлению, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M_1 \cdot M_2$, как показано на рис. 12.35. Таким образом, каждый узел дискретной модели определяется номером N с текущими

сеточными координатами I, J , соответственно по осям Z^1 и Z^2 . При этом величины N, I, J связаны зависимостью: $N = I + M1(J - 1)$. На рис. 12.36 указаны номера узлов мембранного фрагмента.

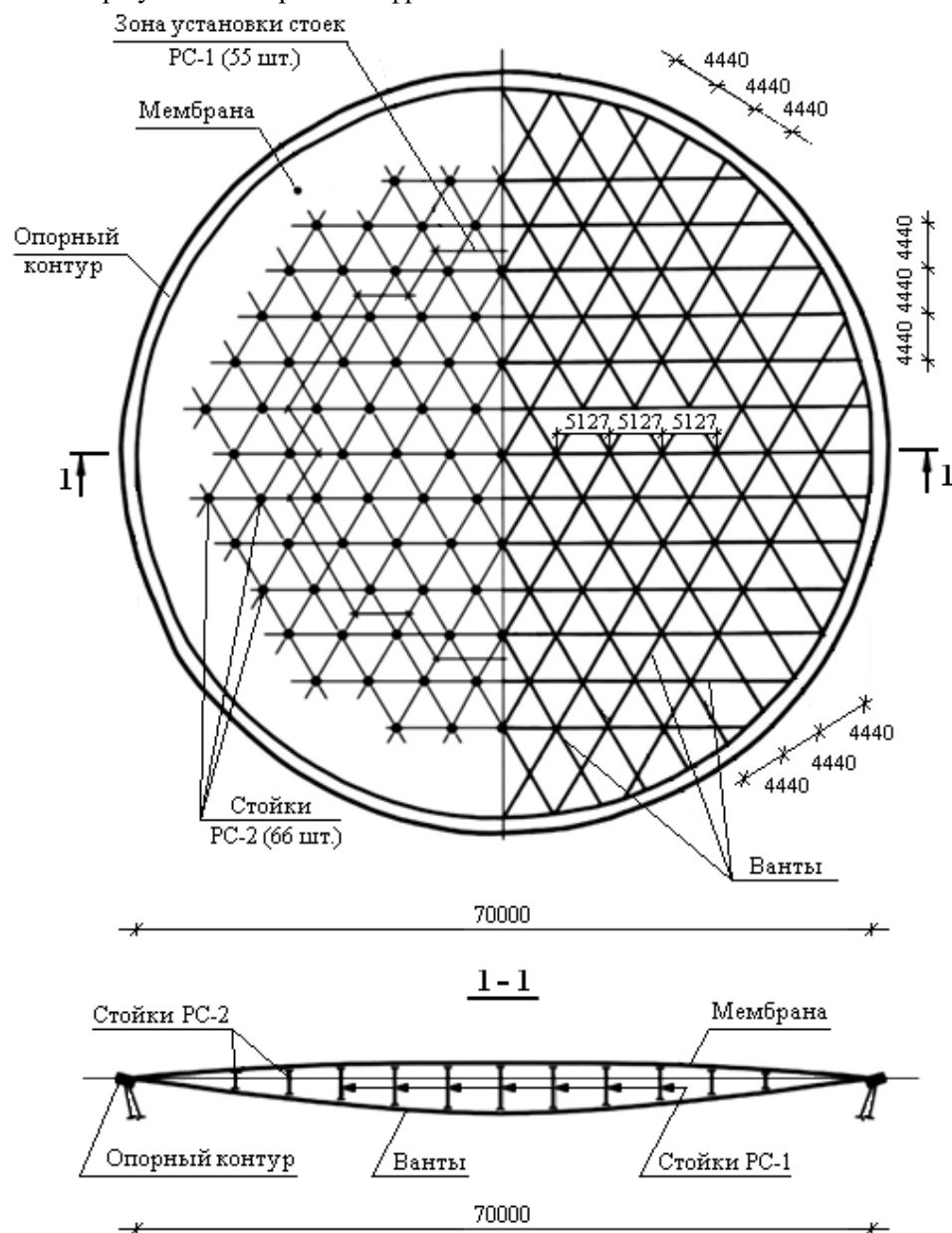


Рис. 12.33. Конструктивная схема покрытия

Геометрические характеристики элементов мембранно-вантовой ком-

бинированной системы покрытия демонстрационного зала и физические параметры материала были приняты следующими:

1. Ванты представляют собой стальные канаты $\varnothing 55$ мм. Площадь поперечного сечения каната составляет $F_{\text{вт}} = 13,81 \text{ см}^2$, жесткость – $EF = 22096 \text{ тс}$, а расчетная несущая способность – $N = 78,03 \text{ тс}$. Кроме того, модуль упругости материала проволок каната равняется $E = 1,6 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$, а масса его одного погонного метра составляет 12,25 кг.

2. Мембрана выполнена из алюминиевого листа толщиной 2 мм с модулем упругости материала $E = 7,1 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$, расчетным сопротивлением 190 кгс/см² и плотностью 2,73 т/м³.

3. Стойки представляют собой стальные трубы $\varnothing 63,5 \times 5$ с площадью поперечного сечения $F_{\text{ст}} = 9,19 \text{ см}^2$, модулем упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$, жесткостью – $EF = 19299 \text{ тс}$, коэффициентом Пуассона – $\nu = 0,3$ и массой одного погонного метра – 12,63 кг.

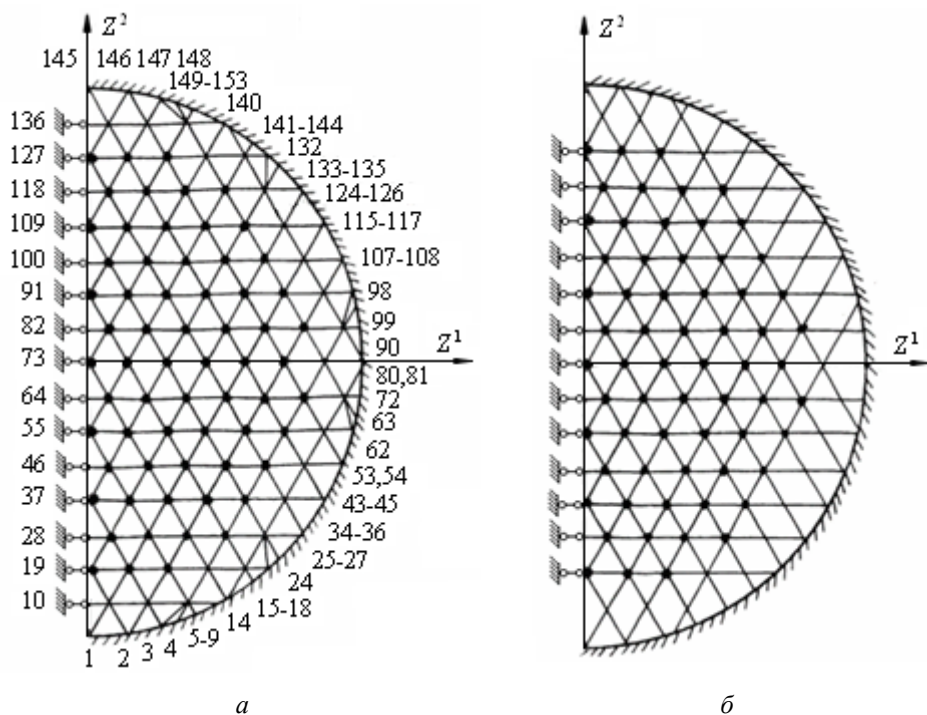


Рис. 12.34. Расчетная схема мембраны (а) и вантовой сети (б)

Расчет конструкции покрытия выполнялся в два этапа на следующие виды нагрузок: от усилий предварительного напряжения и эксплуатационные (с учетом собственного веса покрытия и снегового нагружения).

Расчет на усилия предварительного напряжения проводился в такой после-

довательности. На первом этапе были определены усилия в стойках покрытия для создания предварительного напряжения всей системы; на втором – определена исходная конфигурация вантовой сети, причем геометрия мембраны в исходном положении была принята плоской, и, наконец, на третьем – выполнен расчет конструкции покрытия на усилия предварительного напряжения.

Поскольку мембрана вследствие предварительного напряжения должна принять максимально выпуклую вверх форму (т. к. под действием эксплуатационных нагрузок она опускается), то основным критерием при определении усилий предварительного напряжения в стойках являлось требование не превышать мембранные напряжения расчетного сопротивления алюминиевого сплава АМг 2-П, равного $R_p = 1190 \text{ кгс/см}^2$.

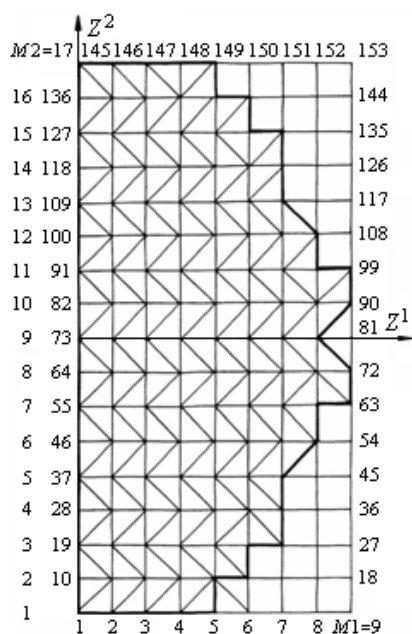


Рис. 12.35. Топологическая схема покрытия с нумерацией координатных линий и узлов сеточной области

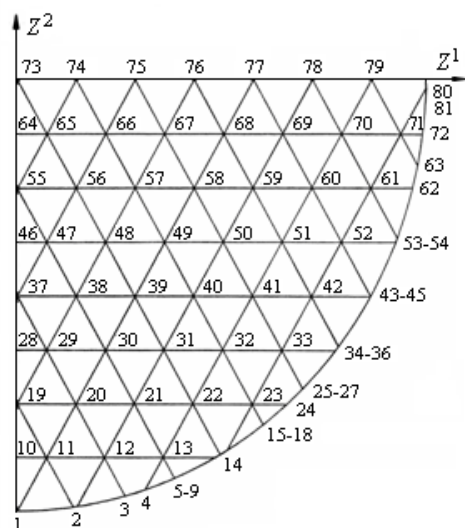


Рис. 12.36. Номера узлов сеточной области мембранного фрагмента

В соответствии с этим для определения усилий предварительного напряжения в стойках была рассчитана мембрана под действием сил, эквивалентных воздействию стоек. Расчеты выполнены на усилия величиной 1, 2 и 3 т и было установлено, что искомые усилия предварительного напряжения в стойках равны 2 тонны. В процессе расчета также выявлено, что в данном случае стрела подъема мембраны не является определяющим расчетным критерием, поскольку в соответствии с архитектурными и конструктивными требованиями ее величина могла варьироваться от 1,2 до 1,75 м, а при опре-

деленных усилиях предварительного напряжения в стойках она составила всего 1,37 м. Результаты расчета в виде графиков и изолиний представлены на рис. 12.37, 12.38.

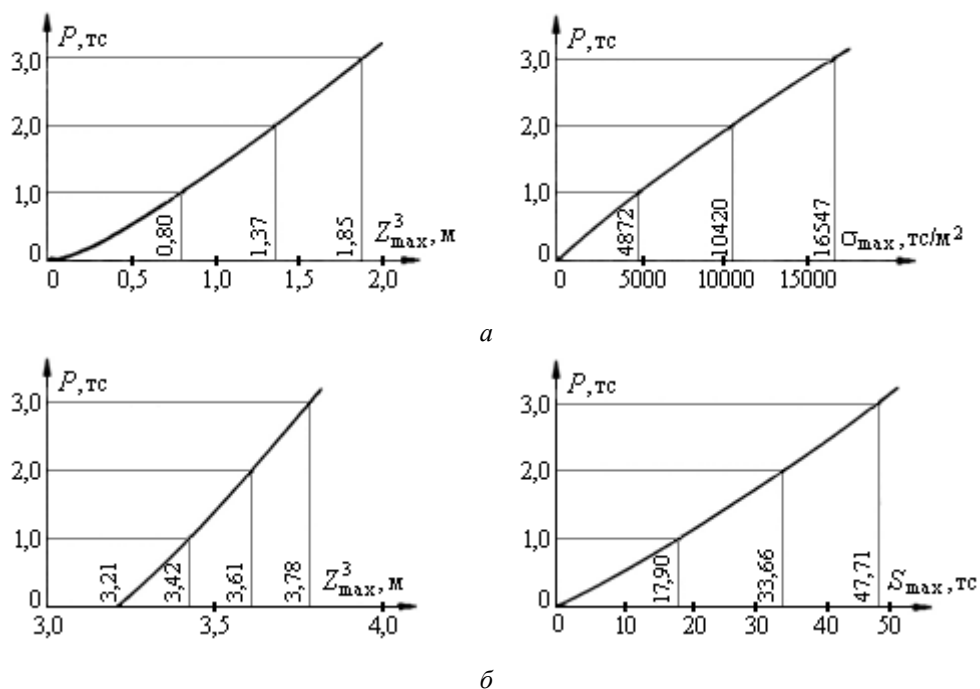


Рис. 12.37. Графики зависимостей $Z_{\max}^3$ и $\sigma_{\max}$ в мембране (а), а также $Z_{\max}^3$ и $S_{\max}$ в вантах (б) от усилий предварительного напряжения в стойках (раздельный расчет)

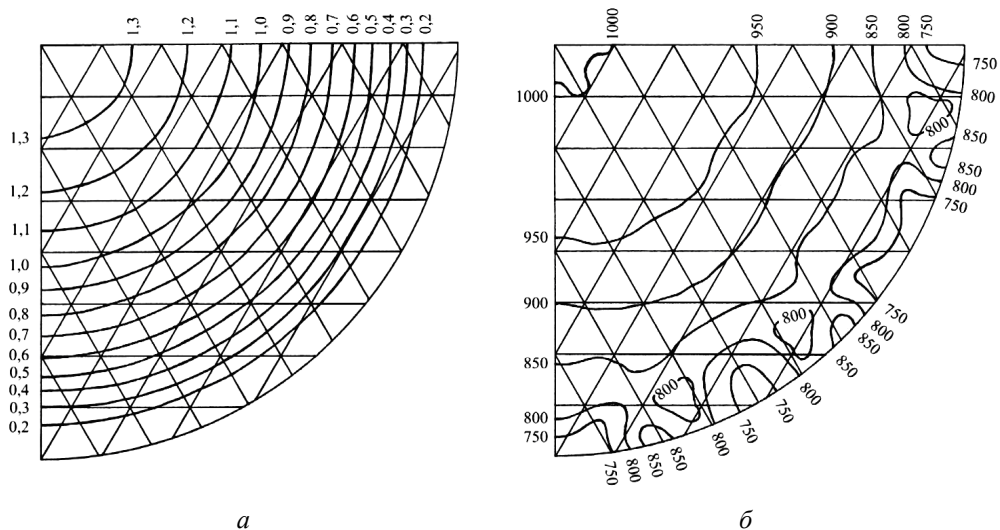


Рис. 12.38. Изолинии в мембране от усилий предварительного напряжения в стойках (раздельный расчет): $a - Z^3$, м; $b - \sigma_{\max}$, тс/м²

Определение исходной конфигурации вантовой сети производилось с учетом ориентировочной величины стрелы ее провисания в процессе эксплуатации, равной 3,5 м, величины расчетного усилия в вантах, равного 78,03 тс, а также узловых нагрузок на стойку от эксплуатационной нагрузки, значение которых составляло 7 тс.

В результате такого расчета была выявлена стрела провисания вантовой сети в исходном состоянии, величина которой достигла 3,21 м. Попутно, как и при раздельном расчете мембраны, были получены результаты раздельного расчета вантовой сети, от действия узловых сил, равных 2 тс. Результаты этих расчетов приведены на графиках (рис. 12.37).

Таким образом, получив исходную конфигурацию конструкции мембранно-вантового покрытия, был осуществлен ее совместный расчет на усилия предварительного напряжения. Результаты расчета представлены на рис. 12.39.

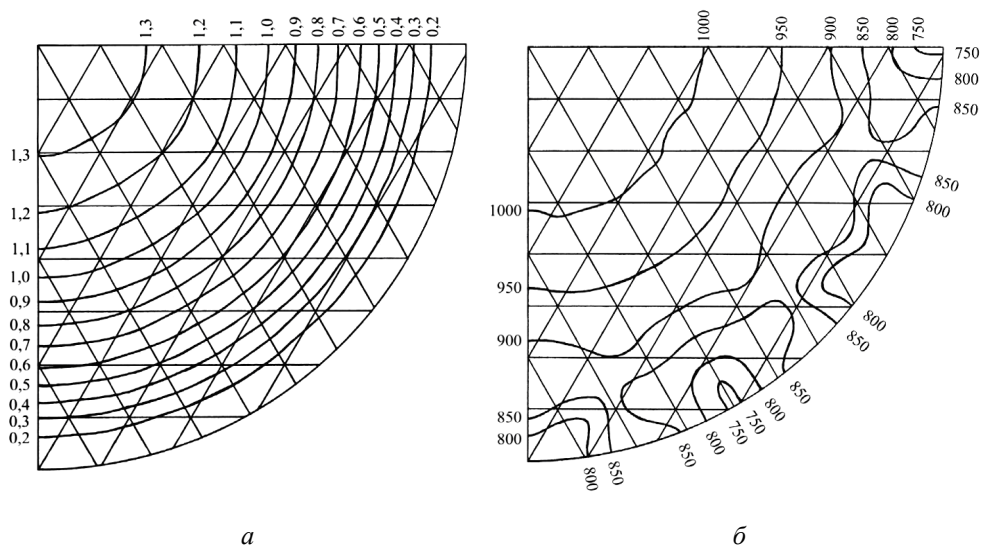


Рис. 12.39. Изолинии в мембране от усилий предварительного напряжения в стойках (совместный расчет):

$$a - Z^3, \text{ м}; \quad b - \sigma_{\max}, \text{ тс/м}^2$$

Предварительно напряженное усилиями в стойках мембранно-вантовое покрытие далее рассчитывалось на следующие эксплуатационные нагрузки: собственный вес кровли интенсивностью 92 кг/м², а также собственный вес

кровли и равномерно распределенной по всей поверхности покрытия снеговой нагрузки интенсивностью 190 кгс/м². Результаты расчета представлены на рис. 12.40 и 12.41.

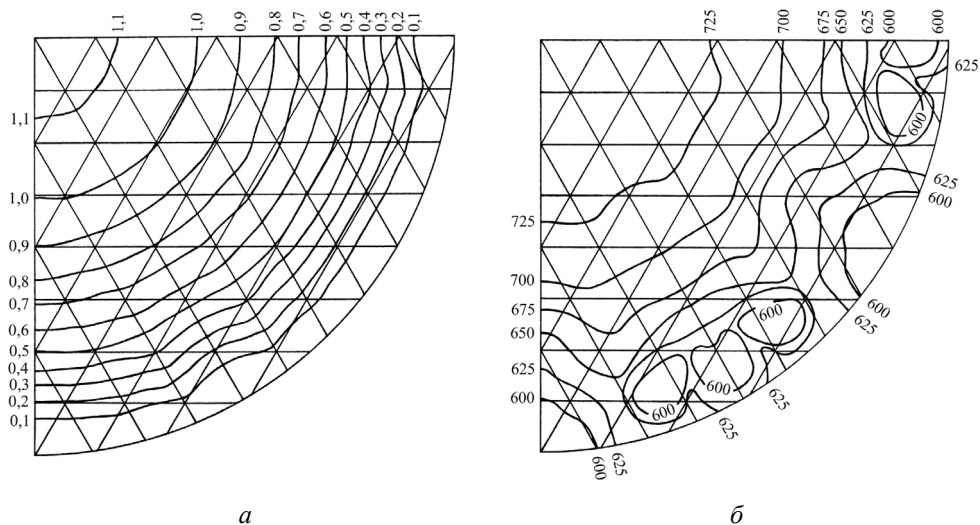


Рис. 12.40. Изолинии в мембране от усилий предварительного напряжения в стойках и собственного веса кровли:

$a - Z^3$, м; $б - \sigma_{\max}$, тс/м²

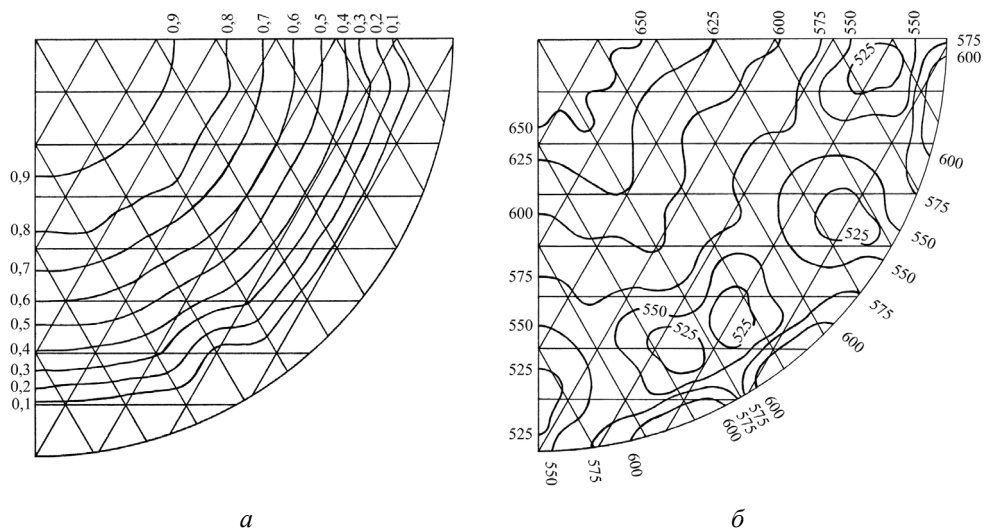


Рис. 12.41. Изолинии в мембране от усилий предварительного напряжения в стойках, собственного веса кровли и снеговой нагрузки:

$a - Z^3$, м; $б - \sigma_{\max}$, тс/м²

Основные результаты выполненных расчетов сводятся к следующему.

Раздельный расчет от усилий предварительного напряжения в стойках 2 тс: максимальные значения главных напряжений в мембране равны 10420 тс/м^2 , а ее выгиб (т. е. перемещения от начального плоского состояния) достигает 1,371 м. Максимальные значения усилий в вантах составляют 33,66 тс, а их прогиб равен 3,609 м при начальном значении 3,21 м.

Совместный расчет от усилий предварительного напряжения в стойках 2 тс: максимальные значения главных напряжений в мембране равны 10777 тс/м^2 , а ее выгиб – 1,387 м. Максимальные значения усилий в вантах достигают 33,81 тс, а их прогиб – 3,611 м при начальном значении 3,21 м.

Совместный расчет от усилий предварительного напряжения в стойках 2 тс и собственного веса кровли интенсивностью 92 кгс/м^2 : максимальные значения главных напряжений в мембране равны 7848 тс/м^2 , а ее выгиб достигает 1,19 м. Максимальные значения усилий в вантах составляют 50,74 тс, а их прогиб равен 3,802 м. Величина усилий в стойках составляет 4,26 тс.

Совместный расчет от усилий предварительного напряжения в стойках 2 тс, собственного веса кровли и снеговой нагрузки интенсивностью 190 кгс/м^2 : максимальные значения главных напряжений в мембране равны 6898 тс/м^2 , а ее выгиб достигает 0,996 м. Максимальные значения усилий в вантах составляют 70,56 тс, а их прогиб равен 3,998 м. Величина усилий в стойках составляет 7,51 тс.

Анализ результатов выполненных исследований мембранно-вантовой комбинированной системы покрытия демонстрационного зала позволяет сделать следующие выводы:

- расчет на действие усилий предварительного напряжения как для рассмотренной, так и для подобных ей конструкций целесообразно проводить с использованием раздельной расчетной схемы вследствие незначительного отличия результатов раздельного и совместного расчетов друг от друга;
- расчет на действие других нагрузок (собственный вес, оборудование, снег, ветер и др.) следует проводить с использованием совместной расчетной схемы после уточнения формы конструктивных элементов и параметров их исходного напряженно-деформированного состояния;
- действие эксплуатационных нагрузок приводит к уменьшению как растягивающих напряжений в мембране по сравнению с их величинами от усилий предварительного напряжения, так и выгиба мембраны, результирующее значение которого составляет 0,996 м и обеспечивает возможность свободного поверхностного стока дождевых вод. Кроме того, действие эксплуатационных нагрузок вызывает усилия в вантах с максимальным значением 70,56 тс, что меньше расчетного значения 78,03 тс;
- большая кинематическая подвижность (перемещения и формоизменение) системы наблюдается только на стадии создания ее предварительного напряжения, после чего конструкция приобретает достаточно высокую жесткость. Поэтому расчеты, выполняемые после достижения системой требуемо-

го уровня предварительного напряжения, можно выполнять на основе линеаризованной теории, выбирая в качестве исходной предварительно напряженную конфигурацию системы.

§ 12.10. Висячее покрытие зрительного зала

Выполнен проект реконструкции комплекса зданий и сооружений Зеленого театра, расположенного на Парковой аллее в г. Киеве и представляющего собой многоярусный ансамбль, состоящий из зрительного зала, необходимых технических помещений, развлекательных заведений, кафе, баров и клубов (рис. 12.42).

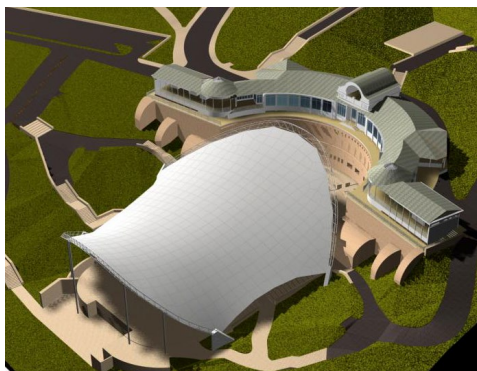
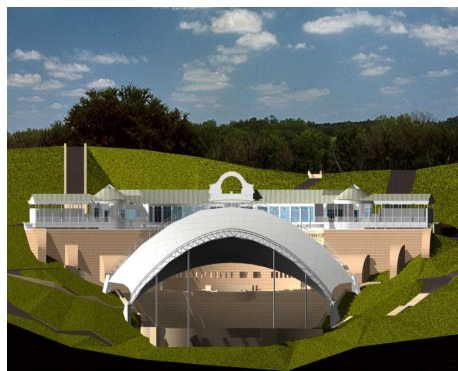
*а**б*

Рис. 12.42. Общий вид Зеленого театра:

а – перспектива; *б* – фасад

При проектировании висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра за основу была принята традиционная наиболее универсальная перекрестная вантовая сетка седловидной формы, натянутая между двумя наклонными двухшарнирными арками пролетами 50 и 42 м каждая и накрытая навесом специальной формы из высококачественной полупрозрачной полимерной ткани (рис. 12.43). Вантовая сетка была получена в результате пересечения двух семейств кривых. Для придания обеим видам вант наибольшей кривизны несущие ванты имеют направление, отвечающее седловине сетки, а натягающие – натянуты перпендикулярно несущим. Таким образом, вантовая сетка обладает значительной пространственной кривизной и жесткостью, вследствие чего даже при больших равномерных нагрузках она будет иметь незначительные деформации. Однако при неравномерных нагрузках, особенно кососимметричных, вантовая сетка может вести себя иначе, поскольку такие нагрузки, как правило, приводят к значительным перемещениям и деформациям висячего покрытия, тем самым создавая определенные трудности

для нормальной эксплуатации всего сооружения. Поэтому при проектировании были выполнены тщательные исследования рассматриваемой конструкции на влияние такого рода нагрузок.

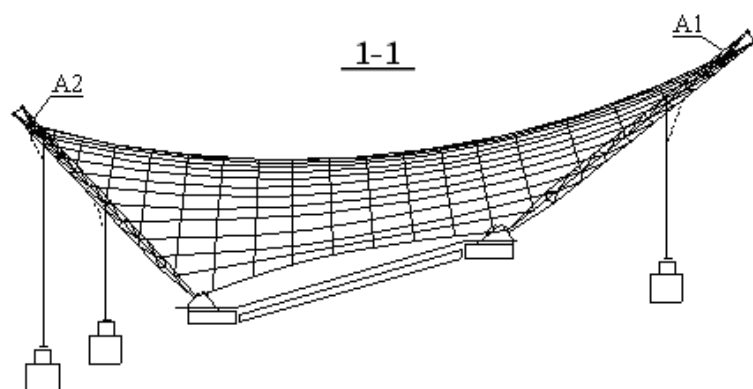
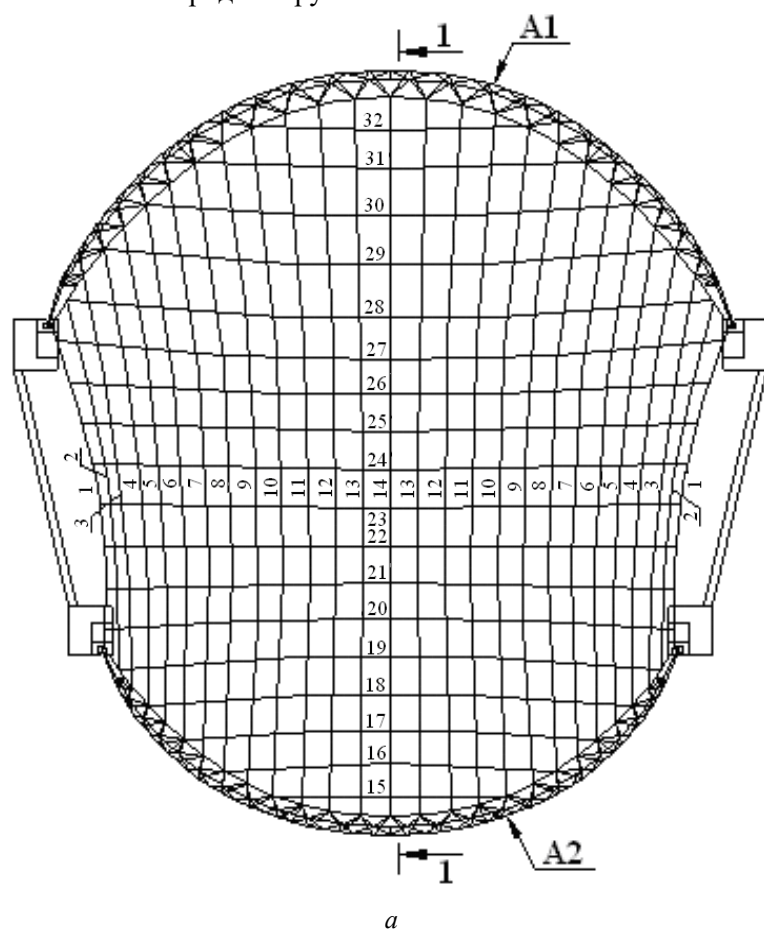


Рис. 12.43. Конструктивная схема висячего покрытия зрительного зала
Зеленого театра (с нумерацией вант):

а – план; *б* – разрез; (А1, А2 – опорные арки пролетом 50 и 42 м соответственно)

С целью придания покрытию большей прочности, а также более надежного соединения вант обоих направлений между собой для каждого их типа принято различное проектное решение. На более мощном контурном тросе с переменным шагом расположен ряд одинаковых деталей с круглым отверстием в нижней части, которые крепятся к тросу с помощью болтов и сжимов (рис. 12.44, *а*, *б*). Сквозь отверстие этой детали заводятся ванты другого направления. Все другие ванты, за исключением контурных, присоединяются друг к другу с помощью сжимов и прямоугольных пластин с двумя круглыми отверстиями, сквозь которые заводятся фиксируемые болтами пластины, удерживающие ванты в неподвижности (рис. 12.44, *в*). Крепление же самой вантовой сетки к нижним поясам арок осуществляется с помощью листовых фасонек с проушинами, причем центрирование вант производится по оси нижних поясов арок в узлах.

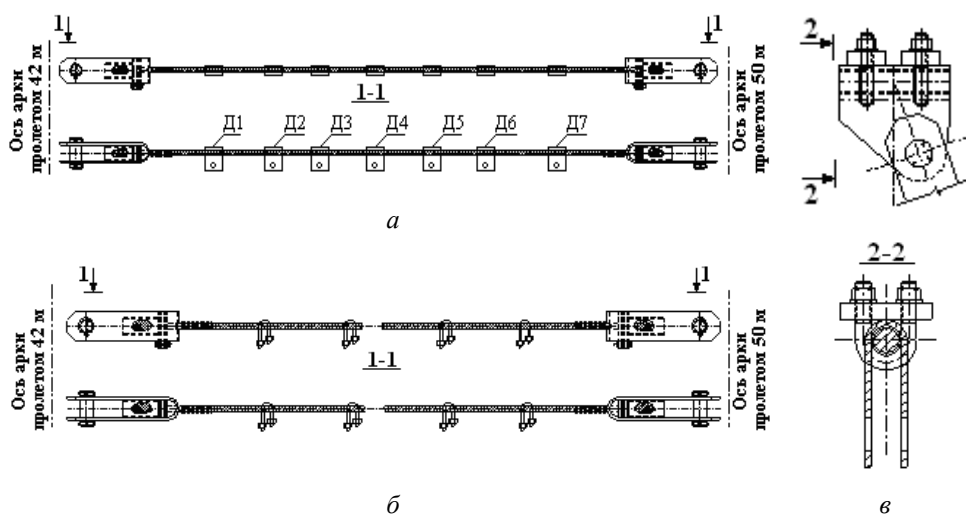


Рис. 12.44. Конструктивные схемы:

а – ванта 1; *б* – ванты 2...32; *в* – детали Д1...Д7

При проектировании висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра опорная конструкция принята из двух наклонных двухшарнирных металлических арок, уравнивающих распор вант своим собственным весом. Арки запроектированы из горячекатаных труб решетчатыми треугольного поперечного сечения с параллельными поясами в средней части пролета и с серповидными боковыми гранями в крайних четвертях. Все узловые соеди-

нения раскосов арок с поясами приняты сварными безфасоночными без сплющивания концов труб. Кроме того, в пролете 50-метровой арки установлены две промежуточные стойки, а в пролете 42-метровой – четыре промежуточные стойки в качестве опор в процессе монтажа, а также оттяжек для восприятия усилий от вантовой сетки.

Конечноэлементная модель висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра изображена на рис. 12.45 и насчитывает 1043 узла и 3353 конечных элементов (КЭ). Составляющими модели были приняты строительные конструкции, расположенные между уровнями от $-3,5$ до $19,0$ м включительно: стойки, решетчатые арки, вантовая сетка и полимерная ткань. Для описания вантовой сетки использованы стержневые КЭ, работающие только на растяжение; арки, подкосы арок и стойки аппроксимированы стержневыми КЭ общего вида, сечение которых отвечает использованным реальным профилям. Натянутая же на вантовую сетку полимерная ткань описана мембранными КЭ толщиной $0,0001$ м.

Примыкание арок и стоек к фундаментам принято в соответствии с реальными условиями опирания шарнирным, а для стержневых КЭ вантовой сетки в местах их пересечения реализованы специальные условия взаимодействия, учитывающие проскальзывание этих элементов. Последнее обеспечивает не только адекватность взаимных перемещений КЭ вантовой сетки, но и совместимость перемещений полимерной ткани и вантовой сетки перпендикулярно поверхности сетки, а также не препятствует их взаимным перемещениям по касательной к ее поверхности.

В расчете были учтены две группы нагрузок: постоянные (собственный вес несущих конструкций и предварительное напряжение в вантах) и временные (ветровая продольная и поперечная, а также снеговая симметричная и несимметричная). Таким образом, количество расчетных нагрузок составило шесть, а принятых в соответствии с требованиями действующих нормативных документов сочетаний нагрузок – восемь, при этом постоянные нагрузки присутствовали во всех сочетаниях.

При исследовании висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра были поставлены последовательные задачи определения начальной формы вантовой сетки от предварительного напряжения в вантах, расчета покрытия при воздействии расчетных нагрузок, а также расчета покрытия при воздействии их наихудшего расчетного сочетания. На первом этапе была решена задача формообразования и определена начальная конфигурация вантовой сетки с учетом ее геометрических параметров, а также подобрана соответствующая величина предварительного напряжения вант. Расчет выполнен за 16 шагов продолжения по безразмерному параметру нагружения D ($D = N_0/EF$, где N_0 – величина предварительного напряжения вант; E – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения), причем на каждом шаге по

параметру нагружения уточнение уравновешенной формы вантовой сетки проводилось итерированием с учетом заданных конструктивных и технологических ограничений.

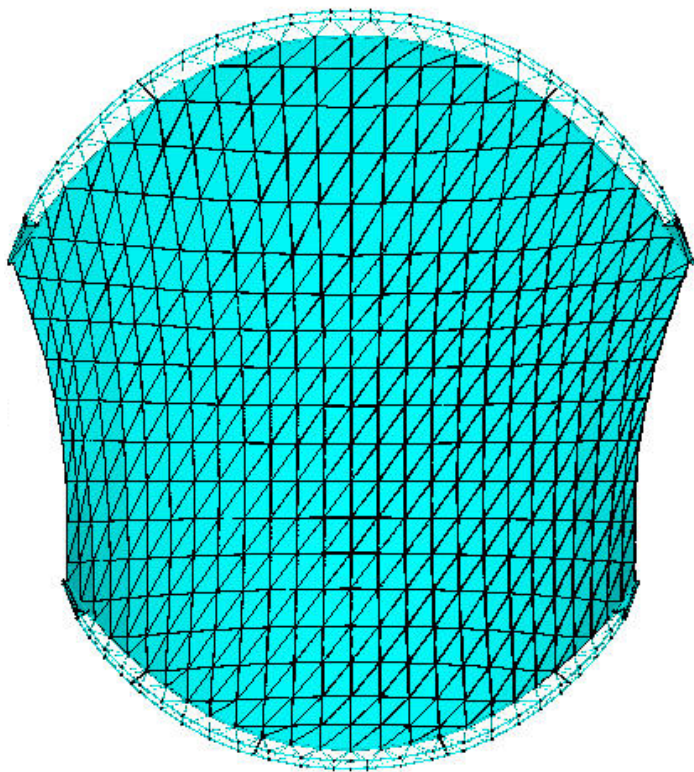
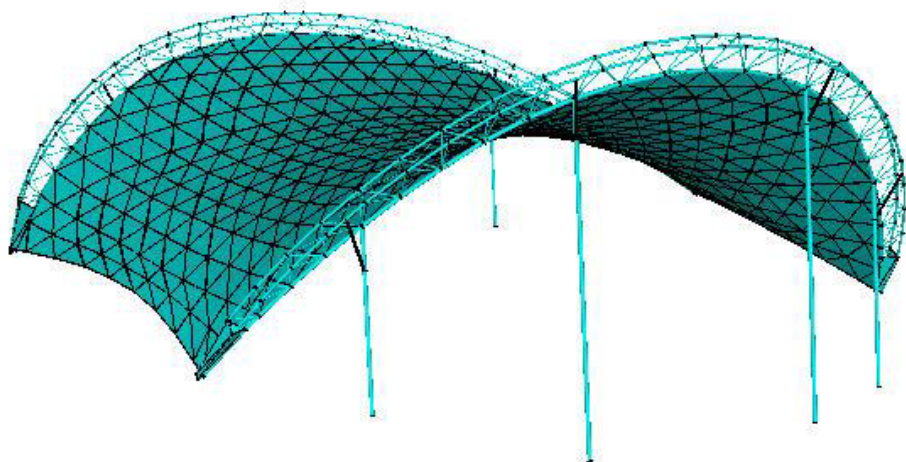
*a**б*

Рис. 12.45. Конечноэлементная модель висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра:

a – план; *b* – перспектива

На втором этапе исследования было определено напряженно-деформированное состояние висячего покрытия при воздействии постоянных и временных нагрузок. В связи с существенной геометрической нелинейностью конструкции покрытия, его расчет выполнен шагово-итерационным методом, в процессе которого был проведен анализ целого ряда факторов, существенно влияющих как на ход решения задачи в целом, так и на точность полученного результата. В качестве таких факторов были приняты: количество шагов нагружения и итераций на каждом шаге, величина и точность критериев, по которым рассчитывается задача, а также вид самих критериев. Причем величины соответствующих параметров подбирались индивидуально путем сопоставления результатов расчетов, их детального анализа, уточнения и подбора оптимального значения. Анализ результатов расчетов покрытия показал, что наихудшее расчетное сочетание нагрузок включает: собственный вес несущих конструкций, предварительное напряжение в вантах, снеговую несимметричную и ветровую продольную нагрузки.

И, наконец, на третьем этапе исследования был выполнен расчет покрытия на воздействие определенного на предыдущем этапе наихудшего расчетного сочетания нагрузок. Причем о характере напряженно-деформированного состояния висячего покрытия можно судить по результатам, представленным на рис. 12.46 – 12.48.

Вертикальные перемещения (рис. 12.46) достигают своих наибольших величин на части покрытия, находящейся под действием снеговой несимметричной нагрузки, их максимальные значения равны $w = 41,7$ см (что составляет 1/120 пролета) и находятся в допустимых пределах.

В этой же части покрытия отмечаются максимальные значения продольных усилий в вантах $N = 0,19$ МН при величине разрывного усилия $N_p = 0,22$ МН. Причем в ванте, находящейся посередине покрытия, продольное усилие практически равно нулю.

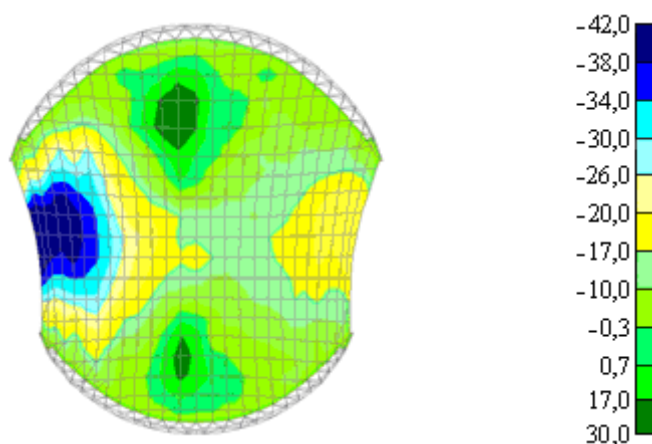


Рис. 12.46. Изополя вертикальных перемещений, см, висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра

Распределение вертикальных перемещений в опорных арках изображено на рис. 12.47. Из приведенных эпюр следует, что если арка пролетом 42 м при наихудшем расчетном сочетании нагрузок деформируется относительно вертикальной оси несимметрично, то арка пролетом 50 м, наоборот, – практически симметрично. Наибольшие значения вертикальных перемещений наблюдаются посередине арки пролетом 50 м (рис. 12.47, б), равняются $w = 13,05$ см, что составляет $1/383$ пролета.

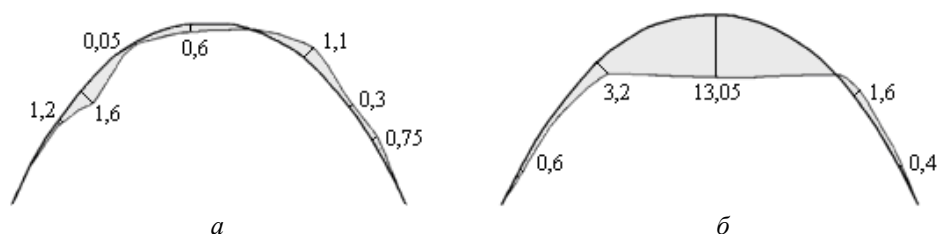


Рис. 12.47. Эпюры вертикальных перемещений, см, в опорных арках пролетом: а – 42 м; б – 50 м

Опорные арки почти по всей своей длине оказались сжатыми и практически безмоментными. Так, если максимальное сжимающее усилие достигает значения $N = 155,5$ кН (рис. 12.48), то изгибающий момент не превышает $M = 6$ кНм, что практически не влияет на напряженное состояние арки. Последнее свидетельствует также о том, что форма опорных арок покрытия близка к оптимальной. Следует также отметить, что перемещения висячего покрытия Зеленого театра при воздействии несимметричных нагрузок не намного превышают аналогичные значения при симметричных нагрузках, что является следствием значительной жесткости конструкции.

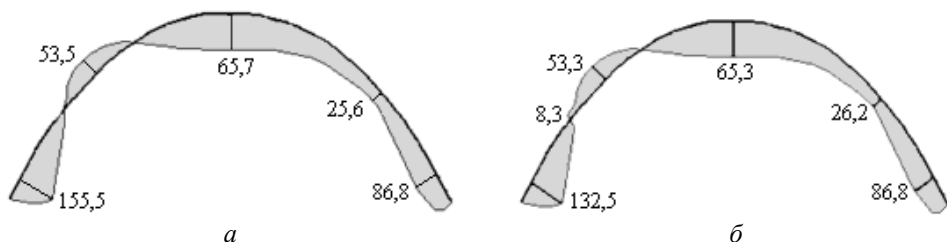


Рис. 12.48. Эпюры продольных усилий, кН, в опорных арках пролетом:
 a – 42 м; b – 50 м

Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенное конструктивное решение висячего покрытия зрительного зала Зеленого театра обеспечивает пространственную работу конструкции, высокую несущую способность и пониженную деформативность при действии неравномерных и несимметричных нагрузок, а усилия и перемещения при наихудшем расчетном сочетании нагрузок находятся в допустимых пределах.

§ 12.11. Висячее покрытие стадиона

В рамках выполнения программы подготовки Украины к проведению финального турнира чемпионата Европы 2012 года по футболу выполнена реконструкция расположенного в г. Киеве Национального спортивного комплекса «Олимпийский» (НСК «Олимпийский»), стадион которого решением УЕФА включен в число четырех стадионов Украины для проведения групповых, четвертьфинальных и финального матча чемпионата. При этом в отличие от многих других стадионов НСК «Олимпийский» остался универсальной спортивной ареной, на которой выполнено устройство легкоатлетических дорожек и секторов в соответствии с требованиями Международной федерации легкой атлетики, что дало возможность проводить не только футбольные матчи, но и международные легкоатлетические соревнования самого высокого уровня.

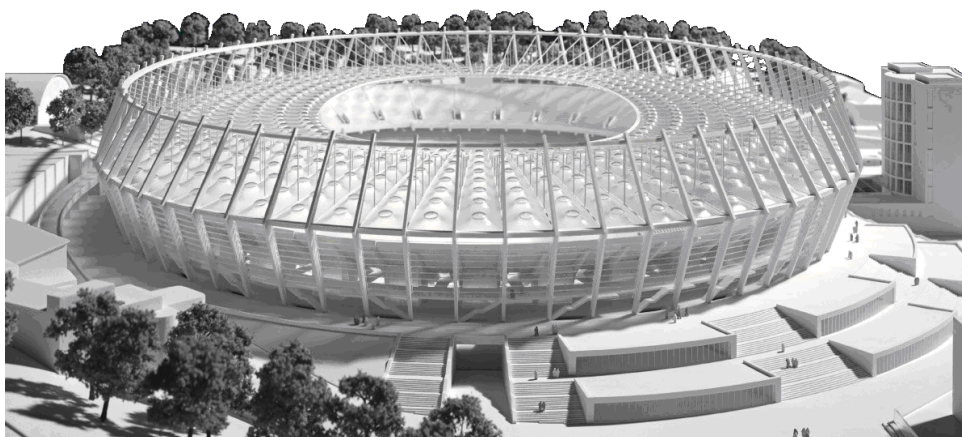
При проведении реконструкции стадиона был предусмотрен практически полный демонтаж его конструкций и осветительных опор за исключением второго яруса трибун, что позволило уменьшить объемы строительно-монтажных работ и сократить их сроки. Также было предусмотрено покрытие всего фасада стадиона стеклянной оболочкой и накрытие трибун большепролетной висячей светопрозрачной мембранно-тканевой системой. Рядом со стадионом было предусмотрено строительство 13-этажного здания «Олимпик Стар» (рис. 12.49).

Вокруг стадиона выполнен большой объем земляных и строительных работ, в том числе укрепление примыкающих к нему с южной и западной сторон гор и сооружение опоясывающей бетонной галереи для подхода зрителей. Под стадионом и вокруг него выполнено строительство большого подземного города с помещениями различного назначения и подземным паркин-

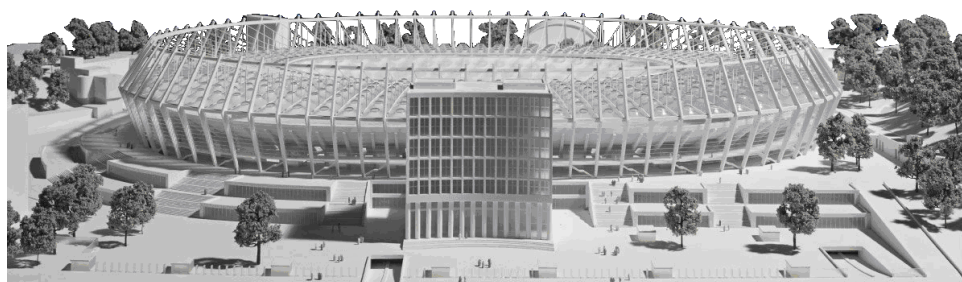
гом.

Ниже представлено описание основных концептуальных, конструктивных и технических решений, которые были приняты при проектировании реконструкции стадиона НСК «Олимпийский» с целью превращения его в стадион класса «Элит» в соответствии с требованиями УЕФА.

12.11.1. Концептуальное решение. Стадион имеет не только современное архитектурно-компоновочное решение и органично вписан в окружающую природную и городскую среду, но также конструктивно рациональную форму и технологичную планировку, обеспечивающую повышенную комфортность и безопасность посетителей. Стадион рассчитан на 69 тысяч зрителей, его площадь составляет около 60000 м², а размеры натурального газона футбольного поля равны: длина – 104 м и ширина – 72 м. Кроме того общая площадь застройки стадиона составляет около 160000 м², зона гостеприимства – 45000 м², а территория благоустройства охватывает площадь в границах полутора километров около стадиона (рис. 12.50).



a



б

Рис. 12.49. Общий вид стадиона НСК «Олимпийский» с северной (*a*) и западной (*б*) сторон

Генеральный подряд на проведение реконструкции стадиона получило АО «ХК «Киевгорстрой», а подряд на сооружение металлических конструкций покрытия над трибунами – ООО «Завод «Мастер-Профи Украина». Изготовление канатов и их анкерных устройств для висячей конструкции покрытия над трибунами стадиона осуществлено компанией «Bridon International Ltd» (Великобритания), а мембранно-тканевой системы – компанией «Hightex GmbH» (Германия).

Проектирование реконструкции НСК «Олимпийский» выполнено компанией «GMP von Gerkan, Marg und Partner» (Германия) с учетом стандартов УЕФА, предъявляемых к подобным сооружениям. Для проведения экспертизы принятых проектных решений металлических конструкций покрытия над трибунами, разработки проекта производства работ по их монтажу, а также выполнения проекта и последующего изготовления стендов укрупнительной сборки колонн и необходимой специальной монтажной оснастки был привлечен Украинский институт стальных конструкций им. В.Н. Шимановского.

Реконструкция стадиона, помимо собственно реконструкции его чаши, включала устройство на месте центральной трибуны четырехэтажного VIP-корпуса с президентской, VIP и корпоративными ложами, двухуровневыми скай-боксами, барами, ресторанами, микс-зоной, ложей прессы, помещениями для телевидения, операторов, комментаторов и охраны, двумя стационарными и небольшим промежуточным ярусами на трибуне, раздевалками для футболистов и арбитров, а также множеством других технических и вспомогательных помещений. В здании «Олимпик Стар» размещены различные функциональные помещения, в том числе офисного, спортивного и медийного (пресс-центр) назначения, а также расположенная на крыше вертолетная площадка (рис. 12.50).

Кроме того, полностью обновлена пристадионная инфраструктура путем создания автостоянок для футбольных команд, официальных лиц, VIP-посетителей, представителей СМИ и болельщиков, а также путей независимого и безопасного прохода и эвакуации зрителей. На примыкающей к стадиону территории устроены значительные коммерческая, торговая и развлекательная зоны, а также выполнено строительство электроподстанции «Олимпийская» мощностью 110 МВт.

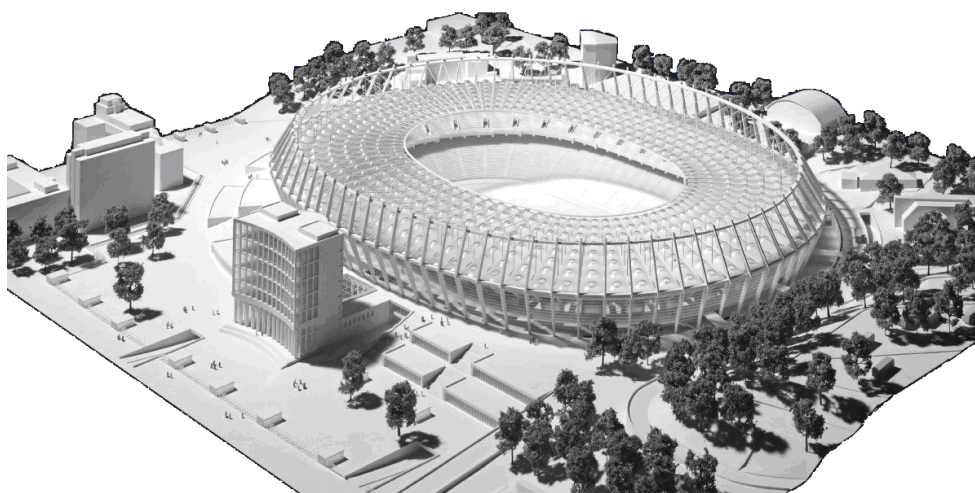
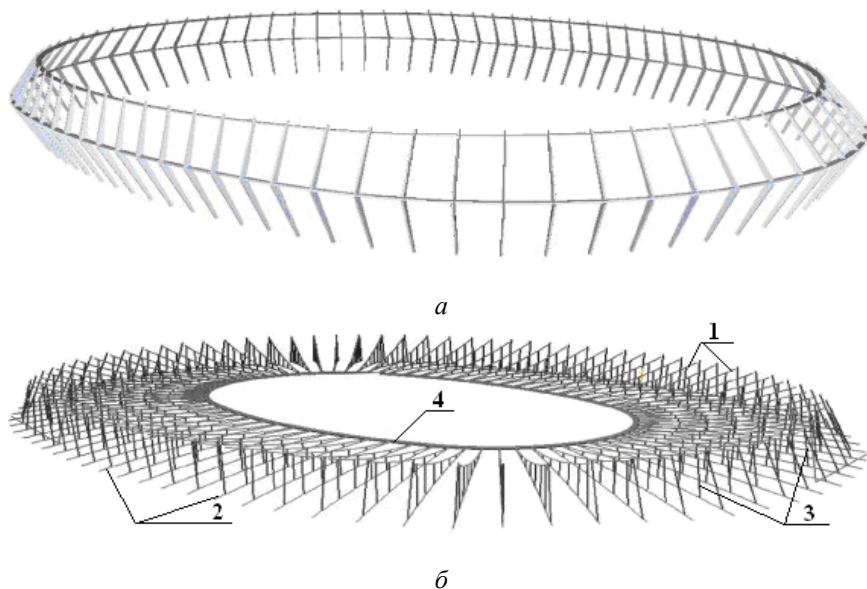
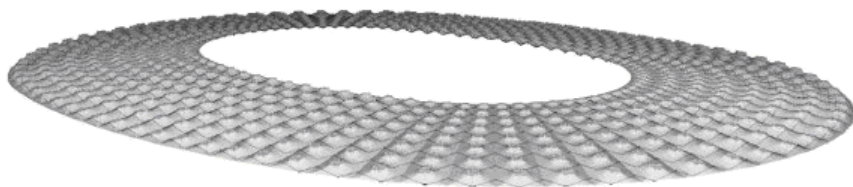


Рис. 12.50. Общий вид стадиона НСК «Олимпийский» с территорией благоустройства

На стадионе демонтирована старая (базирувавшаяся на четырех отдельно стоящих осветительных опорах) и установлена новая система освещения, расположенная непосредственно под покрытием и обеспечивающая требуемую освещенность поля. Кроме того, на стадионе установлены два светодиодных табло.





6

Рис. 12.51. Конструкция покрытия НСК «Олимпийский»:

- a* – несущий каркас; *б* – вантовая система; *в* – мембранно-тканевое покрытие;
1 – верхние радиальные ванты; 2 – нижние радиальные ванты; 3 – подвески;
4 – внутреннее контурное кольцо

Наиболее ответственным и сложным элементом стадиона НСК «Олимпийский» является покрытие над его трибунами с вылетом от 65 до 69 м и площадью 48500 м², которое не только входит в число самых больших в мире покрытий над спортивными аренами, но и одновременно удачно сочетает архитектурно-эстетические и эксплуатационные свойства. При этом отличительные особенности покрытия заключаются в том, что:

- металлические опорные колонны покрытия вынесены за чашу стадиона и не опираются на его трибуны, тем самым не передавая на них дополнительную нагрузку (рис. 12.51, *a*);
- покрытие имеет в плане вид овального кольца, представляет собой большепролетную висячую двухслойную радиально-кольцевую систему и конструктивно состоит из верхних и нижних радиальных вант диаметром от 55 до 85 мм, подвесок и внутреннего контурного кольца (рис. 12.51, *б*).
- в качестве ограждающей конструкции покрытия принята мембранно-тканевая система, выполненная из синтетического армированного стеклотканевым полотном, ламинированного тефлоном с обеих сторон, которое имеет высокую прочность, негорючее и светопрозрачное (рис. 12.51, *в*);
- поверхность покрытия может претерпевать необходимые изменения своей геометрии в зависимости от условий окружающей среды, причем процесс формоизменения осуществляется под управлением специально разработанной компьютерной системы, в результате чего создаются условия для качественной аэрации и увеличения продолжительности природного освещения травяного газона, контроля за температурно-влажностным режимом и устранения возможности возникновения парникового эффекта.

Общее число канатов в висячей системе покрытия составляет около 3 тысяч, их вес равен 765 т, суммарная длина достигает 40 км, а диаметр канатов находится в пределах от 13 до 115 мм. Для соединения отдельных канатов между собой предусмотрено более тысячи зажимов, а для их объединения в единую конструкцию покрытия – около 22 тысяч литых элементов (коннекторов) повышенной точности изготовления и механической обработ-

ки (рис. 12.52).

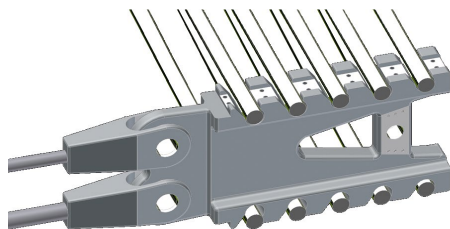


Рис. 12.52. Литой элемент (коннектор) для сопряжения верхних и нижних радиальных вант с внутренним контурным кольцом

12.11.2. Конструктивное решение. Большепролетная висячая двух-слойная радиально-кольцевая система покрытия над трибунами стадиона подвешена к верхнему внешнему опорному контуру, опирающемуся на восемьдесят металлических опорных колонн, каждая из которых имеет длину около 50 м и вес около 50 т (рис. 12.53).

Верхние радиальные ванты поддерживают выполненное из пучка канатов диаметром 90 мм внутреннее контурное кольцо висячей системы покрытия и подвешены к расположенному на колоннах на высоте порядка 40 м верхнему внешнему опорному контуру. Нижние радиальные ванты, закрепленные на внутреннем контурном кольце и расположенные непосредственно над трибунами, подвешены к нижнему внешнему опорному контуру, опирающемуся на колонны на высоте порядка 22 м. Внешние опорные контуры выполнены из листового проката и имеют сварное коробчатое поперечное сечение с габаритами 800×1200 мм при толщинах стенок от 30 до 70 мм.

В соответствии с принятой конструктивной схемой покрытия колонны, расположенные с шагом около 10,5 м, шарнирно опираются на железобетонные конструкции опоясывающей стадион галереи для подхода зрителей. Верхний опорный контур подвешен к верхушкам колонн шарнирно в плоскости вантовых ферм, а нижний опорный контур соединен с колоннами жестко. Колонны, с защемленным в них нижним опорным контуром, образуют жесткую пространственную рамную систему, которая, объединенная предварительно напряженной висячей системой покрытия в единое целое, обеспечивает устойчивость всей конструкции.

Внешние опорные контуры (как верхний, так и нижний) от передающегося на них распора в вантах испытывают сжатие, величина которого достигает 50 МН, а внутреннее контурное кольцо – растяжение, величина которого составляет около 55 МН. При этом величина максимального растягивающего усилия, которое способно воспринять кольцо, равно 135 МН.

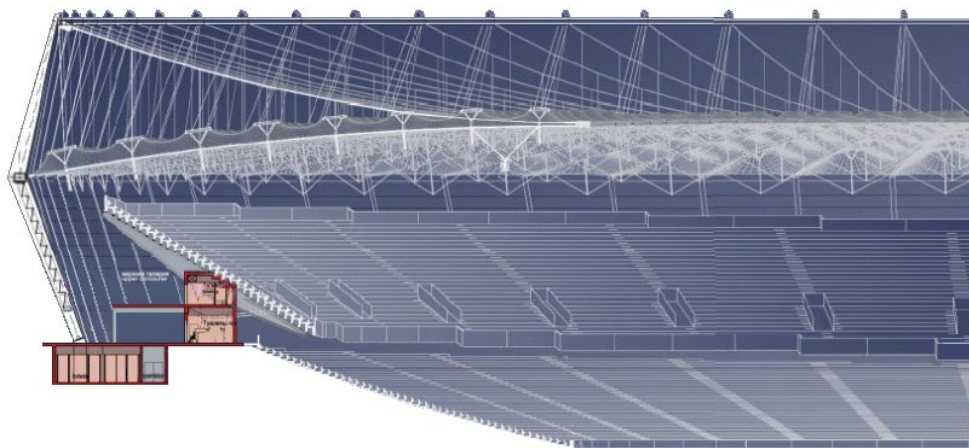


Рис. 12.53. Поперечный разрез и конструктивная схема
висячего покрытия над трибунами стадиона

Металлические опорные колонны, поддерживающие висячую систему покрытия, запроектированы по высоте ломаной конфигурации, причем точка перелома находится на уровне нижнего внешнего опорного контура (рис. 12.53). Высота нижнего участка колонн принята около 22 м, а верхнего – 18 м, что позволило уменьшить эллипсовидность верхнего внешнего опорного контура с целью уменьшения возникающих в нем изгибающих моментов при действии внешних нагрузок.

Над нижними радиальными вантами покрытия находится мембранно-тканевая система. Система запроектирована в виде тентовой конструкции со шпренгельными подпорками для придания секциям поверхности определенной вспарушенности, что позволило не только создать предварительное напряжение для стабилизации ее формы, но и обеспечить естественный отвод дождевых вод. При этом в центрах секций, где установлены шпренгельные подпорки, выполнено устройство купольных фонарей со светопрозрачным покрытием из поликарбонатных листов.

Основные конструктивные элементы каркаса покрытия изготовлены из стали класса С355, их заводские соединения запроектированы на сварке, а монтажные – на высокопрочных болтах.

12.11.3. Изготовление и монтаж металлоконструкций. Подряд на изготовление и монтаж металлических конструкций покрытия над трибунами стадиона получило ООО «Завод «Мастер-Профи Украина». Монтаж основных несущих элементов покрытия (опорных колонн, а также внешних верхнего и нижнего опорных контуров) выполнен ЗАО «НДВП «Криворожсталь-конструкция», а монтаж висячей большепролетной мембранно-тканевой системы осуществлен компаниями «Fagioli S.p.A.» (Италия), которая была при-

влечена для поставки, наладки и управления специализированным грузоподъемным оборудованием при подъеме конструкций покрытия в проектное положение, и «Hightex GmbH» (Германия), которая установила непосредственно мембранно-тканевую систему.

Одним из главных требований проекта покрытия над трибунами стадиона являлось обеспечение очень высокой точности изготовления и монтажа его основных несущих элементов в связи с тем, что вся опорная система покрытия, общая длина которой достигает почти одного километра, должна была монтироваться последовательно – элемент за элементом – с минимальными допусками (величина которых в ряде случаев назначена меньше установленной в отечественных нормативных документах), гарантирующими совпадение точки замыкания с местом начала монтажа.

Поэтому изготовитель несущих металлических конструкций покрытия – ООО «Завод «Мастер-Профи Украина» – не только доукомплектовал производство необходимым высокотехнологичным металлообрабатывающим оборудованием, но и разработал специальные технологии изготовления, контроля выполнения всех производственных процессов и монтажа, удовлетворяющие требованиям проекта. Кроме того, была создана специальная оснастка и сборочные стенды, позволяющие обеспечить достижение нужного качества конструкций, а также точности их сборки и монтажа. Так, например, на заводе была организована контрольная сборка всех изготовленных больше-размерных конструктивных элементов укрупненными фрагментами с последующим возможным устранением выявленных несоответствий в заводских условиях, которая позволила полностью удовлетворить проектные требования к точности изготовления конструкций и их монтажу. Поэтому проектом практически не была предусмотрена возможность коррекции несущих элементов покрытия после их изготовления.

При проектировании покрытия особое внимание уделялось технологичности изготовления и обеспечению возможности монтажа несущих металлических конструкций покрытия укрупненными блоками с целью упрощения и ускорения строительных работ. Поэтому все металлические опорные колонны предварительно укрупнялись на уровне земли, а монтаж несущих конструкций проводился поэтапно в следующем порядке – пять опорных колонн, пять секций нижнего внешнего опорного контура, секция верхнего внешнего опорного контура первого пролета и далее в указанной последовательности с учетом отставания монтажа секций верхнего внешнего опорного контура на четыре пролета, а именно: первая и вторая опорные колонны и секция нижнего внешнего опорного контура между ними; третья опорная колонна и секция нижнего внешнего опорного контура второго пролета; четвертая опорная колонна и секция нижнего внешнего опорного контура третьего пролета; пятая опорная колонна и секция нижнего внешнего опорного контура четвертого пролета, а также секция верхнего внешнего опорного контура первого проле-

та и далее в указанной очередности до момента замыкания всей конструкции в единое целое.

Для установки и регулировки геометрии несущих конструкций покрытия была разработана специальная монтажная оснастка. При этом было предусмотрено проведение на монтажной площадке укрупнения колонн из двух поставляемых отправочных марок в единый конструктивный элемент, для чего были спроектированы и изготовлены четыре специальных укрупнительных стенда (рис. 12.54).



Рис. 12.54. Общий вид стендов для укрупнительной сборки колонн на монтажной площадке



Рис. 12.55.
Переставные башни
для установки колонн
в проектное положение
и регулировки их геометрии

Укрупненные колонны поочередно устанавливались в проектное положение с использованием специальных переставных башен высотой около 18,5 м, которые, во-первых, являлись для колонн и секций нижнего внешнего опорного контура монтажными (временными) опорами и, во-вторых, позволяли производить регулировку геометрии колонн с применением установленных на них специальных домкратных устройств (рис. 12.55). После завершения регулировки геометрии очередной группы из пяти колонн башни перемещались для поддержки следующей группы колонн. При этом под установленные и отрегулированные колонны подводились подпорки на период до замыкания всей несущей опорной конструкции покрытия (рис. 12.56).

После окончания монтажа, замыкания несущей опорной конструкции покрытия и стабилизации ее формы путем создания предварительного напряжения была выполнена навеска вантовой сети висячей системы покрытия, для чего на каждой колонне предусмотрена установка натяжных домкратных устройств, управление которыми осуществлялось компьютерной системой.



Рис. 12.56.
Подпорки под колонны
на время монтажа

Монтаж конструктивных элементов несущей опорной конструкции покрытия был выполнен со стороны центральной (внутренней) зоны стадиона с помощью различных грузоподъемных механизмов, в том числе уникального крана Demag CC 2800-1 грузоподъемностью 600 т и длиной стрелы 114 м (рис. 12.57).



Рис. 12.57. Монтаж колонны кранами Demag CC 2800-1 и СКГ-100

12.11.4. Расчет конструкций. Сложность принятого проектного решения покрытия над трибунами стадиона НСК «Олимпийский» и высокие требования к его надежности обусловили проведение комплексных исследований работы конструкций покрытия при самых неблагоприятных сочетаниях нагрузок и воздействий. Для этого была принята расчетная схема, включающая выделенные в отдельные структурные фрагменты основные несущие конструкции покрытия. Первый из этих фрагментов является несущим каркасом покрытия, состоит из металлических опорных колонн, внешних верхнего и нижнего опорных контуров и показан на рис. 12.51, *а*; второй – представляет собой его вантовую систему, состоит из внутреннего контурного кольца, верхних и нижних радиальных вант и подвесок между ними и показан на рис. 12.51, *б*.

Конечноэлементная модель покрытия построена путем представления практически всех его несущих конструкций стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения-сжатия, изгиба и кручения, при этом отдельные участки колонн и опорных контуров (как правило, в зоне их узловых соединений) представлены пластинчатыми конечными элементами. В модели также было учтено, что опорные колонны опираются шарнирно, причем шарниры приняты с двумя степенями свободы, допускающими повороты в двух вертикальных плоскостях. Общее количество конечных элементов в модели составило 5468, узлов – 4880, а неизвестных – 20928.

Особенностью работы покрытия является восприятие им внешних нагрузок только при условии предварительного напряжения вантовой системы. Поэтому все расчеты были выполнены в два этапа. На первом этапе была определена проектная конфигурация предварительного напряженного покрытия над трибунами стадиона по его заданным основным геометрическим параметрам. При этом в качестве исходного было принято ненапряженное состояние покрытия (в котором нагрузка и усилия предварительного напряжения считались равными нулю), а проектное состояние получено путем пошагового приложения нагрузки с соответствующим уменьшением длин верхних и нижних радиальных вант пропорционально некоторому параметру α так, чтобы при $\alpha = 1$ они приобрели проектные величины. На втором этапе расчет покрытия производился в соответствии с установленными схемами нагружения: собственный вес конструкций покрытия, эксплуатационная нагрузка от вспомогательного оборудования (электросветильники, электропроводка, видеоэкраны с конструкциями для их установки, акустическое воздействие), нагрузка от предварительного напряжения, ветровое давление, снеговая и ледовая нагрузки, а также равномерно распределенные температурные (положительная и отрицательная разность температур) и сейсмические воздействия. Всего было проведено четыре вида расчетов покрытия, в том числе определены его напряженно-деформированные состояния от усилий предварительного напряжения и от статических нагрузок с учетом симметричного и

несимметричного приложения снеговой нагрузки, проверена общая устойчивость конструкции при действии статических нагрузок, а также определены частоты и формы собственных колебаний предварительно напряженной конструкции покрытия с учетом и без учета присоединенных масс вспомогательного оборудования и снега.

Кроме того был выполнен расчет покрытия над трибунами стадиона НСК «Олимпийский» при локализованных тепловых воздействиях с целью исследования влияния этих воздействий на общее напряженно-деформированное состояние покрытия, а также определения огнестойкости и проектирования огнезащиты конструктивных элементов системы покрытия. При этом было принято, что пожар локализован в районе только одной из опорных колонн и примыкающих к ней участков верхнего и нижнего внешних опорных контуров. В качестве расчетного из всех возможных сценариев развития пожарного процесса принят сценарий с наиболее интенсивными процессами горения и максимальными значениями температуры. Указанные значения были заданы в четырех характерных точках поперечного сечения колонны, показанных на рис. 12.58, *а*, а графики их изменения по высоте (от низа колонны при $z = 0$ м до верха колонны при $z = 42$ м) – на рис. 12.58, *б*.

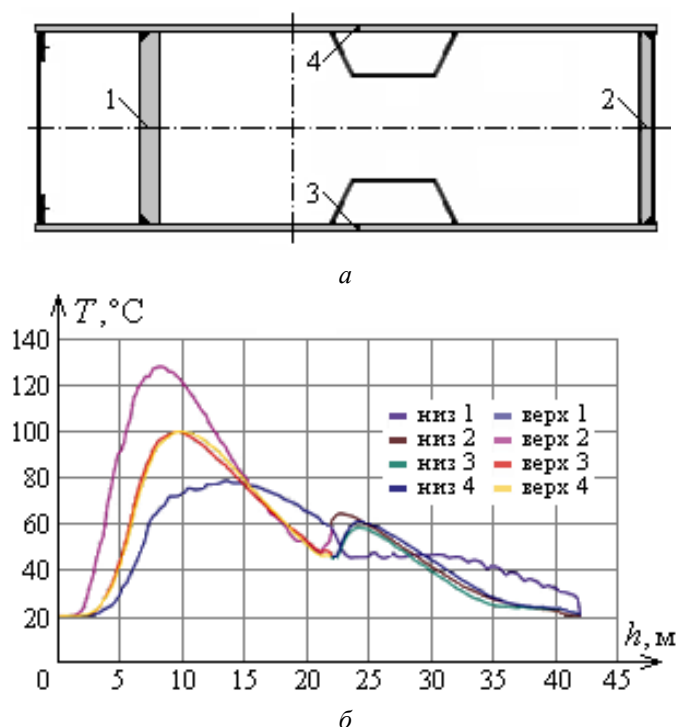


Рис. 12.58. Схема расположения характерных точек поперечного сечения колонны с заданными значениями температуры (*а*) и графики их изменения по ее высоте (*б*)

Для всех других узловых точек конечноэлементной модели значения температуры определялись методом усреднения с использованием функциональной зависимости между температурой и координатами узловой точки $T_N = f(t, x, y, z)$. На рис. 12.59, *а* представлено распределение значений температуры по колонне и примыкающим к ней участкам верхнего и нижнего внешних опорных контуров, а на рис. 12.59, *б* показано более детальное распределение температуры по нижней части колонны, включая ее внутренние конструктивные элементы (диафрагмы и внутренние ребра), причем для наглядности левая стенка поперечного сечения колонны условно не показана.

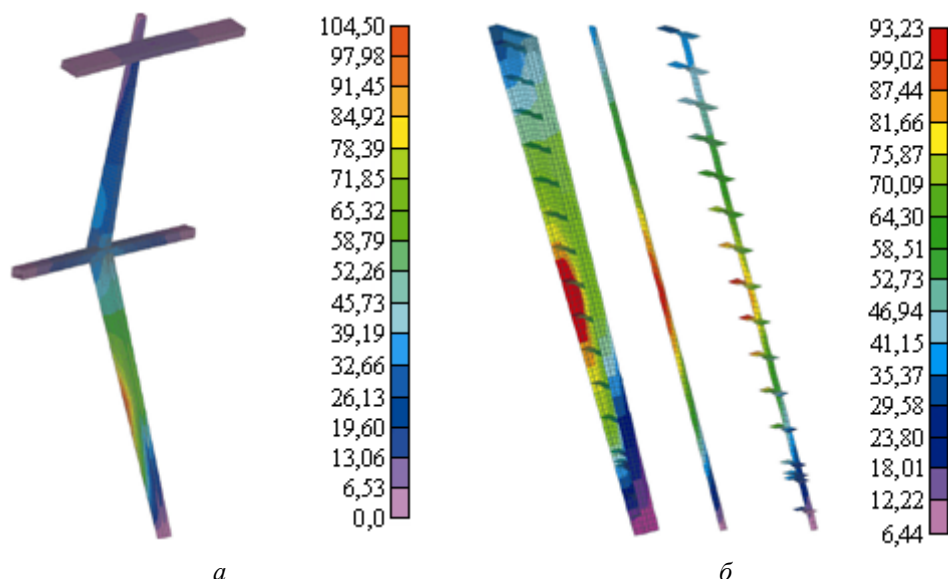


Рис. 12.59. Изополя значений температуры: *а* – в колонне и примыкающим к ней участкам верхнего и нижнего внешних опорных контуров; *б* – в нижней части колонны, включая ее внутренние конструктивные элементы

Выполнено два варианта исследования напряженно-деформированного состояния покрытия при локализованных тепловых воздействиях: в первом варианте наряду с указанными воздействиями были учтены усилия предварительного напряжения и статические нагрузки, а во втором варианте дополнительно была учтена симметричная снеговая нагрузка.

Общий характер деформирования покрытия при действии усилий предварительного напряжения, статических нагрузок и локализованных тепловых воздействий представлен на рис. 12.60. Сравнение результатов расчета без учета и с учетом локализованных тепловых воздействий (максимальные значения вертикальных перемещений в обоих случаях равны $w = 0,531$ м, что

составляет около 1/400 меньшей и 1/580 большей оси) свидетельствует, что значения перемещений не только находятся в допустимых пределах, но и практически не изменились. Последнее объясняется тем, что перемещение любого элемента и узла покрытия функционально зависит от работы всей конструкции и поэтому локальный нагрев только одной его колонны не приводит к изменению общей схемы деформирования.

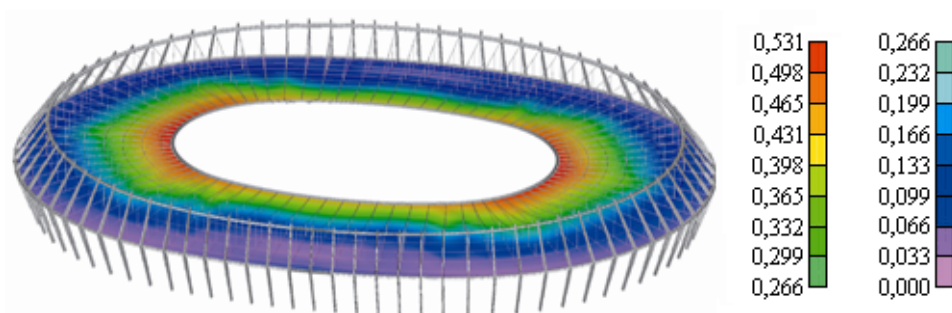


Рис. 12.60. Изополя вертикальных перемещений покрытия над трибунами стадиона НСК «Олимпийский», м, при действии усилий предварительного напряжения, статических нагрузок и локализованных тепловых воздействий

Распределение напряжений в наиболее напряженной зоне сопряжения колонны и нижнего внешнего опорного контура приведено на рис. 12.61, *а*. Из анализа представленных данных следует, что значения максимальных напряжений изменились незначительно (без теплового воздействия их величина достигает $\sigma_{\max} = 171,8$ МПа, а при тепловом воздействии – $\sigma_{\max} = 203,9$ МПа) и, кроме того, они намного меньше предела текучести $\sigma_T = 355$ МПа. Также отметим, что усилия в вантах изменились несущественно и остались намного меньше их предельных значений.

Анализ влияния локализованных тепловых воздействий на работоспособность конструкции покрытия при действии усилий предварительного напряжения, статических нагрузок и симметричной снеговой нагрузки показал, что, как и ранее, тепловые воздействия практически не приводят к изменению общей картины напряженно-деформированного состояния: максимальные значения вертикальных перемещений в обоих случаях равны $w = 1,155$ м, что составляет около 1/190 меньшей и 1/260 большей оси, а значения максимальных напряжений без теплового воздействия достигают $\sigma_{\max} = 188,1$ МПа, а при тепловом воздействии (рис. 12.61, *б*) – $\sigma_{\max} = 205,6$ МПа, что намного меньше предела текучести $\sigma_T = 355$ МПа. При этом, однако, более заметным стало влияние внутренних диафрагм нагретой колонны на перераспределение напряжений на ее стенках.

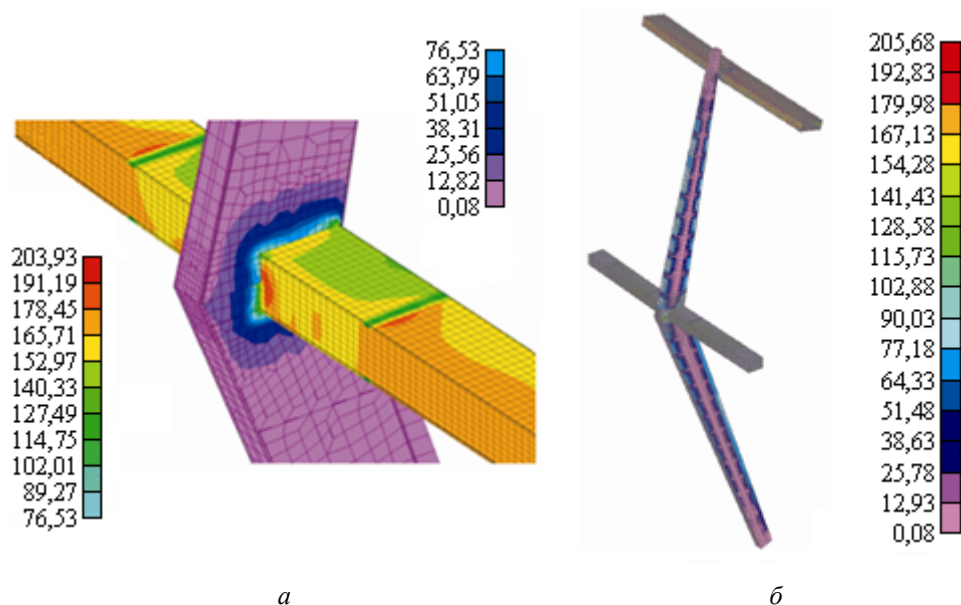


Рис. 12.61. Изополя напряжений, МПа: *а* – в зоне сопряжения колонны и нижнего внешнего опорного контура при действии усилий предварительного напряжения, статических нагрузок и локализованных тепловых воздействий; *б* – в колонне при действии усилий предварительного напряжения, статических нагрузок, симметричной снеговой нагрузки и локализованных тепловых воздействий

Результаты анализа расчетов покрытия над трибунами стадиона свидетельствуют о том, что рассчитанная конструкция:

- имеет не только высокую несущую способность и общую устойчивость, но и достаточно большой запас прочности, поскольку даже при самом неблагоприятном сочетании нагрузок величина максимального напряжения в стержневых конечных элементах достигла 225 МПа при пределе текучести 355 МПа, усилия в вантах остались положительными, а их величины оказались почти в два раза меньшими предельных значений;
- слабо чувствительна не только к равномерно распределенным температурным, но и локализованным тепловым воздействиям, которые практически не оказывают заметного влияния на напряженно-деформированное состояние конструктивных элементов системы покрытия;
- обладает достаточно большой динамической жесткостью, поскольку частоты трех низших форм свободных колебаний покрытия при действии предварительного напряжения, собственного веса конструктивных элементов и снега имеют не только сравнительно высокие значения 0,25; 0,27 и 0,29 Гц, но также практически не зависят от характера распределения снега по его поверхности.

§ 12.12. Висячий трубопроводный переход газопровода

При строительстве надземных трубопроводных переходов часто применяют висячие системы, выгодно отличающиеся от традиционных балочных и арочных систем рядом преимуществ: легкостью конструкции, возможностью перекрытия больших пролетов без промежуточных опор, рациональным использованием прочностных свойств материала, малой чувствительностью к различного рода перегрузкам и пр. Висячие переходы трубопроводов могут иметь различные схемы: с одноцепными, решетчатыми вантовыми или радиально-вантовыми фермами, в виде провисающей нити. Причем, независимо от вида принятой схемы висячего перехода необходимо, чтобы примененные конструктивные решения обеспечивали совместную работу всех его элементов для исключения появления недопустимых напряжений и деформаций в висячей системе. В качестве примера рассмотрим проектное решение висячего трубопроводного перехода действующего магистрального газопровода Ялта – Алушта, разработанного с целью предотвращения чрезвычайных ситуаций на участке трассы газопровода из-за активизации оползня, а также результаты его оценки, позволившие внести существенные улучшения в первоначально принятое проектное решение.

Конструкция висячего трубопроводного перехода газопровода (рис. 12.62) принята в виде однопролетной висячей системы пролетом 157,5 м и состоит из двух несущих канатов диаметром 42 мм, свободно опирающихся на стальные пилоны и закрепленных в анкерных железобетонных опорах. Несущие канаты подходят к пилонам со стороны пролета под углом 16° к горизонту, а к анкерным опорам уходят от Ялтинского и Алуштинского пилонов под углами 4° и 21° соответственно. Канаты соединены распорками из уголка 100х8, установленными в местах расположения подвесок. К несущим канатам на вертикальных стержневых подвесках, выполненных из круглой стали диаметром 20 мм и расположенных с шагом 7,5 м, подвешены балки седловидной формы, поперечное сечение которых принято из двух швеллеров 12П, расположенных полками наружу на расстоянии 130 мм между стенками.

По седловидным балкам свободно уложена труба газопровода $\varnothing 325 \times 8$ (рис. 12.63). Для технического обслуживания трубопроводного перехода предусмотрена смотровая тележка, передвигающаяся по монорельсу из двутавра 18М, закрепленного к седловидным балкам на болтовом соединении. Пилоны высотой 18,3 м и 14,3 м (Алуштинский и Ялтинский соответственно) запроектированы в виде плоских рам из листов, прокатных уголков и швеллеров. По верху пилонов предусмотрены оголовки, состоящие из сварных опорных частей с круговым очертанием и седел, на которые с использованием специальных круговых желобов опираются несущие канаты. Опирающие пилоны на опорах принято шарнирным. Поперечная жесткость висячего трубопроводного перехода обеспечивается 12-ю ветровыми оттяжками из канатов диаметром 24 мм, закрепленных к седловидным балкам в $1/7$ пролета и расположенных под различными углами к специальным боковым анкерным

опорам.

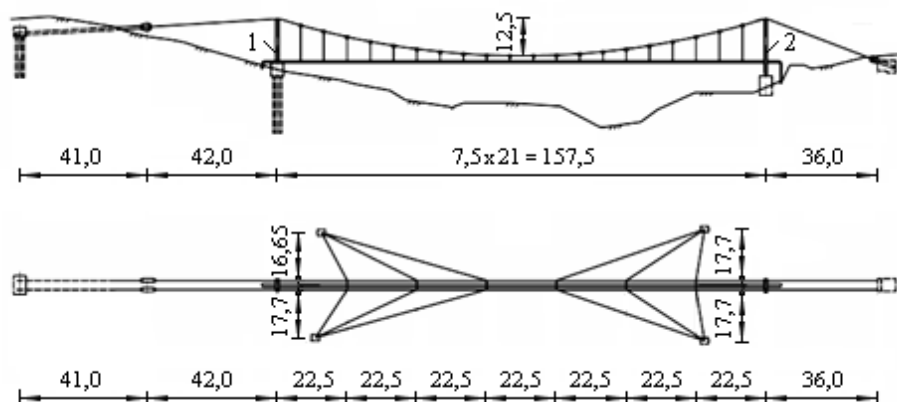


Рис. 12.62. Конструктивная схема висячего трубопроводного перехода газопровода: 1 – Ялтинский пилон; 2 – Алуштинский пилон

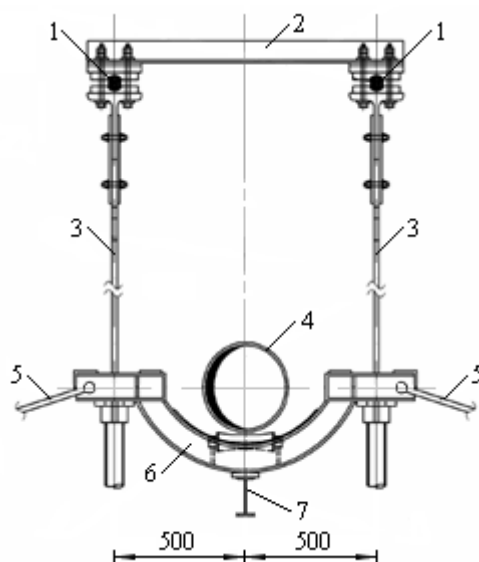


Рис. 12.63.
Поперечное сечение
висячего трубопроводного
перехода газопровода:
1 – несущие канаты;
2 – распорка;
3 – подвески;
4 – труба;
5 – ветровые оттяжки;
6 – седловидная балка;
7 – монорельс

В соответствии с проектом организации строительства монтаж висячего трубопроводного перехода газопровода предусмотрено выполнять следующим образом:

- установка пилонов в вертикальное положение с помощью временных тросов и трех фундаментов: анкерного и двух под ветровые канаты;
- монтаж несущих канатов с последующим закреплением на оголовках

пилонов и в натяжных устройствах;

- отклонение от вертикали осей пилонов натяжными устройствами таким образом, чтобы верх оголовков сместился на 150 мм и 140 мм в сторону анкерных фундаментов для Алуштинского и Ялтинского пилонов соответственно;

- монтаж подвесок, седловидных балок и элементов монорельса с помощью временной и смотровой тележек;

- монтаж трубы газопровода продольной подвижкой вдоль перехода по катковым опорам седловидных балок;

- возврат пилонов в вертикальное положение.

Выполненная оценка проекта висячего перехода газопровода выявила ряд неудачных решений.

12.12.1. Расчет висячего перехода. Проверочный расчет висячего трубопроводного перехода газопровода выполнен при следующих вариантах нагружения: 1 – собственный вес перехода ($q_0 = 1,75$ кН/м); 2 – симметричное нагружение: собственный вес, нагрузка от снега и гололеда, вес газа ($q_1 = 2,57$ кН/м) и изменение температуры ($\Delta t = 60^\circ\text{C}$); 3 – дополнительное сочетание нагрузок: симметричное нагружение плюс ветровая нагрузка ($q_v = 0,75$ кН/м).

При этом расчет трубопроводного перехода на несимметричное нагружение не проводился в связи с тем, что испытание газопровода предусмотрено выполнять сжатым воздухом, а не водой.

Проверочный расчет висячего трубопроводного перехода выполнен с учетом геометрической нелинейности по методике [64]. Расчет трубы газопровода показал, что при принятых в проекте конструктивных решениях, исключающих трубу из работы висячей системы (рис. 12.63), при самом неблагоприятном нагружении (дополнительное сочетание нагрузок) в поперечном сечении трубы в середине пролета возникают максимальные напряжения $\sigma_{\max} = 309,56$ МПа, значительно превышающие расчетное сопротивление ее материала (сталь Ст. 20) $R_2 = 204,5$ МПа. В связи с этим выполнен повторный проверочный расчет перехода с учетом закрепления трубы в местах расположения подвесок и ветровых оттяжек, анализ результатов которого показал, что при самом неблагоприятном нагружении максимальные напряжения в трубе газопровода возникают в местах крепления ветровых оттяжек $\sigma_{\max} = 117,4$ МПа и не превышают допустимых значений. Проверочный расчет также подтвердил, что принятые сечения несущих канатов, ветровых оттяжек и подвесок отвечают нормативным требованиям по прочности и могут быть использованы в висячем переходе.

12.12.2. Оценка принятых конструктивных решений. В проекте висячего перехода труба не включена в совместную работу с остальными элементами перехода и воспринимается ими в качестве нагрузки. В результате рассматриваемая висячая система является достаточно гибкой и допускает

продольные перемещения подвесок с седловидными балками. Увеличить жесткость трубопроводного перехода можно включением трубы в работу висячей системы путем ее закрепления в местах расположения подвесок (рис. 12.64). Кроме того, принятая конструкция узла опирания трубы газопровода на седловидные балки не предусматривает связи между трубой и ветровыми оттяжками, что приводит к возникновению в трубе напряжений, превышающих допустимое значение. Поэтому для обеспечения совместной работы трубы газопровода и ветровых оттяжек предложена конструкция крепления, приведенная на рис. 12.64.

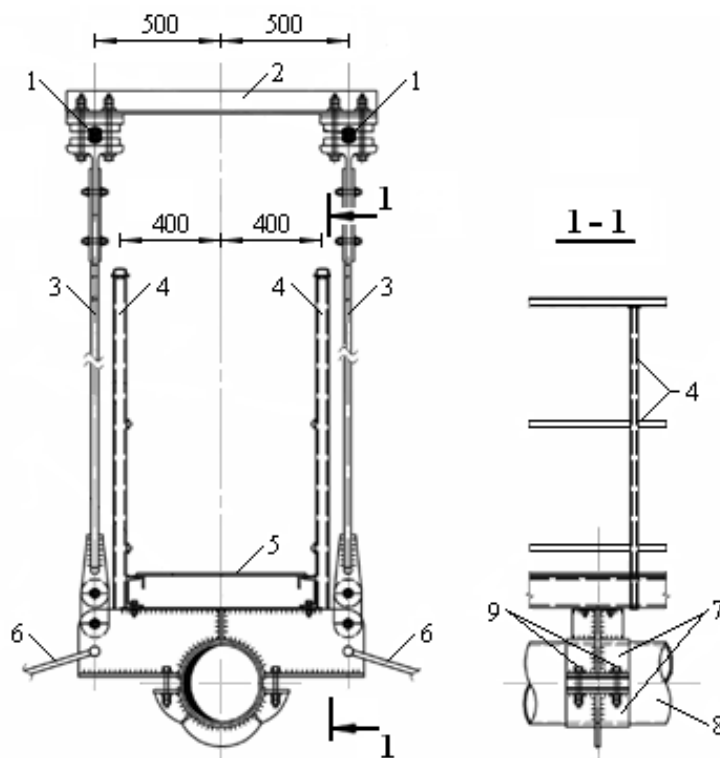


Рис. 12.64. Рекомендуемая конструкция смотрового мостика и узлов крепления трубы газопровода к подвескам и ветровым оттяжкам:

- 1 – несущие канаты; 2 – распорка; 3 – подвески; 4 – ограждение смотрового мостика; 5 – смотровой мостик; 6 – ветровые оттяжки; 7 – бандаж; 8 – труба; 9 – болты М24

Предусмотренное проектом крепление трубы газопровода в местах опирания пилонов посредством ее подвески к пилонам с помощью седловидных балок допускает перемещение трубы перпендикулярно оси перехода. Во избежание этого рекомендован узел крепления трубы, представленный на рис. 12.65.

Обслуживание конструкций газопровода согласно проекту предусмот-

рено с помощью подвесной тележки, передвигающейся по подвешенному к седловидным балкам монорельсу. В целом применение таких эксплуатационных устройств в надземных трубопроводных переходах газопроводов допускается, но на практике они себя не оправдывают в связи с относительно большой подвижностью висячих систем, приводящей к заклиниванию тележек. Ввиду этого, более эффективным и хорошо зарекомендовавшим себя решением для обслуживания надземных газопроводов является устройство смотровых мостиков [198] (рис. 12.64), позволяющих не только обеспечить полный доступ к висячим конструкциям, но и ужесточить балку жесткости с одновременным уменьшением деформативности висячей системы.

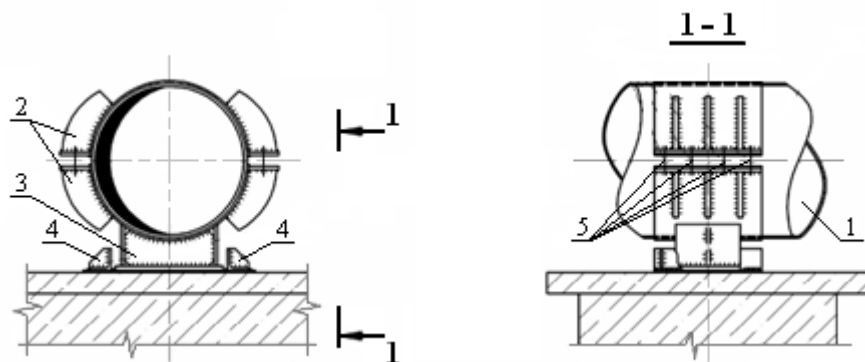


Рис. 12.65. Рекомендуемый узел крепления трубы газопровода в местах опирания пилонов:

1 – труба; 2 – бандаж; 3 – опорный столик; 4 – упоры; 5 – болты М24

12.12.3. Оценка проекта организации строительства. Согласно разработанному проекту укладки трубы газопровода в пределах перехода осуществляется методом продольной надвигки с последовательным наращиванием трехтрубных секций. Однако данный способ укладки трубы газопровода является нереализуемым, поскольку при надвигке трубы возникнет неравномерное нагружение висячей системы, неизбежно приводящее к большому S-образному прогибу несущих канатов [198]. Последнее приведет не только к возникновению больших напряжений в трубе, но и сделает невозможным ее дальнейшую надвигку из-за больших неравномерных прогибов. В связи с этим рекомендуется произвести монтаж трубопровода навесным способом (рис. 12.66), согласно которому заготовленные заранее трубы (например, длиной 24,0 м) с бандажами и столиками для крепления подвесок и служебного мостика подаются в пролет для последующего укрупнения в единую плетть. Учитывая неравномерный профиль уровня земли, участки труб укладываются на временные опоры на отметке –5,0 м от проектного положения низа трубы, где они свариваются. Готовый участок трубопровода для закрепления к подвескам поднимается полиспастами и двумя автокрана-

ми. Закрепление трубы к подвескам и корректировка их продольного профиля производится с передвижной автомобильной стреловой вышки, которую последовательно перемещают вдоль оси перехода. Одновременно с монтажом трубы производится установка и натягивание ветровых оттяжек. После этого смонтированный трубопровод соединяется с трубопроводом трассы.

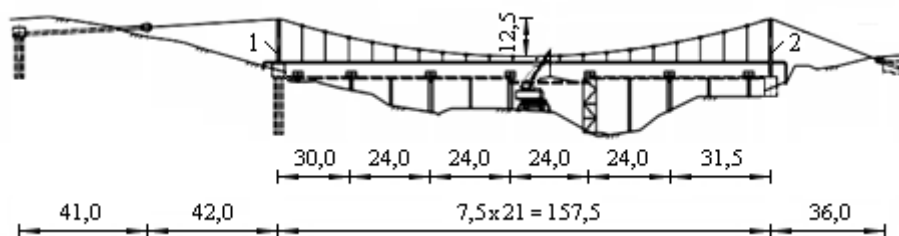


Рис. 12.66. Принципиальная схема монтажа висячего трубопроводного перехода газопровода: 1 – Ялтинский пилон; 2 – Алуштинский пилон

12.12.4. Выводы и предложения. Анализ результатов оценки проекта висячего перехода газопровода свидетельствует, что:

- при проектировании висячих трубопроводных переходов следует учитывать опыт проектирования аналогичных сооружений, что позволит избежать многих неудачных решений;
- принятые конструктивные решения должны в обязательном порядке обеспечивать соответствие расчетных схем и действительных условий работы конструкций.

§ 12.13. Висячее покрытие здания общественного назначения

Выполнено исследование напряженно-деформированного состояния висячего большепролетного комбинированного покрытия здания общественного назначения. Покрытие в плане имеет прямоугольную форму длиной 144 м и шириной 80 м и подвешено к находящемуся на отметке 19,0 м замкнутому трубобетонному опорному контуру (рис. 12.67). Вдоль продольных сторон здания с шагом 3,2 м установлены железобетонные колонны, поддерживающие опорный контур.

Основными несущими элементами покрытия являются ванты с начальной стрелой провисания 3 м. Ванты расположены параллельно поперечным сторонам опорного контура и примыкают с шагом 1,6 м к его продольным сторонам. Распор от вант воспринимается опорным контуром и при помощи тросовых оттяжек передается на основание. По вантам уложены сборные железобетонные плиты со спаренными трапециевидными ребрами, по которым выполнена мягкая кровля. Стабилизация покрытия произведена путем замо-

ноличивания швов между плитами, что позволило создать монолитную железобетонную оболочку цилиндрической формы.

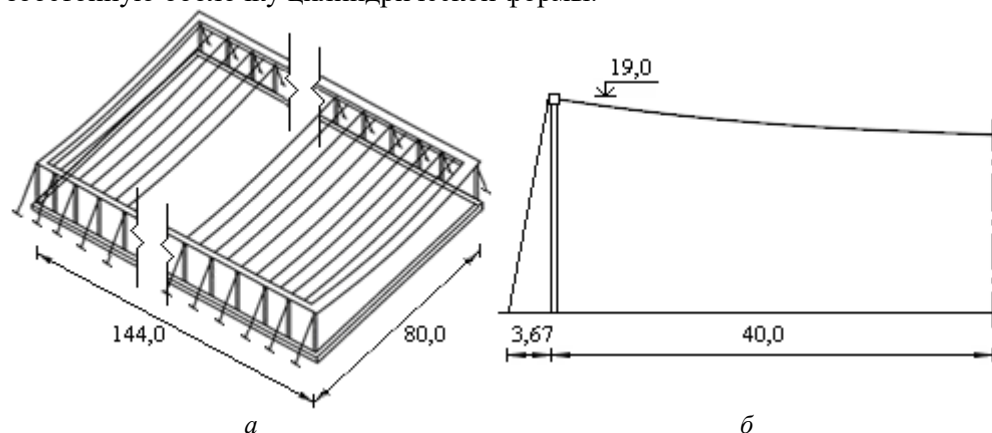


Рис. 12.67. Конструктивная схема висячего большепролетного комбинированного покрытия здания общественного назначения:
а – общий вид; *б* – поперечное сечение

Все ванты выполнены из двух спаренных в плоскости покрытия тросов $\varnothing 76$ мм каждый (рис. 12.68, *а*). Поперечное сечение опорного трубобетонного контура представлено на рис. 12.68, *б*. Контур состоит из заполненной бетоном металлической трубы $\varnothing 420 \times 10$ мм с арматурным каркасом из 8 стержней $\varnothing 14$ АШ. Ванты и труба опорного контура выполнены из стали марки С46/33 с пределом текучести $\sigma_t = 330$ МПа, а бетон опорного контура принят класса В35 с предельным значением $\sigma_{пр} = 28,6$ МПа.

В качестве нагрузки на покрытие принят равномерно распределенный по его поверхности собственный вес конструкций с учетом мягкой кровли, асфальтобетонной стяжки, утеплителя, пароизоляции и цементной стяжки, а также легкого подвесного потолка и электроосветительного оборудования $q_{св} = 3,79$ кН/м² и максимальной снеговой нагрузки $q_c = 1,57$ кН/м². Причем указанная нагрузка при расчете покрытия вследствие присущих ему конструктивных особенностей приложена не к монолитной железобетонной оболочке, а непосредственно к его основным несущим элементам – вантам в виде распределенной по их длине погонной нагрузки.

Обратим внимание на то, что в связи со значительной геометрической нелинейностью задачи и достаточно большой развитостью здания в продольном направлении расчет висячего большепролетного комбинированного покрытия производился в два этапа. Во-первых, была определена геометрия центральной ванты при различных условиях работы опорного контура (недеформируемый и упруго-податливый) и, во-вторых, было исследовано напряженно-деформированное состояние наиболее напряженной угловой зоны по-

крытия с учетом упруго-податливой работы опорного контура. А поэтому для каждого этапа расчета была построена отдельная расчетная схема.

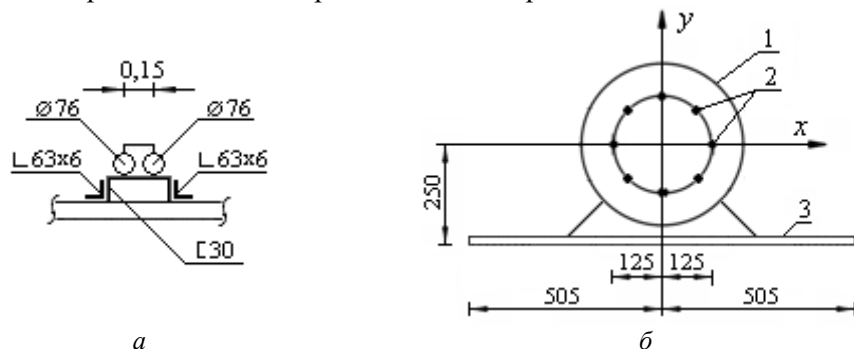


Рис. 12.68. Поперечное сечение: *a* – узла примыкания ванты к опорному трубобетонному контуру; *б* – опорного трубобетонного контура;
1 – труба $\varnothing 420 \times 10$; 2 – арматура $\varnothing 14$ АIII; 3 – плита 1100×20

Первая схема изображена на рис. 12.69, *a* и представляет собой фрагмент покрытия, вырезанный двумя параллельными сечениями из его центральной части. Учитывая двустороннюю симметрию покрытия в целом и цикличность его конструктивного решения в частности, фрагмент включает три ванты, часть продольного опорного контура с узлами их примыкания и распространен до продольной оси симметрии покрытия.

В расчетной схеме покрытие аппроксимируется набором мембранных четырехугольных конечных элементов, толщина которых определяется исходя из эквивалентной цилиндрической жесткости сборной железобетонной плиты и гладкой тонкой оболочки, а ванты – стержневыми конечными элементами, воспринимающими растяжение-сжатие. В свою очередь опорный контур представляется стержневыми конечными элементами прямоугольного поперечного сечения, воспринимающими усилия растяжения-сжатия и изгиба. Причем их параметры устанавливаются с учетом эквивалентного «размазывания» составляющих опорный контур элементов путем определения соответствующих размеров поперечного сечения и эквивалентного модуля упругости, обеспечивающего равенство цилиндрических и изгибных жесткостных характеристик расчетных и реальных конструктивных элементов. По осям симметрии фрагмента наложены связи на соответствующие перемещения узлов, узлы опирания контура на колонны закреплены от смещения по третьему направлению, а в местах примыкания вант к опорному контуру установлены упруго-податливые связи для моделирования его жесткости в горизонтальной плоскости.

При описании топологической структуры конечноэлементной модели покрытия расчетная схема отображается на прямоугольную сеточную область с координатами S^1 , S^2 , S^3 и единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов модели: в плане от 1 до $M1=12$ и от 1 до $M2=124$, по толщине оболочки от 1 до $M3=2$, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M=M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели ясен из

рис. 12.69, б. Более того, для более четкого понимания местонахождения вант и опорного контура среди других конструктивных и конечных элементов на обеих схемах они выделены темным тоном.

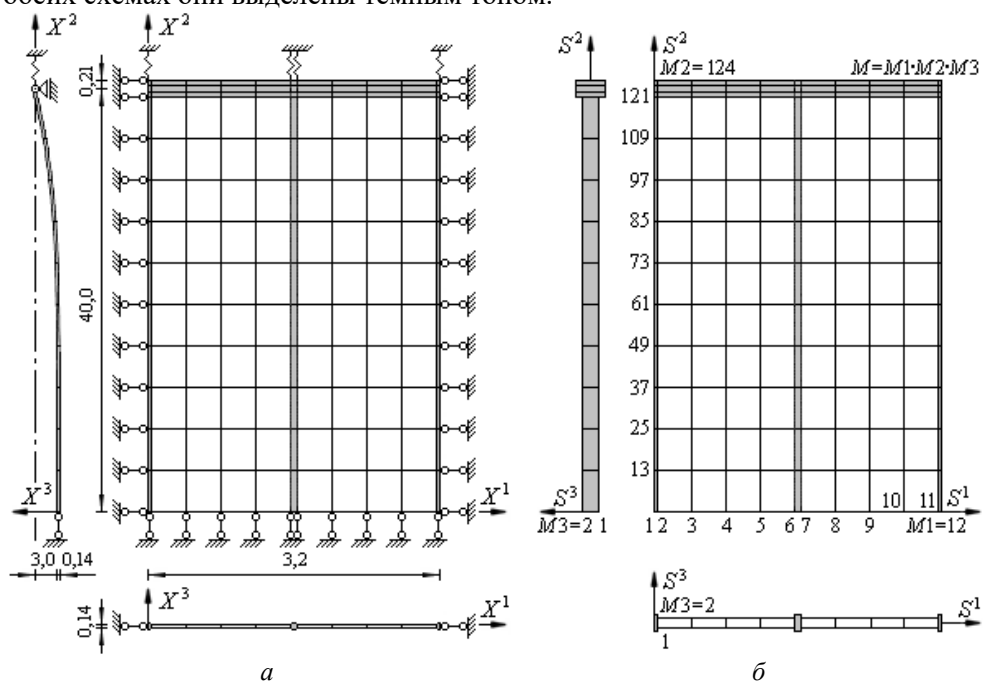


Рис. 12.69. Схемы центрального фрагмента висячего большепролетного комбинированного покрытия здания общественного назначения: а – расчетная; б – топологическая с нумерацией координатных линий сеточной области

Отметим, что всего было рассмотрено два варианта работы опорного контура в плоскости покрытия, а именно – когда контур является недеформируемым (при упруго-податливых связях, жесткость которых стремится к бесконечности) и когда контур является упруго-податливым (при упруго-податливых связях, единичная жесткость которых принята равной $R^2 = 5$ МН).

Результаты расчета геометрии центральной ванты для двух вариантов работы опорного контура в плоскости покрытия изображены на рис. 12.70. Из рисунка следует, что, как и следовало ожидать, жесткость опорного контура оказывает существенное влияние на поведение ванты, а именно: недеформируемость опорного контура приводит к меньшей стреле провисания ванты по сравнению с его упруго-податливой работой. Однако при этом следует отметить, что в обоих случаях геометрия конструкции остается качественно подобной – покрытие является цилиндрической поверхностью и в системе декартовых координат описывается уравнением окружности, начало которой расположено в центрах, лежащих на проведенном из середины пролета ванты перпендикуляре. При этом в исходном состоянии покрытия радиус окружно-

сти равен $R = 259,7$ м, в случае недеформируемого опорного контура – $R = 199,76$ м и при упруго-податливом контуре – $R = 161,88$ м. Дополнительно к данным рис. 12.70, результаты расчета геометрии центральной ванта иллюстрируются табл. 12.3, содержащей аппликаты ванта в исходном состоянии и при упруго-податливой работе опорного контура (поскольку в этом случае стрела провисания ванта имеет максимальное значение), а также представлены величины возникающих вертикальных перемещений.

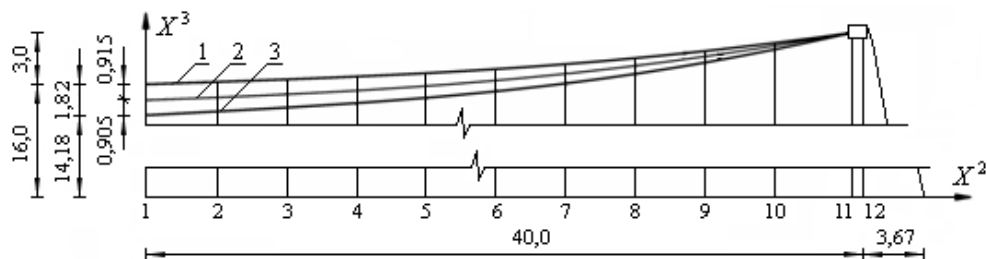


Рис. 12.70. Геометрия центральной ванта: 1 – исходная;
2 – деформированная при недеформируемом опорном контуре;
3 – деформированная при упруго-податливом опорном контуре

Таблица 12.3

Номера расчетных точек в пролете центральной ванта (см. рис. 12.70)	Результаты расчета геометрии центральной ванта		
	Аппликата, м		Вертикальное перемещение, м
	исходное состояние	деформированное состояние	
1	16,00	14,18	1,82
2	16,03	14,23	1,80
3	16,12	14,38	1,74
4	16,27	14,62	1,65
5	16,48	14,96	1,52
6	16,75	15,40	1,35
7	17,08	15,93	1,15
8	17,47	16,56	0,91
9	17,92	17,28	0,64
10	18,43	18,09	0,34
11	19,00	18,99	0,01
12	19,00	19,00	0,00

О характере напряженно-деформированного состояния упруго-податливого опорного контура центрального фрагмента можно судить по результатам, отраженным на рис. 12.71. Опорный контур оказался малоизгибным в

плоскости покрытия (максимальные величины изгибающих моментов достигают значения $M = 172,0$ кНм) и практически безизгибным в вертикальной плоскости (максимальные величины изгибающих моментов достигают значения $M = 81,5$ кНм), а его прочность находится в пределах нормативных требований. Перемещения контура в горизонтальной плоскости достигают наибольших значений в узлах крепления вант и составляют $u^2 = -15,22$ см.

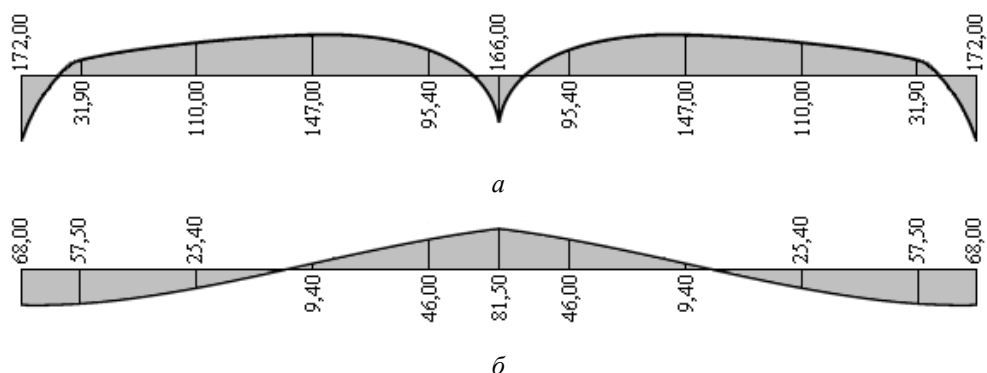


Рис. 12.71. Эпюры изгибающих моментов, кНм, в упруго-податливом опорном контуре: *a* – в плоскости покрытия; *б* – в вертикальной плоскости

На втором этапе расчетов было исследовано напряженно-деформированное состояние наиболее напряженной угловой зоны висячего большепролетного комбинированного покрытия здания общественного назначения при упруго-податливой работе его опорного контура. Расчетная схема угловой зоны висячего покрытия изображена на рис. 12.72, *a*. Учитывая продольную симметрию покрытия в целом и цикличность его конструктивного решения в частности, схема включает две ванты, часть продольного опорного контура с узлами их примыкания, половину поперечного опорного контура и распространена до продольной оси симметрии покрытия.

Обратим дальше внимание на то, что в связи с подобностью физического смысла как описанной ранее первой, так и рассматриваемой второй расчетной схемы, покрытие и в данном случае аппроксимируется набором мембранных четырехугольных конечных элементов, ванты – стержневыми конечными элементами, воспринимающими растяжение-сжатие, а опорный контур – стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения-сжатия и изгиба. Причем указанное подобие распространяется также и на установление геометрических и жесткостных параметров этих конечных элементов, а именно: толщина мембранных конечных элементов определяется исходя из эквивалентной цилиндрической жесткости сборной железобетонной плиты и гладкой тонкой оболочки, а стержневых конечных элементов, воспринимающих усилия растяжения-сжатия и изгиба, – с учетом эквивалентного «размазывания» со-

ставляющих опорный контур элементов путем определения соответствующих размеров прямоугольного поперечного сечения и эквивалентного модуля упругости, обеспечивающего равенство цилиндрических и изгибных жесткостных характеристик расчетных и реальных конструктивных элементов.

По осям симметрии расчетной схемы наложены связи на соответствующие перемещения узлов, узлы опирания контура на колонны закреплены от смещения по третьему направлению, а в узлах примыкания вант к опорному контуру установлены упруго-податливые связи для моделирования его жесткости в горизонтальной плоскости.

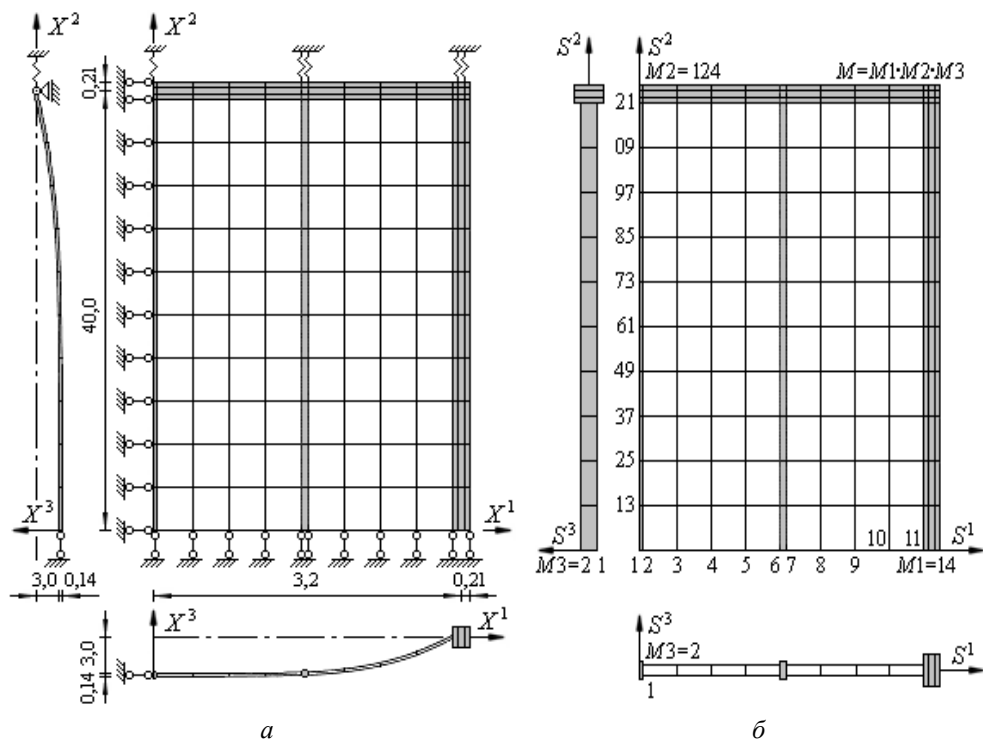


Рис. 12.72. Схемы угловой зоны висячего большепролетного комбинированного покрытия здания общественного назначения:
а – расчетная; б – топологическая с нумерацией координатных линий сеточной области

Однако вследствие некоторых принципиальных отличий в условиях работы угловой и центральной зон покрытия, рассматриваемая расчетная схема имеет несколько особенностей. Во-первых, в связи с наличием конструктивного прикрепления покрытия к поперечному опорному контуру, в расчетную схему для учета их взаимовлияния введен один ряд примыкающих к попе-

речному контуру мембранных конечных элементов с приведенной толщиной 60 мм. Во-вторых, в связи с повышенной жесткостью контурной угловой зоны, в расчетной схеме для учета этого эффекта единичная жесткость двух крайних упруго-податливых связей (расположенных непосредственно в зоне пересечения продольного и поперечного опорных контуров) пропорционально увеличена в десять раз. И, наконец, в-третьих, в связи с необходимостью выявления реальных деформационных характеристик угловой зоны покрытия, рассмотрен только случай работы упруго-податливого опорного контура.

При описании топологической структуры конечноэлементной модели покрытия расчетная схема отображается на прямоугольную сеточную область с координатами S^1 , S^2 , S^3 и единичными размерами ячеек. Вводится местная нумерация узлов модели: в плане от 1 до $M1 = 14$ и от 1 до $M2 = 124$, по толщине оболочки от 1 до $M3 = 2$, а также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3$. Порядок нумерации узлов дискретной модели ясен из рис. 12.72, б. Причем, как и ранее, для более четкого понимания местонахождения вант и опорного контура среди других конструктивных и конечных элементов, на обеих схемах они выделены темным тоном.

Остановимся теперь подробнее на анализе напряженно-деформированного состояния угловой зоны висячего большепролетного комбинированного покрытия с упруго-податливым опорным контуром. О его характере можно судить по результатам, представленным на рис. 12.73. Во-первых, как следует из рис. 12.73, а, опорный контур претерпевает весьма незначительные перемещения в плоскости покрытия. Например, максимальное перемещение поперечного контура равно 7,55 см, что составляет всего 1/1060 пролета, а перемещения продольного контура практически отсутствуют, поскольку их максимальные величины достигают всего 0,92 см. Последнее является свидетельством того, что опорный контур в целом обладает достаточно большой жесткостью в горизонтальной плоскости.

Во-вторых, если внимательно взглянуть на рис. 12.73, б – г, то можно увидеть, что продольный опорный контур по всей своей длине оказался сжатым и практически малоизгибным. Так, если максимальные сжимающие усилия в контуре достигают значения $N = 1388,0$ кН, то величины изгибающих моментов в плоскости покрытия не превышают $M = 562,6$ кНм, а в вертикальной плоскости – $M = 157,4$ кНм, что незначительно сказывается на его напряженном состоянии. Поперечный же опорный контур испытывает весьма незначительное растяжение, наибольшее значение которого наблюдается в месте пересечения продольного и поперечного контуров и составляет всего $N = 185,9$ кН. Кроме того, контурные изгибающие моменты также невелики: максимальные значения изгибающих моментов в плоскости покрытия равны $M = 39,7$ кНм, а в вертикальной плоскости – $M = 140,02$ кНм.

На основании представленных результатов анализа выполненного расчета можно заключить, что предложенная конструкция висячего большепролетного комбинированного покрытия здания общественного назначения име-

ет достаточный запас несущей способности и удовлетворяет нормативным условиям прочности.

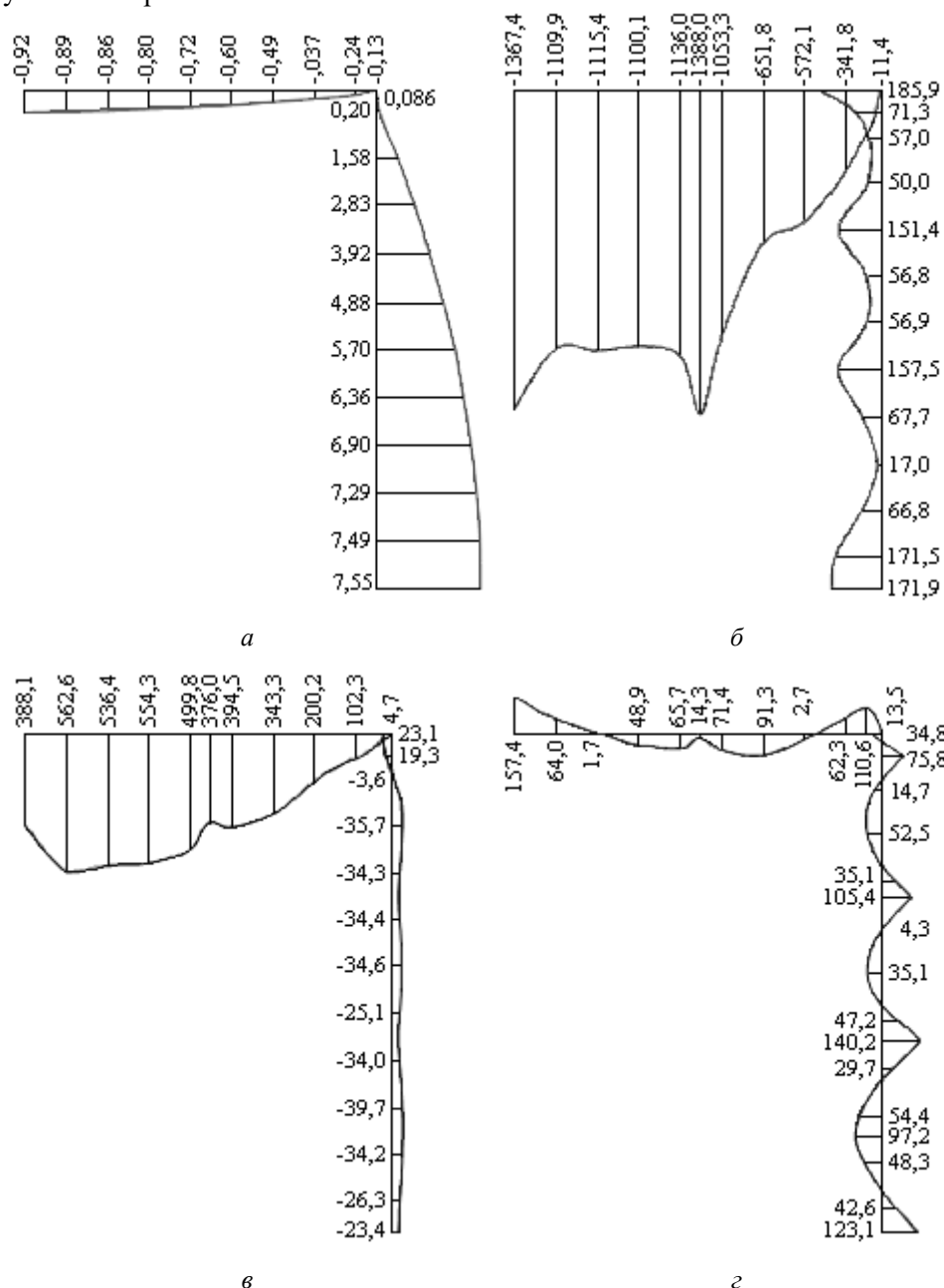


Рис. 12.73. Эпюры в упруго-податливом опорном контуре угловой зоны
висячего большепролетного комбинированного покрытия:
а – перемещения в плоскости покрытия (см); *б* – продольные силы, кН;

ϵ – изгибающие моменты в плоскости покрытия, кНм;

ϵ_z – изгибающие моменты в вертикальной плоскости, кНм

§ 12.14. Резервуар сверхбольшого объема

12.14.1. Постановка задачи. Выполнен расчет трех однотипных вертикальных цилиндрических резервуаров объемом 150, 210 и 260 тыс. м³ со стационарным покрытием в виде висячей оболочки. Все резервуары приняты неизменной высотой, равной 21 м, а их диаметр соответственно составляет 100, 120 и 132 м. Каркас резервуара образован тонколистовой висячей оболочкой покрытия в виде перевернутого сферического сегмента, стенкой в виде цилиндрической тонколистовой оболочки с переменной по высоте толщиной, плоским круглым дном с утолщенной центральной частью и различными несущими стержневыми элементами, включающими внутреннее и наружное опорные кольца, радиальные и кольцевые ребра стационарного покрытия, а также вертикальные ребра стенки. Сопряжение стенки резервуара с его покрытием и дном выполнено с применением специальных кольцевых вставок тороидального поперечного сечения. Принципиальная конструктивная схема каркаса резервуара приведена на рис. 12.74, причем на этом рисунке кольцевые ребра стационарного покрытия условно не показаны.

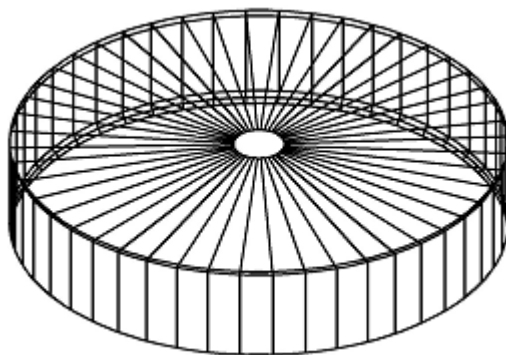


Рис. 12.74. Принципиальная конструктивная схема каркаса цилиндрического резервуара

Внутреннее опорное кольцо диаметром 12 м имеет замкнутое двухконтурное поперечное сечение, основными конструктивными элементами которого служат четыре швеллера № 20 (рис. 12.75, а). Наружное опорное кольцо представляет собой установленный на стенке резервуара трубобетонный контур из трубы Ø1000×12 мм (рис. 12.75, б), являющийся опорной конструкцией стационарного покрытия. Вертикальные ребра стенки выполнены из двутавра № 80Б1. Утолщенная центральная часть дна имеет диаметр 3,0 м. Внутреннее и наружное опорные кольца соединены радиальными ребрами из прокатной полосы 300×10, фиксация которых в проектном положении произ-

водится при помощи кольцевых ребер из прокатной полосы 200×10 , расположенных с шагом от 1,0 до 3,0 м.

Радиальные и кольцевые ребра образуют монтажную постель, на которую укладываются рулонированные полотнища тонколистовой оболочки покрытия толщиной $\delta = 4,0$ мм. При этом в местах примыкания тонколистовой оболочки к опорным кольцам предусмотрено применение утолщенного пояса из рулонированных полотнищ толщиной $\delta = 8,0$ мм. В качестве стабилизирующего конструктивного элемента используется тонкий железобетонный слой толщиной 30 мм, армированный проволоочной арматурой диаметром 5,0 мм с шагом 150–200 мм, который укладывается по поверхности тонколистовой оболочки.

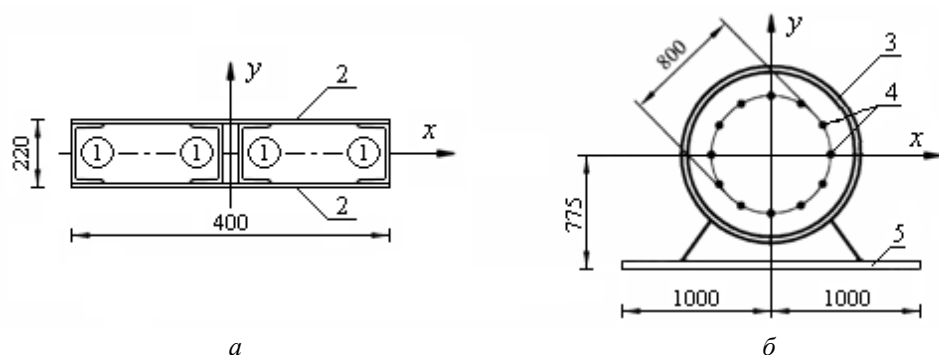


Рис. 12.75. Поперечное сечение:

a – внутреннего опорного кольца; *б* – наружного опорного кольца; 1 – швеллер № 20; 2 – плита 400×10 ; 3 – труба $\varnothing 1000 \times 12$; 4 – арматура $\varnothing 28$ АIII; 5 – плита 2000×25

Принимая во внимание значительную геометрическую нелинейность задачи и достаточно сложную (хотя и полностью симметричную) конфигурацию, структуру и топологию конструкции, а также одностороннюю симметрию действующих на нее нагрузок (о чем будет сказано дальше), в качестве расчетной схемы принята половина резервуара (рис. 12.76).

Отметим, что в расчетной схеме стенка, днище и покрытие резервуара аппроксимируются набором мембранных четырехугольных конечных элементов. Причем если толщина конечных элементов стенки и днища принята равной толщине соответствующих элементов тонколистовой оболочки, то толщина конечных элементов покрытия определяется исходя из эквивалентной цилиндрической жесткости его конструктивных элементов и гладкой тонкой оболочки.

В свою очередь, радиальные и кольцевые ребра представляются стержневыми конечными элементами, воспринимающими растяжение-сжатие, а внутреннее и наружное опорные кольца, а также вертикальные ребра стенки – стержневыми конечными элементами, воспринимающими усилия растяжения-сжатия и изгиба. Поперечное сечение всех типов стержневых конечных элементов принято прямоугольным, а его параметры (размеры сечения и эк-

вивалентный модуль упругости) устанавливаются с учетом эквивалентного «размазывания» составляющих ребра и кольца элементов таким образом, чтобы обеспечить эквивалентность жесткостных характеристик расчетных и реальных конструктивных элементов. По плоскости симметрии расчетной схемы наложены связи на соответствующие перемещения узлов, а узлы днища закреплены от смещения по третьему направлению.

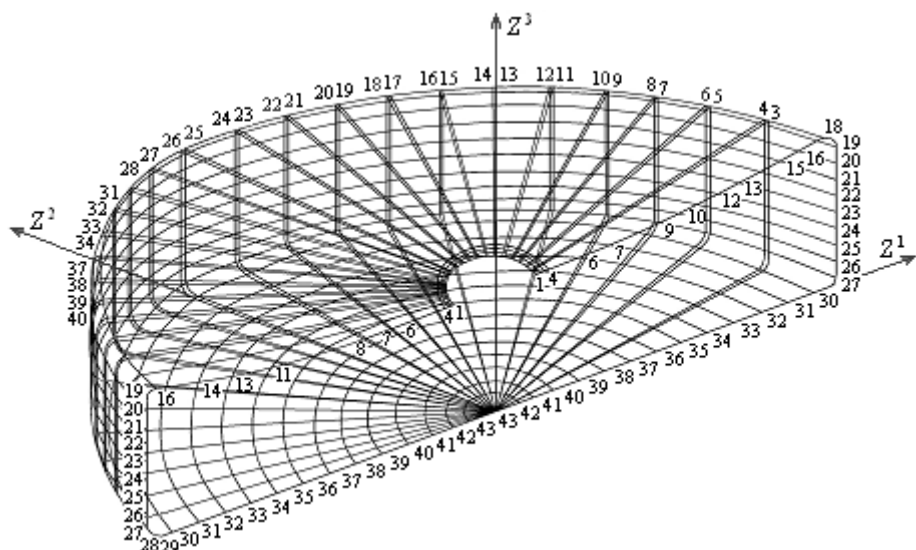


Рис. 12.76. Расчетная схема цилиндрического резервуара с нумерацией координатных линий сеточной области

Поскольку исходная форма покрытия резервуара задана в виде перевернутого сферического сегмента, то начальные вертикальные координаты его поверхности z определяются по формуле

$$z = z_c - \sqrt{(R_0^2 + f_0^2)/4f_0^2 + R_d - f_0 - x^2}, \quad (12.8)$$

где z_c – вертикальная координата центра сферы; R_0 – радиус границы участка сопряжения покрытия и стенки; f_0 – стрела провисания покрытия; $R_d = (R_0^2 + f_0^2)/2f_0$ – радиус кривизны срединной поверхности покрытия; x – координата точки горизонтальной проекции радиального сечения покрытия.

При описании топологической структуры конечноэлементной модели резервуара расчетная схема отображается на прямоугольную сеточную область с единичными размерами ячеек, координатными линиями которой по направлению S^1 являются радиусы равномерно расположенных концентрических полуокружностей, а по направлению S^2 – сами концентрические полуокружности. Вводится местная нумерация узлов модели: по оси S^1 от 1 до $M1 = 43$ и по оси S^2 от 1 до $M2 = 50$, по толщине оболочки по оси S^3 от 1 до $M3 = 2$, а

также сквозная нумерация узлов от 1 до $M = M1 \cdot M2 \cdot M3 = 4300$. Порядок нумерации узлов дискретной модели ясен из рис. 12.76.

12.14.2. Действующие нагрузки. Расчет вертикального цилиндрического резервуара осуществлен при действии постоянной и временной (снег и ветер) нагрузок. Причем здесь под постоянной нагрузкой понимается не только собственный вес несущих (тонколистовая оболочка) и конструктивных (стабилизирующий железобетонный слой на покрытии) элементов резервуара и находящегося под его покрытием технологического оборудования (системы внутренних ливнеотстоков, инженерные сети вентиляции, электроснабжения и т.д.), но и гидростатическое давление на стенку резервуара от жидкого нефтепродукта.

Определим значения составляющих постоянной нагрузки. Расчетная интенсивность нагрузки от собственного веса находится стандартным образом и составляет для тонколистовой оболочки $q_1 = 0,475 \text{ кН/м}^2$, а для конструктивных элементов и технологического оборудования $q_2 = 1,263 \text{ кН/м}^2$.

Теперь остановимся подробнее на гидростатическом давлении на стенку резервуара. Величина гидростатического давления при наполнении цилиндрического резервуара жидким нефтепродуктом определяется по формуле $Q_N = q_N S^N$, где q_N – узловая интенсивность гидростатического давления, являющаяся функцией разности высот между теоретически максимальным уровнем нефтепродукта и уровнем сеточной области расположения узла N , а S^N – площадь соответствующей узлу N ячейки сеточной области. В данном случае уровней сеточной области на стенке резервуара насчитывается всего десять, причем их расположение однозначно определяется значением сеточной координаты S^1 , а именно: от $S^1 = 20$ до $S^1 = 29$. Поэтому узловую интенсивность гидростатического давления можно определить по формуле $q_N = q_i = \gamma z_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 8$; γ – удельный вес жидкого нефтепродукта) в соответствии с приведенной на рис. 12.77 эпюрой гидростатического давления на стенку резервуара. При этом только необходимо иметь в виду, что найденная таким образом узловая интенсивность q_N будет постоянной в пределах соответствующей узлу N ячейки сеточной области.

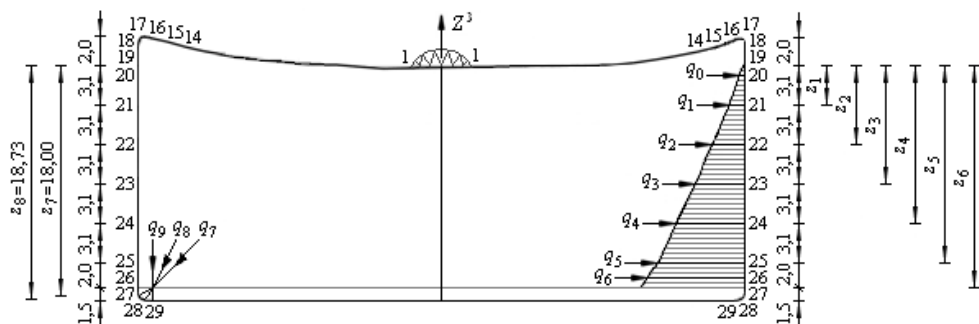


Рис. 12.77. Эпюра и узловые интенсивности гидростатического

давления на стенку цилиндрического резервуара

С применением изложенного подхода находим значения узловой интенсивности гидростатического давления для уровней сеточной области на стенке резервуара при сеточных координатах узлов ячеек от $S^1 = 20$ до $S^1 = 29$, которые равны: $q_0 = 7,4 \text{ кН/м}^2$; $q_1 = 29,5 \text{ кН/м}^2$; $q_2 = 58,9 \text{ кН/м}^2$; $q_3 = 88,35 \text{ кН/м}^2$; $q_4 = 117,8 \text{ кН/м}^2$; $q_5 = 147,25 \text{ кН/м}^2$; $q_6 = 161,5 \text{ кН/м}^2$; $q_7 = 171,0 \text{ кН/м}^2$; $q_8 = 178,0 \text{ кН/м}^2$; $q_9 = 180,5 \text{ кН/м}^2$.

Далее перейдем к определению значений составляющих временной нагрузки. Расчетная интенсивность нагрузки от снега на покрытии резервуара, как и от его собственного веса, находится стандартным образом и составляет $q_c = 1,57 \text{ кН/м}^2$, а схема распределения расчетной интенсивности ветрового давления по поверхности резервуара представлена на рис. 12.78.

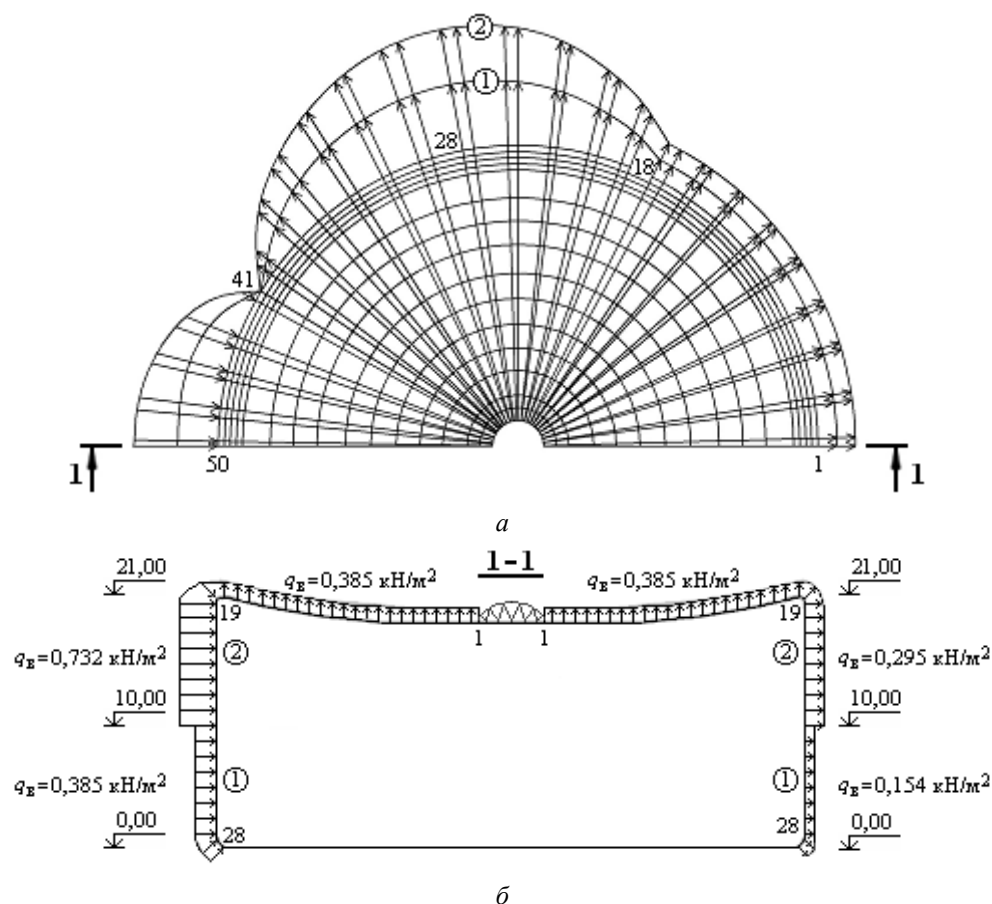


Рис. 12.78. Схема распределения расчетной интенсивности ветрового давления по поверхности резервуара:
а – план; б – поперечное сечение;

1 – нижняя часть стенки; 2 – верхняя часть стенки

Как видно из данного рисунка, схема, как в плане, так и по высоте резервуара, имеет достаточно сложный не только криволинейный, но и ступенчатый вид, вытекающий из условий обтекания резервуара ветровым потоком. Причем если в плане она имеет плавнопеременное очертание, определяемое цилиндрической формой резервуара, то по высоте дополнительно присутствует скачкообразное изменение ее значений вследствие достаточно большой высоты стенки. Последнее утверждение можно проиллюстрировать на примере одного из наиболее характерных поперечных сечений резервуара, находящегося в плоскости симметрии его расчетной схемы и изображенного на рис. 12.78, б. В этом поперечном сечении в нижней его части, высота которой находится в пределах от 0 до 10 м, величина ветрового напора равна $q_b = 0,385 \text{ кН/м}^2$, а отсоса – $q_b = 0,154 \text{ кН/м}^2$. В свою очередь, в верхней части сечения, высота которой находится в пределах от 10 до 21 м, величина ветрового напора уже достигает $q_b = 0,732 \text{ кН/м}^2$, а отсоса – $q_b = 0,295 \text{ кН/м}^2$. При этом по всему покрытию в поперечном сечении резервуара величина отсоса составляет $q_b = 0,385 \text{ кН/м}^2$.

Возвратимся теперь к рис. 12.78, а и обратим внимание на то, что схема распределения расчетной интенсивности ветрового давления в плане имеет четыре различных участка, месторасположение которых однозначно определяется значением окружной сеточной координаты S^2 , а именно: первый участок – от $S^2 = 1$ до $S^2 = 18$, второй участок – от $S^2 = 18$ до $S^2 = 28$, третий участок – от $S^2 = 28$ до $S^2 = 41$ и, наконец, четвертый участок – от $S^2 = 41$ до $S^2 = 50$. Для пограничных узлов всех четырех участков в соответствии с условиями обтекания резервуара ветровым потоком найдены расчетные интенсивности ветрового давления, значения которых приведены в табл. 12.4, а для каждого участка, как уже было сказано выше, – вид очертания схемы.

Таблица 12.4

Окружная сеточная координата пограничного узла S^2	Значения расчетной интенсивности ветрового давления в конструктивных частях резервуара, кН/м^2		
	Нижняя часть стенки	Верхняя часть стенки	Покрытие
1	– 0,154	– 0,295	– 0,385
18	– 0,462	– 0,88	– 0,385
28	– 0,482	– 0,915	– 0,385
41	0	0	– 0,385
50	0,385	0,732	– 0,385
<i>Примечание.</i> В таблице принято, что знак «–» соответствует ветровому отсосу, а знак «+» – ветровому напору.			

С использованием указанных параметров в пределах каждого участка для всех промежуточных узлов сеточной области определены также текущие значения расчетной интенсивности ветрового давления. При этом были приняты во внимание не только текущие значения сеточных координат узлов – в радиальном S^1 и окружном S^2 направлениях, – но также в пределах каждого участка была восполнена схема распределения расчетной интенсивности ветрового давления с учетом известных значений его интенсивности в пограничных узлах с применением тригонометрических аппроксимаций.

12.14.3. Расчет конструкций. Теперь рассмотрим, останавливаясь на наиболее существенных моментах, напряженно-деформированное состояние вертикальных цилиндрических резервуаров объемом 150, 210 и 260 тыс. м³. О его характере в целом и параметрах в частности – перемещениях, изгибающих моментах и продольных силах – можно судить по результатам, изображенным на рис. 12.79–12.81.

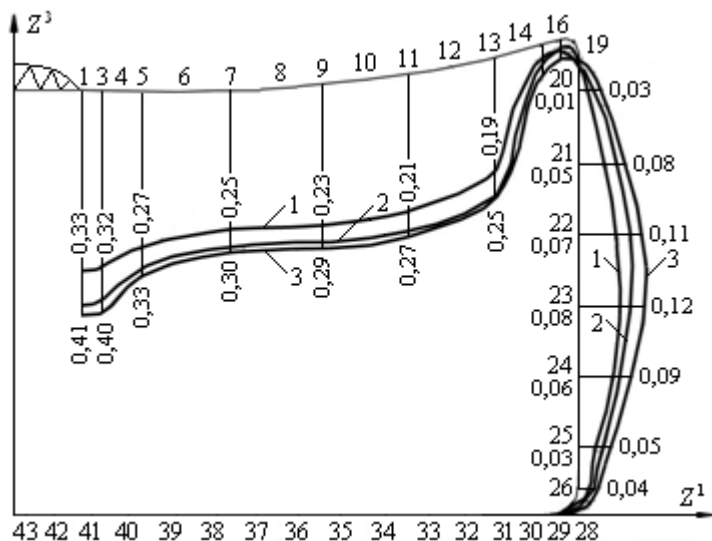


Рис. 12.79. Эпюра перемещений, м, в плоскости симметрии расчетной схемы цилиндрического резервуара объемом:
1 – 150 тыс. м³; 2 – 210 тыс. м³; 3 – 260 тыс. м³

Анализ приведенных результатов позволяет утверждать, что характер деформирования не только всех рассмотренных резервуаров, но и их отдельных фрагментов практически совпадает, а распределение внутренних усилий вдоль вертикальных ребер стенки является качественно однородным. Причем, как этого и следовало ожидать, максимальные вертикальные перемещения наблюдаются в центральной зоне стационарного покрытия, а максимальные горизонтальные – в центральной зоне цилиндрической стенки резервуа-

ров, а направление перемещений является практически перпендикулярным плоскости этих конструктивных элементов (рис. 12.79). Однако если покрытие резервуара перемещается внутрь конструкции, то его стенка напротив – наружу. Значения максимальных перемещений представлены в табл. 12.5.

Следует также отметить, что расчетные значения максимальных перемещений как в случае стационарного покрытия, так и в случае стенки резервуаров не превышают допустимых пределов, установленных требованиями нормативных документов. В этом можно легко убедиться, если принять во внимание следующий факт. Относительное максимальное перемещение покрытия (понимая при этом под D диаметр резервуара) характеризуется следующими показателями: для резервуара объемом 150 тыс. м³ – $u_{\max}/D = 0,33/100 \approx 1/300$, для резервуара объемом 210 тыс. м³ – $u_{\max}/D = 0,38/120 \approx 1/315$ и, наконец, для резервуара объемом 260 тыс. м³ – $u_{\max}/D = 0,41/132 \approx 1/320$. Заметим, что все полученные значения значительно меньше относительного допускаемого прогиба для пологих висячих систем, равного 1/200 длины пролета.

Таблица 12.5

Резервуар объемом, тыс. м ³	Значения максимальных перемещений, м	
	Стационарное покрытие	Цилиндрическая стенка
150	0,33	0,08
210	0,38	0,10
260	0,41	0,12

В свою очередь относительное максимальное перемещение стенки (понимая при этом под H высоту стенки резервуара) имеет следующие значения: для резервуара объемом 150 тыс. м³ – $u_{\max}/H = 0,08/21 \approx 1/260$, для резервуара объемом 210 тыс. м³ – $u_{\max}/H = 0,10/21 \approx 1/210$ и, наконец, для резервуара объемом 260 тыс. м³ – $u_{\max}/H = 0,12/21 \approx 1/175$. Также нужно заметить, что все полученные значения значительно меньше относительного допускаемого перемещения для подобных конструктивных элементов, равного 1/150 высоты резервуара.

Вообще говоря, анализ представленных в табл. 12.5 данных позволяет обратить внимание на такой весьма интересный факт, как на первый взгляд несоразмерную разницу между соотношениями объемов резервуаров и соотношениями величин перемещений их покрытия и стенки, полученных для разных резервуаров. Например, для резервуаров объемом 150 и 260 тыс. м³ разница в объемах составляет более чем 1,73 раза. Между тем для этих же резервуаров разница в максимальных перемещениях стационарного покрытия достигает всего 0,08 м или приблизительно 19,5 %, а разница в максимальных перемещениях стенки – 0,04 м или около 33,3 %. Аналогичная закономер-

ность прослеживается, как можно будет увидеть дальше, и для случая внутренних усилий.

Максимальные усилия (изгибающие моменты и продольные силы) в вертикальных ребрах стенки резервуаров возникают в зонах сопряжения стенки и дна (рис. 12.80), а их значения приведены в табл. 12.6.

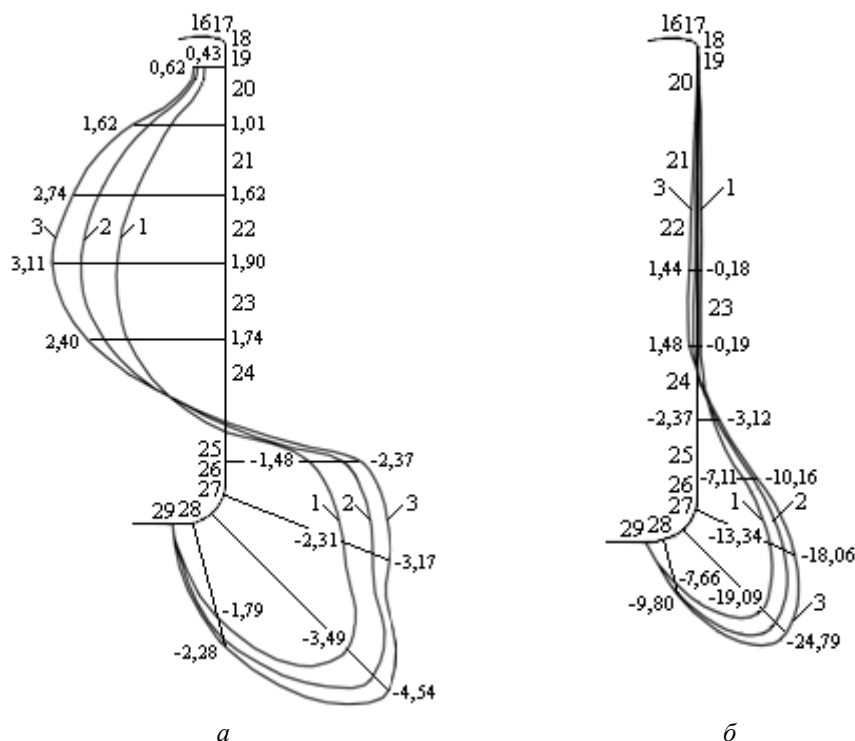


Рис. 12.80. Эпюры изгибающих моментов, МНм, (а) и продольных сил, МН, (б) в вертикальных ребрах стенки цилиндрического резервуара объемом:
1 – 150 тыс. м³; 2 – 210 тыс. м³; 3 – 260 тыс. м³

Таблица 12.6

Резервуар объемом, тыс. м³	Значения максимальных усилий в вертикальных ребрах стенки	
	Изгибающие моменты, МНм	Продольные силы, МН
150	– 3,49	– 19,09
210	– 4,15	– 22,70
260	– 4,54	– 24,79

Анализ изображенных на рис. 12.80 эпюр внутренних усилий в вертикальных ребрах стенки свидетельствует, что для рассчитанных резервуаров эти эпюры являются подобными, а их величины для резервуаров объемом 150 и 260 тыс. м³, сообразно претерпеваемым резервуарами перемещениям, отличаются незначительно. Так, разница в максимальных значениях изгибающих моментов в вертикальных ребрах стенки достигает всего 1,05 МНм, что составляет примерно 23,1%, а разница в максимальных значениях продольных сил – 5,7 МН или почти 23%.

Эпюры внутренних усилий во внутреннем и наружном опорных кольцах стационарного покрытия цилиндрических резервуаров объемом 150 и 260 тыс. м³ представлены на рис. 12.81. Причем для придания этому рисунку лучшей читабельности и ясности понимания полученных результатов, на нем не изображены эпюры для резервуара объемом 210 тыс. м³.

Из рис. 12.81 видно, что во всех рассмотренных резервуарах внутреннее опорное кольцо испытывает растяжение, а наружное опорное кольцо – сжатие. При этом максимальные растягивающие усилия во внутреннем опорном кольце достигают следующих величин: для резервуара объемом 150 тыс. м³ – 1,43 МН, а для резервуара объемом 260 тыс. м³ – 1,76 МН. Таким образом, отличие в результатах составляет почти 23,1%. В свою очередь для значений максимальных изгибающих моментов имеем: для резервуара объемом 150 тыс. м³ – 0,018 МНм, а для резервуара объемом 260 тыс. м³ – 0,022 МНм, что дает разницу в 22,2%.

Подобным же образом запишем результаты и для наружного опорного кольца. Максимальные сжимающие усилия в кольце равны: для резервуара объемом 150 тыс. м³ – 4,52 МН, а для резервуара объемом 260 тыс. м³ – 5,54 МН. Таким образом, отличие в результатах составляет почти 22,6%. Для значений максимальных изгибающих моментов имеем: для резервуара объемом 150 тыс. м³ – 0,0131 МНм, а для резервуара объемом 260 тыс. м³ – 0,0161 МНм, что приводит к разнице в пределах 22,9%.

Из представленных данных можно видеть следующее. Во-первых, в данном случае, как и для перемещений покрытия и стенки резервуаров, прослеживается закономерность в превалировании разницы в объемах рассматриваемых резервуаров по сравнению с разницей в значениях внутренних усилий, возникающих в их опорных кольцах. Во-вторых, поскольку возникающие в опорных кольцах стационарного покрытия изгибающие моменты имеют весьма незначительную величину, то это свидетельствует об их малой изгибности и, как следствие, близости напряженного состояния колец к одноосному виду.

Что же касается ограждающих конструкций резервуаров, то можно указать на два характерных момента. В тонколистовой оболочке стенки максимальное растягивающее кольцевое напряжение возникает в резервуаре объемом 210 тыс. м³ в ячейке сеточной области с сеточными координатами $S^1 = 22$ и $S^2 = 24$, а его значение равно $\sigma = 370,89$ МПа. Поскольку для ограждающих конструкций предусмотрено применение листового проката повышенной

прочности из стали класса С52/40 с пределом текучести $\sigma_t = 400$ МПа, то это означает, что полученное значение максимального растягивающего кольцевого напряжения находится в допустимых пределах.

В тонколистовой оболочке стационарного покрытия максимальное растягивающее радиальное напряжение возникает в резервуаре объемом 260 тыс. м³ в месте примыкания тонколистовой оболочки к наружному опорному кольцу в ячейке сеточной области с сеточными координатами $S^1 = 15$ и $S^2 = 28$, а его значение равно $\sigma = 407,26$ МПа. Поскольку величина этого напряжения несколько выше предела текучести $\sigma_t = 400$ МПа для примененной стали класса С52/40, то с целью обеспечения надежной работы покрытия толщина приконтурного пояса была увеличена до $\delta = 12,0$ мм.

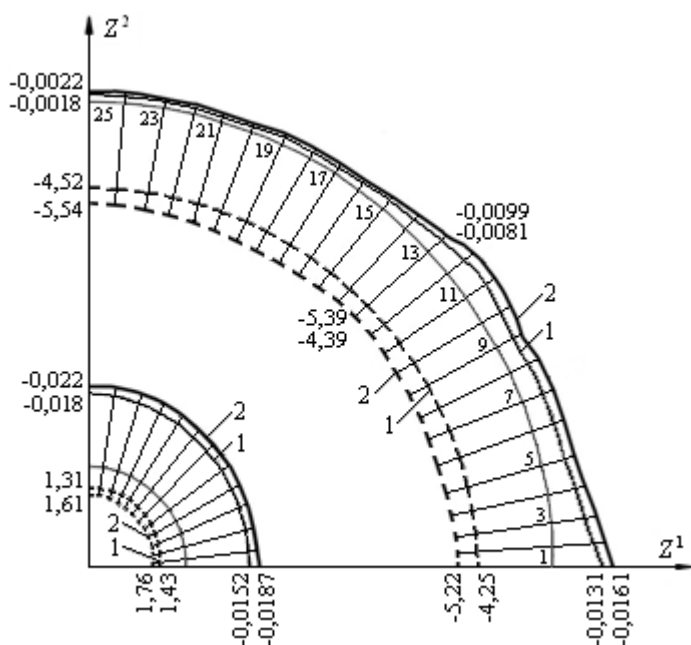


Рис. 12.81. Эпюры внутренних усилий во внутреннем и наружном опорных кольцах стационарного покрытия цилиндрического резервуара объемом: 1 – 150 тыс. м³; 2 – 260 тыс. м³; N (---), МН, и M (—), МНм

12.14.4. Анализ результатов расчета. Представленные результаты расчета вертикальных цилиндрических резервуаров сверхбольшого объема позволили сформулировать следующие выводы и некоторые практические рекомендации.

1. Предложенное конструктивное решение обладает в целом достаточно большим запасом прочности, а усилия и перемещения при действии постоянных и временных нагрузок находятся в допустимых пределах.

2. Общий вес металлических конструкций резервуаров ориентировочно составляет: для резервуара объемом 150 тыс. м³ – 1686,0 т, для резервуара объемом 210 тыс. м³ – 2350,0 т и, наконец, для резервуара объемом 260 тыс. м³ – 2896,0 т.

3. Увеличение объема цилиндрических резервуаров приводит при их изготовлении к уменьшению удельного расхода стали, т. е. стали приходящейся на 1 м³ полезного объема*. Подтверждением сказанному служит тот факт, что усредненный удельный расход стали для рассмотренных резервуаров составляет $g_r = 11,19$ кг/м³, что меньше его стандартного значения, равного $g_r^c = 12,41$ кг/м³. Таким образом, использование предложенного конструктивного решения для резервуаров сверхбольшого объема позволяет снизить удельный расход стали в среднем на $\Delta g_r = 9,8\%$ и получить существенную ее экономию при строительстве.

* Сафарян М.К. Металлические резервуары и газгольдеры. – М.: Недра, 1987. – 200 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ

§ I.1. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия

Начнем рассмотрение с установления такого важного понятия, как силовое поле. Силовым полем обычно называют пространство, в каждой точке которого на помещенную туда материальную точку действует определенная сила. Следует сказать, что указанное понятие является весьма общим. Примерами силовых полей служат гравитационные поля планет, магнитное поле какого-нибудь объекта, электростатическое поле и т. п. Особое место среди них занимают потенциальные силовые поля, которым присущи два важных физических свойства: 1) сила этого поля – позиционная, т. е. $P = P(x, y, z)$; 2) работа силы поля не зависит от траектории, вдоль которой перемещается приложенная к некоторой точке сила, а зависит только от положений начальной и конечной точек. Последнее означает, что работа силы может быть вычислена через интегральную сумму соответствующих элементарных работ:

$$A_{M_1 M_2} = \int_{M_1}^{M_2} (P_x dx + P_y dy + P_z dz). \quad (I.1)$$

Что же касается самих действующих в потенциальном силовом поле сил, то их принято называть потенциальными силами.

Заметим также, что если выражение, стоящее под знаком интеграла (I.1), является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$, т. е.

$$dU = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz = P_x dx + P_y dy + P_z dz, \quad (I.2)$$

то функцию U называют силовой функцией.

С учетом последнего условия получаем:

$$A_{M_1 M_2} = \int_{M_1}^{M_2} dU(x, y, z) = U_2 - U_1. \quad (I.3)$$

Как видим, работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути движения силы. Тогда из соотношения (I.2) следует, что силовая функция находится из равенства

$$U = \int (P_x dx + P_y dy + P_z dz) + C.$$

Произвольная постоянная C может иметь любое значение. Однако, как видно из равенства (I.3), работа силы от значения постоянной C не зависит.

Силы тяжести, также как и силы упругости упругого тела, как при адиабатическом процессе (т. е. процессе, происходящем без теплообмена с окружающей средой), так и при изотермических процессах (т. е. процессах, про-

исходящих в физической системе при постоянной температуре) потенциальны. Для этих сил существуют силовые функции. Так, для силы тяжести P , направленной вдоль оси Z (причем ось Z направлена по вертикали вверх), имеем $P_z = -P$ и $dA = -Pdz$. Принимая $U = 0$ при $z = 0$, получим $U = -Pz$.

Сила упругости в центрально-растянутом стержне (рис. I.1) направлена в сторону, противоположную внешней силе P . Поэтому $P_x = -P = -rx$ (r – коэффициент жесткости упругого стержня). А элементарная работа этой силы равна $dA = -rxdx$. Считая далее, что $U = 0$ при $x = 0$, находим $U = 0,5rx^2$.

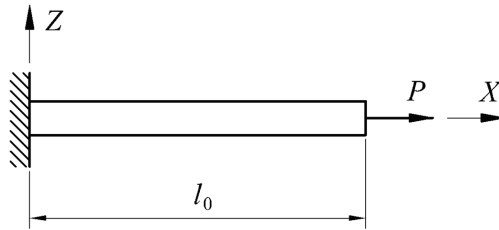


Рис. I.1. Центрально-растянутый стержень под действием внешней силы P

Является также хорошо известным, что в потенциальном силовом поле проекции силы равны частным производным от силовой функции по соответствующим координатам. Действительно, из равенства (I.2) вытекает, что

$$P_x = \frac{dU}{dx}, \quad P_y = \frac{dU}{dy}, \quad P_z = \frac{dU}{dz}.$$

Определяя далее смешанные производные для U , находим:

$$\frac{dP_x}{dy} = \frac{d^2U}{dxdy}, \quad \frac{dP_y}{dx} = \frac{d^2U}{dxdy} \text{ и т. д.}$$

Из последних выражений также видно, что

$$\frac{dP_x}{dy} = \frac{dP_y}{dx}, \quad \frac{dP_y}{dz} = \frac{dP_z}{dy}, \quad \frac{dP_z}{dx} = \frac{dP_x}{dz}.$$

Обратим внимание на то, что последние соотношения являются необходимыми и достаточными условиями потенциальности силового поля.

Теперь отметим, что потенциальной энергией в данной точке M поля называют величину той работы, которую совершила бы сила поля при перемещении материальной точки из данного положения в то, в котором потенциальная энергия условно принимается равной нулю (точка O):

$$\Pi = A_{MO}.$$

Но так как для функций $\Pi(x, y, z)$ и $U(x, y, z)$ нулевые значения совпадают, что следует из их определений, то из (I.3) при $U_O = 0$ вытекает, что

$$A_{MO} = U_O - U = -U,$$

где U – значение силовой функции в точке M .

Таким образом, получаем:

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z).$$

Хорошо известно, что работу потенциальной силы можно вычислять также не по выражению (I.3), а по формуле

$$A_{M_1 M_2} = \Pi_1 - \Pi_2,$$

т. е. она равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях точки.

§ I.2. Потенциальная энергия деформации упругой системы

Частным случаем общего определения потенциальной энергии, данного в параграфе I.1, является определение потенциальной энергии упругого деформированного тела, то есть поля сил упругости.

Потенциальная энергия U деформации упругой системы, как это известно, представляет собой величину той работы, которую совершили бы внутренние силы при переводе упругой системы из деформированного состояния в недеформированное; иначе говоря, это энергия сил упругости. Причем она равна по абсолютной величине, но противоположна по знаку действительной работе внутренних сил, а именно:

$$U = -A_{\text{внутр}}.$$

В частности, для линейно-упругого стержня при растяжении-сжатии

$$U^N = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx,$$

а при чистом изгибе

$$U^M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx.$$

В общем же случае для плоской стержневой системы выражение потенциальной энергии деформации можно представить известной формулой

$$U = \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2}{EF} dx + \frac{1}{2} \sum \int \frac{\mu Q^2}{GF} dx,$$

где потенциальная энергия U выражена через усилия.

Также можно представить U через функции, выражающие перемещения точек (сечений) стержней. Например, используя известные дифференциальные зависимости

$$N = EFu' \quad \text{и} \quad M = EIy'',$$

получим следующую форму записи:

$$U^N = \frac{1}{2} \int_0^l EF(u')^2 dx; \quad U^M = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 dx.$$

В некоторых случаях энергию деформации стержня удобно выразить не через функции $u(x)$ или $y(x)$, а через перемещения отдельных его сечений.

Так, например, для растянутого стержня (рис. I.2) горизонтальное перемещение конца стержня определяется параметром Δl . Тогда, вычисляя потенциальную энергию через работу внешних сил, получим:

$$U^N = \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{1}{2} \left(\frac{EF}{l} \Delta l \right) \Delta l = \frac{1}{2} \frac{(\Delta l)^2}{l} EF.$$

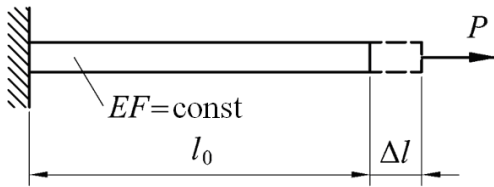


Рис. I.2. Горизонтальное перемещение конца стержня при центральном растяжении

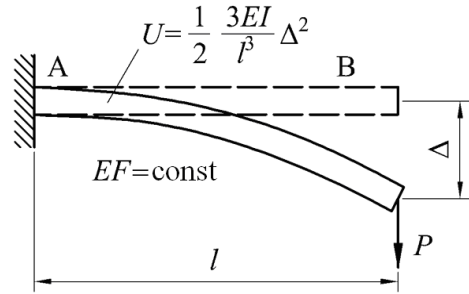


Рис. I.3. Вертикальное перемещение конца стержня при изгибе

Для изогнутого же стержня (рис. I.3) сила P , вызывающая перемещение Δ , равна $\frac{3EI}{l^3} \Delta$. Следовательно,

$$U^M = \frac{1}{2} P \Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{3EI}{l^3} \Delta \right) \Delta = \frac{3}{2} \frac{\Delta^2}{l^3} EI.$$

Итак, резюмируя изложенное, стоит подчеркнуть, что энергия упругой деформации может быть выражена через усилия, через функции перемещений или через дискретные параметры перемещений.

§ I.3. Выражение потенциальной энергии деформации через квадратичные формы. Теоремы Кастилиано и Лагранжа

Хорошо известно, что энергия деформации U , равная работе внешних сил, определяется равенством

$$U = \frac{1}{2} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots + P_n \Delta_n) = \frac{1}{2} [P_1 P_2 \dots P_n] \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \vec{P}^T \vec{\Delta}. \quad (I.4)$$

Но так как $\vec{\Delta} = A \vec{P}$, то это позволяет переписать (I.4) в виде

$$U = \frac{1}{2} \vec{P}^T A \vec{P}, \quad (I.5)$$

т. е. получена матричная запись квадратичной формы n переменных $P_1, P_2, \dots, P_n$, где A – матрица квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если в формуле (I.5) результат операции умножения представить в скалярной форме записи, то для потенциальной энергии деформации получим такое представление:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} (\delta_{11}P_1^2 + \delta_{12}P_1P_2 + \delta_{13}P_1P_3 + \dots + \delta_{1n}P_1P_n + \\ & + \delta_{21}P_2P_1 + \delta_{22}P_2^2 + \dots + \delta_{2n}P_2P_n + \dots + \\ & + \delta_{n1}P_nP_1 + \dots + \delta_{nn}P_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}P_iP_j. \end{aligned} \quad (I.6)$$

Здесь стоит подчеркнуть, что потенциальная энергия системы всегда положительна. Следовательно, записанная квадратичная форма ни при каких значениях $P_1, P_2, \dots, P_n$ не может стать отрицательной. Отметим, что такие квадратичные формы называются положительно определенными.

Теперь представим выражение (I.4) в виде

$$U = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^T \bar{P}. \quad (I.7)$$

Вектор $\bar{P}$ можно выразить через матрицу внешней жесткости $\bar{P} = R\bar{\Delta}$, $R = A^{-1}$, с учетом чего потенциальная энергия деформации запишется так:

$$U = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^T R \bar{\Delta}. \quad (I.8)$$

Таким образом, получена матричная запись квадратичной формы через обобщенные перемещения.

Обратим внимание на то, что в формуле (I.8) матрица внешней жесткости системы

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

является матрицей квадратичной формы.

В скалярной же форме записи получим:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} (r_{11}\Delta_1^2 + r_{12}\Delta_1\Delta_2 + \dots + r_{1n}\Delta_1\Delta_n + \\ & + r_{21}\Delta_2\Delta_1 + r_{22}\Delta_2^2 + \dots + r_{nn}\Delta_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}\Delta_i\Delta_j. \end{aligned} \quad (I.9)$$

Продифференцируем выражение (I.6) по переменной P_1 . Учитывая свойство взаимности перемещений $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ (т. е. симметрию матрицы A), получим:

$$\frac{dU}{dP_1} = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \delta_{13}P_3 + \dots + \delta_{1n}P_n = \Delta_1.$$

В общем же случае имеем

$$\frac{dU}{dP_i} = \Delta_i. \quad (\text{I.10})$$

Последнее выражение представляет собой запись теоремы Кастилиано: *производная от потенциальной энергии деформации по силе равна перемещению точки приложения этой силы по ее направлению.*

Продифференцировав выражение (I.9) по переменной Δ_1 и учитывая равенство $r_{ik} = r_{ki}$ (т. е. симметрию матрицы R), получим:

$$\frac{dU}{d\Delta_1} = r_{11}\Delta_1 + r_{12}\Delta_2 + \dots + r_{1n}\Delta_n = P_1,$$

что для общего случая окончательно дает

$$\frac{dU}{d\Delta_i} = P_i. \quad (\text{I.11})$$

Полученное выражение представляет собой запись теоремы Лагранжа: *в положении равновесия производная от потенциальной энергии деформации по перемещению равна соответствующей силе.*

§ I.4. Полная энергия деформируемой системы

Прежде всего заметим, что с энергетической точки зрения явление деформирования тела представляет собой процесс обмена энергиями двух систем сил (полей сил): внутренних и внешних. И поэтому для полной энергетической характеристики тела в деформированном состоянии недостаточно рассматривать только энергию деформации U , поскольку она представляет собой часть энергии взаимодействующих полей сил.

Будем рассматривать только консервативные внешние силы. Их работа зависит исключительно от начального и конечного состояния и не зависит от пути перехода из одного положения в другое. К ним относятся силы тяжести.

Если принять энергию системы в начальном (недеформированном) состоянии равной нулю, то потенциал сил $\mathcal{E}$ в деформированном состоянии будет измеряться величиной работы, которую могут совершить эти силы при переходе системы из данного состояния в начальное.

Полная энергия нагруженного тела принимается равной

$$\mathcal{E} = U + \Pi, \quad (\text{I.12})$$

где U является потенциальной энергией деформации (упругий потенциал или, иными словами, энергия сил упругости, потенциал внутренних сил), а Π –

энергией внешних сил (потенциал внешних сил).

Под внешними силами, как правило, понимаются силы тяжести. При относительно малом изменении расстояния между телами в околоземном пространстве гравитационные силы практически не изменяются. Поэтому силы тяжести образуют однородное силовое поле, т. е. поле, в котором значение каждой силы постоянно и не зависит от перемещений точек их приложения. Причем их работа вычисляется как работа неизменных сил при переводе системы из данного положения в начальное.

Например, для центрально-растянутого стержня (рис. I.4) имеем

$$\Pi = -P\Delta l,$$

а для изогнутого стержня, нагруженного распределенной нагрузкой (рис. I.5), потенциал внешних сил можно записать так:

$$\Pi = -\int_0^l q(x)y(x)dx.$$

Таким образом, полная энергия системы может быть выражена или через функции перемещений, или через дискретные параметры.

Очевидно, что для последнего примера полную энергию можно представить в виде

$$\mathcal{E} = U + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 dx - \int_0^l q(x)y dx.$$

Из последнего соотношения также видно, что величина $\mathcal{E}$ зависит от функции $y(x)$, т. е. является функционалом (функция от функции) $\mathcal{E} = \mathcal{E}(y)$.

Для дискретной линейно-упругой системы потенциал внутренних сил с учетом формулы (I.9) равен:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \Delta_i \Delta_j.$$

Заменяя далее обозначение обобщенного перемещения Δ на Z , получим:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} Z_i Z_j.$$

В свою очередь, потенциал внешних сил определяется по формуле

$$\Pi = -\sum_{i=1}^n P_i Z_i = \sum_{i=1}^n R_{iP} Z_i, \text{ так как } R_{iP} = -P_i,$$

где R_{iP} – реакции в дополнительных связях основной системы метода перемещений.

Тогда выражение для полной энергии системы может быть окончательно представлено в виде

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i=1}^n R_{ip} Z_i. \quad (\text{I.13})$$

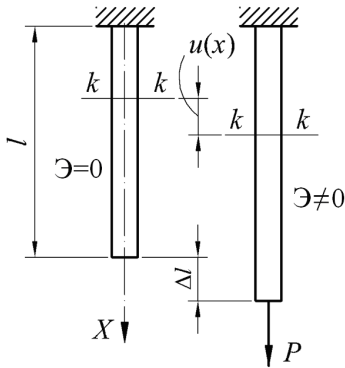


Рис. I.4. Деформирование центрально-растянутого стержня

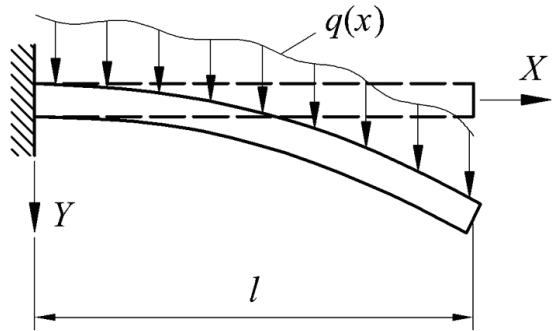


Рис. I.5. Деформирование изогнутого стержня

§ I.5. Принцип вариации перемещений (принцип Лагранжа)

Начнем с напоминания о том, что принцип Лагранжа выражает условие равновесия деформируемой системы, записанное через ее перемещения, с помощью введенного понятия полной энергии Θ .

Предположим дальше, что для растянутого стержня (рис. I.4) $u(x)$ является функцией, определяющей продольные перемещения сечений; иначе говоря, полагаем, что $u(x)$ – это истинные перемещения, при которых устанавливается равновесие между внешними и внутренними силами.

Известно, что в деформированном состоянии полная энергия стержня равна работе внутренних и внешних сил на перемещениях ($-u$):

$$\Theta(u) = U + \Pi = -(A_{\text{внутр}} + A_{\text{внешн}}).$$

Сообщим далее точкам системы дополнительные бесконечно малые перемещения $\delta u = \delta u(x)$, где δu есть произвольная функция с бесконечно малыми ординатами. Эту функцию также называют вариацией функции $u(x)$.

В состоянии $u + \delta u$ энергия будет равна:

$$\Theta(u + \delta u) = -(A_{\text{внутр}} + \delta A_{\text{внутр}} + A_{\text{внешн}} + \delta A_{\text{внешн}}).$$

Вычитая из последнего равенства выражение для $\Theta(u)$, получим бесконечно малое изменение энергии $\delta \Theta$ (первая вариация энергии), вызванное вариацией функции δu :

$$\delta \Theta = \Theta(u + \delta u) - \Theta(u) = -(\delta A_{\text{внутр}} + \delta A_{\text{внешн}}).$$

Для системы, находящейся в равновесии при перемещениях $u(x)$, правая часть в последнем равенстве равна нулю, так как в соответствии с принципом возможных перемещений работа всех сил системы на возможных перемещениях δu должна быть равна нулю:

$$\delta A = \delta A_{\text{внутр}} + \delta A_{\text{внешн}} = 0.$$

Итак, значит,

$$\delta \mathfrak{E} = 0. \quad (\text{I.14})$$

Это есть формальная запись принципа вариации перемещений (принципа Лагранжа): *из всех перемещений, допускаемых связями системы, истинные перемещения $u(x)$ обладают тем свойством, что полная энергия системы при этих перемещениях имеет стационарное значение.* Такое свойство энергии будет наблюдаться тогда, когда она имеет экстремальное значение для истинных перемещений по сравнению со всеми ближайшими.

Рассмотрим теперь схему, изображенную на рис. I.6.

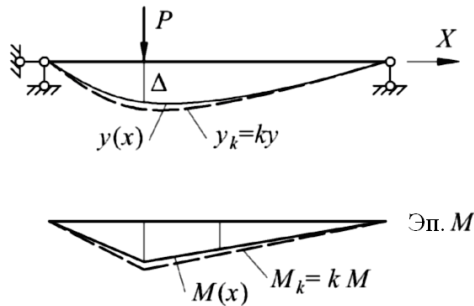


Рис. I.6. К определению полной потенциальной энергии изгиба балки

Пусть дана точная функция прогибов $y = y(x)$ оси балки и соответствующая ей эпюра изгибающих моментов. Как хорошо известно, полную потенциальную энергию изгиба балки можно вычислить или через усилия

$$\mathfrak{E} = U(M) + \Pi = \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2 dx}{EI} - P\Delta = \frac{1}{2} P\Delta - P\Delta,$$

или с учетом представления изгибающих моментов через функцию прогибов

$$\mathfrak{E} = U(y) + \Pi = \frac{1}{2} \sum \int EI(y'')^2 dx - P\Delta = \frac{1}{2} P\Delta - P\Delta.$$

Заметим, что первые слагаемые в этих выражениях преобразовываются на основании численного равенства потенциальной энергии упругой деформации и действительной работы внешних сил.

Исследуем дальше изменение полной энергии системы в зависимости от изменения (вариации) изогнутой оси балки. Увеличим, например, ординаты прогибов оси балки в k раз. Тогда получим:

$$\mathfrak{E} = \frac{k^2}{2} \sum \int EI(y'')^2 dx - kP\Delta = \frac{k^2}{2} P\Delta - kP\Delta = P\Delta \left(\frac{k^2}{2} - k \right),$$

где энергия представлена функцией второй степени от k . Графическая иллюстрация зависимости $\mathfrak{E}(k)/P\Delta$ изображена на рис. I.7. Причем $k = 1$, т. е. в действительном состоянии равновесия имеет место $\min \mathfrak{E}(y)$.

Здесь необходимо обратить внимание на то, что в рассмотренном при-

мере можно было бы варьировать не уравнение изогнутой оси балки, а соответствующую ему функцию изгибающих моментов, т. е. напряженное состояние. Само собой разумеется, что результат вычислений при этом получился бы тем же.

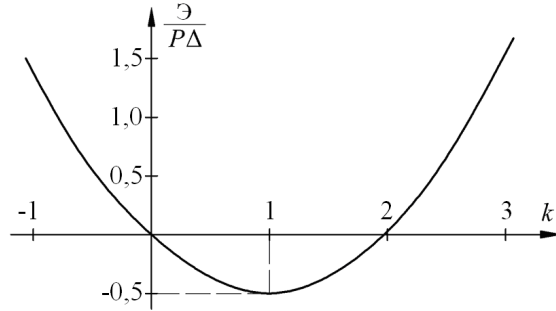


Рис. I.7. График зависимости $\mathcal{E}(k)/P\Delta$ от параметра k

Перейдем теперь к рассмотрению второго примера. В дискретной линейно-деформируемой системе при однопараметрическом нагружении все обобщенные перемещения взаимосвязаны линейно. И поэтому, если использовать параметр обобщенного перемещения Z , то представление полной потенциальной энергии системы будет таково:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Z^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{Z}_i \bar{Z}_j + Z \sum_{i=1}^n R_{iP} \bar{Z}_i,$$

где $\bar{Z}_i, \bar{Z}_j$ — компоненты базисного вектора перемещений системы, соответствующие единичному параметру обобщенной нагрузки P .

Так как для системы имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{Z}_i \bar{Z}_j = - \sum_{i=1}^n R_{iP} \bar{Z}_i,$$

то выражение для энергии можно представить также в такой форме записи:

$$\frac{\mathcal{E}}{\Lambda} = \frac{Z^2}{2} - Z,$$

где обозначено $\Lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{Z}_i \bar{Z}_j$.

Отметим, что функция $\frac{\mathcal{E}}{\Lambda} = (Z)$ имеет минимум в точке $(1, 0; -0,5)$.

Увеличим теперь перемещения Z в k раз. Тогда, учитывая, что для конечного значения нагрузки параметры P и Z фиксированы и выражая U через действительную работу внешних сил, получим:

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{k^2}{2} Z^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{Z}_i \bar{Z}_j + kZ \sum_{i=1}^n R_{ip} \bar{Z}_i = \\ &= k^2 \frac{1}{2} PZ - kPZ = PZ \left(\frac{k^2}{2} - k \right).\end{aligned}$$

Как видим, зависимость $\Theta(k)/PZ$ имеет здесь тот же вид, что и для балки в предыдущем примере. Отсюда следует вывод, что из всех возможных деформированных состояний системы истинное имеет место при $k = 1$. Причем полная энергия системы в этом состоянии минимальна.

Исследование поведения функционалов Θ в стационарных точках с помощью второй вариации $\delta^2\Theta$ дает основания к суждению о качестве равновесия системы. В этом смысле Дирихле было доказано, что если:

$\delta\Theta = 0$ и $\delta^2\Theta > 0$, то $\Theta = \Theta_{\min}$ (устойчивое равновесие);

$\delta\Theta = 0$ и $\delta^2\Theta < 0$, то $\Theta = \Theta_{\max}$ (неустойчивое равновесие);

$\delta\Theta = 0$ и $\delta^2\Theta = 0$, то $\Theta = \text{const}$ (безразличное равновесие).

§ I.6. Способы решения вариационных задач

Вообще говоря, функции $y(x)$, реализующие экстремум функционала $\Theta(y)$, могут быть найдены двумя способами: или посредством решения дифференциальных уравнений, получаемых из условия $\delta\Theta = 0$ (I.14), или с помощью так называемых прямых методов вариационного исчисления.

К задаче о поиске $y(x)$ посредством решения дифференциального уравнения обращаются, как правило, в тех случаях, когда для исследуемого стержня (объекта) энергию можно записать в виде функции, зависящей от перемещений, их первых, вторых и более высокого порядка производных. При этом необходимое условие минимума определенного интеграла

$$\Theta = \int_a^b \Phi(y, y', y'', \dots, y^{(k)}) dx,$$

то есть условие стационарности $\delta\Theta = \int_a^b \delta\Phi dx = 0$, сводится при произвольном

выборе функции δy к дифференциальному уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d\Phi}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi}{dy'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\Phi}{dy''} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d\Phi}{dy^{(k)}} \right) = 0.$$

В качестве примера применения этого способа рассмотрим задачу изгиба консольной балки на упругом винклеровском основании (рис. I.8).

Вначале определим полную энергию взаимодействующих сил:

$$\Theta = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} (y'')^2 + \frac{ky^2}{2} - qy \right] dx = \int_0^l \Phi(y, y'') dx.$$

Очевидно, для этого случая можно записать, что

$$\frac{d\Phi}{dy} = ky - q, \quad \frac{d\Phi}{dy'} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dy''} = EIy''.$$

Тогда дифференциальное уравнение, соответствующее условию $\delta\mathcal{E} = 0$, будет иметь вид

$$(EIy'')'' + ky = q.$$

Заметим, что при $k = 0$ получим $(EIy'')'' = q$, т. е. хорошо известное обычное дифференциальное уравнение поперечного изгиба. Общее решение уравнения будет содержать четыре произвольные постоянные. Для получения частного решения необходимо задать четыре дополнительных условия.

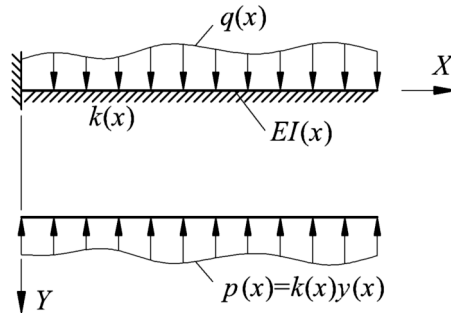


Рис. I.8. Изгиб консольной балки на упругом винклеровском основании

В свою очередь, прямые методы вариационного исчисления позволяют свести задачу нахождения минимума функционала к задаче поиска минимума функции многих переменных посредством решения системы линейных алгебраических уравнений. Указанных методов существует достаточно большое количество, но к наиболее известным из них и часто применяемым на практике можно отнести методы Рэлея-Ритца, Бубнова-Галеркина и метод коллокаций.

Построение решения задачи с применением метода Рэлея-Ритца заключается в том, что из бесконечной системы функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_r(x)$, удовлетворяющих граничным условиям задачи, выбираем первые r функций $\varphi_i(x)$ и образуем из них посредством линейной комбинации новую функцию f_r следующего вида:

$$f_r(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_r\varphi_r(x) = \sum_{i=1}^r a_i\varphi_i(x),$$

где a_i представляют собой произвольные коэффициенты, а функции $\varphi_i(x)$ называются базисными или координатными.

Функционал $\mathcal{E}(\Phi(x))$ после замены $\Phi(x)$ на $f_r(x)$ превращается в функцию $\mathcal{E}(a_1, a_2, \dots, a_r)$ от r независимых переменных. Причем необходимым

условием экстремума функции нескольких переменных является обращение в нуль частных производных первого порядка, т. е.

$$\frac{d\mathcal{E}}{da_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (\text{I.15})$$

Решив систему уравнений (I.15), найдем значения параметров a_i и, следовательно, получим приближенное решение условия стационарности $\delta\mathcal{E} = 0$.

Теперь перейдем к рассмотрению метода Бубнова-Галеркина, который является обобщением метода Рэлея-Ритца, а его основная идея заключается в следующем. Пусть требуется в некоторой области D найти решение дифференциального уравнения

$$L(u) = 0, \quad (\text{I.16})$$

удовлетворяющее на границе S области D однородным граничным условиям:

$$u = 0, \quad (\text{I.17})$$

где L – дифференциальный оператор.

Если функция u является решением уравнения (I.16) в области D , то функция $L(u)$ тождественно равна нулю в этой области и, следовательно, ортогональна любой функции в области D . В этом случае приближенное решение уравнения (I.16) можно определить как

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x, y),$$

где $\psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – линейно независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям (I.17) и являющиеся первыми n функциями некоторой системы функций $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \dots, \psi_n(x, y), \dots$, полной в данной области. При этом постоянные коэффициенты a_i выбираются таким образом, чтобы функция $L(u_n)$ была ортогональна в D первым n функциям системы $\psi_i(x, y)$:

$$\iint_D L[u_n(x, y)] \psi_i(x, y) dx dy = \iint_D L \left[\sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x, y) \right] \psi_i(x, y) dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В качестве функций $\psi_i(x, y)$ в методе Бубнова-Галеркина, как правило, принимаются основные уравнения равновесия задачи, удовлетворяющие ее граничным условиям. Иными словами, если для рассматриваемой задачи уже известны дифференциальные уравнения равновесия и силовые граничные условия, то именно эта причина обеспечивает методу Бубнова-Галеркина особую эффективность. Эта причина позволяет также сразу выписать систему разрешающих уравнений метода, избежав тем самым весьма громоздких выкладок. При этом, конечно, требуется только предварительно переписать все уравнения равновесия и силовые граничные условия в компонентах перемещений.

Метод коллокаций также применяется для приближенного решения вариационных задач с представлением искомого решения в виде аналитическо-

го выражения. Основная идея метода коллокаций состоит в следующем. Найдем приближенное решение, удовлетворяющее внутри области D уравнению

$$L\omega = f \quad (I.18)$$

и граничным условиям на контуре Γ

$$l_i\omega = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (I.19)$$

где L и l_i являются дифференциальными операторами. Для решения выберем некоторую функцию ω^* , зависящую от n параметров a_n ,

$$\omega^* = \omega^*(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (I.20)$$

Подставив (I.20) в (I.18) и (I.19), выразим погрешности в общем случае приближенного решения в заданной области и на границе таким образом:

$$\Delta = L\omega^* - f_1, \quad (I.21)$$

$$\delta_i = l_i\omega^* - f_i. \quad (I.22)$$

Параметры a_r ($r = 1, 2, \dots, n$) определяем из условия обращения в нуль погрешностей (I.21) и (I.22) на некоторой системе точек, называемых *точками коллокации*, расположенных внутри области D (n_1 точек) и на ее границе Γ (n_2 точек). Это условие приводит к алгебраической системе n уравнений относительно a_r :

$$\Delta M_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1; \quad (I.23)$$

$$\delta_i M_a = 0, \quad a = 1, 2, \dots, n_2; \quad kn_2 + n_1 = n. \quad (I.24)$$

где M_j и M_a – точки коллокации внутри области D и на ее границе соответственно. Однако в таком общем виде метод коллокаций применяется достаточно редко, так как приходится вводить большое число n параметров a_r . Обычно функция ω^* подбирается так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (I.19), а параметры a_r определяют из (I.23).

§ I.7. Расчет упругих систем на основе принципа Лагранжа

Как это хорошо известно, перемещение любой точки (сечения) стержня (рис. I.9) с учетом общепринятых допущений однозначно выражается через узловые (обобщенные) перемещения. Так, горизонтальное перемещение u сечения C , как следует из рис. I.10, определяется по формуле

$$u = Z_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + Z_4 \frac{x}{l} = Z_1 f_1(x) + Z_4 f_4(x), \quad (I.25)$$

где $f_1(x), f_4(x)$ – базисные (координатные) функции.

Для определения же перемещений, вызываемых только узловыми смещениями Z_2, Z_3, Z_5 и Z_6 , используем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$v = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Теперь найдем, например, уравнение изогнутой оси для нагружения стержня в виде $Z_2 = 1$. Граничные условия в этом случае записываются так:

$$\text{при } x = 0 \quad v = 1; v' = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad v = 0; v' = 0.$$

Решив систему уравнений четвертого порядка, получим значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 , с учетом которых уравнение изогнутой оси будет таково:

$$v = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}.$$

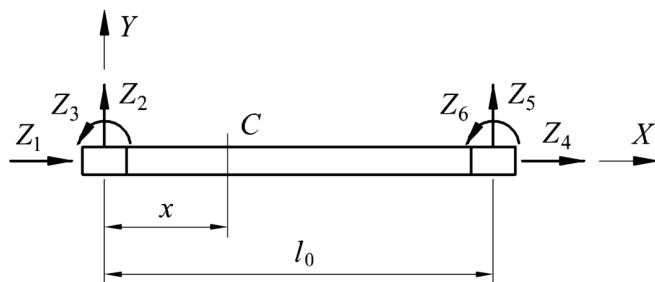


Рис. I.9. Узловые (обобщенные) перемещения точек (сечений) стержня

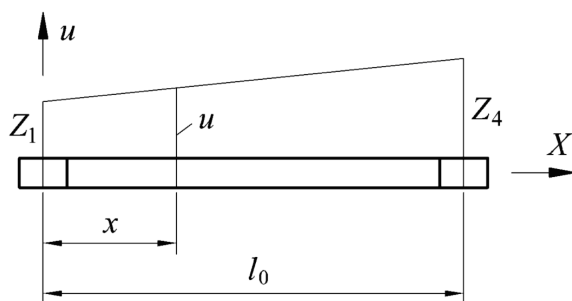


Рис. I.10. К определению величины горизонтального перемещения

Для других единичных узловых смещений заземленного по концам стержня кривые прогибов записаны в табл. I.1.

Тогда, пользуясь принципом независимости действия сил, перемещение сечения C (рис. I.9) по вертикали представим в виде

$$v = Z_2 \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) + Z_3 \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) + Z_5 \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) + Z_6 \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) = \\ = Z_2 f_2(x) + Z_3 f_3(x) + Z_5 f_5(x) + Z_6 f_6(x). \quad (I.26)$$

Выражение же для определения угла поворота сечения получим в результате однократного дифференцирования $v = v(x)$ по x .

Для стержня, защемленного на одном конце и шарнирно опертого на другом, кривые прогибов при единичных узловых смещениях и соответствующие им функции перемещений также показаны в табл. I.1.

В общем случае для дискретной системы выражение для определения перемещения некоторой точки можно представить в виде

$$Z = Z_1 f_1(s) + Z_2 f_2(s) + \dots + Z_n f_n(s), \quad (I.27)$$

где $f_i(s)$ – базисные функции, соответствующие обобщенным перемещениям Z_i .

Причем число таких уравнений соответствует числу деформируемых элементов системы и числу видов (линейных, угловых) перемещений. При этом необходимо только иметь в виду, что для стержневых систем эти уравнения будут точными, а для континуальных – приближенными.

Из предшествующего изложения также следует, что полную энергию системы можно однозначно представить в виде функции n обобщенных перемещений (координат) и нагрузки

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P).$$

Тогда условие стационарности запишется так:

$$\delta \mathfrak{E} = \frac{d\mathfrak{E}}{dZ_1} \delta Z_1 + \frac{d\mathfrak{E}}{dZ_2} \delta Z_2 + \dots + \frac{d\mathfrak{E}}{dZ_n} \delta Z_n = 0,$$

что при независимых вариациях δZ_i и неизменной нагрузке P позволит получить n уравнений для определения Z_i :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{E}}{dZ_1} = \frac{dU}{dZ_1} + \frac{d\Pi}{dZ_1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\mathfrak{E}}{dZ_n} = \frac{dU}{dZ_n} + \frac{d\Pi}{dZ_n} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (I.28)$$

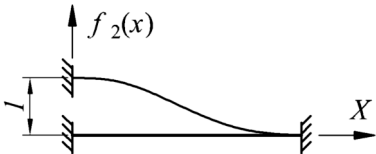
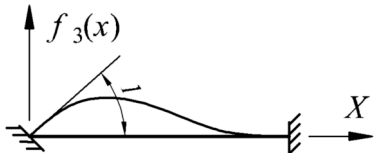
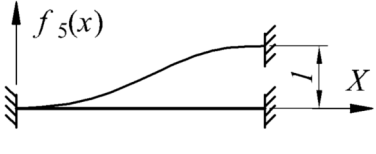
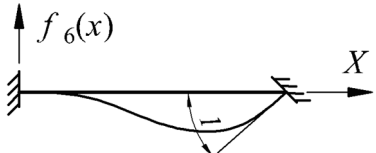
Само собой разумеется, что для линейно-упругой системы полная энергия вычисляется по формуле (I.13), и поэтому уравнения (I.28) в развернутой форме записи принимают вид канонических уравнений метода перемещений

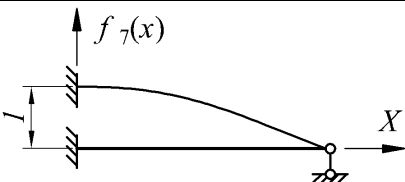
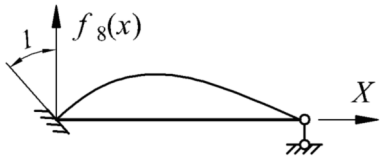
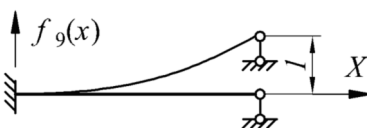
$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь стоит подчеркнуть, что для нелинейно деформируемых систем уравнения (I.28) будут нелинейными относительно Z_i .

Обратим также внимание на то, что вследствие особенностей уравнений (I.27) для континуальных систем из (I.28) можно найти только приближенные значения Z_i . В этом случае уравнения (I.28) называют уравнениями метода Рэля-Ритца, который, как уже отмечалось ранее, относится к прямым методам вариационного исчисления.

Таблица I.1

№ п/п	Схема стержня. Вид перемещения	Уравнение изогнутой оси
1	2	3
1.		$f_2(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$
2.		$f_3(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$
3.		$f_5(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$
4.		$f_6(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$

5.		$f_7(x) = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}$
6.		$f_8(x) = x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2}$
7.		$f_9(x) = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}$

§ I.8. Принцип вариации напряжений или внутренних сил (принцип Кастилиано)

Начнем рассмотрение с указания на такой очевидный факт, что для любой статически неопределимой системы существует множество функций распределения усилий во всех ее элементах, удовлетворяющих условиям равновесия. Причем каждая из этого множества функций является статически допустимой. Также вполне понятным является и то, что среди этого множества находятся и истинные функции.

Предположим теперь, что в стержне, элементы которого испытывают только растяжение-сжатие, истинные функции нормальных усилий $N(x)$ и соответствующих им нормальных напряжений $\sigma(x)$ получили приращение $\delta N(x)$ и $\delta \sigma(x)$, а вариация нагрузки $\delta P(x) = 0$. Будем считать, что на вариациях $\delta \sigma$ перемещения непрерывны и выполняются условия совместности деформаций; иначе говоря, деформация системы согласована с наложенными на нее связями. Предположим также, что полученные новые функции $N + \delta N$ и $\sigma + \delta \sigma$ являются статически допустимыми.

В соответствии с принципом возможных перемещений для системы, находящейся в равновесии, работа всех сил на возможных перемещениях равна нулю. А поэтому выражение для возможной работы самоуравновешенной системы внутренних сил δN может быть представлено следующим образом:

$$\delta A = - \int \int \int_V \epsilon \delta \sigma dV = 0,$$

где $\epsilon \delta \sigma = \delta U_0^{\text{доп}}$ есть приращение удельной (на единицу объема материала) дополнительной работы внутренних сил (рис. I.11).

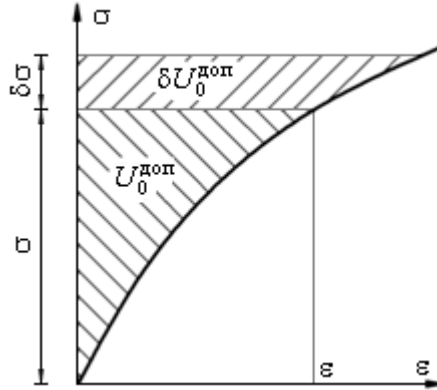


Рис. I.11. К определению удельной дополнительной работы внутренних сил

Несложно показать, что приведенный ход рассуждений не изменится и для любого иного вида деформации элемента.

При наличии принудительных смещений v_i сечений (не нарушающих условий непрерывности перемещений и совместности деформаций), в которых действуют по их направлениям силовые факторы S_i , дополнительная возможная работа определится выражением

$$\hat{\Pi} = \sum_i S_i \delta v_i.$$

Учитывая потенциал этих сил, окончательно условие равенства нулю работы самоуравновешенных сил (которое одновременно является и условием совместности деформаций) получим в следующей форме:

$$\delta(U^{\text{доп}} + \hat{\Pi}) = 0, \quad (\text{I.29})$$

где под обозначением $U^{\text{доп}} = \iiint_V U_0^{\text{доп}} dV$ понимается дополнительная работа внутренних сил.

Последнее равенство представляет собой формальную запись принципа вариации напряженного состояния (принципа Кастилиано), который формулируется следующим образом: *из всех статически возможных напряжений и усилий в системе истинными являются те и только те, которые удовлетворяют условию стационарности функционала $U^{\text{доп}} + \hat{\Pi}$* . Причем выражение для этого функционала должно быть записано через внутренние силы.

Несложно показать также, что для линейно-деформируемой системы $U^{\text{доп}} + U$, поэтому при $\hat{\Pi} = 0$ получим:

$$\delta U = 0. \quad (\text{I.30})$$

Это равенство называют условием наименьшей работы. Оно представляет собой формальную запись принципа минимума потенциальной энергии деформации упругой системы.

Следует заметить, что матрица коэффициентов δ_{ij} при неизвестных силах X_i является матрицей внешней податливости A основной системы. Причем элементы этой матрицы могут вычисляться через вторые производные от потенциальной энергии:

$$\delta_{ij} = \frac{d^2 U}{dX_i dX_j}.$$

Поэтому отсюда следует, что

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 U}{dX_1^2} & \frac{d^2 U}{dX_1 dX_2} & \dots & \frac{d^2 U}{dX_1 dX_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^2 U}{dX_n dX_1} & \frac{d^2 U}{dX_n dX_2} & \dots & \frac{d^2 U}{dX_n^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{I.32})$$

И, наконец, в завершение отметим, что для физически нелинейной системы равенства (I.31) необходимо записывать в виде

$$\frac{dU^{\text{доп}}}{dX_1} = 0, \quad \frac{dU^{\text{доп}}}{dX_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dU^{\text{доп}}}{dX_n} = 0,$$

при этом получаемые уравнения будут нелинейными относительно X_i .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. – М.: Стройиздат, 1976. – 248 с.
2. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
3. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Стройиздат, 1968. – 241 с.
4. Балдин В.А., Шейнфельд Н.М. Применение трубчатых конструкций из стали повышенной и высокой прочности в перекрытиях // Металлические конструкции. – М.: Стройиздат, 1966. – С. 50–63.
5. Барская Н.А. Метод конечных элементов в строительной механике. – Л.: ВНИИГ, 1973. – Вып. 1. – 101 с.; вып. 2. – 68 с.
6. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
7. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высш. шк., 1974. – 200 с.
8. Бельенский Л.М. Расчет судовых конструкций в пластической стадии. – Л.: Судостроение, 1983. – 448 с.
9. Беленя Е.И. Основные направления научных исследований в металлических конструкциях // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1969. – № 12. – С. 3–9.
10. Битюцкий А.И. Некоторые вопросы расчета висячих покрытий с ортогональной пространственной сеткой нитей // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 150–159.
11. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
12. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
13. Болотин В.В. О пространственной деформации балок после потери устойчивости // Расчет пространственных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1959. – Вып. 5. – С. 61–73.
14. Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. – М.: Стройиздат, 1972. – 190 с.
15. Борейко А.С. О расчете физически нелинейного гибкого стержня // Автоматизация и оптимизация проектируемых конструкций. – Хабаровск, 1977. – С. 35–38.
16. Броуде Б.М. Предельные состояния стальных балок. – М.-Л.: Госстройиздат, 1953. – 216 с.

17. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин. – М.: Гостехиздат, 1953. – 423 с.
18. Бурман З.И., Лукашенко В.И., Тимофеев М.Т. Расчет тонкостенных подкрепленных оболочек методом конечных элементов с применением ЭЦВМ. – Казань: КГУ, 1973. – 569 с.
19. Бурчак Г.П. О пространственной устойчивости и колебаниях сплошных балочных пролетных строений с ездой поверху: Дис. ... канд. техн. наук. – М., 1953. – 197 с.
20. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – 475 с.
21. Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 28–33.
22. Варвак П.М., Варвак А.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.
23. Власов В.З. Избранные труды. – М.: АН СССР, 1962. – Т. 1. – 528 с.; т. 2. – 507 с.; т. 3. – 472 с.
24. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
25. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1975. – 367 с.
26. Галин Л.А. Упруго-пластические задачи. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
28. Гвамичава А.С., Лазарева Г.С. Применение гибких элементов при создании компактно складывающихся поверхностей // Исследования, разработка и внедрение висячих систем в покрытиях и инженерных сооружениях. – К., 1982. – С. 114–116.
29. Геммерлинг А.В. Общий метод расчета рам из упруго-пластического материала // Строительная механика и расчет сооружений. – 1968. – № 3. – С. 1–7.
30. Геммерлинг А.В. Расчет стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1974. – 206 с.
31. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсных сил. – М.: Госстройиздат, 1961. – 320 с.
32. Гольдштейн А.С., Киреенко В.И. Висячие и арочные переходы нефтепроводов. – М.: Недра, 1964. – 115 с.
33. Гордеев В.Н., Илиев К.Н., Перельмутер А.В., Прицкер А.Я. Исследование совместной работы плоского мембранного настила и податливого бортового элемента // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 3. – С. 50–54.
34. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
35. Гудьер Дж. Н., Ходж Ф.Г. Упругость и пластичность. – М.: ИЛ, 1960. – 190 с.
36. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976. – 95 с.
37. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
38. Дикович И.Л. Статика упруго-пластических балок судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1967. – 264 с.

39. *Динник А.Н.* Устойчивость упругих систем. – М.: ОНТИ, 1935. – 183 с.
40. *Дмитриев Л.Г.* Расчет вантовых покрытий // Стр-во и архитектура. – К., 1963. – № 2. – С. 16–17.
41. *Дмитриев Л.Г., Касилов А.В.* Вантовые покрытия. – К.: Будівельник, 1974. – 272 с.
42. *Дривинг А.Я.* Устойчивость мачт на оттяжках. – М.: Стройиздат, 1964. – 112 с.
43. *Ершов Н.Ф.* Упруго-пластический расчет пластин с распором // Прикладная механика. – 1963. – Т. 9, № 6. – С. 55–62.
44. *Ершов Н.Ф.* Цилиндрический изгиб пластин с распором, выполненных из линейно упрочняющихся материалов // Тр. ГПИ. – Горький: ГГУ, 1966. – № 3. – С. 21–30.
45. *Ершов Н.Ф., Свечников О.И.* Предельное состояние и надежность конструкций речных судов. – Л.: Судостроение, 1970. – 152 с.
46. *Завриев К.С., Ониашвили О.Д.* Избр. тр. – Тбилиси: Мецниереба, 1978. – 297 с.
47. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
48. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений в механике сплошных сред. – М.: Недра, 1974. – 239 с.
49. *Знаменский П.М.* Общая устойчивость длинных открытых профилей при продольном сжатии // Техника воздушного флота. – 1934. – № 12. – С. 1–16.
50. *Зотова И.М.* Исследование висячих систем покрытия типа «опрокинутых» арок: Дис. ... канд. техн. наук. – М.: 1979. – 216 с.
51. *Зотова И.М.* К расчету висячих покрытий с конечной изгибной жесткостью // Строительные конструкции. Исслед. по метал. конструкциям: Сб. науч. тр. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. – М.: ЦИНИС, 1970. – Вып. 5. – С. 6–29.
52. *Ивович В.А.* Нелинейные колебания гибкой пологой нити // Строительная механика и расчет сооружений. – 1966. – № 5. – С. 39–44.
53. *Илленко К.Н.* О расчете нити с изгибной жесткостью // Строительная механика и расчет сооружений. – 1966. – № 6. – С. 47–50.
54. *Ильяшин А.А.* Пластичность. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
55. *Ильясевич С.А.* Металлические коробчатые мосты. – М.: Транспорт, 1970. – 279 с.
56. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
57. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
58. *Карякин Н.И.* Основы расчета тонкостенных конструкций. – М.: Высш. шк., 1960. – 239 с.
59. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 324 с.
60. *Качанов Л.М.* Устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. XV, № 2. – С. 195–206.
61. *Качурин В.К.* Статический расчет вантовых систем. – Л.: Стройиздат, 1969. – 141 с.

62. Качурин В.К. Теория висячих систем. – М.-Л.: Госстройиздат, 1962. – 224 с.
63. Качурин В.К., Брагин А.В., Ерунов Б.Г. Проектирование висячих и вантовых мостов. – М.: Транспорт, 1971. – 280 с.
64. Киреенко В.И., Шимановский В.Н., Коршунов Д.А., Смирнов Ю.В. Висячие трубопроводные переходы. – К.: Будівельник, 1968. – 160 с.
65. Кирсанов Н.М. Висячие и вантовые конструкции. – М.: Стройиздат, 1981. – 158 с.
66. Кирсанов Н.М. Висячие покрытия производственных зданий. – М.: Стройиздат, 1990. – 127 с.
67. Кирсанов Н.М. Висячие системы повышенной жесткости. – М.: Стройиздат, 1973. – 116 с.
68. Кирсанов Н.М. Расчет висячих комбинированных систем по линиям влияния с учетом прогибов. – Воронеж: ВГУ, 1976. – 103 с.
69. Кислоокий В.Н. Алгоритм численного решения задач статики и динамики нелинейных систем // Прикладная механика. – 1966. – Т. II, вып. 6. – С. 87–91.
70. Кислоокий В.Н. Исследование статики и динамики висячих, пневмонапряженных и комбинированных систем методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – № 4. – С. 27–30.
71. Кислоокий В.Н. Реализация МКЭ в расчетах мембранно-стержневых, висячих, пневмонапряженных и комбинированных систем // Комплексный расчет зданий и сооружений с применением ЭВМ. – К.: КИСИ, 1978. – С. 61–65.
72. Кислоокий В.Н. Статика и динамика нелинейных вантово-стержневых систем // Сопротивление материалов и теория сооружений – К.: Будівельник, 1969. – Вып. IX. – С. 13–21.
73. Кислоокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А. Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек // Проблемы прочности. – 1977. – № 7. – С. 25–32.
74. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Фесенко О.А. Сравнительный анализ алгоритмов решения задач статики мягких оболочек методом конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1983. – Вып. 43. – С. 53–58.
75. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В. Решение задач формообразования и расчета сильно нелинейных пространственных покрытий // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 5. – С. 1–4.
76. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Боговис В.Е. Численный расчет большепролетных пространственных комбинированных конструкций // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1987. – № 7. – С. 33–38.
77. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Касилова Т.А., Крицкий В.Б. Комплекс программ для статических и динамических расчетов нелинейных комбинированных систем // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 48. – С. 32–35.

78. *Кислоокий В.Н., Шимановский А.В., Лазарева Г.С., Крицкий А.Б.* Решение задач общей устойчивости сильно нелинейных вантово-стержневых систем // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1985. – № 9. – С. 28–33.
79. *Койтер В.Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. – М.: ИЛ, 1961. – 79 с.
80. *Колоушек В.* Динамика строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1965. – 632 с.
81. *Корнеев В.Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: ЛГУ, 1977. – 206 с.
82. *Корноухов Н.В.* Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1949. – 376 с.
83. *Корчинский И.Л., Гриллер А.А.* Расчет висячих покрытий на динамические воздействия (землетрясение, ветер). – М.: Стройиздат, 1978. – 220 с.
84. *Косенко И.С.* Висячие конструкции покрытий. – М.: Стройиздат, 1966. – 87 с.
85. *Кузнецов Э.Н.* Пространственные вантовые системы. Теория и расчет // Строительная механика и расчет сооружений. – 1967. – № 3. – С. 1–6.
86. *Кульбах В.Р.* Вопросы статического расчета висячих систем. – Таллинн: ТПИ, 1970. – 118 с.
87. *Лейтес С.Д.* Устойчивость сжатых стальных стержней. – М.: Госстройиздат, 1954. – 308 с.
88. *Лилеев А.Ф., Селезнева Е.Н.* Методы расчета пространственных вантовых систем. – М.: Стройиздат, 1964. – 171 с.
89. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
90. *Людковский И.Г.* Комбинированные висячие покрытия // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: ЦИНИС, 1973. – № 8. – С. 4–24.
91. *Людковский И.Г.* Современное состояние и перспективы применения висячих покрытий // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 5–52.
92. *Людковский И.Г., Иванов М.А., Пасюта А.В., Филякин А.А.* Висячие оболочки покрытий с внешним листовым армированием // На стройках России. – 1987. – № 11. – С. 7–11.
93. *Людковский И.Г., Федоров А.Д.* Работа опорных участков вант // Висячие покрытия: Сб. научн. тр. НИИЖБ. – М.: ЦИНИС, 1971. – С. 157–162.
94. *Матевосян Р.Р.* Устойчивость стержневых систем (качественная теория). – М.: Госстройиздат, 1961. – 252 с.
95. *Мацелинский Р.Н.* Расчет гибких нитей на произвольную вертикальную нагрузку // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 52–60.
96. *Мацелинский Р.Н.* Статический расчет гибких висячих конструкций. – М.-Л.: Госстройиздат, 1950. – 192 с.

97. *Мацелинский Р.Н.* Статический расчет упругих нитей // Строительная механика и расчет сооружений. – 1959. – № 4. – С. 3–9.
98. *Медведев С.В., Каранетян Б.К., Быховский В.А.* Сейсмические воздействия на здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1968. – 191 с.
99. *Мельников Н.П.* Пути прогресса в области металлических конструкций. – М.: Стройиздат, 1974. – 136 с.
100. Метод конечных элементов в механике сплошной среды / Под ред. П.М. Варвака. – К.: КАДИ, 1976. – 114 с.
101. Метод конечных элементов в строительной механике / Под ред. А.Г. Угодникова. – Горький: ГГУ, 1975. – 165 с.
102. Метод конечных элементов в строительной механике сплошных сред // Реферативный обзор зарубежной литературы за период 1966–1970 гг. – Л.: ВНИИГ, 1971. – 160 с.
103. *Москалев Н.С.* Конструкции висячих покрытий. – М.: Стройиздат, 1980. – 331 с.
104. *Мурзаханов Г.Х., Щугорев В.Н.* Влияние вторичных трещин на устойчивость и рост отслоений в конструкциях из композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 6. – С. 1120–1124.
105. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: ИЛ, 1954. – Т. 1. – 620 с.; М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 863 с.
106. *Немчинов Б.К.* Численный метод расчета нитей конечной жесткости // Труды ВИСИ. – Воронеж: ВГУ, 1970. – Т. 16, вып. 3. – С. 10–17.
107. *Немчинов Б.К.* Экспериментальное исследование нитей конечной жесткости // Тр. ВИСИ. – Воронеж: ВГУ, 1971. – Т. 17, вып. 7. – С. 7–13.
108. *Немчинов Ю.И.* Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). – К.: Будівельник, 1980. – 232 с.
109. *Нил Б.Г.* Расчет конструкций с учетом пластических свойств материала. – М.: Госстройиздат, 1961. – 315 с.
110. *Новацкий В.* Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.
111. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
112. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
113. *Отто Ф.* Висячие покрытия, их формы и конструкции. – М.: Госстройиздат, 1960. – 179 с.
114. *Отто Ф., Шлейер Ф.К.* Тентовые и вантовые строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1970. – 175 с.
115. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
116. *Передерий Г.П.* Курс мостов. Конструкция, проектирование и расчет. – М.-Л.: Госжелдориздат, 1933. – 490 с.
117. *Перельмутер А.В.* Основы расчета вантово-стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1969. – 190 с.

118. *Петров И.П., Спиридонов В.В.* Надземная прокладка трубопроводов. – М.: Недра, 1965. – 447 с.
119. *Попов Н.Н., Расторгуев Б.С.* Динамический расчет висячих конструкций. – М.: Стройиздат, 1966. – 84 с.
120. *Постнов В.А.* Теория пластичности и ползучести. – Л.: ЛПИ, 1975. – 266 с.
121. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 279 с.
122. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 342 с.
123. *Прагер В.* Проблемы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.
124. *Пуховский А.Б.* Повышение сейсмостойкости стальных листовых конструкций методами предварительного напряжения // Проектирование и строительство трубопроводов и газонефтепромысловых сооружений. – 1982. – № 10. – С. 29–32.
125. *Пуховский А.Б., Капцов В.В.* Исследование работы висячих покрытий при сейсмических воздействиях // Металлические конструкции в строительстве: Сб. науч. тр. МИСИ им. В.В. Куйбышева. – М., 1983. – № 183. – С. 82–92.
126. *Рабинович И.М.* Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. – М.: Стройиздат, 1975. – 144 с.
127. *Рабинович И.М.* Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.
128. *Рабинович И.М., Синицын А.П., Теренин Б.М., Лужин О.В.* Расчет сооружений на импульсные воздействия. – М.: Стройиздат, 1970. – 304 с.
129. *Раковщик Ю.А.* К определению остаточных прогибов гибких сжато-изогнутых (или растянуто-изогнутых) стержней // Тр. МАДИ. – М., 1972. – Вып. 36. – С. 32–40.
130. *Рекач Г.В.* Расчет гибкой растяжимой нити по деформированному состоянию // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1970. – Вып. 18. – С. 178–182.
131. *Ржаницын А.Р.* Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. – М.: Госстройиздат, 1954. – 287 с.
132. *Ржаницын А.Р.* Статика и динамика пологой упругой нити // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 60–76.
133. *Ржаницын А.Р.* Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
134. *Ржаницын А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Гостехтеоретиздат, 1955. – 475 с.
135. *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.
136. *Розин Л.А.* Стержневые системы как системы конечных элементов. – Л.: ЛГУ, 1976. – 232 с.
137. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

138. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1974. – Вып. 24. – С. 147–156.
139. Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
140. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978. – 222 с.
141. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.
142. Серов В.Н. Упруго-пластический изгиб судовых пластин конечной жесткости: Дис. ... канд. техн. наук. – Л., 1955. – 141 с.
143. Семенюк Н.П., Бойко Н.Б. Моделирование дискретной связи слоев при расчете на устойчивость двухслойной цилиндрической оболочки // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 46–51.
144. Сидорович Е.М. К расчету гибких нитей на упругих опорах // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1965. – № 6. – С. 53–57.
145. Синицын А.П. Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки. – М.: Стройиздат, 1967. – 145 с.
146. Скворцов В.И. Расчет жесткой нити при произвольном нагружении в плоскости ее провисания // Тр. МИИТ. – М., 1971. – Вып. 371. – С. 108–114.
147. Складнев Н.Н. Исследование прямоугольных пластин из материала с криволинейной несимметричной диаграммой растяжения-сжатия в условиях действия плоского напряженного состояния и поперечного изгиба // Некоторые задачи сопротивления материалов: Сб. науч. тр. МИСИ им. В.В.Куйбышева. – М., 1969. – № 63. – С. 39–52.
148. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Шапошников Н.Н. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. – М.: Судпромгиз, 1965. – 380 с.
149. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов. – М.: Высш. шк., 1970. – 408 с.
150. Снитко Н.К. Динамика сооружений. – М.-Л.: Госстройиздат, 1960. – 356 с.
151. Снитко Н.К. Устойчивость сжатых и сжатоизогнутых стержневых систем. – М.-Л.: Госстройиздат, 1956. – 207 с.
152. Сobotка З. Висячие покрытия. – М.: Стройиздат, 1964. – 151 с.
153. Соколов А.Г. Опоры линий электропередач. Расчет и конструирование. – М.: Госстройиздат, 1961. – 171 с.
154. Соколов А.Г., Гвамичава А.С. Решения инженерных конструкций космических радиотелескопов // Антенны. – М.: Радио и связь, 1981. – Вып. 29. – С. 3–10.
155. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
156. Сорокин В.В. Сложный упруго-пластический изгиб удлиненных пластин // Тр. НТО судостроительной промышленности. – Л., 1964. – Вып. 53. – С. 111–124.
157. Спиро В.Е. Оценка упруго-пластических деформаций вытянутых прямоугольных пластин при сложном изгибе. – Л.: Судостроение, 1964. – № II. – 64 с.
158. Стрелецкий Н.С. Избранные труды. – М.: Стройиздат, 1975. – 423 с.

159. Стрельбицкая А.И., Колгадин В.А., Матошко С.И. Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости. – К.: Наук. думка, 1971. – 244 с.
160. Тартаковский Г.А. Строительная механика трубопровода. – М.: Недра, 1967. – 312 с.
161. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 508 с.
162. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 363 с.; т. 2. – 480 с.
163. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избр. работы. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
164. Тихенко Ю.Н. Учет пластических деформаций при изгибе балок двутаврового сечения. – М.: Госстройиздат, 1955. – 208 с.
165. Тихомирова Е.И. Расчет идеально упруго-пластических статически неопределимых стержневых систем: Дис... канд. техн. наук. – М., 1983. – 118 с.
166. Торнтон Ч., Томасетти Р. Строительство крупных ангаров с несущим консольным покрытием // Гражданское стр-во. – 1970. – № II. – С. 17–22.
167. Трофимов В.И., Гольденберг Л.И. Большепролетные покрытия Олимпийских сооружений // Стр-во и архитектура. – М.: Знание, 1984. – № 5. – 61 с.
168. Трофимов В.И., Еремеев П.Г., Давыдов Е.Ю. Мембранные (тонколистовые) висячие покрытия. Обзорная информация // Стр-во и архитектура. Строит. конструкции. – М.: ЦИНИС, 1981. – Серия 8. – Вып. 1. – 65 с.
169. Трофимович В.В. Метод расчета предварительно напряженных статически неопределимых висячих систем // Прикладная механика. – 1968. – № 12. – С. 49–57.
170. Тютюнин Г.В., Гольденблюгер С.В. К определению прогибов при упруго-пластическом изгибе балок // Некоторые вопросы прочности и надежности. – Фрунзе, 1979. – С. 102–106.
171. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.-Л.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
172. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 832 с.; 1978. – Т. 2. – 616 с.; 1981. – Т. 3. – 480 с.
173. Филин А.П. Проблемы использования современных вычислительных средств в строительной механике // Тр. I Всес. конф. по применению ЭЦВМ в строит. механике. – М., 1966. – С. 9–14.
174. Фридман Ю.Г. Устойчивость плоской формы деформации нитей конечной изгибной жесткости // Вопросы архитектуры и стр-ва зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры. – М.: ЦНИИЭП учеб. зданий, 1974. – № 2. – С. 112–123.
175. Ходж Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. – М.: Машгиз, 1963. – 380 с.
176. Цаплин С.А. Висячие мосты. – М.: Дориздат, 1949. – 287 с.
177. Цаплин С.А. Висячие мосты. Теория и расчет. – М.-Л.: Гострансиздат, 1937. – 240 с.

178. Цыхановский В.К., Шимановский А.В., Сергатая Т.А. Расчет пространственной висячей системы по деформированной схеме // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1990. – № 5. – С. 34–39.
179. Шаров Я.Ф. Некоторые особенности упруго-пластического изгиба сварных перекрытий корпуса судна // Проектирование и прочность сварных конструкций: Сб. науч. тр. НТО Машпрома. – М., 1959. – С. 72–85.
180. Шимановский А.В. Исследование напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости при активном нагружении и разгрузке // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, № 11. – С. 110–117.
181. Шимановский А.В. Некоторые вопросы устойчивости плоской формы деформирования нитей конечной жесткости за пределами упругости // Проблемы прочности. – 1992. – № 4. – С. 43–49.
182. Шимановский А.В. Некоторые задачи статики нитей конечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 6. – С. 29–32.
183. Шимановский А.В. Особенности реализации метода рядов Фурье в расчетах несущих элементов висячих систем // Висячие комбинированные конструкции. – Воронеж: ВГУ, 1991. – С. 43–51.
184. Шимановский А.В. Расчет упруго-пластических нитей конечной жесткости с использованием принципа Лагранжа // Строительная механика и расчет сооружений. – 1992. – № 2. – С. 27–33.
185. Шимановский А.В. Упруго-пластический расчет нитей конечной жесткости из упрочняющегося материала // Изв. вузов. Строительство. – 1992. – № 2. – С. 27–32.
186. Шимановский А.В. Уточнение методики расчета нитей конечной жесткости при статических воздействиях // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1985. – № 5. – С. 115–118.
187. Шимановский А.В., Гайна Г.А. Интерактивная система для расчетов прочности и устойчивости строительных конструкций на микроЭВМ // Системы автоматизированного проектирования объектов строительства (САПР-ОС). – К.: Будівельник, 1988. – Вып. 5. – С. 72–77.
188. Шимановский А.В., Лисицин Б.М. Моделирование строительных конструкций / Под общей редакцией Шимановского А.В. – К.: Сталь, 2006. – 724 с.
189. Шимановский А.В., Марзицин Б.М. Применение рядов Фурье в задачах статики гибких упругих нитей // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1985. – Вып. 47. – С. 95–98.
190. Шимановский А.В., Оглобля А.И. Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. – К.: Сталь, 2002. – 372 с.
191. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Анализ нелинейного деформирования мембранных и стержневых систем // Расчет прочности, устойчивости и колебаний сооружений. – Воронеж: ВГУ, 1990. – С. 150–156.

192. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Исследование вантово-стержневой системы висячего перехода трубопровода при больших перемещениях // Изв. СКНЦ ВШ. Технические науки. – 1987. – № 3. – С. 90–96.
193. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Теория и расчет сильнонелинейных конструкций. – К.: Сталь, 2005. – 432 с.
194. Шимановский А.В., Цыхановский В.К., Тулебаев К.Р. Численное исследование комбинированного висячего покрытия спортивной арены на статические и сейсмические воздействия // Изв. вузов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 18–24.
195. Шимановский А.В., Чабан Н.А. Аналитические решения нелинейных задач статики нитей конечной жесткости при активных нагружениях // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 121–129.
196. Шимановський О.В., Чабан Н.О. Вплив пластичних властивостей матеріалу на граничний стан нитки скінченної жорсткості // Проблеми прочности. – 2007. – № 5. – С. 132–140.
197. Шимановский А.В., Шалинский В.В. Численно-аналитическое решение задач физически и геометрически нелинейного деформирования стержней // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45. – № 5. – С. 124–131.
198. Шимановский В.Н. Висячие системы. – К.: Будівельник, 1984. – 208 с.
199. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости). – К.: Будівельник, 1973. – 198 с.
200. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б. Статические и динамические испытания моделей трубопроводных переходов в виде провисающей нити // Экспериментальные исследования инженерных сооружений. – К.: Будівельник, 1969. – Вып. 5. – С. 44–49.
201. Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б., Присяженко Е.К. Экспериментальное исследование нитей конечной жесткости // Строительные конструкции. – К.: Будівельник, 1967. – Вып. 6. – С. 5–21.
202. Шимановский В.Н., Соколов А.А. Расчет висячих конструкций за пределом упругости. – К.: Будівельник, 1975. – 104 с.
203. Шимановский В.Н., Харченко Р.Б., Киреенко В.И., Лысов В.Б. Новое решение трубопроводного перехода висячего типа // Промышленное строительство и инженерные сооружения. – 1975. – № 6. – С. 18–20.
204. Шимановский В.Н., Шимановский А.В. Устойчивость плоской формы изгиба пологих нитей конечной жесткости // Развитие металлических конструкций. Работы школы Н.С. Стрелецкого. – М.: Стройиздат, 1987. – С. 391–403.
205. Ширко Н.В. Упруго-пластический изгиб гибких криволинейных стержней // Тр. ВНИИ физико-технических и радиотехнических измерений. – М., 1971. – Вып. 8. – С. 77–85.
206. Щедров В.С. Основы механики гибкой нити. – М.: Машгиз, 1961. – 172 с.
207. Ягн Ю.И. Изгибно-крутильные деформации тонкостенных стержней открытого профиля. Теория и расчет. – М.: Гостехиздат, 1952. – 108 с.

208. *Bandel H.K.* Das orthogonale Seilnetz hyperbolisch-parabolischer Form unter verticalen Lastzusanden und Temperaturänderung // *Der Bauingenieur.* – 1959. – Jg. 34, № 10. – S. 394–401.
209. *Bauer.* Das flache biegesteife Seil mit elastischer Einspannung an der Enden // *Der Bauingenieur.* – 1972. – Jg. 47, № 11. – S. 387–393.
210. *Ichizou T., Kimihira K., Hiroshi Y.* Inelastic coupled buckling of vertically curved girders under pure bending // *Technol. Repts Kansai Univ.* – 1975. – № 16. – P. 77–91.
211. *Jensen I.I.* Eine statische und dynamische Untersuchung der Seil und Membautragwerke // *Bericht.* – 1970. – № 70. – S. 120–128.
212. *Kappus R.* Zentrisches und exzentrisches Drehknicken von Stäben mit offenem Profil // *Der Stahlbau.* – 1953. – Jg. 22, H. 1. – S. 6–12.
213. *Kislookij V.N., Kasilova T.A., Krizkij W.B., Zichanovskij W.K., Shimanovskij A.V.* Programm-komplex zur nichtlinearen statischen und dynamischen Berechnung Kombierter Konstruktionen // *Wiss. Z. Hochsch. Archit. Bauwes.* – Weimar, 1985. – Reihe B. – Jg. 31, H. 31. – S. 97–99.
214. *Koichi T., Kuniaki U., Hisashi T.* Failure of steel beams due to lateral buckling under repeated loads // *Rapp. commis. trav. Assoc. Ints. ponts. Et charpentes.* – 1973. – V. 13. – P. 312–325.
215. *Lissitsin B. M., Shimanovsky A.V.* The new solutions and the theory of calculation for the overground radial-cable-stayed main product lines and for passages of large spans // *IASS Symposium: Spatial structures at the turn of millennium.* – Copenhagen, 1991. – V. III. – P. 165–172.
216. *Shimanovsky A., Shalinsky V.* The Stability of Plane Shape Under Bending of Elastically-Plastic Finite Rigidity Tendons, having Non-symmetrical Cross-Section // *Proceedings and Extended Abstracts of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures IASS-IACM 2008 «Spanning Nano to Mega».* – Ithaca, 2008. – 4 p.
217. *Schleyer F.K.* Die Berechnung von Seilon, Seilnetzen und Seilwerken // *Lugbeanspruchte Konstruktionen.* – 1966. – Bd. 2, H. 10. – S. 48–61.
218. *Shimanovsky A.V., Tylebayev K.R.* New type of seismic stable large-span suspended roofing of public building and method of its calculation // *IASS International Congress: Innovative Large Span Structures.* – Toronto, 1992.
219. *Skladnev N.N., Shimanovsky A.V.* General calculation for suspended structures of large-span buildings and construction considering plastic properties of materials // *IASS International Congress: Innovative Large Span Structures.* – Toronto, 1992.
220. *Wagner H.* Verdrehung und Knickung von offenem Profilen // *Festschrift zum 25 Jahrgen T.H.* – Danzig. – 1929. – S. 241–254.
221. *Weber C.* Biegung und Schub in geraden Balken // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.* – 1924. – Bd. 4, H. 4. – S. 334–348.
222. *Young A.G.* Ship plating beyond the elastic limit // *Quart. Trans. Inst. Naval Architects.* – 1959. – V. 101, № 2. – P. 107–112.

ПРЕДИСЛОВИЕ к третьему изданию	3
ПРЕДИСЛОВИЕ ко второму изданию	5
ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. Состояние исследований	17
1.1. Некоторые тенденции совершенствования висячих систем	17
1.2. Обзор теоретических и экспериментальных исследований	32
1.3. Задачи исследований	45
Глава 2. Висячие системы. Типы и особенности	47
2.1. Покрытия зданий и сооружений	47
2.2. Мембранные конструкции	58
2.3. Мосты и путепроводы	65
2.4. Трубопроводные переходы	67
Глава 3. Теория расчета гибких нитей	73
3.1. Классификация нитей	73
3.2. Вводные замечания. Исходные допущения	74
3.3. Основные зависимости расчета гибких нитей	75
3.4. Общее решение задачи для гибкой нерастяжимой нити	77
3.4.1. Основное дифференциальное уравнение задачи и его общий интеграл	77
3.4.2. Дифференциальная зависимость между распором и нагрузкой (первый вариант решения).....	79
3.4.3. Дифференциальная зависимость между распором и нагрузкой (второй вариант решения).....	83

3.4.4. Основные зависимости расчета гибких нитей с использованием формулы длины дуги	85
3.5. Действие дополнительных нагружений специального вида	87
3.5.1. Случай участковой произвольно расположенной равномерно распределенной нагрузки	87
3.5.2. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета	89
3.5.3. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки	91
3.5.4. Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки	91
3.5.5. Случай двух участковых несимметричных равномерно распределенных нагрузок	91
3.5.6. Случай произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки	92
3.6. Задача о спрямлении дуги нерастяжимой нити	93
3.7. Общее решение задачи для гибкой упругой нити	97
3.8. Частные случаи решения задачи для гибкой упругой нити	99
3.8.1. Расчет струны	99
3.8.2. Расчет предварительно напряженной струны	99
3.9. Учет влияния температурных воздействий	101
3.10. Учет влияния смещения и осадки опор	102
3.11. Расчет многопролетной гибкой упругой нити на упруго-податливых опорах	104
3.12. Оценка исходных допущений и полученных решений	106

Глава 4. Уточненная теория расчета нитей конечной жесткости	109
4.1. Предварительные замечания. Предпосылки расчета	109
4.2. Общий случай деформации нити. Основные дифференциальные уравнения задачи	111
4.3. Действие дополнительных нагружений специального вида	116
4.3.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета	120
4.3.2. Случай сосредоточенной нагрузки посредине пролета	122
4.3.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета	123
4.4. Решение дифференциальных уравнений	124
4.5. Учет влияния температурных воздействий	128
4.6. Учет влияния деформации основания	131
4.7. Расчет многопролетной нити на упруго-податливых опорах	134
4.8. Расчет двухпропоясной висячей системы	137
4.9. Оценка предпосылок расчета и полученных решений. Пределы применимости	141
4.10. Расчет нитей конечной жесткости с помощью рядов Фурье	149
4.10.1. Точное решение задачи. Случай нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной нагрузки ...	150
4.10.2. О характерной R -функции нагрузки	153
4.10.3. Лемма о сумме ряда $G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{u^2 + n^2}$	153
4.10.4. Точное решение задачи. Случай нити конечной жесткости, работающей без изгиба от начальной нагрузки	156
4.10.5. Приближенное решение задачи	159

Глава 5. Устойчивость плоской формы изгиба нитей конечной жесткости	170
5.1. Вводные замечания. Принятые допущения	170
5.2. Определение дополнительных погонных нагрузок	171
5.3. Общие уравнения устойчивости нитей конечной жесткости	175
5.4. Действие дополнительных нагружений специального вида	184
5.4.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета	184
5.4.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета	187
5.4.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета	189
Глава 6. Работа гибких нитей за пределом упругости	191
6.1. Исходные допущения	191
6.2. Гибкие нити из идеального упруго-пластического материала	192
6.2.1. Работа поперечного сечения нити	192
6.2.2. Основные зависимости расчета нитей из идеального упруго-пластического материала	193
6.3. Гибкие нити из идеального упруго-пластического материала с упрочнением	194
6.3.1. Работа поперечного сечения нити	196
6.3.2. Вывод расчетных зависимостей	197
6.4. Гибкие нити из идеального жестко-пластического материала	200
6.4.1. Работа поперечного сечения нити	200
6.4.2. Основные зависимости расчета нитей из идеального жестко-пластического материала	201
6.5. Гибкие нити из идеального жестко-пластического материала с упрочнением	204

6.5.1. Работа поперечного сечения нити	204
6.5.2. Вывод расчетных зависимостей	205
6.6. Оценка влияния моделей работы материала на поведение гибких нитей. Качество и близость решений. Пределы применимости	206
Глава 7. Упруго-пластическое деформирование нитей конечной жесткости	216
7.1. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального упруго-пластического материала	216
7.2. Вывод общих дифференциальных уравнений	219
7.3. Действие дополнительных нагружений специального вида	224
7.3.1. Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки	224
7.3.2. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки	229
7.3.3. Случай произвольно расположенной сосредоточенной нагрузки	230
7.3.4. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета	234
7.4. Влияние пластических шарниров на работу нити	234
7.5. Учет упрочнения материала	236
7.5.1. Работа поперечного сечения нити	237
7.5.2. Вывод дифференциальных уравнений	240
7.6. Определение остаточных прогибов при разгрузке	248
Глава 8. Жестко-пластическое деформирование нитей конечной жесткости	252
8.1. Вводные замечания	252
8.2. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального жестко-пластического материала	253
8.2.1. Работа поперечного сечения нити	253

8.2.2. Основные зависимости расчета жестко-пластических нитей	257
8.3. Напряженно-деформированное состояние нити из идеального жестко-пластического материала с упрочнением	259
8.3.1. Работа поперечного сечения нити	261
8.3.2. Вывод расчетных зависимостей	267
Глава 9. Устойчивость плоской формы изгиба нитей конечной жесткости за пределом упругости	276
9.1. Предварительные замечания. Сущность решения задачи	276
9.2. Уточнение выражения потенциальной энергии деформации	277
9.3. Определение положения границы раздела зон нагружения и разгрузки поперечного сечения нити	280
9.3.1. Прямоугольное сечение	280
9.3.2. Двутапное сечение	287
9.3.3. Тавровое сечение	290
9.3.4. Швеллерное сечение с вертикальной стенкой	297
9.3.5. Швеллерное сечение с горизонтальной стенкой ..	302
9.3.6. Угловое сечение с неравными полками	310
9.4. Определение приведенной жесткости поперечного сечения нити	313
9.4.1. Прямоугольное сечение	314
9.4.2. Двутапное сечение	316
9.4.3. Тавровое сечение	317
9.5. Общие уравнения устойчивости для нити, свободной от связей в горизонтальной плоскости	319
9.6. Общие уравнения устойчивости для нити, раскрепленной связями в горизонтальной плоскости	322

Глава 10. Расчет висячих систем повышенной жесткости с применением метода конечных элементов	324
10.1. Методика расчета висячих систем	324
10.2. Разрешающие уравнения метода конечных элементов	327
10.3. Алгоритмы решения нелинейных задач	328
10.3.1. Общие положения.....	328
10.3.2. Особенности построения алгоритмов расчета висячих систем	329
10.3.3. Метод продолжения по параметру возмущения в сочетании с методом Ньютона-Канторовича	332
10.3.4. Комбинированный алгоритм расчета висячих систем	335
10.4. Реализация методики исследования висячих систем	336
Глава 11. Анализ напряженно-деформированного состояния и несущей способности нитей конечной жесткости	339
11.1. Работа нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций	339
11.1.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете	339
11.1.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета	342
11.1.3. Случай сосредоточенной нагрузки в четверти пролета	346
11.1.4. Анализ результатов исследований	349
11.2. Работа нити конечной жесткости за пределом упругости	350
11.2.1. Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете	350
11.2.2. Случай сосредоточенной нагрузки посередине пролета	355
11.2.3. Случай участковой симметричной равномерно распределенной нагрузки	357

11.2.4.	Случай участковой несимметричной равномерно распределенной нагрузки	361
11.2.5.	Влияние длины пластического участка на работу нити	364
11.2.6.	Влияние упрочнения материала на работу нити ..	367
11.2.7.	Особенности работы нити при разгрузке	371
11.2.8.	Анализ результатов исследований	372
11.3.	Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости в пределах упругих деформаций	373
11.3.1.	Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете	374
11.3.2.	Случай равномерно распределенной нагрузки на половине пролета	377
11.3.3.	Анализ результатов исследований	380
11.4.	Устойчивость плоской формы изгиба нити конечной жесткости за пределом упругости	381
11.4.1.	Случай равномерно распределенной нагрузки на всем пролете	381
11.4.2.	Анализ результатов исследований	387
11.5.	Влияние пластических деформаций на работу поперечных сечений нити конечной жесткости при потере устойчивости плоской формы изгиба	388
11.5.1.	Тавровое сечение	388
11.5.2.	Швеллерное сечение с вертикальной стенкой	390
11.5.3.	Швеллерное сечение с горизонтальной стенкой .	391
11.5.4.	Угловое сечение с неравными полками	392
11.5.5.	Анализ результатов исследований	392
11.6.	Сопоставление теоретических результатов с данными экспериментальных исследований	393
11.7.	Разработка и совершенствование конструктивных решений висячих систем	400

11.7.1. Висячий переход трубопровода	400
11.7.2. Висячее покрытие повышенной жесткости	401
11.7.3. Способ монтажа висячего покрытия	402
11.7.4. Подпорная стенка с поперечными гибкими несущими элементами	404
11.7.5. Резервуар со стенкой в виде цилиндрической оболочки, провисающей подобно нити конечной жесткости	405
Глава 12. Исследование напряженно-деформированного состояния большепролетных висячих систем	408
12.1. Висячий трубопроводный переход нефтепровода	408
12.2. Висячее покрытие универсального спортивно-зрелищного зала	412
12.3. Висячий трубопроводный переход керосинопровода	418
12.4. Облегченная складчатая конструкция ангара для самолетов	422
12.5. Висячая мембранная оболочка покрытия	425
12.6. Трансформирующаяся вантово-стержневая оболочка	429
12.7. Висячее покрытие универсального производственного здания	433
12.8. Висячее покрытие выставочного павильона	436
12.9. Висячее мембранно-вантовое покрытие демонстрационного зала	443
12.10. Висячее покрытие зрительного зала	452
12.11. Висячее покрытие стадиона	459
12.11.1. Концептуальное решение	459
12.11.2. Конструктивное решение	463
12.11.3. Изготовление и монтаж металлоконструкций ...	465
12.11.4. Расчет конструкций	469
12.12. Висячий трубопроводный переход газопровода	474

12.12.1. Расчет висячего перехода	476
12.12.2. Оценка принятых конструктивных решений	476
12.12.3. Оценка проекта организации строительства	478
12.12.4. Выводы и предложения	479
12.13. Висячее покрытие здания общественного назначения	479
12.14. Резервуар сверхбольшого объема	488
12.14.1. Постановка задачи	488
12.14.2. Действующие нагрузки	491
12.14.3. Расчет конструкций	494
12.14.4. Анализ результатов расчета	498

Приложение I.

Вариационные принципы и вариационные методы механики	500

I.1. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия	500
I.2. Потенциальная энергия деформации упругой системы	502
I.3. Выражение потенциальной энергии деформации через квадратичные формы. Теоремы Кастилиано и Лагранжа ...	503
I.4. Полная энергия деформируемой системы	505
I.5. Принцип вариации перемещений (принцип Лагранжа)	507
I.6. Способы решения вариационных задач	510
I.7. Расчет упругих систем на основе принципа Лагранжа	513
I.8. Принцип вариации напряжений или внутренних сил (принцип Кастилиано)	517
I.9. Расчет упругих систем на основе принципа Кастилиано	518
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	520

Научное издание

**Шимановский Александр Витальевич
Шалинский Валерий Владимирович,
Чабан Наталья Александровна**

МЕХАНИКА ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

Издание третье,
переработанное и дополненное

Ш 61 Механика висячих систем. – К.: Изд-во «Сталь»,
2013. – 541 с, рис. 277, табл. 28.

Редактор	Т.И. Лукашевич
Компьютерная верстка	Т.И. Цапро

Подписано к печати ??.???.2013 г. Формат 70×100/16.
Бумага офсет. Гарнитура Times New Roman.
Печать офсет. Усл. печ. л. ??,??.
Тираж 500 экз. Заказ № ????

ООО «Издательство «Сталь».
ул. В.Шимановского, 2/1, г. Киев, 02660,
тел./факс 516-45-02, тел. 516-55-92.

Свидетельство субъекта издательского дела
ДК № 1212 от 28.01.2003