А.В.Шимановский
Б.М.Лисицин

ОСНОВЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ И РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Под общей редакцией
Заслуженного деятеля науки и техники Украины,
доктора технических наук, профессора А.В.Шимановского

Киев
Издательство «Сталь»
2006

УДК 539.3:624.071:624.074

Ш 61 Шимановский А.В., Лисицин Б.М.
Основы проектирования и расчета строительных конструкций. – К.: Изд-во "Сталь", 2006. – с., рис. , табл. .

В книге изложены основы проектирования и расчета строительных конструкций, зданий и сооружений, выполняемых, как правило, с применением металла, подпорных стен, плотин и др. Особое внимание уделено большепролетным пространственным конструкциям, в том числе висячим, листовым, оболочечным и пневматическим. Описаны математические модели целого ряда объектов, отличающихся разнообразием форм и размеров. Представлены современные приближенные методы решения граничных задач механики твердого деформируемого тела: конечных разностей, коллокаций, вариационные, проекционные, потенциала, предельного равновесия и линейного программирования, а также освещены их основные разрешающие соотношения.

Приведены основные сведения о системе и процессе проектирования, изготовления и монтажа строительных конструкций, а также данные об их оптимальном и автоматизированном проектировании. Дана характеристика некоторых систем автоматизированного проектирования строительных конструкций и сооружений - от первых разработок до современных мощных и эффективных вычислительных комплексов.

Предназначена для научных работников, инженеров-проектировщиков, преподавателей, аспирантов, магистров и студентов технических вузов.

Ш 61 Шимановський О.В., Лисицин Б.М.
Основи проектування та розрахунку будівельних конструкцій. – К.: Вид-во "Сталь", 2006. – с., рис. , табл. .

У книзі викладені основи проектування та розрахунку будівельних конструкцій, будівель і споруд, які виконуються, як правило, із застосуванням метала, підпірних стінок, гребель тощо. Особливу увагу приділено великопрольотним просторовим конструкціям, у тому числі висячим, листовим, оболонковим і пневматичним. Викладені математичні моделі цілого ряду об’єктів, що відрізняються різноманіттям форм і розмірів. Наведені сучасні наближені методи вирішення граничних задач механіки твердого деформівного тіла: скінченних різниць, коллокацій, варіаційні, проекційні, потенціалу, граничної рівноваги та лінійного програмування, а також висвітлені їх загальні розрахункові співвідношення.

Наведені основні відомості щодо системи і процесу проектування, виготовлення та монтажу будівельних конструкцій, а також дані щодо їх оптимального і автоматизованого проектування. Дана характеристика деяких систем автоматизованого проектування будівельних конструкцій і споруд - від перших розробок до сучасних потужних і ефективних обчислювальних комплексів.

Призначена для науковців, інженерів-проектувальників, викладачів, аспірантів, магістрів і студентів технічних ВНЗ.

Рецензенты: В.Т.Гринченко, академик Национальной академии наук Украины,
доктор технических наук, профессор;
А.Ф.Улитко, академик Национальной академии наук Украины,
доктор технических наук, профессор;
В.А.Пермяков, академик Академии строительства Украины,
доктор технических наук, профессор.

Рекомендована к изданию научно-техническими советами:
Министерства строительства, архитектуры и жилищно-коммунального хозяйства Украины;
Украинской государственной корпорации «Укрмонтажспецстрой»;
Института электросварки им.Е.О.Патона Национальной Академии наук Украины;
ОАО «Украинский научно-исследовательский и проектный институт стальных конструкций имени В.Н.Шимановского».

ISBN

© А.В.Шимановский, Б.М.Лисицин, 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Авторы настоящей книги поставили перед собой задачу осветить в пределах возможного некоторые современные достижения в области проектирования и расчета строительных конструкций, зданий и сооружений. Отсюда предполагаемый круг читателей: инженеры-проектировщики, научные работники, студенты и аспиранты строительных вузов и факультетов, а также специалисты и других отраслей народного хозяйства, связанные по роду своей деятельности с механикой деформируемого твердого тела в широком понимании этого термина, в том числе с прочностными расчетами различных конструкций в машино-, авиа- и судостроении.

Хотя в книге речь идет в основном о задачах, рассматриваемых в линейной постановке, общность подачи излагаемого материала позволяет достаточно легко всем, кому это будет интересно, перейти и к рассмотрению нелинейных задач, поскольку, с точки зрения авторов:

- корректность всякой нелинейной модели наиболее надежно обосновывается наличием среди ее возможных частных случаев модели линейной;
- методы решения нелинейных задач, как правило, представляют собой процедуру многократного повторения решения соответствующей линейной задачи;
- хорошее освоение принципов моделирования конструкций, зданий и сооружений в линейной постановке, без особых затруднений позволяет перейти к их моделированию и в нелинейной постановке.

Настоящая книга состоит из трех тематических разделов.

Первый раздел включает две главы и содержит основные сведения о строительных конструкциях, зданиях и сооружениях и о параметрах их проектирования.

В первой главе первого раздела рассматриваются некоторые широко применяемые типы строительных конструкций, зданий и сооружений, при этом основное внимание уделено стали – классическому представителю линейно деформируемых при действии расчетных нагрузок материалов. Представлены также эффективные легкие металлические и пневматические конструкции, а также подпорные стены.

Вторая глава первого раздела содержит описание математических моделей целого ряда объектов разнообразных размеров и форм, изготовленных из различных линейно деформируемых материалов, в основу которых положено представление о трехмерном упругом твердом теле, как о части пространства, равномерно заполненного однородной во всех отношениях материей. Полученные весьма изящные в описании граничные задачи в трехмерной постановке оказались своеобразной «вещью в себе» и крайне трудно поддаются точному решению. Дело также усугубляется наличием в аппарате теории упругости дополнительных, усложняющих процесс исследования факторов, таких, например, как понятия о сосредоточенной силе и зонах с особенностями напряженного состояния, в которых напряжения достигают бесконечно больших по модулю значений не только в отдельных точках, но и в двумерных областях.

Характерно, что часто практикуемое пренебрежение некоторыми из основных компонент напряженно-деформированного состояния хотя и приводит, как правило, к уменьшению общего числа дифференциальных уравнений, но в ряде случаев своим результатом имеет существенное повышение их порядка. Примером этого являются уравнения двенадцатого порядка в теории оболочек, что в общем случае еще более усложняет процесс формирования точного решения.

Выходов из данной ситуации, по-видимому, два:

1. Приближенное решение задач механики твердого деформируемого тела.
2. Построение новой, более удобной и приемлемой по уровню точности модели хотя бы для отдельных актуальных классов задач, что позволило бы получить ряд новых точных решений.

На первом пути во второй половине XX ст. были достигнуты поистине грандиозные успехи, что, по мнению многих исследователей делает трудные поиски второго пути практически неоправданными. Однако нельзя, по нашему мнению, терять интерес к открытию, не побоимся этого слова, новых точных решений и способов их формирования. Ведь каждое из таких решений является не только бесценным вкладом в сокровищницу человеческой мысли, но одновременно служит надежным свидетельством высокого качества применяемых приближенных методов.

Второй раздел, включающий семь глав, содержит описание целого ряда современных приближенных методов решения граничных задач механики твердого деформируемого тела, история развития которых насчитывает уже несколько столетий и является одной из наиболее ярких страниц в перечне достижений человеческого разума.

Первая глава второго раздела посвящена наиболее изящному и прозрачному методу решения граничных задач – методу конечных разностей (МКР), который по своей сути является неотъемлемым элементом основной идеи дифференциального исчисления. Отметим, что более трехсот лет ученые держали в своих руках этот чудодейственный во многих случаях метод, но применить его по большому счету так и не смогли.

Воспользоваться методом конечных разностей мог только тот, кто сумел бы на необходимом качественном уровне довести *до числа* решение системы линейных алгебраических уравнений достаточно высокого порядка. Задачи такого типа еще в начале XIX ст. оценивались столь высоко, что в 1910 году докторская степень была присуждена в Дании за решение на одном из первых арифмометров системы из десяти уравнений с таким же числом неизвестных. Такая высокая оценка не вызывает удивления, так как для решения подобной задачи «вручную» с удержанием пяти значащих разрядов требуется около четырех суток непрерывного труда высококвалифицированного вычислителя.

В конце 50-х годов XX ст. ключ к решению упомянутых задач – быстродействующая вычислительная техника – оказался в руках специалистов и возможности эффективного применения МКР представлялись тогда неограниченными. Недаром в 1960-м году на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике не вызвало особых возражений суждение о том, что метод конечных разностей в сочетании с компьютером является универсальным средством и развивать другие методы больше нет практической необходимости.

Однако по мере применения МКР были выявлены его слабые стороны, а именно: трудности реализации в нерегулярных областях, плохая сходимость решения для компонент напряженно-деформированного состояния, выражаемых производными от основных неизвестных. Например, в тонких плитах для изгибающих моментов, если решение получено в прогибах.

И шестидесятые годы прошлого столетия ознаменовались разработкой целого ряда новых эффективных методов, причем исследования велись в самых различных направлениях.

В методе коллокаций (вторая глава второго раздела) трудоемкость процедуры формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений практически не зависит от формы рассматриваемой области, что является несомненным преимуществом по сравнению с МКР. Тем более что решение методом коллокаций строят обычно в аналитической форме. Однако сразу же выявился и весьма весомый "минус" нового метода – трудности с теоретическим обоснованием, что воспрепятствовало его широкому внедрению в практику проектирования. Суть таких трудностей заключается в несоответствии между размерностями множества возможных узлов коллокации и систем аппроксимирующих решение функций. Однако описание основной идеи метода коллокаций включено в текст настоящей книги, так как авторы полагают, что его возможности далеко не исчерпаны.

Следующая группа методов – вариационные – рассматривается в третьей главе второго раздела. Одна из аналитических форм вариационных методов – метод Ритца – успешно применялся еще до 50-х годов XX ст., поскольку для достижения с его помощью целого ряда важных результатов оказалось достаточным применить простейшие вычислительные средства. Диапазон эффективного применения методов Ритца и Бубнова-Галеркина (четвертая глава второго раздела) для решения граничных задач в сложных областях существенно расширился на основе разработанной В.Л.Рвачевым теории R-функций (шестая глава второго раздела).

Однако наиболее плодотворными оказались усилия ученых многих стран по разработке и практическому внедрению дискретной формы метода Ритца – метода конечных элементов (МКЭ) в различных его формах. Вера в потенциальные возможности МКЭ быстро росла и, действительно, слабые стороны МКР оказались в данном случае легко преодолимыми. Новые количественные и качественные результаты теории и практики МКЭ множились как по мановению волшебной палочки – это и разработка алгоритмов с матрицами жесткости для новых классов задач, и решение проблем теоретического обоснования метода в различных сомнительных на первый взгляд вычислительных процедурах (например, с применением несовместных конечных элементов) и многое другое. В результате к настоящему времени разработаны и весьма успешно применяются целый ряд вычислительных комплексов на основе МКЭ, причем каждая последующая их версия своими сервисными возможностями вызывает все большее восхищение.

Здесь заслуживает упоминания специфическая особенность применения вычислительных комплексов на основе МКЭ: каждые 99 из 100 пользователей этих комплексов принимают выдаваемые компьютером данные как «истину в последней инстанции», не только не задумываясь над сутью метода и его особенностями в случае применения тех или иных конечных элементов, но

даже не проводя качественной оценки полученного решения. Разработчики же вычислительных комплексов в ходе конкурентной борьбы либо не считают нужным, либо вообще не в состоянии четко обрисовать области «надежного» применения их продукции. Поэтому можно не сомневаться, что проблема качества решений МКЭ рано или поздно будет еще раз поставлена на повестку дня и ее решение явится очередным этапом в истории развития этого замечательного метода.

В четвертой главе второго раздела рассматривается еще одна группа широко применяемых для расчета конструкций методов – проекционные, от классического метода Бубнова-Галеркина до обобщенного проекционно-сеточного. В методе Бубнова-Галеркина каждой из применяемых координатных функций необходимо удовлетворять заданным граничным условиям всех основных типов, что во многих случаях связано с существенными трудностями. Но в задачах, где такие трудности преодолены, высокая точность решения достигается уже на основе нескольких (обычно до 3-7) координатных функций. В обобщенном проекционном методе – методе определяющих состояний – можно применять такие функции весьма общего вида без учета граничных условий любых типов, но сходимость решения при этом ухудшается. Здесь различные аналитические и дискретные формы проекционных методов рассмотрены достаточно подробно. В качестве примера применения проекционных методов проведен анализ области применимости различных теорий расчета плит различной толщины.

Интересующимся теорией проекционных методов рекомендуем обратить внимание на продолжающуюся в литературе дискуссию о взаимной связи и общности вариационных и проекционных методов.

Весьма заметной вехой в истории развития методов решения граничных задач оказался процесс развития метода потенциала – от классической формы до получивших широкое и эффективное практическое применение численных его форм (пятая глава второго раздела).

Шестая глава второго раздела содержит описание целого ряда специальных функций, которые используются для формирования вычислительных процедур различных приближенных методов и построения точных решений. В пособиях по теории упругости таким функциям, как гармонические и бигармонические, в этой связи дана соответствующая и весьма высокая оценка.

Второй раздел завершается седьмой главой с описанием метода расчета по предельным состояниям и примером успешного применения методов математического программирования к прочностным расчетам.

Третий раздел включат три главы и содержит основные сведения о системе проектирования, изготовления и монтажа строительных конструкций, а также данные об их оптимальном и автоматизированном проектировании.

Первая глава третьего раздела посвящена современному представлению о процессе проектирования строительных конструкций и сооружений. Оптимальное проектирование – предмет второй главы третьего раздела. В арсенале проектировщика начала XXI ст. уже имеется целый ряд надежных средств и методов для того, чтобы из многих, приемлемых по соображениям прочности, устойчивости или деформативности проектных решений выбрать самый экономичный и тем самым наиболее привлекательный для заказчика вариант. Поэтому оптимальное проектирование для современного специалиста и есть тот самый выбор единственного спасительного маршрута между Сциллой и Харибдой древних аргонавтов. Поскольку если принято решение немного надежнее, то оно оказывается дороже; если принято дешевле, чем требует расчет по существующим прочностным критериям, то сооружение, как правило, рушится, часто еще на стадии возведения.

Касаясь проблемы оптимального проектирования, отметим, что это одна из областей деятельности математика и строителя, где белых пятен все еще больше, чем перспективных разработок. Многое еще предстоит сделать в будущем и, поэтому, значимость новых эффективных результатов трудно переоценить.

Развитие быстродействующей вычислительной техники явилось решающим элементом научно-технического прогресса, в том числе и в проектировании. Но наличия средства решения – мало, надо еще уметь его применить. В третьей главе третьего раздела рассматриваются в качестве примера некоторые системы автоматизированного проектирования строительных конструкций и сооружений, от первых разработок на основе уже не применяемой в настоящее время вычислительной техники (такие как ПАКЕТ, ПРОМЕТ) до таких мощных и эффективных комплексов как SCAD.

В текст книги включен перечень использованной литературы, в разделах 1, 3 – в конце каждой главы, а в разделе 2 (так как один и тот же источник мог быть использован в нескольких главах) – в конце раздела.

При написании книги использованы результаты обобщения опыта многолетних исследований конструкций, зданий и сооружений, выполненные в «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского».

Авторам хотелось без ущерба для содержания сделать книгу настолько краткой, насколько это возможно. Исходя из этого, безжалостному редактированию подвергались не только некоторые главы, но и целые темы. Таким образом, решалась своего рода задача оптимизации изложения, поскольку, наиболее трудной и важной частью составления книги является решение о том, что следует опустить.

В столь бурно развивающейся области, как проектирование и расчет строительных конструкций, зданий и сооружений, очень трудно подготовить книгу, которая одновременно обладала бы определенной завершенностью и была бы полностью свободна от недостатков. Поэтому авторы будут искренне признательны читателям за критические замечания и пожелания по содержанию книги.

Авторы выражают благодарность сотрудникам «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского» доктору технических наук, профессору В.Н.Гордееву и доктору технических наук, профессору А.И.Оглобле за внимание и содействие в работе, В.Н.Трохимец и Н.А.Чабан за техническую помощь при подготовке рукописи, а также Р.И.Гусячей за профессиональное редактирование материала книги.

Улучшению содержания рукописи в значительной мере способствовали замечания и советы рецензентов – академика Национальной академии наук Украины, доктора технических наук, профессора В.Т.Гринченко, академика Национальной академии наук Украины, доктора технических наук, профессора А.Ф.Улитко и академика Академии строительства Украины, доктора технических наук, профессора В.А.Пермякова, большая часть которых была учтена при подготовке окончательного варианта рукописи. Им авторы приносят свою искреннюю признательность.

Неоценимую помощь в подготовке книги оказал член-корреспондент Национальной академии наук Украины, доктор технических наук, профессор В.Н.Шимановский, которым была предложена ее основная идея, а также определена структура и форма представления материала. Этого известного ученого не стало во время подготовки рукописи. Авторы навсегда сохранят о нем благодарную память.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ …….…… 3

РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ И СООРУЖЕНИЯХ ……..16

Глава 1. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ТИПЫ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ……..…16

1.1. Подпорные стены и плотины …….

1.1.1. Подпорные стены …….……..…….

1.1.2. Плотины ……...…

1.2. Каркасы промышленных зданий и сооружений ……..…

1.2.1. Общие сведения ……..…

1.2.2. Формообразование, надежность и эффективность конструкций каркаса ……..…..

1.2.3. Компоновка каркаса ……...…..……

1.2.4. Конструктивные и расчетные схемы поперечных рам ……...…

1.3. Производственные здания из легких металлических конструкций (ЛМК) ……..…

1.3.1. Особенности компоновки каркасов одноэтажных производственных зданий ……..…

1.3.2. Основные конструктивные элементы зданий из легких конструкций ……..…….

1.4. Резервуары и газгольдеры ……..……

1.4.1. Общие сведения ……...

1.4.2. Вертикальные цилиндрические резервуары для хранения нефти и нефтепродуктов …….

1.4.3. Другие типы резервуаров ……...

1.5. Пневматические строительные конструкции ……...…

1.5.1. Общие сведения ……...
1.5.2. О законах формообразования пневматически напряженных оболочек ……...
1.5.3. Основные формы пневматически напряженных оболочек ……...……
1.5.4. Емкости для жидкости ……
1.6. Трубопроводные системы ……..
1.6.1. Магистральные трубопроводы ……..…….
1.6.2. Конструктивные решения магистральных трубопроводов …….
1.6.3. Переходы трубопроводов через искусственные и естественные препятствия …….……
1.7. Пролетные строения автодорожных, городских и пешеходных мостов и трубопроводных переходов …..…...
1.7.1. Общие сведения. Тенденции развития ……..…
1.7.2. Основные принципы проектирования ……..
1.7.3. Конструктивные решения сварных мостов …..……
1.7.4. Трубопроводные переходы ……
1.8. Большепролетные покрытия зданий и сооружений …….
1.8.1. Общие сведения ……..
1.8.2. Покрытия из плоских несущих конструкций ……...
1.8.3. Решетчатые покрытия из плоских структурных плит ……..…..
1.8.4. Покрытия в виде вантовых и комбинированных систем и оболочек ……...…
1.8.5. Мембранные конструкции …….
1.9. Антенные сооружения и высотные трубы ……....
1.9.1. Общие сведения ……..……..…...
1.9.2. Радиотелескопы ……...…
1.10. Морские стационарные платформы ……...
1.11. Заключение ……..

Литература к главе 1 ……212

Глава 2. СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ. ФИЗИЧЕСКОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ……214

2.1. Массивные конструкции …….

2.2. Плоская задача теории упругости ……..

2.2.1. Плоское напряженное состояние ……...

2.2.2. Плоская деформация ……..….

2.3. Изгиб тонких плит ……...

2.3.1. Соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния и основное дифференциальное уравнение изгиба ……...

2.3.2. Граничные условия …….

2.3.3. Плита переменной толщины ……..

2.3.4. Изгиб ортотропных плит ……

2.4. Приближенные модели изгиба тонких плит и области их практической применимости ……...

2.4.1. О критериях оценки области применимости ……

2.4.2. Толстые плиты …….

2.5. Изгиб плиты при совместном действии поперечной нагрузки и сил в ее срединной плоскости …….

2.6. Большие прогибы плиты …….

2.6.1. Гибкие плиты ……...

2.6.2. Мембраны. Система уравнений равновесия …….

2.6.3. Граничные условия …….

2.7. Оболочки ……..

2.7.1. К вопросу о классификации расчетных моделей оболочек ……

2.7.2. Геометрия оболочки ……

2.7.3. Деформация оболочки ……

2.7.4. Уравнения равновесия. Компоненты напряженного состояния на границе ……

2.7.5. Граничные условия …….

2.7.6. Безмоментная теория тонких оболочек ……

2.7.7. Пологие оболочки ……...

2.8. Стержни ……

2.8.1. Осевое растяжение или сжатие ……..

2.8.2. Изгиб …….……

2.8.3. Кручение ……...

2.9. Нити конечной жесткости (уточненные модели) …….

2.9.1. Вводные замечания и основные гипотезы ……...

2.9.2. Дифференциальные уравнения состояния нити конечной жесткости ……...

2.9.3. Влияние температурных воздействий на напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости ……...

2.10. Гибкие нити ……..

2.10.1. Основное уравнение прогиба нити ……

2.10.2. Расчет гибких нитей без учета упругости нити и собственного веса ……...

2.10.3. Расчет гибких нитей с учетом упругости материала …….

2.10.4. Расчет нитей с учетом упругости материала и температурных деформаций ……...

2.11. Заключение ……...

Литература к главе 2 ……287

РАЗДЕЛ 2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ……...290

ВВЕДЕНИЕ ……290

Глава 1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ……293

1.1. Выражения для производных в конечных разностях ……..

1.2. Метод конечных разностей …….

1.3. Метод конечных разностей для двухмерных областей ……

1.4. Выражения для операторов в косоугольных сетках ……

1.5. Дифференциальные операторы в прямоугольной пространственной системе координат ……...

Глава 2. МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ ……ВІДСУТНЯ

2.1. Метод коллокаций ……...

2.2. О применении смешанных методов ……...

2.3. Некоторые специальные формы метода коллокаций ……...

2.4. Метод коллокаций с подобластями ……...

Глава 3. ВАРИАЦИОННЫЕ И ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ……321

3.1. Вариационные принципы ……...

3.2. Энергетическое пространство ……

3.3. Метод Ритца …….

3.4. Главные и естественные граничные условия ……

3.5. О применении метода Ритца к расчету строительных конструкций ……

3.6. Метод конечных элементов ……

3.7. Пример расчета неразрезной балки методом конечных элементов ……

3.8. Расчет балок на упругом основании ……..

3.9. Пространственный конечный элемент для стержня ……

3.10. Метод конечных элементов в задачах теории упругости ……..

3.11. Треугольный конечный элемент в задаче о плоском напряженном состоянии ……...

3.12. Пример решения задачи о плоском напряженном состоянии методом конечных элементов ……..

3.13. Расчет тонких плит методом конечных элементов ……..

3.14. Треугольные конечные элементы для тонкой изгибаемой плиты. К проблеме совместности конечных элементов и сходимости приближенного решения …….

3.15. Метод конечных элементов при расчете массивов ……..

3.16. Метод Треффца ……

Глава 4. ПРОЕКЦИОННЫЕ И ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ……392

4.1. Понятие о проекционном методе ……...

4.2. Соотношения взаимности ……...

4.3. Метод определяющих состояний ……...

4.4. Гильбертово пространство возможных состояний ……..

4.5. Некоторые основные понятия пространства *H* …….

4.6. Примеры применения метода определяющих состояний ……..

4.7. Общая характеристика метода определяющих состояний ……..

4.8. Понятие о регионально-проекционном методе ……

4.9. Пример применения регионально-проекционного метода ……...

4.10. Ортогональные функции. Ряды Фурье ……..

4.11. О классификации проекционных методов ……

4.12. Обобщенный проекционно-сеточный метод ……

4.13. Выражение компонентов искомого состояния в обобщенном проекционно-сеточном методе ……

4.14. Определяющие состояния ……...

4.15. Пример применения обобщенного проекционно-сеточного метода …….

4.16. Приложение обобщенного проекционно-сеточного метода к решению задач теории упругости о плоском напряженном состоянии …….

4.17. Об одной методике оценки эффективности обобщенного проекционно-сеточного метода ……..

Глава 5. МЕТОДЫ ПОТЕНЦИАЛА ……459

5.1. Основные интегральные соотношения ……..

5.2. Упругие потенциалы при различных аппроксимациях плотностей ……..

5.3. Интегральные и функциональные разрешающие уравнения ……

5.4. Прямые и итерационные алгоритмы …….

5.5. Примеры расчета …….

5.6. Понятие о методе граничных элементов ……...

5.7. Некоторые простые формы метода граничных элементов ……..

5.8. Прямой метод граничных интегралов ……...

Глава 6. О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ……..556

6.1. Гармонические функции …….

6.2. Бигармонические функции …….

6.3. Приведение уравнений теории упругости к бигармоническим уравнениям …….

6.4. Приложение гармонических функций к решению уравнений теории упругости ……..

6.5. Полиномиальные решения уравнений теории упругости ……..
6.6. О применении *R*-функций при решении задач механики твердого тела для областей сложной формы ……...

Глава 7. МЕТОДЫ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ……584

7.1. Методы предельного равновесия ……...
7.2. Применение линейного программирования к задаче определения несущей способности ……...

Литература к разделу 2 …….

РАЗДЕЛ 3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ……607

Глава 1. ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ……607

1.1. Процесс проектирования и пути его реализации …….
1.2. Система проектирования, изготовления и монтажа инженерных сооружений ……
1.3. Основы формообразования строительных конструкций …….
1.4. Создание прогрессивных конструктивных форм …….
1.5. Типизация строительных конструкций ……
1.6. Технологичность конструкций ……...

Литература к главе 1 …….

Глава 2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ……..623

2.1. Объекты и постановка задачи оптимизации в строительстве ……...
2.2. Математически строгие постановки задач оптимизации строительных конструкций …….
2.3. Применение эвристических методов …….
2.3.1. Синтез конструкций ……

2.3.2. Оптимизация параметров конструкций ……

2.4. Метод экспертных оценок ……..
Литература к главе 2 …….

Глава 3. АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ……...638

3.1. Место и значение автоматизации в современном проектировании ……...

3.2. Основные термины и определения ……

3.3. «Классическая» модель САПР ……...

3.3.1. Подсистема комплексной автоматизации проектирования конструкций зданий и сооружений ……..

3.3.2. Общесистемное обеспечение САПР …….

3.3.3. Базовая операционная система ……..

3.4. Современные диалоговые программные комплексы расчета и конструирования …….

3.4.1. Программный комплекс «ПАКЕТ» ……...

3.4.2. Программный комплекс «ПРОМЕТ» ……....

3.4.3. Проектно-вычислительный комплекс SCAD ……...

3.4.4. Структура ПВК SCAD ……

3.4.5. Специализированные автономные дополнения ПВК SCAD ……..

Литература к главе 3 ……...674

РАЗДЕЛ I
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ И СООРУЖЕНИЯХ

Глава 1
НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ТИПЫ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Ни в одной сфере человеческой деятельности не создается такого спектра объектов, разнообразных по своему назначению, структуре, форме, применяемым материалам, принципам конструирования, технологии изготовления, условиям эксплуатации, как в строительстве. Привести их описание и основные характеристики в достаточно полном объеме, по-видимому, невозможно в одном издании даже весьма солидного объема. Поэтому здесь внимание уделено лишь некоторым основным типам конструкций и сооружений, широко применяемым в настоящее время или заслуживающим, по мнению авторов, внимания специалистов.

1.1. Подпорные стены и плотины

1.1.1. Подпорные стены. Подпорной стеной называют конструкцию, удерживающую находящийся за ней массив грунта от обрушения на выемках, откосах, уступах и т.д. Подпорные стены применяются в различных областях гражданского, промышленного и дорожного строительства, в горном деле, фортификации, при возведении туннелей. Особенно часто встречаются подпорные стены в гидротехническом строительстве, где они выполняют роль важнейших конструктивных элементов набережных, причалов, камер шлюзов, береговых устоев водосбросных плотин и гидроэлектростанций, быстротоков и перепадов.

Задачи определения прочности и устойчивости подпорных стен на сдвиг, как правило, приходится решать с учетом характера напряжений внутри сыпучего тела и на его поверхности соприкосновения с другими телами, что в ряде случаев связано с существенными трудностями. Частицы, образующие подпираемый опорной стенкой массив, имеют различную твердость и шероховатость; между ними действуют силы трения, которые изменяются в широчайших пределах в зависимости от степени влажности сыпучего тела. Кроме сил трения действуют еще более неопределенные силы прилипания (сцепления); приходится учитывать также, что напряженное состояние земляной массы зависит от капиллярного натяжения жидкости

между частицами и давления воздуха, замкнутого между ними. Все это влияет на характер взаимодействия между земляной массой и подпорной стенкой.

Способ и последовательность засыпки грунта, случайные или систематические его сотрясения, естественное и искусственное трамбование, осадки и перемещения стены под влиянием собственного веса и земляной массы в свою очередь вызывают значительные изменения величин и направлений действия расчетных нагрузок.

По мере изучения проблемы взаимодействия между строительной конструкцией и сыпучим телом элементарные теории, основанные на некоторых гипотетических однородных свойствах идеальной среды, позволили сформулировать целый ряд важных обобщений с применением методов теории упругости и пластичности, статистической механики, моделирования земляной массы совокупностью отдельных частиц шаровой или цилиндрической формы. Однако до настоящего времени данная проблема полностью и окончательно не решена, и специалистам всегда следует помнить, что на качество результатов выполненного ими расчета и конструирования подпорной стены решающим образом влияет степень соответствия принятой модели сыпучего тела и реального характера его взаимодействия со стеной.

Для возведения подпорных стен используют природные каменные материалы, бетон, железобетон, металл, дерево. В зависимости от соотношения размеров стены по высоте и ширине различают, в частности, массивные, тонкие и шпунтовые стены.

Массивные подпорные стены, возводимые в большинстве случаев из бутовой или бетонной кладки, имеют форму массивов с размерами одного порядка по всем направлениям поперечного сечения и собственным весом, достаточным для сохранения равновесия под действием сил давления земли на стену (рис. 1.1, *а*).

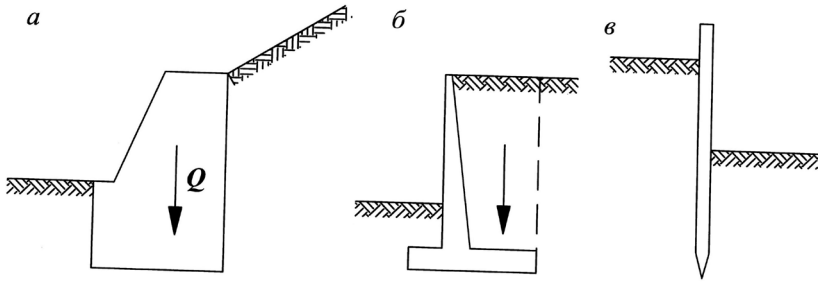


Рис. 1.1. Типы подпорных стен: а – массивные; б – тонкие; в – шпунтовые

Напряженно-деформированное состояние таких конструкций при расчете на прочность приходится определять в постановке трехмерной задачи

механики твердого тела. В ряде случаев оказывается оправданным упрощение расчетной модели стены на основе допущения, что данная конструкция имеет неограниченную длину, является в плане прямолинейной и что профиль земляной массы вместе со всеми условиями ее взаимодействия со стеной остаются по ее длине постоянными. В этом случае трехмерная задача может быть сведена к так называемой задаче о плоской деформации (см. гл. 2).

Тонкие стены, сооружаемые обычно из железобетона, состоят из нескольких сравнительно тонких плит. Так, например, на рис. 1.1, *б* показана стена, состоящая из вертикальной и горизонтальной плит. Собственный вес такой стены невелик; тем не менее такая стена может воспринять давление земли, так как этому способствует вес грунта, лежащего на части горизонтальной плиты. При определении напряженно-деформированного состояния подпорных стен этого типа может быть эффективно применена приближенная теория изгиба тонкостенных элементов переменной толщины.

Шпунтовые стены, сооружаемые из деревянного, железобетонного или металлического шпунта (рис. 1.1, *в*), при сравнительно большой высоте (несколько метров), имеют незначительную ширину (несколько дециметров) и их вес столь мал, что обычно при расчете не учитывается. Опрокидыванию и смещению такой стены препятствуют силы сопротивления грунта, которые зависят от глубины забивки шпунта. При проектировании подпорных стен данного типа применяются теории расчета плоских тонкостенных и одноосных (балочных) конструкций.

Таким образом, подпорные стены могут состоять из конструкций принципиально различных с точки зрения моделирования и расчета типов, при этом определение воздействующих на них внешних сил осложнено необходимостью учета в каждом случае физических свойств сыпучего тела.

1.1.2. Плотины. Плотиной называют гидротехническое сооружение, перегораживающие реку или другой водоток для подъема воды перед ней, сосредоточения напора в месте расположения сооружения и создания водохранилища. Водохозяйственное значение плотин многообразно: подъем уровня воды и увеличение глубин в верхнем бьефе благоприятствуют судоходству, лесосплаву, а также водозабору для нужд орошения и водоснабжения; сосредоточение напора у плотин создает возможность энергетического использования стока реки; наличие водохранилища позволяет регулировать сток, т.е. увеличивать расход воды в реке в меженные периоды и уменьшать максимальный расход в паводок, способный привести к разрушительным наводнениям. Плотина и водохранилище существенным образом воздействует на реку и прилегающие территории: изменяются режим стока реки, температура воды, продолжительность ледостава, затрудняется миграция рыбы; берега реки в верхнем бьефе затопляются; меняется

микроклимат прибрежных территорий. Плотина обычно является основным сооружением гидроузла.

Плотины начали строить земледельческие народы Египта, Индии, Китая и других стран еще в древние времена. Возведение плотин было необходимо для строительства гидросиловых установок, а затем и сооружения гидроэлектростанций. Энергетическое использование водных ресурсов явилось основным стимулом увеличения размеров и совершенствования конструкций плотин, появления гидроузлов на многоводных реках.

На территории бывшего СССР водяные мельницы с плотинами строились еще во времена Киевской Руси. В XYII–XIX вв. горнодобывающая, металлургическая, текстильная, бумажная и другие отрасли промышленности на Урале, Алтае, в Карелии и центральных областях России использовали в основном механическую энергию гидросиловых установок; их плотины были незначительными по размерам и сооружались из местных материалов. В 1926 году была построена бетонная водосливная плотина Волховской ГЭС, в 1932 году сооружена высокая бетонная плотина Днепровской ГЭС (ее наибольшая высота около 55 м). Водосливная плотина Нижнесвирской ГЭС – первое сооружение такого рода, возведенное на слабых глинистых грунтах. Позднее на многоводных реках были, в частности, сооружены: намывные земляные плотины на Волге у Самары и Волгограда, бетонные плотины Братской ГЭС на Ангаре (высота 128 м) и Красноярской ГЭС на Енисее (124 м), высокая 300-метровая каменно-земляная плотина Нурекской ГЭС на р. Вахш, арочная плотина Саянской ГЭС на Енисее (высота 242 м, длина по гребню 1070 м).

К выдающимся инженерным сооружениям следует отнести многоарочную плотину Бартлетт высотой 87 м (США, 1939), каменную плотину Парадела (112 м, Португалия, 1958), земляную плотину Сер-Понсон (122 м, Франция, 1960), каменно-земляную плотину Миборо (131 м, Япония, 1961), гравитационную бетонную плотину Гранд-Диксанс (284 м, Швейцария, 1971).

Тип и конструкция плотины определяется ее размерами, назначением, а также природными условиями и видом основного строительного материала. По назначению различают плотины водохранилищные и водоподъемные (предназначенные лишь для повышения уровня верхнего бьефа). По величине напора плотины условно подразделяют на низконапорные (с напором до 10 м), средненапорные (от 10 до 40 м) и высоконапорные (более 40 м).

В зависимости от роли, выполняемой в составе гидроузла, плотина может быть: глухой, если служит лишь преградой для течения воды; водосливной, если предназначена для сброса избыточных расходов воды и оборудована поверхностными водосливными отверстиями (открытыми или с затворами) или глубинными водоспусками; станционной, если имеет

водозаборные отверстия (с соответствующим оборудованием) и водоотводы, питающие турбины ГЭС. По основному материалу различают плотины земляные, каменные, бетонные, железобетонные, деревянные.

Земляная плотина возводится полностью или частично из малопроницаемого грунта. Уложенный по верховому откосу плотины, малопроницаемый грунт образует экран; при расположении такого грунта внутри тела плотины создается ядро. Наличие экрана или ядра обеспечивает возможность возведения остальной части плотины из проницаемого грунта или из каменных материалов (каменно-земляная плотина). У подошвы низового откоса земляной плотины для отвода воды, профильтровавшейся через тело и основание плотины, устраивают дренаж. Верховой откос плотины защищают от воздействия волн бетонными плитами или каменной наброской. При возведении земляной насыпной плотины грунт добывают в карьере экскаваторами, транспортируют к месту сооружения самосвалами, укладывают в тело плотины, разравнивают бульдозерами и уплотняют послойно катками. Возведение намывной плотины включает разработку грунта землесосами или гидромониторами, транспортировку пульпы по трубам и распределение ее по поверхности возводимой плотины, после чего вода уходит, а оседающий грунт самоуплотняется. Для подготовки основания и возведения земляной плотины в русле реки ее котлован ограждается перемычками, а река отводится по заранее проложенным временным водоводам, закрываемым после возведения плотины.

В каменной (набросной) плотине экран или центральный водонепроницаемый элемент (диафрагму) выполняют из железобетона, асфальта, дерева, металла, полимерных материалов. Требование малой водонепроницаемости распространяется и на основание плотины. Если грунт основания проницаем на большую глубину, его покрывают перед плотиной «понуром» (например, из глины), образующим с экраном одно целое. Плотина с экраном дополняется устройством в основании стальной шпунтовой стенки или противофильтрационной завесы. Камень в каменно-набросную и каменно-земляную плотину отсыпается слоями большой высоты.

Бетонные плотины обычно классифицируют по конструктивному признаку в зависимости от условий работы на сдвиг; соответственно этому различают три основных типа плотин (рис. 1.2) – гравитационные (*а*), арочные (*б*) и контрфорсные (*в*).

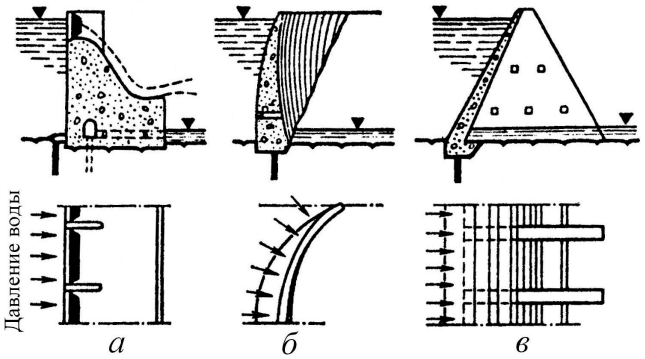


Рис. 1.2. Типы плотин: а – гравитационные; б – арочные; в – контрфорсные

Основным материалом для современных бетонных плотин (преимущественно гравитационных) служит гидротехнический бетон. Одна из важнейших проблем при возведении бетонных плотин – снижение фильтрации воды в основании. С этой целью в основании высокой бетонной плотины вблизи верховой грани устраивается противофильтрационная завеса. На остальном участке основание дренируется для уменьшения давления воды на подошву плотины, что повышает устойчивость сооружения. Гравитационная и контрфорсная плотины во избежание образования трещин вследствие температурных колебаний разрезаются по длине на короткие секции, швы между которыми перекрываются водонепроницаемыми уплотнениями. Для предотвращения появления трещин в результате усадки бетона при твердении и снижения температурных напряжений плотины бетонируют отдельными блоками ограниченных размеров, применяют искусственное охлаждение составляющих бетонной смеси и уложенного в блоки бетона посредством циркуляции охлаждающей жидкости (от холодильной установки) по системе труб, проложенных в теле плотины. Бетонная плотина в русле реки обычно сооружается в две очереди под защитой ограждающих котлованы перемычек. При возведении первой очереди плотины река течет по свободной части русла; при второй – через оставленные в плотине отверстия (прораны), которые закрывают по окончании всех строительных работ. Если русло реки узкое, бетонная плотина строится в один прием, с временным отводом реки в береговые водоводы. Распространенная в практике гидротехнического строительства низконапорная бетонная водосливная плотина, возводимая на нескальном основании и предназначенная для пропуска больших расходов воды, имеет конструкцию, показанную на рис. 1.3.

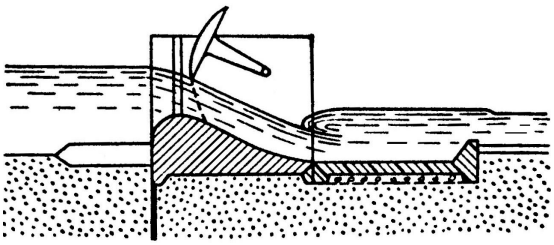


Рис. 1.3. Конструктивное решение низконапорной бетонной водосливной плотины

Основу ее составляют водосливные пролеты, образованные бетонным флютбетом и быками и перекрываемые гидротехническими затворами. За водосливами устраивается массивное крепление русла – водобой, иногда заглубленное в виде колодца; далее располагается более легкое крепление – рисберма. Под водобоем устраивается дренаж. С берегами или земляными плотинами водосливная плотина сопрягается массивными устоями. Низконапорная бетонная водосливная плотина обычно строится с применением армирования, часто всего сооружения. Флютбет и быки такой плотины с целью экономии материала иногда делают облегченной ячеистой конструкции, с заполнением ячеек грунтом.

Такое техническое решение особенно часто применяется в железобетонных плотинах. Учет веса грунта, а также устранение фильтрационного давления на подошву плотины (благодаря отсутствию сплошной фундаментной плиты) позволяют сэкономить значительную часть объема бетона.

Контрфорсная железобетонная плотина выполняется в виде тонкостенной конструкции с небольшим объемом железобетона. Недостаточная для устойчивости масса плотины компенсируется весом воды над ее напорным перекрытием, плоским или сводчатым, наклоненным к горизонту под углом 45–55^{O}. Арочные железобетонные плотины применяются редко; по сравнению с арочными бетонными плотинами они в ряде случаев менее экономичны вследствие значительного расхода стали.

В лесных районах часто сооружают низконапорные деревянные плотины свайной и ряжевой конструкции (обычно их устраивают водосливными).

Особый тип водоподпорного сооружения – разборная судоходная плотина. Для ее возведения в летнюю межень на плоском флютбете устанавливают контрфорсы из стальных ферм, по ним прокладывают мосты, на которые опирают затворы простейшей конструкции. Плотина подпирает уровень верхнего бьефа, а суда и плоты пропускаются через шлюз. В многоводный период затворы и мосты убирают, фермы контрфорсов укладывают на флютбет, открывая судам и плотам путь через плотину.

Общая тенденция современного плотиностроения – увеличение высоты плотин. Технически достигнутые высоты могут быть превзойдены, однако в экономическом отношении сооружение двух последовательно расположенных плотин меньшей высоты часто оказывается более рациональным, чем одной высокой. Совершенствование типов плотин из грунтовых материалов осуществляется при одновременном удешевлении и ускорении их строительства за счет повышения мощности строительных механизмов и транспортных средств. Повышение экономичности бетонных плотин достигается уменьшением их объема, заменой гравитационных плотин контрфорсными и более широким применением арочных плотин. Реализации этой тенденции способствуют улучшение и специализация свойств цемента и бетона. Весьма эффективно совмещение в одном сооружении водосливной плотины и здания ГЭС, что обеспечивает сокращение бетонной (наиболее дорогостоящей) части напорного фронта гидроузла. Эта задача решается как путем размещения гидроагрегатов в полости высокой плотины, так и посредством использования подводного массива низконапорной ГЭС для устройства в нем водосбросных отверстий.

1.2. Каркасы промышленных зданий и сооружений

1.2.1. Общие сведения. Наиболее распространенный тип промышленных зданий – одноэтажные. На стальные каркасы этих зданий расходуется более половины стали, используемой на строительные конструкции, не считая расхода на легкие металлические конструкции комплектной поставки [11, 16, 23].

Одноэтажные промышленные здания условно можно разделить на четыре группы: легкие, средние, тяжелые и большепролетные (уникальные). Четкой границы между этими группами провести нельзя. Однако такое разделение позволяет осуществлять различные подходы при выборе конструктивной формы, расчетных схем, элементов каркаса, материалов, профилей проката, а также методов изготовления и монтажа.

Принадлежность промышленного здания к той или иной группе определяется в основном поперечными габаритными размерами пролетов и нагрузками на конструкции зданий от технологического оборудования, главным образом от мостовых кранов и подвесных технологических конвейеров.

К группе легких относятся промышленные здания пролетами 18...30 м, высотой (до низа несущих конструкций покрытия) 4,8...14 м без кранов, с подвесными кранами грузоподъемностью до 5 т или мостовыми кранами грузоподъемностью до 20 т. Здания этой группы возводят в основном из легких металлических конструкций комплектной поставки.

К группе средних относятся промышленные здания пролетами 24...36 м, высотой (до низа несущих конструкций покрытия) 14,4 м и более, с мостовыми кранами грузоподъемностью до 80 т. Они применяются в машино-, авто-, сельхозмашино- и станкостроении, а также на отдельных металлургических объектах.

К группе тяжелых относятся промышленные здания с весьма широким диапазоном поперечных габаритных размеров и крановых нагрузок. Пролеты таких зданий колеблются от 15 до 60 м, высота – от 18 до 80 м, грузоподъемность мостовых кранов – от 16 до 1200 т, значительные технологические нагрузки на рабочие площадки составляют 100...150 кН/м^2 и до 10 МН/м^2 от отдельных единиц оборудования. Конструктивные решения таких зданий весьма разнообразны. Применяются они чаще всего в металлургии, тяжелом машиностроении и судостроении.

К группе уникальных относятся промышленные здания пролетами 60 м и более. Применение мостовых кранов при таких пролетах нецелесообразно, и для перемещения грузов используется напольный транспорт совместно с подвесными кранами грузоподъемностью до 50 т либо только подвесные краны.

Такие здания применяются в основном в судо- и авиастроении, а также в других отраслях. Конструктивные формы их весьма разнообразны и принципиально отличаются от форм первых трех групп.

К одноэтажным относят также здания с многоэтажными фрагментами, расположенными как между пролетами, так и по крайним рядам либо внутри пролетов.

1.2.2. Формообразование, надежность и эффективность конструкций каркаса. Каркас одноэтажного промышленного здания состоит из комплекса несущих конструкций, соединенных в неизменяемую пространственную систему, воспринимающую действующие на нее нагрузки и воздействия и передающую их на фундаменты. В каркас входят конструкции, определяющие его несущую способность и неизменяемость, и конструкции, незначительно влияющие на его несущую способность. Первые условно называют основными, вторые – второстепенными. При проектировании и расчете основные конструкции пространственных сооружений одноэтажных промышленных зданий, как правило, разделяют на две системы – поперечную и продольную. Работа каждой системы под нагрузкой учитывается независимо одна от другой.

В поперечную систему, называемую рамой, входят колонны, ригели (решетчатые или сплошностенчатые). Если в состав одноэтажного промышленного здания входят многоэтажные пролеты-вставки, то в поперечную систему включают также балки-ригели перекрытий этих пролетов-вставок.

В продольную систему входят колонны (они же являются элементами поперечной системы), подкрановые конструкции, связи между колоннами, подстропильные фермы, прогоны кровли либо несущие продольные элементы стальных панелей.

К основным конструкциям каркаса относятся также связи покрытия, назначением которых является улучшение пространственной работы каркаса и развязка элементов ригелей покрытия, а также фонари (светоаэрационные и аэрационные). Последние существенно влияют на распределение нагрузок на ригели рам, хотя их совместная работа в системе рамы, как правило, не учитывается.

Ко второстепенным конструкциям каркаса относятся конструкции фахверка (продольного и торцевого), лестницы, площадки и другие элементы здания. При расчете этих конструкций обычно не учитывается их участие в работе каркаса, хотя в ряде случаев их влияние на работу каркаса (особенно на его деформативность) может быть существенным.

При проектировании следует обеспечивать пространственную работу каркаса. В зависимости от габаритных размеров здания, конструктивной схемы, величины и характера нагрузок, нормируемых деформаций и других факторов эта задача решается различными методами.

Основные факторы, влияющие на формообразование и выбор конструктивных решений каркасов одноэтажных промышленных зданий, – технологические, надежность и технико-экономические показатели.

Технологические факторы – расположение и габаритные размеры оборудования и поточных линий, транспортные потоки, наличие или отсутствие мостовых или подвесных кранов, режимы их работы и грузоподъемность – определяют габаритные размеры здания, шаг колонн и расположение связей. Агрессивность внутрицеховой среды и тепловой режим влияют как на выбор элементов каркаса, связанных с аэрацией (фонари, оконные проемы, жалюзи), так и на форму самого здания – перепады высот, крутоуклонные покрытия и др. Динамические, вибрационные, ударные воздействия машин и оборудования требуют специальных решений для уменьшения их влияния на каркас и отдельные его элементы. Существенное влияние на конструкцию каркаса оказывают и внешние условия: низкие температуры, тропический климат, сейсмичность, просадочные грунты, подрабатываемые территории и др.

Надежность – главное требование, которому должны удовлетворять конструкции, так как недостаточная надежность и отказ конструкции ведут не только к значительным материальным потерям, иногда во много раз превышающим стоимость самого сооружения, но и к человеческим жертвам.

По принципу надежности каркасы одноэтажных промышленных зданий можно разделить на типовые многократно повторяющиеся и индивидуальные (обычно уникальные).

Создание типовых стальных конструкций и их применение в строительстве, как правило, позволяет повысить надежность зданий.

Экономичность – одно из главных условий, определяющих технический уровень капитального строительства. Соблюдение этого условия предусматривает: строительство предприятий на базе новейших технологий с уменьшением площадей зданий и сокращением территорий предприятий в связи с увеличением единичной мощности промышленных агрегатов и оборудования; расширение объемов технического перевооружения и реконструкции предприятий и объектов; унификацию параметров производственных зданий, уменьшение координатно-модульных размеров пролетов и высоты зданий; ограничение применения в зданиях и сооружениях мостовых кранов и замену их непрерывным и специализированным технологическим транспортом, а также напольными видами подъемно-транспортного оборудования (тележками, рольгангами, манипуляторами, козловыми кранами и т.п.); увеличение доли неотапливаемых зданий, вынос технологического оборудования на открытые площадки; совершенствование строительных норм и правил, более полный учет физико-механических свойств металла, а также расчет зданий и сооружений как единых пространственных систем основание – фундамент – надземное сооружение; расширение применения сталей повышенной и высокой прочности, а также эффективных профилей проката; применение прогрессивных конструктивных форм и технологии изготовления конструкций широкой номенклатуры (легких, структурных, складчатых, вантовых, гнутосварных из тонкого листа, преднапряженных, сочетающих несущие и ограждающие функции и др.).

Многие из перечисленных факторов противоречивы и порой исключают друг друга. Так, конструктивные решения, уменьшающие трудоемкость изготовления металлоконструкций или сокращающие сроки монтажа, обычно связаны с перерасходом стали. То же можно сказать и о ремонтопригодности. Упрощение и сокращение сроков монтажа конструкций может быть достигнуто за счет укрупнения элементов при их изготовлении, что влечет за собой увеличение затрат на изготовление и транспортировку конструкций. В каждом конкретном случае наиболее эффективное решение определяется выбором его оптимального варианта.

1.2.3. Компоновка каркаса. При компоновке каркаса в соответствии с технологическим заданием, требованиями нормативных документов и в увязке с архитектурно-строительной частью устанавливаются: габаритные размеры здания в плане и по высоте, размещение колонн в плане и устройство температурных швов, размеры основных элементов каркаса с их взаимной увязкой, возможные места установки связей по колоннам, шаги

ригелей покрытия, взаимная увязка пролетов в многопролетных зданиях, необходимость устройства фонарей.

Габаритные размеры зданий определяются технологией производства, соответствующими условиями для работающих, требованиями техники безопасности, противопожарными мероприятиями и т.п. Необходимо также учитывать унификацию параметров, установленную для производственных зданий.

Нормативные документы устанавливают габаритные размеры и схемы одноэтажных промышленных зданий на основе модуля, равного 100 мм. С целью сокращения числа типоразмеров, повышения индустриальности и серийности изготовления конструкций для геометрических параметров зданий принимают укрупненные модули, кратные основному.

Применение укрупненных модулей в отдельных случаях может привести к увеличению объема здания, что увеличивает стоимость строительства и последующие эксплуатационные расходы. Поэтому для объектов черной металлургии и некоторых других отраслей при соответствующих технико-экономических обоснованиях возможно применение менее укрупненных модулей. Для уникальных, экспериментальных и реконструируемых зданий возможно отступление от единой модульной системы.

В соответствии с укрупненным модулем шаг колонн в продольном и поперечном направлениях назначается кратным 6 м. Для большинства одноэтажных промышленных зданий шаг средних рядов колонн принимают 12 м. Такой шаг, как правило, удовлетворяет технологическим требованиям и дает возможность для большинства производств изменять в широких диапазонах технологию при техническом перевооружении и реконструкции. Если по технологическим требованиям шаг 12 м недостаточен, его увеличивают кратно 6 м. При шаге основных поперечных рам и ригелей 12 м шаг колонн целесообразно принимать кратным 12 м. Увеличение шага колонн обычно приводит к перерасходу материала и усложнению конструктивных решений. Поэтому увеличенный шаг колонн следует принимать только на тех участках, где это необходимо по условиям технологии. Исключение составляют тяжелые цеха большой (более 40 м) высоты, для которых экономически целесообразным может оказаться шаг средних колонн 18, 24, 30 и 36 м. Такой шаг колонн можно рекомендовать и для некоторых производств с часто меняющейся технологией, требующей перемещения из пролета в пролет грузов, габаритные размеры которых могут увеличиваться (например, крупногабаритные блоки в судо- и авиастроительных цехах).

Шаги крайних рядов колонн, которые в меньшей степени зависят от требований технологии, принимают 6 или 12 м в зависимости от вида

стеновых ограждающих конструкций, высоты здания, размеров пролетов, грузоподъемности мостовых кранов, шага ригелей покрытия и т.п.

Как правило, шаг крайних колонн 12 м назначают в зданиях пролетом 30 м и более и шаге ригелей покрытия 12 м при высоте здания (до низа ригелей покрытия) более 14 м, а также при использовании кранов большой грузоподъемности (50 т и более).

При шаге колонн крайних рядов 12 м и применении ограждающих панелей длиной 6 м требуется установка промежуточных фахверковых стоек.

При больших размерах зданий для уменьшения влияния температурных перепадов необходимо устройство температурных швов как в продольном, так и в поперечном направлениях.

Размеры колонн и их привязка к разбивочным осям поперечной рамы зависят от высоты здания, грузоподъемности мостовых кранов, требований деформативности, проходов вдоль подкрановых путей, числа пролетов и наличия второго яруса кранов.

По условиям деформативности поперечных рам высота сечения подкрановой части ступенчатых колонн назначается в пределах 1/10...1/15 высоты здания (считая высоту здания до низа покрытия), а надкрановой части ступенчатых колонн – в пределах 1/8...1/12 высоты оголовка (до низа стропильной фермы). Меньшие значения относятся к легким цехам, большие – к тяжелым.

Для ступенчатых колонн большинства одноэтажных промышленных зданий при высоте до 20 м и грузоподъемности мостовых кранов до 80 т высота сечения принимается следующей: подкрановой части крайних колонн – 1000, 1250, 1500 мм; средних колонн – 1500, 2000 мм; надкрановой части колонн – от 400 до 900 мм.

Для тяжелых цехов высотой более 20 м при жестких требованиях к деформативности каркаса и двухъярусном расположении кранов указанные размеры могут увеличиваться.

Вертикальные габаритные размеры здания определяются уровнем установки мостовых или подвесных кранов, который зависит от особенностей технологического процесса. Этими же требованиями определяются вертикальные габаритные размеры бескрановых зданий. Внутрицеховые коммуникации (воздуховоды, технологические трубопроводы и т.п.), ремонтные монорельсы, обслуживающие и переходные площадки, находящиеся выше мостовых или подвесных кранов, надо располагать в межферменном пространстве. При недостаточной высоте ригелей в отдельных случаях технологические коммуникации следует выносить на кровлю снаружи здания или размещать в створе колонн вне крановых габаритов. Для размещения технологических коммуникаций иногда целесообразно устраивать выносные стены. Увеличение высоты зданий для размещения технологических коммуникаций, как правило, не допускается.

Отметка кранового рельса определяется технологическим заданием с учетом обязательного применения типовых конструкций колонн и подкрановых балок. При этом отметка головки кранового рельса обычно принимается кратной 2 м.

В связи с разной высотой типовых подкрановых балок и крановых рельсов фактическая отметка головки крановых рельсов может отличаться от номинальной (кратной 2 м) до 400 мм в большую или меньшую сторону. В последнем случае необходимо согласование с технологами. Высота от головки кранового рельса до низа несущих конструкций покрытия назначается в зависимости от вертикальных габаритных размеров мостового крана и зазора между габаритами крана и конструкциями покрытия. Согласно допускам на краны минимальный зазор должен быть не менее 100 мм.

Высота здания до низа несущих конструкций покрытия принимается кратной 1200 мм. В отдельных случаях, если это не связано с применением сборных железобетонных элементов стенового ограждения, она может быть кратной 600 или 300 мм.

Компоновка многопролетных одноэтажных зданий при разной высоте пролетов имеет свои особенности, вызванные сложностью конструктивных решений, связанных с перепадом высот. Обычно избегают перепадов высот, так как при этом, кроме конструктивных усложнений, затрудняется и эксплуатация зданий (снеговые мешки, водосброс и т.д.). Поэтому при перепаде высот в пролетах менее 2 м здания проектируют, как правило, одной высоты. При большой площади низких пролетов по сравнению с площадью высоких увеличение высоты низких пролетов нецелесообразно. Перепады высот, если они неизбежны, следует использовать для улучшения аэрации пролетов и освещения. В некоторых случаях можно обойтись без фонарей.

При расположении мостовых кранов на разных отметках возможно устройство односкатной кровли на нескольких пролетах. Такое решение может приниматься при отсутствии продольных фонарей в горячих цехах.

Для обеспечения надежного отвода воды с кровли длина ската не должна превышать 80 м. Уклон кровли при этом зависит как от перепада высот, так и от типа кровли.

Одноэтажные промышленные здания проектируют чаще всего под рулонную кровлю с уклоном 1,5%. Этот уклон предусмотрен типовыми решениями стропильных ферм. Фактический уклон при использовании типовых ферм из-за их прогибов – менее 1,5%. При невысоком качестве укладки утеплителя и рулонного ковра на кровле могут появляться местные углубления, в которых скапливается вода. Периодически замерзая и оттаивая, она резко сокращает срок службы рулонного ковра. Поэтому рекомендуется принимать минимальные уклоны кровли в пределах 2,5...7%.

В зданиях со значительным перепадом высот мостовые краны обычно устанавливают на разных уровнях.

При компоновке каркаса должен быть решен вопрос о шаге ригелей покрытия (стропильных ферм) в увязке с шагом колонн. Как правило, шаг стропильных ферм следует принимать равным 6 м или 12 м с совмещением их осей с осями колонн. Исключение составляют некоторые конструкции блоков при крупноблочном (конвейерном) монтаже покрытия. Если шаг колонн больше или не совпадает с шагом стропильных ферм, то необходимо устройство подстропильных ферм или балок.

В тяжелых и уникальных цехах при пролетах более 42 м и высоте более 30 м шаг ригелей покрытия, как и шаг поперечных рам, следует принимать на основании технико-экономических расчетов, но кратным 6 м. Выбор шага стропильных ферм (6 или 12 м) зависит от шага колонн, пролета здания, конструкции элементов покрытия (прогоны, панели железобетонные или стальные), наличия подъемно-транспортного или технологического (конвейерные линии) оборудования, способа монтажа (поэлементный, крупноблочный).

Шаг ферм 6 м рекомендуется принимать при шаге рам 6 м и пролетах до 24 м; при подвесном подъемно-транспортном оборудовании или технологических конвейерных линиях, подвешиваемых к стропильным фермам; при сборных железобетонных панелях кровли длиной 6 м; при стальном оцинкованном настиле кровли, работающем на пролете 6 м и укладываемом непосредственно на пояса ферм без прогонов; при крупноблочном (конвейерном) монтаже покрытия и ограниченной грузоподъемности монтажного подъемно-транспортного оборудования.

При компоновке каркасов одноэтажных промышленных зданий следует учитывать необходимость устройства фонарей для обеспечения требуемого уровня освещенности и аэрации. Применяются фонари трех типов: зенитные, светоаэрационные и аэрационные. Установка светоаэрационных и аэрационных фонарей связана с большими трудностями как в период строительства, так и в процессе эксплуатации. Кроме того, устройство фонарей увеличивает расход стали на каркас до 10%. Следует избегать применения светоаэрационных и аэрационных фонарей, используя для освещения и аэрации зенитные фонари, перепады высот пролетов (если они есть), крышные вентиляторы, местные отсосы от агрегатов со значительными тепло-, газо- и пылевыделениями. В ряде случаев эффективными для аэрации являются крутоуклонные кровли на несколько пролетов в сочетании с перепадами высот.

В горячих цехах в зависимости от расположения оборудования со значительным избыточным тепловыделением (печи, сталеплавильные агрегаты, установки непрерывной разливки стали и т.п.) при односкатных кровлях могут применяться продольные (вдоль ската) фонари. Ширина их,

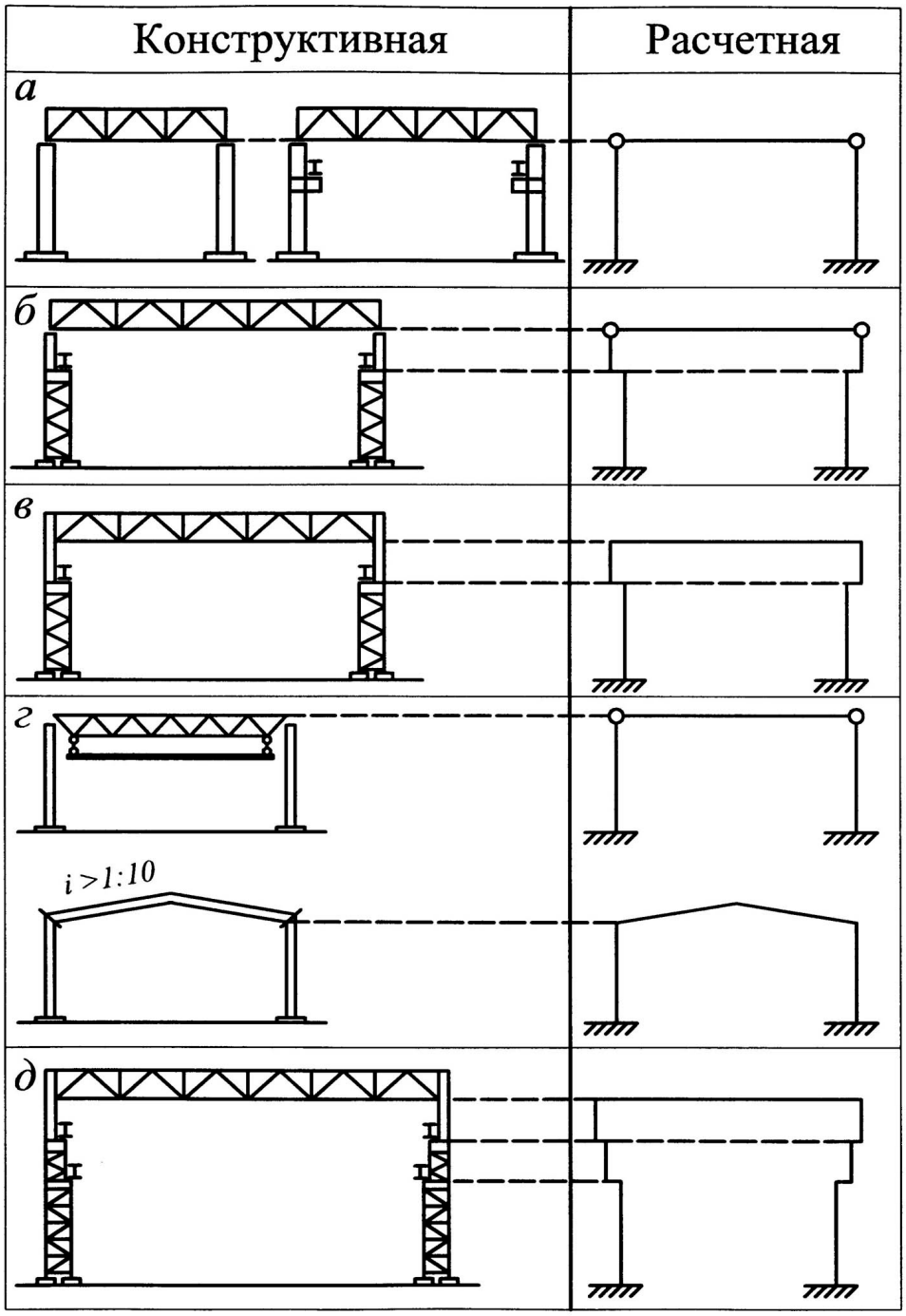
как правило, определяется шагом ферм покрытия, на которые опираются конструкции фонаря.

1.2.4. Конструктивные и расчетные схемы поперечных рам. Конструктивная и расчетная схемы рамы должны обеспечить неизменяемость и требуемую жесткость каркаса. Неизменяемость каркаса достигается соответствующей статической схемой (определимой или неопределимой). Жесткость каркаса достигается выбором как статической схемы, так и соответствующих размеров конструктивных элементов (колонн, ригелей, балок, входящих в систему поперечных рам).

При статически определимых схемах одноэтажных промышленных зданий их конструктивные элементы имеют более простые и менее трудоемкие монтажные соединения, они мало чувствительны к осадкам оснований и температурным воздействиям, лучше поддаются унификации. Статически неопределимые схемы имеют более сложные элементы и монтажные соединения, весьма чувствительны к осадкам оснований и к температурным воздействиям. Вместе с тем они менее деформативны и, как правило, более надежны. Выбор схемы должен производиться с учетом ее преимуществ, недостатков и конкретных условий эксплуатации. Так, при строительстве на просадочных лессовых грунтах предпочтительнее применять статически определимые схемы, а при незначительных просадках фундаментов – статически неопределимые.

Конструктивные схемы рам устанавливают с учетом максимального использования типовых конструкций (табл. 1.1).

Таблица 1.1



В конструктивной схеме необходимо определить: основные размеры всех элементов и их конфигурацию; типы элементов (решетчатые, сплошностенчатые, переменного сечения и т.п.); типы узловых соединений элементов рамы между собой (шарнирные, жесткие, упругие) и с фундаментами.

Расчетную схему рамы необходимо устанавливать по принятой конструктивной схеме с учетом типов сопряжения элементов друг с другом и с фундаментами, наличия закрепленной рамы и элементов. Длины элементов определяют по геометрическим осям стержней. Длины колонн отсчитывают от низа опорных плит. Для статических расчетов рамы абсолютные значения моментов инерции стержней или их участков могут быть заменены их соотношениями.

При формировании расчетной схемы рамы допускается:

– геометрические оси стержней при отсутствии данных по предварительным сечениям принимать проходящими посередине сечений;

– геометрические оси ригелей, шарнирно сопрягающихся с колоннами, принимать по линии, соединяющей шарниры;

– при жестком сопряжении решетчатого ригеля с колонной геометрическую ось принимать по оси нижнего пояса ригеля;

– ригели с уклоном менее 1:10 в расчетной схеме принимать горизонтальными;

– в рамах с большими моментами инерции ригелей при расчете на горизонтальные нагрузки и нагрузки, приложенные к колоннам, принимать жесткость ригеля бесконечной, если

$$\frac{i_p}{i_1} \le \frac{6}{1+\frac{i_1}{i_2}},$$

где i_p – погонная жесткость ригеля; i_1, i_2 – погонная жесткость соответственно подкрановой и надкрановой частей колонн;

– рамы на вертикальные нагрузки, приложенные непосредственно к ригелю, рассчитывать с учетом фактической жесткости ригеля;

– сквозные колонны и фермы заменять сплошными эквивалентной жесткости;

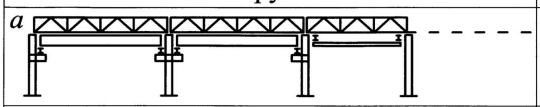
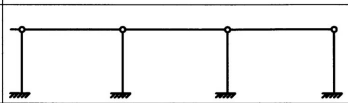
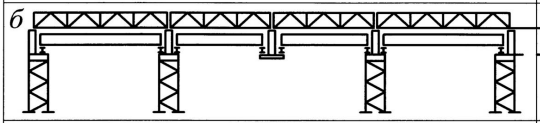
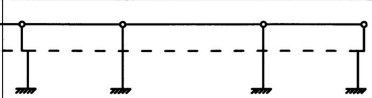
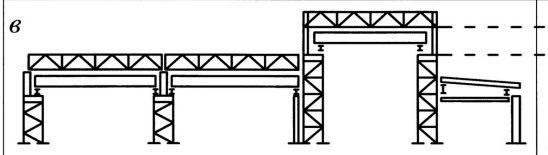
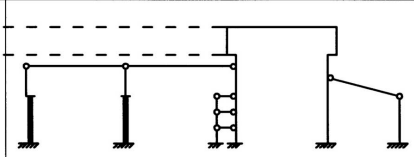
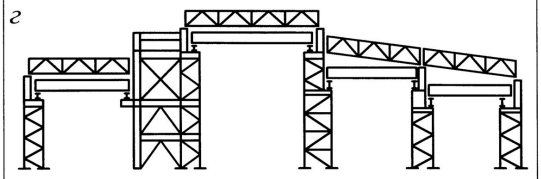
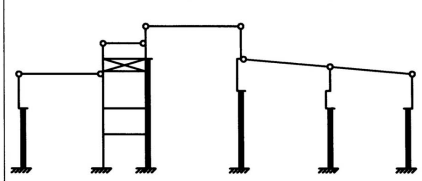
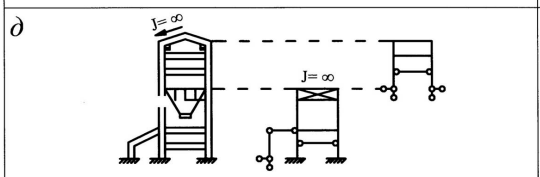
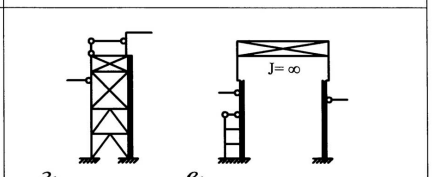
– в однопролетных и многопролетных рамах с небольшой асимметрией нагрузки или сечений колонн не учитывать горизонтальные смещения узлов рамы на уровне ригелей при вертикальных нагрузках на ригелях;

– поперечные рамы сложной конфигурации в некоторых случаях для упрощения расчетов разделять на две-три части и рассматривать их независимо, если влияние, оказываемое ими одна на другую, невелико.

Условия сопряжения независимых расчетных схем назначают в зависимости от конкретных особенностей. В табл. 1.2, *д* приведено

возможное разделение расчетной схемы поперечной рамы сложной конструкции.

Таблица 1.2

Конструктивная	Расчетная
а 	
б 	
в 	
г 	
д 	 *г*1 *в*1

Учитывая большую жесткость высотной этажерки и ригеля (бункерной балки), примыкание пристройки к этажерке и верхней ее части (через шарниры ригеля и стойки) можно считать неподвижным.

Возможность других упрощений следует выявлять в каждом конкретном случае.

В табл. 1.1 и 1.2 приведены схемы упрощений, обычно принимаемых при составлении расчетной схемы рамы.

Расчетная схема должна соответствовать принятой конструктивной, узлы и отдельные стержни – предпосылкам их работы (шарнирное, жесткое или упругое крепление, смещение осей и т.д.). Несоблюдение этих правил является причиной многочисленных аварий. Особое внимание следует уделять возможному «замыканию» шарнирных узлов в жесткие, что может возникнуть из-за неправильной конструкции узла либо отступлений от проекта при изготовлении и монтаже конструкций, а также из-за наличия

значительных эксцентриситетов при изменении сечений. Например, принятый в конструктивной и расчетной схемах шарнирный узел крепления решетчатого ригеля к колонне должен обеспечивать свободу продольного перемещения верхнего пояса (при восходящем опорном раскосе) либо нижнего пояса (при нисходящем опорном раскосе), что осуществляется образованием овальных отверстий в фасонке или другими конструктивными мероприятиями. Неподвижное закрепление этого узла (круглые отверстия или приварка фасонок) изменяет работу узла, делая его частично или полностью защемленным, и работу элементов ригеля: растянутые элементы начинают работать как сжатые и часто теряют устойчивость, при этом усилия в них могут значительно возрастать.

Жесткое крепление сплошностенчатого ригеля к колонне на фланцах с болтовыми соединениями в действительности имеет значительную податливость и может изменять распределение усилий в раме. Жесткое крепление колонн в фундаменте при значительных возможных поворотах или смещениях последнего фактически является податливым, что в отдельных случаях требуется учитывать.

Отступление расчетной схемы от конструктивной, неучет влияния особенностей конструкций узлов на работу рамы допускается только при наличии нормативных указаний либо при соответствующем обосновании расчетом по данным испытаний.

Схемы рам одноэтажных промышленных зданий разнообразны. В табл. 1.1 приведены наиболее часто применяемые конструктивные и расчетные схемы однопролетных зданий. Схема *«а»* применяется для зданий бескрановых, с подвесными и мостовыми кранами – грузоподъемностью до 20 т при высоте до 14 м. Схема *«б»* применяется при мостовых кранах общего назначения грузоподъемностью до 50 т при высоте до 18 м. Схема *«в»* применяется при мостовых кранах общего назначения грузоподъемностью свыше 50 т или специальных кранах любой грузоподъемности при высоте более 18 м, отношении высоты к пролету более 1,5 и в случаях, требующих ограничения горизонтальных деформаций. Схема *«г»* применяется для каркасов из легких металлоконструкций комплектной поставки. Схема *«д»* применяется при двухъярусном расположении мостовых кранов.

В табл. 1.2 представлены схемы многопролетных промышленных зданий. Схема *«а»* применяется для зданий бескрановых, с подвесными кранами, с мостовыми кранами грузоподъемностью до 20 т, схема *«б»* – для зданий с мостовыми кранами общего назначения грузоподъемностью 30...100 т при высоте до 18 м. При мостовых и специальных кранах большой грузоподъемности и большей высоте применяются схемы *«в»* и *«г»*. С возрастанием количества пролетов (числа колонн) жесткость поперечной рамы увеличивается. Поэтому при выборе схемы и типа соединений

конструктивных элементов между собой (жесткое, шарнирное) следует учитывать и количество пролетов.

При выборе схем *«в»* и *«г»* жесткое крепление ригеля к колонне следует применять в пролетах, где эксплуатируются краны наибольшей грузоподъемности, и в пролетах наибольшей высоты. Ригели остальных пролетов крепятся к колоннам шарнирно. При наличии в составе поперечника этажерки с жестким креплением балок перекрытий к колоннам возможно шарнирное крепление всех одноэтажных пролетов покрытия к колоннам.

1.3. Производственные здания из легких металлических конструкций (ЛМК)

1.3.1. Особенности компоновки каркасов одноэтажных производственных зданий. В современных металлических конструкциях реализуются основополагающие принципы проектирования, обеспечивающие рациональный расход материалов, стойких к внешним воздействиям, возможность применения высокопроизводительной технологии изготовления и сокращения сроков монтажа. Поскольку для таких конструкций характерен относительно низкий расход стали (30...100 кг на 1 м^2 перекрываемой площади), они называются легкими. Если же расход стали удается снизить до уровня затрат арматуры железобетонных конструкций аналогичного назначения, то можно говорить об особо легких металлических конструкциях [15].

Эффективность применения ЛМК обеспечивается выполнением следующих требований при выполнении организационно-технических мероприятий:

1) компоновочное решение зданий должно обеспечивать возможность размещения в едином строительном объеме производств различного назначения, последующей реконструкции и технического перевооружения технологического процесса. При этом должны быть созданы условия для надежной и долговечной эксплуатации несущих и ограждающих конструкций, сокращены площади ограждающих элементов, ограничено число световых проемов до уровня, регламентируемого нормами естественного и искусственного освещения и санитарно-гигиеническими нормами, предусмотрены мероприятия по обеспечению пожарной безопасности и предотвращению коррозии. Компоновочные схемы разрабатываются с учетом возможности применения прогрессивных методов монтажа;

2) конструктивные решения каркасов зданий должны соответствовать нормам проектирования по прочности, устойчивости и деформативности.

Уменьшение затрат материала обеспечивается снижением нагрузок на строительные конструкции за счет облегчения ограждающих элементов и ограничения применения подвесного и опорного подъемно-транспортного оборудования, распределением действующих усилий на большее число несущих элементов за счет перехода от плоскостных к пространственным конструкциям, рациональным размещением шарнирных и жестких сопряжений элементов в конструктивной схеме здания;

3) форма и топология несущих конструкций должна максимально соответствовать основным требованиям теории формообразования, обусловленным целесообразностью концентрации материалов, совмещением функций (как правило, несущих и ограждающих), применением сталей повышенной и высокой прочности, эффективных профилей, в том числе тонкостенных электросварных труб, открытых и замкнутых гнутосварных профилей, прокатных широкополочных двутавров и широкополосной универсальной стали. Экономному расходованию стали способствует выбор формы конструкции, соответствующей эпюрам усилий, действующих в ней, использование двутавровых сечений с перфорированной, гибкой гофрированной стенкой, а также элементов с переменной по длине высотой сечения. Конструкции целесообразно проектировать в виде укрупненных пространственных блоков, удовлетворяющих требованиям технологичности изготовления, удобства транспортировки и монтажа;

4) в зданиях из ЛМК следует применять облегченные ограждающие конструкции из стальных и алюминиевых профилированных листов, асбестоцементных (в том числе и многопустотных экструзионных) плит с эффективным утеплителем. Ограждающие элементы должны обладать достаточной прочностью и жесткостью, а также удовлетворять требованиям по огнестойкости и долговечности. При проектировании ограждающих конструкций необходимо предусматривать защиту внутренней и наружной поверхностей от воздействия влаги (производственной и бытовой) и атмосферных осадков. Толщина слоя утеплителя устанавливается на основании теплотехнических расчетов с учетом теплопроводности применяемых материалов, климатических условий района строительства и характера внутрицеховой среды;

5) с целью упорядочения номенклатуры типов зданий, сокращения количества их параметров, уменьшения координатно-модульных размеров пролетов и высот должна выполняться унификация конструктивных решений зданий из ЛМК. Унификация обеспечивает выполнение требований разнообразных технологических процессов, которые предполагается выполнять в зданиях универсального назначения, применение типовых решений конструкций и отдельных элементов. Типизация приводит к большой повторяемости и серийности изготовления конструктивных

элементов, что создает благоприятные условия для организации поточного метода изготовления и монтажа, специализации заводов-изготовителей;

6) конструктивные элементы зданий должны удовлетворять требованиям технологичности конструкций, их изготовление должно быть ориентировано на применение автоматизированных линий с целью обеспечения равномерной загрузки технологического оборудования, повышения производительности труда и качества изготовляемой продукции;

7) конструкции зданий из ЛМК должны поставляться на строительную площадку в основном в комплекте. Комплектность поставки повышает уровень заводской готовности конструкций, обеспечивает удобную и более дешевую транспортировку их за счет увеличения коэффициента заполняемости используемых транспортных средств, сокращает сроки монтажа благодаря однотипности монтажных работ, что способствует ускорению ввода в эксплуатацию объекта строительства.

Комплексная реализация перечисленных мероприятий позволяет существенно улучшить технико-экономические показатели зданий из ЛМК по сравнению с традиционными металлическими конструкциями. Помимо снижения материалоемкости зданий в 2…3 раза (с учетом массы фундаментов) на 30...50% сокращаются сроки строительства, на 30...40% уменьшаются трудоемкость монтажа и затраты на транспортировку готовых конструкций, возрастает в 1,5…2 раза производительность труда при изготовлении ЛМК поточными методами, сметная стоимость строительства снижается на 8...10%. В целях развития и расширения производства ЛМК в последнее время построен и введен в эксплуатацию целый ряд специализированных заводов, разработаны и внедрены в массовое производство несущие конструкции легких покрытий для одноэтажных производственных зданий пролетами 18...30 м, организовано серийное производство зданий комплектной поставки, созданы соответствующие поточно-механизированные линии. Возведение зданий общей площадью 1 млн.м^2 из ЛМК комплектной поставки экономит до 4,5 тыс.т проката и высвобождает до 800 рабочих.

Здания из ЛМК предназначены для массового применения, поэтому их объемно-планировочные и конструктивные решения разработаны в соответствии с унифицированными габаритными схемами, наиболее часто встречающимися в практике. При основном модуле М, равном 100 мм, модульные шаги в зданиях универсального назначения (планировочные размеры) принимают кратными наиболее крупным из производственных модулей – 60М и 30М, а для некоторых типов зданий – 15М. Модульные высоты этажей во всех зданиях назначают кратными укрупненным модулям – 6М и 3М. Допускается применение высоты этажа 2800 мм. Этим же модульным размерам соответствуют длины конструктивных элементов зданий – плит, балок, ферм, колонн, панелей стен, окон, дверей, ворот и пр.

Здания могут быть скомпонованы из нескольких одно- или разнотипных секций, каждая из которых состоит из совокупности одно- или разнотипных (по модульным пролетам и шагам) ячеек, имеющих одинаковое направление пролетов и одинаковую модульную высоту этажей. Вертикальные и горизонтальные размеры секций, в которых эксплуатируется опорное крановое оборудование, назначаются исходя из габаритов кранов, грузоподъемность которых определяется постоянной технологической потребностью в ней. Необходимость подъема большего груза в случае выполнения монтажных и ремонтных работ при компоновке здания не учитывается, так как эти работы могут выполняться напольными механизмами без увеличения нагрузки на каркас здания. При этом высота секции с опорными кранами принимается округленной до значения укрупненного модуля суммы размеров, слагаемой из следующих параметров: максимальной высоты подъема крюка крана; высоты крана – расстояния от верхнего положения крюка до верхнего контура его конструкций и механизмов; минимально допустимого зазора между краном и низом стропильных конструкций, равного 100 мм; значения предельного прогиба несущих конструкций покрытия.

При функциональной необходимости и технико-экономической целесообразности секции могут иметь разные высоты и располагаться с взаимно перпендикулярным направлением пролетов. Величина перепада высот должна быть кратной 6М. Сопряжения смежных секций, как правило, осуществляются на парных колоннах и совмещаются с местами устройства температурных и деформационных швов.

1.3.2. Основные конструктивные элементы зданий из легких конструкций. Абсолютное большинство зданий из ЛМК проектируют каркасного типа, различая плоские несущие конструкции (поперечные рамы) и пространственные конструкции покрытия типа структурных плит регулярного строения или перекрестных ферм. К бескаркасным зданиям относятся решения с использованием складок, совмещающих несущие и ограждающие функции в тонколистовом лоткообразном элементе.

В зависимости от уровня заводской готовности конструктивные элементы поставляются на монтажную площадку комплектно или поэлементно. Комплектность поставки подразумевает изготовление на специализированных заводах унифицированных несущих и ограждающих конструкций, эффективность которых определяется принципами их формообразования и использованием поточных методов изготовления, и сборку из них на строительной площадке модульных зданий различных габаритных размеров. В случае поэлементной поставки отдельные конструктивные элементы могут использоваться в каркасах зданий как массового, так и индивидуального изготовления, в том числе и при тяжелых

нагрузках и расходе материалов на каркас, превышающем значения, определяющие понятие ЛМК. Таким образом, ЛМК имеют гораздо большую область применения и могут входить в состав каркаса любого производственного здания.

Конструктивные решения основных несущих элементов каркаса зависят от принятой схемы здания, размещения колонн по координационным осям, размеров пролетов и высот, типа покрытия, наличия подъемно-транспортного оборудования, климатического района строительства. При этом выполнение нормативных требований по прочности, устойчивости и жесткости отдельных элементов должно сочетаться с реализацией условий проектирования ЛМК.

Поперечные рамы плоскостных каркасов (рис. 1.4) компонуются из колонн и ригелей. Колонны проектируют постоянного или переменного сечения, изменяя высоту каркаса в соответствии с эпюрой изгибающих моментов.

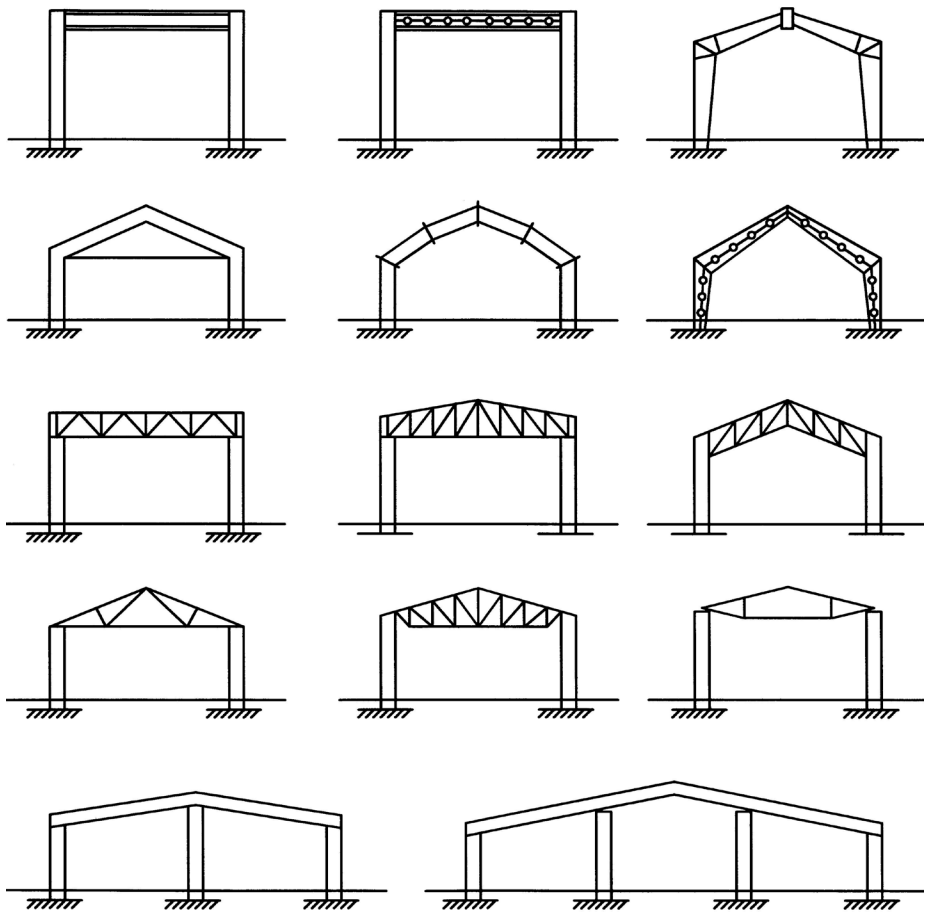


Рис. 1.4. Схемы поперечных рам каркасов зданий

Размеры сечений колонн назначают из условия обеспечения необходимой поперечной жесткости рамы и оптимального расхода стали, достигаемого при выполнении условий максимальной тонкостенности элементов составного сечения и равноустойчивости.

Колонны постоянного сечения в зависимости от высоты и воспринимаемых нагрузок проектируют сплошностенчатыми или сквозными. Их применяют в бескрановых зданиях, а также при наличии мостовых кранов грузоподъемностью до 20 т. При этом принимают во внимание, что нагрузки от кранов передаются на стержень колонны через консоли, на которые опираются подкрановые балки. При кранах большей грузоподъемности колонну выполняют ступенчатого типа, устанавливая подкрановые балки на уступ подкрановой части колонны. Надкрановую часть проектируют сплошного двутаврового сечения, нижнюю – двухветвевой с соединением ветвей раскосной или безраскосной решеткой (сквозное сечение).

Ригели поперечных рам каркасов производственных зданий проектируют, как правило, сквозными, отличающимися меньшими затратами стали по сравнению с аналогичными сплошного сечения. Однако последние имеют ряд преимуществ: их применение снижает трудоемкость изготовления и монтажа, улучшает условия транспортировки, уменьшает объем здания и высоту стен за счет меньшей строительной высоты. Облегчение сплошностенчатых ригелей достигается в основном за счет снижения расхода металла на стенки, концентрации его в поясах, где эффективность его использования значительно выше. Уменьшение толщины стенки приводит к возможности потери ею местной устойчивости, но балки с гибкой стенкой ($\lambda_\omega = 200...500$) могут эксплуатироваться и после этого, если материал стенки работает в упругой области. Существенно повысить местную устойчивость гибкой стенки можно ее гофрированием, в результате чего последняя работает значительно дольше в упругой стадии до потери местной устойчивости. Расход стали на балки с гофрированной стенкой ниже на 20...25%, чем у обычных балок, и на 8...10%, чем у балок с гибкой стенкой. Еще одна возможность снижения затрат металла на стенку балки связана с созданием перфорированных двутавров.

Очертания поясов сквозных ригелей должны соответствовать материалам, применяемым для устройства кровли. Так, для рулонных и мастичных кровель уклон принимают 1,5...5%, что позволяет применять фермы с параллельными поясами. При кровлях из листовых профилированных материалов требуется уклон 10...20%, поэтому фермы в этом случае проектируют одно- или двухскатными.

Генеральные размеры ферм согласуются с параметрами зданий и с требованиями, установленными исходя из условий транспортировки. Высота отправочных (монтажных) элементов не должна превышать высоты погрузочного габарита железнодорожной платформы – 3800 мм. Длина определяется соответствующими размерами используемого для перевозки конструкций транспортного средства (обычно не более 12 м).

Схему решетки сквозных ригелей выбирают в соответствии со схемой приложения внешних нагрузок в узлах ферм, при этом следует учитывать также удобство сопряжения элементов решетки с поясами в зависимости от принятых типов сечений отдельных стержней. Наиболее распространена треугольная решетка с дополнительными стойками, сокращающими расчетную длину сжатых элементов поясов. Размеры панелей ферм увязываются с размерами несущих элементов беспрогонного покрытия (шириной железобетонных плит) или шагом прогонов, поддерживающих кровлю из профилированных листов. Обычно длина панели равна 3 м.

В последние годы все более широкое распространение получают фермы, на верхние пояса которых профилированный настил опирается непосредственно (без прогонов) либо через прогоны, расположенные не в

узлах крепления к поясам элементов решетки. Такие фермы характеризуются применением в сечениях поясов профилей с высокими жесткостными характеристиками (широкополочных прокатных двутавров, замкнутых прямоугольных гнутосварных профилей) либо с малым числом элементов решетки (малоэлементные фермы).

Схемы ферм покрытия выбираются на основе разработанных типовых решений (рис. 1.5) с возможными отступлениями от них, обусловленными особенностями проектируемых зданий.

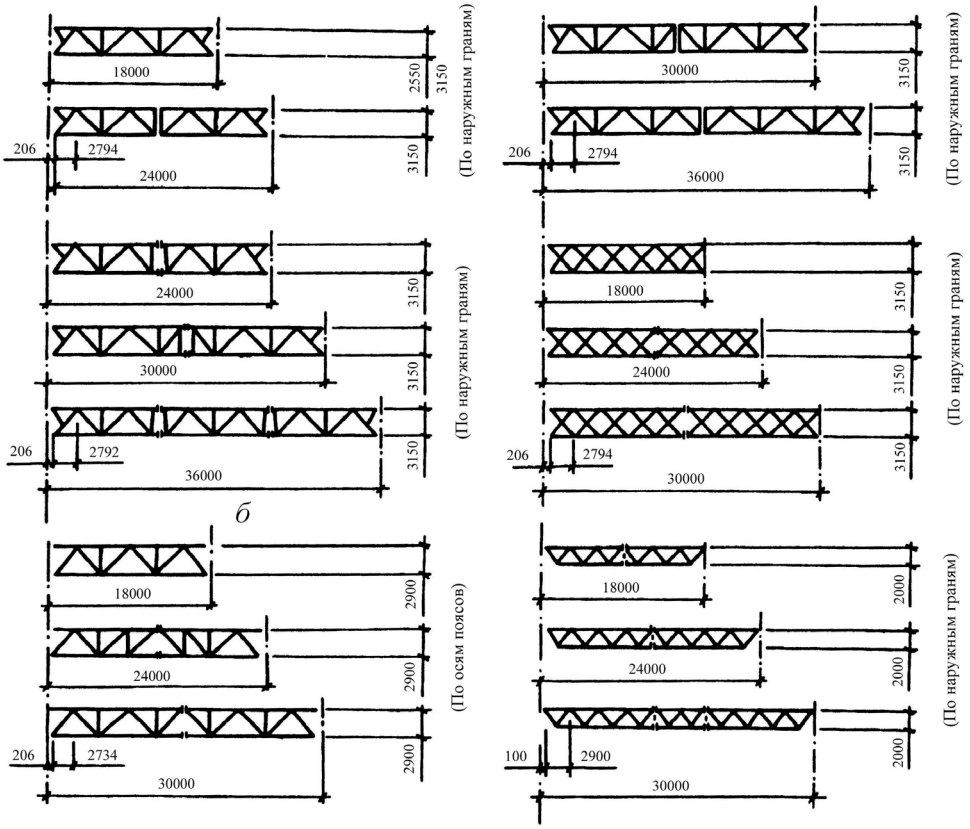


Рис. 1.5. Схемы типовых стропильных ферм

Использование в качестве элементов ферм круглых труб, замкнутых гнутосварных профилей, широкополочных двутавров и тавров позволяет повысить эффективность конструкций по сравнению с наиболее распространенным типом сечений – из спаренных уголков. Снижение массы фермы обеспечивается более рациональным распределением материала по сечениям, а также выбором схемы решетки, благодаря чему создаются условия для непосредственного сопряжения раскосов с поясами. Так, при

использовании в традиционных схемах поясов из широкополочных тавров с сохранением решетки из спаренных уголков масса фермы снижается на 10...12% вследствие уменьшения расхода стали на узловые фасонки. В фермах из электросварных труб узлы решаются без фасонок, в результате чего их масса на 15...20% меньше массы ферм из спаренных уголков. Применение такой формы сечений элементов позволяет исключить возможность образования очагов коррозии, существенно уменьшить суммарную поверхность соприкосновения с окружающей средой, а следовательно, и поверхность грунтовки и окраски. Несмотря на более высокую стоимость трубчатых профилей, применение таких ферм оказывается в целом рациональным.

Наиболее экономична ферма с поясами из широкополочных тавров и с перекрестной решеткой, элементы которых выполнены из одиночных уголков. При сравнительно небольшом снижении массы конструкции (до 10%) существенно сокращается трудоемкость изготовления (на 25...30%) за счет уменьшения числа деталей и длин сварных швов. Применение ферм с элементами из замкнутых гнутосварных профилей с опиранием профилированного настила непосредственно на их верхние пояса обеспечивает снижение расхода материалов на 1 м^2 покрытия примерно на 15...20%.

В экономически обоснованных случаях шаг колонн в зданиях может не совпадать с шагом стропильных ферм. Тогда в покрытиях предусматривают установку подстропильных конструкций по средним и крайним (реже) рядам колонн. Типы сечений подстропильных ферм принимают в соответствии с решениями стропильных ферм из спаренных уголков, широкополочных тавров и двутавров, а также из труб (рис. 1.6).

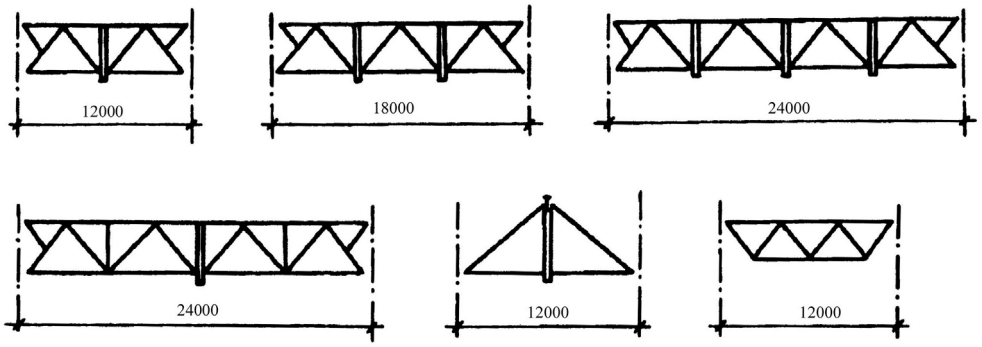


Рис. 1.6. Схемы подстропильных ферм

При пространственной конструктивной схеме здания каркас состоит из структурной плиты (применяют также структурные конструкции типа оболочек, складок, куполов), образованной из регулярно повторяющихся

стержневых элементов, и колонн, расположенных либо по периметру покрытия, либо внутри его контура с образованием консольных участков. Возможно смешанное, при котором колонны расположены и по контуру, и внутри его (рис. 1.7).

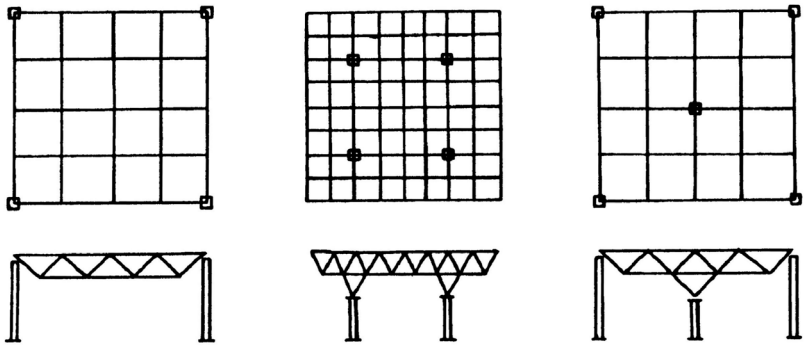


Рис. 1.7. Варианты опирания структурных плит

Структурная плита может формироваться по-разному в зависимости от числа стержней, пересекающихся в одном узле, а также вертикального или наклонного их положения. Наиболее простые покрытия образуют из перекрестных ферм, устанавливаемых вертикально в двух (рис. 1.8, *а*) или трех (рис. 1.8, *б*) направлениях.

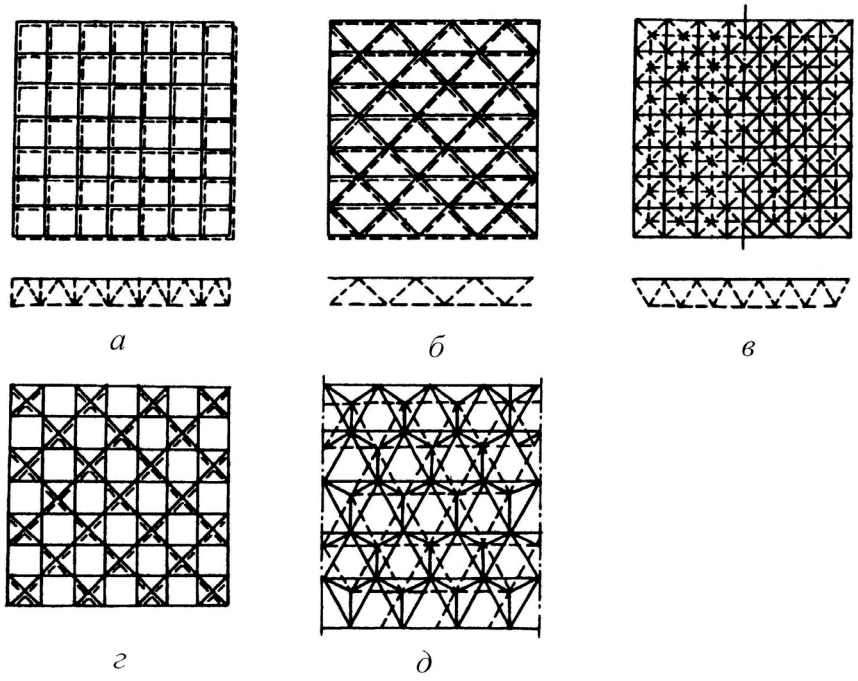


Рис. 1.8. Типы структурных плит: а – из перекрестных ферм двух направлений; б – то же, трех направлений; в – с ортогональными сетками, параллельными опорному контуру; г – то же, под углом 45° к опорному контуру; д – с сетками из равносторонних треугольных ячеек

Широкое распространение получили структуры, образованные поясными ортогональными сетками, сдвинутыми относительно друг друга на половину ячейки. При этом поясные ячейки могут быть заполнены диагоналями либо оставаться без них (рис. 1.8, *в*). Сетки могут располагаться параллельно по отношению к опорному контуру и быть повернуты относительно друг друга на 45^{O} (рис. 1.8, *г*). Рациональными по расходу стали и более жесткими при работе на кручение являются структуры с поясными сетками из равносторонних треугольных ячеек (рис. 1.8, *д*), хотя трудоемкость их изготовления достаточно велика. В этой связи предпочтительны системы с ортогональными по отношению к опорному контуру сетками, а также структуры с разреженной нижней поясной сеткой и частично разреженной раскосной решеткой.

Здания с покрытиями из структурных плит могут быть одно- и многопролетными. При большой протяженности одноэтажных зданий жесткость каркаса в поперечном направлении обеспечивается защемлением колонн в фундаменте (при шарнирном сопряжении со структурной плитой) и выбором размеров колонн. В продольном направлении следует предусматривать систему связей.

Эффективность структурной плиты определяется выбранной ее формой, типом применяемых профилей, конструктивным решением узловых сопряжении, способом опирания и типом кровли. Применение трубчатых элементов снижает расход стали по сравнению со структурами из прокатных профилей примерно на четверть. Однако, учитывая дефицитность труб, в зависимости от пролета здания и действующих нагрузок используют замкнутые гнутосварные и открытые гнутые профили: для верхних поясов – прокатные швеллеры и двутавры, для раскосов – равнополочные уголки. Тип сечения стержня определяет решение узла сопряжения стержней, который является наиболее сложным элементом покрытия. Существуют многочисленные варианты этого сопряжения, однако практически все они нуждаются в совершенствовании с целью упрощения монтажных работ и снижения их трудоемкости.

В структурных покрытиях, как правило, применяют легкие кровли по профилированному стальному настилу или асбестоцементным плитам. Несущие элементы кровли опираются или на прогоны, или непосредственно на верхние пояса структур, поэтому размеры поясных ячеек обычно не превышают 3 м. Вследствие большой пространственной жесткости высота структурных плит относительно небольшая и составляет 1/10...1/20 пролета.

В последние годы в практике строительства все большее распространение находят крупноразмерные бескаркасные здания, собираемые из унифицированных тонколистовых профилированных элементов. Складчатые элементы способны воспринимать усилия от всех видов силовых воздействий, совмещая при этом несущие и ограждающие функции. По своей форме складки могут быть прямолинейными с прямолинейными ребрами и плоскими гранями (рис. 1.9, *а*, *б*), криволинейными с прямолинейной образующей (рис. 1.9, *в*) и двоякой кривизны (рис. 1.9, *г*), объемными, грани которых образуют правильное геометрическое тело с прямо- или криволинейными ребрами (рис. 1.9, *д*).

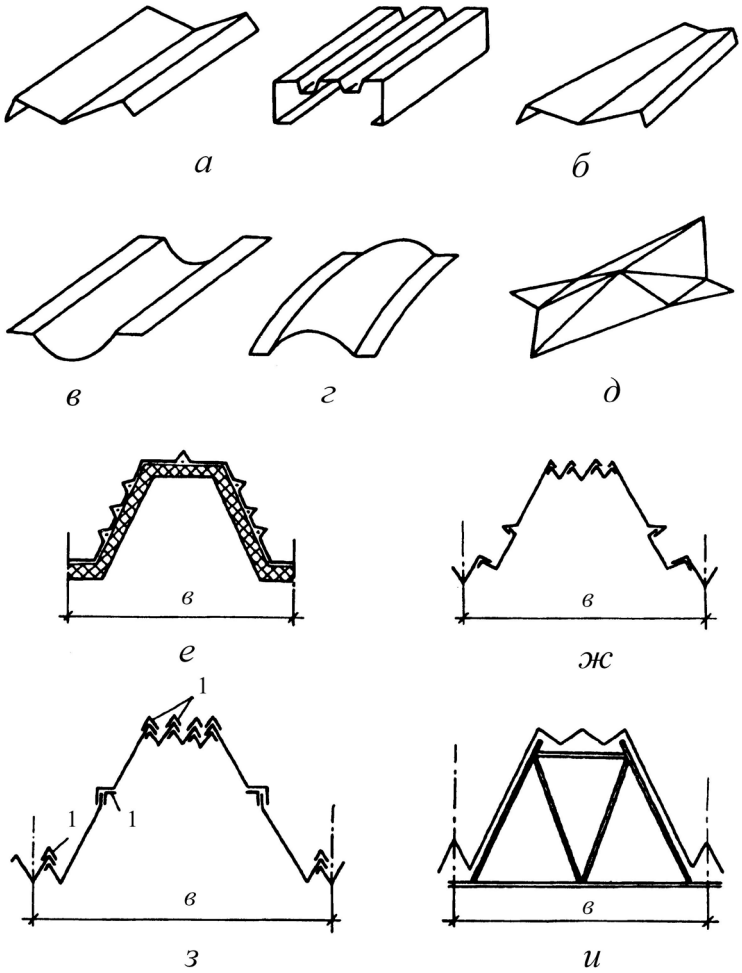


Рис. 1.9. Типы складок: а – прямолинейная постоянной ширины; б – то же, переменной ширины; в – криволинейная; г – то же, двоякой кривизны; д – объемная; е – двухстенчатая; ж – с увеличенным числом лоткообразных

элементов; з – с элементами усиления; и – то же, в виде сквозной диафрагмы; 1 – элементы усиления

Элементы могут изготовляться из стандартных листов либо рулонных заготовок с назначением ширины складчатых панелей кратной 1 м. Несущую способность складчатых панелей можно повысить за счет выполнения всех элементов двухстенчатыми (рис. 1.9, *е*), увеличения числа лоткообразных элементов в панели здания (рис. 1.9, *ж*) и местного усиления отдельных элементов и узлов (рис. 1.9, *з*). Совместной работе лоткообразных элементов, образующих складчатые панели, способствует установка в узлах их соединения решетчатых (рис. 1.9, *и*) или сплошностенчатых диафрагм, обеспечивающих также неизменяемость складчатой оболочки в продольном направлении.

Для стыковки в поперечном направлении здания складчатые элементы имеют либо отгибы с отверстиями для постановки болтов, либо фланцы, привариваемые к торцам элементов. По длине здания стыковка осуществляется постановкой болтов между отбортовками. Водонепроницаемость стыков достигается напуском вышележащих элементов, а также нахлесточным соединением элементов между собой. При этом стыки располагаются в тех листах, где исключается возможность затекания.

Бескаркасные складчатые здания обладают рядом конструктивных преимуществ, определяемых особенностями работы складок под нагрузкой. При большой протяженности эти здания не требуют устройства температурных швов, так как каждая складка является своеобразным компенсатором. Пространственная работа и многосвязность системы делают такие здания весьма надежными в эксплуатации [16]. Однотипность элементов и узлов обеспечивает возможность их изготовления на автоматизированных линиях завода-изготовителя, упрощает транспортировку и монтаж. Общий расход стали на здания полигонального очертания (рис. 1.10) с пролетами 12 и 24 м колеблется в зависимости от климатических условий района строительства от 20 до 30 кг на 1 м^2.

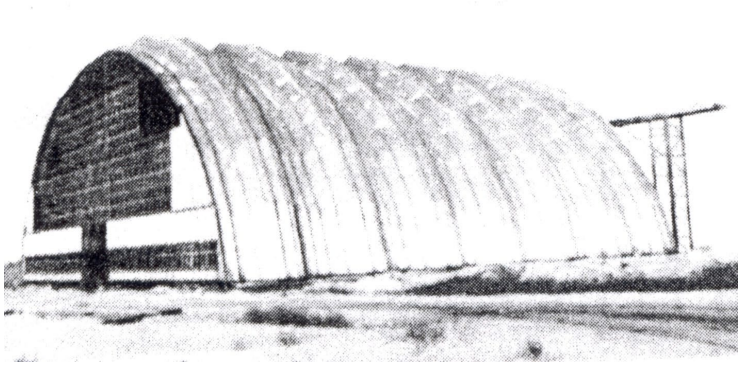


Рис. 1.10. Складчатое здание ангара в Донецке
(проект ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского»)

Большепролетные (48 м и более) бескаркасные складчатые здания оказываются более экономичными по сравнению с традиционными каркасными, обеспечивая снижение трудоемкости изготовления в два раза и стоимости конструкции на 20%.

1.4. Резервуары и газгольдеры

1.4.1. Основные сведения. Общими для всех емкостных сооружений, применяемых в нефтяной и газовой промышленности, являются требования, предъявляемые к их герметичности, долговечности и надежности в эксплуатации. В зависимости от физико-химических свойств хранимого продукта (плотности, испаряемости, теплопроводности, огнеопасности, токсичности, агрессивности в отношении коррозии и др.) к емкостным сооружениям предъявляется также ряд других требований, в первую очередь – снижение потерь и сохранение качества продукта. Эти параметры взаимосвязаны, так как по своей природе многие продукты в результате потерь (от испарения наиболее легких и ценных фракций, от смешения различных сортов продуктов и т. п.) изменяют свои свойства, причем в такой степени, что перестают удовлетворять требованиям стандартов и обесцениваются [16].

Наиболее значительны потери от испарения, утечки (через трещины, сквозные поры, расслоения и т.п.) и различного рода аварий (локальных и глобальных). Особенно большой ущерб народному хозяйству и экологии наносят потери от испарения при хранении продуктов в емкостях. Так, по данным исследований, за счет снижения потерь от испарения нефтепродуктов можно сэкономить 10 млн.т нефти в год. Суммарные потери от испарения составляют 5...7% объема добычи нефти.

На потери от испарения нефти и нефтепродуктов существенное влияние оказывают большие (при сливе и заливе продукта) и малые (при повышении температуры газового пространства, понижении атмосферного давления и др.) «дыхания», наличие на разных уровнях отверстий, способствующих образованию «газового сифона», насыщение воздушного пространства парами нефтепродукта, а также кипение его при нагревании.

Гораздо проще бороться с потерями, связанными с утечкой продукта через трещины, поры, расслоения, а также с авариями емкостей, чем с потерями от испарения. Одним из кардинальных путей решения вопроса борьбы с потерями от испарения является полное исключение газового пространства над продуктом. К сожалению, до настоящего времени эта задача теоретически не решена. В качестве инженерных решений может служить применение понтонов, плавающих крыш и других специальных покрытий.

Поиск более простых путей предотвращения потерь от испарения привел к созданию емкостей, допускающих увеличение давления в газовом пространстве до такого уровня, при котором процессы испарения прекращаются. Однако такие резервуары требуют дополнительного расхода металла.

В настоящее время подавляющее число резервуаров для хранения тяжелых и темных нефтепродуктов на нефтебазах представляют собой хранилища низкого давления. Такие резервуары менее эффективны для хранения светлых продуктов, поскольку в них не обеспечивается надежная работа уплотняющих устройств (затворов) между понтоном или плавающей крышей и стенкой резервуара.

В современной практике применяется большое количество различных типов емкостей как без давления, так и с давлением. Рассмотрим классификацию емкостных сооружений для хранения нефти и других продуктов.

1. Горизонтальные цилиндрические резервуары предназначаются для наземного, подземного и полуподземного хранения нефтепродуктов под давлением до 0,7 МПа. Вместимость горизонтальных резервуаров достигает 200 м^3. Горизонтальные резервуары проектируют обычно диаметром до 3,25 м, иногда до 3,8 м. Длина корпуса горизонтальных резервуаров составляет 2...27 м. Горизонтальные резервуары полностью изготовляются на заводе, доставляются на площадку в готовом виде и устанавливаются на подготовленные основания.

2. Вертикальные цилиндрические резервуары низкого давления или без давления – наиболее массовый тип нефтяных резервуаров – применяются различных типов, в том числе:

а) резервуары низкого (0,02 МПа) давления для темных нефтепродуктов сооружаются с конической щитовой крышей и высотой

стенки до 12 м (вместимостью 100, 200, 300, 400, 700, 1000, 2000, 3000 и 5000 м^3) и сферической крышей, собираемой из щитов, и высотой стенки до 18 м (вместимостью 10, 20, 30 тыс.м^3);

б) резервуары без давления со стационарной крышей и понтоном применяются для хранения светлых нефтепродуктов. Вместимость таких резервуаров достигает 30 тыс.м^3. Стационарная крыша может быть конической или сферической. Высота стенки достигает 18 м;

в) резервуары без давления с плавающей крышей применяются для хранения сырой нефти и светлых продуктов. Вместимость таких резервуаров достигает 50 тыс.м^3 при высоте стенки 18 м. Чаще всего они сооружаются способом рулонирования. Несколько резервуаров вместимостью по 50 тыс.м^3 каждый построены полистовой сборкой стенки. Плавающие крыши могут иметь одно- или двухдечную конструкцию, кольцевые и радиальные ребра. В отличие от понтонов плавающие крыши оборудуются водосливным устройством, катучей лестницей и защитными щитками над уплотняющими затворами. Применяются затворы мягкого типа (в виде резинотканевой оболочки с пенополиуретановым заполнителем) и механические (с вертикальным листом, прижимаемым к стенке пружиной и поддерживаемым рычагами).

3. Резервуары повышенного давления применяются для долговременного хранения светлых нефтепродуктов под давлением до 0,07 МПа:

а) резервуар с плоским днищем, цилиндрической стенкой и сферической или сфероцилиндрической кровлей. Нижняя часть корпуса прикреплена к фундаменту анкерами. Опытный резервуар такого типа вместимостью 3000 м^3 с высотой стенки 10,4 м рассчитан на давление 0,025 МПа;

б) каплевидные резервуары, рассчитанные на давление до 0,07 МПа.

Резервуары вместимостью 2000 м^3 имеют диаметр по экватору 18,5 м, высоту 10,2 м.

4. Траншейные резервуары предназначены для долговременного хранения светлых нефтепродуктов. Сооружаются в виде металлической оболочки, устилающей в нижней части траншею в грунте, а в верхней части образующей стенки – в виде полуцилиндров. Имеют перекрытие из сборных железобетонных плит по металлическим фермам. Вместимость траншейных резервуаров 2 и 5 тыс.м^3. Длина достигает 50 м при ширине 18...20 м. Высота внутреннего пространства 8 м.

5. Изотермические резервуары предназначены для хранения сжиженных газов при низких температурах (до –270 °С) и внутреннем давлении в резервуарах около 0,01 МПа:

а) для хранения газов при сравнительно высоких температурах сооружают одностенчатые резервуары, у которых поверх металлической оболочки устраивается теплоизоляционное покрытие;

б) для хранения сжиженных газов при более низких температурах сооружают резервуары в виде двух оболочек, между которыми размещается теплоизоляция (типа «резервуар в резервуаре»). Изотермические резервуары сооружают на приподнятых над землей железобетонных фундаментах. Стенки внутренней оболочки прикрепляют анкерами к фундаменту.

Вместимость построенных вертикальных цилиндрических изотермических резервуаров достигает 44000 м^3.

6. Сферические резервуары предназначены для хранения сжиженных газов под давлением 1,8 МПа. В странах СНГ сооружают шаровые резервуары вместимостью 600 и 2000 м^3, имеющие диаметр соответственно 10,5 и 16,0 м. В шаровых резервуарах, покрытых теплоизоляцией, или в двухстенчатых резервуарах с теплоизоляцией между оболочками сжиженные газы хранят одновременно под давлением и при пониженной температуре. Оболочки резервуаров поддерживаются стойками, опирающимися на фундаменты.

7. Мокрые газгольдеры низкого давления предназначены для хранения различных газов при давлении, не превышающем 0,04 МПа. Наиболее распространены мокрые одно- или многозвенные газгольдеры с вертикальными направляющими. Объем таких газгольдеров 30...50 тыс.м^3. Нижняя часть газгольдера – водяной резервуар, из которого при заполнении газом поднимается колокол, а также одно или три телескопических кольца. Подвижные элементы (секции) соединяются между собой гидравлическими затворами (с высотой водяного столба 400 мм). Равномерность движения колокола и телескопов обеспечивается качением прикрепленных к ним роликов по вертикальным направляющим, закрепленным на стенке водяного резервуара. Внутри телескопов и резервуара имеются также вертикальные стойки (направляющие), по которым катятся нижние группы роликов подвижных секций. Система грузов, закрепляемых на телескопах и колоколе, обеспечивает внутреннее давление газа в пределах 0,04 МПа.

Имеются аналогичные конструкции газгольдеров с винтовыми направляющими, прикрепляемыми к наружным стенкам подвижных секций. При подъеме секций эти направляющие перемещаются по роликам, закрепляемым у верхних кромок водяного резервуара и телескопов.

8. Сухие газгольдеры низкого давления применяются в химических производствах, где не допускается контактирование хранимого продукта с водой. Внутри вертикального цилиндрического корпуса они имеют два типа устройств для изменения объема пространства, заполняемого газом:

а) в поршневых газгольдерах внутри корпуса перемещается конструкция в виде поршня (уравновешенного противовесами), по периметру поршня устраивается сальниковое уплотнение – затвор;

б) газгольдер с гибкой секцией из эластичного материала, которая по мере заполнения газгольдера газом поднимается внутри корпуса от днища до крыши и опускается при опорожнении его.

9. Газгольдеры высокого давления (постоянного объема) – толстостенные сферические или цилиндрические со сферическими днищами сосуды, предусматривающие хранение газов под давлением 0,07–3,0 МПа. Цилиндрические газгольдеры обычно полностью изготовляются на заводах и располагаются горизонтально или вертикально. Сферические газгольдеры подобны сферическим резервуарам и сооружаются теми же способами.

1.4.2. Вертикальные цилиндрические резервуары для хранения нефти и нефтепродуктов. Резервуары для хранения нефти и нефтепродуктов сооружают низкого давления или без давления. Они являются основными сооружениями нефтебаз.

Конструкция резервуара зависит от его вместимости, вида продукта, района строительства, инженерно-геологических условий, условий эксплуатации и других факторов.

Основными элементами резервуаров являются цилиндрические стенки, днища, конические, сферические и другие типы покрытий, понтоны, плавающие крыши, окрайки днищ, опорные кольца, кольца жесткости, шахтные или катучие лестницы, площадки, ограждения и элементы оборудования.

С целью снижения трудоемкости работ при монтаже цилиндрические стенки резервуаров, понтоны и плавающие крыши поставляют на строительную площадку в виде рулонированных полотнищ. Конструкции стационарных покрытий выполняют также из рулонированных полотнищ.

В строительной практике наибольшее распространение получили такие схемы рулонированных резервуаров (рис. 1.11):

– малой и средней вместимости с коническими крышами (I);

– большой вместимости со сферическими крышами (II);

– большой вместимости с плавающими крышами (III).

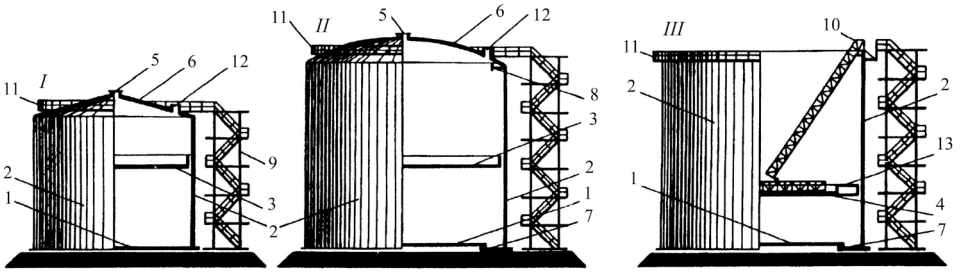


Рис. 1.11. Схемы резервуаров с рулонированными конструкциями: 1 - днище резервуара; 2 - стенка резервуара; 3 - днище понтона; 5 - центральный щит; 6 - крыша резервуара; 7 - окрайка днища; 8 - опорное кольцо; 9 - шахтная лестница; 10 - катучая лестница; 11 - площадки и ограждения; 12 - элементы оборудования; 13 - короба плавающей крыши

С целью уменьшения испарения продукта резервуары первых двух типов могут выполняться с понтоном.

В резервуарах вместимостью до 1000 м^3 толщина стенки принимается постоянной по высоте. В резервуарах вместимостью 2000 м^3 и более толщина стенки увеличивается по мере возрастания нагрузки от продукта.

В больших резервуарах с целью экономии металла и применения рулонированных полотнищ нижние пояса выполняют из стали с высокими прочностными характеристиками. При этом во избежание превышения в крайних волокнах предельных значений упругих деформаций для данной стали толщина листа не должна превышать 18 мм. В случае, когда переход на высокопрочные стали не дает желаемого результата (при большой высоте стенки и толщине нижних поясов 20...24 мм и более), решение этой задачи достигается за счет применения в нижней части резервуара двухслойной рулонированной стенки или однослойной стенки комбинированной сборки. В первом случае наружная оболочка обычно несколько приподнимается над уровнем днища. Зазор между наружной и внутренней оболочками принимается 100...120 мм и заполняется бетоном, желательно на расширяющемся цементе. В этом случае обеспечивается надежная передача усилий от внутренней оболочки к наружной. Во втором случае несколько нижних поясов стенки рекомендуется изготовлять из крупногабаритных листов 2×8 м вместо широко применяемых листов 1,5×6 м с толщиной стенки более 18 мм.

Их сборку выполняют обычным полистовым методом. Остальные (верхние) пояса выполняют из рулонированных полотнищ с толщиной стенки не более 18 мм.

На железнодорожных четырехосных платформах можно транспортировать рулоны массой до 60 т. При этом из одного рулона можно смонтировать стенку резервуара вместимостью до 5000 м^3. Стенки резервуаров большего объема монтируют из 2...10 рулонов. В настоящее время проверена на практике транспортировка рулонов массой до 120 т на специальных тяжеловесных платформах. Применение рулонов такой массы позволяет в два раза уменьшить их число на строительство одного резервуара и сократить протяженность сварных вертикальных монтажных швов.

В резервуарах вместимостью до 5000 м^3 обычно устраивают стационарные конические крыши, собираемые из плоских щитов заводского изготовления. Щиты имеют размеры, допускающие транспортировку их по

железной дороге. Конструкция щитов включает в себя элементы каркаса (профильный металл) и привариваемый к нему настил из листов толщиной 2,5...4,0 мм.

Резервуары с конической крышей со щитовым настилом проектируют с внутренней центральной стойкой и без нее. Во втором варианте уклон конической кровли рекомендуется выполнять не менее 12...15%. В этом случае щиты образуют несущую систему, распор от которой воспринимает опорное кольцо. При установке в резервуаре центральной стойки уклон крыши может быть меньшим. Щиты при этом работают как балки на двух опорах.

Применение новой системы пространственного покрытия для вертикальных цилиндрических резервуаров – складчато-конической, – которая совмещает несущие и ограждающие функции, позволяет при меньшей затрате материалов получить необходимую несущую способность. Это решение апробировано на опытно-промышленном резервуаре вместимостью 5000 м^3 с гофрированными элементами и складчато-коническим покрытием.

Монтаж щитов осуществляется одновременно с разворачиванием стенки резервуара. В процессе монтажа щиты сваривают между собой и приваривают вершиной к центральному щиту крыши, а периферийную часть – к верхней кромке стенки резервуара посредством упорного уголка.

В резервуарах большой вместимости стационарные крыши выполняют в виде сферического купола с радиальными и кольцевыми ребрами. Распор купола воспринимается опорным кольцом, устанавливаемым на стенке резервуара. Радиальные ребра – полуарки изготовляют из решетчатых криволинейных элементов и прокатного профиля; кольцевые – в основном из прокатного профиля. Верхним концом полуарки прикрепляют к центральному щиту в виде кольца жесткой конструкции. Секторы крыши состоят из монтажных блоков, собираемых на строительной площадке из элементов полной заводской готовности.

Разработаны и внедрены прогрессивные конструкции резервуаров, в которых используется рулонирование не только стенок, днищ, понтонов и плавающих крыш, но и крыш покрытий. Последние проектируют различной формы: от простой поверхности нулевой гауссовой кривизны до сложной складчатой.

Для резервуаров вместимостью до 500 м^3 рулонированная крыша выполняется в виде самонесущей конической оболочки толщиной 5...6 мм. Угол конусности принимается 15...30^O. При значительных снеговых нагрузках или вакууме оболочка подкрепляется шпангоутами. В резервуарах вместимостью 500…2000 м^3 устраиваются двухскатные крыши с коническими вставками, а вместимостью 2000...5000 м^3 – трех- и четырехскатные крыши с коническими вставками. В двух последних случаях

покрытия поддерживаются системой несущих и стропильных балок, расположенных под крышей. Применение рулонированных крыш позволяет в 3...4 раза уменьшить протяженность сварных соединений при монтаже и получить гладкую внутреннюю поверхность, благодаря чему удается повысить коррозионную стойкость резервуаров.

Применяются также другие решения, в частности в виде сетчатых куполов, гнутосварных крыш и т.п. Как правило, они являются той или иной разновидностью покрытий, описанных выше.

Вертикальные резервуары оснащены лестницами. Уклон лестничных маршей принимается не более 50°, высота марша – не более 4,5 м, ширина – не менее 0,65 м. Ширина рабочих площадок, устраиваемых у оборудования, должна быть не менее 0,7 м, а переходных площадок – не менее 0,65 м.

Для уменьшения потерь от испарения предусматриваются понтоны и плавающие крыши. Последние значительно уменьшают свободную поверхность продукта. В конструктивном плане разница между решениями резервуаров с понтоном и с плавающей крышей заключается в том, что в резервуарах с понтоном устраивается еще и стационарная крыша, препятствующая попаданию внутрь атмосферных осадков. В резервуарах с плавающей крышей для отвода атмосферных осадков устраивается дренажная система, а по периметру – защитные козырьки. Понтон выполняется из листовой центральной части и окаймляющих периферийных открытых или закрытых коробов, обеспечивающих его плавучесть. Днища центральной части понтонов поставляются в рулонах. Закрытые короба обычно изготовляют на заводах, реже – на строительной площадке. Открытые короба выполняют путем приварки на периферии (у стенок резервуара) к диску понтона вертикальных кольцевых ребер с радиальными перемычками.

Подъем и опускание понтона в зависимости от уровня наполнения резервуара осуществляется по направляющим стойкам трубчатого сечения, проходящим через специальные люки в понтоне. Помимо основного назначения стойки предотвращают вращение понтона вокруг вертикальной оси резервуара. При сливе продукта понтон устанавливают на опорные стойки. Высота стоек зависит от условий эксплуатации резервуара и обычно принимается 1,4...1,8 м.

Зазор между стенкой резервуара и понтоном перекрывается уплотняющим затвором мягкого или жесткого типа. В строительной практике величина зазора принимается 50...300 мм. Она зависит от ряда факторов: допусков при изготовлении стенки резервуара, неравномерных осадок основания, воздействия ветровых нагрузок и пр.

Затвор является одним из наиболее важных узлов понтона или плавающей крыши. Он должен максимально уменьшать свободную поверхность продукта между понтоном или плавающей крышей и стенкой

резервуара, допускать использование эффективных недефицитных материалов, освоенных отечественной промышленностью, быть простым в изготовлении и монтаже, надежным в эксплуатации.

Мягкие затворы состоят из резинотканевой оболочки, заполненной упругим пенополиуретановым или другим сердечником. Жесткие (рычажно-пружинные) затворы выполняются с гибким металлическим поясом, скользящим по стенке резервуара.

Мягкие затворы должны иметь хорошие амортизационные свойства, быть стойкими к воздействию агрессивных сред и обеспечивать высокую герметичность кольцевого пространства. Помимо пенополиуретана заполнителем может быть воздух, жидкость или какой-либо сыпучий материал. Одним из недостатков таких затворов является возможность различного рода повреждений оболочки.

Жесткие затворы проектируют по различным кинематическим схемам: с подвесным рычажным устройством и пружиной, с рычажным прижимным устройством и грузом или поплавком, а также с использованием уплотнений, прижимаемых к стенке своей массой, или материалов с магнитными свойствами.

В практике строительства встречаются также комбинированные затворы. Герметизация кольцевого пространства в них обеспечивается за счет совместной работы различного рода рычажно-прижимных устройств и эластичных амортизационных материалов.

В резервуарах с плавающей крышей последняя в конструктивном плане выполняется подобно понтону. В связи с отсутствием в таких резервуарах стационарной крыши во избежание потери устойчивости стенки в верхней ее части с наружной стороны устраивается кольцо жесткости.

Плавающие крыши выполняют одно- и двухслойными. Из однослойных наибольшее распространение получили плавающие крыши с понтоном по периметру, с радиальными ребрами жесткости и, наконец, с ребрами жесткости, понтоном по периметру и пригрузкой в центре (рис. 1.12).

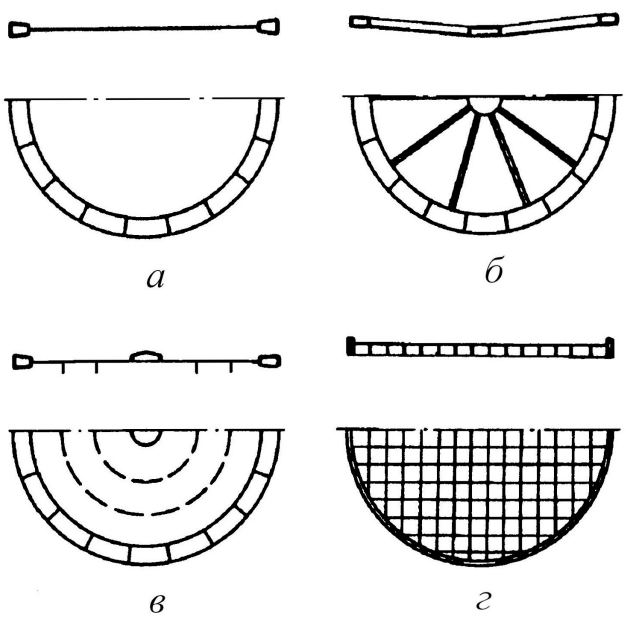


Рис. 1.12. Основные типы плавающих крыш: а - однослойная с понтоном по периметру; б - однослойная с радиальными ребрами жесткости; в - однослойная с кольцевыми ребрами жесткости, понтоном по периметру и пригрузкой в центре; г – двухслойная

Двухслойные плавающие крыши по сравнению с однослойными имеют повышенную жесткость. Кроме того, благодаря воздушной прослойке между верхним и нижним дисками они предохраняют продукт от чрезмерного нагрева летом и охлаждения зимой.

Как и понтоны, плавающие крыши оборудуют стойками и затворами. Над затворами в плавающих крышах устраивают козырьки, предназначенные для защиты кольцевого пространства от попадания осадков, пыли, загрязняющих продукт и оказывающих вредное влияние на элементы затвора.

Технико-экономические обоснования программы создания резервных запасов нефти показывают целесообразность строительства крупных резервуаров диаметром до 100 м и более. При проектировании плавающих крыш для таких резервуаров необходимо особо тщательно учитывать воздействие на них различных нагрузок. Последние могут оказать влияние на конструкцию, узлы, оборудование и устройства. В первую очередь это касается таких нагрузок, как масса плавающей крыши, давление нефтепродукта от нагрева крыши в солнечные летние дни, ветровая нагрузка, нагрузка от аварийного выброса нефтепродукта на крышу, от аварийного

скопления на ней дождевой воды, сейсмических воздействий, приводящих к колебаниям продукта, и др. Так, бывали случаи, когда даже ветровая нагрузка приводила к деформации крыши. Отметим, что в зависимости от положения плавающей крыши в резервуаре и отношения диаметра резервуара к высоте верхней кромки на подветренной части крыши отсос воздуха может превышать массу конструкции крыши на единицу площади и вызывать ее колебания.

При учете всех нагрузок и их комбинаций плавающая крыша будет противодействовать колебаниям от отсоса воздуха и деформациям в результате давления продукта в жаркие летние дни. Проектируя достаточно большое число герметичных секций, можно обеспечить плавучесть крыши при выбросе нефтепродуктов и аварийной нагрузке от скопившейся дождевой воды.

1.4.3. Другие типы резервуаров. Из других типов резервуаров ниже рассмотрим каплевидные, с подвесными стенками, мультицилиндрические и подземные.

Каплевидные резервуары предназначены для хранения нефтепродуктов под избыточным давлением. В странах СНГ построено несколько таких резервуаров вместимостью до 2000 $м^3$ с избыточным давлением 0,03 МПа и вакуумом до 0,003 МПа.

На рис. 1.13 изображена конструкция резервуара со стенками торовой формы.

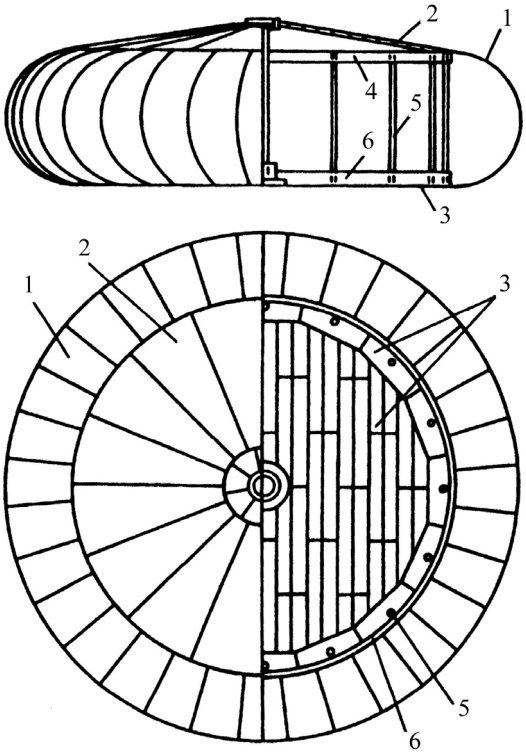


Рис. 1.13. Каплевидный резервуар со стенками торовой формы: 1 - стенка; 2 - кровля; 3 - днище; 4 - верхнее кольцо; 5 - колонна; 6 - нижнее опорное кольцо

Верхние зоны стенок плавно сопряжены с кровлей, а нижние – с днищем. В центре кровля опирается на стойку, а по контуру – на кольцо, поддерживаемое колоннами. Последние устанавливаются на опорное кольцо, расположенное на днище резервуара. В такой конструкции, как и в предыдущей, основные несущие элементы резервуара представляют собой оболочку равного сопротивления. Система верхнего и нижнего колец и стоек образует противовес, предотвращающий подъем и прогиб днища при избыточном внутреннем давлении.

В предлагаемом решении при большой вместимости резервуара могут устраиваться экваториальные опоры. Лепестки резервуара выполняют двойной или одинарной кривизны. Конструкцию крыши целесообразно устраивать сферической или конической щитовой.

К недостаткам такого резервуара можно отнести сложность обеспечения контроля за состоянием конструкций, находящихся внутри резервуара, а также уменьшение его полезного объема.

С целью устранения указанных недостатков применяют конструктивный вариант, при котором для обеспечения жесткости оболочки с наружной стороны резервуара крепят нижнее и верхнее кольца жесткости. Нижнее кольцо жесткости поддерживается колоннами, опирающимися на фундамент, и на него под колоннами устанавливают консоли, через верхние концы которых перекинуты оттяжки, закрепленные одним концом на верхнем кольце жесткости, другим – на колонне у фундамента.

С целью снижения стоимости, металлоемкости и трудоемкости монтажа, а также повышения надежности каплевидных резервуаров при неравномерных осадках основания и сейсмических воздействиях предложена конструкция резервуаров (рис. 1.14), в которых стенка выполняется из отдельных элементов, плавно сопрягающихся с днищем [25].

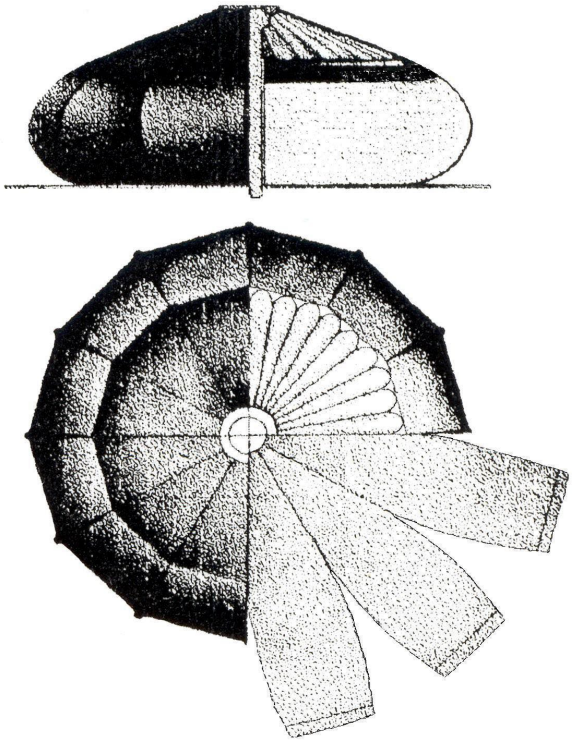


Рис. 1.14. Каплевидный резервуар с подвесными стенками

Верхние торцы стенки подвешивают к опорному контуру, поддерживаемому в проектном положении радиальными вантами, нисходящими с центральной колонны, к которым прикреплена кровля.

В плане резервуар имеет вид многоугольника, каждая сторона которого выполняется из рулонированного совместно с днищем полотнища в виде

цилиндрической оболочки, провисающей по кривой нити конечной жесткости. Для исключения изгибных и уменьшения кольцевых напряжений полотнища стенки соединяют между собой посредством компенсаторов. Сохраняя постоянным в цилиндрической оболочке отношение стрелы провисания к пролету, можно при одной и той же толщине (5...6 мм) оболочки проектировать резервуары любой вместимости.

Для повышения надежности при неравномерных осадках основания днище резервуара прикреплено к трубчатой обойме, свободно охватывающей центральную колонну, возвышающуюся над уровнем жидких продуктов.

Резервуары с подвесными стенками, как и каплевидные, позволяют существенно снизить металло- и трудоемкость при изготовлении и монтаже конструкций.

В одном из конструктивных решений резервуар имеет прямоугольную форму в плане. Основной несущий элемент – стенка-днище – изготовляется из рулонированных полотнищ постоянной толщины. Свободные концы полотнищ плавно поднимают и крепят к бортовому элементу, состоящему из двух прокатных швеллеров, установленных на консоли колонн. Во избежание изгиба бортового элемента угол наклона криволинейной части днища в месте примыкания к бортовому элементу принимается равным нулю. Покрытие таких резервуаров выполняют из ферм, по которым укладывают кровлю из тонкостенных стальных полотнищ, края которых прикрепляют к верхней кромке стенки-днища.

Конструкция мультицилиндрических резервуаров позволяет использовать метод рулонирования при проектировании резервуаров любой вместимости. Как известно, применение метода рулонирования в цилиндрических резервуарах обычно ограничивается толщиной стального листа до 18 мм. Однако доказана экономическая целесообразность строительства мультицилиндрических резервуаров большой (до 200 тыс.м^3 и более) вместимости с плавающей крышей, которая допускает применение метода рулонирования. В этой конструкции резервуара (рис. 1.15) стенка выполняется из отдельных цилиндрических панелей, очерченных радиусом 15...20 м.

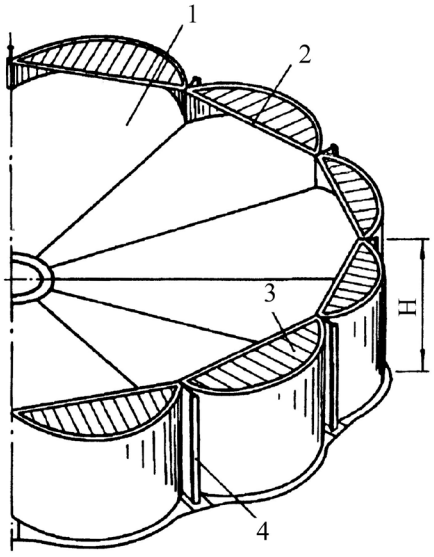


Рис. 1.15. Схема мультицилиндрического резервуара: 1 - плавающая крыша; 2 - балки обвязки; 3 - щиты покрытия; 4 - контрфорс

При этом толщина оболочки не превышает допустимую для рулонирования. Смежные оболочки стыкуются через контрфорс, который передает внутреннее давление на фундамент (внизу) и кольцевую обвязку (вверху).

Многосекционные резервуары предназначаются для одновременного хранения нескольких видов нефтепродуктов. С целью увеличения единичного объема резервуара, уменьшения его металлоемкости и использования метода рулонирования предложена конструкция многосекционного резервуара, в котором стенки секций выполнены концентрично расположенными одна в другой. Стенки секций имеют переменную высоту и уменьшаются от центра резервуара к его наружной поверхности.

Подземные траншейные резервуары предназначены для длительного хранения нефтепродуктов. Такие резервуары выполняют прямоугольными в плане. Днище и стенки котлована на песчано-битумном основании устилают рулонированными полотнищами толщиной 5…6 мм. Резервуар перекрывают стропильными фермами, на которые укладывают стальные щиты, которые покрывают слоем грунта толщиной 200…300 мм (рис. 1.16).

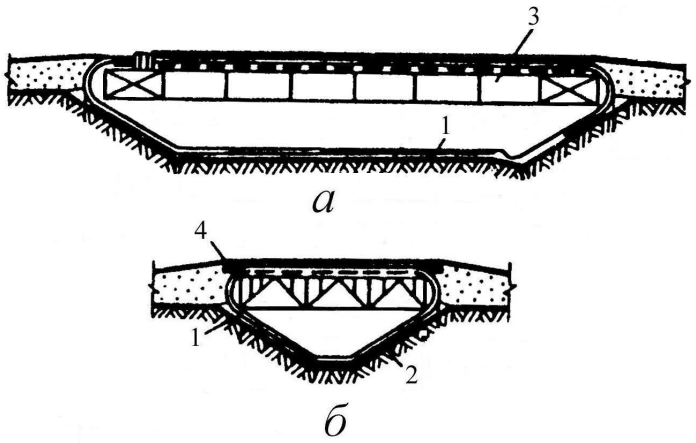


Рис. 1.16. Схема подземного траншейного резервуара

Площадку для строительства подземного траншейного резервуара необходимо выбирать таким образом, чтобы его днище располагалось выше самого высокого уровня подземных вод.

Рассмотрим теперь еще один тип сооружений, основными элементами которых являются тонкостенные с пренебрежимо малой изгибной жесткостью конструкции.

1.5. Пневматические строительные конструкции

В послевоенные годы в мировой строительной практике появилось конструктивное направление, связанное с новым способом использования в строительстве легких предварительно напряженных мембран. Речь идет о пневматических строительных конструкциях. Это мягкие оболочки из газонепроницаемых синтетических материалов, напрягаемые избыточным или отрицательным давлением воздуха для придания им проектной формы и несущей способности.

Несмотря на то что такие конструкции начали развиваться за рубежом лишь несколько десятков лет назад, в настоящее время многие фирмы в разных странах организовали серийный выпуск их и уже построено немало интересных зданий и сооружений, выполненных с применением таких конструкций.

На нынешнем уровне развития пневматические конструкции используются в основном для легких, временных и передвижных зданий, выполняя в них главным образом функции ограждения и защиты от атмосферных воздействий. Но перспективы применения их шире.

Преимущественная работа на растяжение позволяет наиболее полно использовать в подобных конструкциях прочностные свойства новых эффективных материалов, в том числе синтетических тканей, защищенных поливинилхлоридом или каучуком, и пластмассовых армированных и неармированных пленок. Пневматические конструкции отличаются легкостью и предельной компактностью в сложенном виде. Их можно легко перевозить любым видом транспорта в практически любых условиях. В кратчайшие сроки, измеряемые часами, они возводятся без каких-либо вспомогательных тяжелых приспособлений, образуя покрытия над значительными свободными от опор площадями. Прочность материалов (тканей, пленок) пневматических конструкций обычно мало зависит от пролета. Эти конструкции обладают высокой сейсмостойкостью, их можно возводить даже на грунтах невысокого качества [21].

В строительной практике применение пневматических конструкций представляет особый интерес для временного сборно-разборного строительства, особенно в отдаленных и малоосвоенных районах. В промышленном строительстве такие конструкции можно с успехом применять в качестве временных складских и производственных помещений, гаражей, укрытий строящихся объектов, в качестве временного жилья, в виде опор при монтаже, как опалубку железобетонных оболочек и труб и т.д. В сельском хозяйстве пневматические конструкции найдут применение для инвентарных зерноскладов, складов удобрений, гаражей сельскохозяйственных машин, теплиц и других временных сооружений. В строительстве общественных зданий эти конструкции могут применяться как временные покрытия зрелищных, спортивных и выставочных предприятий.

Наибольшие перспективы применения имеют простейшие в изготовлении и эксплуатации воздухоопорные конструкции, не требующие особо прочных воздухонепроницаемых тканей и воздуходувных установок повышенного давления. Кроме того, они обладают более высокой несущей способностью и могут перекрывать гораздо большие пролеты. Этими качествами с избытком компенсируются некоторые неудобства эксплуатации, связанные с герметизацией помещений. Пневмокаркасные конструкции наиболее перспективны для сооружений небольшого размера – мастерских, палаток, небольших радиомачт, плавательных средств и т.д.

1.5.1. Основные понятия. К пневматическим относятся такие конструкции, проектная форма которых и стабилизация под нагрузками реализуются благодаря разнице давлений. Эта разница обеспечивается с помощью газа, жидкости, вспененных материалов или сыпучих тел. В данном случае мы имеем дело с растянуто-напряженными конструктивными формами подобно мембранам или сеткам. В качестве прототипа может служить широко известный воздушный шар: тонкая оболочка

стабилизируется давлением газа и поэтому становится способной воспринимать не только это давление, но и другие нагрузки.

Растянуто-напряженные пневматические конструкции легко могут быть изготовлены из гибких высокопрочных материалов типа пленок или тканей. Такие конструкции благодаря их малому весу имеют значительные преимущества перед конструкциями, которые под пневматической нагрузкой испытывают сжимающие или изгибающие напряжения.

Избыточное давление вызывает в пневматических конструкциях предварительное напряжение даже тогда, когда они не находятся под воздействием собственного веса и внешних нагрузок (как это бывает в случае герметических емкостей, находящихся под давлением). В открытых емкостях оболочка может напрягаться и ее форма стабилизироваться благодаря весу заполняющей ее жидкости. При отсутствии внешней нагрузки и нагрузки от собственного веса в такой оболочке нет напряжений, поэтому система не является предварительно напряженной.

Типичный пример растянуто-напряженных пневматических конструкций – оболочка в форме резервуара. Такие оболочки могут выполняться различными способами и, наполненные жидкостью или газом, могут приобретать форму благодаря силам поверхностного натяжения или пленкообразующим свойствам (мыльные пузыри, пластмассы).

Очень упругие пленки, например резиновые, могут раздуваться внутренним давлением и после его снятия возвращаться в первоначальное положение.

При применении высокопластичных материалов пневматическая нагрузка может вызвать остаточные деформации, как это бывает, например, у большинства пластмассовых пленок.

Наиболее интересны для использования малодеформируемые материалы типа прорезиненных тяжелых тканей, проволочных сеток, тонколистового металла, при применении которых форма конструкции может быть заранее задана.

Деформации пневматической оболочки под нагрузкой сильно зависят от упругих свойств применяемого материала. Так, например, деформации резинового баллона при прочих равных условиях больше, чем баллона, выполненного из стеклоткани.

Жесткость конструкции растет при увеличении модуля упругости. В то время как прочие растянутые конструкции используются преимущественно для решения строительных задач, пневматические конструкции пригодны для самых различных областей техники. Формы пневматических конструкций могут быть приспособлены для самых различных напряженных состояний. Поэтому в этой книге рассмотрение конструктивных форм и напряженного состояния предшествует определению области применения.

Конструкции типа пневматических широко распространены в растительном и, в особенности, животном мире, как один из основных конструктивных принципов природы. Мы видим их, изучая строение плодов, пузырьков воздуха или кровеносных сосудов, а также кожи живого существа, напрягаемой мускульной тканью и давлением крови, в соединении с работой скелета, способного воспринимать сжимающие и изгибающие усилия. Тело животного или человека обладает существенными признаками легкой конструкции: благодаря предварительному напряжению растяжения в легко напряженных кожных и мускульных тканях волокнами воспринимаются распределенные нагрузки, в то время как усилия сжатия и изгиба максимально концентрируются. Нет такой формы пневматической конструкции, которая не напоминала бы форм живых организмов. Пневматические конструкции в наибольшей степени отвечают современным представлениям, в которых в противовес господствовавшим ранее в технике абстрактным математическим концепциям отдается предпочтение конструктивным принципам органического мира.

Корабельный парус, пожалуй, самая древняя пневматическая конструкция, известная человеку. Примечательно, что конструкция паруса трудно поддается теоретическому исследованию. Разница давлений воздуха, обусловленная аэродинамическими причинами, напрягает первоначально обвисшую мембрану и придает ей такую форму, которая в конструктивном и аэродинамическом отношении должна отвечать различным напряженным состояниям, возникающим при изменении направления ветрового потока. В течение веков опытным путем форма паруса была доведена до совершенства. На основании новейших исследований напряженных мембран в этой области также открываются новые перспективы. Эпоха парусных судов уже прошла, а насколько конструктивная форма в виде паруса сохранит свое значение в дальнейшем, покажет будущее. Возможно, она получит другое применение, например в ветровых силовых установках и т.д. Наряду с парусом давно известны водяные рукава и разнообразные емкости для жидкости. Имеет свою предысторию и герметичный объем. Примером первого эмпирического проникновения в сущность вопроса служит использование Монгольфьером в 1783 г. того факта, что разница в объемном весе холодного и теплого воздуха способна стабилизировать форму оболочки баллона.

Детский мяч, автомобильный баллон, дирижабль, парашют, надувная лодка, надувная подушка, надувная и набивная мебель, емкости высокого давления, емкости для воды – все это, ставшее продукцией крупной индустрии, иллюстрирует принцип предварительного напряжения мягких оболочек.

Нет другой такой области конструкций, где переплелось бы так много технических направлений, и уже сейчас кажется почти невозможным охватить единым взглядом историю развития пневматических конструкций.

Например, при конструировании автомобильных баллонов или надувных лодок часто возникают задачи, сходные с возникающими при проектировании надувных строительных конструкций. К сожалению, над решением этих задач работают инженеры различных специальностей, почти не имеющие точек соприкосновения. В области строительства, по-видимому, первым, кто выдвинул идею применения надувных сферических оболочек для большепролетных сооружений, был английский инженер Ф.В. Ланчестер. В его патенте 1917 г. содержатся основные конструктивные элементы пневматических зданий. При жизни Ланчестера ни один из его проектов не был осуществлен. Некоторые попытки в этой области были предприняты Г. Стивенсом. Проекты Ланчестера были реализованы в послевоенный период В. Бэрдом (США), который построил многочисленные надувные купола и которому принадлежат большие заслуги в развитии пневматических конструкций. В настоящее время надувные купола различных видов производятся многими фирмами [21].

Пневматические конструкции как вспомогательные строительные средства были известны уже в середине 30-х годов XX ст.. Резиновый баллон использовался как опалубка, на которую набрызгом наносился бетон для получения строительных элементов в форме оболочки. Здесь необходимо отметить, в особенности, работы У. Неффа и Б. Фуллера (оба США), которые использовали пневматические конструкции для монтажа стержневых сборных куполов. Несомненно, что эти конструкции могут получить широкое применение в освоении космического пространства.

1.5.2. О законах формообразования пневматически напряженных оболочек. При изучении сущности пневматических конструкций полезно иметь представление о законах образования формы и изменения мембранного напряжения в мыльных пузырях. Мембранное напряжение в них равно в каждой точке поверхности и по любому направлению, если пренебречь ничтожной разницей напряжений, вызываемой собственным весом пленки. Так, например, вертикальная мыльная пленка постоянной толщины должна иметь в верхней части несколько большее мембранное напряжение, чем внизу. Пики напряжений не могут возникнуть, так как они мгновенно выравниваются благодаря текучести пленки. Если объединить, например, два мыльных пузыря с различными мембранными напряжениями в один двойной пузырь, то напряжения мгновенно выравниваются. Мыльные пузыри всегда принимают форму с минимальной поверхностью .

Несмотря на ограничивающие условия равенства мембранных напряжений в каждой точке поверхности, имеется бесчисленное множество форм мыльных пузырей. Многообразие форм значительно увеличится, если допустить разницу напряжений по поверхности пневматически напряженной оболочки (рис. 1.17).

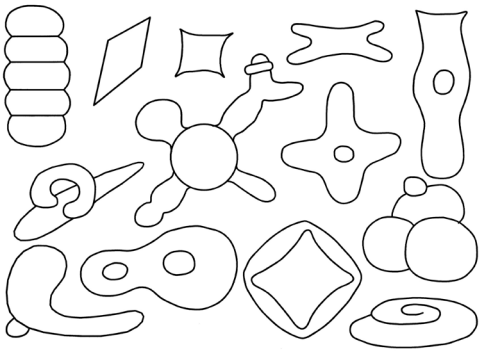


Рис. 1.17. Пневматические оболочки с разницей напряжений по поверхности

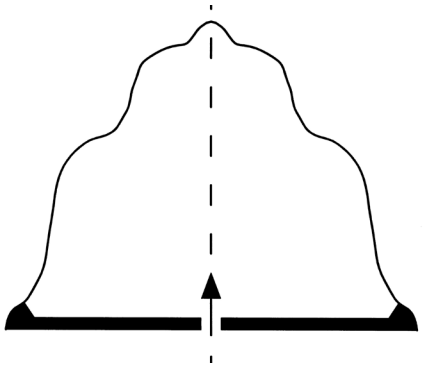


Рис. 1.18. Пневматическая оболочка с поверхностью двойной кривизны

В этом случае число теоретически возможных форм настолько велико, что только часть из них может быть образована пневматически.

Типичный пример пневматической формы – поверхность двойной кривизны. Седлообразные поверхности, как и поверхности одинарной кривизны, применяются реже, плоские – лишь как исключение.

Очевидно, что мембрана, имеющая форму, показанную на рис. 1.18, после приложения внутреннего давления тотчас же выпучится наружу и не сможет существовать как пневматическая.

Цилиндрическая оболочка с плоским торцом из гибкого, но малодеформативного материала сильно выпучивается при приложении внутреннего давления (рис. 1.19), причем образуется венец из складок. Цилиндр завершается, таким образом, поверхностью вращения, у которой в области складок отсутствуют кольцевые напряжения.

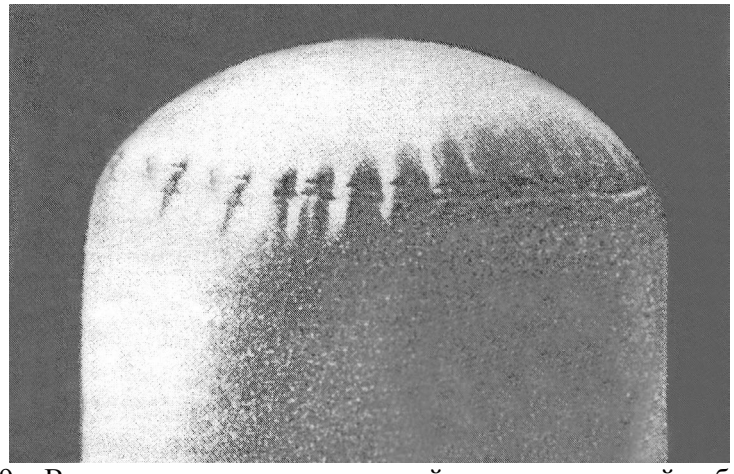


Рис. 1.19. Выпучивание пневматической цилиндрической оболочки с

плоским торцом при приложении внутреннего давления

Пневматическая оболочка может быть выполнена в виде сплющенного баллона, но отклонение от сферической поверхности не может быть значительным. В оболочке вращения (рис. 1.20) мембрана не имеет кольцевых напряжений, если соответствующий радиус кривизны составляет половину расстояния *PN*.

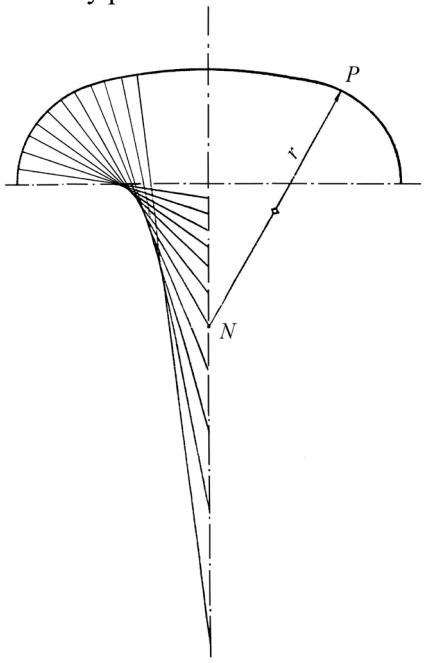


Рис. 1.20. Пневматическая оболочка в виде оболочки вращения

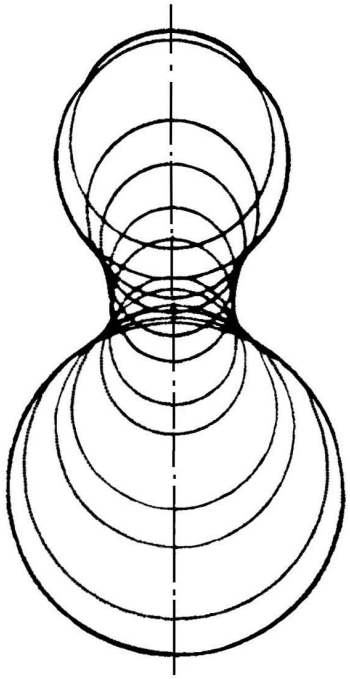


Рис. 1.21. Пневматическая оболочка в виде сфер с переменным диаметром

Если радиус кривизны в широтном направлении меньше, то должны образовываться складки. Если изготовить такое тело вращения, то уже при незначительной упругости или деформативности материала отчетливо проявляется стремление оболочки к сферической форме, так как радиальные напряжения в вершине купола теоретически должны быть бесконечно большими.

Если в поверхность может быть вписано тело вращения, то такую форму можно использовать как пневматическую оболочку. Сферы с переменным диаметром могут располагаться вдоль некоторой оси (рис. 1.21).

Огибающая форма всегда пневматически возможна. С помощью вписанных сфер исследуются различные формы в отношении их пригодности

для использования в пневматических оболочках, причем центры сфер могут располагаться на кривых линиях, если только радиус кривизны этих линий не слишком мал по сравнению с диаметром сфер. Подобным же образом могут конструироваться любые разновидности пневматических оболочек.

Идея строительства надувных куполов, принадлежащая Ланчестеру, высказана в начале XX ст., и, по всей вероятности, ей предшествовали еще более ранние, но неизвестные проекты в этой области. Эта идея для строителей старой школы была буквально немыслимой, так как исходила из совершенно непривычных для них концепций. Несущий канат вызывал недоверие своей гибкостью. Только после почти столетних исследований он постепенно был внедрен в строительство. Мысль о применении воздуха в качестве несущего элемента и в настоящее время многими рассматривается как утопия.

Пневматическая конструкция испытывает растягивающие напряжения и поэтому находится в близком родстве со всеми висячими конструкциями, но обладает в то же время и существенными отличиями. Все строительные конструкции можно разбить на три большие группы – балочно-стоечные, арочные и висячие, – но все эти конструкции значительно тяжелее пневматических.

Выражение «здания, поддерживаемые воздухом» для большинства пневматических конструкций вполне оправдано. Для пояснения можно представить оболочку в виде плоского купола, находящуюся под внутренним избыточным давлением. При отсутствии ветровых и снеговых нагрузок внутреннее давление создает в мембране растягивающее напряжение (рис. 1.22).

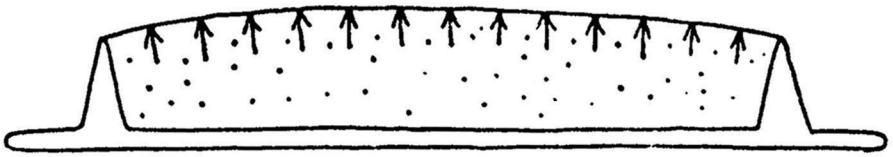


Рис. 1.22. Пневматическая оболочка под внутренним избыточным давлением

При приложении равномерно распределенной снеговой нагрузки мембранные напряжения снижаются и становятся теоретически равными нулю, если внешняя нагрузка равняется внутреннему давлению и если не учитывать, что снеговая нагрузка действует вертикально, а внутреннее избыточное давление – по нормали к ограничивающей поверхности. В данном случае конструкция при положительной нагрузке не напряжена. Нагрузка воспринимается воздушным давлением.

Снеговая нагрузка на плоских поверхностях распределена практически равномерно, ветровое же давление переменно по величине.

В случае неравномерных динамических нагрузок мембранных напряжений в пневматических оболочках избежать нельзя (рис. 1.23), и эту закономерность следует учитывать при конструировании и назначении размеров сооружений.

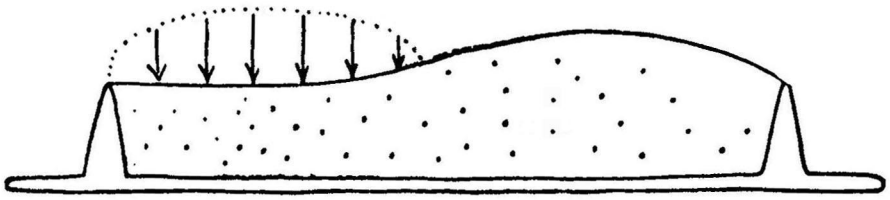


Рис. 1.23. Пневматическая оболочка под действием неравномерных динамических нагрузок

Если идею пневматических конструкций с растянуто-напряженной оболочкой, внутренний объем которой находится под избыточным давлением, распространить на оболочки, которые приспособлены к восприятию отрицательного давления или воздушного давления с внешней стороны, то можно проиллюстрировать принцип действия пневматической конструкции на примере плоской ненапряженной мембраны. Если мембрана имеет, например, собственную массу 1 кг/м^2, то при отсутствии внешней нагрузки достаточно внутреннего давления 10 Н/м^2=1 мм вод.ст.=0,0001 атм, чтобы поддерживать мембрану в равновесии.

При равномерно распределенной снеговой нагрузке, равной 75 кгс/м^2, внутреннее давление должно равняться 76 мм вод.ст. для поддержания мембраны в ненапряженном состоянии. Таким образом, регулируя внутреннее давление в зависимости от суммарной нагрузки от собственного веса и снеговой или ветровой нагрузки, можно свести назначение мембраны к роли разделяющего слоя сколь угодно малой толщины.

Другое принципиальное отличие пневматических конструкций состоит в том, что максимальный теоретический пролет воздухоопорной оболочки не ограничивается требованиями прочности, деформативности, объемным весом применяемого материала, ни какими-либо другими условиями.

Размеры конструкции всегда ограничены некоторой предельной величиной, выше которой разрушение наступает под действием собственного веса. Для стального каната разрывная длина (предел прочности, деленный на объемный вес) равна немногим более 36 км, предельный пролет оболочки самой совершенной формы и изготовленной из наилучшего материала –

10 км. А пневматическая оболочка воплощает в себе мечту Б. Фуллера об «универсальном пространстве» любого протяжения, например, в виде замкнутой оболочки вокруг Земли. Если когда-нибудь придут к выводу, что замкнутая оболочка вокруг земной атмосферы полезна, то для создания нужного климата такая оболочка будет сконструирована с помощью естественных или искусственных спутников Земли.

Уже Ланчестер расценивал пневматические сооружения как конструктивные формы высокой надежности. Главным преимуществом пневматически напряженной оболочки является малый вес, так как даже при пролетах свыше 100 м вес 1 м^2 оболочки едва превышает 3 кг.

Если агрегаты, подающие воздух, выйдут из строя, то пройдет много времени, пока оболочка больших размеров потеряет свою форму, так как содержащийся в оболочке воздух выходит через неплотности очень медленно. Даже большие дыры и щели не представляют опасности. Хотя избыточное давление внутри оболочки понижается довольно быстро, собственный вес оболочки сам по себе вызывает небольшое избыточное давление, поэтому при больших размерах оболочки может пройти несколько дней, прежде чем воздух сможет выйти из нее сам по себе. Если возникла разница внутреннего и наружного давления в результате скоростного напора ветра или разности температур, то процесс деформирования оболочки можно замедлить или совсем приостановить. Если же применить достаточно мощные установки для нагнетания воздуха, то можно создать здания с постоянно открытыми проемами.

Сферические оболочки могут быть рассчитаны и сконструированы с большой точностью. Впрочем, если исходить из одинаковых опорных контуров и сравнить пневматически напряженную оболочку, например, с железобетонной оболочкой той же прочности, то разница в последствиях разрушения, обусловливаемая собственным весом оболочек, очевидна.

Одной из проблем обоснования применимости пневматических конструкций является допустимость пребывания человека в условиях избыточного давления. Максимальная разница воздушного давления в 80 мм вод.ст., обычная для пневматических сооружений, соответствует разнице отметок земной поверхности около 55 м. При обычном избыточном давлении 20 мм вод.ст. эта разница равна всего 15 м. Даже для весьма чувствительного человека этот небольшой перепад давления неощутим. Такая разница давлений часто возникает во многих зданиях при ветре, что никем не ощущается. Более значительная разница давлений может ощущаться на короткое время при быстром проходе через воздушный шлюз или вращающиеся двери пневматического здания. Даже при самых жестких требованиях нельзя отметить никакой опасности для человека при продолжительном пребывании в пневматическом здании.

В пневматических конструкциях всегда имеются полости, находящиеся под избыточным давлением относительно наружной среды. Должны ли входить в эту полость люди или речь идет о полностью герметичных баллонах, для самой конструкции не имеет существенного значения; тем не менее различают два вида пневматических конструкций. В тех случаях, когда эксплуатируемый объем находится под избыточным давлением, есть необходимость в шлюзе.

Здания без избыточного давления во внутреннем пространстве состоят в большинстве случаев из замкнутых «подушек» (рис. 1.24), которые приобретают жесткость за счет внутреннего давления и ограждают эксплуатируемый объем в форме арок, плит или сводов.

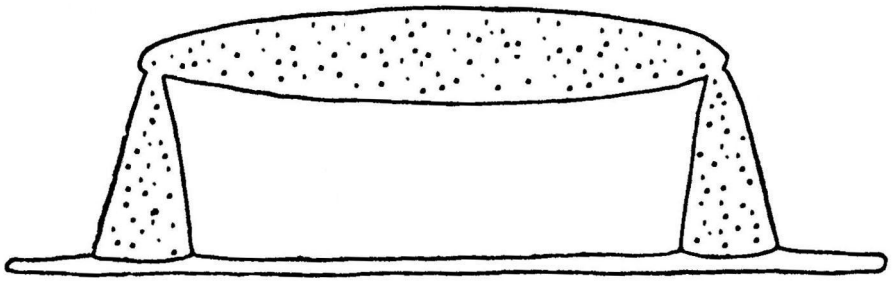


Рис. 1.24. Пневматическая оболочка без внутреннего избыточного давления

Они требуют в общем случае при прочих равных условиях значительно большего расхода материала, более высокого давления и в большинстве случаев значительно дороже, чем оболочки с внутренним избыточным давлением. Кроме этого, существует множество комбинаций этих систем друг с другом и с другими видами конструкций.

1.5.3. Основные формы пневматически напряженных оболочек. Пневматически напряженная сферическая оболочка в виде мяча, баллона, газгольдера и спутника является широко известной минимальной поверхностью. В 1844 г. в Париже французский инженер Мари Монж создал из листовой меди толщиной 0,1 мм воздушный шар с наполнением водородом. Этот шар может рассматриваться как предшественник первого американского надувного баллонного спутника «Эхо-1», который после выброса сложенной оболочки баллона из ракетоносителя приобретает сферическую форму благодаря расширению остаточного воздуха, заключенного в оболочке баллона.

Спутник снабжен устройством, содержащим смесь из бензойной кислоты (4,5 кг) и 9 кг антрахинона, которая, постепенно испаряясь в вакууме, как непрерывный источник газа поддерживает оболочку спутника в

надутом состоянии. Оболочка спутника состоит из прозрачной блестящей полиэтилентерефталатной пленки толщиной 0,127 мм, которая для увеличения отражательной способности была подвергнута алюминизации способом напыления в вакууме. Диаметр оболочки равняется 30 м и площадь поверхности 2800 м^2. Оболочка состоит из 82 частей. Плотность пленки составляла 1,4 кг/мм^2, а температуростойкость была задана от –60 до +30 °С. Прочность на разрыв составляла вдоль полотнища пленки 180–250 Н/мм^2 и поперек 140–200 Н/мм^2, в то время как удлинение при разрыве колебалось в обоих случаях от 50 до 130%.

Оболочка спутника была уложена в форме сферы диаметром 107 см и заключена в контейнер из магниевого сплава, который помещался в головке трехступенчатой ракеты «Дельта-1» и выбрасывался спустя 2 мин после отделения третьей ступени ракеты.

Только в пространстве, лишенном силы тяжести, свободно парящий баллон может сохранять свою сферическую форму. Влияние собственного веса на форму зависит от внутреннего давления и особенно велико в слабо надутых баллонах. В еще большей степени это относится к баллонам, несущим полезную нагрузку. Такие оболочки при падении внутреннего давления отклоняются от сферической формы и приобретают форму капли, которая широко известна как традиционная форма воздушного шара. Для того чтобы нагруженную гондолу соединить с оболочкой воздушного шара по максимально большой площади во избежание концентрации напряжений, оболочку баллона обтягивают сеткой. Особенно отчетливо выражается каплеобразная форма воздушного шара, когда он наполнен горячим воздухом; тогда внутреннее давление в нем в самой нижней точке равно нулю и возрастает к его вершине. Баллоны для горячего воздуха имеют типичную каплевидную форму, аналогичную формам емкостей для жидкостей. Обычно стремятся избежать чрезмерного напряжения оболочки баллона внутренним давлением: это дает незначительный эффект и приводит к большим мембранным напряжениям, так что в большинстве случаев мирятся с незначительной жесткостью конструкции.

Сфера, плавающая в воде, подвергается тем меньшему искажению, чем более она заполнена водой, что может быть полезно при создании резервуаров для питьевой воды. Сферы, устанавливаемые на весьма малой опорной плоскости, часто раскрепляются тросами. Положение свободно парящего баллона можно достаточно надежно зафиксировать тремя тросами, а баллоны для защиты радиотехнической аппаратуры крепятся к мачте с помощью внутренних связей или внутренних полотнищ. В резервуарах высокого давления для газа или жидких материалов (рис. 1.25) баллоны крепятся к морскому дну и заполняются с поверхности воды.

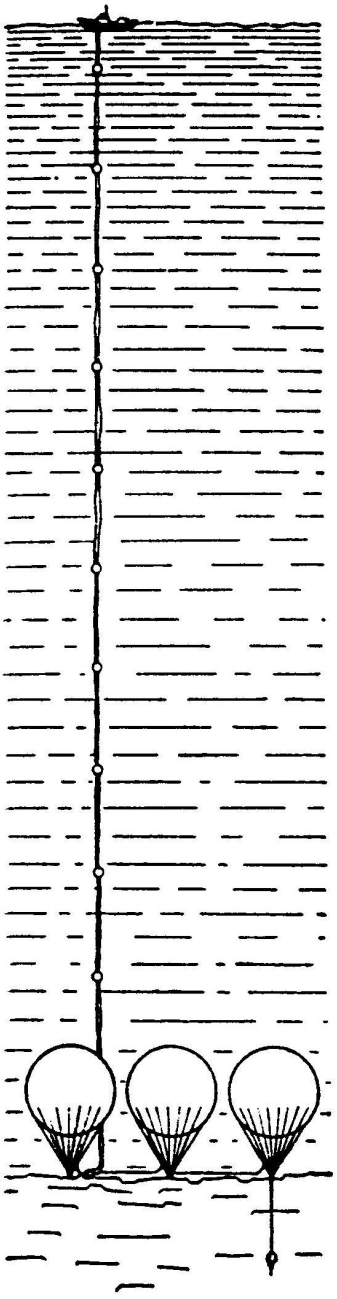


Рис. 1.25. Резервуары высокого давления для газа или жидких материалов

Стальные газгольдеры высокого давления при отсутствии внутреннего избыточного давления представляют собой жесткие пространственные конструкции-оболочки; при наличии же внутреннего давления они являются пневматически напряженными сферическими оболочками, которые в некоторых случаях подвергаются давлению до 200 атм. Возведение таких газгольдеров заключается в сварке сферической оболочки из отдельных стальных листов. В резервуарах следует по возможности избегать сосредоточенных нагрузок. Наиболее желательным является мягкое опирание газгольдера на водную среду. Резервуары высокого давления в настоящее время широко распространены в промышленности (рис. 1.26).

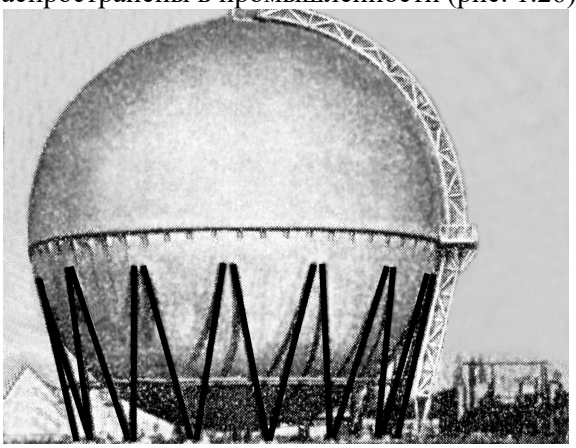


Рис. 1.26. Некоторые способы применения резервуаров высокого давления

Шар, прикрепленный к основанию в одной точке, сильно деформируется ветром. Эластичность материала мембраны оказывает сильное влияние на напряженное состояние, а также на деформацию сферической оболочки. Резиновый мяч ведет себя, как пружина и упруго деформируется под нагрузкой без значительного изменения внутреннего давления и напряжений. Малоэластичная оболочка сохраняет под нагрузкой свою форму, но в отличие от эластичной мембраны проявляет наклонность к образованию складок.

Сферическая оболочка удерживается от опрокидывания с помощью растяжек, которые должны прикрепляться к мембране по возможности в большем числе точек. Сфера, непосредственно не касающаяся опоры, анкеруется аналогичным образом. Мембраны, которые крепятся к сфере по контурам в форме окружности, можно приближенно моделировать конструкцией в виде тросового веера. Сфера должна быть раскреплена в пространстве не менее чем четырьмя тросами. Размер опорного контура сферы оказывает большое влияние на устойчивость. Надежное опирание обеспечивается подкладываемым под оболочку пневматически напряженным круговым кольцом.

Баллон на вершине мачты удерживается с помощью внутренних растяжек или висит во внешнем веере из канатов, которые крепят к мембране или к двум взаимосвязанным канатным сеткам.

Часто стальные баллоны устанавливаются на стойках, но в местах опирания возникают большие мембранные напряжения; их можно избежать при опирании на тросовую сетку. Две тросовые сетки могут удерживать легкий баллон от опрокидывания.

В космосе перед инженерами и архитекторами возникает множество новых задач. Успешное решение всех проблем внеземного строительства является предпосылкой для существования человека в космосе, возможного только в том случае, если удастся защитить его от космического излучения. Самые высокие требования предъявляются также и ко всем материалам. Применение металлов, стойких к излучениям и высоким температурам, не всегда возможно из-за значительного веса, а возможность применения пластмасс, чувствительных к ультрафиолетовым и другим излучениям, еще недостаточно обоснована.

В американском баллонном спутнике «Эхо-1» была сделана попытка защитить полиэтилентерефталатную пленку напыленным алюминием.

Можно ожидать дальнейшего развития в области производства пленок, тканей, уплотняющих, защитных и изолирующих материалов, которые в соответствующих комбинациях будут отвечать новым требованиям.

Преодоление силы тяжести при транспортировке полезных грузов в космическое пространство связано с большими затратами энергии. Растянуто-напряженные конструкции должны поэтому рассматриваться в первую очередь. Пневматические оболочки являются предпосылкой для восприятия большой разницы давлений. Человек, в течение длительного времени применяющий для дыхания чистый кислород, нуждается во внешней воздушной среде плотностью не ниже 25% земной атмосферы. Поэтому любой космический корабль, любое внеземное сооружение или установка с человеком на борту должны воспринимать соответствующую нагрузку не менее 25000 Н/м^2. Такие конструкции в сложенном виде должны занимать возможно малое место, а в рабочем состоянии обладать максимальной надежностью. Пневматические конструкции с несколькими внешними оболочками и большим количеством внутренних перегородок обеспечивают большую надежность. Сферические оболочки представляют значительный интерес вследствие особенно благоприятного распределения напряжений, а также в связи с тем, что они обладают наибольшим отношением внутреннего объема к площади поверхности. Могут использоваться и другие самые разнообразные формы.

Небольшие сферические оболочки (рис. 1.27, *а*) могут легко объединиться в здание любой протяженности.

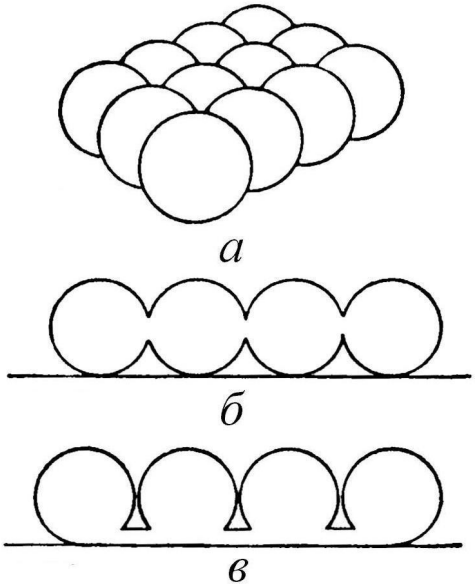


Рис. 1.27. Пневматические здания: а - из сферических оболочек; б - из сферических оболочек, непосредственно соединенных друг с другом; в - из цилиндрических оболочек, соединенных друг с другом переходами

Сферы, которые соединяются непосредственно друг с другом (рис. 1.27, *б*), не нуждаются в связывающих переходах. Однако последние могут оказаться весьма полезными, в особенности в тех случаях, когда они связывают пневматические формы из составленных вместе цилиндров (рис. 1.27, *в*) и обеспечивают большую безопасность сооружения при разрушении отдельных частей здания. Из множества соприкасающихся друг с другом сфер с помощью тросов могут образовываться пространственные конструкции различных форм.

В ближайшем будущем перед архитекторами будет поставлена задача приспособить космическое пространство к длительному проживанию людей. Это должно достигаться не только созданием технических предпосылок, но также возможно более полным учетом всех физических и моральных проблем, возникающих перед космическим путешественником. Одна из проблем – защита от повреждений космическими телами и пылью. В сфере с тройной внешней оболочкой отдельные оболочки упруго связаны между собой в нескольких местах. При одинаковом сопротивлении диффузии воздушное давление в полостях понижается при движении наружу. Каждая из трех мембран в связи с этим почти одинаково напряжена внутренним давлением.

В случае разрыва давление под наружной оболочкой падает, средняя мембрана прижимается внутренним давлением к месту разрыва и закрывает его.

При повреждениях во всех трех оболочках при попадании, например, небольших метеоритов, автоматическая герметизация может быть достигнута благодаря умелому распределению слоев в конструкции.

Оболочки в форме сферы или части сферы являются двоякоизогнутыми. В общем случае такие оболочки изготовляются из гибких, но малодеформируемых пленок или тканей, которые могут изгибаться только в одном направлении.

Чтобы получить сферическую поверхность, необходимо разбить ее на малые участки, для которых мембрана может рассматриваться как плоская или изогнутая только в одном направлении. Чем менее деформируем материал, тем на большее число участков должна разбиваться оболочка. Сфера из резиновой пленки может изготовляться из значительно меньшего числа частей, чем в случае применения стеклянной ткани. Эти элементы поверхности могут иметь различную форму. Наиболее часто употребляется линзовидная, треугольная или трапецеидальная форма. Для оболочек с пространственной кривизной края таких элементов имеют криволинейное очертание.

Напряженное состояние, при котором по всем направлениям действуют равные напряжения, влияет определенным образом на раскрой сферической поверхности. На оболочке нельзя выделить преимущественных направлений. При применении тканей направление нитей не может произвольно ориентироваться по отношению к швам. Если применяется очень дорогой материал, то, естественно, стремятся к меньшим отходам при раскрое. Если большую часть стоимости конструкции составляют затраты на ее изготовление, то стремятся к уменьшению общей длины швов.

Разбивка сферы меридианами требует небольшого количества швов и обеспечивает хороший внешний вид, однако связана с большими отходами материала, как это видно на примере выкройки отдельной детали из полотнища ткани.

При раскрое на полосы, идущие в широтном направлении, каждый широтный «пояс» составляется из трапецеидальных кусков. Этот метод обеспечивает экономичность раскроя и имеет то преимущество, что длина возможного разрыва от шва до шва невелика, однако требует большой длины швов.

Разбивка сферы на равные по площади части может доводиться максимально до 120 одинаковых частей треугольной формы.

Вес части оболочки часто бывает значительным. Так как существуют плотные герметичные соединения, большую оболочку можно разбить на отдельные части и затем смонтировать. Части оболочки площадью более

600 м^2 требуют применения специальных монтажных средств, так как вследствие большого веса обращение с ними становится весьма затруднительным.

Для перекрытия больших площадей часто применяют плоские купола. Полукупола применяются для зданий с большой высотой и способны воспринимать большой перепад давления. Купола в форме части сферы известны прежде всего как ограждающие оболочки для радиометрических станций. В сооружении такой купол образует завершение башни.

При одинаковом внутреннем давлении мембранное напряжение зависит исключительно от диаметра сферы. Все сферические купола являются равнонапряженными. Полукупол перекрывает наибольшую площадь, а купол в форме 0,75 сферы имеет наибольшую высоту. Чем выше сферический купол, тем большее влияние на его напряженное состояние оказывают динамические нагрузки.

При наполнении высокоэластичная мембрана последовательно проходит все стадии от плоского купола до полного купола. Полусфера имеет при этом наименьший радиус кривизны.

Плоские купола практически не подвержены действию снеговой нагрузки, такую нагрузку следует учитывать только в виде исключения в безветренную тихую погоду. Необходимо отметить, что в мембранных сооружениях проводились успешные опыты по растапливанию снега внутренним теплом.

При более высоких куполах снег сползает к краям оболочки. При применении эластичных гладких материалов такое сползание может вызываться с помощью периодических изменений внутреннего давления. Шероховатая поверхность затрудняет сползание снега. Частично сползший снег может вызывать особенно большие односторонние нагрузки.

Если в нормальных условиях дождевая вода даже при самом малом внутреннем давлении не образует водяных мешков, то в неблагоприятных условиях под еще лежащим снегом может образовываться скопление воды. При одновременном действии снега и ветра снег на плоских гладких куполах в общем случае не отлагается. На более высоких куполах отложение снега образуется преимущественно на подветренной стороне оболочки. Только при сильном ветре и гололедице на наветренной стороне оболочки возникает ледяная корка. К сожалению, основные закономерности отложения снега на оболочках еще недостаточно изучены.

Ветровое давление на купол в форме 0,75 сферы создает на наветренной стороне небольшую зону положительного давления. При малой величине внутреннего давления сфера в этом месте может прогнуться. Вся остальная часть поверхности купола подвергается отсосу.

На плоских куполах везде имеется отсос. Уже слабый ветер может стабилизировать плоский купол. В дополнительном внутреннем давлении в

этом случае нет необходимости. При больших скоростях ветра возникают большие мембранные напряжения. Хотя сфера кажется хорошо изученной в аэродинамическом отношении, при проектировании сферических оболочек для куполов возникает много вопросов, в особенности если речь идет о крупных сооружениях. Основой для проектирования служат прежде всего данные продувки в аэродинамической трубе. Действительный характер ветровой нагрузки, в сущности, почти не изучен. Известно, что ветровая нагрузка может мгновенно изменяться по силе и направлению, причем в этом изменении отсутствует регулярность. Нередко может случиться, что ураганный ветер только коснется здания. Во всяком случае, при расчете на динамические нагрузки мы приходим к несимметричной задаче.

Плохо выяснены также нагрузки на здания от торнадо и смерчей, которые могут создавать нагрузки до 3000 Н/м^2. Конструкции в местностях, подверженных действию торнадо, не рассчитываются на нагрузку от него: весьма мала вероятность того, что здание за время эксплуатации окажется на пути смерча. Пневматические же конструкции могут противостоять нагрузкам и от торнадо.

В США пневматические купола применены для радарных станций. Высокочувствительная радиоаппаратура защищается сферической оболочкой, которая почти без сопротивления пропускает радиоволны. Строительство пояса американских радарных станций в Канаде в 1955 г. дало важные практические результаты; работы в этой области были начаты еще в 1946 г.

Надувные купола на искусственных стальных островах успешно противостояли сильнейшим ураганам в Атлантическом океане. Монтаж стальных конструкций на таких островах сопряжен с большими трудностями. В бурном море, при опасности землетрясений или при слабых основаниях применение более легких, изящных конструкций вполне оправдано.

Несомненный интерес представляют пять больших выставочных куполов, сооруженных в США. Средний купол имеет диаметр 49,5 и высоту 28 м, диаметр меньших куполов составляет 33 м. В каждом здании предусмотрено устройство входов и выходов. Отопление центрального купола осуществляется поддувкой воздуха. На рис. 1.28 слева в углу виден полужесткий вход.

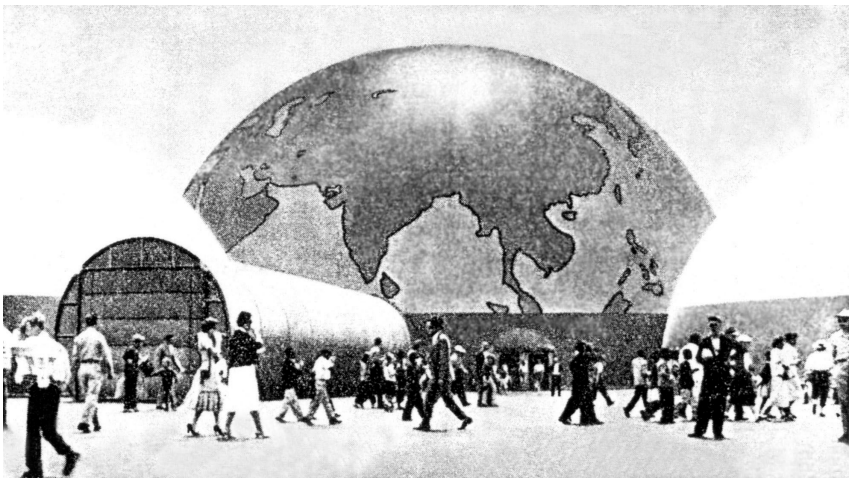


Рис. 1.28. Пневматические выставочные купола, сооруженные в США

Первой пневматической конструкцией, получившей широкую известность в Европе, явился павильон американской авиационной компании на Всемирной выставке 1958 г. в Брюсселе. Легкая оболочка с нанесенным на нее рисунком глобуса была снабжена двумя вращающимися дверями и окружена железобетонной обзорной площадкой.

В проекте города на антарктическом архипелаге большая сферическая оболочка из прозрачной пленки целиком укрывает город с внутренней гаванью, административным центром и предприятиями легкой промышленности. Собственно оболочка не отапливается, так как благодаря небольшой теплоемкости грунта в оболочке создается климат, соответствующий более умеренным широтам. Здания с центральным отоплением располагаются внутри парка, создающего благоприятное для человека окружение. Одновременно зеленые насаждения служат для обновления воздуха и защиты от шума, точно так же, как и полотнища в форме парусов, подвешенные с внутренней стороны оболочки. Внутренний воздух постоянно обновляется с помощью установок для кондиционирования воздуха. Воздушное давление поддерживается на нужном уровне с помощью ветрового давления, вентиляторов и разницы температуры наружного и внутреннего воздуха. Климатическая централь со своими всасывающими воздуховодами располагается на краю куполов. Все городские газовые выделения выводятся наружу. Аэродром, основная гавань, промышленность и радиостанция располагаются вне пневматической оболочки и связаны переходами.

Именно в больших оболочках может наиболее экономно расходоваться энергия, необходимая для поддержания внутреннего давления и регулирования внутреннего климата. В таких огромных оболочках возникает

совершенно новая теплотехническая задача по регулированию внутреннего климата, так как вследствие воздухообмена, а также образования зон конденсации внутри оболочки могут появиться собственные ветровые потоки, которые при пролетах свыше 500 м могут оказывать значительное влияние на внутренний климат.

Оболочки пневматически напряженных сферических куполов выполняются обычно из тканей на основе натуральных или синтетических волокон с пластмассовым покрытием. Но в гибкой однослойной мембране обеспечить прочность свыше 60 кН/м, вообще говоря, затруднительно. Из таких тканей с учетом необходимого запаса могут изготовляться сферические купола радиусом до 50 м. При больших радиусах применяются многослойные материалы, а также мембраны, усиленные с помощью тросов, отдельных проволочных нитей или лент, обеспечивающих более высокую прочность.

Сферы могут присоединяться друг к другу и при вертикальном положении оси (рис. 1.29, *а*).

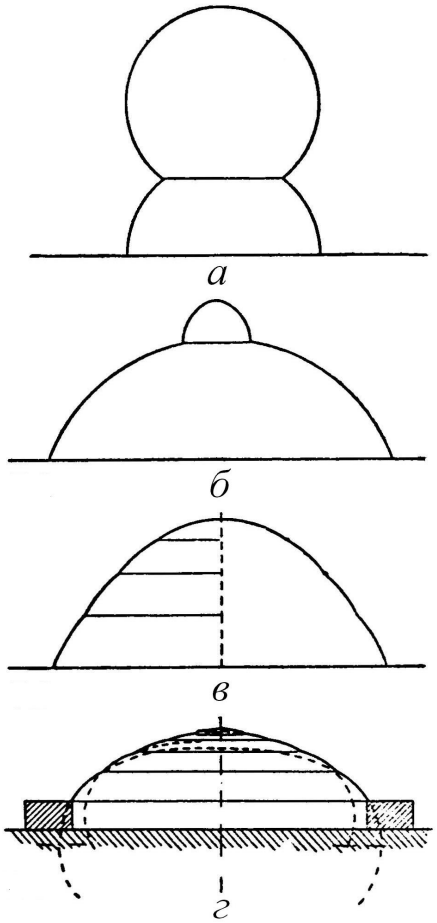


Рис. 1.29. Здания с применением пневматических сферических оболочек: а - башенного типа; б - прозрачный купол для верхнего света; в - применение горизонтальных тросов; г - применение горизонтальных тросов в комбинациях с радиальными

В этом случае получается здание башенного типа.

Маленький прозрачный купол для верхнего света (рис. 1.29, *б*) отделяется кольцевым тросом от большего, более плоского основного купола покрытия. Мембранные напряжения в более пологом куполе значительно выше, чем в малом. При проектировании таких зданий необходимо учитывать закон формообразования. Особенно это нужно иметь в виду, если с помощью горизонтальных тросов куполу придается малый радиус кривизны.

Ланчестер уже в своих первых работах, получивших отражение в патентах 1918–1919 гг., а также в докладе, сделанном им в Манчестерской

ассоциации гражданских инженеров в 1938 г., предусматривал применение горизонтальных тросов в комбинациях с радиальными (рис. 1.29, *г*). Ланчестер предлагал строительство куполов диаметром до 650 м с жестким верхним световым фонарем. По его проекту купола из брезента должны были опираться на каменные здания.

Этот доклад Ланчестера вместе с его патентами может рассматриваться как первая основополагающая работа в области пневматических конструкций.

Применение горизонтальных усиливающих тросов имеет смысл только в высоких куполах (рис. 1.29, *в*), в которых широтные напряжения по наибольшему диаметру могут быть равны меридиональным.

Эффект от радиально располагаемых канатов в общем значительно больше, чем от горизонтальных тросов, в особенности в низких куполах. Мембрана между тросами может иметь очень маленькие радиусы кривизны, в связи с чем тросы могут воспринять значительную часть всех усилий.

Купол с пятью тросами образуется сильно искривленными каплеобразными мембранами. Одна из пневматически напряженных мембран с радиальными тросами диаметром 60 м была построена в США (штат Миннесота) в качестве покрытия большого зернового склада (рис. 1.30). Зернохранилище окружено деревянной стенкой.

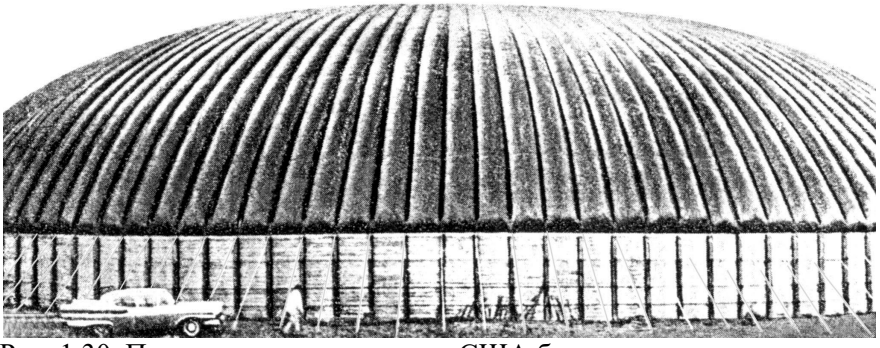


Рис. 1.30. Покрытие построенного в США большого зернового склада

Особенно эффективна комбинация из тросовой сетки и мембраны в конструкциях, в которых сетка имеет одинаковые ячейки и кривизна мембран, заключенных между ячейками, одинакова.

Предпочтительными являются формы сеток, которые могут изготовляться заводским способом. Последнее относится в особенности к сеткам, ячейки которых в ненатянутом горизонтальном положении являются шестиугольными, квадратными или прямоугольными. На пространственно искривленных формах поверхности такие сетки меняют углы между тросами в точках пересечения тросов. Сетки такого вида допускают сильное изгибание в двух направлениях.

При изготовлении модели часто необходима весьма высокая точность выполнения сетки, поэтому точки закрепления тросов устанавливают на жесткой модели купола.

Жесткость сетки с треугольными ячейками значительно выше, чем жесткость сеток с четырехугольными и шестиугольными ячейками. Сетки, состоящие из меридиональных и широтных колец, имеют отличающиеся друг от друга ячейки. Квадратные сетки, образующие круглые купола, имеют большие или меньшие угловые искажения в зависимости от того, обтягивают ли они плоский или выпуклый купол.

Для целого ряда сооружений может быть эффективно применен двойной купол с мягким переходом. При прямоугольной форме контура опирания возникает плавная седловидная мембрана, если только мембрана не разделяется пополам сильно врезающимся перехватывающим тросом.

Купола могут объединяться с помощью мягких переходов в длинный ряд (рис. 1.31).



Рис. 1.31. Пневматическая оболочка из объединенных в длинный ряд куполов с мягкими переходами

Заслуживает внимания специалистов конструкция передвижного здания американской выставки по атомной энергии (рис. 1.32).



Рис. 1.32. Пневматическая оболочка передвижного выставочного здания

Здание, предназначавшееся для выставочного турне по Южной Америке, имело 91 м в длину, 33 м в ширину и 19 м в высоту при общем весе 28 т и обладало высокой транспортабельностью. В этом здании было использовано несколько конструктивных приемов для того, чтобы, с одной стороны, обеспечить высокую надежность сооружения, а с другой – удовлетворить архитектурным требованиям. Средняя часть оболочки

состояла из двух больших куполов, связанных седловидной промежуточной частью, и представляла собой типичный двойной купол с мягким переходом. Размеры каждого из двух куполов переменные по высоте и ширине. Внутренний объем здания находился под избыточным давлением. Вход в здание предусмотрен через вращающиеся двери, которые помещались в жестких и герметичных торцовых рамах. Покрытие было выполнено в виде двухслойной оболочки. Внутренняя оболочка напрягалась внутренним избыточным давлением в 49 мм вод.ст., давление в полости оболочки составляло 39 мм вод.ст. Расстояние между двумя слоями оболочки было равно 1,2 м. Такой зазор служил для повышения теплоизоляции здания и увеличения надежности сооружения. Внутренняя полость оболочки разделялась на отдельные камеры. При повреждении оболочки в каком-либо месте потеря предварительного напряжения имела бы место только в ограниченной области. Расстояние между слоями оболочки было достаточным для того, чтобы обеспечить эффект самогерметизации.

Внутри здания располагался зрительный зал на 300 мест, а также еще один пневматический купол из прозрачной пластмассовой пленки, который в свою очередь укрывал опытный атомный реактор. В этом куполе поддерживалось более высокое внутреннее давление, чем в остальной оболочке. Время, необходимое для монтажа здания на бетонном фундаменте, – от 3 до 4 дней, продолжительность периода заполнения оболочек воздухом – 30 мин.

Купола могут иметь не только плоский, но и пространственно развитой контур опирания. Это открывает еще более широкие возможности в области формообразования пневматических оболочек, причем многие формы имеют практическое значение. Пневматически напряженный купол представляет собой многостороннюю конструктивно и функционально гибкую конструкцию. Его форма может широко варьироваться и легко приспособляться для решения различных строительных задач. В целях экономии материала с тем, чтобы обеспечить наименьшее усилие в мембране и в опорном контуре, а следовательно, и в фундаменте, для любого контура опирания можно подобрать определенную форму мембраны, которая в данных условиях наиболее благоприятна. При проектировании крупных сооружений необходимо предварительно особенно тщательно исследовать эти формы на моделях с помощью мыльных пузырей на изучаемом опорном контуре, с помощью резиновых мембран или мембран из других газонепроницаемых материалов (прорезиненных тканей).

Иногда, в соответствии с акустическими требованиями, мембранные купола могут выполняться с вертикальным или наклонным волнообразным контуром опирания. Входы, световые проемы, а также связь с другими зданиями в указанном примере могут располагаться между боковыми

ребрами, образованными жесткими стержнями, причем каждая из вершин жесткого опорного контура раскрепляется тросом.

Примером купола со свободным планом, усиленного тросовой сеткой, служит проект театра, при разработке которого первоначально изучался процесс пневматического напряжения резиновой пленки, опирающейся на контур, соответствующий традиционному планировочному решению летнего театра.

Более перспективной оказалась форма (рис. 1.33), образованная резиновой мембраной и усиливающими ее тросами.

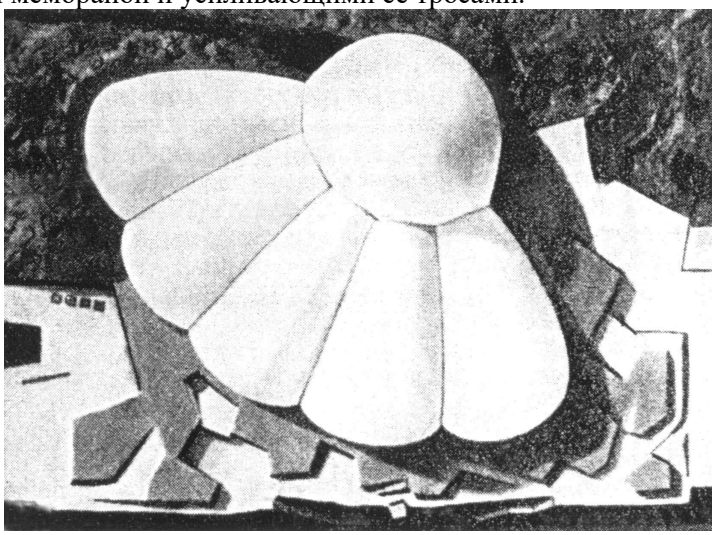


Рис. 1.33. Пневматическая оболочка из резиновой мембраны с усиливающими тросами

Форма сооружения в плане (рис. 1.34) была приспособлена к заданным условиям. Четыре троса заанкериваются по верхней кромке амфитеатра и объединяются пространственно искривленным тросом, который проходит по линии, отделяющей зрительный зал от сцены.

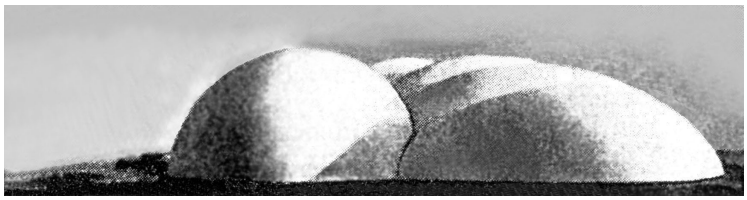


Рис. 1.34. Пневматическая оболочка из резиновой мембраны с усиливающими тросами

Путем нагнетания под давлением гипса в резиновую мембрану была изготовлена жесткая модель покрытия.

Входы, фойе, административные помещения, а также ресторан помещаются в одно- и двухэтажных зданиях с плоскими кровлями в виде террас, композиционное решение которых отвечает условиям местности. Сцена вращающаяся, оборудованная киноэкранами и сменяемыми стенами; в качестве дополнительной меры безопасности сконструирована также криволинейная жесткая стена в форме вертикальной вращающейся цилиндрической оболочки.

Изучалась также возможность усиления мембраны, располагаемой между главными тросами, тросовой сеткой, с тем, чтобы путем дальнейшего акустического дифференцирования здания получить тонкую структуру поверхности оболочки.

Следует отметить, что пневматическая форма такого типа, будучи выполнена в жестких конструкциях, может с успехом применяться в качестве пространственной конструкции, воспринимающей нагрузку от внешнего давления. Тросы заменяются в этом случае жесткими арками, форма которых при нагрузке только собственным весом мембраны может быть точно определена.

Вздувание резиновых пленок на треугольном контуре опирания приводит к образованию форм мембран, имеющих вблизи углов четко выраженные седловидные поверхности. Вертикальные сечения поверхностей определяют точки перелома, которые могут быть связаны одной линией, направленной от сторон к углам контура. Внутри седловидных областей мембрана в каждой точке по двум соответствующим направлениям не обладает кривизной.

Треугольные в плане пневматически напряженные оболочки нашли применение в качестве заполнения кровель и стен каркасных зданий. На практике применяются мембраны из малодеформируемых материалов, например из прорезиненных тканей. Если таким мембранам с помощью соответствующего раскроя придается форма мыльного пузыря или раздутой резиновой пленки, то при прочих равных условиях мы получим аналогичное напряженное состояние, однако эта аналогия нарушается, если мы попытаемся с помощью повышения давления добиться дальнейшего раздувания малодеформируемой оболочки. В этом случае вблизи углов треугольника нормально к биссектрисам могут образоваться складки, указывающие на падение напряжения в седловидной области. При этом все мембранные усилия передаются кратчайшим путем нормально к биссектрисе.

Весьма перспективная форма купола может быть создана на основании с квадратным контуром. В настоящее время такая форма широко используется в куполах верхнего света, изготавливаемых промышленностью из акриловых смол путем пневматического штампования в термопластичном состоянии из плоских листов.

Весьма часто аналогичная форма, похожая на парус, наблюдается, когда полотнище, закрепленное в рамке, вздувается ветром. На рис. 1.35 показано пневматическое напряжение резиновой мембраны на прямоугольном плане с закругленными углами.

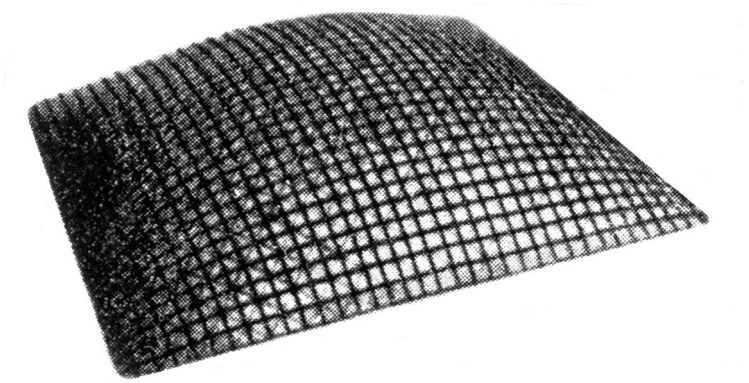


Рис. 1.35. Деформирование пневматической оболочки из резиновой мембраны с закругленными углами

Двойная сетка позволяет различать изменение кривизны как в направлении, параллельном сторонам, так и в диагональном направлении. Закругляя углы, можно частично или полностью избежать образования седловидных участков, если они нежелательны в случае использования определенных материалов. Кривизны поверхности мембраны во всех точках различны по всем направлениям, за исключением вершины купола, очертания которой приближаются к сфере. Около боковых сторон образуется поверхность, главная кривизна которой в непосредственной близости к контуру опирания существует только в одном направлении. В направлении, параллельном стороне основания, кривизна исчезает. Седловидные области на углах четко выражены.

Изучение мембран, усиленных тросами и опирающихся на прямоугольный план, обнаруживает большое разнообразие конструктивных форм. Наиболее простым решением является поперечное расположение тросов, как это показано на рис. 1.36.

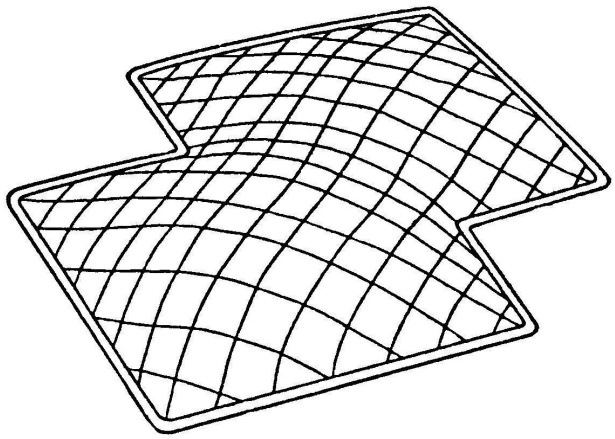


Рис. 1.36. Пневматическая оболочка на прямоугольном опорном контуре

Между тросами могут образовываться выпуклые мембранные поверхности двоякой кривизны, которые при достаточной степени развития не имеют седловидных участков.

В том случае, когда тросы разбивают фигуру опорного контура на треугольники, возникает группа взаимосвязанных треугольных куполов, выпучивающихся в большей или меньшей степени в зависимости от внутреннего давления и раскроя. Когда тросы в плане образуют прямоугольную решетку, форма пневматически напряженной оболочки может широко варьироваться с помощью удлинения или укорочения соответствующих групп тросов.

В одном из проектов капитального сооружения пневматически напряженное покрытие между параллельными, слегка наклоненными наружу стенами напрягается восемью перекрещивающимися тросами, между которыми образуются три возвышающихся купола. Внутри здания на различных уровнях располагаются эстрада и галерея, при этом создается своеобразный интерьер, который объединяется в одно целое доминирующей формой покрытия.

Здание, закрытое со всех сторон, свободно располагается на площадке, причем вход в здание устроен только в одном месте. Покрытие – белого цвета, а стены – кирпично красные.

Комбинация мембран с тросами и тросовыми сетками позволяет создавать разнообразнейшие формы покрытий над любым планом. Так, группа из пяти параллельных тросов различной длины образует плавную горловину. Параллельные тросы могут связываться между собой поперечными тросами, так что горловина образуется с помощью тросовой сетки, которая по всей длине должна крепиться к контуру основания.

Диагональная сетка, закрепленная между двумя более мощными

краевыми тросами (рис. 1.37, *б*), хотя и уменьшает выпучивание мембраны между тросами, тем не менее не позволяет получить мягкого закругления.

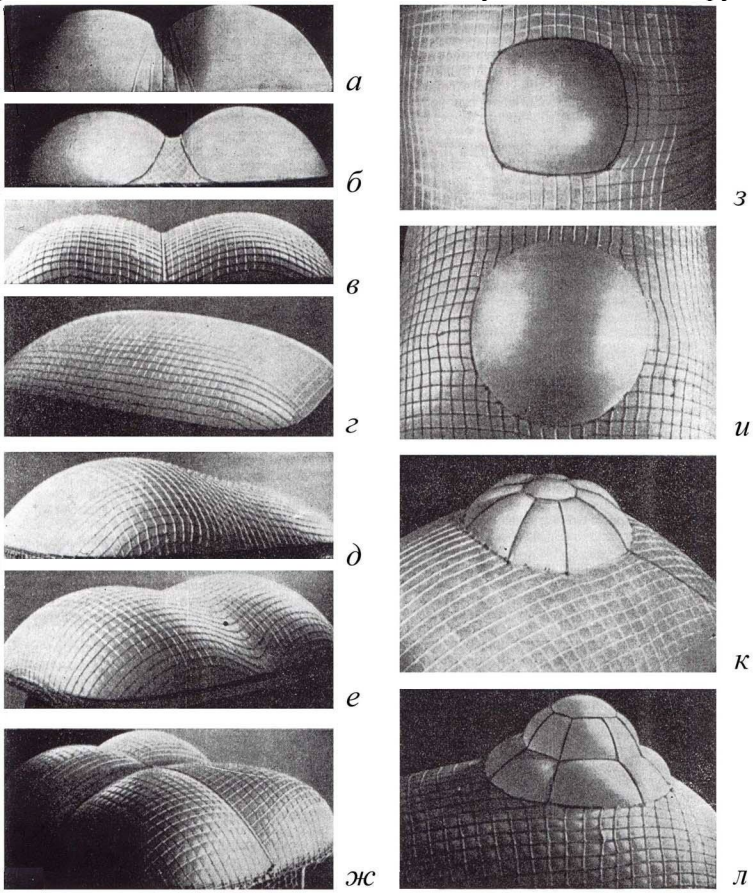


Рис. 1.37. Формы пневматических оболочек с применением мембран, тросов и тросовых сеток: а, б - диагональная сетка; в - отдельный поперечный трос совместно с тросовой сеткой; г - ортогональная тросовая сетка;. д, е - тросы с различной степенью натяжения по контуру опирания; ж - мембрана в комбинации с тросами; з - мембрана с тросовой сеткой с квадратным отверстием; и - мембрана с тросовой сеткой с восьмиугольным отверстием; к - мембрана с восемью радиальными тросами и одним центральным кольцевым тросом; л - мембрана с восемью радиальными тросами и двумя центральными кольцевыми тросами

На практике наибольшее значение имеет комбинация из мембраны, тросовой сетки и отдельных несущих тросов, определяющих форму оболочки. На рис. 1.37, *в* показан эффект использования отдельного поперечного троса совместно с тросовой сеткой, а на рис. 1.37, *г* показана

форма оболочки только с одной тросовой сеткой. Однако последняя может иметь не только эту единственную форму, поверхность которой приближается к минимальной. При использовании различной степени натяжения тросов по контуру опирания может быть достигнуто большое разнообразие форм (см., например, рис. 1.37, *д*, *е*). Формы мембран, усиленных тросовой сеткой, так же, как и формы мембран в комбинации с тросами (рис. 1.37, *ж*), должны соответствовать закону формообразования.

При проведении опытов использовалась сетка с одинаковой величиной ячеек, допускавшая получение разнообразных форм благодаря изменению углов при относительно гармоничном распределении напряжений.

Было предпринято также исследование форм мембран, когда в тросовой сетке, укрывающей мембрану, вырезалось квадратное отверстие. Как видно из рис. 1.37, *з*, контур выреза деформировался таким образом, что приобретал почти круговую форму. Мембрана деформировалась в этом случае в обособленный маленький купол.

Если восьмиугольное отверстие в сетке усиливалось тросом (рис. 1.37, *и*), то трос приобретал форму круга, а поднимающийся над ним купол – форму сферы.

Далее была изучена возможность присоединения к тросовой сетке с одинаковыми квадратными ячейками, в которой вырезано восьмиугольное, усиленное по краю отверстие, второй сетки с радиальным расположением тросов. Такая комбинация тросовых сеток может быть осуществлена без затруднения. При этом обнаруживаются большие возможности создания разнообразных форм, которые иллюстрируются здесь только отчасти. В опыте с восемью радиальными тросами и одним центральным кольцевым тросом (рис. 1.37, *к*) при сильном натяжении тросов может быть получен плоский добавочный купол, высота которого легко регулируется путем изменения длины тросов. Возможны также несимметричные формы.

В дальнейших опытах (рис. 1.37, *л*) был введен второй кольцевой трос для того, чтобы получить форму добавочного купола, приближающегося к конусу. Благодаря тому, что усилия в тросовой сетке частично воспринимаются кольцевым тросом, напряжения в добавочном куполе остаются относительно небольшими.

Применение небольших обособленных куполов наиболее эффективно при использовании их в качестве куполов верхнего света в большепролетных конструкциях из непрозрачного материала.

Любая длинная мягкая трубообразная оболочка является в средней части цилиндрической, независимо от того, замыкается она с концов кругом или любой другой формой.

Из всех призматических тел большой длины только цилиндрическая оболочка может быть использована в качестве пневматически напряженной

конструкции. Лишь на концах цилиндра краевые условия в том случае, когда торцы отличны от круга, влияют на форму пневматической оболочки.

Форму гибкой цилиндрической оболочки имеют шланги и трубы различных типов, как, например, тканевые пожарные рукава или воздухопроводы. Поскольку внутреннее избыточное давление придает цилиндрической оболочке нежелательную для шлангов жесткость, зависящую от модуля упругости материала, для изготовления гибких шлангов применяют эластичные материалы, преимущественно резину, причем для восприятия высоких давлений резиновые шланги усиливаются диагонально перекрещивающейся обмоткой из кордного шелка.

Резиновые шланги малых диаметров сохраняют круговое поперечное сечение и без внутреннего избыточного давления.

Широко известны также жесткие цилиндрические оболочки, как, например, паровые котлы, резервуары, нефтяные баки и дистилляционные колонны, форма которых сохраняется и в случае отсутствия внутреннего избыточного давления. Без внутреннего избыточного давления жесткие цилиндрические оболочки воспринимают в основном нагрузки от собственного веса и транспортные. Однако самой большой нагрузкой для таких оболочек, как и в пневматически напряженных оболочках, является нагрузка от внутреннего избыточного давления.

Мягкая цилиндрическая оболочка под действием внутреннего избыточного давления сохраняет свою форму и может сопротивляться изгибу, продольному изгибу и кручению. Несущая способность такой оболочки зависит от внутреннего избыточного давления, толщины стенок и упругости материала. Чем выше модуль упругости материала, тем меньше деформации оболочки под нагрузками.

При изгибе пневматически напряженной цилиндрической оболочки ее внешние волокна будут растягиваться, а внутренние разгружаться. В тот момент, когда вызываемые изгибом усилия сжатия больше уже не смогут компенсироваться предварительными растягивающими напряжениями в продольном направлении от внутреннего избыточного давления, возникают складки. При образовании складок изгибная жесткость оболочки резко падает. Оболочка сминается, образуется шарнир. Благодаря этому при перегрузках пневматической цилиндрической оболочки конструкция не перенапрягается; но в рукавах, заполненных жидкостью или газом, такие изломы вызывают нежелательные скачки давления.

Гофрирование поверхности оболочки уменьшает ее жесткость настолько, что становятся возможными относительно резкие изгибы оболочки без образования складок. При испытаниях на изгиб, продольное сжатие и кручение упругие свойства материала оболочки имеют большое значение; в случае же бокового сжатия длинной цилиндрической оболочки, когда внутреннее избыточное давление поддерживается постоянным,

например путем подключения баллона со сжатым воздухом, эти характеристики не играют решающей роли. Но если цилиндрическая оболочка замкнутая, то и в этом случае деформации более эластичной оболочки, например резиновой, больше, чем малоэластичной, поскольку удлинение последней от действия внутреннего избыточного давления меньше. При деформации оболочка не подчиняется линейному закону. Уже при небольших нагрузках наблюдается заметная деформация оболочки, обусловленная малой площадью опирания. Чем больше нагрузка, тем меньше становится относительная деформация. В связи с этим цилиндрическая оболочка лучше отвечает требованиям, предъявляемым к амортизации экипажа, чем стальная рессора.

Пневматические конструкции могут создаваться и в форме конических оболочек. Конус имеет круговую форму в плане и треугольную форму с фасада. В вершине конуса напряжения равны нулю, на контуре опирания принимают максимальное значение. Вершина конуса – мягкая и под воздействием динамических нагрузок сильно деформируется. Благодаря закруглениям с плавно изменяющейся кривизной удается избежать скачка напряжений в вершине конуса аналогично тому, как это получается в торцовых элементах цилиндрической оболочки.

Коническая оболочка имеет кривизну в одном направлении. Это обусловливает простой раскрой оболочки с весьма малыми отходами материала. Простота раскроя сохраняется также при слегка закругленной конической оболочке, включая и ее вершину.

Закругленная пневматически напряженная оболочка может быть использована в различных целях. Так, например, коническая форма очень удобна в том случае, когда в зимнее время для стабилизации оболочки используется теплый воздух.

При неблагоприятном отложении снега уклон конической поверхности облегчает его сползание. Акустические свойства внутренних объемов конических оболочек значительно лучше, чем куполов в форме части сферы.

Примером рассматриваемого типа сооружений может служить склад для хранения зерна в виде двух конических оболочек, возведенный на слабых грунтах. Угол наклона оболочек близок к углу естественного откоса складируемого материала. Склады такого типа пригодны для хранения чувствительных к влаге материалов типа цемента, гипса, серы, зерна.

Разгрузка склада в начальный момент производится с помощью расположенных по периметру всасывающих трубопроводов, а в конце – с помощью центрального всасывающего трубопровода, причем плавающая мембрана способствует перемещению сыпучих материалов к центру склада. Чтобы не держать в напряженном состоянии огромную оболочку склада в то время, когда в складе хранится небольшое количество материала, можно добиться, чтобы объем оболочки менялся в соответствии с количеством

хранимого материала, используя тросовое усиление и применяя соответствующую конструкцию анкеров.

В США создана большая экспериментальная башня (рис. 1.38), испытанная на различные виды нагрузок.



Рис. 1.38. Пневматическая оболочка башенного типа

Пневматически напряженные конические оболочки, подобно другим, также могут образовывать различные составные формы, например шесть конусов с прямыми верхними углами, размещенные на сфере. Такие формы используются прежде всего для резервуаров, так как они имеют весьма простой раскрой и при правильном определении формы обладают значительной жесткостью.

Если соединить два конуса непосредственно друг с другом, то в месте сопряжения возникают сжимающие усилия. Поэтому по линии сопряжения должен быть предусмотрен жесткий, работающий на сжатие элемент. Это требование обязательно также и для формы, составленной из нескольких усеченных конусов, но не обязательно в случае, когда концы оболочки в виде конусов связываются средней сферической частью. При сопряжении конуса и цилиндра целесообразно в качестве перехода использовать сферическое кольцо.

В соответствии с установленными условиями можно переходить от конуса с прямыми образующими к конусообразным композициям различной формы.

Так как кольцевые напряжения в конусе в два раза больше напряжений в направлении образующей, кольцевые тросы применяются чаще. Могут применяться также и тросовые сетки для усиления различных форм, в том

числе для усиления оболочек в форме поверхности вращения или в разветвляющихся формах.

Пневматические напряженные оболочки могут применяться также в форме эллипсоида, если длина оси, вокруг которой производится вращение, больше, чем наибольший диаметр. Плавное распределение напряжений делает его весьма интересным для решения разнообразных строительных задач, например для покрытий вытянутого очертания. Кроме половины эллипсоида в специальных случаях могут находить применение части эллипсоида вращения, которые соединяются друг с другом различным образом. В проекте, показанном на рис. 1.39, центральный эллиптический полукупол образует ядро композиции; вокруг него располагаются шесть куполов с размещающимися внутри мастерскими.

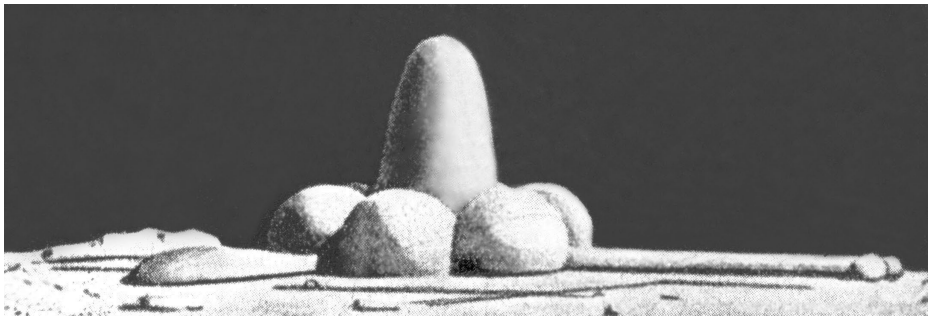


Рис. 1.39. Здание с применением пневматических оболочек эллипсоидальной формы

Все части сооружения, включая цилиндрические соединительные переходы и здание сборочного цеха каплевидной формы, имеют повышенную надежность благодаря применению многослойной оболочки.

Пневматически напряженные оболочки можно использовать как укрытия для больших предметов и установок и в случае необходимости быстро удалять. С помощью быстро разъединяемых швов оболочка может быть убрана.

Имеется бесчисленное количество тел в форме поверхностей вращения, которые могут существовать как пневматически напряженные. Прежде всего, это различные промежуточные формы между конусом, цилиндром, эллипсоидом и сферой или различные каплеобразные формы, которые находят применение главным образом в авиа- и судостроении. Очень легкий транспортабельный ангар для самолетов собирается из частей сферических и цилиндрических оболочек (рис. 1.40), причем форма ангара повторяет форму и самолета во избежание больших пролетов и значительных усилий.

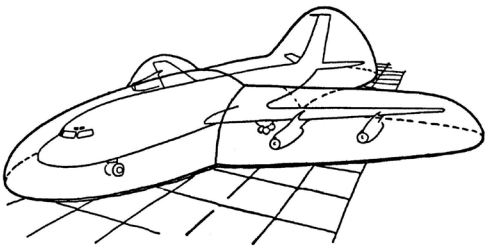


Рис. 1.40. Пневматический ангар для самолетов с применением сферических и цилиндрических оболочек

Оболочка такого ангара с удельным весом всего 0,8 кг/м^2 может транспортироваться этим же самолетом. Оболочка перед наполнением воздухом, подобно упаковочной пленке, расстилается над самолетом.

В проекте плавучего курорта прозрачная, как стекло, пневматически напряженная мембрана перекрывает расположенные террасами над прогулочными палубами жилые каюты и одновременно уменьшает аэродинамическое сопротивление корабля. Открытой оставлена только корма судна.

Из цилиндрических и веретенообразных пневматически напряженных оболочек, способных воспринимать сжимающие усилия, могут создаваться целые конструкции.

При большом внутреннем давлении цилиндрическая оболочка становится достаточно жестким телом. Пневматическая система приспособляется к распределению усилий с помощью увеличения диаметра стержней в местах, опасных в отношении потери устойчивости. Пневматически напряженные оболочки весьма чувствительны к сосредоточенным нагрузкам. Нагрузки должны равномерно прикладываться к закрепленным торцам элемента или в узлах каркаса. Наиболее рациональной формой для сжатого стержня, опертого шарнирно с обеих сторон, является форма, веретенообразно утолщающаяся к середине. Если стержневая пневматическая конструкция развивается в двух направлениях, как это показано на рис. 1.41, то в узлах образуются утолщения, а рядом с ними перетяжки, средняя же часть стержней слегка вздувается.

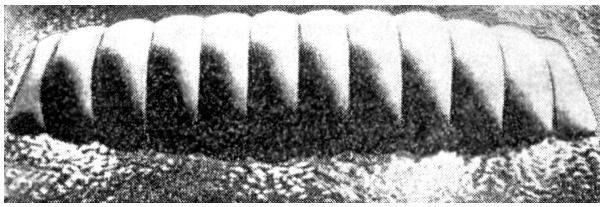


Рис. 1.41. Пневматическая оболочка на прямоугольном плане с усиливающими тросами

Вопрос о том, насколько экономичны такие конструкции, с учетом того, что они эксплуатируются при значительном давлении, еще подлежит детальному изучению. Несомненно, они представляют значительный интерес в тех конструктивных вариантах, когда во внутреннюю полость вводятся жидкости или пластичные материалы (пластмассы, пенопласт, легкий бетон), отверждающиеся под давлением; с их помощью оболочка долго остается предварительно напряженной, несмотря на мелкие повреждения. Представляется заманчивой возможность быстро возводить с помощью компрессора пространственную конструкцию из компактно сворачивающегося материала.

Из пневматических диад может быть образована пространственная конструкция, причем в качестве узлов используются сферические элементы. Несомненный интерес представляет конструкция, стержни которой выполнены в виде пневматически напряженных цилиндрических элементов (рис. 1.42).

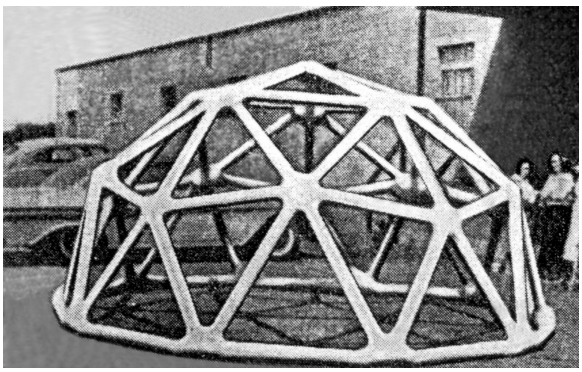


Рис. 1.42. Пневматическая пространственная конструкция с применением сферических элементов

При перекрытии больших площадей очень часто возникает необходимость в конструкциях относительно небольшой высоты. Пологие пневматически напряженные оболочки вследствие больших радиусов кривизны испытывают обычно большие мембранные напряжения. Если есть возможность прикрепить мембрану к основанию не только по краю, но и в нескольких местах во внутренней области, то пролеты и радиусы кривизны могут быть соответственно уменьшены. Мембранные усилия становятся значительно меньше. С помощью такого приема могут быть созданы особенно экономичные конструкции. Во всех пневматических конструкциях покрытий, во внутренних областях которых имеются точки или замкнутые контуры, связывающие мембрану с основанием, необходимо делать внутренний водоотвод, если только собственный уклон покрытия наружу не больше уклонов, создаваемых кратерообразными углублениями в поверхности покрытия. В этом случае конструкции с внутренними стенами

могут существовать и без внутреннего водоотвода. На рис. 1.43, *а* показан результат продавливания резиновой мембраны квадратного очертания. В непосредственной близости от углубления образуется седлообразная искривленная поверхность вращения.

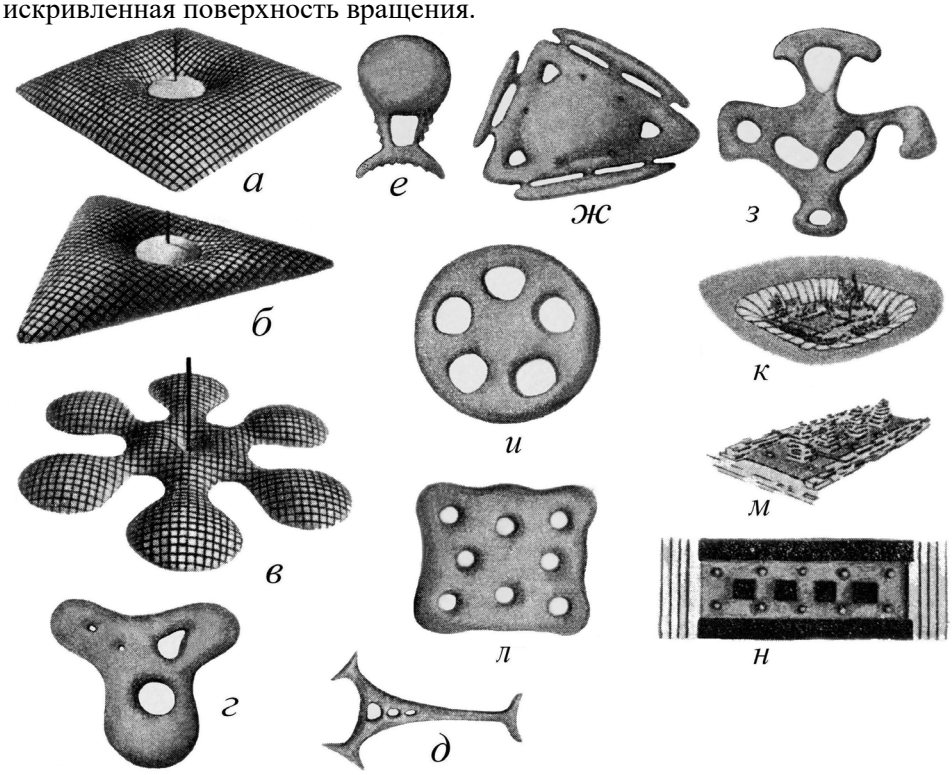


Рис. 1.43. Пневматические конструкции покрытий с внутренними стенами: а - замкнутый контур квадратного очертания; б - замкнутый контур треугольного очертания; в - замкнутый контур звездообразного очертания; г - замкнутые контура в виде внутренних дворов; д, л - замкнутый контур амебообразного очертания; е - купол цирка с отнесенными далеко входами, внутренними гардеробами и магазинами; ж - большой многоугольный зал с низкими помещениями, расположенными по краям, и большой внутренней ареной; з - покрытие тротуара между магазинами; и - замкнутый контур колесообразного очертания; к - покрытие внутреннего двора; м, н - торговый ряд между двумя рядами зданий

Аналогичная форма возникает при деформировании мембраны на треугольном контуре (рис. 1.43, *б*).

В опыте с мембраной на звездообразном плане (рис. 1.43, *в*) нагрузка действует на малой площади, что приводит к резкому искажению формы вблизи точки приложения силы.

Чем меньше площадь крепления внутренней связи, тем большие напряжения в общем случае могут возникать в зоне связи. Если мембрана крепится к основанию в нескольких местах, то образуются замкнутые со всех сторон внутренние дворы, как это показано на плане с регулярным расположением связей (рис. 1.43, *г*) или в проекте покрытия торгового ряда между двумя рядами зданий (рис. 1.43, *м, н*).

В этом проекте мембрана крепится к основанию в десяти точках, где предусмотрен водоотвод. По бокам пневматически напряженная оболочка прикрепляется к зданиям. Здания запроектированы прозрачными с располагающимися внутри них зимними садами. Для перекрытия улиц, в особенности пешеходных дорожек, пневматически напряженные оболочки применимы наилучшим образом. Возможно огромное количество различнейших форм мембран с внутренним водоотводом, например мембрана колесообразного плана, предназначенная для производственного предприятия (рис. 1.43, *и*) или амебообразное в плане здание (рис. 1.43, *д*, *л*). Такие формы могут оказаться необходимыми для сооружения выставочных павильонов между деревьями или зданиями. Конструкции данного типа в любом случае позволяют создать отвечающую конкретным условиям форму оболочки. Так, на рис. 1.43, *е* показан план купола цирка с отнесенными далеко входами и внутренними гардеробами и магазинами. На рис. 1.43, *ж* показан большой многоугольный зал с низкими помещениями, расположенными по краям, и большой внутренней ареной. Покрытие тротуара между магазинами (рис. 1.43, *з*) и организация внутреннего двора с помощью мембраны с внутренним водоотводом (рис. 1.43, *к*) иллюстрируют возможности такого конструктивного принципа.

Растянуто-напряженные пневматические конструкции, связанные во внутренних точках с основанием, представляют собой как бы зеркальное отражение сжато-напряженной оболочки, опирающейся на колонны, но с тем весьма существенным отличием, что эти колонны испытывают не сжимающие, а растягивающие усилия. Усилия растяжения могут восприниматься или тросами, или жесткими трубами. В растянутых элементах связей не может возникнуть явление потери устойчивости. Поэтому такие растянутые связи могут проектироваться как угодно длинными.

На рис. 1.44 показано сечение теплицы из светопрозрачной пленки, имеющей внутренний водоотвод непосредственно в песчаный грунт, причем под слоем перегноя прокладывается мембрана, связанная с мембраной покрытия по линиям внутренних водоотводов и по краю.

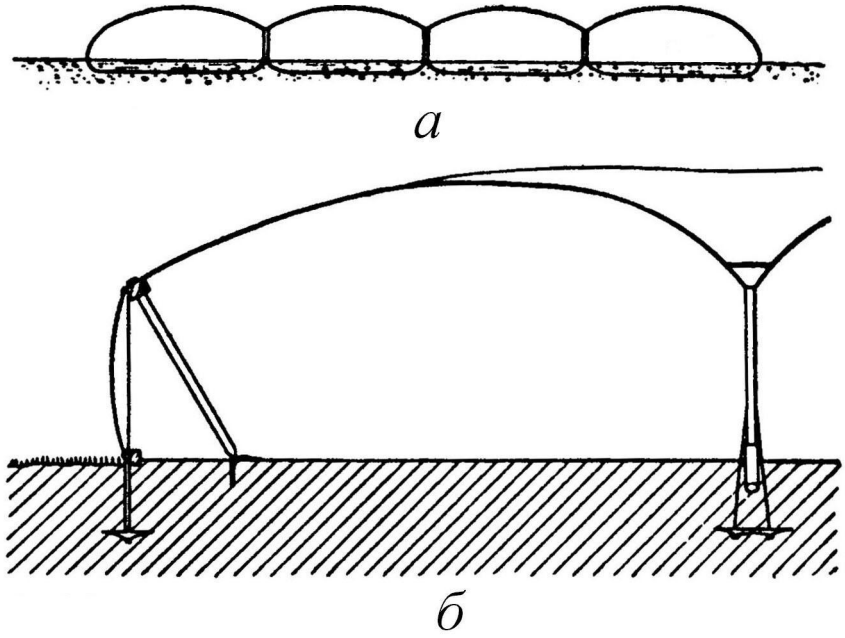


Рис.1.44. Пневматические пространственные конструкции с применением прозрачной пленки: а - теплица; б - покрытие с наружными рамами

Таким образом, слой перегноя используется как балласт для закрепления оболочки.

В зданиях теплиц, оранжерей и выставок часто необходимо разделять поверхности кровли и стен для того, чтобы применить материалы, отличающиеся прозрачностью или цветом, а также для монтажа входов, окон и вентиляционных установок.

В небольших сооружениях с малыми пролетами наружные рамы, в особенности, если они имеют малую высоту, выполняются из сопряженных с оболочкой стальных или более экономичных деревянных конструкций, к которым прикрепляются мембраны покрытия и стен. В садоводстве излюбленными являются так называемые «землянки», которые только слегка приподнимаются над поверхностью земли и используемая площадь которых опущена относительно уровня земли. Пленка покрытия в такой конструкции прибивается к краевому деревянному брусу, а во внутренней части покрытия крепится к стальному трубчатому кольцу, которое в свою очередь закрывается особой мембраной. Стальное кольцо соединяется с анкером несколькими тросами. Опорное усилие передается на мембрану покрытия с помощью кольца соответствующей размера, благодаря чему обеспечивается малая величина мембранных напряжений.

Не всегда есть нужда в жестком закреплении оболочки: мембрана может крепиться по краю оболочки прямо к фундаменту, работающему на растяжение, а на внутренних участках сама образует воронки внутреннего водоотвода. В этом случае мембрана сильно искривлена. Введением растяжек, закрепляемых на особых анкерах, напряжения в собственно покрытии могут поддерживаться более высокими, чем в мембране стен. Таким путем может быть создано покрытие плоской формы.

Как видно из поперечного разреза покрытия с внутренними водоотводами, расположенными на равных расстояниях (рис. 1.45, *а*), такая конструкция может как угодно развиваться по ширине и длине, сохраняя при этом постоянную высоту.

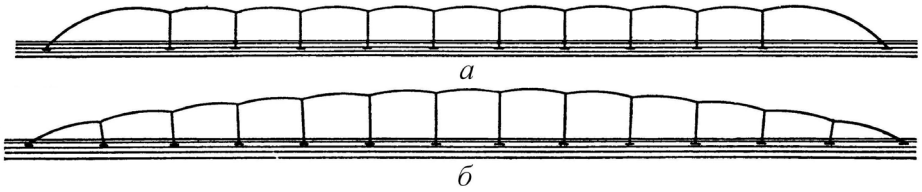


Рис. 1.45. Пневматические конструкции теплиц со специальными (а) и без специальных (б) краевых элементов

Сооружения такого типа целесообразно использовать для покрытия больших площадей, они могут применяться независимо от формы в плане и рельефа перекрываемого участка. Растянутые связи без затруднения закрепляются в любых грунтах, даже под водой. Расстояния между точками водоотвода определяют усилия, возникающие в мембране. В покрытиях из пленки для теплиц предпочтительны пролеты от 7 до 15 м, при применении тяжелых тканей – от 15 до 40 м и при усилении конструкции тросовой сеткой – свыше 60 м. Экономичны пролеты от 100 до 500 м, а технически возможны пролеты в несколько километров.

Была предпринята попытка создать экономичную конструкцию такого типа из сборных одинаковых элементов. Первоначально для края покрытия понадобились специальные элементы, однако позднее они также были унифицированы. В системе, показанной на рис. 1.45, *б* отсутствуют специальные краевые элементы. Мембрана крепится непосредственно к основанию. В дальнейшем были проведены опыты над моделью теплицы большой площади, форма которой характеризуется поперечным сечением, показанным на рис. 1.45, *б*. Большое прямоугольное покрытие разбивается на квадраты и имеет 28 точек внутреннего водоотвода. Едва ли какая-нибудь другая конструктивная форма позволяет создать внутренний объем такой легкости и прозрачности. Водоотводящие элементы в этом проекте выполняются в виде тонких высокоэластичных резиновых шлангов, которые под давлением дождевой воды могут расширяться.

Под подушкообразными конструкциями обычно понимают пневматически напряженные замкнутые оболочки, имеющие относительно плоскую форму. Если надуть оболочку, состоящую из двух квадратных мембран, соединенных между собой по краю, то образуется форма, приблизительно соответствующая некоторой поверхности вращения, к которой примыкают четыре конуса (рис. 1.46, *а*).

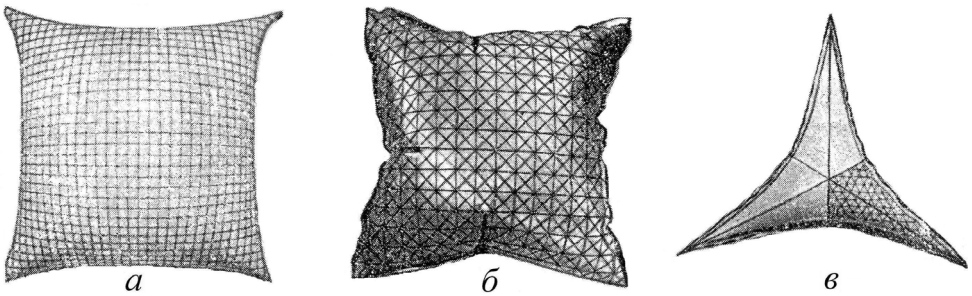


Рис. 1.46. Подушкообразные пневматические конструкции: а - из двух квадратных мембран; б - из малорастяжимого материала; в - из двух первоначально плоских резиновых мембран треугольной формы

В начале надувания по краю подушки возникают складки, которые затем исчезают благодаря растяжению резиновой пленки. Деформации пленки делаются видимыми с помощью сетки, нанесенной на мембрану в ненапряженном состоянии. Наиболее сильно мембрана растягивается в центре. Если применяется малорастяжимый материал, например баллонная шелковая материя (рис. 1.46, *б*), то обязательно возникают типичные для подушек краевые складки, избежать которых можно соответствующим раскроем. Несмотря на небольшую высоту, подушкообразная линзовидная форма может иметь относительно большой пролет, как, например, в том случае, когда две первоначально плоские резиновые мембраны треугольной формы, соединяясь боковыми круглыми канатами, образуют надувную оболочку (рис. 1.46, *в*).

Особенно эффективно всестороннее растяжение подушек или натяжение их на жестких рамах. Надуваемая линза вызывает в раме изгибающие усилия, при этом контурные рамы могут иметь разнообразную форму. В качестве примера линзообразной конструкции с жестким контуром может служить проект выставочного павильона, разработанный фирмой «Штромейер». Такой павильон можно смонтировать в короткое время.

Модулем в плане и по высоте (рис. 1.47, *б*, *в*) служит размер 2,5 м.

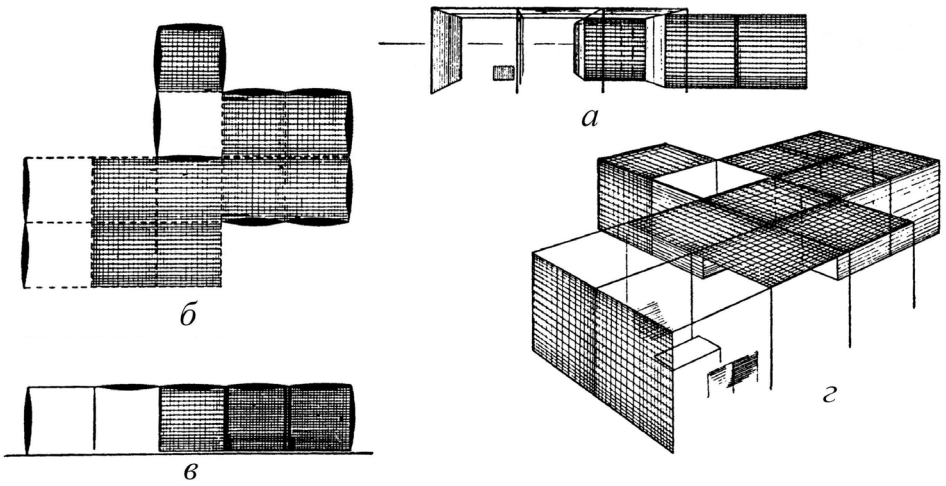


Рис. 1.47. Выставочный павильон фирмы "Штромейер": а, г - перспективы; б - план; в - боковой вид

Как видно на перспективах (рис. 1.47, *а*, *г*), павильон представляет собой каркас из стальных труб, к которым с помощью деревянных накладок привинчиваются двойные мембраны с проклеенным краем.

Пневматически напряженные линзы с успехом можно использовать для заполнения пространственных стержневых конструкций.

1.5.4. Емкости для жидкости. В рассматриваемых до сих пор пневматических конструкциях напряженное состояние вызывалось нагрузкой от давления воздуха. Жидкости также могут напрягать гибкую оболочку. В то время как резервуары, которые нагружаются давлением газа, должны быть герметично закрытыми, для резервуаров, наполненных жидкостью, это не обязательно. На эскизе (рис. 1.48, *а*) показана гибкая мембрана, подвешенная на кольце и нагруженная весом жидкости. Из диаграммы видно изменение давления жидкости в зависимости от высоты. Давление растет по мере увеличения глубины и равно произведению объемного веса жидкости на высоту. На рис. 1.48, *б* показана подобная же емкость. Она имеет покрытие в виде мембраны, нагружаемой изнутри давлением воды. В данном случае замкнутый резервуар нагружен только давлением жидкости без дополнительного напряжения. Дополнительное напряжение может быть введено, если резервуар является замкнутым и жидкость в нем находится под давлением, создаваемым или насосом, или присоединением трубы, наполненной жидкостью (рис. 1.48, *в*), что позволяет поддерживать давление жидкости даже в самой высокой точке такого резервуара.

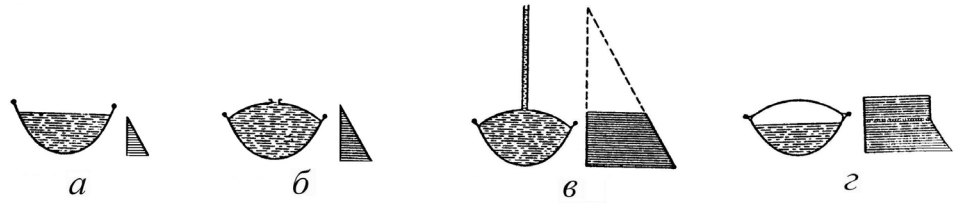


Рис. 1.48. Емкости для жидкости: а - подвешенная на кольце мембрана, нагруженная только давлением жидкости; б - замкнутый резервуар, нагруженный только давлением жидкости; в - замкнутый резервуар, нагруженный избыточным давлением жидкости; г - замкнутый резервуар, заполненный жидкостью и газом

Диаграмма нагрузки представляет собой трапецию, которую можно выразить суммой прямоугольной и треугольной ее частей. Прямоугольная часть выражает предварительную нагрузку, треугольная соответствует нагрузке от веса жидкости, заключенной между верхним и нижним уровнями резервуара.

В случае, показанном на рис. 1.48, *г* резервуар заполняется жидкостью и газом. Если при этом газ находится под давлением, то давление на стенки сосуда выражается диаграммой, приведенной на этом рисунке. Если резервуар заполнен только газом, диаграмма нагрузки становится прямоугольной; если же убрать избыточное давление газа, то этот случай соответствует диаграмме на рис. 1.48, *в*.

На рис. 1.49, *а* представлено поперечное сечение водяного резервуара высокого давления, который изготовлен из гибкой мембраны.

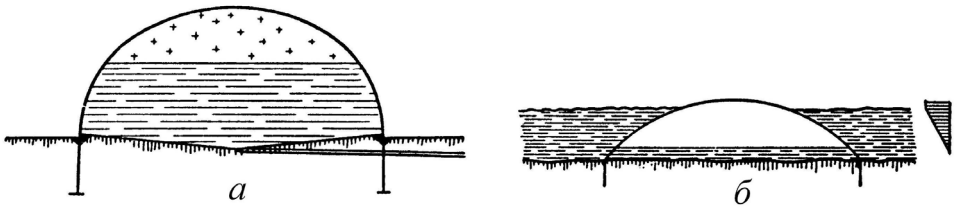


Рис. 1.49. Резервуары высокого давления для хранения: а - воды; б – газа

В резервуаре имеется воздушная подушка, с помощью которой давление воды поддерживается приблизительно одинаковым при различной высоте водяного столба. Приемный водопровод присоединяется в самой нижней точке резервуара. Хотя такой резервуар в случае больших размеров сильно напряжен, его конструкция экономична и имеет эксплуатационные преимущества по сравнению с классическим решением в виде водонапорной башни. Такие резервуары можно использовать не только для водоснабжения, но и для аккумулирования энергии.

Другой характер давления отражен на рис. 1.49, *б*. Купол, наполненный газом, находится под водой. В этом варианте купол испытывает давление воды, направленное внутрь. Поскольку избыточное давление внутри резервуара должно уравновешивать внешнее давление жидкости, наибольшая разность давлений, а следовательно, и нагрузка на мембрану будет не в нижней, а в верхней части. Такой подводный купол можно использовать, например, для проведения подводных работ по устройству оснований вместо кессона. Этот способ особенно экономичен при большой площади подводных работ и малых глубинах. Мембрана подводного купола может крепиться, например, к тяжелому жесткому кольцу с врезающимся в дно острым нижним краем или к заранее закрепленным глубоко расположенным анкерным устройствам.

Если из эластичного материала изготовить гибкую мембрану в форме ртутной или водяной капли и постепенно наполнять ее водой, то под действием водяного давления мембрана начнет медленно расширяться, как это показано на рис. 1.50, *а*.

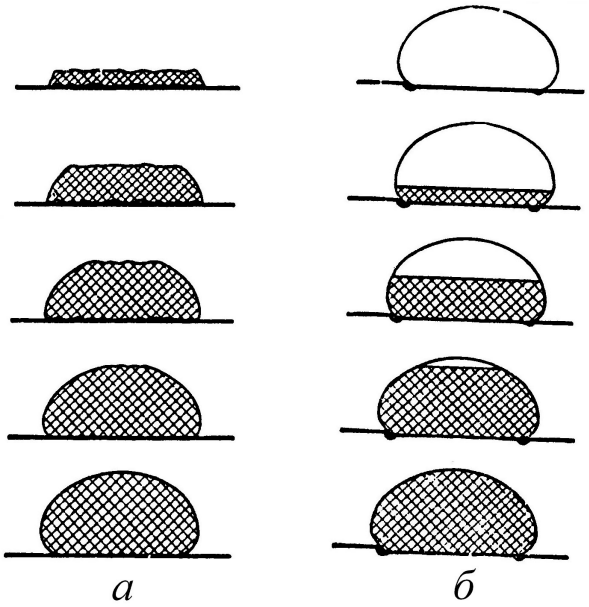


Рис. 1.50. Деформирование гибкой мембраны при ее наполнении: а - водой; б - газом

При этом сначала напрягается зона наибольшего диаметра, затем верхняя часть и, наконец, зона основания. На начальных стадиях заполнения такой резервуар относительно мягок и чувствителен к внешним нагрузкам, но при конечных приобретает значительную устойчивость. Если же для стабилизации резервуара используется дополнительно внутреннее давление

газа, в том числе и при пустом резервуаре (рис. 1.50, *б*), то форма оболочки должна подчиняться закону формообразования мембран, нагруженных давлением газа.

Резервуар следует крепить к основанию по опорному контуру, поскольку под действием давления газа мембрана основания стремится выпучиться и принять сферическую форму. В резервуаре с закрепленным контуром опирания можно хранить жидкости при различной степени заполнения, сохраняя при этом форму резервуара постоянной.

При нагружении равномерно распределенным давлением газа в оболочке резервуара возникает напряженное состояние, отличное от возникающего при нагружении жидкостью. Обусловленная этим деформация резервуара уменьшается при применении малодеформируемых материалов. Резервуар из таких материалов, постоянно нагружаемый давлением жидкости или газа, на любой стадии нагружения сохраняет форму.

Одним из существенных преимуществ гибких сворачиваемых емкостей является то, что на каждой стадии заполнения нет необходимости применять газ. В особенности это важно при хранении взрывчатых веществ, когда нельзя допускать проникновения в резервуар кислорода.

Изучение формы падающей капли жидкости позволяет определить рациональные очертания резервуаров, что особенно важно при конструировании больших емкостей для транспортировки жидкостей. Область их применения все более расширяется, поскольку при перегрузке можно пользоваться простыми подъемными средствами.

При проектировании транспортабельных емкостей нужно учитывать, что они могут перевозиться на различных видах транспорта, например на грузовиках, на кораблях и даже по канатным дорогам. Резервуары можно устанавливать в вертикальном положении на горизонтальном основании или подвешивать (рис. 1.51, *а*, *б*), что имеет большое значение в тех случаях, когда требуется быстрая выгрузка из склада или экономия дорогостоящей площади.

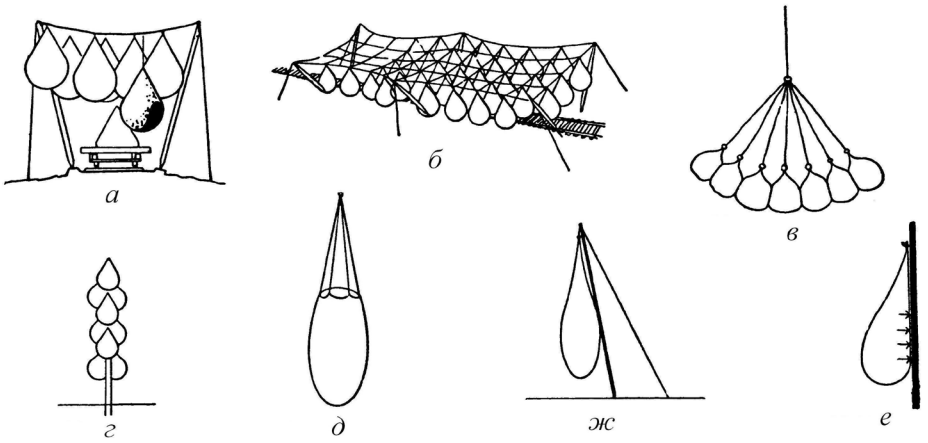


Рис. 1.51. Методы размещения резервуаров: а - вертикальная установка; б - вертикальная подвеска; в - гроздевое соединение; г - подвеска на мачтах; д - подвеска на тросах; е - подвеска на стене; ж - подвеска на мачте с оттяжками

Резервуары, подвешенные к тросовой сетке, могут опускаться из этого положения непосредственно на железнодорожную платформу или в кузов автомобиля для дальнейшей транспортировки. Небольшие резервуары могут соединяться в гроздья (рис. 1.51, *в*). Возможна также их подвеска на мачтах (рис. 1.51, *г*).

В гибких резервуарах объем верхней части вблизи точки подвеса невелик, верхняя часть резервуара может заменяться тросами (рис. 1.51, *д*) или же резервуар яйцевидной формы или в форме эллипсоида помещается в тросовую сетку соответствующей формы. При подвешивании гибкого резервуара применяется несколько основных решений. Резервуар, изображенный на рис. 1.51, *ж*, подвешивается к мачте, раскрепленной оттяжками; на рис. 1.51, *е* – к стене, причем в таких случаях нужно иметь в виду, что резервуар оказывает значительное боковое давление на стену. Широко применяемая емкость для транспортирования цемента показана на рис. 1.52.

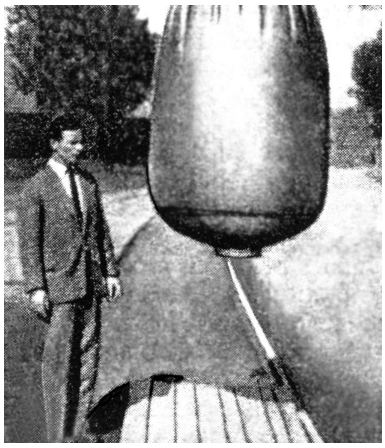


Рис. 1.52. Емкость для транспортирования цемента

Каплевидные резервуары могут заполняться не только жидкостями, но и сыпучими материалами – зерном, мукой, цементом и др. Размеры транспортабельных емкостей ограничиваются в основном грузоподъемностью транспортных средств и подъемных механизмов. Стационарные емкости, как, например, элеваторы для зерна, становятся наиболее экономичными при больших размерах.

Применение воздушных баллонов возможно при производстве строительных работ под водой или при добыче подводных ископаемых: с помощью каплевидных емкостей, наполняемых воздухом, со дна могут подниматься значительные тяжести. Подводные баллоны могут использоваться в качестве резервуаров высокого давления для хранения газов; с их помощью можно извлекать из грунта сваи или проверять несущую способность подводных анкерных фундаментов.

Детальными исследованиями установлено, что плавучее тело, располагающееся глубоко под водой, не испытывает влияния даже сильного волнения на поверхности и может быть использовано для опирания жесткой стойки, раскрепляемой тросами или тросовыми сетками, заанкеренными на дне. Вертикальная мачта воспринимает положительные нагрузки от мостового строения, которые уравновешиваются подъемной силой плавучего тела. Поплавки могут конструироваться различным образом, например, в виде воздухонаполненных подводных баллонов, которые имеют то преимущество, что в случае необходимости легко могут сменяться. Для смены баллона из него выпускается воздух, и баллон поднимается на поверхность. Новый баллон пустым опускается под воду и там наполняется воздухом. Смена баллонов может выполняться и без водолазов, если баллоны прикрепляются к системе тросов, позволяющей осуществлять погружение сверху. Поскольку воздушное давление внутри баллонов должно

противостоять только давлению воды, оболочки баллонов, изготовляемые из тяжелых тканей с пластмассовым покрытием и проволочным усилением, испытывают относительно небольшие напряжения.

При перевозке на транспорте большую роль играет надежное укрепление гибкой емкости. Мягкие емкости из высокопрочных тканей с плотным покрытием завоевали признание для хранения взрывоопасного бензина, так как при выкачивании из емкости легковоспламеняющейся жидкости нет необходимости подавать внутрь воздух. Удалось создать относительно стойкие к проколам и пробоинам емкости из многослойных тканей с внутренними защитными слоями из пластмассы. Такая конструкция оболочки обеспечивает автоматическую закупорку отверстий при случайном проколе.

Мягкие оболочки могут быть эффективно применены в самых различных областях народного хозяйства. Пластмассовые емкости, погруженные в воду, были применены для хранения вина во время рекордного урожая в Мозельской области. Одна из американских фирм разработала емкость больших размеров, приспособленную для перевозки на автомашинах. На реке Лос-Анджелес была построена плотина, представляющая собой длинную надувную трубу из нейлоновой ткани с неопреновым покрытием, усиленную по бокам и в основании. Плотина служит для отвода определенного количества воды на поля орошения. С помощью внутреннего давления воды оболочка раздувается до диаметра 1,55 м. Как только высота воды, переливающейся через плотину, превысит 20 см, оболочка автоматически складывается. После пропуска паводковых вод плотина снова надувается. Заполнение ее водой производится за 25 мин. Плотина освобождается от воды с помощью сифона всего за 12 мин. Срок службы такой плотины – от 6 до 10 лет.

Пневматически напряженные оболочки можно использовать в соединении с другими конструктивными элементами в виде сжатых стоек, тросов, мембран и т.д. Так, например, на рис. 1.53 показана башня на растяжках, которая приняла проектное положение по мере наполнения воздухом отдельных камер, начиная с нижней.

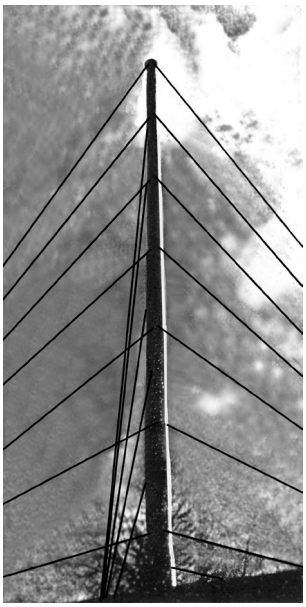


Рис. 1.53. Башня на растяжках из отдельных пневматически напряженных камер

Жесткость пневматических стержней может быть увеличена с помощью мембранных диафрагм или тросовых сеток. На рис. 1.54, *а* показан способ увеличения жесткости сжатого стержня с помощью тросовой сетки, которая обтягивает располагающийся внутри надувной баллон.

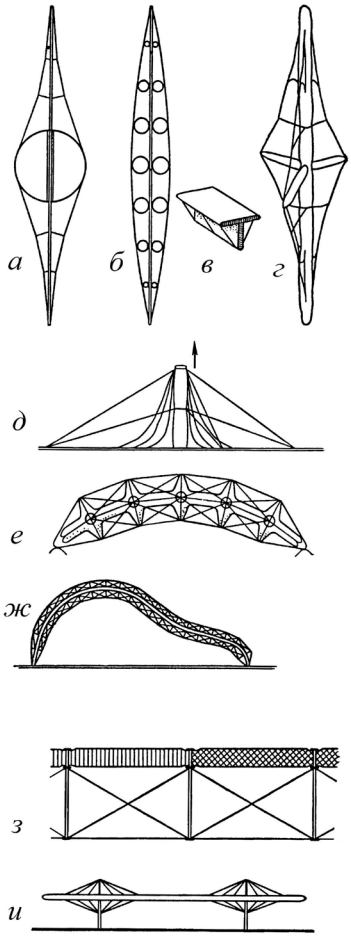


Рис. 1.54. Способы увеличения жесткости сжатого стержня с помощью: а - тросовой сетки; б, г - кольцевых надувных труб; в - жесткой балки таврового сечения, состоящей из "сэндвичей"; д - пневматической быстровозводимой мачты из нескольких камер; е - пневматического рукава с боковыми отростками дополнительно обтянутого тросами; ж - призматической оболочки состоящей из подушкообразных пневматически напряженных "сэндвичей"; з - шпренгельного "сэндвича"; и - пневматически напряженной плиты типа "сэндвич", подвешиваемой на тросах к стойкам

На рис. 1.54, *б* кольцевые надувные трубы переменного диаметра опоясывают центральный сжатый стержень так, что внешняя мембрана или тросовая сетка оказывается напряженной, что приводит к увеличению жесткости сжатого стержня. Подобная же конструкция изображена на рис. 1.54, *г*, причем сжимаемый стержень сам является пневматически

напряженной оболочкой. На рис. 1.54, *в* показана жесткая балка таврового сечения, состоящая из «сэндвичей». Пневматическая быстровозводимая мачта, используемая для установки антенны или как наблюдательная вышка, состоит из нескольких камер (рис. 1.54, *д*).

Пневматический рукав с боковыми отростками (рис. 1.54, *е*) обтягивается дополнительно тросами и образует арку или элемент цилиндрического свода. Поперечный разрез призматической оболочки приведен на рис. 1.54, *ж*; оболочка состоит из подушкообразных пневматически напряженных «сэндвичей». С помощью опирающихся на «сэндвичи» небольших сжатых жестких стержней конструкция обтягивается тросовыми сетками. На рис. 1.54, *з* показан шпренгельный «сэндвич»; поперечный разрез сооружения с покрытием в виде пневматически напряженной плиты типа «сэндвич», подвешиваемым на тросах к стойкам, приведен на рис. 1.54, *и*.

Особое место занимают конструкции, особенность которых заключается в том, что они могут работать как пневматически напряженные мембраны, а также как мембраны, предварительное напряжение в которых производится механическим путем. Такое соединение двух различных конструктивных принципов может показаться на первый взгляд излишним. Однако при внимательном рассмотрении оно представляет значительный интерес.

Так, например, островерхий шатер (рис. 1.55, *а*), открытый со всех сторон, летом при отсутствии снеговых нагрузок представляет собой предварительно напряженную мембрану, образующую большой навес.

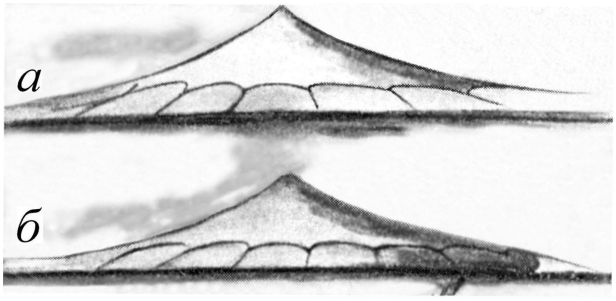


Рис. 1.55. Способы напряжения мембран: а - механический; б – пневматический

Зимой центральная стойка сильно нагружается выпадающим снегом. Кроме того, зимой необходимо создание отапливаемого замкнутого внутреннего объема. Если закрыть проемы по бокам оболочки (рис. 1.55, *б*) и создать внутри избыточное давление, то внутренняя опора будет разгружена. Возникающая при этом форма покрытия удовлетворяет условию

формообразования оболочки и при соответствующем давлении может воспринимать снеговую нагрузку.

Таким простым способом достигается легкая приспосабливаемость сооружений к различным временам года. В тех же областях, где отсутствует снеговая нагрузка, конструктивное переоборудование сооружения в соответствии с временем года не обязательно. В общем случае сооружение летнего типа нецелесообразно рассчитывать на восприятие снеговых нагрузок. Гораздо проще переоборудовать сооружение в пневматически напряженную оболочку, чем может быть достигнут значительный экономический эффект.

Как уже указывалось при рассмотрении закона формообразования пневматических конструкций, сооружения в форме купола или цилиндрического свода складываются при отсутствии внутреннего избыточного давления. Для того чтобы избежать этого, можно использовать поддерживающие тросы или же конструкция может опираться на внутренние стойки. Систему тросов и внутренние опоры можно при этом рассчитывать на очень малую нагрузку, поскольку они нагружены только собственным весом мембраны и небольшими усилиями предварительного напряжения. Ветровая нагрузка оказывает разгружающее действие. Для восприятия снеговых нагрузок внутри сооружения создается избыточное давление.

Возможны различные формы конструкций, периодически напрягаемых избыточным давлением. Так, разработана тонкая плита покрытия из эластичного материала, воспринимающая положительные нагрузки с помощью избыточного давления. При этом сооружение является замкнутым, но если положительные нагрузки отсутствуют, оно может быть открытым с боков и эксплуатироваться без избыточного давления.

1.6. Трубопроводные системы

1.6.1. Магистральные трубопроводы. Трубопроводный транспорт природного газа, нефти, нефтяных и химических продуктов, воды, угольной пульпы, железорудных концентратов и других продуктов во второй половине XX в. получил необычайно быстрое развитие. Его по праву можно назвать транспортом эпохи научно-технической революции. Он наиболее логично вписывается в фундаментальные закономерности совершенствования современного производства.

Прослеживается тенденция к расширению сферы применения трубопроводного транспорта. Растет строительство трубопроводов для дальнего транспорта воды, химических продуктов, рассолов, угля, железорудных концентратов, фосфатов, конденсата, серы, углекислого газа,

сырья для минеральных удобрений, продукции пищевой промышленности и сельского хозяйства.

Технический уровень определяет теперь появление нового поколения сверхмощных газопроводов диаметром 1420 мм, рассчитанных на давление 7,4 МПа, и нефтепроводов диаметром 1220 мм, рассчитанных на давление 6,4 МПа.

Построен самый крупный в мире аммиакопровод Тольятти-Одесса, концентратопроводы в Норильске, Лебединский Гок-Старый Оскол и первый трубопровод для подачи водоугольной суспензии Белово-Новосибирск. Созданы первые трубопроводные пневмосистемы.

На американском континенте построен Трансаляскинский нефтепровод. Эта наиболее протяженная мощная магистраль представляет в техническом отношении значительный интерес. Нефтепровод диаметром 1220 мм с давлением 7 МПа имеет протяженность 1287 км, причем на длине 469 км трубопровод проложен надземно на опорах. Нефтепровод связал месторождения Прухо-Бей с портом Валдиз на Тихоокеанском побережье, он пересек всю территорию Аляски. До 70 % трассы проходит по вечномерзлым грунтам. На трубопроводе построено 12 насосных станций. Поскольку нефть имеет рабочую температуру 49 ^{O}C, на всем протяжении трубы теплоизолированы. Полностью нефтепровод сдан в эксплуатацию в 1980 г., его стоимость 8,7 млрд. дол.

Выдающимся сооружением трубопроводного транспорта является газопровод Алжир-Тунис-Италия с переходом через Средиземное море и Мессинский пролив. Газопровод, который берет свое начало в Сахаре на месторождении Хасси-ер-мель, имеет протяженность 2500 км, основной диаметр 1220 мм, рабочее давление 7,5 МПа. Морской переход из трех ниток диаметром 508 мм имеет длину 160 км. Давление на переходе 15 МПа, возможно его повышение до 20,7 МПа. Глубина моря в створе перехода достигает 610 м. В морской акватории газопроводы прокладывались фирмой «Снампроджетти» с трубоукладочной баржи «Касторо VI».

Это только отдельные примеры наиболее интересных инженерных решений трубопроводного транспорта.

В состав магистральных трубопроводов входят трубопровод с ответвлениями и лупингами, переходами через естественные и искусственные препятствия, с узлами подключения к насосным и компрессорным станциям и другим объектам, с узлами пуска и приема очистных устройств, с запорной и регулирующей арматурой, с конденсатосборниками и устройствами для ввода метанола; системы электрохимической защиты трубопроводов от коррозии, линии и сооружения технологической связи, средства телемеханики трубопроводов; линии электропередачи, предназначенные для обслуживания трубопроводов и дистанционного управления арматурой и установками электрохимической

защиты; противопожарные средства, противоэрозионные и защитные сооружения трубопроводов; земляные амбары для аварийного сброса нефти, нефтепродуктов, конденсата и сжиженных нефтяных газов; здания и сооружения линейной службы эксплуатации трубопроводов; дороги и вертолетные площадки для обслуживания трубопроводов, опознавательные и сигнальные знаки местонахождения магистралей; головные и промежуточные перекачивающие и наливные насосные станции, резервуарные парки, компрессорные и газораспределительные станции; станции подземных хранилищ газа; пункты подогрева нефти и нефтепродуктов [14].

Магистральные трубопроводы прокладываются подземно, по поверхности земли, в насыпи или на опорах (надземная прокладка); одиночно или группами в технологическом коридоре.

Под технологическим коридором магистральных трубопроводов подразумевается система параллельно проложенных трубопроводов по одной трассе.

Магистральные газопроводы в зависимости от рабочего давления подразделяются на два класса: I – при рабочем давлении от 2,5 до 10,0 МПа включительно; II – при рабочем давлении от 1,2 до 2,5 МПа включительно.

Магистральные нефте- и нефтепродуктопроводы в зависимости от диаметра подразделяются на четыре класса: I – при условном диаметре от 1000 до 1200 мм включительно; II – то же, от 500 до 1000 мм включительно; III – то же, от 300 до 500 мм включительно; IV – то же, не более 300 мм.

Магистральные трубопроводы и их участки подразделяются на категории в зависимости от условий работы, объема неразрушающего контроля сварных соединений и испытательного давления.

Расстояния между параллельно строящимися и действующими трубопроводами в одном технологическом коридоре, кроме районов Западной Сибири и Крайнего Севера, принимаются из условия обеспечения надежности при строительстве и эксплуатации. Расстояние между параллельными нитками нефте- и нефтепродуктопроводов необходимо предусматривать, как для газопроводов. При параллельной прокладке трубопроводов разных диаметров расстояния между ними принимаются, как для трубопровода большего диаметра.

При прокладке в одном технологическом коридоре параллельных ниток трубопроводов в районах Западной Сибири и Крайнего Севера в грунтах, теряющих при оттаивании несущую способность (в вечномерзлых грунтах) расстояния между газопроводами принимаются с учетом гидрогеологических особенностей.

1.6.2. Конструктивные решения магистральных трубопроводов. Диаметр магистральных трубопроводов выбирается исходя из требуемой

пропускной способности в соответствии с нормами технологического проектирования [14].

Радиусы изгиба трубопровода в горизонтальной и вертикальной плоскостях определяются расчетом из условий прочности, местной устойчивости и устойчивости положения. Из условия размещения очистных устройств минимальный радиус изгиба трубопровода должен составлять не менее пяти его диаметров.

Прямые вставки (патрубки), вваривaемые в трубопровод, должны иметь длину не менее 250 мм.

На магистральных трубопроводах устанавливается запорная арматура на расстояниях, определяемых расчетом, но не более 30 км. Запорная арматура устанавливается также на обоих берегах водных преград при их пересечении трубопроводом в две нитки и более и на однониточных переходах категории В; в начале каждого ответвления от трубопровода на расстоянии не менее 15 м; на входе и выходе газопроводов из установок комплексной подготовки газа, компрессорных станций, станций подземного хранения газа и головных сооружений на расстоянии не менее: 750 м для газопровода диаметром 1400...1000 мм включительно и 500 м – для газопровода диаметром менее 1000 мм; на одном или обоих концах участков нефте- и нефтепродуктопроводов, проходящих на отметках выше максимальных отметок городов, других населенных пунктов и промышленных предприятий. Заглубление трубопровода, м, до верха трубы при подземной прокладке принимается не менее:

При условном диаметре:

- до 1000 мм 0,8;
- 1000...1400 мм 1,0;
- на болотах или торфяных грунтах, подлежащих осушению 1,1;
- песчаных барханах, считая от нижних отметок межбарханных оснований 1,0;
- в скальных породах, болотистой местности при отсутствии проезда автотранспорта и сельскохозяйственных машин 0,6;
- на пахотных и орошаемых землях 1,0;
- при пересечении оросительных и осушительных (мелиоративных) каналов 1,1.

Глубина заложения нефте- и нефтепродуктопроводов (от дна канала) определяется обеспечением оптимальных режимов перекачки и свойств перекачиваемых продуктов в соответствии с нормами технологического проектирования.

Ширину траншеи по низу назначают: D+300 мм для трубопроводов диаметром до 700 мм; 1,5D диаметром 700 мм и более.

При балластировке трубопроводов грузами ширина траншеи назначается из условия обеспечения расстояния между грузами и стенкой траншеи не менее 0,2 м.

При пересечении трубопроводов расстояние между ними в свету принимается не менее 350 мм, а само пересечение выполняется под углом не менее 60°.

При прокладке трубопроводов по направлению уклона местности свыше 20% предусматривается устройство противоэрозионных экранов и перемычек из естественного грунта (глины) или из искусственных материалов.

При прокладке трубопроводов на косогорах предусматривается устройство нагорных каналов для отвода поверхностных вод.

При поперечном уклоне косогора 12...18° с учетом свойств грунта устраиваются уступы для предотвращения сползания грунта по косогору.

В оползневых районах при малой толщине сползающего слоя грунта трубопровод заглубляется ниже плоскости скольжения. Оползневые участки большой протяженности необходимо обходить выше оползневого склона.

При прокладке трубопроводов по узким гребням водоразделов предусматривается срезка грунта на ширине 8...12 м с обеспечением уклона 2% в одну или обе стороны.

При пересечении селей применяется, как правило, надземная прокладка.

Надземная прокладка используется в пустынных районах, на заболоченных территориях и на вечной мерзлоте, в горных районах и в районах горных выработок и оползней, а также при переходах через естественные и искусственные препятствия.

Наземная прокладка применяется на участках с резко пересеченным рельефом местности, на вечной мерзлоте и на заболоченных территориях, при этом часто возводятся специальные земляные дамбы.

Конструктивные решения, обеспечивающие защиту подземных трубопроводов от воздействия горных выработок, предусматривают увеличение деформативной способности трубопроводов в продольном направлении за счет применения компенсаторов, устанавливаемых в специальных нишах, предохраняющих от защемления грунтом.

Сейсмичность при проектировании и строительстве трубопроводов учитывается для районов с сейсмичностью свыше 6 баллов для надземной прокладки и свыше 8 баллов – для подземных трубопроводов. Сейсмостойкость трубопроводов обеспечивается выбором благоприятных участков трасс, рациональными конструктивными решениями и специальными антисейсмическими мероприятиями, а также дополнительным запасом прочности и устойчивости при расчете.

Проектирование трубопроводов для прокладки в районах вечномерзлых грунтов осуществляется в соответствии с требованиями общегосударственных и ведомственных норм. Выбору трасс должно предшествовать инженерное и криологическое изучение территории с целью выбора наиболее благоприятных участков.

Тепловое взаимодействие газопроводов с вечномерзлыми и талыми грунтами регулируется за счет охлаждения газа.

В общем случае температура транспортируемого продукта при прокладке трубопроводов на вечномерзлых грунтах назначается в зависимости от способа прокладки и физических свойств вечномерзлых грунтов и, в первую очередь, от их просадочности и пучения.

На участках трасс трубопроводов допускается оттаивание малольдистых вечномерзлых грунтов, если оно не сопровождается карстовыми процессами и потерей несущей способности трубопровода, а также промерзание талых непучинистых грунтов при транспортировке газа с отрицательной температурой.

1.6.3. Переходы трубопроводов через искусственные и естественные препятствия. К естественным и искусственным препятствиям относятся: реки, водохранилища, каналы, озера, пруды, ручьи, болота, овраги, балки, железные и автомобильные дороги.

Переходы через водные преграды в подавляющем большинстве случаев строятся как подводные переходы с заглублением в дно пересекаемых водных преград. Величина заглубления устанавливается с учетом возможных деформаций русла и предполагаемых дноуглубительных работ. На основании гидрологических, инженерно-геологических и топографических изысканий с учетом действующих и намечаемых к строительству гидротехнических сооружений, влияющих на водный режим, назначаются створы и границы переходов [14, 16, 26].

Границами подводного перехода, определяющего его длину, принимаются: для многониточных переходов – участок, ограниченный запорной арматурой, установленной на берегах; для однониточных переходов – участок, ограниченный горизонтом высоких вод не ниже отметок 10% обеспеченности.

Переходы нефте- и нефтепродуктопроводов через реки и каналы располагают, как правило, ниже по течению от мостов, промышленных предприятий, пристаней, водозаборов и гидротехнических сооружений, а также нерестилищ и массового обитания рыб.

Подводные трубопроводы в границах горизонта высоких вод не ниже 1% обеспеченности рассчитываются против всплытия. Для предотвращения всплытия в русловой части трубопровод выполняется из обетонированных труб либо на него устанавливаются чугунные или железобетонные грузы. На

пойменных участках используются чаще всего грузы и, в отдельных случаях, анкеры.

При ширине водных преград при меженном горизонте 75 м и более в местах пересечения водных преград трубопроводом следует предусматривать прокладку резервной нитки. Для многониточных переходов проектом устанавливается количество резервных ниток независимо от ширины водной преграды. Минимальное расстояние между основной и резервной нитками при диаметре газопровода до 1000 мм включительно должно быть 30 м, при диаметре более 1000 мм – 50 м.

Отключающую арматуру на подводных переходах устанавливают на обоих берегах водной преграды вне предела горизонта высоких вод 10% обеспеченности свыше 20-дневного стояния.

Переходы через болота могут укладываться непосредственно в грунте, по поверхности болота с последующей отсыпкой насыпи или на опорах.

Болота по возможностям строительства делятся на три типа: I – болота, целиком заполненные торфом, допускающие работу и неоднократный проход болотной техники с давлением 20...30 кПа или работу обычной техники с использованием щитов, сланей либо дорог, обеспечивающих снижение давления на поверхность залежи до 20 кПа; II – болота, целиком заполненные торфом, допускающие работу и передвижение строительной техники только по щитам, сланям или дорогам, обеспечивающим снижение давления на поверхность залежи до 10 кПа; III – болота, заполненные растекающимся торфом и водой с плавающей торфяной коркой (сплавиной) и без сплавины, допускающие работу только специальной техники на понтонах или обычной техники с плавучих средств.

При подземной прокладке трубопроводов через болота II и III типов длиной свыше 500 м допускается прокладка резервной нитки.

Переходы трубопроводов через железные и автомобильные дороги устраиваются в местах прохождения дорог по насыпям либо в местах с нулевыми отметками и в исключительных случаях в выемках дорог. Прокладка трубопровода через тело насыпи не допускается.

Пересечение трубопровода с железными и автомобильными дорогами осуществляется, как правило, под углом 90^{O} (но не менее 90^{O}). Конструкция перехода определяется категорией дороги и геологическими особенностями участка пересечения. Трубопроводы на переходах прокладываются в металлических футлярах-кожухах, чтобы исключить механические нагрузки на рабочую трубу. Границы установки футляра под дорогой определяют с учетом диаметра и длины рабочей трубы трубопровода.

Под железными и автомобильными дорогами I и II категорий футляр укладывают закрытым способом (горизонтальное бурение, продавливание, прокалывание и др.). Через автомобильные дороги III и IV категорий футляр может укладываться открытым способом.

Вытяжная свеча располагается от оси крайнего пути железных дорог общего пользования на расстоянии не менее 40 м, промышленных дорог – не менее 25 м, от половины земляного полотна автомобильных дорог – на расстоянии не менее 25 м.

На концах защитных футляров устраиваются уплотнения из изоляционного материала.

Заглубление участков трубопроводов, прокладываемых под железными дорогами общей сети, должно быть не менее 2 м от подошвы рельса до верхней образующей защитного футляра, а в выемках и на нулевых отметках, кроме того, не менее 0,5 м от дна кювета, лотка или дренажа.

Заглубление участков трубопроводов, прокладываемых под автомобильными дорогами всех категорий, должно приниматься не менее 1,4 м от верха покрытия дороги до верхней образующей защитного футляра, а в выемках и на нулевых отметках, кроме того, не менее 0,4 м от дна кювета, водоотводной канавы или дренажа.

При прокладке трубопровода без защитных футляров указанные глубины следует принимать до верхней образующей трубопровода.

При прокладке трубопроводов через овраги и балки расстояния от низа трубы или пролетного строения принимаются: при пересечении оврагов и балок – не менее 0,5 м до уровня воды при 5% обеспеченности; при пересечении несудоходных, несплавных рек, больших оврагов, где возможен ледоход, – не менее 0,2 м до уровня воды при 1% обеспеченности и от наивысшего горизонта ледохода.

На участках оврага или балки, где имеется резкий перепад поверхности земли, на трубопроводе устанавливаются кривые вставки. Радиус таких вставок и их число предусматриваются в проекте.

Надземную прокладку магистральных трубопроводов конструктивно оформляют различным образом. В зависимости от конструктивной схемы перекрытия пролетов надземные переходы бывают балочные, висячие и арочные.

В балочном надземном переходе пролетным строением является самонесущая труба. Схемы переходов показаны на рис. 1.56.

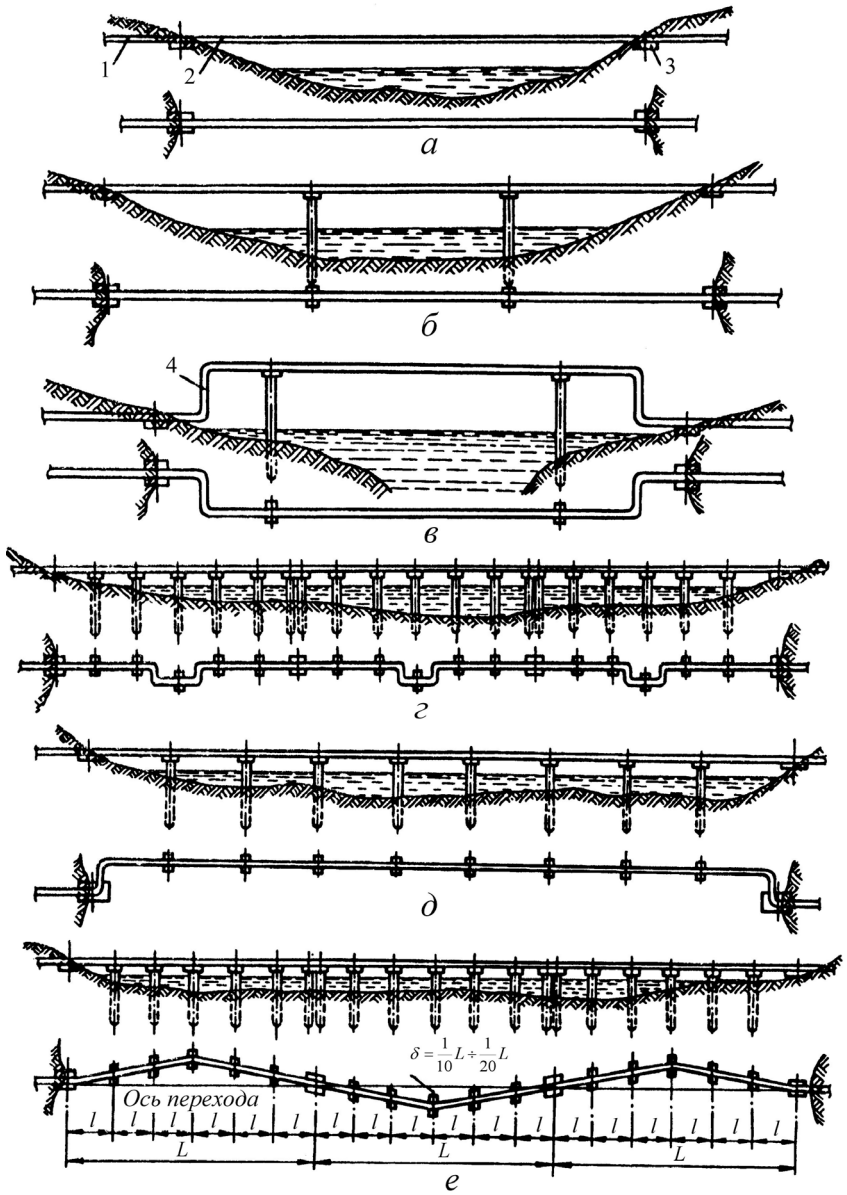


Рис. 1.56. Надземные балочные трубопроводные переходы: а - однопролетный; б - многопролетный; в - однопролетный с компенсатором; г - многопролетный с П-образным с компенсатором; д - многопролетный с Г-образным с компенсатором; е - многопролетная змейка; 1 - подземный участок; 2 - надземный участок; 3 - железобетонная опора; 4 - с компенсатор

Применение конкретной схемы перехода зависит от диаметра газопровода, нагрузки, гидрогеологических условий и способа монтажа перехода.

Опоры бывают четырех типов: сварные, кольцевые, стоечные и плитные. Тип опоры определяется в проектном решении в зависимости от конкретных условий строительства. Опорные части бывают трех типов: катковые, скользящие и неподвижные.

Существует два метода монтажа: разрезной, при котором газопровод укладывают на опоры отдельными секциями, равными по длине расстоянию между опорами, и неразрезной, при котором газопровод укладывают плетями, в несколько раз превосходящими по длине расстояние между опорами.

При зигзагообразной (в виде змейки) прокладке длина газопровода получается меньше, чем при прямолинейной с установкой П- и Г-образных компенсаторов.

Висячие переходы по конструктивной схеме делятся на три основные группы: гибкие, вантовые и «провисающая нить». В гибких висячих системах трубопровод прикрепляют с помощью подвесок к одному или нескольким несущим тросам, перекинутым через пилоны (рис. 1.57, *а*).

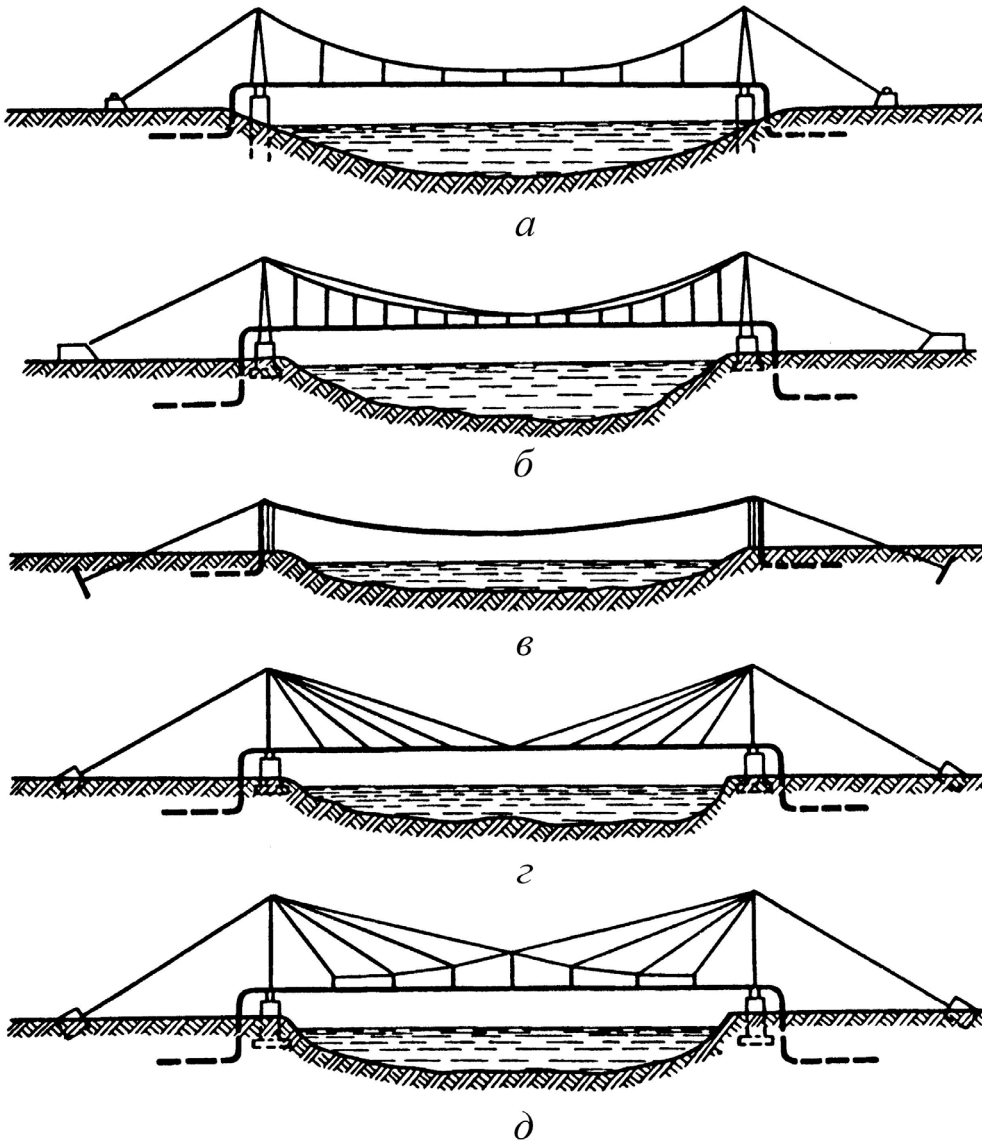


Рис. 1.57. Висячие трубопроводные переходы: а - гибкий висячий (одноцепная система с несущим средним тросом); б - гибкий висячий (двухцепная система с подвеской трубопровода к нижним тросам); в - система “провисающая нить” с оттяжками из тросов; г - вантовая система лучевая; д - система Жисклера

В случае применения двух тросов, пересекающихся посередине пролета, образуется более жесткая двухцепная система (рис. 1.57, *б*).

1.7. Пролетные строения автодорожных, городских и пешеходных мостов и трубопроводных переходов

1.7.1. Общие сведения. Тенденции развития. В конце XVIII и начале XIX вв. в ряде стран Европы были сооружены первые чугунные арочные и висячие мосты с шарнирными цепями из плоских звеньев. Один из первых чугунных мостов через р. Уир в Англии имел пролет 72 м. В России арочные мосты строили в виде сплошных сводов из пустотелых чугунных клиньев, соединяемых болтами. Элементы чугунных мостов, особенно сложной конфигурации, были весьма трудоемки в изготовлении, а литейные дефекты в них снижали прочность и долговечность пролетных строений. Поэтому дальнейшее развитие конструктивных форм металлических мостов связано с применением сварочного железа, литой стали и заклепочных соединений.

В 1820-1840 гг. с увеличением производства сварочного железа начали выпускать листовой и фасонный прокат, а в 1860-х годах был освоен такой прокат из более дешевой и качественной литой стали, что создало благоприятные предпосылки для строительства металлических мостов. В 1840-х годах по схеме 88,7+202,6+88,7 м и в 1870-х годах по схеме 6×87,8 м в Будапеште построено два городских металлических моста через р. Дунай. Особенно много мостов в этот период построено на железных дорогах. В качестве примера можно назвать железнодорожный стальной мост по схеме 8×41,4 м через р. Тиссу у Сегеда, открытый для движения в 1858 г. В России по проектам Н.А. Белелюбского, Л.Д. Проскурякова, Е.О. Патона и др. были возведены стальные мосты через реки Волгу, Волхов, Енисей, Днепр, Москву и др.

В конце XIX и начале XX вв. сооружались мосты преимущественно с металлическими пролетными строениями. Получила развитие теория расчета сооружений, были проведены всесторонние экспериментально-теоретические исследования мостов различных систем, внедрены новые марки сталей. Это позволило внести существенный вклад как в развитие конструктивных решений металлических мостов, так и в технологию изготовления их элементов и методов монтажа. Были разработаны и внедрены в практику строительства новые типы балочных, арочных, висячих и вантовых, особенно большепролетных, мостов. Наибольший мостовой пролет (ферма Фортского моста в Шотландии пролетом 521 м), сооруженный в конце XIX в., перешагнул 500-метровую отметку, а с открытием в 1931 г. моста им. Дж.Вашингтона в США – 1000-метровую.

Металлические пролетные строения в упомянутый период были в клепаном исполнении. В 1928 г. под руководством В.П.Вологдина впервые был построен сварной мост пролетом 25,08 м. Примерно в то же время

первые сварные пролетные строения появляются в Польше и Германии. Сооружается сварной железнодорожный мост пролетом 42 м в США через водопад Чикопэ. В 1935 г. на железнодорожной линии Уфа-Ишимбаево построен мост с цельносварной сквозной фермой пролетом 45 м, а в Венгрии сдан в эксплуатацию сварной мост со сквозной фермой пролетом 53,1 м. С этих пор сварка во всех странах как более прогрессивный технологический процесс последовательно вытесняет клепку при изготовлении металлических мостов [5, 14, 17].

Начальный этап развития сварного мостостроения характеризуется отсутствием опыта проектирования сварных пролетных строений, их расчета, изготовления, испытания и эксплуатации. Преимущественное внимание уделялось проектированию. Объяснялось это прежде всего необходимостью изыскать рациональные формы, соответствующие новому технологическому процессу, и стремлением обеспечить прочность сварных соединений в эксплуатации. В таких условиях проектировщики неизбежно шли на некоторый риск. Из-за недостаточной проработки технологических и конструктивных решений, применения в сварных пролетных строениях сталей, не отвечающих необходимым требованиям, происходило интенсивное образование трещин, из-за чего некоторые сварные мосты обрушились. В связи с этим внедрение сварки в мостостроение вызвало серьезную оппозицию и осуществлялось на основе обстоятельных научно-исследовательских работ. Инициатором радикального решения проблемы внедрения сварки в мостостроение на основе изыскания оптимальных конструктивных форм, прогрессивных материалов и автоматизации процесса является академик Е.О. Патон. Под его руководством и при непосредственном участии в 1946-1948 гг. Институт электросварки провел комплекс научно-исследовательских работ по развитию сварного мостостроения. Основными результатами этих работ явились: создание стали для сварных мостов; разработка технических условий на такую сталь; разработка и внедрение автоматической и механизированной сварки, сварочных материалов и режимов сварки мостовой стали; установление зависимости между механическими свойствами стали и скоростью ее остывания при сварке; разработка исходных положений проектирования и расчета сварных конструкций с учетом влияния технологии изготовления на несущую способность; разработка и внедрение технологии промышленного изготовления цельносварных пролетных строений; разработка и внедрение высокоэффективного решения стыковки главных балок пролетных строений в сварном исполнении на монтаже. Тем самым была создана надежная научно-производственная база для быстрого развития сварного мостостроения.

Начиная с 1950-х годов основное внимание уделяется развитию технологии заводского изготовления сварных пролетных строений на

высокомеханизированных поточных линиях по отработке прогрессивных методов их монтажа (навесная сборка и др.). Была проведена большая работа по типизации и унификации пролетных строений. Началась реализация многих прогрессивных конструктивных приемов и способов: предварительное напряжение конструкций, в том числе методом упругого деформирования, обеспечивающего возможность регулирования напряженно-деформированного состояния несущих элементов; концентрация материала в особо напряженных зонах; натяжение отдельных элементов и поверхностей; совмещение несущими элементами нескольких функций; обеспечение аэродинамической надежности; оптимизация различных схем мостов. Это способствовало созданию новых конструктивных форм пролетных строений – коробчатых цельносварных с ортотропной плитой проезжей части, сталежелезобетонных, бистальных с эффективным применением высокопрочной стали, а также расширению применения большепролетных мостов.

К наиболее выдающимся из этих конструкций, в которых были использованы многие достижения в области мостостроения, можно отнести: в США – мост в Сан-Франциско по схеме 343+1280+343 м, мост Веррацано-Нерроуз по схеме 371+1300+371 м, мост Маккинак-бридж со средним пролетом 1158 м; во Франции – мост в Танкарвиле по схеме 176+608+176 м; в Португалии – мост в Лиссабоне по схеме 483+1013+483 м; в Англии – мост Северн по схеме 305+988+305 м, мост Хамбер со средним пролетом 1410 м; в Турции – мост через Босфор по схеме 231+1074+255 м (средний пролет второго моста через Босфор составляет 1090 м); в Японии – мосты через гавань Иокогама пролетом 460 м, Хитсуишима пролетом 420 м, Ивокурашима пролетом 420 м, Мейко-Ниши пролетом 405 м. В настоящее время в Японии сооружается мост Акаши с наибольшим для висячих мостов пролетом 1990 м. Находятся в процессе строительства вантовые мосты с рекордными для этой системы пролетами: во Франции – мост Норманди со средним пролетом 856 м, в Японии – мост Татара со средним пролетом 890 м.

В отечественном мостостроении вантовые пролетные строения применяются с 1963 г., когда был сооружен мост через гавань р. Днепр со средним пролетом 144 м. В 1970-х годах построены вантовые мосты через реки Днепр в Киеве, Шексну в Череповце и Даугаву в Риге с главными пролетами соответственно 300, 194 и 312 м [17, 29].

Современные металлические мосты проектируются с ездой поверху, понизу и посередине. Транспорт пропускают в один или (значительно реже) в два яруса. В совмещенных мостах объединяют автомобильный транспорт, железнодорожный, метро и др.

Наряду с упомянутыми выше балочными, арочными, вантовыми и висячими системами мостов в последнее время применяются рамные системы. В зависимости от взаимодействия со смежными пролетами все

системы можно разделить на разрезные, неразрезные, консольные и др. Пролетные строения выполняются сплошностенчатыми, сквозными и комбинированными.

В практике отечественного и зарубежного строительства нашли применение также особые виды металлических мостов: разводные, наплавные, разборные и др.

По-видимому, в ближайшее время строительство металлических мостов будет развиваться в нескольких направлениях. К одному из них можно отнести разработку принципиально новых конструктивных форм и методов расчета с использованием теории вероятностей и математической статистики, развитие теории прочности и разрушения, а также учет физической и моральной долговечности конструкций на этапе проектирования. Дальнейшее развитие получат методы оптимизации пролетных строений, системы автоматизированного проектирования, теория и методы предварительного напряжения [5, 14].

Другое направление связано с применением новых перспективных конструкционных материалов, прежде всего высокопрочных сталей с хорошей свариваемостью, повышенным сопротивлением зарождению и развитию трещин, улучшенными эксплуатационными и технологическими свойствами. Это возможно благодаря новейшим научно-техническим достижениям в машиностроении, автоматике, электронике и других смежных областях высокоэффективных технологий обработки металла, сборки и сварки конструкций, существенному повышению точности заводского изготовления отправочных блоков.

И, наконец, важным направлением является повышение уровня индустриализации сооружения мостов, качества и культуры изготовления конструкций, резкое повышение уровня механизации и совершенствование методов производства работ, внедрение в практику строительства прогрессивных методов монтажа и, как следствие, значительное сокращение сроков строительства мостов за счет создания конвейера по сборке и монтажу пролетных строений на строительной площадке.

В последние десятилетия во всем мире интенсивно развивается трубопроводный транспорт. Основное количество трубопроводов прокладывается под землей, но часто более экономична, а иногда и практически единственно возможна надземная прокладка (например, в северных и горных районах, через реки, овраги, болота и т.п.). При надземной прокладке трубопроводов через препятствия применяют балочные, довольно редко арочные, а в последние годы все чаще – висячие системы. Аналогичные решения (кроме арочных) используют и на прямых участках магистральных линий, а также на отводах. В зависимости от типа надземной прокладки осуществляют компенсацию продольных перемещений [5, 16].

Функции несущего элемента пролетного строения в балочных и арочных системах выполняет трубопровод, в висячих и вантовых – в основном канатная система, реже трубопровод.

1.7.2. Основные принципы проектирования. Размеры пролетных строений и их элементов следует назначать с учетом модульности и унификации, принятых в строительстве, а также возможности их перевозки и монтажа транспортными средствами и кранами серийного производства.

Пролетные строения мостов рассчитывают на действие постоянных нагрузок и неблагоприятных сочетаний временных нагрузок [5].

Постоянная нагрузка в первом приближении принимается по данным ранее запроектированных пролетных строений-аналогов или вычисляется по методу весовых характеристик и корректируется в процессе проектирования. В качестве нормативного воздействия предварительного напряжения принимается контролируемое усилие с учетом потерь на рассматриваемой стадии работы конструкции. В сталежелезобетонных конструкциях величина потерь зависит от технологии работ по напряжению и регулированию усилий, а также от усадки и ползучести бетона, причем ползучесть бетона должна определяться только от действия постоянных нагрузок.

Нормативная временная вертикальная нагрузка для автодорожных и городских мостов принимается: а) от автомобильной нагрузки – А-11 и А-9 для дорог соответственно I-III и IV-V категорий, учитываемой с нагрузкой от людского потока на тротуарах; б) от одиночных колесных и гусеничных нагрузок – НК-80 и НГ-60 общим весом соответственно 785 и 588 кН для дорог I-III и IV-V категорий, учитываемой при отсутствии автомобильной нагрузки и потока людей на тротуарах. Такая нагрузка обычно является определяющей для элементов проезжей части, подвесок и других конструкций, работающих на местную нагрузку; в) от подвижного состава метрополитена в виде поезда заданной (расчетной) длины, состоящего из четырехосных вагонов весом 588 кН, а также от трамваев с четырьмя вагонами весом 294 кН.

Для учета динамических воздействий, возникающих при пропуске подвижных нагрузок, временные вертикальные нагрузки на пролетные строения (за исключением НК-80, НГ-60 и нагрузки от потока людей на тротуарах) увеличиваются умножением на динамические коэффициенты, определяемые по эмпирическим формулам. При более строгом расчете необходимо рассматривать систему транспортное средство – пролетное строение.

С учетом малой вероятности одновременного загружения всех полос временной вертикальной нормативной нагрузкой нагрузка на второй, третьей и т.д. полосах проезда уменьшается умножением ее на коэффициент многополосности.

При расчете на одновременное действие постоянной и нескольких временных нагрузок (от подвижного состава, ветра, климатических воздействий, строительных и сейсмических нагрузок и др.) необходимо вводить коэффициенты сочетания нагрузок.

Компоновка поперечного сечения пролетного строения, расчетные схемы нагрузок от подвижного состава, характер и величина других воздействий и нагрузок, динамические коэффициенты, коэффициенты надежности по нагрузке и другие параметры регламентируются в соответствии с нормами.

Длина пролетов трубопровода назначается в зависимости от схемы и конструкции перехода в соответствии с расчетом трубопроводов на прочность и устойчивость.

1.7.3. Конструктивные решения сварных мостов. В 1953 году в г. Киеве был сдан в эксплуатацию крупнейший мост через р. Днепр. Он стал первым большим цельносварным мостом в мировой практике, не имевшим аналогов по совершенству конструктивно-технологических решений. При его сооружении применяли автоматическую сварку. Проект моста разработан ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского» в содружестве с ИЭС им. Е.О. Патона под непосредственным руководством Е.О. Патона. Отмечая большой вклад Е.О. Патона в развитие сварочного мостостроения, киевскому городскому мосту присвоено его имя. Конструкция моста и воплощенные в нем научно-технические разработки отмечены в 1991 г. дипломом Американского общества сварщиков [16, 27].

Широкое внедрение стальных и сталежелезобетонных сварных пролетных строений мостов в последние два десятилетия способствовало отработке эффективных конструкций с высокой степенью индустриализации и максимально механизированными и автоматизированными процессами заводского изготовления и сборки на монтаже. Наиболее эффективной областью применения сварных пролетных строений оказались мосты со статическими схемами, позволяющими максимально унифицировать элементы и блоки заводского изготовления и повысить использование автоматической сварки. Сварные пролетные строения нашли применение в мостах со сплошностенчатыми конструкциями балочно-разрезных и балочно-неразрезных систем, балочных конструкциях с подпружными арками, рамных и рамно-консольных конструкциях, в вантовых и висячих мостах и других комбинированных системах (рис. 1.58).

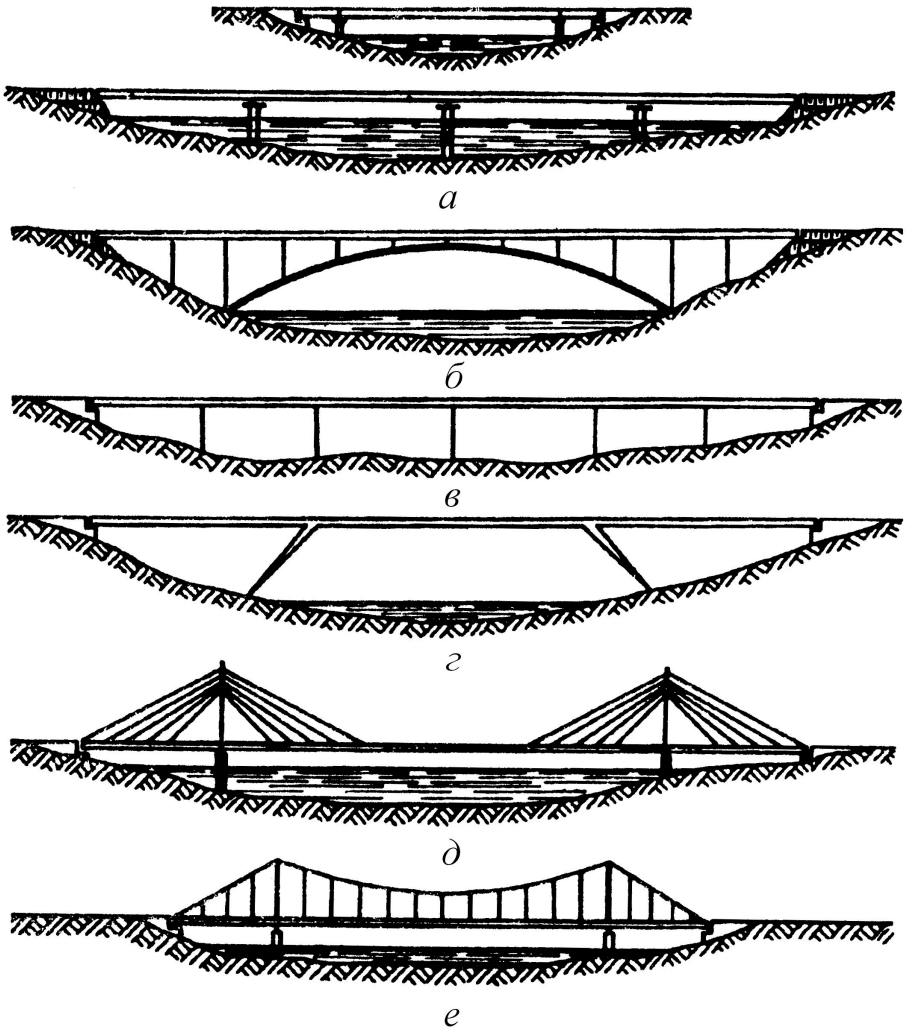


Рис. 1.58. Мосты со сварными пролетными строениями со сплошностенчатыми главными балками: а - балочные разрезные и неразрезные; б - балочные с подпружной аркой; в – рамные с одиночными стойками; г - рамные с наклонными ногами; д - вантовые; е – висячие

В пролетных строениях со сквозными фермами сварка применяется только при заводском изготовлении элементов поясов и раскосов. Монтажные соединения выполняются на высокопрочных болтах.

Основными несущими элементами во всех этих статических схемах являются главные балки, работающие либо как самостоятельные пролетные строения, либо в комбинации с дополнительными сжатыми или растянутыми

усиливающими элементами. При этом конструктивное решение поперечного сечения самой балки может быть однотипным и зависящим только от ширины моста. Исходя из современных принципов концентрации металла в наименьшем количестве несущих элементов и совмещения функций несущих и ограждающих конструкций, поперечное сечение пролетного строения составляется из нескольких сплошностенчатых двутавровых главных балок, объединенных системой связей, и проезжей части в виде железобетонной или металлической плиты.

Коробчатые пролетные строения – наиболее современное и эффективное решение, при котором система дискретных двутавровых главных балок заменяется одной или несколькими (до трех) коробчатыми балками. Большая жесткость на кручение коробчатых сечений позволяет отказаться от связей. Благодаря этому, а также получаемой при этом еще большей концентрации металла достигается ощутимая экономия стали [4].

Сталежелезобетонные пролетные строения с железобетонной проезжей частью, конструктивно и технологически вовлеченной в совместную работу с металлическими несущими конструкциями, имеют ряд особенностей, ограничивающих область их применения. Давая значительную экономию металла в ограниченном диапазоне пролетов, такие пролетные строения требуют существенно усложненной технологии монтажа. При статически неопределимых конструкциях с растянутыми участками верхнего пояса для работы бетона в этих зонах необходимо проведение специальных мероприятий для создания предварительных сжимающих напряжений. Наличие «мокрых» процессов, неизбежных даже при применении сборной железобетонной плиты, ограничивает возможности круглогодичного монтажа.

Цельнометаллические пролетные строения – наиболее эффективное конструктивное решение в современном мостостроении. Стальная ортотропная плита проезжей части, особенно в комбинации с коробчатым пролетным строением, позволяет успешно создавать мосты больших пролетов как балочных, так и комбинированных систем при наименьшей затрате металла. Экономия металла достигается в результате снижения постоянной нагрузки от массы пролетного строения при замене железобетонной проезжей части ортотропной плитой в 2,0...2,5 раза. Ортотропная проезжая часть одинаково эффективно работает в зонах отрицательных и положительных изгибающих моментов главных балок.

Бистальные пролетные строения, в которых для наиболее напряженных элементов сечения используются стали повышенной и высокой прочности в комбинации со сталями с более низким пределом текучести для остальной части сечения, еще более экономичны по расходу металла, но также имеют свои технологические особенности, учитывать которые необходимо при выборе оптимального решения. Последнее относится в основном к

бистальным строениям, в которых используются высокопрочные стали с пределом текучести 600 МПа и выше и которые весьма чувствительны к концентраторам напряжений. Они требуют специальных технологических мероприятий как при заводском изготовлении, так и в еще большей степени при монтажной сварке. Кроме того, повышается трудоемкость обработки элементов из этого материала. Использование же сталей повышенной прочности в комбинации со сталями более низкого класса практически всегда оправдывается, особенно в цельностальных мостах с ортотропной проезжей частью с неравнонапряженными верхним и нижним поясами. В пролетных строениях со сквозными фермами стали повышенной и высокой прочности применяются для наиболее нагруженных элементов поясов и раскосов.

Пролетные строения со сквозными фермами применяют главным образом в железнодорожных мостах для перекрытия средних и больших пролетов, а также в двухъярусных пролетных строениях для совмещенного автомобильного и железнодорожного движения. В автодорожных мостах решетчатые фермы практически полностью вытеснены балками со сплошной стенкой, требующими меньших затрат труда на изготовление и монтаж и более технологичными для применения автоматизированной сварки.

Основными конструктивными и несущими элементами сварных пролетных строений являются сплошностенчатые главные балки, используемые как самонесущие строения либо как балки жесткости комбинированных систем.

Сплошностенчатые главные балки в современных мостах объединяются конструктивно и технологически с проезжей частью для включения последней в совместную работу с пролетным строением. Проезжая часть может быть железобетонной, образующей при объединении с главными балками единую сталежелезобетонную конструкцию, либо в виде стальной ортотропной плиты, создающей совместно с главными балками цельностальные пролетные строения. Стальные ортотропные плиты в 3...4 раза легче железобетонной проезжей части и позволяют применить облегченное асфальтобетонное покрытие и легкую изоляцию. Соответствующим снижением расчетной постоянной нагрузки уменьшается расход стали на главные балки. При пролетах порядка 60…80 м цельностальные пролетные строения по расходу стали оказываются уже более экономичными, чем сталежелезобетонные.

Особенно целесообразно применение стальной ортотропной проезжей части в статически неопределимых пролетных строениях. Исключаются характерные для сталежелезобетонных конструкций сложности для создания в железобетонной плите предварительного обжатия в растянутых зонах, а также трудности многостадийного монтажа. Исключение «мокрых» процессов, неизбежных даже при сборной железобетонной плите с клеевыми стыками, позволяет вести монтаж круглогодично. Вследствие изложенного, а

также высокой индустриальности и значительно меньшего объема работ на монтаже цельностальные пролетные строения в настоящее время являются прогрессивной конструктивной формой и все более широко применяются. Уже в начале 1980-х годов для автодорожных и городских мостов пролетные строения со стальной ортотропной плитой составили 32% от общей массы мостовых конструкций.

Большое влияние на развитие сварного мостостроении оказало внедрение коробчатых пролетных строений принципиально новой конструктивной формы, что вызвало большие изменения в мостостроении. В коробчатых строениях все элементы конструкции участвуют в совместной работе, совмещая функции несущих и ограждающих элементов. При этом обеспечивается хорошая пространственная работа пролетного строения и в наибольшей степени реализуется принцип концентрации материала в минимальном числе элементов строения и достигается существенная экономия стали.

Коробчатые пролетные строении имеют и другие преимущества: широко развитый нижний пояс коробчатых балок позволяет применить листовую сталь сравнительно небольшой толщины, имеющую лучшие характеристики и менее трудоемкую при заводском изготовлении и монтаже; не требуется пакетирования листов пояса, что облегчает конструктивные решения монтажных стыков; развитый нижний пояс снижает оптимальную высоту пролетных строений до 1/30...1/40 пролета; обтекаемая форма коробчатых строений, особенно при наклонных стенках, оказывает меньшее сопротивление ветровому потоку; коробчатые строения более удобны в эксплуатации и обслуживании коммуникаций; внутренние полости, защищенные от атмосферных воздействий, менее подвержены коррозии; зрительно легкие пролетные строения лучше удовлетворяют требованиям эстетики.

Как показывает практика мирового мостостроения, наиболее экономичны по расходу металла и трудоемкости изготовления и монтажа односекционные коробчатые строения, ширина нижнего пояса которых определяется конструктивными требованиями, а ширина верхнего – с консольными свесами ортотропной плиты проезжей части – габаритами проезда на мосту и пешеходными тротуарами. Для уменьшения консольных свесов целесообразно применение трапецеидальных коробок с наклонными стенками. Двух стенок обычно достаточно для восприятия перерезывающих и касательных напряжений кручения. На рис. 1.59 изображены характерные поперечные сечения цельностальных и сталежелезобетонных пролетных строений.

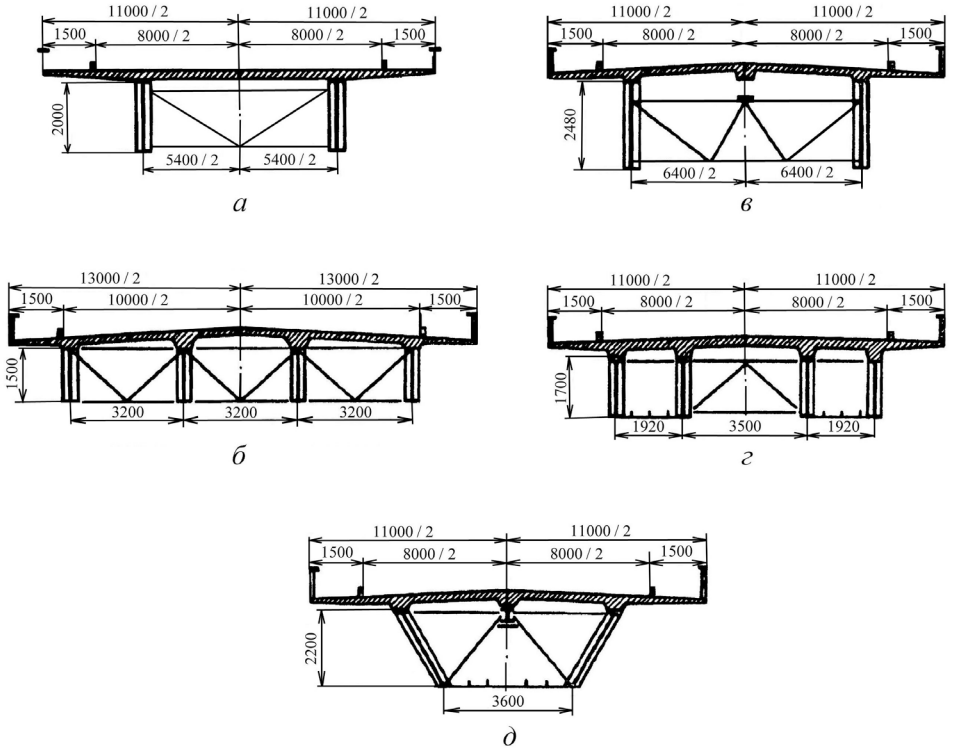


Рис. 1.59. Поперечные сечения сталежелезобетонных пролетных строений мостов с главными балками: а - двутаврового сечения - две нитки; б - то же, четыре нитки; в - то же, две нитки с промежуточной продольной балкой; г - коробчатого сечения - две нитки; д - трапециевидного коробчатого сечения

Сварные сталежелезобетонные пролетные строения применяют главным образом для мостов средних пролетов, так как большая масса железобетонной проезжей части резко увеличивает собственную массу пролетного строения и соответственно расчетную постоянную нагрузку. Поэтому применение пролетных строений такой конструкции экономически целесообразно при пролетах 60…80 м. Однако в некоторых системах необходима повышенная собственная масса на отдельных участках пролетного строения для исключения отрицательных опорных реакций, изменения динамических характеристик и т.п. Примером могут служить трехпролетные вантовые строения, в которых балка жесткости крайних пролетов может быть принята сталежелезобетонной или даже железобетонной. Наиболее характерные поперечные сечения сварных сталежелезобетонных балок жесткости, являющихся самонесущими пролетными строениями или элементами комбинированных систем, показаны на рис. 1.60.

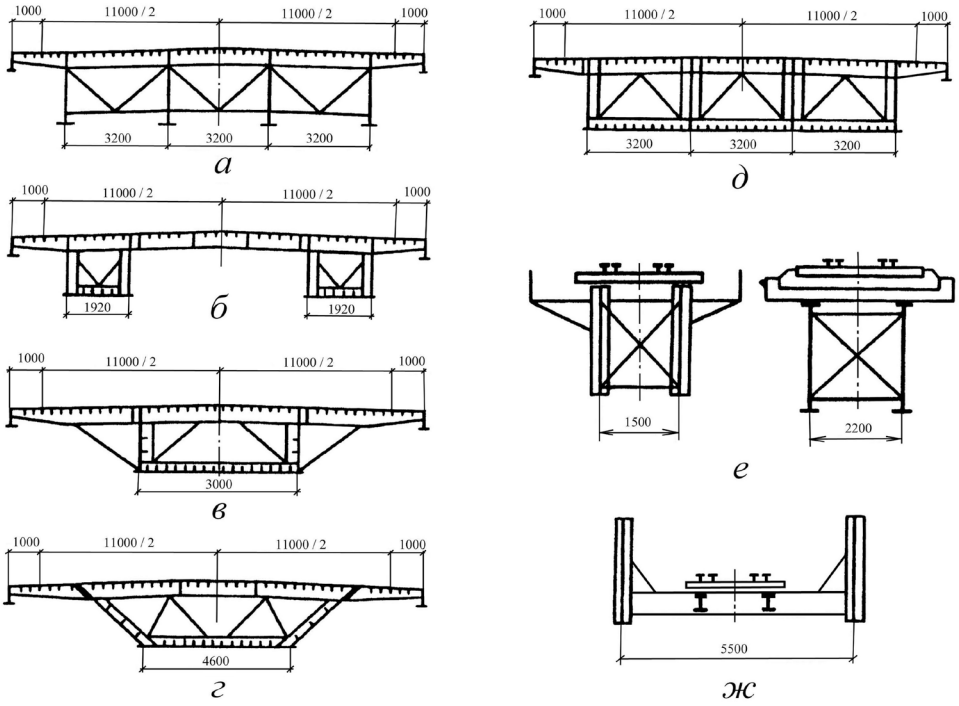


Рис. 1.60. Поперечные сечения цельностальных пролетных строений мостов с главными балками: а - двутаврового сечения; б - коробчатого сечения; в - в виде прямоугольной коробки; г - в виде трапециевидной коробки; д - в виде трехсекционной прямоугольной коробки; е - железнодорожных со сплошностенчатыми балками или решетчатыми фермами с ездой поверху; ж - то же, с ездой понизу

В отечественной практике поперечное сечение сталежелезобетонной балки жесткости принималось с двумя, тремя и четырьмя главными балками двутаврового сечения с опиранием железобетонной плиты на пояса главных балок, а также с двумя главными балками и промежуточной продольной балкой, уменьшающей пролет железобетонной плиты. Последняя конструкция признана наиболее экономичной по расходу металла и железобетона. Для типовых конструкций расстояние между осями главных балок принималось 6400 мм как среднее из оптимальных значений для габаритов Г-8 и Г-9. Высота стенок главных балок типовых пролетных строений для пролетов 42 и 63 м – до 3160 мм и для пролетов 64 и 84 м – 3600 мм. В последнем случае по условиям перевозки по железной дороге предусмотрены горизонтальные монтажные стыки. Для всех типовых пролетных строений предусмотрены однотипные конструкции продольных и поперечных связей. Для обеспечения местной устойчивости вертикальных

стенок предусмотрены вертикальные и горизонтальные ребра жесткости. Монтажные стыки главных балок – болтовые на высокопрочных болтах либо цельносварные.

Коробчатые сталежелезобетонные пролетные строения могут быть с одной или несколькими коробчатыми главными балками. Для уменьшения расчетного пролета железобетонной плиты проезжей части вводятся дополнительные пролетные балки, опирающиеся на диафрагмы. При нескольких нитках коробчатых главных балок число и расстановка их принимаются с учетом оптимального соотношения стоимости железобетонных и металлических конструкций. Высота стенок коробчатых балок принимается из условия удовлетворения требованиям железнодорожных габаритов.

Наиболее характерными узлами сталежелезобетонных пролетных строений являются объединения железобетонной плиты со стальными главными балками. Оптимальное решение – жесткие упоры, привариваемые на заводе к верхнему поясу балок. Для конструкций северного исполнения упоры крепят к поясам высокопрочными болтами. Конструкции упоров рассчитаны на массовое применение сборных железобетонных плит проезжей части с окнами в местах упоров, заполняемыми на монтаже бетоном на мелком заполнителе.

В зарубежной практике широко применяются пролетные строения с монолитной железобетонной плитой проезжей части. Это объясняется относительно менее суровым климатом и отсутствием, как правило, мощных индустриальных баз сборного железобетона. Конструкции объединительных деталей принимаются с часто расположенными гибкими упорами, привариваемыми на заводе с вертикальными или наклонными анкерами. Со второй половины 1950-х годов в США, а затем и в других странах преобладающим средством объединения стали гибкие цилиндрические упоры с головками, привариваемыми специальными сварочными пистолетами. Это решение явилось одной из многих причин продолжения широкого применения за рубежом монолитной плиты, для которой эти упоры наиболее удобны.

Недостатком описанных выше средств объединения железобетонных плит проезжей части со стальными главными балками являются концентраторы напряжений, создаваемые приваркой упоров, снижающие усталостную прочность всего пролетного строения. Новым решением, исключающим эти недостатки, явилось применение высокопрочных болтов в комбинации (или без нее) с клеевыми составами. Высокопрочные болты, пропускаемые сквозь железобетонную плиту и полку стального пояса, образуют фрикционное объединение железобетона и стали в комбинации со сцеплением, создаваемым клеевыми составами или цементной подливкой.

Натяжение высокопрочных болтов выполняют с верхней поверхности железобетонной плиты динамометрическими ключами или гайковертами.

Бистальные пролетные строения, т. е. строения, объединяющие в одном сечении стали с разными пределами текучести, являются современным решением, при котором наиболее эффективно используются расчетные характеристики каждого из материалов. Высокопрочные стали все еще дефицитны, стоимость их намного выше стоимости обычных мостовых сталей. Конструкции узлов с применением этих сталей требуют специальных решений для снижения концентраций напряжений и специальной технологии сварочных работ. Обработка высокопрочных сталей более трудоемка и для отдельных операций требует специального оборудования. Оптимальным как по стоимости, так и по трудоемкости работ является использование высокопрочных сталей только для таких элементов и лишь на тех участках пролетного строения, где их расчетное сопротивление используется полностью. Такое же условие, правда в меньшей степени, предъявляется при использовании сталей повышенной прочности.

Использование в одном сечении сталей с различными пределами текучести основано на предпосылке о допустимости ограниченных пластических деформаций стали с более низким пределом текучести по линии контакта со сталью с более высоким пределом текучести. При этом следует учесть ограниченный характер пластических деформаций, сдерживаемых упругими деформациями сталей с более высоким пределом текучести. Допускаемые пластические деформации равны остаточной деформации при испытании стали на растяжение. Ограничение в таких пределах пластических деформаций сопрягаемых элементов из сталей с более низким пределом текучести сохраняет их сопротивление хрупким и усталостным разрушениям и не ухудшает устойчивость стенки и поясов при работе на нормальные и касательные напряжения.

За последние десятилетия за рубежом построен ряд больших сварных мостов, в которых высокопрочная сталь с более высоким пределом текучести используется в сочетании с обычными углеродистыми и низколегированными сталями. Примером могут служить висячие мосты в Лиссабоне и Стамбуле, вантовые мосты через р. Рейн в Дюссельдорфе и Дуйсбурге, мост Акаши в Японии с самым длинным центральным пролетом 1990 м.

В практике отечественного мостостроения бистальные пролетные строения с применением высокопрочной стали использовались редко. Впервые трехпролетное рамное бистальное пролетное строение применено при сооружении городского моста через р. Смотрич в Каменце-Подольском. Особенность пролетного строения новой системы – наклонные ноги рамы, увеличивающие средний пролет [16]. Пролет между пятами наклонных ног равен 148,94 м (рис. 1.61).

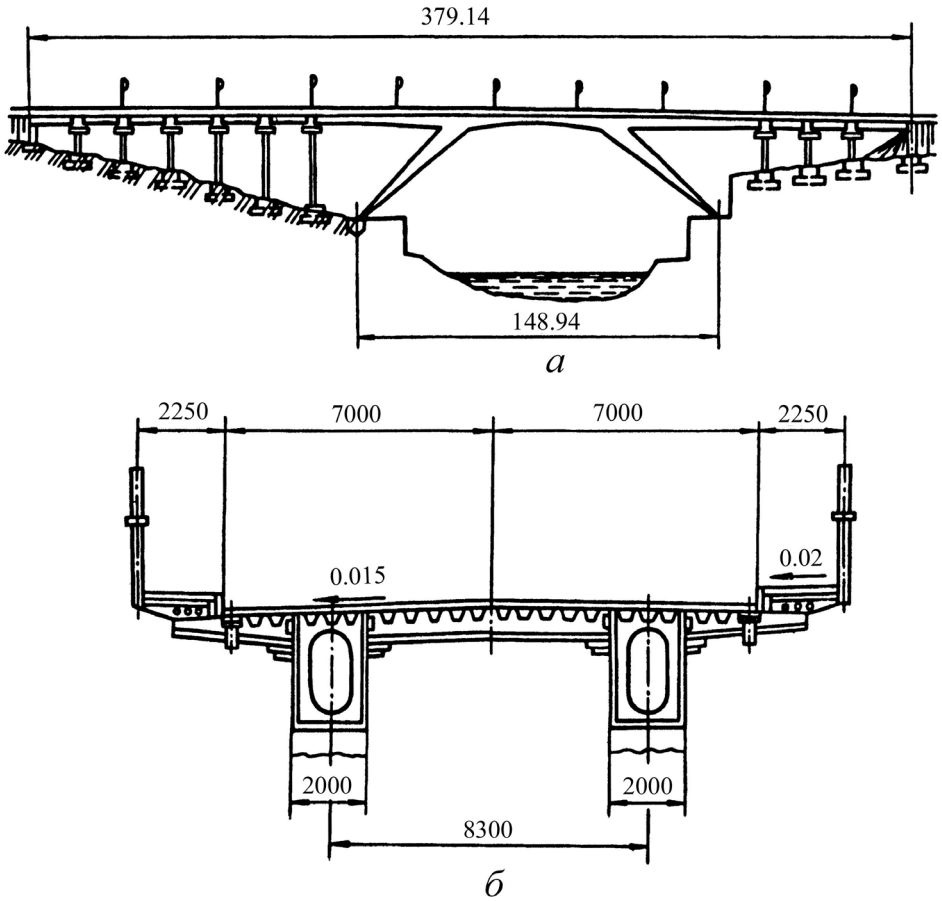


Рис. 1.61. Мост через р. Смотрич в Каменец-Подольском с бистальным пролетным строением: а - схема моста; б - поперечное сечение

Поперечное сечение составлено двумя главными балками коробчатого сечения и ортотропной плитой проезжей части. Балки коробчатого сечения имеют переменную высоту от 1700 мм по концам и в середине среднего пролета до 8300 мм в сечениях примыкания наклонных ног. Ширина балок постоянна по всей длине – 2000 мм. Ортотропная плита проезжей части составлена из стального листа сечением от 12 до 20 мм, продольных ребер трапецеидального коробчатого сечения с шагом 600 мм и поперечных двутавровых балок высотой 700 мм, расположенных через 4000 мм. Такое решение поперечного сечения моста было внедрено впервые, так же как и ортотропная плита проезжей части с коробчатыми продольными ребрами.

Висячие пролетные строения, внешнераспорные и с воспринятым распором, а также вантовые – с различным решением вантовой системы, с

одной или двумя плоскостями вант – обладают рядом конструктивных особенностей. Общими конструктивными элементами и до некоторой степени общими узлами пролетных строений обеих систем могут быть балки жесткости, пилоны и узлы крепления к ним вант или подвесок и кабелей растянутых поясов.

Балка жесткости – основной элемент рассматриваемых пролетных строений. Конструктивные решения балки жесткости принимаются практически аналогичными конструкции пролетных строений балочных мостов, причем с точки зрения снижения постоянной нагрузки и трудоемкости монтажа наиболее целесообразны балки жесткости со стальной ортотропной плитой проезжей части.

Для висячих и вантовых мостов с пролетами свыше 300 метров, а тем более превышающих 1 км, критическими становятся аэродинамические воздействия ветрового потока, которые могут вызвать аэроупругую неустойчивость типа галопирования или флаттера. В этом случае применимы только коробчатые сечения, обладающие большой жесткостью на кручение, которым для снижения воздействий ветрового потока придают обтекаемую форму.

Пилоны в висячих и вантовых мостах сооружаются из металла или железобетона. Рассмотрим металлические пилоны, наиболее характерные конструкции которых в виде поперечных рам, жестко или шарнирно опертых на опоры, или в виде одиночных стоек, жестко закрепленных к опорам, показаны на рис. 1.62.

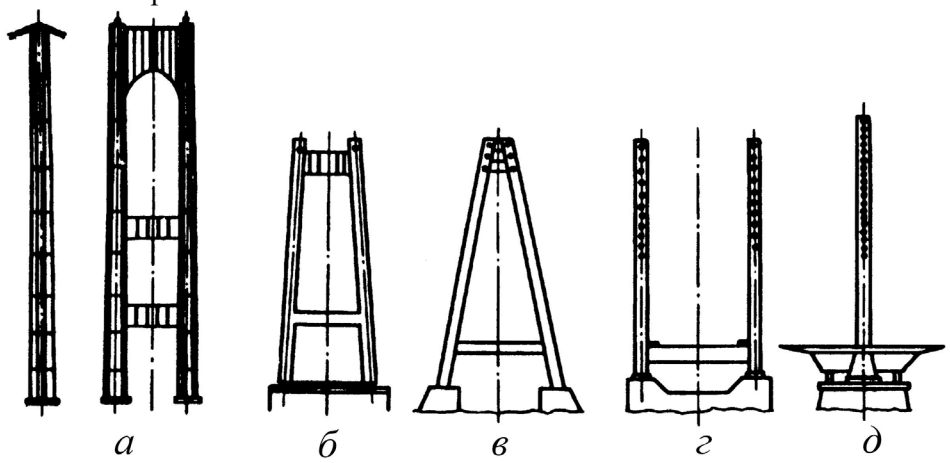


Рис. 1.62. Конструкции металлических пилонов: а - висячий мост в Ньюпорте; б, в - вантовые мосты; г, д - многовантовые мосты

Пилоны висячих мостов и вантовых с радиально расположенными вантами, закрепленными на вершине пилона, работают в одинаковых условиях – воспринимают вертикальную составляющую усилий

опирающихся на них канатов или цепи и усилия, вызываемые смещением точки закрепления последних. Чем меньше изгибная жесткость пилона в плоскости несущей системы, тем меньше изгибающие моменты, вызываемые деформацией пилона. Поэтому пилоны висячих и вантовых мостов целесообразно принимать предельно гибкими в плоскости моста с шарнирным опиранием. Пилоны висячих мостов с большими пролетами, в частности превышающими 1 км, из соображений общей устойчивости принимаются с развитым сечением стоек.

Пилоны вантовых мостов с многорядным расположением вант, в том числе пилоны многовантовых мостов, кроме вертикальной составляющей усилий в канатах и усилий от деформаций пилона, нагружены также усилиями, связанными с перераспределением горизонтальных составляющих распора канатов различных ярусов, но и в этом случае принцип уменьшения гибкости пилона в плоскости моста остается в силе.

В поперечном направлении пилоны висячих и вантовых мостов выполняются в виде П- и А-образных или отдельно стоящих стоек. Последнее решение наиболее характерно для вантовых пролетных строений, пилоны которых работают в более благоприятных условиях, создаваемых следящим эффектом силовых воздействий вант. В противовес этому в вантовых мостах, в которых неуравновешенный распор вант передается на пилоны, последние должны быть возможно более жесткими. Обычно такие пилоны решаются в виде пространственной рамы, развитой как в плоскости моста, так и в поперечном направлении.

Поперечные сечения стоек пилонов принимаются коробчатыми с одной или несколькими ячейками, сваренными из листов большой толщины. Стенки коробчатого сечения стоек пилонов усилены продольными ребрами жесткости и поперечными диафрагмами. Продольные ребра пропускают через вырезы в стенках поперечных диафрагм.

Стойки пилонов делятся по длине на монтажные блоки, размеры которых определяются грузоподъемностью монтажных механизмов и транспортными габаритами. Поперечные стыки блоков, передающие большие нагрузки, являются ответственными конструктивными деталями. Непосредственная передача усилий через торцы с фрезерованием контактных поверхностей связана с определенными технологическими трудностями обработки с заданными допусками поперечных сечений большой площади. Возможно продольное членение на блоки с меньшими площадями, подлежащими фрезерованию, но при этом из-за увеличения длины швов увеличивается трудоемкость монтажа.

1.7.4. Трубопроводные переходы. Наиболее простыми и дешевыми конструкциями, применяемыми в трубопроводных переходах, являются балочные; их начали применять еще в XIX ст. При диаметре трубопроводов

529…1420 мм пролеты в балочных системах принимаются ориентировочно 40…60 м. При прокладке трубопроводов вблизи населенных пунктов, при пересечении дорог и т.п. прокладку осуществляют в защитных кожухах.

Надземная прокладка осуществляется без компенсации продольных деформаций (в простейших одно- и многопролетных системах на жестких опорах), с компенсацией продольных деформаций (одно- и многопролетные системы с Г-, П- и V-образными, трапецеидальными и треугольными компенсаторами и др.), а также в виде «змейки» (с изгибом по кривой линии или в виде ломаной линии с криволинейными вставками), со слабоизогнутыми участками и, наконец, с наклонными компенсирующими участками [6, 14, 16].

В абсолютном большинстве случаев пролетное строение в балочных системах представляет собой самонесущий трубопровод. В редких случаях (например, при перекрытии больших пролетов) пролетное строение усиливается дополнительными балочными элементами, шпренгелями и т.п. Встречается также прокладка по мостам и эстакадам.

В арочных системах, как и в балочных, основным несущим элементом пролетного строения трубопроводных переходов является трубопровод.

Применяются одно- и многониточные переходы со вспомогательными конструкциями, работающими совместно с трубопроводами (увеличивающими поперечную жесткость) и без них. Поперечная жесткость переходов увеличивается также установкой стоек и оттяжек.

При определенных режимах работы трубопроводы могут не включаться в несущую конструкцию арочных пролетных строений.

По характеру передачи нагрузок арочные переходы со сравнительно небольшими пролетами выполняются с передачей распора на прилегающие участки трубопровода, а вертикальной нагрузки – непосредственно на грунт. При больших пролетах и значительных вертикальной и горизонтальной составляющих усилий от пролетных строений проектируются переходы с массивными опорами. Для исключения влияния распора на опоры арочные переходы иногда выполняют с затяжкой.

Очертание оси арки принимается по окружности или по параболе, реже по иной кривой. Пролетная конструкция выполняется из прямолинейных или криволинейных участков труб.

При проектировании арочных переходов без специальных опор следует обращать особое внимание на достоверность определения возможных перемещений пят арок, поскольку даже при сравнительно небольшом перемещении в трубопроводе могут возникать большие дополнительные напряжения. Для предотвращения просадки грунта и перемещения пят арок под трубопровод следует укладывать железобетонные плиты. При этом необходимо иметь в виду, что арочные переходы являются компенсаторами для прилегающих подземных участков трубопровода.

Если в однониточных арочных переходах поперечная жесткость обеспечивается в основном оттяжками, то в многониточных она обеспечивается жесткостью пролетной конструкции. Расстояние между нитками трубопровода принимается в зависимости от длины пролета, ветровой нагрузки и стрелы подъема арки. Обычно последняя принимается в пределах 1/5...1/10 длины пролета.

При средних пролетах расстояние между нитками трубопровода принимается одинаковым по всей длине пролета, а при больших увеличивается от середины к пятам и составляет примерно 1...5 м в свету.

Продольные и поперечные связи между нитками трубопроводов в зависимости от режима работы, температуры транспортируемого продукта и других факторов могут привариваться к накладкам, приваренным к трубам в местах крепления связей или к установленным на трубах хомутам, а при значительных деформациях ниток трубопровода, вызванных разницей температуры или давлением в трубах, – крепиться посредством шарниров, обеспечивающих возможность поворота распорок или упругоподатливых соединений, исключающих появление дополнительных напряжений в связях и трубах.

Увеличить горизонтальную и вертикальную жесткость, а также несущую способность арочного пролетного строения можно применением вспомогательных конструкций, работающих совместно с трубопроводами. Так, постановкой одного или двух дополнительных поясов можно образовать жесткую пространственную арочную ферму.

Вспомогательные конструкции выполняются как из труб, так и из швеллеров, уголков, тавров и других профилей. В зависимости от длины пролета и ветровой нагрузки расстояние между вспомогательными арками принимается от 1/15 до 1/30 пролета. Продольные и поперечные связи привариваются к вспомогательным аркам непосредственно или через фасонки. Применяются также крепления в виде хомутов, охватывающих трубы.

Переходы, в которых трубопроводы не участвуют в работе арочного пролетного строения, проектируются в тех случаях, когда в различных нитках трубопровода возникают большие, в том числе различные по знаку продольные деформации. В этих случаях арочное пролетное строение целесообразно выполнять в виде фермы треугольного поперечного сечения, по поперечным распоркам которой укладываются трубопроводы. Несущие арки могут выполняться трех- и двухшарнирными или бесшарнирными.

Монтаж простейших арочных переходов небольших пролетов осуществляется установкой в проектное положение всего пролетного строения, собранного заранее. При больших пролетах пролетное строение собирается из двух полуарок. При средних и больших пролетах монтаж

пролетных строений осуществляется навесным способом с использованием временных опор и подмостей.

В практике строительства получили распространение следующие типы висячих переходов: одно- и двухцепные с вертикальными подвесками (рис. 1.63, *а-в*), радиально-вантовые (рис. 1.63, *г-е*), с решетчатыми вантовыми фермами (рис. 1.63, *ж*, *з*), в виде провисающей нити (рис. 1.63, *и-м*), с фермами повышенной жесткости (рис. 1.63, *н*, *о*).

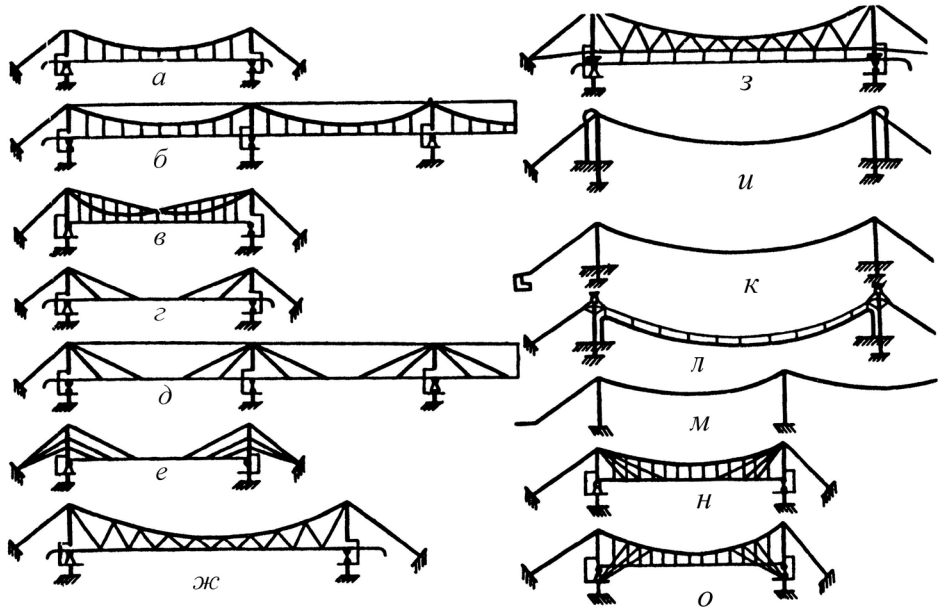


Рис. 1.63. Висячие переходы трубопроводов: а - в - одно- и двухцепные с вертикальными подвесками; г - е - радиально-вантовые; ж, з - с решетчатыми вантовыми фермами; и - м - в виде провисающей нити (л - с поддерживающими канатами); н, о - с фермами повышенной жесткости

Перечисленные типы переходов могут быть как одно-, так и многопролетными. По характеру статической работы их можно разделить на две группы. К первой относятся переходы, в которых труба работает как балка на упругоподатливых опорах с пролетами, равными расстоянию между подвесками несущего каната или точками крепления наклонных вант, воспринимающих нагрузку от веса трубы, изоляции, продукта, снега, гололеда и т.п. Ко второй группе относятся переходы, в которых труба является единственным несущим элементом, воспринимающим всю нагрузку (в виде провисающей нити).

При пролетах до 100 м целесообразно применять простейшие радиально-вантовые системы. При пролетах 100...300 м достаточно

эффективны одноцепные системы с вертикальными подвесками, при больших пролетах – системы в виде вантовых ферм. Почти для всего диапазона пролетов можно применять системы в виде провисающей нити.

Вантовые фермы, применяемые для трубопроводных переходов, имеют ряд характерных особенностей, определяемых их совместной работой с трубами, которые включаются в состав фермы и работают на местный изгиб между ее узлами. С точки зрения суммирования напряжений в трубе как элементе фермы и конструкции, воспринимающей внутреннее давление, целесообразно применять системы с воспринятым распором. Однако по технологическим соображениям и по условиям монтажа более эффективны решения, когда канаты крепятся к анкерным опорам. При этом возможен навесной монтаж трубопровода без промежуточных опор.

При расчете труб, работающих под высоким давлением, приходится учитывать собственные кольцевые и меридиональные растягивающие напряжения и напряжения, создаваемые реактивным воздействием компенсаторов. Кроме того, при транспортировании жидкостей необходимо также дополнительно учитывать динамические удары, возникающие в момент включения трубопровода в сеть или выключения его из сети.

Деформативность несущих трубопроводов вантовых ферм должна соответствовать условиям нормальной эксплуатации (предупреждение расстройства стыков, вывод конденсата и пр.).

С целью уменьшения деформаций пролетной конструкции в многопролетных системах необходимо устройство затяжек – горизонтальных (с малой стрелой провисания) канатов, соединяющих верхушки пилонов, предназначенных для ограничения перемещений последних при несимметричном нагружении перехода.

Сравнительно небольшая поперечная жесткость пролетных строений в переходах требует специальных устройств для восприятия ветровых усилий и для ограничения и предупреждения аэродинамических колебаний.

Специфику работы трубопроводных переходов надо учитывать при выборе типа фермы, конструкций крепления стальных канатов к трубам, устройств для восприятия ветровых усилий, конструкций компенсаторов и, наконец, устройств для обеспечения нормальной эксплуатации трубопроводов.

Из перечисленных систем переходов наиболее экономичны переходы в виде провисающей нити. В последние годы опыт проектирования и строительства таких переходов значительно обогатился: был выполнен ряд экспериментально-теоретических исследований, завершено строительство десятков переходов, получены новые технико-экономические данные.

Несмотря на ряд преимуществ, переходы в виде провисающей нити не получили массового применения. До сих пор некоторые специалисты считают, что такие переходы менее надежны и их следует строить только на

отводах и линиях местного значения. Такое мнение сложилось, по-видимому, из-за аварий нескольких сооружений. Они явились следствием ошибок, допущенных при проектировании и строительстве переходов, объективных же причин для разрушения переходов в виде провисающей нити не больше, чем любой другой системы.

Одноцепные переходы состоят из цепи (стального каната или пучка канатов), перекинутой через пилоны, к которой с помощью подвесок прикрепляют трубопровод. Последний играет роль балки жесткости, работающей на изгиб от равномерно распределенных по длине пролета постоянной и временной нагрузок.

Кроме того, при несимметричном загружении трубопровод работает в составе фермы, в результате чего заметно снижается деформативность последней. Канаты цепи передают на пилоны вертикальную составляющую распора, а на анкерные опоры – горизонтальную.

Оптимальное значение стрелы провисания цепи – 1/8…1/12 пролета. Расстояние между подвесками определяется возможностями использования трубы при работе ее на изгиб, а также конструктивными соображениями: выбором сечения подвесок, типа натяжных устройств и др.

Трубопровод подвешивают как прямолинейно, так и с небольшим подъемом к середине пролета, величина которого определяется возможными изменениями длины цепи от нагрузок, влиянием температуры и другими воздействиями.

Рекомендуется применение цельных на весь переход канатов, закрепляемых на опорных частях пилона накладками на болтах. При этом не требуется сложного стыкования канатов; закрепление их на пилонах несложно, так как обычно сил трения достаточно для сопротивления возможным горизонтальным усилиям. Закрепление болтами проводится только для восприятия монтажных нагрузок. Если длина канатов меньше длины перехода, то стыки канатов целесообразно размещать на вершинах пилонов в специально запроектированных конструкциях оголовка.

Опорные части на вершинах пилонов рекомендуется выполнять сварными из толстолистовой стали. Они значительно проще в изготовлении и дешевле литых. Размеры опорных частей зависят от радиуса изгиба опорной поверхности и соответствующей ей длины провисания канатов. Выбор этих параметров существенно влияет на условия работы стальных канатов. На участках перегибов канаты находятся в менее благоприятных условиях, чем на свободных участках, так как подвергаются воздействию дополнительных силовых факторов: изгибу и поперечному обжатию. При этом напряжения от изгиба проволок каната могут достигать значений, не только соизмеримых с напряжениями от осевой нагрузки, но и превосходящих их.

Примером целесообразной конструкции опорной части может служить решение, принятое в проектах висячих переходов трубопроводов,

разработанных ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского». Опорная часть сваривается из стальных листов, в которых желоба для канатов образуются строжкой. После строжки листы изгибаются по требуемому радиусу. Благодаря этому исключается обработка опорных частей на карусельных станках. Для создания плотного опирания по всей длине и исключения шлифовки желобов предусмотрена обертка канатов листом из деформируемого алюминиевого сплава АД-1 [16].

В проектах газопроводов, разработанных Укргипрогазом, для крепления труб приняты поперечные траверсы с седлами. Вертикальные подвески запроектированы без талрепов. Вертикальное положение труб регулируется подтяжкой гаек крепления подвесок к траверсам. Эта конструкция более трудоемка в изготовлении и требует большего расхода металла.

В качестве смотровых устройств применяются мостики и тележки. По расходу металла, стоимости и трудоемкости предпочтительнее решение со смотровой тележкой. Однако в эксплуатации более удобны решения со смотровым мостиком. В зависимости от конструкции перехода, количества труб и т.п. смотровой мостик может устраиваться сверху и снизу трубопровода.

В практике строительства иногда вместо смотрового мостика устраивают проезд для автомашин. В этом случае конструкция перехода значительно утяжеляется и приближается к конструкции автодорожных мостов. Для восприятия подвижной нагрузки приходится проектировать балочную клетку, состоящую из продольных и поперечных балок. При двух и более трубах большого диаметра в качестве продольных балок могут использоваться и сами трубы.

Наибольшее распространение в практике строительства получили переходы, схемы которых приведены на рис. 1.64.

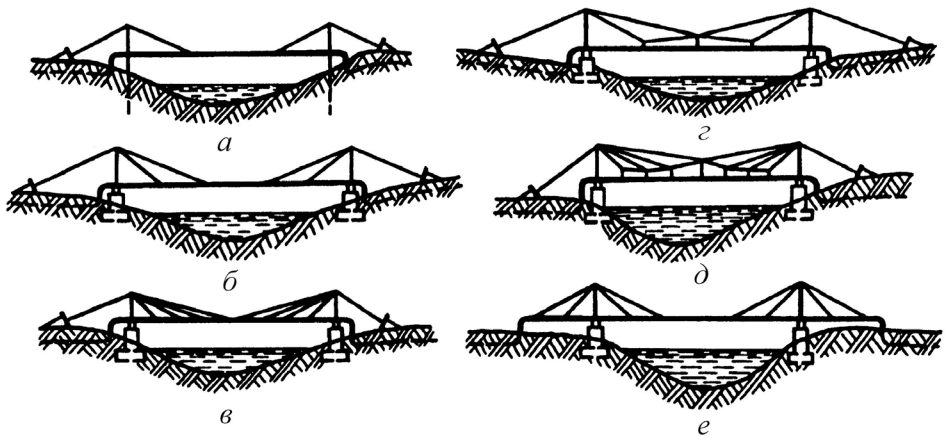


Рис. 1.64. Радиально-вантовые трубопроводные переходы: а - д - с передачей распора на анкерные опоры; е - с передачей распора на трубопровод

В переходах, приведенных на рис. 1.64, *а*, *б*, *д*, участок трубопровода, расположенный между вантами, подвергается дополнительному растяжению под действием горизонтальной составляющей усилий в вантах. Однако поскольку площадь поперечного сечения трубы сравнительно большая, то растягивающие напряжения в ней, как правило, не являются определяющими. На газопроводах диаметром 529...1020 мм расстояние между точками крепления радиальных вант колеблется от 18 до 40 м, а на нефтепроводах – от 12 до 30 м.

С целью уменьшения расхода материала на опоры при сравнительно небольших пролетах целесообразно применять решение, приведенное на рис. 1.64, *е*. В этом случае участок трубопровода, расположенный между смежными вантами, сжат. В таких переходах длина пролета несколько меньше, чем в переходах с растянутым участком трубопровода (рис. 1.64, *а-в*). Ее следует определять с учетом продольного изгиба трубы.

С увеличением высоты пилонов заметно уменьшаются усилия в несущих (наклонных) вантах и их сечение, но возрастает расход металла на пилоны. Оптимальную высоту пилонов определяют на основании технико-экономических расчетов.

В радиально-вантовых переходах трубопроводов диаметром 529...1020 мм при пролетах соответственно 60...100 м горизонтальное раскрепление трубопровода не проводится. При больших пролетах, особенно в районах со значительными ветровыми нагрузками, устраиваются оттяжки.

В простейших радиально-вантовых фермах небольших пролетов (до 70 м) целесообразно применение вант из круглой стали, сваренных из отдельных стержней в монтажные элементы удобной для транспортирования длины. Заводские соединения осуществляются контактной сваркой, а монтажные – обычной сваркой с накладками. На концах тяг привариваются фасонки из листовой стали для крепления к пилонам и трубопроводу.

При больших пролетах следует применять ванты из стальных канатов. Последние необходимо переводить через пилон и обжимать на опорной части накладками с болтами точно так же, как и в одноцепных фермах.

Рассматриваемые конструкции во многом аналогичны одно- и двухцепным переходам: по конструкции пилонов, опиранию на них канатов и труб, по деталям крепления канатов, натяжным устройствам и т.п. Поэтому ниже рассмотрены лишь особенности конструкции и отдельные узлы, характерные для таких ферм.

Наибольшее распространение получили вантовые системы с треугольной решеткой как с восходящими, так и с нисходящими опорными раскосами.

По характеру взаимодействия ферм с трубопроводом различают системы, в которых трубопровод подвешивается к двухпоясной вантовой ферме с гибкими верхним и нижним поясами, и системы с гибким верхним и жестким (в виде трубы) нижним поясами.

Решающее значение для уменьшения кинематических перемещений и, как следствие, прогибов вантовой системы, имеет положение связей, препятствующих перемещению несущего элемента вдоль пролета. Этот принцип положен в основу разработки вантовых ферм повышенной жесткости. Схемы некоторых из таких ферм приведены на рис. 1.63, *н*, *о*. При проектировании таких ферм следует иметь в виду, что решающее значение в уменьшении кинематических перемещений имеют одна или две связи. При дальнейшем увеличении числа связей кинематические перемещения уменьшаются незначительно.

1.8. Большепролетные покрытия зданий и сооружений

1.8.1. Общие сведения. В строительстве промышленных и гражданских зданий наметилась тенденция к замене традиционных конструктивных решений новыми, отвечающими современным требованиям в проектировании. Особый интерес проявляется к пространственным конструкциям, широко применяемым в различных областях народного хозяйства.

Развитие производств с гибкой технологией, совершенствование промышленного оборудования, появление агрегатов большой единичной мощности, укрупнение общественных центров и сооружений спортивного назначения, защищенных от атмосферных воздействий, требуют зданий со значительными объемами, свободными от несущих конструкций, и соответственно эффективных большепролетных покрытий. Такие покрытия должны быть легкими, технологичными в изготовлении и монтаже, допускать применение эффективных типов кровли, подвесных крановых путей, отвечать архитектурно-композиционному замыслу и иметь высокие эксплуатационные качества [11, 16, 19, 26].

Традиционные большепролетные балочные покрытия выполняются из ферм с параллельными, трапецеидальными и полигональными поясами, а также из сегментных ферм, в том числе с использованием предварительного напряжения. В большепролетных фермах применяют треугольную, раскосную, ромбическую, полураскосную и крестовую решетки.

С целью получения более жесткой конструкции применяют большепролетные рамные системы в виде одно- и двухпролетных рам, как правило, бесшарнирных или двухшарнирных с консолями или без них.

При относительно больших пролетах, значительных высотах зданий и небольших полезных нагрузках применяются арочные системы покрытий трех основных типов: бесшарнирные, двух- и трехшарнирные.

В настоящее время создана новая отрасль строительной индустрии – специализированное производство легких металлических конструкций (ЛМК) комплектной поставки. Применение ЛМК позволяет уменьшить массу производственных зданий не менее чем на 10...15%, снизить трудоемкость изготовления в 1,3...1,5 раза и стоимость строительства на 8...10%. Пространственные решетчатые покрытия (ПРП) регулярной структуры являются одним из прогрессивных типов конструкций. По сравнению с традиционными плоскостными они имеют значительные преимущества: благоприятные условия работы под нагрузкой несущих элементов и примыкающих конструкций; равномерное силовое поле; высокую степень унификации узлов и стержней, позволяющую автоматизировать (роботизировать) изготовление; возможность пакетирования и контейнеризации элементов, простоту транспортирования, укрупнительной сборки и крупноблочного монтажа; уменьшение строительной высоты покрытий и, как следствие, снижение стоимости стенового ограждения и энергетических затрат при эксплуатации.

В современной строительной практике применяют разнообразные формы ПРП: наиболее часто – стержневые плиты, в том числе структурные, реже – решетчатые (сетчатые) оболочки и купола. Разработаны стандартные конструктивные системы, унифицированные наборы схем и элементов, а также универсальные узлы, пригодные для плит, оболочек и куполов, что дает основание рассматривать некоторые системы ПРП с позиций единства их конструктивной формы. С целью расширения объемов их применения продолжаются работы по совершенствованию существующих и изысканию новых перспективных форм ПРП.

В последние годы при строительстве большепролетных промышленных, и особенно общественных, зрелищных и спортивных зданий и инженерных сооружений стали широко применять висячие покрытия. Их характерная особенность – пролетные конструкции работают в основном на растяжение – позволяет использовать самые прочные стали и перекрывать практически неограниченные пролеты при сравнительно небольшом расходе материала на несущие и ограждающие конструкции.

Висячие покрытия представляют собой пространственные системы, образованные пролетными несущими и ограждающими конструкциями, воспринимающими внешние нагрузки, и опорными конструкциями, работающими во взаимодействии с пролетными и воспринимающими их реакции. Как правило, опорные конструкции являются элементами несущего каркаса здания.

В практике строительства применяются вантовые системы, мембранные покрытия, висячие оболочки и комбинированные системы. В вантовых системах, в отличие от оболочек, не обеспечивается совместная работа ограждающих конструкций с опорным контуром. В комбинированных системах характер работы ограждающих конструкций может быть различным [3, 8, 10, 18].

Опыт строительства показывает, что наиболее экономичны висячие покрытия, опорные конструкции которых работают в основном на сжатие. Естественной формой таких покрытий в плане является круг или правильный многоугольник. Такое очертание обеспечивает также наибольшую несущую способность пролетных конструкций при прочих равных условиях, в связи с чем доля покрытий рассматриваемого типа в общем объеме возведенных зданий и сооружений с висячими покрытиями значительно больше, чем доля других типов покрытий. Однако даже в зданиях, круглых в плане, расход материалов на опорные конструкции составляет около 50% от расхода материала на покрытие. Поэтому снижение материалоемкости опорных конструкций в зданиях с висячими покрытиями является одной из важных задач.

Отказ от круглого плана и переход к строительству зданий с традиционным прямоугольным планом связан, как правило, с дополнительным расходом материала. Однако при выборе рациональной конструкции покрытия с прямоугольным планом дополнительный расход материала можно свести к минимуму.

Одной из важных задач, возникающих при проектировании висячих покрытий, является выбор геометрии поверхности покрытия. Получили распространение покрытия с положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизной. Наряду с простыми поверхностями, описываемыми элементарными функциями, применяются также различного рода составные поверхности, имеющие переломы по линиям сопряжения простых поверхностей. Характер поверхности покрытия в значительной степени определяет его деформативность, применение того или иного метода напряжения вантовой сети и пр.

Не менее важен при проектировании висячих покрытий выбор схемы и структуры вантовой сети. Применяются регулярные (когда закон образования структуры сети одинаков по всей поверхности) и нерегулярные вантовые сети, образованные одним или несколькими семействами несущих элементов (гибких нитей, нитей конечной жесткости и т.п.). Однослойные сети из одного семейства вант (параллельные в прямоугольных в плане зданиях, радиальные в круглых зданиях) вследствие большой кинематической податливости применяются, как правило, в виде арматуры висячих оболочек. Двухслойные сети, образованные пересечением двух семейств кривых, применяются в основном для вантовых систем. Наибольшее распространение

получили сети из одного и двух семейств вант. Сети из трех и более семейств вант встречаются реже.

Пролетная конструкция висячих покрытий выполняется, за редким исключением, предварительно напряженной. Усилия предварительного напряжения могут передаваться на опорный контур, а также на конструкции ограждения.

Вантовые сети проектируют из стальных канатов, пучков высокопрочной проволоки, арматурных стержней, а также из листового и профильного металла.

Одним из условий, оказывающих определяющее влияние на выбор типа конструкций покрытий, является удовлетворение функциональным особенностям зданий. Если для гражданских зданий этим требованиям удовлетворяют многие типы висячих покрытий, то для промышленных зданий средних и больших пролетов – в основном покрытия с разомкнутым опорным контуром (цилиндрические оболочки, подвесные, комбинированные). Для зданий пролетом 24...48 м более конкурентоспособными являются покрытия с замкнутым опорным контуром, не работающим на изгиб, а также покрытия с внешне безраспорной пролетной частью [9, 13].

1.8.2. Покрытия из плоских несущих конструкций. *Балочные системы*. Несмотря на внедрение новых прогрессивных конструкций большепролетных пространственных покрытий в настоящее время еще широко применяются покрытия с решетчатыми фермами различных очертаний, особенно при строительстве традиционных промышленных зданий, прямоугольных в плане.

На рис. 1.65 показаны фермы с различными очертаниями поясов и типами решеток.

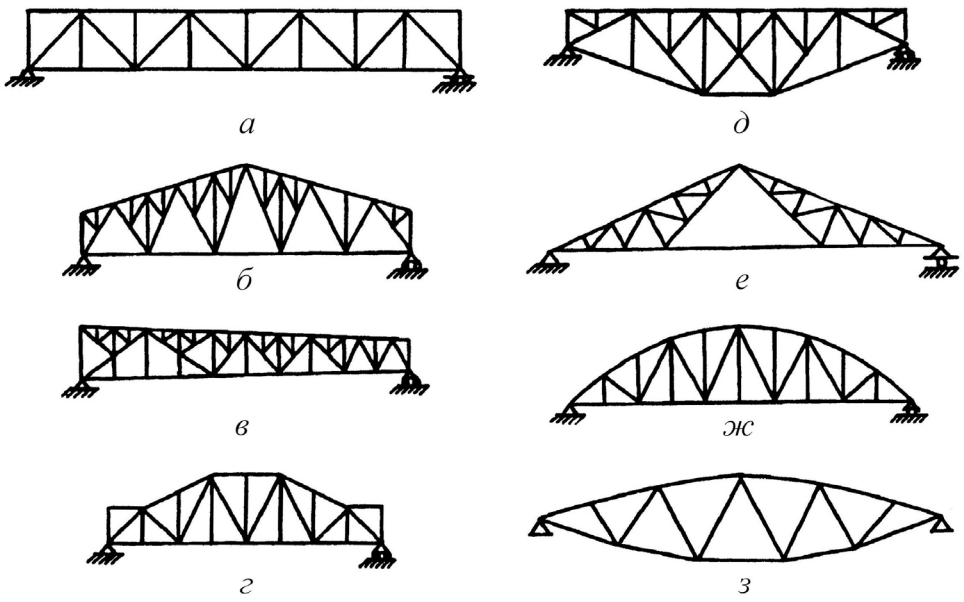


Рис. 1.65. Схемы решетчатых ферм: а - с параллельными поясами; б, в - с трапецеидальным очертанием верхнего пояса (б - двухскатная; в - односкатная); г, д - с полигональными поясами (г - верхним; д - нижним); е - треугольная ферма; ж - сегментная ферма; з - параболическая ферма

Фермы с параллельными поясами (рис. 1.65, *а*) просты в изготовлении и монтаже, но увеличивают площадь стенового ограждения, требуют специальных решений для отвода воды с кровли и более металлоемки. Кроме того, они несколько повышают эксплуатационные расходы на обогрев здания. Фермы с трапецеидальным очертанием верхнего пояса (рис. 1.65, *б*, *в*) упрощают отвод воды с кровли, но более сложны в изготовлении. Обычно применяются двухскатные кровли с уклоном 1/10...1/15 пролета, реже, при меньших пролетах, – односкатные с уклоном 1/20...1/30 пролета.

Для некоторых типов зданий целесообразно применять полигональные фермы с ломаным верхним или нижним поясами (рис. 1.65, *г*, *д*). Треугольные фермы применяются при сравнительно небольшом пролете и значительном уклоне кровли (от 1/7 до 1/5). Такие фермы можно образовать из двух полуферм полной заводской готовности, объединяя их на строительной площадке посредством затяжки (рис. 1.65, *е*).

Сегментные и параболические фермы (рис. 1.65, *ж*, *з*), как и полигональные, целесообразно применять при больших пролетах. Они позволяют заметно уменьшить расход металла, особенно в случае включения в работу верхнего пояса металлических или железобетонных панелей покрытия.

В зависимости от величины пролета, высоты фермы, длины панели и других факторов применяются различные типы решеток: треугольная, раскосная, ромбическая, полураскосная, крестовая и другие, более сложные.

Балочные покрытия проектируют в виде обычной традиционной и усложненной конструкций. Традиционная схема покрытия включает фермы и ограждающие конструкции (панели или прогоны с уложенным по ним профилированным настилом). Усложненная схема состоит из главных и вспомогательных ферм, поддерживающих ограждающие конструкции.

Традиционная схема покрытий применяется при пролетах до 60 м, усложненная – до 100 м и более. Шаг ферм при традиционной схеме принимается равным 12...24 м, при усложненной – 24...36 м. Отношение высоты к пролету в треугольных фермах принимается 1/6...1/9, в полигональных – 1/7...1/11, в фермах с параллельными поясами – 1/8...1/12. Прогиб в указанных фермах без подвесного транспорта должен быть не более 1/350 пролета, а с подвесным транспортом – 1/500 пролета. Высота неразрезных ферм принимается обычно на 20...30% меньше высоты разрезных. Пояса ферм могут иметь различные поперечные сечения.

Расчет ферм проводится аналитическими и графическими методами строительной механики. При высоте сечений поясов, превышающей 1/8 длины панели, влиянием жесткости узлов на усилие в элементах фермы пренебрегают.

При больших пролетах и специальных требованиях назначается строительный подъем. Обычно он задается линией с переломами в узлах ферм.

Большепролетные фермы целесообразно выполнять предварительно напряженными. Наиболее широкое применение получил метод предварительного напряжения затяжками из высокопрочного материала (стальных канатов). Затяжки для создания предварительного напряжения можно располагать как в пределах наиболее нагруженного стержня или группы стержней, так и в пределах всего пролета (вдоль нижнего пояса). В последнем случае усилия предварительного напряжения возникают во всех стержнях фермы. Такой способ более эффективен.

При больших пролетах и значительной разнице усилий в панелях нижнего пояса с целью создания более равномерного предварительного напряжения в элементах ферм устраивают две затяжки, концы которых не доходят до противоположных опор на расстояние, равное примерно 1/4 пролета. При этом элементы с большими расчетными усилиями получают большее разгружающее предварительное напряжение.

С целью экономии стали применяют так называемые шпренгельные затяжки, вынесенные за пределы фермы, однако они не получили широкого распространения.

Эффективность предварительного напряжения ферм можно значительно повысить, если в установленных в проектное положение фермах неоднократно чередовать приложение усилий предварительного напряжения и нагрузки. При этом во избежание потери несущей способности ферм при демонтаже их необходимо разгружать в обратной последовательности.

Предварительное напряжение ферм целесообразно осуществлять методом упругого деформирования элементов, который не требует дополнительного расхода стали на затяжки и анкерные устройства. К сожалению, этот метод недостаточно отработан и в строительстве практически не применяется.

Рамные системы. В промышленном и гражданском строительстве применяются различные типы рамных систем. Последние создают более жесткую конструкцию каркаса здания, позволяют уменьшить строительную высоту и снизить расход стали.

Рамы проектируют сплошностенчатыми и сквозными, с консолями и без них. Очертание ригелей может быть одно- и двухскатным прямолинейным, а также полигональным и криволинейным.

Высота сплошностенчатых ригелей принимается в пределах 1/20...1/30, решетчатых – 1/12...1/20 пролета. Эффективность рамной системы повышается, когда жесткость колонн приближается к жесткости ригеля.

Широко применяются рамные системы с жестким соединением ригеля с колоннами и шарнирным или жестким соединением колонн с фундаментами. Жесткое соединение ригеля с колоннами (рис. 1.66, *а*) уменьшает изгибающий момент в середине ригеля и его прогиб.

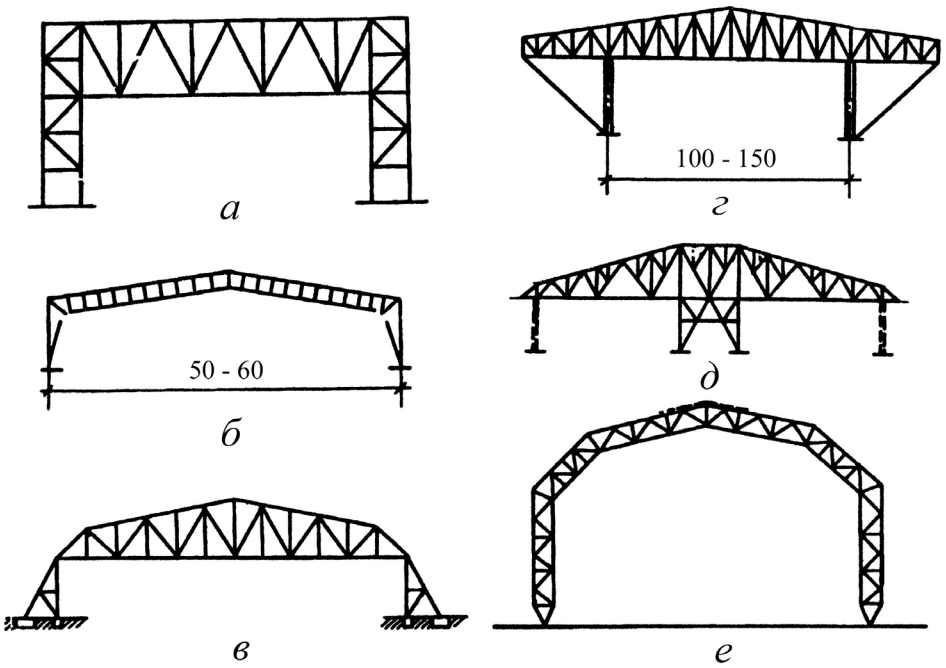


Рис. 1.66. Рамные системы: а - жесткое соединение ригеля с колоннами и колонн с фундаментами; б - шарнирное соединение колонн с фундаментами; в - шарнирное соединение ригеля с колоннами и жесткое соединение колонн с фундаментами; г - предварительно напряженная рамно-консольная система с оттяжками; д - двухпролетная рамная система с жесткой средней и двумя гибкими наружными колоннами; е – двухшарнирная рама с криволинейным ригелем

При шарнирном опирании стоек рамы на фундамент несколько снижается чувствительность последней к осадке опор (рис. 1.66, *б*).

Реже применяют рамную систему с шарнирным соединением ригеля с колоннами и жестким соединением колонн с фундаментами (рис. 1.66, *в*). Последняя система, как и рама, показанная на рис. 1.66, *б*, допускает некоторую неравномерность в осадке опор.

Для перекрытия больших пролетов целесообразно применять предварительно напряженную рамно-консольную систему с оттяжками (рис. 1.66, *г*). Предварительное напряжение конструкции рамы осуществляется натяжением оттяжек. Соединение ригеля с колоннами и колонн с фундаментами выполняют как жестким, так и шарнирным.

При строительстве большепролетных промышленных зданий, ангаров, объектов судостроения и спортивных сооружений получили применение двухпролетные рамные системы с жесткой средней колонной и двумя

гибкими наружными колоннами (рис. 1.66, *д*). Рамные системы с криволинейным ригелем применяют при большой высоте здания (рис. 1.66, *е*).

Наряду с чисто рамными системами в последние годы применяют комбинированные системы, в частности с использованием вант (в системах с жесткой средней опорой и гибкими наружными колоннами) и др.

В рамных системах, как и в балочных, целесообразно применять предварительное напряжение. Наиболее часто предварительное напряжение создается установкой затяжек на уровне опор, в узлах сопряжения ригеля со стойками, в пролете и под опорой в многопролетных рамах, а также оттяжек в рамно-консольных системах. Изменения изгибающего момента в ригеле многопролетной рамы можно достичь также вертикальным перемещением опор колонн.

В качестве примера рассмотрим стапельный пролет судостроительного цеха, возведенного в 1988 году (проект разработан ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского»). Цех представляет собой одноэтажное здание пролетом 96 м, длиной 192 м и высотой до нижнего пояса ригелей рам 38 м [16].

Статическая схема здания – рамный однопролетный поперечник с жестким креплением ригелей к стойкам и стоек в фундаментах. Шаг основных рам – 24 м, ригели – с параллельными поясами высотой 10 м, пояса, раскосы и большинство стоек ригеля – из сварных Н-образных элементов, соединенных в узлах высокопрочными болтами. Стойки ригелей решетчатые шириной 3 м (в осях), ветви колонн из сварных двутавров высотой 900 мм.

В связи со значительными изгибающими моментами в стойках рам от нагрузки на ригели проектом предусматривалось нагружение ригеля собственным весом, весом кровли и фонарей при шарнирной схеме крепления с последующим закреплением нижнего пояса к стойкам и образованием жесткого поперечника. Указанное предварительное нагружение ригеля уменьшило изгибающие моменты в стойках на уровне ригеля на 10 000 кНм и в уровне фундаментов на 8500 кНм, что составляет примерно 30% от расчетных моментов.

Здание крытой спортивной арены в Киеве – однопролетное с размерами в плане 138,0×109,4 м. Высота до верха несущих балок в середине пролета 20,6 м, до низа балок на опорах – 19,1 м. Основные несущие конструкции – пространственные рамно-консольные блоки, включающие спаренные сплошностенчатые балочно-консольные ригели из сварных двутавров переменной высоты, четырехъярусные рамные колонны и оттяжки, соединяющие концы консолей ригелей с низом колонн. В ригелях рам предусматривается регулирование усилий (преднапряжение) путем натяжения оттяжек. Ширина пространственного блока 6 м. Расстояние между

блоками перекрывается пространственными трехгранными фермами пролетом 18 м, по которым укладывается профилированный настил. Несущие конструкции разработаны с расчетом на бескрановый способ монтажа. Собранные внизу за пределами здания пространственные рамы с помощью шагового подъемника поднимают на проектную отметку и накатывают по путям, расположенным на отметке опирания колонн. По закрепленным основным рамам осуществляется накатка пространственных ферм в направлении поперек здания.

Более разнообразны решения покрытий ангаров. В зависимости от типа самолетов пролеты ангаров (разборки, ремонта, сборки и окраски самолетов) изменяются в значительных диапазонах. Для тяжелых рейсовых самолетов они достигают 108 м и более. Ниже приведены несколько компоновочных схем, разработанных ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского» [16].

Схема 1. Для конструкций каркаса принята поперечная компоновка. Каркас из двухшарнирных рам с защемленными в фундаментах стойками и решетчатыми ригелями высотой 10,5 м. Шаг рам 12 м. По ригелям укладывают прогоны, а по ним – профилированный настил. Пути подвесных кранов располагают вдоль ригелей рам.

Схема 2. Для конструкций каркаса принята продольно-поперечная компоновка. При этом на ригель надворотной рамы опираются стропильные фермы пролетом 84 м с шагом 12 м. Кровля решается по схеме 1. Пути подвесных кранов устраивают поперек стропильных ферм.

Схема 3. Для конструкций каркаса принята продольно-поперечная компоновка. На ригель надворотной рамы с шагом 36 м опираются две продольные фермы пролетом 84 м. В уровне нижних поясов продольных ферм с шагом 12 м располагаются поперечные неразрезные стропильные фермы высотой 3,15 м, пространственные, с проходом понизу. Кровля решается по схеме 1. Вдоль стропильных ферм располагают пути подвесных кранов. Покрытие по схеме 3 позволяет вынести над кровлей верхние пояса и опоры надворотной фермы и двух продольных ферм.

Схема 4. Для конструкций каркаса принята продольно-поперечная компоновка, но в отличие от схемы 2 поперечная рама отнесена от плоскости ворот на 24 м в глубь ангара, а продольные стропильные фермы с проходом понизу опираются на ригель рамы в уровне нижнего пояса и дополнительно поддерживаются подвесками к ригелю рамы. Кровля решается по схеме 1.

Схема 5. Конструкция каркаса такая же, как и в схеме 4, но вместо одной поперечной установлены две рамы, отнесенные в глубь ангара от плоскости ворот на 12 и 48 м. При этом стропильные фермы осуществляются двухпролетными с консолью без подвесок.

Арочные системы. Применение арочных систем при определенных объемно-планировочных данных и эксплуатационных условиях позволяет

получать более высокие технико-экономические показатели по сравнению с балочными и рамными системами. В первую очередь это относится к зданиям с большим пролетом и значительной высотой при сравнительно небольшой полезной нагрузке и хороших инженерно-геологических условиях строительной площадки (надежных основаниях, не допускающих неравномерных просадок грунтов).

По расходу металла наиболее эффективны бесшарнирные арки. К их недостаткам можно отнести повышенную чувствительность к неравномерным осадкам опор и воздействию температуры.

Наиболее широкое применение получили двухшарнирные арки. Они менее чувствительны к неравномерным осадкам опор и, за исключением металлоемкости, обладают всеми преимуществами бесшарнирных арок (просты в изготовлении, удобны в монтаже).

Трехшарнирные арки более деформативны, требуют устройства дополнительного шарнира в ключе, а следовательно, более сложны в изготовлении, но, как и все статически определимые системы, нечувствительны к осадкам опор и воздействию температуры. В зависимости от нагрузки, эксплуатационных условий и других факторов очертание арок принимают круговое, параболическое, эллиптическое или в виде цепной линии.

В зависимости от пролета и нагрузки сечение арки может быть сплошным или решетчатым с постоянной или переменной высотой. Оптимальная высота решетчатых арок 1/25...1/50 пролета, арок сплошного сечения – 1/50...1/75 пролета. Арки, подобно поясам ферм и ригелей рамных систем, могут иметь различные типы поперечных сечений: двутавровое сварное (сплошное и сквозное), коробчатое, двухстенчатое, из четырех уголков, трехгранное из труб и др.

1.8.3. Решетчатые покрытия из плоских структурных плит. Поиски современных архитектурных форм большой выразительности и универсальности, образуемых на основе многократно повторяющихся элементов, привели к созданию стержневых систем нового типа, так называемых структур. Эти системы, имея в своей основе «кристаллическое» строение, сходны с некоторыми весьма прочными образованиями органической природы. В практике отечественного и зарубежного строительства имеется немало примеров применения структурных конструкций в виде оболочек, складок, куполов. Однако в подавляющем большинстве случаев структурные конструкции имеют вид стержневых плит. Эти конструкции изготовляют из стали, алюминия, дерева, в некоторых случаях – из пластмасс. В гражданском строительстве используют плиты регулярного строения из армоцементных элементов. Наиболее широкое

распространение в отечественном строительстве получили стальные структурные плиты [16, 24, 28].

Структуры обладают рядом преимуществ. Рациональное использование их позволяет повысить экономическую эффективность конструкции по сравнению с традиционными решениями. К преимуществам относятся пространственность работы системы, повышенная надежность от внезапных разрушений, снижение строительной высоты покрытия (перекрытия), возможность перекрытия больших пролетов, удобство проектирования линий подвесного транспорта и подвесных потолков, возможность свободной расстановки оборудования (на перекрытиях), облегчение ограждающих конструкций кровли благодаря частой сетке узлов, максимальная унификация узлов и стержневых элементов, поточное изготовление металлических конструкций на высокопроизводительных технологических линиях, снижение затрат на транспорт и возможность доставки в отдаленные и труднодоступные места, возможность использования совершенных методов монтажа – сборки на земле и подъема покрытия крупными блоками, сборно-разборность (при необходимости), архитектурная выразительность и возможность применения для зданий различного назначения.

Отметим, что экономическая эффективность использования структур в полной мере достигается при их серийном изготовлении на специализированных заводах.

Структурные конструкции, сходные по своему геометрическому строению с кристаллическими решетками металла, являются типичным примером пространственной системы. Сила, приложенная к любому узлу структуры и произвольно направленная, создает усилие в первую очередь в примыкающих к узлу пространственно расположенных стержнях, т.е. вызывает пространственную реакцию, сходную с сопротивлением сплошной системы (плиты или оболочки). Структурная система не имеет традиционных для металлических конструкций связей, а в ряде случаев и прогонов. Их функции выполняют несущие стержни поясных сеток и наклонной решетки. Легко убедиться, что даже структурная плита (рис. 1.67, *а*), поясные сетки которой образуют квадратные ячейки и сами по себе геометрически изменяемы, в целом является геометрически неизменяемой системой без каких-либо связей. Роль связей выполняют наклонные раскосы.

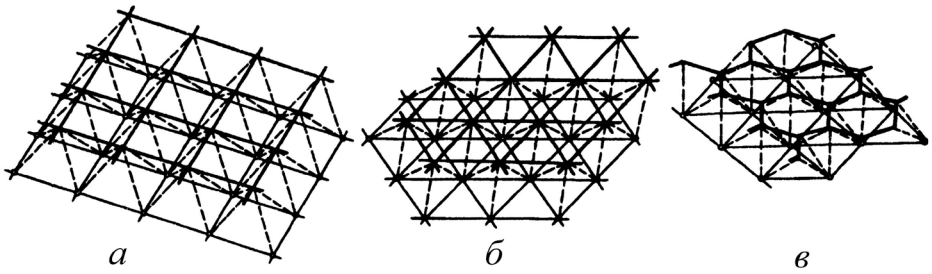


Рис. 1.67. Схемы структурных плит: а - ортогональная поясная сетка; б - поясная сетка с треугольными ячейками; в - поясная сетка с треугольными и шестиугольными ячейками

Системы с геометрически неизменяемыми поясными сетками (треугольные ячейки сеток, рис. 1.67, *б*) воспринимают крутящие моменты. В меньшей степени жесткостью на кручение обладают структуры, в которых одна сетка поясов геометрически изменяема, например, одна – из шестиугольников, другая – из треугольников (рис. 1.67, *в*).

В случае, когда обе поясные сетки являются геометрически изменяемыми, система не воспринимает крутящие моменты.

Работа структурных плит на кручение приводит к уменьшению усилий в поясах от действия изгибающих моментов. Распределение усилий в диагональных направлениях вследствие кручения увеличивает общую жесткость системы, работа которой обычно соответствует расчетным моделям в интервале от ортотропной пластинки с нулевой жесткостью на кручение до изотропной пластинки.

Помимо структурных систем с регулярной решеткой в практике строительства нашли применение структурные системы с так называемой разреженной решеткой, когда определенные ячейки не заполняются поясами или раскосами. Подобные решения, с точки зрения производства, имеют достаточные обоснования, однако в статическом отношении разрежение решетки способствует снижению как общей жесткости системы, так и работы системы на кручение.

Структурные плиты обладают повышенной жесткостью, обычно для них рекомендуется отношение высоты к пролету h/l=1/16...1/25.

Структурные плиты целесообразно применять с укрупненной сеткой колонн, переход к которой в большинстве случаев прогрессивен. Преимущества таких схем известны: свободная планировка, гибкость при изменении технологии, а также экономия площади.

Проблема подвесного транспорта при структурах решается намного проще, чем в обычных покрытиях. Частая сетка узлов допускает подвеску путей кранов, тельферов и конвейеров с минимальными дополнительными затратами в любой зоне конструкции.

Сокращение пролета между несущими элементами с 6 или 12 м до 3...4 м в структурах создает в ряде случаев условия для применения беспрогонных кровель.

В многоэтажных зданиях, когда помещения должны удовлетворять требованиям произвольной установки оборудования, а также при необходимости применения большепролетной сетки колонн, структуры являются весьма удачной конструкцией и для перекрытий.

Характерной особенностью структурных плит, с одной стороны, является малая жесткость стержней при изгибе, что позволяет допустить при их расчете гипотезу о шарнирном соединении узлов и значительно упростить построение алгоритма расчета. С другой стороны, ввиду высокой степени статической неопределимости напряженно-деформированное состояние данных систем зависит от жесткостей составляющих элементов и характера их изменения в процессе нагружения. Увеличение прогибов элементов, связанное с начальными несовершенствами и эксцентриситетами приложения продольных сил, приводит к снижению их жесткостей. Следствие этого – перераспределение внутренних усилий и нарастание общих прогибов конструкции, что рекомендуется учитывать при расчете.

При исследовании работы структурных плит в более сложных системах, например в составе каркаса здания, с учетом податливости основания с предварительным напряжением, рекомендуется применение смешанных методов. В этом случае используется сложная основная система, отдельными элементами которой могут быть структурные плиты, колонны каркаса, упругое основание и т.п.

В основном расчет структурных плит производится в упругой постановке, однако в отдельных случаях он осуществляется с учетом частичного развития пластических деформаций. Это позволяет уменьшить число типоразмеров стержней и снизить расход металла путем использования резерва несущей способности.

Хотя купольные покрытия известны давно, широкое применение они получили лишь в последнее время. Если в плитах срединная поверхность стержневого набора представляет собой плоскость, то узлы решетчатых куполов располагаются на гладких криволинейных поверхностях различной кривизны. Встречаются и более сложные формы очертания поверхности куполов.

Обычно пространственную стержневую систему, узлы которой лежат на некоторой поверхности, ограничивающей односвязную область, называют сетчатой. В односетчатых пространственных решетчатых покрытиях узлы лежат на срединной поверхности, в двухсетчатых они отнесены от нее по обе стороны.

При пролетах 40...80 м проектируют односетчатые купола, а при пролетах 100...200 м – двухсетчатые. Они образуются из стандартных

треугольных, четырехугольных и других элементов полной заводской готовности.

Для односетчатых систем опасны возможные отклонения от заданной геометрической формы из-за неточностей изготовления и монтажа и непредусмотренных неравномерных нагрузок. В результате неблагоприятного сочетания указанных факторов может произойти «прощелкивание» узлов через положение безразличного равновесия к новой, устойчивой равновесной форме. Чтобы улучшить условия работы односетчатых конструкций, сечения стержней-хорд развиваются в плоскости соответствующего сегмента и защемляются в узлах от поворота в этой плоскости.

По сравнению с плитами и цилиндрическими оболочками купол как поверхность двоякой кривизны более эффективно работает под нагрузкой. Сферический купол дает максимум внутреннего объема на единицу площади ограждающей поверхности. Однако решетчатый купол значительно сложнее в исполнении, чем стержневые плиты и сетчатые цилиндрические оболочки, изготавливаемые из минимального числа типоразмеров элементов. Так, структуру с поясными сетками, лежащими в параллельных плоскостях, можно запроектировать из стержней одной длины при однотипных узлах. То же справедливо и для односетчатого покрытия при круговой образующей, к которой можно приблизиться теоретически с любой точностью. С другой стороны, попытки лучше вписаться в сферу приводят к большему числу типоразмеров, например, при радиально-концентрической системе разрезки куполов по мере приближения к вершине размеры панелей уменьшаются.

Другой принцип формирования сетчатых поверхностей куполов, интенсивно развиваемый в последнее время, основан на свойствах геодезических линий криволинейных поверхностей как кратчайших расстояний между точками на поверхности. В частности, для сферы прямолинейные стержни или ломаную цепочку стержней вписывают в дуги большого круга. Для разбивки опорной геодезической сети используется теория правильных выпуклых многогранников: четырех-, шести-, восьми-, двенадцати- и двадцатигранников. Особый интерес представляют два последних. Каждая из двадцати граней икосаэдра – равносторонний треугольник, поэтому, устанавливая по его ребрам стержни, можно получить неизменяемую сетчатую систему из тридцати элементов одинаковой длины. Однако их середины отстоят от поверхности описанной сферы примерно на 15% радиуса, в связи с чем для куполов больших диаметров грани икосаэдра проектируют на сферу и членят полученные сферические треугольники на более мелкие треугольные ячейки. Один из первых большепролетных куполов диаметром 60 м, разработанный Шведлером и построенный в 1874 г., показан на рис. 1.68.

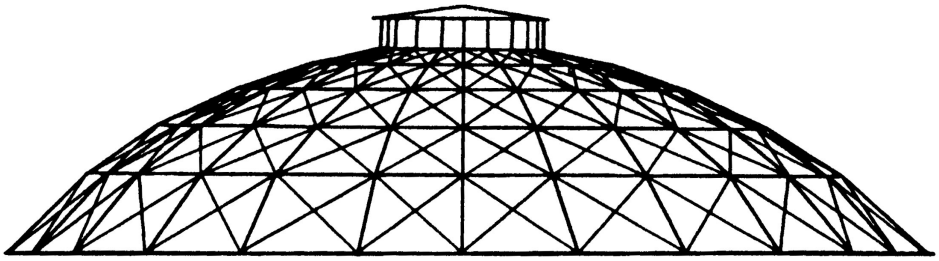


Рис. 1.68. Схема большепролетного купола системы Шведлера

Купол представляет собой конструкцию, состоящую из ребер и колец с крестовыми связями, работающими на растяжение.

Самый крупный двухсетчатый купол диаметром 196 м сооружен в США для перекрытия стадиона «Гаррис Каунти» в Хьюстоне. Купол разделен меридиональными ребрами на 12 секторов, в каждом – по 36 треугольных ячеек, образованных шестью ярусами колец и двумя семействами квазимеридиональных линий. Ребра выполнены из шести ферм длиной 18 м с параллельными поясами. Высота ферм и остальных двухветвевых стержней (колец и раскосов) 1,82 м. Принятая схема разбивки секторов позволяет получить значительно меньше типоразмеров элементов, чем разбивка купола Шведлера, особенно для пологих сегментов.

В практике отечественного и зарубежного строительства применяются разнообразные системы куполов. Некоторые из них показаны на рис. 1.69, *а-и*. При этом на рис. 1.69, *е* справа от оси симметрии показан так называемый звездчатый купол, образованный тремя семействами криволинейных стержневых цепей: два из них спирально восходят от опорного кольца к вершине, третье концентрически опоясывает по горизонтали.

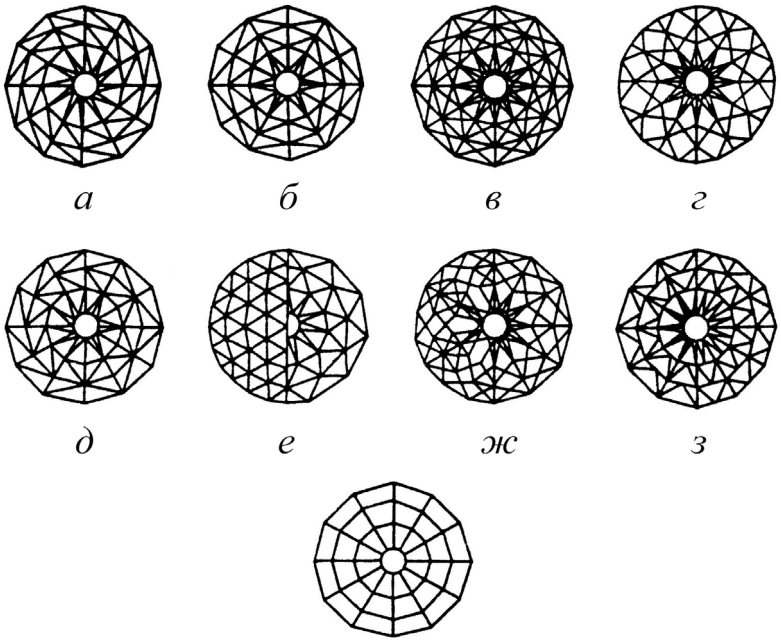


Рис. 1.69. Схемы куполов

Конструкции элементов и узлов различных схем куполов приведены на рис. 1.70.

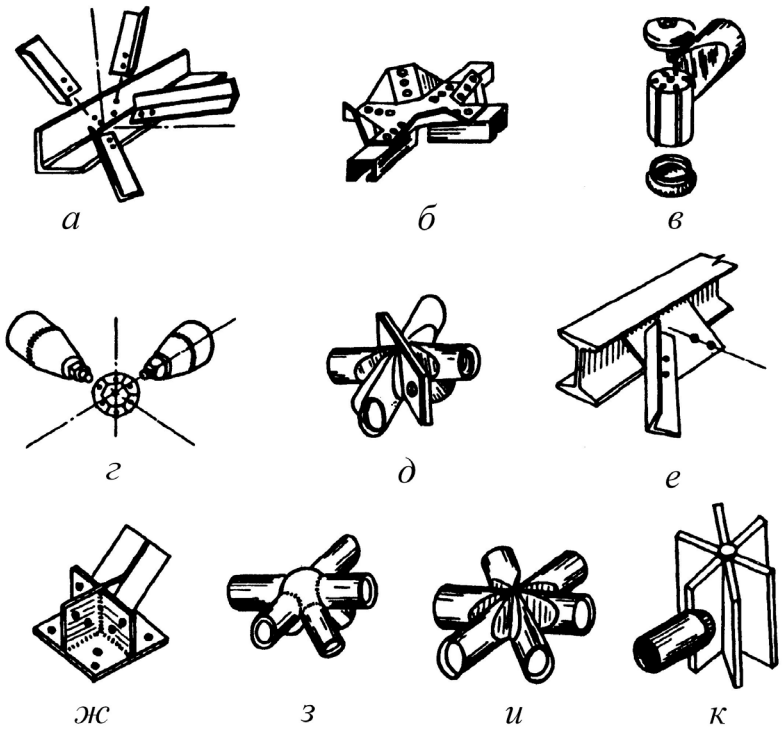


Рис. 1.70. Узловые сопряжения стержневых структурных плит: I группа - болтовые (а-в); II группа - комбинированные (г-ж); III группа - сварные (з-к)

При расчете и анализе напряженно-деформированного состояния куполов необходимо руководствоваться основными закономерностями формообразования конструкций, т.е. синтезом схем. Выбор метода расчета и средств его автоматизации (программы для ЭВМ) зависит прежде всего от особенностей конструктивной формы, условий эксплуатации, изготовления и монтажа.

1.8.4. Покрытия в виде вантовых и комбинированных систем и оболочек. В зависимости от назначения здания с вантовыми покрытиями могут иметь самые разнообразные очертания в плане: прямоугольное, квадратное, овальное, многоугольное, круглое, комбинированное (состоящее из прямолинейных и криволинейных участков) и др. В большом диапазоне могут изменяться пролеты и высота отдельных частей зданий, радиусы кривизны поверхности и другие параметры [3, 7, 20, 22].

Ниже приведены некоторые данные, которыми руководствуются при выборе отдельных параметров зданий с вантовыми покрытиями.

Размер пролета. В отличие от балочных конструкций в несущих элементах вантовых систем усилие (распор) увеличивается пропорционально величине пролета. Однако, если не ограничивать высоту опорных конструкций и соответствующим образом подбирать стрелу провисания несущих элементов, можно добиться того, что распор в них не будет расти с увеличением пролета. Поэтому в зданиях с вантовыми покрытиями величина пролета не сказывается так существенно на материалоемкости пролетных конструкций, как в балочных системах.

Расположение опор. В прямоугольных однопролетных зданиях опоры, как правило, располагаются по периметру здания, в многопролетных – линейно (строчечно) и в шахматном порядке (в зависимости от типа вантовой сети). В овальных, многоугольных и круглых зданиях опоры могут располагаться как по периметру зданий, так и в центре. Покрытия с одной центральной опорой (шатрового типа) позволяют вдвое уменьшить пролет и заметно снизить расход материалов как на ванты, так и на внутренний и наружный опорные контуры. Особенно целесообразно применять такие решения при строительстве зданий в районах с просадочными грунтами, поскольку можно всю нагрузку от покрытия передать на центральную опору и не бояться просадок опор, поддерживающих наружный опорный контур.

Встречаются покрытия с овальным, многоугольным и круглым планами с опорой не в центре покрытия, с двумя и большим числом опор, расположенных внутри здания. Однако такие решения, как правило, менее эффективны, особенно в части трудоемкости работ.

Форма и число опорных контуров. Прямоугольные однопролетные здания выполняются в основном с замкнутым опорным контуром. Реже встречаются здания с разомкнутым опорным контуром. В последнее время применяются также решения с внутренними распорками, расположенными по диагоналям здания. В вертикальной плоскости замкнутый опорный контур выполняется прямолинейным, многоугольным или криволинейным. В последних двух случаях очертание опорного контура принимается в соответствии с кривой провисания несущей пролетной конструкции. В однопролетных зданиях с разомкнутым опорным контуром последний выполняется прямолинейным или с небольшим уклоном, обеспечивающим при одной и той же стреле провисания несущих элементов сток воды с покрытия.

Прямоугольные многопролетные, особенно промышленные здания чаще всего проектируются с разомкнутым опорным контуром. Реже применяются решения с замкнутым опорным контуром, расположенным по периметру отдельных ячеек – в зданиях с крупной сеткой колонн: 24×24; 24×36; 36×36 и более.

В овальных покрытиях опорный контур может быть из одного или нескольких аркообразных элементов различного очертания в плане и

профиле. При увеличении числа аркообразных элементов они в пределе образуют замкнутый кольцевой опорный контур.

Одно- и многопролетные прямоугольные и круглые здания с жесткими висячими оболочками, как правило, устраиваются с одним опорным контуром. В легких, предварительно напряженных вантовых системах эффективными могут оказаться решения с двумя опорными контурами. В ряде случаев находят применение многокольцевые системы, в которых каждое последующее за наружным опорным контуром кольцо в виде циклической рамы опирается на нижний ярус вант и воспринимает распор от верхнего яруса вант.

Рассмотрим теперь некоторые типы поверхностей вантовых покрытий, образованных из одного или нескольких семейств несущих элементов, для зданий с прямоугольным планом.

Одной из наиболее распространенных форм поверхностей является поверхность, образованная кривой провисания несущих элементов. Покрытия с такой поверхностью называются цилиндрическими. Эти покрытия образуются системой параллельных в плане вант [16, 18].

В вантово-балочных системах (рис. 1.71, *а-в*) по вантам укладывают прямолинейные, двухскатные и криволинейные балки, а по ним – легкие ограждающие конструкции.

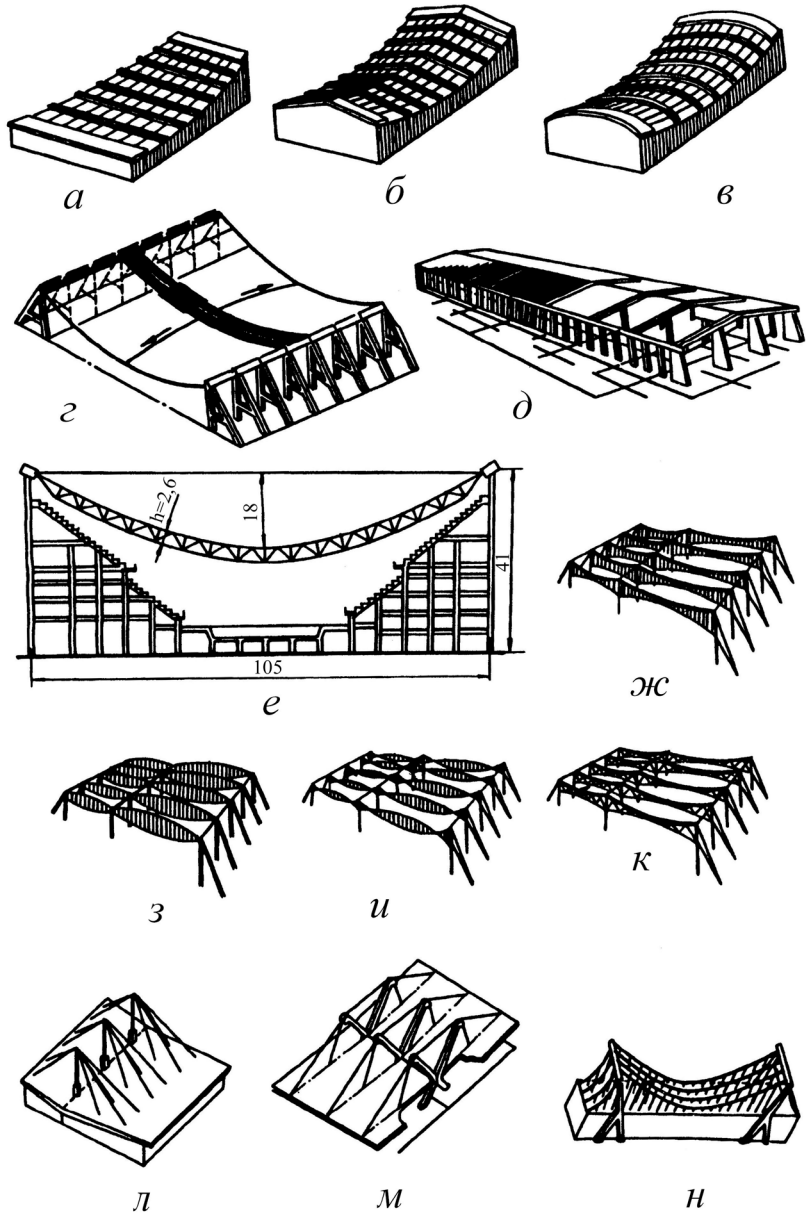


Рис. 1.71. Схемы висячих покрытий на прямоугольном плане: а - в - из свободно провисающих вант и балок; г, д - из свободно провисающих и предварительно напряженных вант; е - с висячими фермами конечной жесткости; ж - к - с двухпоясными вантовыми фермами; л, м – с подвесными кровлями

Поскольку при больших пролетах отвод воды с кровли вдоль пролета затруднен, применяются в основном решения с двухскатными или криволинейными балками.

Покрытия в виде оболочек состоят из параллельных вант (встречаются также системы, в которых ванты расходятся под некоторым углом) и омоноличенных с ними железобетонных плит (рис. 1.71, *г*). Для повышения трещиностойкости оболочки выполняют предварительно напряженными. В таких покрытиях можно несколько уменьшить расход металла на ванты (на 10...15%), если изготавливать плиты с выпущенной за пределы поперечных ребер, идущих параллельно вантам, арматурой, а затем сварить выпуски из смежных плит между собой, а выпуски из крайних приварить к опорному контуру.

С целью уменьшения деформативности пролетную конструкцию в покрытиях цилиндрического типа выполняют в виде висячих ферм, как, например, покрытие Олимпийского плавательного бассейна в Москве (рис. 1.71, *е*).

В многопролетных зданиях с вантовыми покрытиями, особенно с легким кровельным ограждением, получили применение различного рода двухпоясные системы с решеткой в виде вертикальных растяжек или стоек, а также фермы с треугольной решеткой (рис. 1.71, *ж-к*). При сравнительно небольших пролетах целесообразно применять конструкции со сжатыми стойками (в виде рыбок), при средних и больших пролетах – решетку, состоящую из сжатых стоек и растяжек, и для всего диапазона пролетов – треугольную решетку.

Многие здания с прямоугольным планом строятся с так называемыми подвесными покрытиями, несущие элементы которых находятся над поверхностью кровли. В качестве несущей системы в подвесных покрытиях применяются радиально-вантовые системы, одно- и двухцепные системы с различной решеткой, расположенные вдоль или поперек пролета здания, и др. (рис. 1.71, *л-н*). Поверхность кровли в таких покрытиях может быть плоской, одно-, двух- или четырехскатной.

Рассмотрим принципы образования вантовых систем в прямоугольных зданиях с замкнутым контуром. Как известно, в основу замкнутого безызгибного опорного контура положена идея передачи усилий от вантовой системы в углы опорного контура [29]. Известны две схемы вантовых систем, основанные на использовании этой идеи: с вантами-подборами у двух (при параллельных вантах) или у четырех (при ортогональной сети вант) сторон опорного контура и с двумя диагональными элементами, к которым с определенным шагом крепятся ванты, идущие параллельно сторонам опорного контура (рис. 1.72, *а-в*).

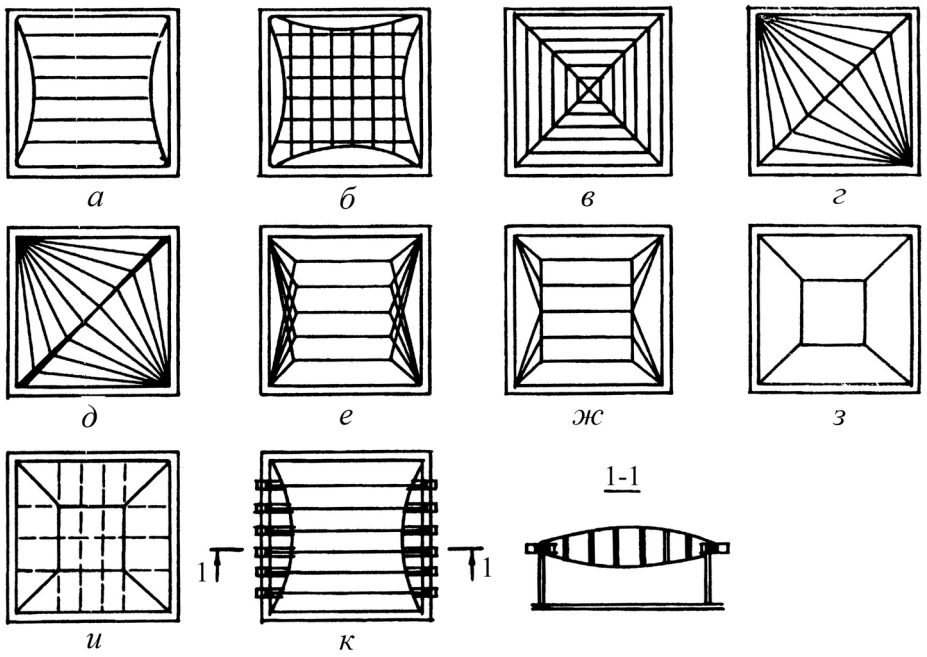


Рис. 1.72. Схемы вантовых сетей в прямоугольных зданиях с замкнутым опорным контуром: а, б - с канатами-подборами; в - с двумя диагональными элементами; г - с одним диагональным элементом; д - с одним диагональным элементом переменного сечения по длине; е - с оттяжками; ж - с затяжками; з - с дополнительным внутренним опорным контуром; и - с дополнительным внутренним опорным контуром и фермами; к - с распорками и канатами и канатами-подборами

Со временем вторая схема вантовой сети была усовершенствована. В ней поперечное сечение наиболее нагруженных диагональных элементов изменялось по длине по мере изменения в них усилий (при приближении к углам опорного контура).

Безызгибная работа опорного контура достигается также, если расходящиеся из двух противоположных углов опорного контура ванты закрепить в пролете на диагональном элементе, стягивающем два других противоположных угла опорного контура (рис. 1.72, *г*). Несколько уменьшить расход металла на покрытие можно, если дополнительный элемент выполнить переменного сечения по длине из отдельных оттяжек (рис. 1.72, *д*), каждая из которых одним из своих концов крепится к расходящимся вантам, а другая – к прилежащему углу опорного контура. Вблизи углов опорного контура оттяжки образуют развитый в вертикальной плоскости пучок, сечение которого уменьшается по мере приближения к середине пролета. Стрелы провисания вант в таких покрытиях подбираются

таким образом, чтобы усилия в них получались одинаковыми. Можно задать и другой закон провисания вант, обеспечивающий уклоны кровли, достаточные для организации внутреннего и наружного водостока. Недостатком такой схемы является невозможность использования типовых ограждающих конструкций. Схема (рис. 1.72, *е*) допускает использование типовых ограждающих конструкций, имеет меньшее число типоразмеров вант и более простые конструкции узлов, а также обеспечивает удобную регулировку стрел провисания вант покрытия, в котором каждую ванту крепят к углам опорного контура посредством оттяжек. В таких покрытиях вантовая сеть выполняется из параллельных вант, расположенных в одном и (или) двух взаимно перпендикулярных направлениях. Водоотвод с покрытия может устраиваться как внутренний, так и наружный. В последнем случае уклон покрытия образуется путем увеличения стрел провисания вант от середины здания к торцам. К недостаткам такого покрытия можно отнести наличие некоторой нерегулярности вант в приконтурной зоне. Однако благодаря простоте конструкций узлов крепления оттяжек к вантам и опорному контуру, возможности использования различного рода типовых ограждающих конструкций, а также применения индустриальных методов монтажа указанное решение должно найти широкое применение в практике строительства.

Представляется перспективной конструкция покрытия, показанная на рис. 1.72, *ж*. Здесь вантовая сеть выполняется из параллельных и радиальных вант. Параллельные ванты крепят к затяжкам, которые поддерживаются в проектном положении выходящими из углов опорного контура радиальными вантами. Такая вантовая сеть целесообразна и для многопролетных зданий с разомкнутым опорным контуром, так как она позволяет увеличить расстояние между анкерными опорами и при установке на промежуточные колонны ферм пролетом, равным расстоянию между анкерными опорами, дает возможность образовать крупную сетку колонн. В промышленных зданиях благодаря этому можно более рационально разместить производственное оборудование и на 6...15% увеличить мощность предприятий без повышения стоимости строительства.

С точки зрения удовлетворения требованиям, предъявляемым к покрытиям промышленных зданий, достаточно эффективно решение, приведенное на рис. 1.72, *з*. Пролетная конструкция такого покрытия выполняется из параллельных сторон опорного контура ферм, объединяемых на монтаже в замкнутые прямоугольники. Фермы поддерживаются в проектном положении диагональными вантами. На верхний пояс ферм укладываются плиты покрытия, образующие жесткий диск, препятствующий потере устойчивости опорного контура в горизонтальной плоскости. Такие покрытия допускают устройство малоуклонной кровли и подвесного

транспорта. Их можно возводить при строительстве как однопролетных, так и многопролетных зданий.

Положив в основу описанную выше конструкцию покрытия, можно, удлинив фермы, образующие внутренний опорный контур, до наружного контура и установив на них дополнительные фермы, получить другое решение пролетной части (рис. 1.72, *и*). Если при этом до прикрепления концов ферм к наружному опорному контуру пригрузить последние, то можно существенно облегчить как фермы, так и наружный опорный контур путем перераспределения усилий. Наружный опорный контур в таких покрытиях будет работать, как балка на упругоподатливых опорах, причем от действия реактивных усилий концов ферм он будет приподниматься вверх.

Во многих зданиях с замкнутым опорным контуром, как и в большепролетных многопролетных зданиях с разомкнутым опорным контуром, целесообразно применять покрытия с легкими ограждающими конструкциями. Для уменьшения деформаций от временных нагрузок такие покрытия необходимо проектировать со стабилизированной формой поверхности. Наиболее просто вопросы стабилизации поверхности покрытий решаются при применении двухпоясных вантовых систем. Одна из таких систем покрытия показана на рис. 1.72, *к*. Верхний и нижний пояса ферм покрытия крепятся к распорке в пределах опорного контура. Распорку одним концом присоединяют к канату-подбору, закрепленному в углах опорного контура, а другим опирают на опорный контур через катки или прокладки из антифрикционного материала (например, фторопласта). При этом обеспечивается раздельная передача составляющих опорной реакции вантовой фермы: вертикальной – на колонны, поддерживающие опорный контур, горизонтальной – на канат-подбор. Благодаря этому на контур не передается поперечная нагрузка, и он работает в основном на сжатие.

Рассмотрим некоторые типы поверхностей вантовых покрытий зданий криволинейного очертания в плане [18, 29]. Покрытия таких зданий чаще всего имеют сложную поверхность, образованную двумя и более семействами вант (рис. 1.73).

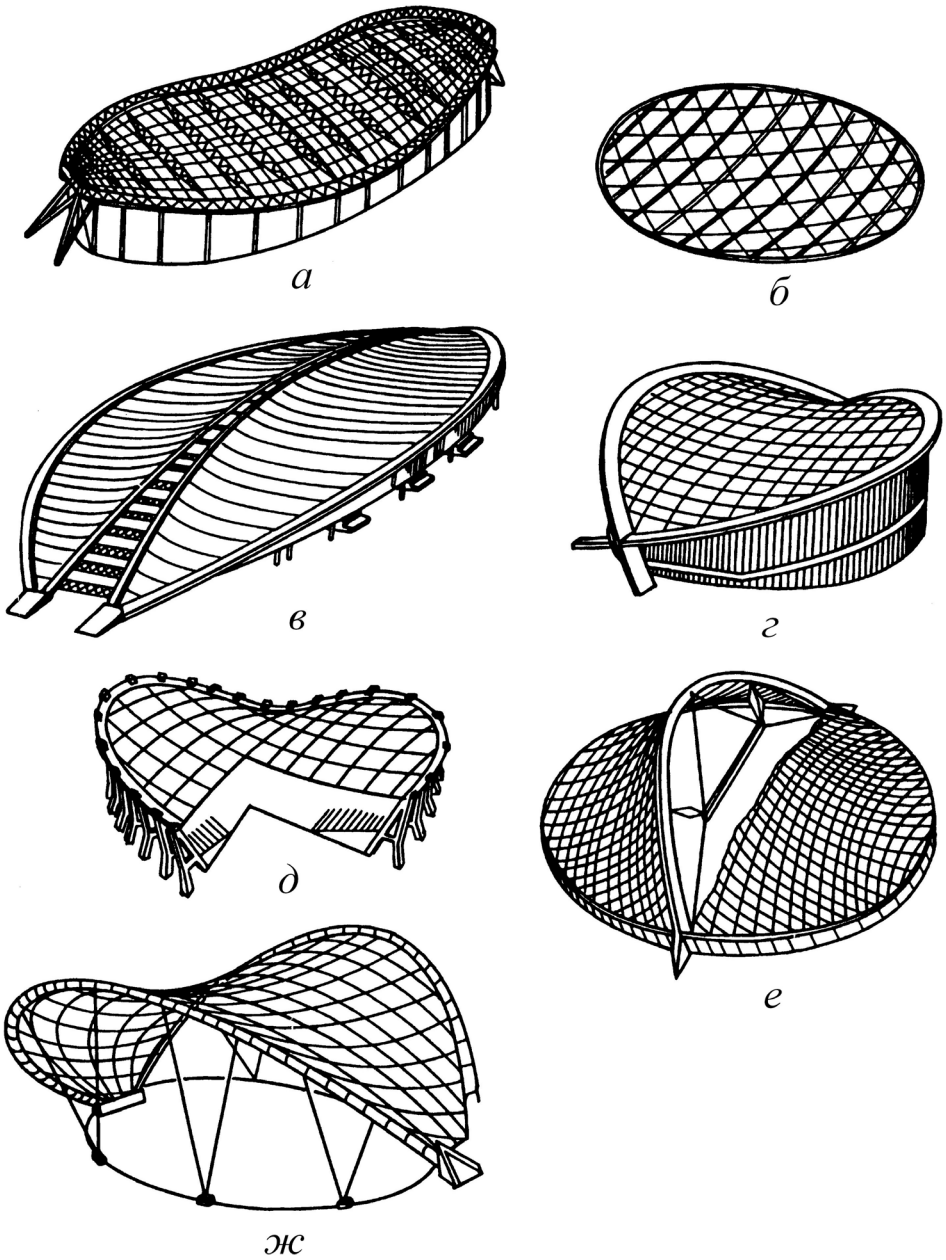


Рис. 1.73. Схемы висячих покрытий зданий криволинейного очертания в плане: а, б - с жесткими поперечными элементами и балками; в-ж - то же, седловидные

Обычно поверхности таких покрытий не являются кусочно-гладкими. В основе отдельных элементарных ячеек, составляющих поверхность покрытия, лежит, как правило, поверхность гиперболического параболоида. В таких покрытиях вантовая сеть выполняется предварительно напряженной. В качестве ограждающих конструкций применяется профилированный настил, металлические или алюминиевые панели с минераловатным утеплителем.

Из всех видов висячих покрытий наибольшее распространение получили покрытия с круглым планом, особенно шатрового типа.

В построенных покрытиях вантовая сеть принята одно- или двухслойной, как правило, радиальной и радиально-кольцевой систем (рис. 1.74).

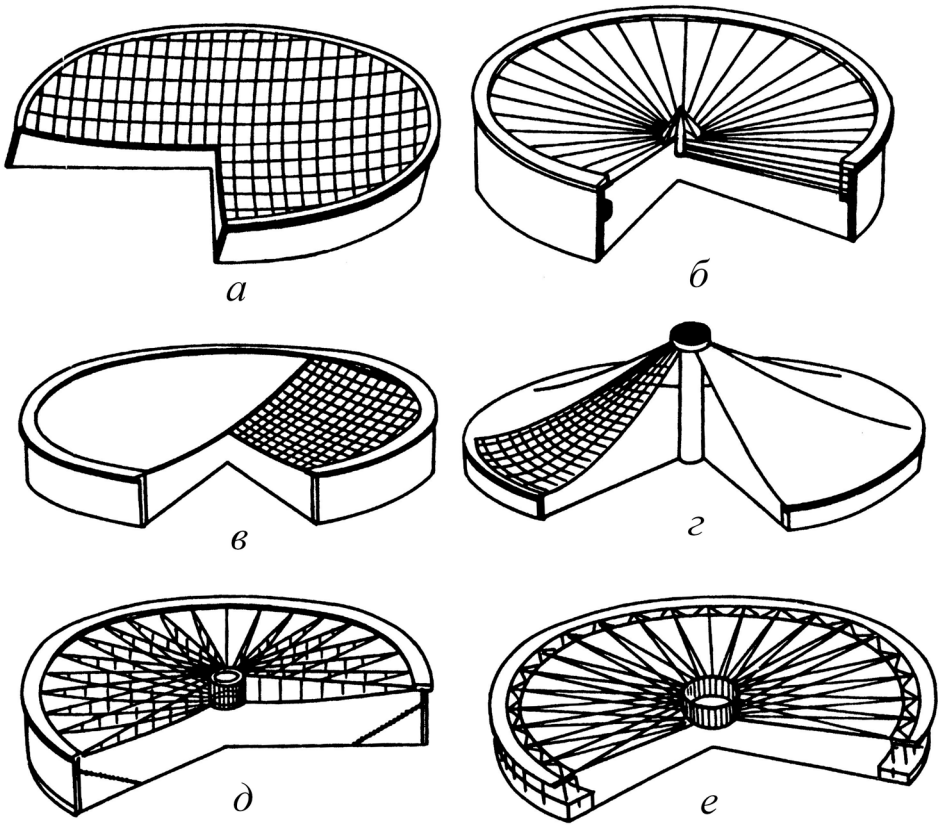
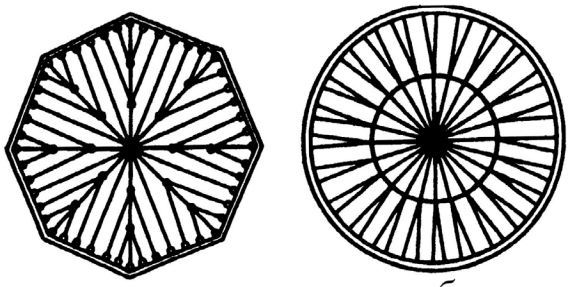


Рис. 1.74. Схемы висячих покрытий на круглом плане: а-г - однослойные; д, е – двухслойные

В последние годы нашли применение также мембранные покрытия, в том числе из алюминиевых переплетенных лент (см. рис. 1.74, *в*).

Ортогональная и особенно косоугольная вантовые сети не получили широкого распространения. Объясняется это тем, что при одних и тех же исходных данных расход материала на ванты на единицу площади горизонтальной проекции покрытия с радиальной сетью в 1,5 раза меньше, чем с ортогональной. Косоугольная сеть по эффективности несколько уступает ортогональной.

С целью уменьшения числа типоразмеров ограждающих конструкций была предложена радиально-вантовая система с дополнительными параллельными вантами, отстоящими одна от другой на одинаковом расстоянии (рис. 1.75, *а*). В таких покрытиях стрелы провисания дополнительных вант подбирают так, чтобы поверхность покрытия опиралась по кривой провисания основных вант.



а *б*

Рис. 1.75. Схемы радиально-вантовых сетей с уменьшенным числом типоразмеров ограждающих конструкций: а - с дополнительными параллельными вантами; б - с дополнительными распорками в середине пролета

Уменьшить число типоразмеров плит можно также, если через каждую пару радиальных вант в середине пролета установить распорки длиной, равной шагу вант у наружного опорного контура (рис. 1.75, *б*).

В большинстве выполненных покрытий шатрового типа угол наклона вант к горизонтальной плоскости в месте примыкания их к наружному опорному контуру принят равным нулю. При таком примыкании вант к опорному контуру вертикальная нагрузка от покрытия передается только на внутреннюю опору. Для передачи части вертикальной нагрузки на наружные колонны, а также для уменьшения высоты внутренней опоры геометрию покрытия принимают такой, чтобы ванты примыкали к наружному опорному контуру под углом к горизонту, меньшим нуля.

Анализ работы рассмотренных выше вантовых сетей как для круглых покрытий, так и для покрытий с другими планами показал, что при нагружении покрытия произвольной вертикальной нагрузкой усилия в вантах неодинаковы, что приводит к снижению технико-экономических показателей

не только для собственно вантовых сетей, но и конструкций, воспринимающих распор вант. В этой связи представляются перспективными равнопрочные сети, в основу которых положено примыкание к узлу трех вант под углом 120°. На этой основе уже разработаны шестиугольные и другие структуры вантовых сетей.

Как известно, многие вантовые системы обладают большой кинематической податливостью. Стабилизация поверхности таких систем заключается в сведении кинематических перемещений до минимума. Для очень легких вантовых покрытий эта, казалось бы, простая задача перерастает в проблему первостепенной важности. Пока не существует решений, обеспечивающих возможность применения ограждающих конструкций массой 5...10 кг и удовлетворяющих требованиям, предъявляемым к покрытиям в части деформативности, возможности подвески различного рода оборудования и т.п. Сравнительно тяжелые комбинированные, подвесные и другие типы покрытий, состоящих из балок, ферм и железобетонных плит, как правило, не нуждаются в стабилизации поверхности. Она обеспечивается массой настила и его омоноличивания. Стабилизация легких покрытий обеспечивается предварительным напряжением несущих элементов – вант, ферм и т.п. последовательно или одновременно.

В зависимости от конструкции пролетной части покрытия применяются различные методы напряжения несущих элементов. Предварительное напряжение однопоясных радиально-вантовых покрытий на круглом плане, цилиндрических покрытий на прямоугольном плане и некоторых других типов покрытий в виде железобетонных оболочек может осуществляться: монтажной пригрузкой, укладываемой непосредственно на плиты покрытия или подвешиваемой к вантам; с помощью различного рода оттяжек, прикрепленных к вантам и полу или фундаментам здания; установкой временных напрягающих вант с раздвижными распорками (по типу двухпоясных систем); натяжением домкратами.

Достаточно просто осуществляется напряжение несущих элементов в однопоясных покрытиях с ортогональной сетью вант на поверхности гиперболического параболоида, наиболее часто – домкратами, реже – поворотом с небольшим опусканием (вращательно-поступательным движением) опорных конструкций (арок, распорок и т.п.). В последнем случае необходимо очень точно определить геометрию всех элементов вантовой сети, иначе одни ванты могут оказаться ненапряженными, а другие – перенапряженными, что существенно скажется на работе опорных конструкций. Натяжение вант домкратами не требует столь высокой точности определения их геометрии, хотя оно и не очень индустриально, особенно когда выполняется ступенями путем последовательного обхода

диаметрально противоположных вант (во избежание появления больших изгибающих моментов в опорном контуре).

Натяжение двухпоясных покрытий из вантовых ферм проводится путем стягивания поясов вертикальными или наклонными тросами решетки или раздвижки поясов сжатыми стойками. Процесс натяжения не вызывает каких-либо затруднений, так как для обеспечения необходимых усилий в поясах ферм достаточно создать сравнительно небольшие усилия в элементах решетки. Предварительное напряжение придает поясам ферм форму, подобную форме веревочного многоугольника от равномерно распределенной нагрузки.

В двухпоясных радиально-вантовых покрытиях предварительное напряжение поясов ферм может осуществляться путем раздвижки колец центрального барабана. При этом, как указывалось выше, к исходной геометрии вантовых ферм должны предъявляться более жесткие требования.

Предварительное напряжение вантовых сетей зависит от конструкции пролетной части, характера и интенсивности временной нагрузки, требований к деформативности покрытия и других факторов и определяется технико-экономическими расчетами.

В зависимости от усилия натяжение вант может осуществляться динамометрическими ключами, различного рода натяжными устройствами, вантовыми и гидравлическими домкратами. Для контроля усилий натяжения могут применяться приборы, основанные на динамическом, а также статическом методах контроля.

1.8.5. Мембранные конструкции. *Основные положения*. Мембранная система представляет собой пространственную конструкцию из тонкого металлического листа, закрепленного на контуре. Пролетная конструкция (мембрана) может быть подкреплена системой элементов, используемых для монтажа оболочки, ее стабилизации и т.п. Цепные усилия с пролетной конструкции воспринимаются опорным контуром [2].

Мембранные системы имеют некоторые преимущества. В них возможно наиболее полно использовать несущую способность материала. Мембрана имеет минимальную толщину ввиду работы в основном на растяжение в двух направлениях без опасности потери устойчивости. Цепные усилия с пролетной конструкции воспринимаются одним элементом – опорным контуром, работающим совместно с мембраной, которая в большинстве случаев обеспечивает его устойчивость. Мембрана совмещает одновременно несущие и ограждающие функции. Даже в том случае, когда применяется обычная кровля, не требуются панели и другие промежуточные элементы, не участвующие в пространственной работе системы. Все это обеспечивает минимальный расход материалов на мембранные конструкции.

Существенное уменьшение металлоемкости мембранных систем, относительная простота их монтажа, применение большеразмерных рулонных полотнищ заводского изготовления предопределяют снижение трудоемкости и стоимости их возведения, сокращение сроков строительства.

Тонколистовыми конструкциями можно перекрыть без промежуточных опор практически любые требуемые пролеты, причем с увеличением пролета экономическая целесообразность применения таких конструкций все более возрастает [16].

Мембранные покрытия, как правило, имеют минимальную строительную высоту, что уменьшает расход материалов на стеновое ограждение и снижает эксплуатационные расходы на отопление и вентиляцию здания.

Мембранные системы благодаря их малой массе, транспортабельности и технологичности монтажа имеют преимущества при строительстве в труднодоступных и северных районах, а также в районах с повышенной сейсмичностью. Они обладают также большим разнообразием форм и представляют широкие возможности для практического воплощения интересных архитектурных замыслов.

В то же время при проектировании конструкций мембранных покрытий возникает необходимость в комплексном решении многих сложных проблем, в том числе правильного выбора формы поверхности мембраны с учетом очертания конструкции в плане и способа стабилизации деформативной пролетной конструкции; рационального конструирования опорного контура, воспринимающего значительные цепные усилия; гидро- и теплоизоляции и водоотвода; противокоррозионной защиты мембраны и т.п.

С использованием мембранных покрытий построены различные здания, в том числе крупнейшие в Европе крытый стадион «Олимпийский», универсальный спортивный зал в Санкт-Петербурге, велотрек «Крылатское», дворец спорта «Измайлово» в Москве. С применением тонкого металлического листа выполнены покрытия некоторых зданий меньших пролетов.

Мембранные конструкции применяют не только в уникальных сооружениях, но и в зданиях массового строительства, таких как киноконцертные и спортивные залы универсального назначения, магазины, крытые рынки и т.п. Мембранные системы могут быть использованы в покрытиях промышленных зданий с укрупненной сеткой колонн, складских помещений, гаражей, ангаров. Применение тонколистовых покрытий больших пролетов позволяет создавать принципиально новые типы промышленных зданий, в том числе оборудованных напольным транспортом, обладающих высокой планировочно-конструктивной универсальностью. Мембранные системы широко применяются в реконструируемых промышленных зданиях, когда требуется замена покрытий, исчерпавших

свой амортизационный срок. Рационально применение тонколистовых конструкций в покрытиях резервуаров, отстойников, шламбассейнов, сгустителей.

Мембранные (тонколистовые) покрытия по конструктивным особенностям разделяются на мембранные сплошные оболочки, ленточные покрытия и двухпоясные комбинированные тонколистовые покрытия.

Мембранные оболочки выполняют из отдельных тонколистовых полотнищ, объединяемых на монтаже в сплошную пространственную систему. Ими можно перекрывать здания с разнообразными очертаниями в плане – треугольник, прямоугольник, многоугольник, круг, овал, эллипс, а также с более сложным комбинированным очертанием. Мембранные оболочки могут иметь различную форму поверхности: цилиндрические и конические с поверхностью нулевой гауссовой кривизны; сферические, в виде эллиптического параболоида или поверхности вращения с вертикальной осью – с поверхностью положительной гауссовой кривизны; седловидные, в том числе в виде гиперболического параболоида; шатровые – с поверхностью отрицательной гауссовой кривизны; составные поверхности в виде комбинаций оболочек с одинаковыми или различными геометрическими свойствами поверхности.

Ленточные покрытия (из переплетенных лент, двухслойные седловидные) монтируют из отдельных, не соединяемых одна с другой лент. По статической схеме они приближаются к работающим дискретно вантовым системам. Покрытия из переплетенных лент имеют провисающую поверхность положительной гауссовой кривизны и предназначены для зданий с круговым или овальным планом. Такие же покрытия с подкрепляющей системой имеют провисающую составную поверхность и предназначены для зданий, многоугольных в плане (треугольник, прямоугольник и т.д.). Двухслойные ленточные покрытия имеют седловидную форму поверхности и предназначены для зданий с прямоугольным, овальным или более сложным (составным) планом.

К двухпоясным покрытиям относятся комбинированные системы, у которых один или два пояса пролетной конструкции выполнены в виде мембраны. Пояса объединяют один с другим распорками или решеткой. Поверхность мембран может быть выпуклой или вогнутой.

Мембранные системы на прямоугольном плане могут быть применены в реконструируемых промышленных сооружениях при замене конструкций покрытий над зданием.

Материалы для мембранных конструкций. Для изготовления пролетной конструкции мембранных систем применяют углеродистые, низколегированные, в особых случаях нержавеющие стали и алюминиевые сплавы, выпускаемые в виде листов или рулонов. Выбор материала определяется конкретными условиями эксплуатации мембранных

конструкций, их изготовления, монтажа, экономической целесообразностью. Поверхности металлических мембран должны быть защищены от атмосферной и контактной коррозии с учетом противокоррозионной защиты поверхности мембран со стороны кровли.

Для пролетной конструкции мембранных систем используются полотнища, сворачиваемые в рулоны. Длина полотнища принимается равной всему пролету или – для оболочек с круглым и овальным планом, имеющим центральное кольцо, – половине пролета. Ширина полотнища принимается равной 6...18 м и ограничивается габаритными размерами и массой рулона, производственными возможностями завода-изготовителя.

Рулонные полотнища толщиной 3 мм и выше изготовляют из отдельных листов размерами 6,0×1,5 м, свариваемых встык на специальных высокомеханизированных установках. Стыковые сварные швы должны обладать той же прочностью, что и основной металл.

Полотнища толщиной менее 3 мм следует изготовлять из рулонных лент, соединяемых сваркой. Ленточные покрытия выполняют из рулонных лент, поставляемых металлургической промышленностью, с обрезными кромками без какой-либо заводской переделки.

Опорный контур мембранных покрытий проектируют из сборного, сборно-монолитного или монолитного железобетона, в том числе из трубобетона. В отдельных случаях (сложная геометрия опорного контура, сжатые сроки возведения и т.п.) в качестве материала опорного контура мембранных покрытий применяется металл.

Стальные мембраны допускаются к эксплуатации без специальных мероприятий по огнезащите.

Пролетная конструкция. По способу формообразования мембранные оболочки делят на покрытия с первоначально заданной стрелой провисания и первоначально плоские покрытия. Покрытия с заданной стрелой провисания монтируют навесным способом укладкой на монтажные элементы («постель») отдельных полотнищ с последующим объединением их в пространственную мембрану. Геометрия элементов «постели» определяет начальную форму поверхности мембранной оболочки и должна соответствовать проектной, что достигается регулировкой длины элементов «постели».

Первоначально плоские мембранные покрытия, собираемые на спланированной площадке или подмостях, после подъема или раскружаливания провисают под действием собственного веса. Форма образующейся при этом поверхности и стрела провисания покрытия зависят от избыточной площади мембраны, возникающей из-за сварочных деформаций; начальных погибей, оставшихся после правки листов или рулонов; остаточных деформаций, появляющихся в результате сворачивания и разворачивания рулона и т.п.; податливости опорного контура; упругих

деформаций мембраны. Начальная стрела провисания принимается не менее 1/60 меньшей стороны или диаметра покрытия.

Пролетная конструкция мембранных покрытий выполняется из полотнищ максимальной площади (с учетом условий изготовления, перевозки и монтажа), поставляемых на монтажную площадку в рулонах.

В случае существенной неравномерности распределения цепных усилий в пролетной конструкции с целью снижения расхода материала и обеспечения равнопрочности мембраны возможно местное усиление пролетной конструкции применением листов разной толщины (с учетом технологии изготовления и монтажа тонколистовых полотнищ) или постановкой дополнительных листов, крепящихся к основному полотнищу.

В пролетную конструкцию мембранных покрытий в большинстве случаев включаются элементы подкрепления («постель»), состоящие из направляющих и поперечных элементов. Направляющие располагают вдоль мембранных полотнищ с шагом, равным их ширине, а при ширине полотнищ более 6 м – с шагом, равным половине ширины полотнища. Шаг направляющих увязывают с шагом колонн и с длиной сборных элементов опорного контура.

Поперечные элементы «постели», объединяющие отдельные направляющие в пространственную систему, устанавливают с шагом 3...6 м. При монтаже покрытия на подмостях или внизу на спланированной площадке элементы «постели» не требуются.

Направляющие выполняют длиной на пролет из стальной полосы, гнутых, прокатных или сварных элементов (тавр, двутавр, два швеллера), легких висячих ферм с верхней горизонтальной полкой шириной 300...500 мм. Поперечные элементы выполняют из гнутых или прокатных профилей, подбираемых расчетом на нагрузку от собственного веса полотнища мембраны. Допускается поперечные элементы с мембраной не соединять.

Сечение направляющих обычно включают в работу пролетной конструкции при расчетах на эксплуатационные нагрузки. Для этого обеспечивают совместность работы мембраны и направляющих путем надлежащего их соединения между собой и с опорным контуром внахлестку сваркой или высокопрочными болтами. При выполнении стыков односторонним сварным угловым швом обязательна конструктивная постановка сварных точек проплавлением или высокопрочных болтов. При наличии монтажной «постели» соединение отдельных полотнищ обычно осуществляется на направляющих с нахлесткой кромок полотнищ.

Конструктивное решение узла присоединения мембраны к контуру должно обеспечивать надежную передачу значительных нормальных и касательных усилий с пролетной конструкции на опорный контур.

Присоединение мембраны к бортовому элементу контура выполняется с использованием опорного столика.

В связи с незначительной изгибной жесткостью мембранных оболочек необходима их стабилизация, предотвращающая потерю общей устойчивости покрытия (его «выхлоп» в сторону, противоположную провисанию); уменьшающая повышенную деформативность мембранных систем от неравномерных нагрузок, которая может привести к расстройству кровли и невозможности нормальной эксплуатации здания; обеспечивающая нормальную работу покрытий на динамические воздействия, в частности ветровые. В некоторых случаях стабилизация необходима для предотвращения местной потери устойчивости тонкого листа.

Стабилизация тонколистовых покрытий осуществляется одним из следующих способов: увеличением массы покрытия; введением в конструкцию элементов, обладающих изгибной жесткостью; предварительным напряжением (растяжением) [18, 19]. Стабилизация покрытия путем увеличения массы достигается применением утеплителей с повышенной плотностью, укладкой цементной или бетонной стяжки, использованием специальных балластных пригрузов, подвеской постоянного технологического оборудования (рис. 1.76, *а*).

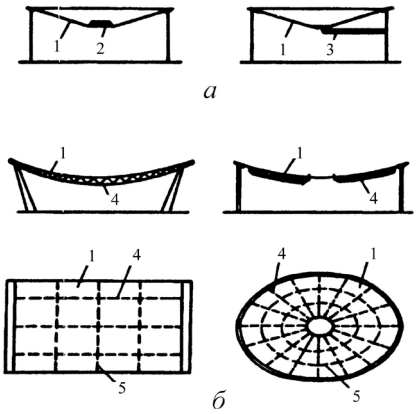


Рис. 1.76. Стабилизация мембранных покрытий: а - пригрузом; б - с использованием изгибно-жестких элементов; 1 - мембрана; 2 - пригруз; 3 - кольцевой кран; 4 - основные (продольные или радиальные) ребра; 5 - вспомогательные (поперечные или кольцевые) ребра

Такой прием обеспечивает растягивающие напряжения в мембране даже при ветровом отсосе и уменьшает долю неравномерных временных нагрузок. В большинстве случаев оказывается, что применяемая в настоящее время традиционная кровля совместно с мембранной обеспечивают требуемую для стабилизации массу покрытия.

Стабилизирующие изгибно-жесткие элементы располагают вдоль линий главной кривизны поверхности оболочки и выполняют металлическими из сплошных прокатных или сварных элементов или в виде висячих ферм (рис. 1.76, *б*). Стабилизирующие элементы обычно используют в качестве монтажной «постели».

Предварительное напряжение мембран осуществляется различными способами в зависимости от формы поверхности покрытия (рис. 1.77): прикреплением мембраны к контуру с помощью натяжных устройств или изменением положения опорного контура (оболочки отрицательной гауссовой кривизны); натяжением нижнего пояса, элементов решетки или оттяжек вантовых ферм, включенных в пролетную конструкцию (оболочки нулевой и положительной гауссовой кривизны); притягиванием концов поперечных элементов «постели» к основанию (цилиндрические оболочки).

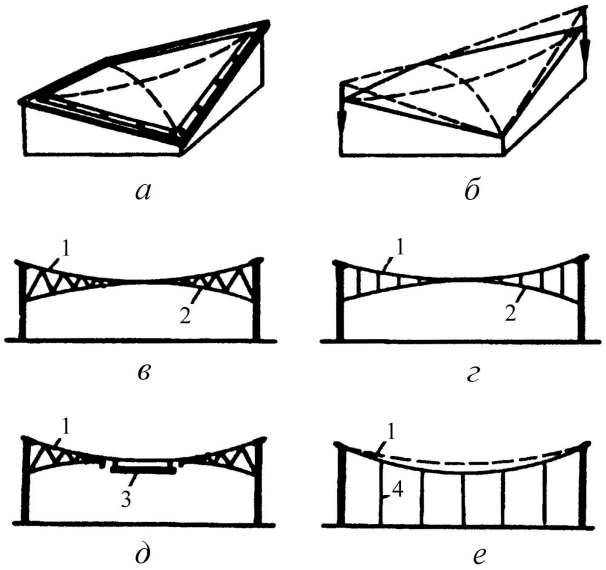


Рис. 1.77. Стабилизации мембранных покрытий предварительным напряжением: а - притягиванием мембраны к контуру; б - изменением геометрии покрытия; в-д - с помощью натяжения вантовых ферм; е - притягиванием поперечных балок к основанию; 1 - мембрана; 2 - стабилизирующие ванты; 3 - центральный пригруз; 4 - оттяжки

Необходимая для стабилизации масса покрытия, изгибная жесткость ребер, предварительное напряжение определяются расчетом на нормативные временные нагрузки. Способ стабилизации выбирается на основе технико-экономических расчетов с учетом архитектурно-технологических требований, возможности упрощения изготовления и монтажа. В пролетной конструкции мембранных систем можно устраивать проемы для установки

зенитных фонарей, пропуска коммуникаций и т.п. Проемы обрамляют листом, расположенным в плоскости мембраны и имеющим площадь поперечного сечения не менее половины площади ослабления мембраны. Проемы проектируют круглыми, овальными или многоугольными с радиусом закругления углов не менее 200 мм.

Технологическое оборудование к мембранному покрытию крепят на гибких подвесках. При наличии элементов «постели» подвески крепят к этим элементам. Возможно крепление подвесок выполнять непосредственно к мембране с использованием распределительных шайб.

Опорный контур воспринимает цепные усилия, передающиеся с пролетной части покрытия. Различают замкнутый контур, который воспринимает все горизонтальные составляющие цепных усилий в уровне покрытия и на лежащие ниже конструкции передает в основном вертикальные усилия, и разомкнутый опорный контур, в котором усилия с пролетной части покрытия передаются непосредственно на лежащие ниже конструкции (колонны, рамы, пилоны, конструкции трибун, боковых приставок). Из-за пологости пролетной конструкции распор весьма существен, поэтому большое значение имеет рациональное конструирование опорного контура, материалоемкость и трудоемкость изготовления которого составляют значительную часть в общих показателях, влияющих на экономичность покрытия.

Рекомендуется применять замкнутый опорный контур. Разомкнутый контур может быть оправдан лишь при наличии конструкций трибун, боковых пристроек и т.п., способных без существенных дополнительных затрат воспринимать значительные распоры. Если опорный контур выполнен в виде нескольких наклонных плоских арок или ломаных балок, не лежащих в одной плоскости, он оказывается внешне распорным. Распоры эти воспринимаются затяжками или контрфорсами.

Форма опорного контура определяется линией пересечения поверхности покрытия с поверхностью стенового ограждения. Его ось может быть очерчена плоской или пространственной кривой или состоять из отрезков прямых, плоских и пространственных кривых. Криволинейный опорный контур может быть заменен полигональным для упрощения изготовления его элементов.

Наружный опорный контур может лежать на сплошном основании, образованном стенами, или на отдельных колоннах, в том числе расположенных только по углам покрытия. В общем случае опорный контур воспринимает сжатие с изгибом в одной или двух плоскостях. Кроме того, в нем могут возникать крутящие моменты. При проектировании необходимо стремиться к тому, чтобы опорный контур был внешне безраспорным и малоизгибным.

1.9. Антенные сооружения и высотные трубы

1.9.1. Общие сведения. Принято различать три типа антенных сооружений: башни, мачты и комбинированные конструкции. Башня – это высотное сооружение, расчетную схему которого можно приближенно представить в виде консольного стержня, жестко закрепленного в основании. Расчетная схема мачт с необходимой точностью аппроксимируется неразрезным или шарнирным стержнем, поддерживаемым в вертикальном положении оттяжками. Комбинированные конструкции имеют признаки башенного и мачтового сооружений.

Мачты и башни могут функционировать как отдельно стоящие сооружения, а также входить в единую систему, объединенную общими оттяжками, т.е. представлять собой комбинированные конструкции.

Сооружения всех типов обладают общими свойствами, однако каждый из них имеет свои особенности, которые необходимо учитывать при проектировании (выбор группы конструкций, стали и сварочных материалов с необходимыми качествами, типов узлов и деталей, методов изготовления и монтажа; требования к точности изготовления и т.п.). Кроме того, они различаются характером работы и методами расчета.

Высотные сооружения применяются во многих отраслях народного хозяйства: связь, радиовещание, телевидение, энергетика, металлургия, химия, нефтеперерабатывающая промышленность и др. Сооружения большой высоты возводят для метеорологических исследований и других целей. Некоторые монументальные сооружения по характеру работы и инженерным решениям можно отнести к высотным [12, 16].

По назначению высотные сооружения делят на следующие группы: башни и мачты-антенны; башни и мачты радиорелейных линий (РРЛ), радиотелевизионные мачты и башни; башни и мачты ретрансляторов; башни, мачты, мачтовые и мачто-башенные системы для подвески антенных сетей; антенные поворотные устройства; мачты для установки метеорологического оборудования; стальные дымовые трубы; вытяжные башни для химического производства (рис. 1.78); факельные установки; прожекторные опоры; монументы.

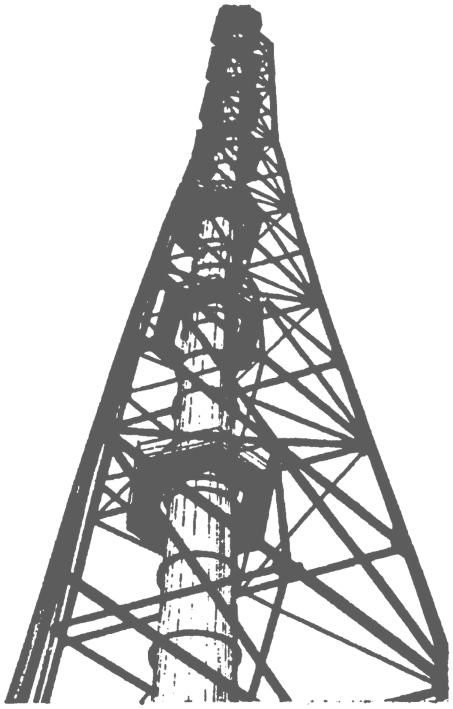


Рис. 1.78. Вытяжная башня

От обычных зданий и сооружений высотные отличаются большой высотой конструкции, намного превышающей размеры поперечного сечения и основания в плане; второстепенным значением собственного веса конструкции и веса технологического оборудования по сравнению с ветровыми нагрузками; относительно большой гибкостью, низкими частотами при малом декременте колебаний конструкции и, следовательно, большой долей динамической составляющей в общей величине перемещений и усилий; сильной зависимостью реакции сооружения на основные воздействия от его конструктивной формы и формы его элементов. Для них свойственна аэродинамическая неустойчивость при некоторых конструктивных формах и соотношениях параметров. В ряде случаев необходимо обеспечить требуемую жесткость отдельных точек при относительно большой общей податливости (деформативности) сооружения.

Отмеченные особенности обусловливают в каждом конкретном случае специфические требования к выбору формы и соотношений параметров конструкции и ее элементов, материала, средств противовибрационной защиты и т.п.

В мировой практике накоплен большой опыт проектирования и возведения высотных сооружений. Башня Эйфеля в Париже построена в

1889 г., ее высота 300 м, масса 7300 т. В Москве в 1920 г. Шуховым построена башня высотой 150 м. Из сооружений, построенных за рубежом в послевоенные годы, можно отметить трехгранную башню в Милуоки (США) высотой 329 м, массой 730 т, построенную в 1962 г. Ширина нижнего сечения ствола 35 м, верхнего – 2,3 м. Элементы башни выполнены из стальных трубчатых сечений. Стыки элементов фланцевые. В Токио в 1959 г. построена башня (рис. 1.79), высота которой 330 м, масса 3600 т.

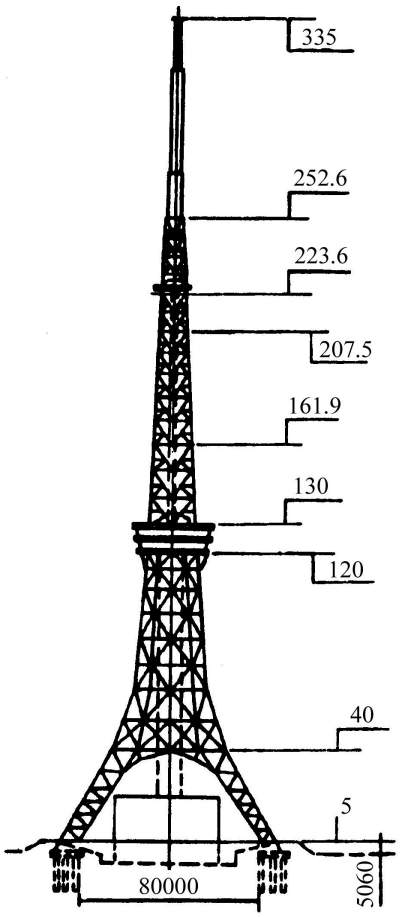


Рис. 1.79. Башня в Токио

Четырехгранная конструкция смонтирована на болтовых и заклепочных соединениях.

Из башенных стальных сварных сооружений, возведенных в СССР во второй половине XX ст., на проектировании и возведении которых во многом сформировались принципы проектирования башенных конструкций большой

высоты, можно выделить телевизионные башни в Санкт-Петербурге, Ереване, Тбилиси, Киеве, Алматы, Харькове, Риге. Башня Санкт-Петербургского телецентра построена в 1962 г. На несущей башне шестигранного сечения, выполненной с крестовой решеткой с предварительно натянутыми трубчатыми раскосами, установлен каркас технического здания, выше которого расположена этажерка из трех призматических секций квадратного сечения. Между основанием башни и техническим зданием внутри каркаса закреплена шахта лифта. Впервые в практике строительства ее конструкция решена цельносварной из трубчатых элементов. Стыки трубчатых элементов – на кольцевой подкладке.

Башня Ереванского телецентра построена в 1973 г. и представляет собой трехгранную в плане решетчатую конструкцию, внутри которой закреплена шахта лифта в виде оболочки – трубы диаметром 4000 мм, переходящей в антенную часть. Антенная часть – трубчатая оболочка переменного сечения. Техническое здание находится сверху решетчатой конструкции. Отличительной особенностью конструкции башни является принятая из-за больших усилий в поясах схема с пространственными треугольными элементами. Сторона основания башни 60 м, а в верхней части решетчатой конструкции (на отметке 134,4 м) – 10 м. Распорки и раскосы выполнены из сквозных решетчатых элементов (пространственных и плоских ферм).

Башня Тбилисского телецентра является примером башни с несимметричной схемой (рис. 1.80), которая воплощает идею совмещения несущих и ограждающих функций одного из ее поясов.

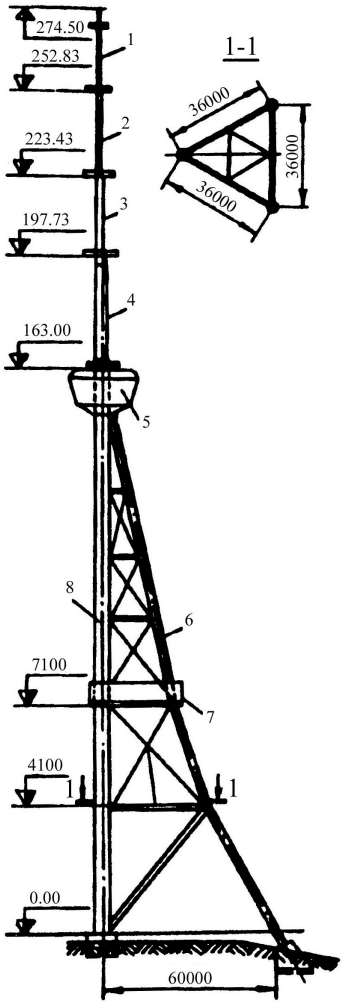


Рис. 1.80. Телевизионная башня в Тбилиси: 1-3 – участки ствола для антенн соответственно IV, III и II диапазонов; 4 – антенны для УКВ ЧМ вещания; 5 – верхнее техническое здание; 6 – наклонные пояса; 7 – нижнее техническое здание; 8 – вертикальный ствол, совмещенный с шахтой лифтов и переходящий в антенную часть

Вертикальный пояс, переходящий в антенну, служит шахтой лифтов и поддерживается наклонными трубчатыми поясами, связанными с ним системой распорок из труб и раскосов из высокопрочных канатов. Две боковые грани башни образованы вертикальными, а третья – наклонными плоскостями. Двугранный угол между боковыми гранями составляет 60°.

Любое горизонтальное сечение по нижней части башни – равносторонний треугольник. На отметке 0 сторона его равна 60 м, на отметке 151 м – 3,2 м. В большинстве узлов применены бесфасоночные примыкания. Выше отметки 71 м и ниже 163,8 м установлены технические здания.

Башня Киевского телецентра – самая высокая стальная башня, построенная в Советском Союзе. Конструктивно ее можно разделить на три части: базу, решетчатый призматический ствол и шахту лифтов с антенной частью. База башни представляет собой решетчатую восьмигранную обойму, к которой закреплены пространственные четырехгранные «ноги». Решетчатый призматический ствол восьмигранного сечения с диаметром описанной окружности 20 м защемлен в верхней части обоймы базы. Размер базы в основании – 90 м.

Верхняя часть призматического участка несет каркас технического здания. Высота панелей ствола 8 м. Шахта лифтов опирается на фундаменты у основания башни и проходит внутри решетчатого призматического ствола, а выше его переходит в антенную часть. Шахта лифтов и антенная часть составлены из стальных цилиндрических оболочек.

В башне применено много новых решений (схема, метод монтажа, высокопрочная сталь, бесфасоночные узлы и др.) конструктивная схема башни принята исходя из требований метода монтажа наращиванием. Основные узлы выполнены бесфасоночными сварными.

Расчет и конструирование высотных сооружений осуществляется с учетом собственного веса конструкций и оборудования, метеорологических нагрузок (ветер и гололедные отложения), влияния изменения температуры на напряженное состояние сооружения и возможного изменения характеристик стали при низких и высоких температурах, сейсмических воздействий, предварительного напряжения элементов конструкций, которое может возникнуть при изготовлении и монтаже, а также специально создаваемого для улучшения условий их работы.

Решетчатая башня представляет собой пространственную систему, как правило, симметричной формы, у которой размеры основания относительно малы по сравнению с высотой. Чаще всего встречаются башни, у которых часть узлов пересечения основных элементов (стержней) расположена на поверхности вращения некоторой кривой относительно оси башни. В зависимости от расположения узлов и связей между этими узлами решетчатых башен можно выделить несколько типов конструктивных схем.

Для одного из них характерно обязательное размещение узлов и связей между узлами в пересечении меридиональных плоскостей, проходящих через ось симметрии, с поверхностью вращения и параллельными горизонтальными плоскостями. Башни состоят из пирамидальных и призматических секций, совмещенных в концевых сечениях. В ребрах секций

помещены наиболее нагруженные элементы (пояса). Решетка размещается в боковых гранях секций.

В зависимости от наличия связей между узлами в плоскости грани решетка может быть представлена различными схемами (рис. 1.81).

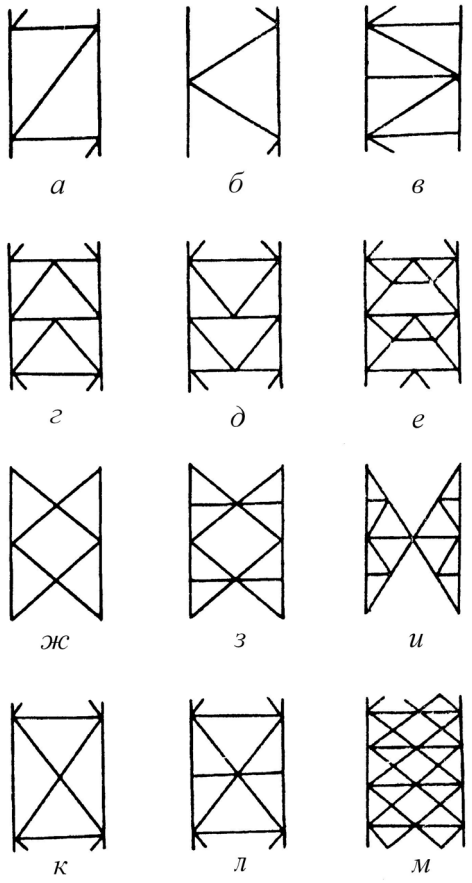


Рис. 1.81. Типы решеток башни: а – раскосная; б, в – треугольные; г, д – полураскосные; е – полураскосная с дополнительными связями для уменьшения свободной длины элемента; ж-и – ромбические; к, л – крестовые; м – двойная крестовая

В схемах *а-и* все элементы должны быть жесткими, воспринимающими как растягивающее, так и сжимающее усилия. Решетка крестовая (схемы *к-м*) может выполняться в двух вариантах: с жесткими раскосами, воспринимающими как сжатие, так и растяжение, и с «гибкими» раскосами, воспринимающими только растяжение.

Конструкции крестовой решетки и решетки по схеме на рис. 1.81, *е* позволяют создать предварительное напряжение элементов. Обычно оно задается в крестовой решетке при «гибких» раскосах.

Двойная крестовая решетка применяется при ограничении на сортамент сечений для исполнения гибких раскосов (например, из круглой стали), а также при реконструкции башен в случаях, когда усилить раскосы одинарной крестовой решетки не представляется возможным. По высоте башню можно собирать из секций с различными типами решетки.

Башни могут быть трех-, четырех- и многогранными. Многогранные башни имеют, как правило, четное число граней (шесть, восемь и т.д.).

При креплении узлов нижней секции к основанию в трех направлениях и установке горизонтальных связей между узлами в верхнем сечении башни с решетками (см. рис. 1.81) схема почти всегда геометрически неизменяема. Для улучшения работы пространственной фермы в секциях устанавливают жесткие диски – диафрагмы, обеспечивающие неизменность поперечного сечения башни.

Шаг установки диафрагм для башен связи рекомендуется принимать не более трех размеров среднего сечения башни (на рассматриваемом уровне) и 1,5…2 поперечных сечения для вытяжных башен.

Вспомогательные элементы, предназначенные для уменьшения свободной длины стержней, развязывают длину поясов в двух направлениях, а раскосов – в одном. Если необходимо уменьшить длину раскоса в двух направлениях, ставят связи в плоскости, образованной осями раскосов двух смежных граней.

Очертания башен зависят от многих факторов: нагрузки; ограничений на поперечные размеры башни на некоторых участках из-за технологического оборудования; ограничений, вызванных требованиями монтажа; ограничений по сортаменту; требований по жесткости сооружения в точках установки оборудования. Они определяются в процессе вариантного проектирования. В некоторых случаях очертания башни уточняются при решении задачи оптимизации.

В многогранных башнях решетку иногда ставят в шахматном порядке. Это удобно, когда грань башни вписывается в габарит средств доставки конструкций на монтажную площадку.

В ряде случаев для уменьшения нагрузок на фундаменты и усилий в нижней части конструкции башни подкрепляют жесткими подкосами, примыкающими к стволу непосредственно или через кольцевую обойму, охватывающую ствол.

Развитие конструктивной формы башен с подкосами привело к решению, в котором подкосы с обоймой и стержневой развязкой образуют отдельно стоящую базу, охватывающую ствол и связанную с ним только при возникновении горизонтальных перемещений (рис. 1.82).

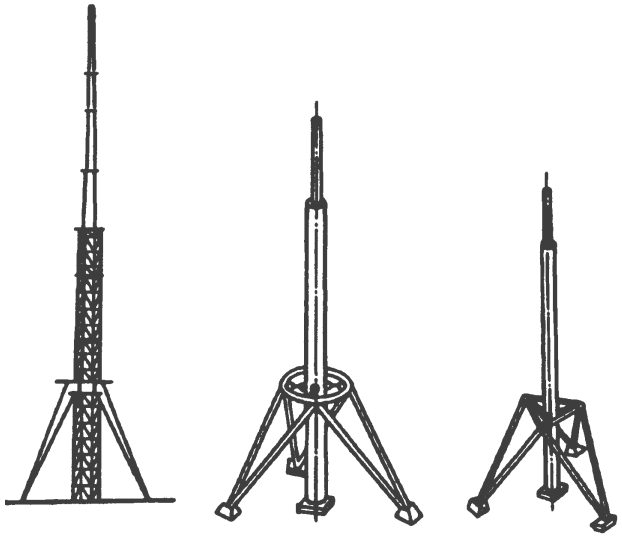


Рис. 1.82. Башни: с охватывающей базой

Преимуществом такой конструкции башен является отсутствие изгибающих моментов в подкосах при просадках фундаментов и разности температур в основном стволе и базе; недостаток – большая металлоемкость.

Некоторые типы башен – радиорелейных линий (РРЛ), ретрансляторов, радиотелевизионной связи, вытяжные башни-трубы приведены на рис. 1.83–1.85.

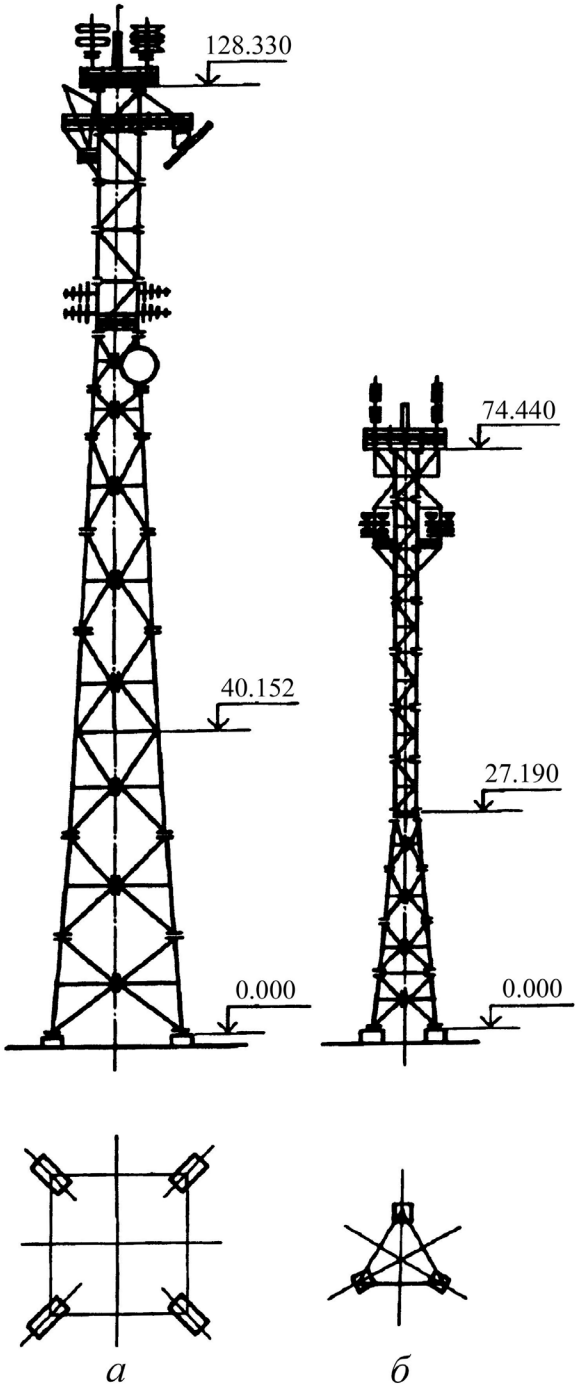


Рис. 1.83. Башни объектов связи: а – РРЛ; б - ретрансляторов

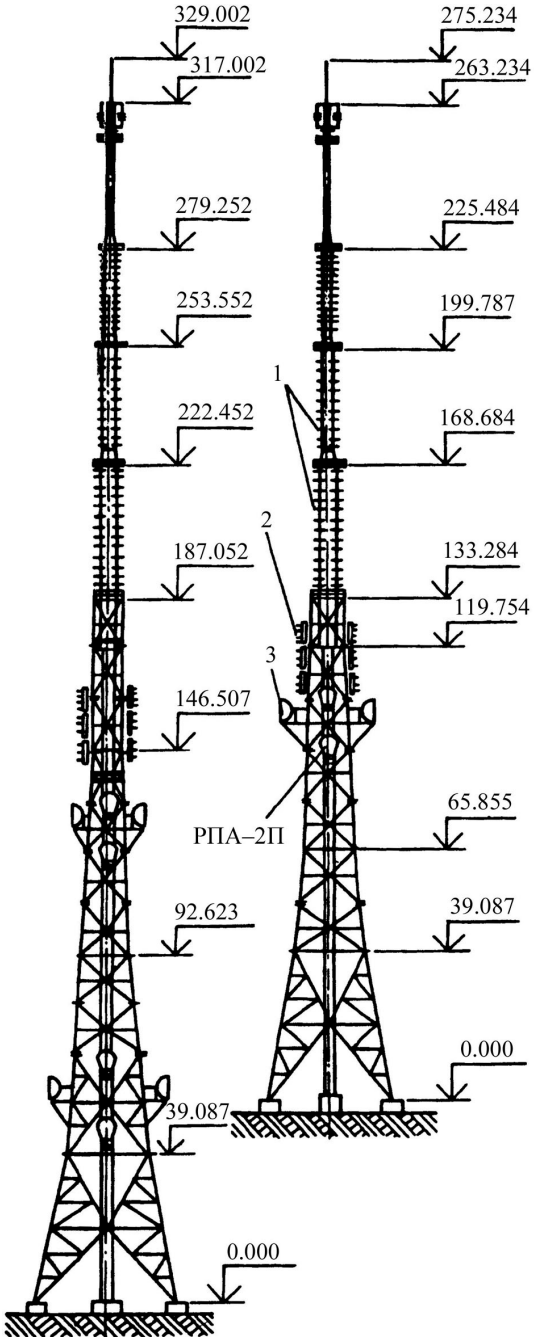


Рис. 1.84. Башни РТС для антенн с радиальными вибраторами:
1 – телевизионные; 2 – «Алтай»; 3 – АДЭ-5

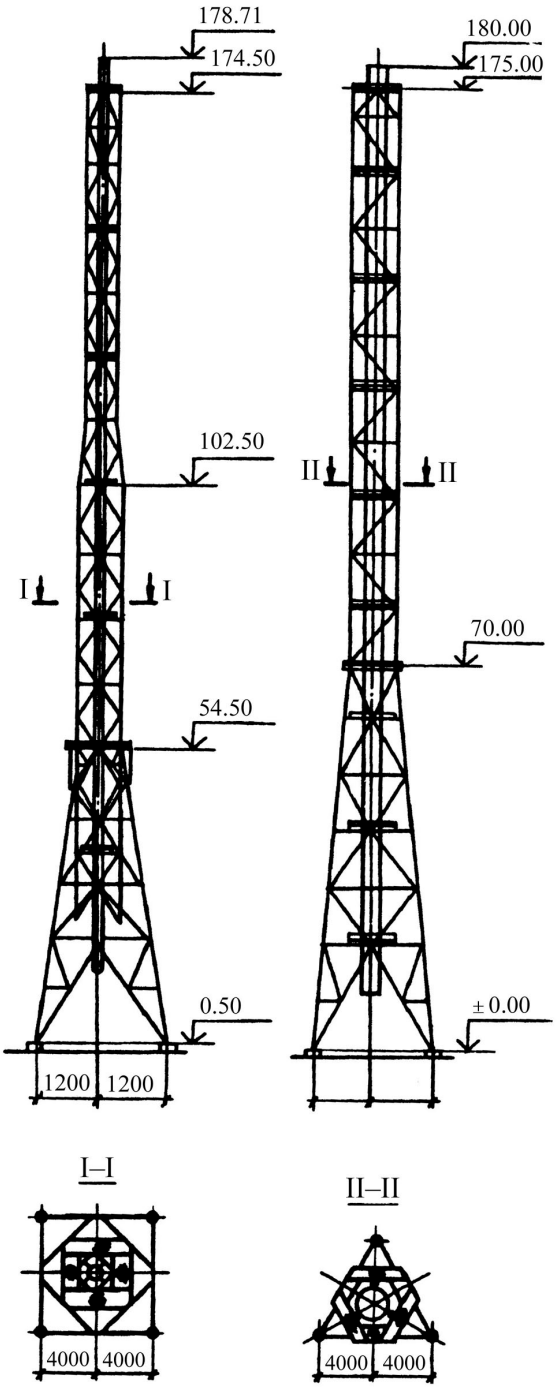


Рис. 1.85. Вытяжные башни-трубы

1.9.2. Радиотелескопы. Начиная с 1950-х годов широкое развитие получили различные системы радиотелескопов. Поскольку угловая разрешающая способность радиотелескопов повышается с увеличением размеров антенн, последние выполняются с большими площадками раскрытия и представляют собой сложные пространственные конструкции.

Радиотелескоп состоит из пяти основных элементов: антенны, системы перемещения антенны в двух плоскостях, устройства управления антенной, приемного устройства и устройства для обработки принятого сигнала. Высокая точность и малая деформативность – основные показатели качества конструктивного решения антенн, являющихся наиболее сложным элементом радиотелескопов.

Деформативность от воздействия нагрузок (собственной массы, температуры, ветра и др.) несущих конструкций антенн в требуемых пределах не всегда может быть достигнута только за счет увеличения жесткости элементов конструкции. Поэтому разрабатываются и реализуются предложения, позволяющие обеспечить заданную деформативность и снизить требования к жесткости за счет совершенствования конструктивной формы, использования идеи гомолизации (создания каркасов с заданным законом деформирования, т.е. трансформации исходной поверхности в другую того же типа), улучшения технических характеристик антенн (отношения поверхности антенны к ее шумовой температуре) и др.

Условно радиотелескопы больших размеров можно разделить на три основные группы: с неподвижно закрепленным облучателем и вращающимся зеркалом-отражателем, с неподвижным зеркалом-отражателем и перемещающимся одним или несколькими облучателями и радиотелескопы в виде высечек из параболоидов вращения горизонтальными плоскостями.

Наиболее широкое распространение получили радиотелескопы с вращающимся зеркалом. Их несущие конструкции представляют собой сложные пространственные системы различного очертания, как правило, большой площади. Масса радиотелескопов составляет от нескольких десятков до нескольких тысяч тонн. Более узкое применение получили радиотелескопы с неподвижным зеркалом [16].

Весьма эффективны радиотелескопы в виде высечек из параболоида; при сравнительно небольших затратах такие радиотелескопы можно выполнить с большими поверхностями зеркал. Примером таких сооружений является радиотелескоп Пулковской обсерватории длиной 120 м и высотой 3 м.

Некоторые типы радиотелескопов приведены на рис. 1.86.

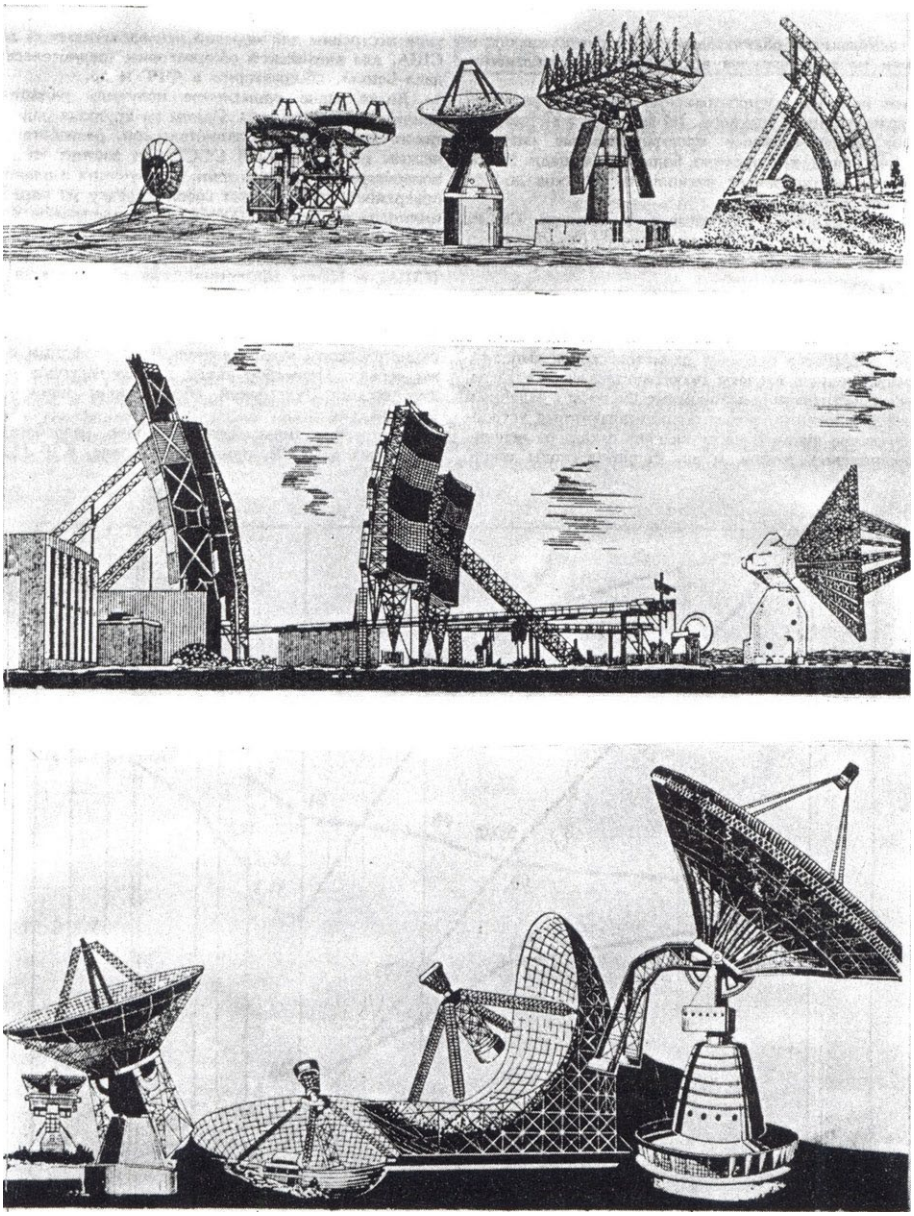


Рис. 1.86. Общий вид некоторых типов радиотелескопов

1.10. Морские стационарные платформы

Морские стационарные платформы (МСП) – новый вид инженерных сооружений, возводимых на акваториях континентального шельфа. Они

предназначены для освоения и промышленной эксплуатации углеводородных месторождений.

В настоящее время добыча нефти и газа на месторождениях континентального шельфа достигла больших объемов и стала играть заметную роль в мировом балансе нефти и газа. В 1982 г. на морские месторождения приходилось примерно 34% добычи нефти и 27% – природного газа. За последние годы наблюдается тенденция к увеличению доли морской добычи нефти и газа в мировом балансе углеводородов. По оценкам специалистов, с 2000 г. около 50% мировой добычи нефти осуществляется с морских акваторий.

В бывшем СССР, имевшем самую протяженную шельфовую зону, районы с доказанной нефтеносностью составляли примерно 2,5 млн.км^2. В настоящее время ведется интенсивное освоение месторождений на акваториях незамерзающих морей с глубинами до 200 м. В ближайшее время предусматривается освоение месторождений на глубинах моря 250...300 м.

Широко развернулись поисковые работы в шельфовой зоне замерзающих морей северного и восточного побережья России. Осваиваются месторождения в Азовском и Охотском морях. Промышленное освоение месторождений нефти и газа в районах с большими глубинами моря, суровыми климатическими условиями, ледовой обстановкой выдвигает ряд специфических требований к материалам, конструктивным решениям, оценке прочности узловых соединений, технологии изготовления МСП, без учета которых не может быть решена задача создания экономичных и надежных сооружений, отвечающих функциональным требованиям в течение планируемого срока эксплуатации.

Рост масштабов освоения минеральных ресурсов континентального шельфа и разработка многочисленных конструктивных решений платформ потребовали их систематизации в целях упрощения технико-экономической оценки.

Морские гидротехнические нефтепромысловые сооружения могут быть классифицированы по назначению, мобильности и глубинам моря.

По назначению сооружения делят на поисково-разведочные и эксплуатационные. Поисково-разведочные платформы предназначены для поисково-разведочного бурения на шельфе; они бывают преимущественно двух типов: самоподъемные буровые установки (СПБУ) и полупогружные буровые установки (ППБУ). Первые осуществляют разведочное бурение на глубинах моря до 100...120 м, вторые широко применяются на глубинах до 300 м, а отдельные установки эксплуатируются на глубинах до 600 м. Эксплуатационные платформы предназначены для бурения, промышленной эксплуатации, переработки, хранения нефти и газа.

По признаку мобильности сооружения делят на стационарные и подвижные. Последние используются в основном для разведочного бурения.

К стационарным платформам относятся сооружения, которые оказывают давление на морское дно. Такое определение охватывает все типы разведочных и эксплуатационных платформ, кроме плавучих систем и платформ с натяжными опорами.

Платформа включает в себя опорный блок и верхнее строение, которое возвышается над водой на высоте, не доступной воздействию волн. На верхнем строении располагаются жилые и служебные помещения, буровая вышка и буровое оборудование, технологические запасы материалов, установки для энергоснабжения, крановое хозяйство и вертолетная площадка.

Отсутствует единая точка зрения по вопросу о том, какие платформы следует относить к глубоководным. Обычно к глубоководным относят платформы, устанавливаемые на глубинах моря свыше 100 м [16].

Первый уровень классификации глубоководных морских стационарных платформ определяется по конструктивным признакам, от которых зависит динамическая реакция сооружения на воздействие волновой нагрузки. Деление конструкций платформ на жесткие и упругие отражает соотношение габаритных размеров, форму конструкции и, кроме того, указывает на величину периода собственных колебаний. Жесткие конструкции имеют период колебаний менее 6 с, тогда как в упругих конструкциях он превышает 20 с.

Для жестких конструкций второй уровень классификации определяет способ их опирания на морское дно. В соответствии с этим конструкции платформ могут быть свайными – с закреплением опорного блока с помощью свай, гравитационными – с опиранием на дно под действием собственного веса сооружения и смешанного типа – гравитационно-свайными. Гравитационные платформы, как правило, выполняются либо полностью железобетонными, либо комбинированными, у которых верхнее строение металлическое. К преимуществам гравитационных платформ относятся: сокращенные сроки установки; способность нести большую палубную нагрузку по сравнению со свайными металлическими платформами; наличие хранилищ для нефтепродуктов, что особенно важно для месторождений, не связанных с сушей нефтепроводами; упрощение ввода сооружения в эксплуатацию, так как монтаж палубы и оборудования на основе платформы производится на верфи, а не в открытом море. Недостатки гравитационных платформ: повышенные требования к прочности грунтов в основании платформы; необходимость тщательной планировки дна перед установкой; чувствительность к сейсмическим нагрузкам; большая масса конструкции; высокая стоимость сооружений.

Второй уровень классификации упругих конструкций, так же как и жестких, определяется способом обеспечения их устойчивости под действием волновых нагрузок и предусматривает деление на платформы с оттяжками, которые сохраняют проектное положение с помощью системы оттяжек,

резервуаров плавучести и противовесов; плавучие платформы, которые возвращаются в проектное положение подобно маятнику с помощью резервуаров плавучести, расположенных в верхней части конструкций; гибкие платформы, которые, отклонившись от проектного положения под действием волн, за счет собственных упругих свойств возвращаются в положение равновесия.

Третий уровень классификации жестких конструкций определяется применяемыми для них материалами – сталь, железобетон или сочетание этих материалов. Наименование конструкций в этом случае определяется тем материалом, доля которого в изготовленном сооружении больше. К стальным платформам относятся трехопорные и пространственные решетчатые опорные блоки, изготовляемые из цилиндрических труб, к бетонным – гравитационные башни, а к комбинированным – конструкции, основные части которых изготовлены из стали и бетона.

К 1984 г. в британском секторе Северного моря было установлено 33 стационарные платформы, из них 26 стальных и 7 бетонных. Все бетонные платформы были установлены в 1975-1978 гг., и связано это прежде всего с нехваткой сталей для морских стационарных платформ со свойствами, соответствующими предъявляемым к ним требованиям.

Третий уровень классификации относится только к жестким конструкциям. Из-за небольшого количества конструктивных решений упругих конструкций их классификация может быть ограничена вторым уровнем.

На рис. 1.87 конструктивные решения сооружений представлены в соответствии с классификацией.

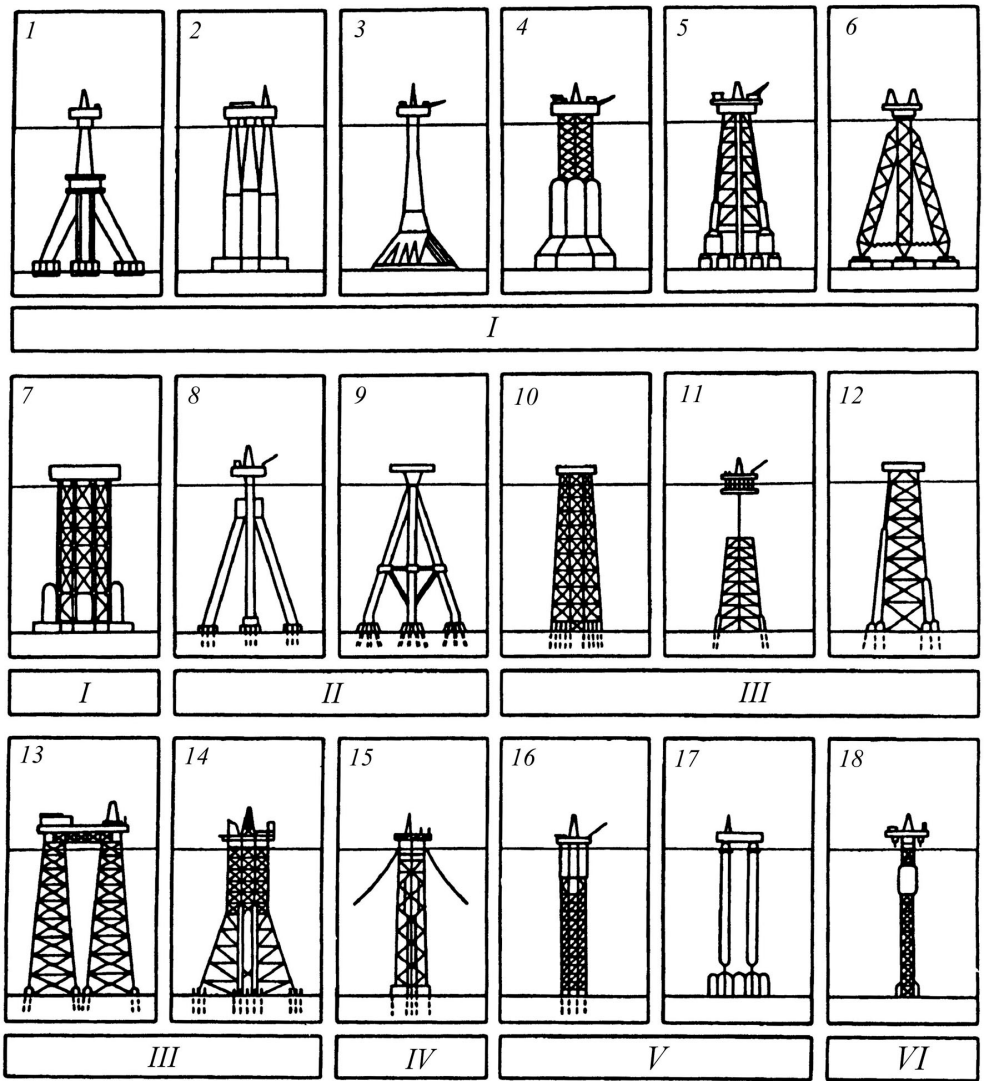


Рис. 1.87. Основные конструктивные решения, используемые при проектировании глубоководных платформ: I - жесткие гравитационные; II - жесткие гравитационно-свайные; III - жесткие свайные; IV - упругие башни с оттяжками; V - упругие плавучие башни; VI – упругие гибкие башни; 1 – бетонная трехопорная; 2 – бетонная многобашенная; 3 – бетонная монобашенная; 4 – комбинированная башенного типа; 5 – комбинированная; 6 – стальная трехопорная; 7 – стальная; 8 – бетонная трехопорная; 9 – стальная трехопорная; 10 - стандартная решетчатая; 11 – погруженная; 12 – стандартная плавучая; 13 – сдвоенная; 14 – одно- и трехопорная решетчатая; 15 – с оттяжками; 16 – башенного типа; 17 – многобашенная ; 18 - гибкая

Платформы различных конструктивных решений объединены общими классификационными признаками. К примеру, выполненные в железобетоне трехопорная платформа, монобашня и многобашенное основание классифицируются как жесткие гравитационные бетонные конструкции.

Для жестких свайных решетчатых конструкций такие признаки, как конструкция свай (основные и юбочные или только юбочные), а также способ монтажа (целиком или по частям), менее важны в конструктивном отношении, нежели форма – моноблочная или двухблочная.

Надежность и долговечность морских стационарных платформ не в последнюю очередь определяются правильностью выбора материалов, удовлетворяющих общим и специальным требованиям к их служебным свойствам.

Стремление к снижению волновых нагрузок на сооружения и к уменьшению их массы предопределяет целесообразность использования для элементов опорных блоков платформ трубчатых сечений. По мере увеличения осваиваемых глубин моря возрастают внешние нагрузки, габаритные размеры и масса сооружений, толщина применяемых трубчатых элементов, что вызывает необходимость принимать меры для предупреждения хрупкого разрушения элементов конструкций, сооружаемых и эксплуатируемых даже в районах с умеренными температурами. Специфические условия эксплуатации МСП, их экологическая опасность требуют высокой надежности сооружений, что может быть обеспечено при удовлетворении определенных, до некоторой степени противоречивых, требований к используемым сталям и их сварным соединениям.

В зависимости от продолжительности действия нагрузок на сооружение они подразделяются на постоянные, длительные, кратковременные и особые.

К постоянным относятся нагрузки от собственного веса конструкции опорных блоков, верхних строений платформы и др. При определении собственного веса подводной части конструкций учитывается взвешенное состояние элементов в воде.

Временные нагрузки могут отсутствовать на отдельных этапах эксплуатации сооружения. К длительным нагрузкам относятся собственный вес буровой вышки и стационарного оборудования, вес материалов, необходимых для выполнения технологических задач, нагрузки от грузоподъемных средств с грузом. Нагрузки от технологического оборудования, механизмов и материалов принимаются на основании технологической схемы нагрузок, составленной по паспортным данным оборудования, а материалов – по требуемым запасам их на МСП.

К кратковременным относятся нагрузки от ветра, волн, течений, льда, а также нагрузки от вертолетов и причаливания судов.

К особым относятся нагрузки, связанные с сейсмическими воздействиями на сооружение.

1.11. Заключение

По мере развития строительных конструкций и расширения области их применения возникают все новые насущные проблемы, требующие эффективного решения. В качестве примера рассмотрим одну из них, связанную с конструированием и эксплуатацией широко применяемых и ответственных типов строительных металлоконструкций – мостовых кранов.

Краны и перегружатели (грузоподъемные машины – ГПМ) относятся к машинам повышенной опасности. В производственном цикле предприятий ГПМ используются как технологическое оборудование и должны соответствовать своему функциональному назначению, которое определяется техническим уровнем, качеством изготовления и экономическими показателями [1]. Технический уровень определяется технико-эксплуатационными показателями, надежностью, технологичностью и материалоемкостью, уровнем стандартизации и нормализации, эстетикой и эргономикой, патентно-правовой защитой. Технико-эксплуатационные показатели сварных крановых металлоконструкций выражаются эксплуатационными характеристиками ГПМ в целом, т.е. их грузоподъемностью, высотой подъема груза, обслуживаемой зоной, скоростью подъема и передвижения груза, температурой эксплуатации и т.п. Надежность – главный показатель качества крановых металлоконструкций, гарантирующий их безопасность и в целом экономическую эффективность использования ГПМ в эксплуатации. Этот показатель включает в себя безотказность, ремонтопригодность, долговечность и сохраняемость.

Главная особенность ГПМ – единство машины и металлоконструкции. Поэтому все проблемы, связанные с проектированием, изготовлением, снижением металлоемкости, повышением производительности труда при изготовлении, обеспечением надежности и т. п. как сварных конструкций, так и механизмов, необходимо решать с учетом этого единства.

Сварные крановые мосты всегда имеют концентраторы напряжений, остаточные напряжения, неоднородность структуры и химического состава. В процессе работы они подвергаются воздействию подвижных, переменных и ударных нагрузок, могут эксплуатироваться в условиях низких температур и агрессивных сред. Эти факторы вызывают усталостные и хрупкие разрушения, коррозионные повреждения конструкций, а также изменение точности их размеров, полученных при изготовлении.

За последние 30 лет в краностроении применялись только сварные металлоконструкции, балки пролетных строений которых имели коробчатое,

трубчатое или другое поперечное сечение замкнутого профиля. За это время накоплен определенный опыт проектирования и изготовления сварных конструкций, разработаны и внедрены технологические процессы для массового, серийного и единичного производства различных кранов общего и специального назначения. Рассмотрим по материалам различных публикаций сведения о применении в народном хозяйстве кранов отечественного производства со сварными коробчатыми мостами.

Несомненный интерес представляет собой статистика аварий мостовых кранов, представленная в табл. 1.3:

Таблица 1.3

Причина аварий	Количество	В процентах
Низкое качество металла	10	30
Некачественное изготовление	5	15
Усталостные повреждения	12	37
Хрупкие разрушения	4	12
Недостатки проектирования	2	6

Такая классификация весьма условна, так как появление усталостного и хрупкого разрушения может быть обусловлено и недостатками проектирования, и некачественным изготовлением, и низким качеством металла. Аварии коробчатых мостов, происходящие в первые 10 лет (главным образом в первые годы после ввода крана в эксплуатацию), характерны для кранов больших (более 25 м) пролетов; до 72% аварий приходится на три зимних месяца; до 17% – на март, апрель и май. Наибольшая вероятность аварий ферменных (с несущими конструкциями в виде ферм) мостов – после 17...20 лет эксплуатации. Повышенная аварийность в зимне-весенний период объясняется не столько низкой температурой (большинство кранов работало в помещении), сколько интенсивной их эксплуатацией в конце года, когда ослабляется надзор и техническое обслуживание кранов. В целом по данной проблеме можно сделать следующие выводы: аварии коробчатых мостов в первые годы эксплуатации являются следствием грубых дефектов, допущенных при изготовлении; преимущественные аварии кранов с большими пролетами можно объяснить значительным запасом упругой энергии, накопленной в балках, и увеличением поперечных нагрузок от перекосов моста крана в процессе движения. Ферменные мосты показали сравнительно высокое конструктивное совершенство, приспособляемость к некачественному изготовлению и стабильность усталостной прочности. Главная причина аварий – развитие усталостных повреждений от разных концентраторов при действии переменных нагрузок.

Больше всего повреждений приходится на места установки колес (крепление букс) в концевых балках; за период от 5 до 10 лет эксплуатации они составляют 62% от общего числа повреждений. В приведенных данных и

пояснениях к ним не выделены характерные повреждения в местах примыкания главных балок к концевым. Очевидно, они вошли в графу «главные балки». Дефекты стенок появляются в местах приварки к ним различных кронштейнов для установки механизма привода передвижения крана и шкафов с электрооборудованием. До 20 лет эксплуатации ферменные мосты также имели высокую эксплуатационную надежность, но без дополнительных сведений (сварная или клепаная конструкция, режим работы крана и т. п.) провести более объективный анализ затруднительно.

Результаты систематических обследований кранов, проводимых лабораторией эксплуатационной надежности крановых металлоконструкций Краматорского индустриального института с 1978 по 1988 г., показывают, что до 60% из 500 кранов различного типа, проработавших в основном более 10 лет, имеют усталостные повреждения, в том числе до 60% – повреждения концевых балок в местах крепления букс, до 15% – повреждения сварных узлов в местах примыкания главных балок к концевым. Главные балки повреждаются сравнительно редко, наиболее характерны трещины на листах стенок и в местах приварки к ним различных кронштейнов и рам для установки узлов механизма передвижения крана и шкафов с электрооборудованием. Повреждения верхнего пояса наблюдаются в местах приварки элементов, прикрепляющих рельс, и тупиковых упоров тележки, а также в сварных швах, прикрепляющих верхний пояс к стенке балки, большим и малым диафрагмам под рельсом. Усталостные трещины в листе нижнего пояса образуются в местах его перегиба и приварки на кромках различных элементов. Повреждения ферменных конструкций возникают на приводных полумостах с центральным приводом механизма передвижения крана: происходит разрыв растянутых стержней вспомогательных ферм (раскосы, нижний пояс) и диафрагменных стержневых связей. Причина – переменные нагрузки при работе привода.

Анализ этих повреждений показал, что трещины в буксовых узлах, местах примыкания главных балок к концевым и крепления узлов механизма передвижения крана значительно быстрее появляются на кранах, имеющих постоянный и интенсивный износ реборд ходовых колес, т.е. подверженных действию значительных боковых нагрузок в контактах колесо – рельс, а следовательно, с большим сопротивлением его движению вдоль путей. О существенной величине боковых сил и последствиях, которые они вызывают, свидетельствуют следующие данные. Ежегодно в государствах СНГ изготовляется около 1 млн. крановых колес, большая часть которых идет на замену изношенных. На изготовление колес расходуется до 150 000 т стали только в металлургических отраслях, 10...12% всех простоев кранов вызвано заменой изношенных колес, стоимость их замены составляет 15...19% от стоимости ремонта всего крана. Срок службы колес составляет 0,2...0,3 года вместо 5...12 лет по нормативам. Ежегодно заменяются сотни километров

рельсовых подкрановых путей. Срок службы подкрановых балок тяжелого режима работы – 2...4 года вместо 20 лет. До 50% всех кранов, находящихся в эксплуатации (в СНГ эксплуатируется более 220000 кранов), имеют усталостные повреждения мостов. На ремонты затрачиваются огромные материальные, денежные и трудовые ресурсы. Появление боковых сил при движении и работе кранов определяется их ходовыми качествами, зависящими от конструктивных особенностей сварных мостов и технологических процессов сборки-сварки, которые в итоге влияют на точность установки колес и распределение вертикальных и горизонтальных нагрузок между ними.

Существующие конструкции коробчатых крановых мостов подвержены коррозионным повреждениям при работе на открытых эстакадах и в условиях агрессивных сред (предприятия химической и металлургической отраслей, шахтные дворы вблизи терриконов и т.п.). Во внутренних полостях главных и концевых балок накапливается вода и грязь, в которых растворяются различные химические реагенты из окружающей атмосферы, вызывая интенсивную коррозию. Различные шкафы с электрооборудованием, трубы для прокладки кабеля закрывают доступ к стенкам главных балок, поэтому проведение осмотров, очистка и окраска последних невозможны. Ресурс металлоконструкции кранового моста, работающего на бассейнах жидкой грануляции доменных шлаков, – 6...8 лет.

При серийном изготовлении коробчатых балок кранов грузоподъемностью до 50 т для устранения деформаций листов стенок применяют операцию растяжки. После сборки стенок с верхним поясом, приварки к ним диафрагм и продольных ребер стенки имеют недопустимую по нормам волнистость, которая устраняется растяжкой – изгибом балки в сторону верхнего пояса. После этого на выпрямленные кромки устанавливается и прикрепляется нижний пояс, завариваются поясные швы балки. Остаточные напряжения от растяжки в листах стенок (в зоне нижнего пояса), достигающие 60...80 МПа, приводят к потере строительного подъема и образованию остаточного изгиба в процессе эксплуатации при действии на балки переменных и подвижных нагрузок.

Упругая энергия, накопленная в балке при растяжке, может вызывать развитие хрупких разрушений.

Расчеты на прочность и жесткость коробчатых главных балок показывают, что при норме прогиба 1/600...1/700 рабочие напряжения в них не превышают 190 МПа, поэтому невозможно получить снижение массы, применяя более прочные стали.

Массовые повреждения крановых мостов вызвали необходимость проведения разного вида работ и исследований, которые дают значительное повышение эксплуатационной надежности металлоконструкций и ходовых качеств действующих кранов.

Обобщение опыта применения сварных коробчатых мостов позволяет сделать следующие выводы.

1. Коробчатые сварные мосты, главным образом серийно изготовляемых кранов грузоподъемностью до 60 т, подвержены массовым усталостным повреждениям после 3...5 лет эксплуатации. Долговечность крановых мостов зависит в основном от действия вторичных, не учитываемых при определении несущей способности напряжений. Поэтому для решения проблемы необходимо установить причины их возникновения и разработать конструктивно-технологические мероприятия, позволяющие устранить или уменьшить их влияние.

2. Повышение эксплуатационной надежности и экономической эффективности кранов со сварными коробчатыми мостами при существующем состоянии подкрановых эстакад и организации технического обслуживания кранов зависит в основном от успешного решения двух проблем: снижения поперечных нагрузок в контактах колесо – рельс (т.е. повышения ходовых качеств кранов) и создания рациональных сварных узлов, новых форм конструкций и компоновки крановых мостов.

3. Дальнейшее уменьшение массы металлоконструкций и механизмов при условии сохранения традиционно сложившихся конструктивных форм, общей компоновки мостов и технологии изготовления серийных кранов без снижения достигнутых уровней эргономики, жесткости и надежности практически невозможно.

4. Широкое применение алюминиевых сплавов для изготовления крановых мостов при существующих традициях проектирования, производства и эксплуатации неприемлемо по условиям безопасности, ремонтопригодности и экономической целесообразности.

5. Наиболее рационально для изготовления несущих конструкций сварных мостов при норме прогиба f/L=1/600...1/700 и температуре эксплуатации до –20 °С применять сталь ВСт3сп5. В этом случае суммарные максимальные рабочие напряжения при работе крана с номинальным грузом не превышают 190 МПа. При температурах эксплуатации ниже –20 °С с целью предупреждения внезапных хрупких разрушений следует применять низколегированные стали.

6. Для мостов с нормой прогиба до 1/400 применение низколегированных сталей позволяет уменьшить массу конструкции путем увеличения уровня рабочих напряжений, если выполнены следующие условия: длительные незатухающие колебания моста не влияют на выполнение обслуживаемого технологического процесса; кабина оборудована амортизирующими устройствами для защиты крановщика от воздействия колебаний; кран оборудован для управления им с пола здания (имеет подвесной пульт или радиосвязь) предусмотрены меры, позволяющие устранить подскок тележки при внезапной разгрузке крана.

7. Успешное развитие краностроения и повышение эксплуатационной надежности сварных крановых мостов коробчатой конструкции сдерживается низким уровнем разработки теоретических основ силового взаимодействия кранов с подкрановыми сооружениями в процессе их движения и работы.

8. Важное значение для повышения уровня качества крановых сварных конструкций имеет систематическое создание различных пособий и руководств для инженерно-технических работников, занятых в сфере проектирования, изготовления и эксплуатации сварных конструкций ГПМ.

Литература к главе 1

1. *Богуславский П.Е.* Металлические конструкции грузоподъемных машин и сооружений. - М.: Машгиз, 1981. - 514 с.

2. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. - Физматгиз, 1957. - 463 с.

3. *Дмитриев Л.Г., Касилов А.В.* Вантовые покрытия. - Киев: Будівельник, 1974. - 272 с.

4. *Ильясевич С.А.* Металлические коробчатые мосты. - М.: Транспорт, 1970. - 279 с.

5. *Качурин В.К., Брагин А.В., Ерунов Б.Г.* Проектирование висячих и вантовых мостов. - М.: Транспорт, 1971. - 280 с.

6. *Киреенко В.И., Шимановский В.Н., Коршунов Д.А., Смирнов Ю.В.* Висячие трубопроводные переходы. - Киев: Будівельник, 1968. - 160 с.

7. *Кирсанов Н.М.* Висячие системы повышенной жесткости. - М.: Стройиздат, 1973. - 116 с.

8. *Кирсанов Н.М.* Висячие и вантовые конструкции. - М.: Стройиздат, 1981. - 158 с.

9. *Кирсанов Н.М.* Висячие покрытия производственных зданий. - М.: Стройиздат, 1990. - 127 с.

10. *Косенко И.С.* Висячие конструкции покрытий. - М.: Стройиздат, 1966. - 87 с.

11. *Мельников Н.П.* Металлические конструкции: современное состояние и перспективы развития. - М.: Стройиздат, 1983. - 543 с.

12. *Мельников Н.П.* Антенные сооружения (башни, мачты, радиотелескопы): Сер. Стр-во и архитектура. - М.: Знание, 1969. - 48 с.

13. *Москалев Н.С.* Конструкции висячих покрытий. - М.: Стройиздат, 1980. - 331 с.

14. *Петров И.П., Спиридонов В.В.* Надземная прокладка трубопроводов. - М.: Недра. - 1965. - 447 с.

15. *Сахновский М.М.* Легкие конструкции стальных каркасов зданий и сооружений. - Киев: Будівельник, 1984. - 160 с.

16. *Сварные* строительные конструкции: Справочник / Под ред. Л.М.Лобанова. - Киев: ИЭС им.Е.О. Патона, 1997. - Т. 2. - 680 с.; 2003. - Т. 3. - 378 с.

17. *Смирнов В.А.* Висячие мосты больших пролетов. - М.: Высш. шк., 1970. - 408 с.

18. *Соботка З.* Висячие покрытия. - М.: Стройиздат, 1964. - 151 с.

19. *Трофимов В.И., Гольденберг Л.И.* Большепролетные покрытия Олимпийских сооружений // Стр-во и архитектура. - М.: Знание, 1984. - N 5. - 61 с.

20. *Фрей О.* Висячие покрытия, их формы и конструкции. - М.: Госстройиздат. - 1960. - 179 с.

21. *Фрей О.*, *Тростель Р.* Пневматические строительные конструкции. - М.: Изд-во литературы по строительству, 1967. -320 с.

22. *Фрей О., Шлейер Ф.К.* Тентовые и вантовые строительные конструкции. - М.: Стройиздат, 1970. - 175 с.

23. *Шимановський О.В., Гордеєв В.М., Оглобля О.І. та ін.* Аналіз технічного стану та проблем експлуатації будівельних металевих конструкцій в Україні // Будівництво України. - 2001. - N 3. - С.18-24

24. *Шимановський О.В., Беспалов С.М.* Особливості проектування великопрогонових просторових покриттів на основі структурних плит // Будівництво України. - 2002. - N 5. - С.21-24.

25. *Шимановский А.В., Оглобля А.И.* Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. - Киев: Изд-во “Сталь”, 2002. - 372 с.

26. *Шимановский А.В., Цыхановский В.К.* Теория и расчет сильнонелинейных конструкций. - Киев: Изд-во “Сталь”, 2005. - 432 с.

27. *Шимановський О.В., Дудник Е.С.* Технічний стан і проблеми реконструкції Київських мостів // Будівництво України. - 2002. - N 6. - С.9-14.

28. *Шимановский В.Н., Гордеев В.Н., Гринберг М.Л.* Оптимальное проектирование пространственных решетчатых покрытий. - Киев: Будівельник, 1987. - 227 с.

29. *Шимановский В.Н.* Висячие системы. - Киев: Будівельник, 1984. - 208 с.

Глава 2
СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ. ФИЗИЧЕСКОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сложные инженерные сооружения состоят из множества разнородных элементов, различающихся материалом, формой, соотношением размеров, характером загружения и т.п. Основным их особенностям, классификации, описанию применяемых физических и математических моделей посвящена настоящая глава.

Следует иметь в виду, что инженеру-проектировщику в любом случае приходится иметь дело не с реальной конструкцией, а с ее моделью, в противном случае процесс проектирования сделался бы практически нереализуемым. В современной инженерной практике моделирование является многоэтапным процессом, который связан с решением многих физических и математических проблем, в том числе:

– моделирование материала и его свойств;

– моделирование связи между компонентами напряженно-деформированного состояния конструкции;

– моделирование формы конструкции;

– моделирование связей между отдельными, часто разнородными элементами конструкции;

– моделирование связей между конструкцией и основанием, обеспечивающих равновесие конструкции;

– моделирование внешних силовых воздействий на конструкцию.

В процессе создания науки о напряженно-деформированном состоянии материальных тел многократно делались попытки учесть их реальную структуру. Так, выдающиеся французские ученые О.Коши и Л.Навье, основоположники теории упругости, вначале пытались рассматривать твердое тело как совокупность материальных точек (молекул), удерживаемых на определенных расстояниях друг от друга силами взаимодействия, при этом предполагалось, что силы взаимодействия двух молекул направлены по прямой и линейно зависят от расстояния между ними. Однако на основе представления о молекулярной структуре вещества ввиду исключительно большого числа элементарных материальных частиц и ничтожно малых расстояний между ними (по сравнению с размерами тела), проследить за перемещениями каждой конкретной частицы оказалось невозможным; в качестве единственно приемлемой была принята гипотеза о распределении вещества тела непрерывно по всему его объему. Такая абстрактная модель, называемая статистической, позволила перекинуть мост между дискретной средой, каковой в реальности является твердое тело, и понятием непрерывного геометрического пространства, являвшегося в то время

основой математического анализа. Именно такой подход позволил выразить перемещения точек твердого тела непрерывными функциями координат и ввести статистическое понятие напряжения как осредненной силы взаимодействия между частицами, расположенными по одну сторону от произвольной площадки, мысленно выделенной внутри тела, и частицами, расположенными по другую ее сторону. В итоге Коши, Навье и Пуассон получили основные дифференциальные уравнения и соотношения теории упругости.

Кроме указанной гипотезы о непрерывной сплошной среде в теории упругости введены также гипотезы о линейной зависимости между напряжениями, деформациями, перемещениями и их производными, однородности (упругие свойства материала одинаковы во всех его точках) и изотропности (упругие свойства одинаковы во всех направлениях) твердого тела, что позволило теоретически сформулировать и практически использовать целый ряд важнейших физических и механических характеристик материала.

При проектировании инженерных сооружений, как правило, не удается ввести в расчет их реальную форму, а приходится довольствоваться ее упрощенным, идеализированным представлением, что позволяет применить имеющиеся в распоряжении проектировщика физические модели и математические методы. Моделирование формы и построение расчетной схемы сооружения – один из самых ответственных этапов процесса проектирования строительных объектов.

Таким образом, инженеру в любом случае следует быть готовым к тому, что результаты расчета сооружения, полученные с помощью самых современных математических методов и сверхмощных компьютеров, лишь приближенно выражают его действительное напряженно-деформированное состояние. Важно лишь, чтобы возникшие при этом погрешности не могли явиться одной из причин недопустимого отклонения основных характеристик готового сооружения от предъявляемых к нему эксплуатационных требований по прочности, деформативности, долговечности и пр.

Еще одной проблемой в современном проектировании инженерных сооружений является невозможность выполнения всего комплекса операций по их расчету и конструированию на одном количественном уровне допускаемых погрешностей. Так, например, перемещения и напряжения в сечениях идеализированной расчетной схемы металлического моста можно определить с любой наперед заданной точностью, в то же время погрешности моделирования узлов соединения элементов реальной конструкции или определения характеристик грунта в основании опор моста могут составить десятки процентов. Принятая в нормативных документах различных государств система коэффициентов запаса в определенной мере предохраняет проектировщика от неприятных неожиданностей; важное значение, особенно

в неординарных ситуациях, приобретает тщательно продуманный эксперимент, а также интуиция и опыт специалиста, искусство эффективного анализа и синтеза достижений мировой строительной практики.

Идеализированными в большинстве случаев являются также расчетные схемы достаточно сложных конструкций опорных элементов и связей между отдельными частями сооружений. Наиболее широко применяются модели подвижного и неподвижного шарнирных соединений, а также жесткого защемления.

Безусловной абстракцией является также понятие «сосредоточенная сила», т.е. сила, действующая на участке поверхности тела нулевой площади или во внутренней области, объем которой равен нулю. В ряде задач такая абстракция приводит к усложнению расчетной схемы, так как приходится принимать во внимание так называемые особенности напряженно-деформированного состояния тела, связанные с необходимостью учета бесконечно больших напряжений.

2.1. Массивные конструкции

Расчет массивных элементов сооружений при определенных условиях может быть с достаточной точностью выполнен в постановке трехмерной задачи теории упругости [1]. Уравнения равновесия в декартовой системе координат (рис. 2.1, *а*) записываются в виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0;$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0;$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \qquad (2.1)$$

В настоящее время в качестве основных неизвестных при решении данного класса задач чаще всего принимаются перемещения, в декартовой системе координат (рис. 2.1, *а*) уравнения равновесия в перемещениях записываются в виде:

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + G\nabla^2 U + X = 0;$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + G\nabla^2 V + Y = 0;$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + G\nabla^2 W + Z = 0; \qquad (2.2)$$

В уравнениях (2.1), (2.2):

U, V, W – перемещения соответственно в направлении координатных осей *Ox, Oy, Oz*;

X, Y, Z – проекции вектора объемных сил на соответствующие оси;

Θ – объемное расширение, $\Theta = \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z}$;

∇^2 – оператор Лапласа, $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$;

μ – коэффициент Пуассона;

λ, G – упругие постоянные, $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$, $\lambda = \dfrac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}$;

σ_x, σ_y, σ_z – нормальные напряжения, индекс в их обозначении обозначает ту ось, параллельно которой направлено соответствующее напряжение, одновременно этот индекс обозначает и нормаль к площадке, на которой это напряжение действует;

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ – касательные напряжения, первый индекс обозначает направление действия напряжения, второй – нормаль к площадке, на которой это напряжение действует.

В дальнейшем учитывается закон парности касательных напряжений $\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{zy} = \tau_{yz}$.

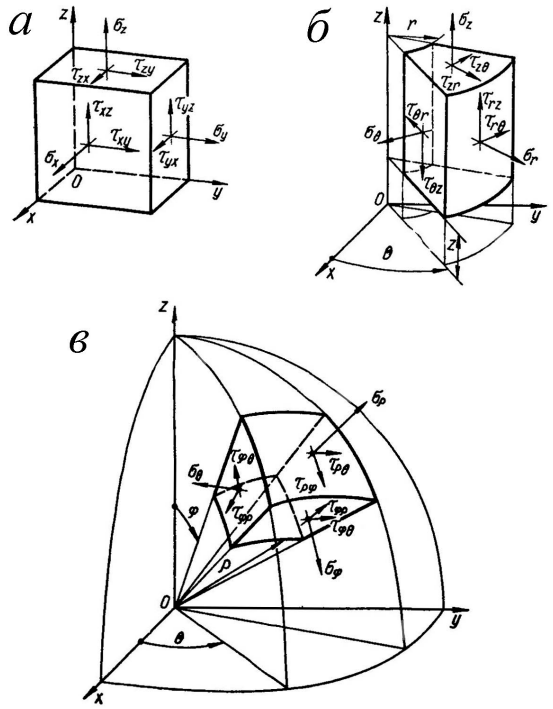


Рис. 2.1. Системы координат: а - декартова; б - цилиндрическая; в - сферическая

Деформации упругого тела могут быть выражены через его перемещения с помощью уравнений Коши [2], физический смысл деформаций следует из уравнений

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x};$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y};\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x};$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}. \qquad (2.3)$$

Напряженное состояние трехмерного тела в декартовых координатах выражается нормальными – $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательными – $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (рис. 2.1, *а*) напряжениями (здесь учтена парность касательных напряжений). Напряжения выражаются через деформации следующим образом (обобщенный закон Гука):

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_x;\ \ \tau_{xy} = G\gamma_{xy};$$
$$\sigma_y = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_{y;}\ \ \tau_{xz} = G\gamma_{xz;}$$
$$\sigma_z = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_{z;}\ \ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}. \qquad (2.4)$$

Выражения для напряжений через перемещения могут быть получены подстановкой (2.3) в (2.4):

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial U}{\partial x};\ \ \tau_{xy} = G(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x});$$
$$\sigma_y = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial V}{\partial y};\ \ \tau_{xz} = G(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x});$$
$$\sigma_z = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial W}{\partial z};\ \ \tau_{yz} = G(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}). \qquad (2.5)$$

Кроме рассмотренных выше гипотез при выводе уравнений равновесия (2.2) и выражений (2.3), (2.4) приняты следующие допущения:

– перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами;

– относительные удлинения и относительные сдвиги в упругом материале пренебрежимо малы по сравнению с единицей;

– углы поворота малы по сравнению с единицей, квадраты углов поворота пренебрежимо малы по сравнению с относительными удлинениями и сдвигами.

Без таких допущений математический аппарат «классической» теории упругости усложнился бы до такой степени, что решение прикладных задач оказалось бы практически неосуществимым. Например, выражения для компонентов ε_x и γ_{xy} вместо (2.3) приняли бы вид [3]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}((\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial V}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial x})^2);$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}.$$

Следует, однако, заметить, что за немногими исключениями (резина, некоторые пластмассы) применяющиеся в строительстве материалы сохраняют упругие свойства только при весьма малых удлинениях и сдвигах.

Решить трехмерную задачу теории упругости значит найти функции *U(x,y,z), V(x,y,z), W(x,y,z),* удовлетворяющие всюду внутри заданной области Ω уравнениям (2.2) при заданных значениях λ, G и всюду на границе S области заданным граничным условиям. В связи с тем, что данная граничная задача описывается дифференциальными уравнениями (2.2) второго порядка, в каждой точке границы в качестве граничных условий должен быть задан один из компонентов каждой из трех пар энергетически соответствующих

пар U, F_x; V, F_y; W, F_z. Если на границе задана проекция вектора внешних сил на одну из координатных осей (F_x, F_y, F_z), то в качестве граничного условия для искомых перемещений записывается соответствующее уравнение системы

$$\lambda\Theta l + G(\frac{\partial U}{\partial x} l + \frac{\partial U}{\partial y} m + \frac{\partial U}{\partial z} n) + G(\frac{\partial U}{\partial x} l + \frac{\partial V}{\partial x} m + \frac{\partial W}{\partial x} n) = F_x;$$

$$\lambda\Theta m + G(\frac{\partial V}{\partial x} l + \frac{\partial V}{\partial y} m + \frac{\partial V}{\partial z} n) + G(\frac{\partial U}{\partial y} l + \frac{\partial V}{\partial y} m + \frac{\partial W}{\partial y} n) = F_y;$$

$$\lambda\Theta n + G(\frac{\partial W}{\partial x} l + \frac{\partial W}{\partial y} m + \frac{\partial W}{\partial z} n) + G(\frac{\partial U}{\partial z} l + \frac{\partial V}{\partial z} m + \frac{\partial W}{\partial z} n) = F_z; \quad (2.6)$$

здесь l, m, n – направляющие косинусы вектора F внешних сил, приложенных в данной точке (ν – направление внешней нормали к границе тела в рассматриваемой точке): l=cos(x, ν), m=cos(y, ν), n=cos(z, ν).

Если на границе заданы все три компонента U, V, W вектора перемещений, то имеем дело с первой граничной задачей, в случае задания всех проекций вектора внешних сил – со второй граничной задачей, в других случаях граничная задача называется смешанной.

Кроме декартовой в инженерной практике широко применяются цилиндрическая система координат (рис. 2.1, *б*) с шестью независимыми компонентами тензора напряжений – $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r, \tau_\theta, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ и сферическая (рис. 2.1, *в*) – с независимыми компонентами $\sigma_\theta, \sigma_\rho, \sigma_\varphi, \tau_{\rho\theta}, \tau_{\theta\varphi}, \tau_{\varphi\rho}$ тензора напряжений. В последние десятилетия проектировщикам инженерных сооружений, оснащенным мощной вычислительной техникой и современным математическим обеспечением, удается реализовывать все более «фантастические» в отношении формы сооружений замыслы архитекторов, особенно в области тонкостенных конструкций; в связи с этим получают практическое применение и другие системы координат.

Уравнения (2.2), (2.6) и соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния (2.3)–(2.5) представляют собой математическое описание физической модели упругого тела, основанной на рассмотренных выше гипотезах и допущениях, при этом данная модель является, по-видимому, простейшей из всех возможных для реального трехмерного тела с целым рядом свойств и особенностей, в данной модели не учитываемых. Ввод в рассмотрение любого из них приведет к усложнению задачи; разработка эффективных методов решения таких задач и в настоящее время остается весьма актуальной проблемой, постоянно привлекающей внимание специалистов.

Рассмотрим вкратце некоторые из практически важных классов задач механики твердого тела, возникших в связи с учетом специфических свойств различных видов строительных материалов и конструкций.

1. *Неоднородные конструкции, состоящие из материала с различными меняющимися в зависимости от координат упругими свойствами*. Неоднородность может быть непрерывной, когда упругие свойства тела от точки к точке меняются непрерывно, и дискретной, когда свойства изменяются скачкообразно в некоторых точках, на линиях или поверхностях. Так, например, непрерывно меняются свойства материала в конструкции, температура отдельных частей которой изменяется непрерывно, а упругие свойства материала зависят от температуры. Скачкообразно, от слоя к слою, свойства материала могут изменяться в слоистых конструкциях, в том числе в плитах, оболочках и ограждающих элементах зданий.

Специфической проблемой расчета многослойных конструкций является моделирование связи между соседними слоями и формулирование граничных условий. В случае непрерывной неоднородности упругие характеристики материала приходится вводить в основные соотношения и уравнения равновесия в виде непрерывных функций, что усложняет процесс решения задачи в целом.

2. *Анизотропные конструкции*. Материалы, упругие свойства которых во всех направлениях, проведенных через данную точку, различны, называются анизотропными. В зависимости от структуры тело может быть изотропным или анизотропным и одновременно однородным или неоднородным. В случае однородного упругого тела, обладающего анизотропией общего вида, зависимость между компонентом σ_x тензора напряжений и компонентами тензора деформаций в точке можно записать в виде:

$$\sigma_x = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + A_{14}\gamma_{xy} + A_{15}\gamma_{xz} + A_{16}\gamma_{yz}, \qquad (2.7)$$

где коэффициенты $A_{1j,}$ j=1,2,…,6, являются константами, независимыми упругими постоянными в случае однородного тела, и функциями координат – в случае тела неоднородного. Всего в выражения для шести компонентов тензора напряжений входит 36 коэффициентов $A_{ij,}$ i=1,2,…,6; j=1,2,…,6; отсюда очевидны усложнения по сравнению с решением задачи теории упругости для изотропного тела (сравнить с выражениями (2.4), включающими две упругие константы).

Частным случаем анизотропии является ортотропия, когда различны те или иные характеристики материала в трех или двух взаимно перпендикулярных направлениях. Примером неоднородной ортотропной конструкции является опертая по контуру прямоугольная железобетонная плита с различным в направлениях, параллельных сторонам, армированием, а

следовательно, и различными жесткостями при изгибе. Ортотропными являются также панели из фанеры, покрытия из гофрированного железа и т.п.

Расчет ортотропных плит часто удается свести к расчету изотропных конструкций подобного же типа с характеристиками, вычисленными на основе определенных принципов соответствия [11].

3. *Физически нелинейные задачи.* К физически нелинейным задачам в механике твердого тела относят задачи определения напряженно-деформированного состояния конструкций, в которых под действием заданной нагрузки проявляются пластические деформации. Под пластичностью в данном случае подразумевается свойство твердых тел необратимо изменять под действием механических нагрузок свои размеры и форму. В наиболее общем случае пластические свойства материала при загружении конструкции проявляются в следующем:

– после того как напряжение в некоторой точке достигает величины, равной пределу упругости материала, линейная зависимость между деформациями и напряжениями нарушается, параметр, выражающий отношение напряжения к вызванной им деформации, превращается в функцию напряжения;

– при загружении материала выше предела упругости возникают остаточные деформации, которые сохраняются после полной разгрузки конструкции;

– при повторном загружении до появления пластических деформаций предел упругости (предел пропорциональности) увеличивается (так называемое упрочнение или наклеп); таким образом, одному и тому же напряженному состоянию могут соответствовать различные пластические деформации в зависимости от того, какой последовательностью напряженных состояний оно достигнуто (в зависимости от «истории загружения»).

Теория пластичности идеализирует поведение реальных материалов при пластическом деформировании на основе различных гипотез. Одной из наиболее распространенных приближенных теорий является теория малых упругопластических деформаций (деформационная теория), которая исследует соотношения между интенсивностью напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

и интенсивностью деформаций в той же точке

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}.$$

Для случая, когда интенсивность деформаций в данной точке возрастает, принимается, что величины σ_i и ε_i связаны между собой

независимо от вида напряженного состояния и для каждого материала величина σ_i выражается определенной функцией $\Phi(\varepsilon_i)$ (так называемый закон связи обобщенного напряжения с обобщенной деформацией при активном нагружении). Этот закон устанавливает единство природы деформации изотропного тела в сложных и простых случаях напряженных состояний в пределах и за пределами упругости; тем самым обосновывается возможность решения многих задач теории пластичности методами, разработанными для упругих тел.

Деформационная теория, строго говоря, применима лишь в случае простого загружения, когда все компоненты напряженного состояния возрастают пропорционально одному параметру.

Более общей является теория течения, связывающая приращения деформаций и напряжений с компонентами тензора напряжений.

4. *Еще одной до настоящего времени актуальной областью исследований остаются законы, уравнения и, особенно, методы решения граничных задач теории ползучести*. Дело в том, что законы и уравнения теории пластичности позволяют описывать напряженно-деформированное состояние тела, нагруженного за пределами упругости, в предположении, что при заданных нагрузках и температуре состояние это с течением времени остается неизменным. В действительности же напряжения и деформации, возникающие в стационарно нагруженном теле, с течением времени изменяются. Свойство материала, проявляющееся в непрерывном росте деформации с течением времени при постоянных напряжениях, называется ползучестью.

Ползучесть свойственна многим материалам, но в строительстве особенно важно учитывать это свойство при расчете и конструировании сооружений с применением бетона и железобетона. Ползучесть бетона может вызвать не только увеличение деформаций в конструкции, но и перераспределение напряжений, а в ряде случаев даже изменение расчетной схемы.

Теория ползучести и методы решения граничных задач близко примыкают к теории пластичности, однако в связи с разнообразием механических свойств твердых тел единая теория ползучести до настоящего времени не разработана.

5. *Одним из направлений развития современной науки о прочности материалов и конструкций является теория хрупкого разрушения*. Под хрупкостью понимают свойство материала разрушаться при небольшой, преимущественно упругой, деформации под действием напряжений, средний уровень которых ниже предела текучести. Образование хрупкой трещины и развитие процесса хрупкого разрушения связано с образованием малых зон пластической деформации. Относительная доля упругой и пластической деформации при хрупком разрушении зависит от свойств материала,

определяемых, в частности, технологией изготовления и условиями работы конструкции. Возникновение растягивающих напряжений по трем главным осям, концентрация напряжений в местах резкого изменения сечения элементов конструкции, понижение температуры и увеличение скорости нагружения, а также повышение запаса упругой энергии нагруженного объекта способствуют переходу материала в хрупкое состояние.

Интерес к теории хрупкого разрушения в строительстве объясняется, в частности, и тем, что большинство высокожаропрочных конструкционных материалов обладают значительной хрупкостью. Прочность элементов сооружений, изготовленных из таких материалов, существенно определяется их локальной прочностью в наиболее напряженных или наиболее дефектных зонах. Поскольку дефекты имеют случайный характер, то статистическая трактовка всего процесса анализа причин разрушения имеет важное значение [6] и многие исследования данной проблемы развиваются именно в этом направлении.

В рассмотренных выше областях механики твердого тела применяются различные физические и математические модели, методы и допущения, однако для их практической реализации применительно к трехмерному твердому телу необходимо в любом случае один раз или несколько (в ходе итерационного процесса) решить граничную задачу, выражаемую уравнениями (2.2), (2.6), а в необходимых случаях – их соответствующими обобщениями. При этом в качестве неизвестных необходимо определить (часто в весьма сложных областях) три функции трех независимых переменных, что связано с рядом проблем, не решенных в полной мере и до настоящего времени. Поэтому естественным является стремление специалистов сделать процесс решения менее трудоемким и повысить его устойчивость за счет уменьшения числа неизвестных и независимых переменных, используя реальные особенности рассматриваемой конструкции. В то же время в ряде случаев приходится усложнять вычислительные процедуры, отказываясь от тех или иных упрощающих гипотез «классической» теории упругости, как, например, при определении больших прогибов тонкой плиты.

2.2. Плоская задача теории упругости

Если трехмерное тело находится в таких условиях, при которых перемещения или напряжения в направлении одной из трех координатных осей отсутствуют, то решение граничной задачи, основные ее уравнения и соотношения существенно упрощаются; в этом случае имеют дело с плоской задачей теории упругости.

2.2.1. Плоское напряженное состояние. Характерным примером плоского напряженного состояния является напряженно-деформированное состояние тонкой плиты, подверженной действию параллельных ее плоскости сил, приложенных к контуру и равномерно распределенных по ее толщине (рис. 2.2).

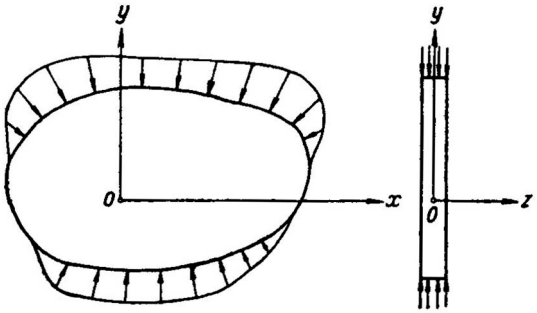


Рис. 2.2. К расчету тонкой плиты

В этом случае составляющие тензора напряжений $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ равны нулю на обеих поверхностях плиты, и можно полагать, что они отсутствуют и по всей ее толщине. Точно так же можно предположить, что три компонента напряженного состояния $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ не зависят от координаты z, т. е. не изменяются по всей толщине плиты.

Примем также, что в статических расчетах строительных объектов $X=Z=0$, $Y=-q$ (q – объемный вес материала плиты). Уравнения равновесия (2.1) в этом случае принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = q. \qquad (2.8)$$

Выражения (2.3) сводятся к виду:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad (2.9)$$

выражения (2.5):

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial U}{\partial x};$$

$$\sigma_y = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial V}{\partial y};$$

$$\tau_{xy} = G(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}), \qquad (2.10)$$

уравнения равновесия в перемещениях (2.2):

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + G\nabla^2 U = 0;$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + G\nabla^2 V - q = 0. \qquad (2.11)$$

При этом оператор ∇^2 и объемное расширение Θ соответственно выражаются:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Деформация:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{\mu}{1-\mu}(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}). \qquad (2.12)$$

Граничные условия (2.6) нет необходимости записывать для граней, перпендикулярных оси *Oz*, на других частях границы $n = \cos(z, \nu) = 0$, отсюда с учетом (2.12) и $F_z = 0$ (из условий задачи) запишем:

$$\lambda\Theta l + G(\frac{\partial U}{\partial x}l + \frac{\partial U}{\partial y}m) + G(\frac{\partial U}{\partial x}l + \frac{\partial V}{\partial x}m) = F_x;$$

$$\lambda\Theta m + G(\frac{\partial V}{\partial x}l + \frac{\partial V}{\partial y}m) + G(\frac{\partial U}{\partial y}l + \frac{\partial V}{\partial y}m) = F_y. \qquad (2.13)$$

Задача о напряженно-деформированном состоянии балки-стенки имеет большое практическое значение, так как ею моделируются многие типы ограждающих конструкций зданий и сооружений различного назначения. Перемещение *W* из плоскости балки-стенки не равно в общем случае нулю, однако данный компонент, как и деформации в направлении координаты *z*, обычно у проектировщиков интереса не вызывают. Форма балок-стенок и условия их опирания могут быть весьма сложными, например, как у стеновой панели с дверным и оконным проемами, однако расчет таких конструкций с помощью современных диалоговых программных комплексов и персональных компьютеров затруднений не вызывает.

2.2.2. Плоская деформация. Плоской деформацией называется такое напряженно-деформированное состояние тела, при котором перемещения всех его точек могут происходить только в двух направлениях. Примером

может служить тело, помещенное между двумя абсолютно твердыми плитами (рис. 2.3), расстояние между которыми остается неизменным, и сжимаемое силами, параллельными плоскостям плит.

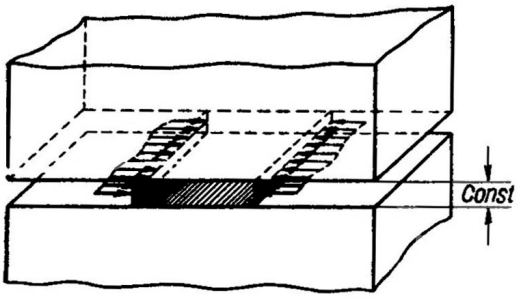


Рис. 2.3. К определению плоской деформации

В таких же условиях находится тело, размеры которого в одном направлении, например, в направлении оси *Oz*, очень велики. Если такое длинное призматическое тело нагружено силами, направленными в плоскости *xOy* и не меняющимися по длине тела, то часть его, находящаяся на значительном расстоянии от концов, фактически будет находиться в состоянии плоской деформации и перемещения всех ее точек будут происходить в плоскостях, перпендикулярных оси *Ox*, т.е.

$$W=0;\ \varepsilon_z = 0;\ \gamma_{xz} = 0;\ \gamma_{xz} = 0;\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Уравнения равновесия в напряжениях (2.1) принимают в этом случае вид (из объемных сил сохраним в рассмотрении только собственный вес q):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - q = 0. \qquad (2.14)$$

Уравнения равновесия в перемещениях (2.2):

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + G\nabla^2 U = 0;$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + G\nabla^2 V - q = 0, \qquad (2.15)$$

где

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y};\ \ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (2.16)$$

Соответственно выражению (2.16) для Θ изменяются формулы (2.10), выражения для деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ записываются в этом случае в виде (2.9), а граничные условия (2.6) принимают вид:

$$\lambda\Theta l + G(\frac{\partial U}{\partial x} l + \frac{\partial U}{\partial y} m) + G(\frac{\partial U}{\partial x} l + \frac{\partial V}{\partial x} m) = F_x;$$

$$\lambda\Theta m + G(\frac{\partial V}{\partial x} l + \frac{\partial V}{\partial y} m) + G(\frac{\partial U}{\partial y} l + \frac{\partial V}{\partial y} m) = F_y. \qquad (2.17)$$

Методы решения задачи о плоской деформации упругого тела могут быть с успехом применены во многих случаях для расчета (особенно оценочного) подпорных стенок, парапетов и других протяженных конструкций.

2.3. Изгиб тонких плит

2.3.1. Соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния и основное дифференциальное уравнение изгиба. Тонкими пластинками или пластинами в механике твердого тела называют тела, один из размеров которых (толщина) существенно меньше размеров в плане. В строительстве такие конструкции чаще называют плитами; действительно, трудно назвать пластинкой массивную плиту с размерами в плане, измеряемыми в метрах, и толщиной в несколько десятков сантиметров.

В связи с широким применением теории изгиба тонких плит в строительстве рассмотрим более подробно вывод ее основных соотношений и уравнений.

Плоскость, расположенную до деформации плиты посредине между ее верхней и нижней поверхностями, будем называть срединной. Выберем систему координат таким образом, чтобы координатная плоскость *xOy* совпадала со срединной плоскостью, а ось *Oz* была к ней перпендикулярна. Будем также полагать, что внешняя нагрузка, распределенная по закону *q(x, y),* приложена к срединной плоскости и направлена параллельно оси *Oz*. Кроме этого в теории изгиба тонких плит приняты следующие допущения:

1. Прогибы плиты, т.е. перемещения точек ее срединной плоскости в направлении оси *Oz* под действием нагрузки *q* малы по сравнению с толщиной *h* плиты.

2. Нормали к срединной плоскости до изгиба остаются нормалями после изгиба.

3. Срединная плоскость при изгибе деформируется, но остается нейтральной, т.е. нормальные напряжения в ней и после деформации равны нулю.

4. Напряжением σ_z при расчете плиты можно пренебречь.

5. Функция *W(x, y)* прогибов не зависит от *z*, т.е. не меняется по толщине плиты.

Рассмотрим сечение плиты плоскостью, параллельной координатной плоскости *xOz*, как показано на рис. 2.4.

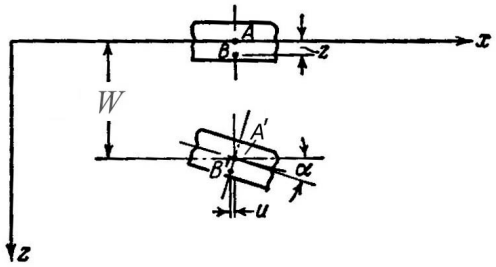


Рис. 2.4. К расчету тонких плит на изгиб

При изгибе точка A, принадлежащая срединной плоскости плиты, перемещается на величину W и переходит в положение A'. Согласно допущению 2 некоторая точка B, лежащая на нормали к недеформированной срединной плоскости на расстоянии z от A, перемещается в точку B' и после изгиба остается на нормали к срединной поверхности. Из рис. 2.4 видно, что перемещение точки B в направлении оси Ox выражается величиной

$$U = -z\alpha .$$

Так как прогибы W и угол α выражаются малыми величинами, то можно приближенно принять

$$\alpha \approx tg\ \alpha = \frac{\partial W}{\partial x},$$

отсюда

$$U = -z\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{2.18}$$

По аналогии можно записать, что перемещение V точки B в направлении оси Oy равно

$$V = -z\frac{\partial W}{\partial y}. \tag{2.19}$$

Фактически допущение 2 равносильно так называемой гипотезе плоских сечений, которая формулируется следующим образом: сечение, плоское до деформации плиты, остается плоским после ее деформации.

При принятых допущениях соотношения между деформациями и перемещениями выражаются формулами (2.9). Подставляя в них выражения (2.18), (2.19), получим:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2};\ \ \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 W}{\partial y^2};\ \ \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \tag{2.20}$$

В связи с допущением 4 ($\sigma_z = 0$) известные в теории упругости соотношения между деформациями и напряжениями принимают вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y);\ \ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x);\ \ \gamma_{xy} = \frac{1}{E}\tau_{xy}. \tag{2.21}$$

Отсюда

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \tag{2.22}$$

После подстановки (2.20) в (2.22) получим:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right);$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right);$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \qquad (2.23)$$

Для выражения изгибающих и крутящих моментов, действующих в сечениях плиты толщиной *h,* параллельных плоскостям *xOz* и *yOz*, воспользуемся формулами (2.23):

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) z dz = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right), \quad (2.24)$$

здесь величина

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

называется цилиндрической жесткостью плиты.

На основе аналогичных рассуждений получим:

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right);$$

$$M_{xy} = D(1-\mu)\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \qquad (2.25)$$

Рассмотрим теперь равновесие элемента *dxdy* плиты, изображенной на рис. 2.5, находящегося под воздействием поперечной нагрузки *q(x, y)*.

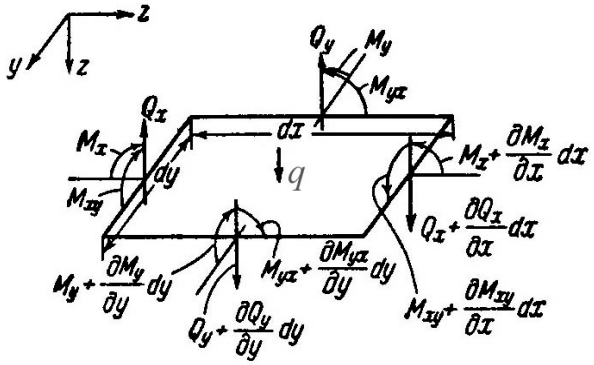


Рис. 2.5. Равновесие элемента *dxdy* тонкой плиты, работающей на изгиб

Помимо изгибающих и крутящих моментов на гранях элемента действуют вертикальные поперечные силы, вызывающие возникновение касательных напряжений τ_{zx} и τ_{yz}. Обозначим Q_x и Q_y приходящиеся на единицу длины поперечные силы в сечениях, параллельных соответственно осям *Ox* и *Oy*, их величины можно выразить следующим образом:

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz;\ Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz. \tag{2.26}$$

Составим теперь уравнения равновесия рассматриваемого элемента. Сумма проекций всех сил на ось *Oz*

$$(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy) - Q_x + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) - Q_y + qdxdy = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \tag{2.27}$$

Выражая моменты всех сил, действующих на элемент, относительно оси *Ox* и отбрасывая члены высших порядков, получим еще одно уравнение равновесия:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \tag{2.28}$$

Уравнение равновесия, выражающее равенство нулю суммы моментов всех сил относительно оси *Oy*, имеет вид:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0\,. \tag{2.29}$$

Из уравнений (2.24), (2.25), (2.28), (2.29) находим для пластинки постоянной толщины (*D* – постоянная величина):

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -D(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2});$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}). \tag{2.30}$$

После подстановки выражений (2.30) для Q_x, Q_y в (2.27) получим основное дифференциальное уравнение изгиба тонкой плиты постоянной толщины:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \tag{2.31}$$

2.3.2. Граничные условия. Для определенности сформулируем граничные условия для края $x = a$ прямоугольной плиты размером в плане $a \times b$, края которой параллельны осям *Ox* и *Oy*.

Шарнирно опертый край. При шарнирном опирании край плиты может свободно поворачиваться, при этом прогиб и изгибающий момент вдоль края должны быть равными нулю:

$$W_{x=a} = 0;\ (M_x)_{x=a} = -D(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}) = 0.$$

Но из условия равенства нулю прогибов вдоль края $x = a$ следует

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

и отсюда окончательно получим:

$$W_{x=a} = 0\,;\ (\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})_{x=a} = 0. \qquad (2.32)$$

Жесткое защемление плиты по краю x=a. В соответствии с условиями жесткого защемления края прогиб и угол поворота в направлении, перпендикулярном краю, должны быть равными нулю. Отсюда граничные условия жесткого защемления края плиты $x = a$:

$$W_{x=a} = 0;\ (\frac{\partial W}{\partial x})_{x=a} = 0\,. \qquad (2.33)$$

Свободный край. Если край плиты $x = a$ свободен от воздействия каких-либо внешних сил, то граничные условия для него должны быть записаны в виде

$$(M_x)_{x=a} = 0;\ (M_{xy})_{x=a} = 0;\ (Q_x)_{x=a} = 0.$$

Однако Кирхгоф показал, что для полного решения граничной задачи с основным дифференциальным уравнением (2.31) четвертого порядка достаточно двух граничных условий, третье условие является излишним. Такое несоответствие проистекает из положенной в основу теории тонких плит гипотезы плоских сечений. Если бы такая гипотеза не была введена, порядок основного дифференциального уравнения изгиба был бы равен шести, чему должны были бы соответствовать три граничных условия.

Чтобы избежать противоречий указанного характера при формулировании граничных условий, Кирхгоф предложил заменить два граничных условия одним, представив крутящий момент M_{xy} в виде пары сил и объединив эти силы с поперечными силами Q_x.

Как и ранее, рассмотрим край $x = a$ (рис. 2.6).

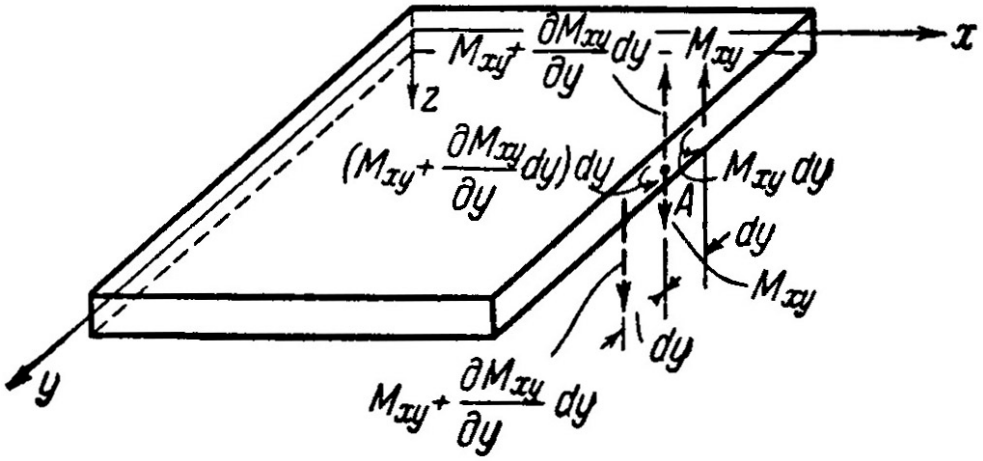


Рис. 2.6. К определению граничных условий тонкой плиты

На элемент длины *dy* действует крутящий момент $M_{xy}dy$, который можно заменить двумя вертикальными силами, равными M_{xy} и действующими на расстоянии *dy* друг от друга (сплошные стрелки на рис. 2.6). Для следующего элемента *dy* крутящий момент будет равен $(M_{xy}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy)dy$, который можно снова представить в виде двух вертикальных сил величиной $M_{xy}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy$ (изображены пунктирными линиями). Рассматривая таким образом статически эквивалентную систему сил, можно убедиться, что в точке *A* действует вертикальная сила величиной $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy$; на единицу длины будет приходиться вертикальная сила величиной $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$. В случае положительного направления момента M_{xy} статически эквивалентные силы направлены вверх; в соответствии с принятым правилом знаков они должны быть обозначены знаком «минус». Следовательно, для свободного края, вместо граничных условий равенства нулю величин M_{xy} и Q_y, вводим условие, в соответствии с которым равна нулю статически эквивалентная им вертикальная сила:

$$V_x=(Q_x-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y})=-D(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}). \qquad (2.34)$$

Пользуясь теперь уравнениями (2.24), (2.30), выразим граничные условия $V_x = 0$, $M_x = 0$ для свободного края $x = a$ через функцию прогибов W в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right)_{x=a} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0. \qquad (2.35)$$

2.3.3. Плита переменной толщины. Дифференциальное уравнение равновесия (2.31) существенно усложняется в случае, когда толщина плиты не является постоянной величиной и зависит от координат. В дальнейшем будем полагать, что толщина плиты *h(x, y)*, а вместе с ней и жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \qquad (2.36)$$

изменяются всюду в области, занимаемой плитой, непрерывно, без скачков, вследствие чего выражения для изгибающих и крутящего моментов (2.24), (2.25) могут быть применены с достаточной точностью.

Дифференциальное уравнение изгиба плиты переменной толщины в общем случае имеет вид [5] (интересно сравнить его с (2.31)):

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) + 2\frac{\partial D}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right) +$$

$$+ 2\frac{\partial D}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) -$$

$$-(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = q. \qquad (2.37)$$

Граничные условия (2.6), а также выражения для изгибающих и крутящих моментов (2.24), (2.25) могут быть в данном случае применены с достаточной точностью [5].

Следует отметить, что в строительстве редко применяются плиты со сложным характером изменения толщины, в частности в связи с их нетехнологичностью, однако от уравнения (2.37) легко перейти к любому частному случаю. Так, для плиты, жесткость которой линейно меняется в направлении оси *Oy*, уравнение (2.37) преобразуется к виду ($D = D_0 + D_1 y$; D_0, D_1 – постоянные):

$$(D_0 + D_1 y)(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}) + 2D_1(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}) = q.$$

2.3.4. Изгиб ортотропных плит. При расчете покрытий из гофрированного железа, двухмерных деталей из дерева, железобетонных плит с различными коэффициентами армирования в двух перекрестных направлениях и с учетом появления трещин в растянутой зоне, а также плит, подкрепленных ребрами, часто применяют модель однородной ортотропной плиты, изготовленной из материала с тремя плоскостями симметрии в отношении его упругих свойств. Если эти плоскости принять в качестве координатных, то соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния плиты можно представить в виде [5]:

$$\sigma_x = E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y;$$
$$\sigma_y = E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x;$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad (2.38)$$

т.е. в данном случае плоского напряженного состояния, $\sigma_z = 0$, свойства материала характеризуются четырьмя постоянными E'_x , E'_y, E'' и G.

Исследуя изгиб плиты, изготовленной из подобного материала, как и прежде, полагают, что перпендикулярные к срединной плоскости, т.е. к плоскости *xOy*, линейные элементы остаются прямыми и нормальными к изогнутой поверхности плиты после ее изгиба. Поэтому для компонентов деформации остаются в силе выражения (2.20), после подстановки их в (2.38) получим:

$$\sigma_x = -z(E'_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + E'' \frac{\partial^2 W}{\partial y^2});$$
$$\sigma_y = -z(E'_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + E'' \frac{\partial^2 W}{\partial x^2});$$
$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \qquad (2.39)$$

Отсюда после интегрирования по толщине плиты получены выражения для изгибающих и крутящего моментов:

$$M_x = -(D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2});$$
$$M_y = -(D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2});$$

$$M_{xy} = 2D_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \tag{2.40}$$

где

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}; D_y = \frac{E'_y h^3}{12}; D_1 = \frac{E'' h^3}{12}; D_{xy} = \frac{Gh^3}{12}.$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение изгиба ортотропной плиты $(H = D_1 + 2D_{xy})$:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q. \tag{2.41}$$

Для железобетонной плиты величины D_x, D_y можно вычислить приближенно по методам, применяемым в расчетах на изгиб железобетонных балок, или же определить экспериментально. Жесткость при кручении H без больших погрешностей вычисляют для заданного сечения плиты без учета арматуры по модулю упругости бетона на сдвиг.

Следует иметь в виду, что при изгибе железобетонных плит нейтральная поверхность не совпадает со срединной поверхностью и вообще приобретает условный характер, так как в сечениях, перпендикулярных к осям Ox и Oy, нейтральные оси находятся на разном расстоянии от поверхностей плиты. Особенно большой эта разница может быть в случае, когда в одном из направлений расчет ведется с учетом образования трещин в бетоне.

2.4. Приближенные модели изгиба тонких плит и области их практической применимости

2.4.1. О критериях оценки области применимости. Формулы и уравнения теории изгиба тонких плит получены из соответствующих формул и уравнений трехмерной теории упругости после ввода в рассмотрение целого ряда упрощающих гипотез. В конечном счете трехмерную задачу действительно удалось существенно упростить, в частности, вместо трех независимых компонентов вектора смещения ограничились определением только одного – функции прогиба плиты – и систему трех дифференциальных уравнений равновесия свели к одному – более высокого порядка. Естественно, что проблема определения области применимости данной теории возникла сразу же после ее внедрения в практику проектирования и остается актуальной до сих пор.

В основу теории изгиба тонкой плиты положены, в частности, допущения, что в процессе деформирования напряжения σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} всюду

равны нулю, и, кроме того, в срединной поверхности плиты остаются нулевыми и нормальные напряжения σ_x, σ_y. При этом плита может рассматриваться как совокупность произвольного числа слоев, не взаимодействующих в процессе изгиба, а срединная поверхность остается поверхностью развертывающейся [5].

Если же условие развертываемости нарушается, что в существенной мере зависит от формы плиты и типа граничных условий, то в срединной поверхности возникают напряжения и уровень погрешностей, вызванных применением приближенной теории, делается все более заметным с увеличением отношения между растягивающими напряжениями в срединной поверхности и максимальным напряжением в теле плиты или, что то же самое, с увеличением отношения между линейной деформацией срединной поверхности и максимальной деформацией изгиба $h/2r_{\min}$, где h – толщина плиты, r – минимальный радиус кривизны срединной поверхности [5]. Отсюда следует еще одно условие практической применимости приближенной теории: прогибы плиты должны быть малыми по сравнению с ее толщиной.

Таким образом, область применимости теории изгиба тонких плит совершенно определенно ограничена с двух сторон: с одной – кругом задач, в которых необходимо сохранять в рассмотрении все компоненты напряженно-деформированного состояния и граничные условия (2.6) трехмерной задачи теории упругости, а с другой – задачами изгиба плит с большими прогибами, плит при совместном воздействии поперечной нагрузки и сил в их срединной поверхности, а также пластинок с пренебрежимо малой изгибной жесткостью (мембраны).

Исследование данной проблемы в настоящее время ведется в следующих направлениях:

1. Сопоставление результатов, полученных на основе приближенной теории, с точным решением соответствующей граничной задачи в строгой постановке трехмерной теории упругости. К сожалению, данный подход удалось реализовать лишь для весьма узкого круга частных задач; причина – большие математические трудности, возникающие при всякой попытке получить точное решение пространственной задачи теории упругости в общем случае. Новые возможности в этом направлении связаны с появлением в арсенале проектировщика эффективных приближенных методов решения граничных задач и современных мощных компьютеров.

2. Второе, представляющееся «безупречным», направление – физический эксперимент, значимость которого трудно переоценить при исследовании напряженно-деформированного состояния плит сложной формы в плане, при смешанных граничных условиях и т.п. К сожалению, в последнее время интерес исследователей к экспериментальным методам исследования неуклонно падает.

3. Третье направление – построение приближенных, но уточняющих тем или иным образом теорию изгиба тонких плит моделей. Именно на основе такого подхода получен целый ряд важных как для теории, так и для практики результатов. В качестве примера проведем анализ областей эффективного применения трех приближенных теорий расчета круглой свободно опертой по контуру плиты радиусом a, толщиной *h*, находящейся под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью *q*.

В соответствии с теорией изгиба тонких плит прогиб *W* выражается формулой

$$W = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D}\left(\frac{5+\mu}{1+\mu}(a^2 - r^2)\right). \qquad (2.42)$$

На основе модели плиты средней толщины с учетом нормального σ_z и касательного τ_{rz} напряжений (предполагается, что напряжение τ_{rz} распределено по толщине плиты по параболическому закону) для функции *W* получено следующее выражение:

$$W = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D}\frac{(5+\mu)}{(1+\mu)}(a^2 - r^2) + \frac{qh^2}{8D}\frac{(3+\mu)}{6(1-\mu^2)}(a^2 - r^2). \qquad (2.43)$$

В центре плиты максимальная величина прогиба

$$W_c = \frac{qa^4}{64D}\left(\frac{5+\mu}{1+\mu} + \frac{4}{3}\frac{(3+\mu)}{(1-\mu^2)}\frac{h^2}{a^2}\right). \qquad (2.44)$$

Как видно из формулы (2.42) при *r*=0 и формулы (2.44), второй член в скобках (2.44) фактически выражает погрешность теории изгиба тонких плит, вызванную пренебрежением поперечным давлением и касательными напряжениями, причем эта погрешность пропорциональна отношению толщины плиты к ее радиусу. Так, при μ=0,3; *h*=0,1a погрешность составляет лишь 1,2% полной величины прогиба, при *h*=0,5a – 23%. Очевидно, что граничное значение h/a, определяющее область применимости теории тонких плит по максимальным прогибам, в данном случае, при допустимой погрешности ψ % можно получить из условия

$$\frac{\frac{4}{3}\frac{3+\mu}{1-\mu^2}\frac{h^2}{a^2}}{\frac{5+\mu}{1+\mu} + \frac{4}{3}\frac{3+\mu}{1-\mu^2}\frac{h^2}{a^2}}100 \le \psi. \qquad (2.45)$$

При значении μ=0,3 (сталь) и заданном ψ=5% из (2.45) получим h/a=0,21, т.е. при заданном значении ψ по максимальному прогибу и μ=0,3 теорию изгиба плит средней толщины следует применять при

отношении $h/a \succ 0{,}2$. Величина коэффициента Пуассона влияет на граничное значение h/a незначительно, при μ=0,167 (бетон) данная величина равна 0,23.

В качестве основного оценочного параметра вместо максимальных значений функции прогибов может быть принята максимальная величина нормального напряжения в сечениях плиты, некоторая интегральная характеристика напряженно-деформированного состояния конструкции и т.п., однако границы применимости той или иной приближенной теории, как правило, выражают отношением толщины плиты к наименьшему ее размеру в плане.

2.4.2. Толстые плиты. Рассмотренная в п. 2.4.1 осесимметричная задача об изгибе свободно опертой круглой плиты представляет особый интерес потому, что для нее получено также точное решение в постановке теории толстых плит и на этой основе может быть проведена оценка области применимости теории плит средней толщины при увеличении отношения h/a. По теории толстых плит прогиб в центре выражается величиной [9]

$$W_T = \frac{qa^4}{64D}\left(\frac{5+\mu}{1+\mu} + \frac{2}{5}\frac{8+\mu+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{h^2}{a^2}\right). \qquad (2.46)$$

Полагая результат (2.46) точным, вычислим для μ=0,3 граничное значение h/a, выше которого погрешность $\left| W_T - W_c \right|$ решения по теории плит средней толщины будет превышать заданную величину ψ. Так, для ψ=5% получим h/a=0,4.

Таким образом, верхней границей применимости теории тонких плит для решения осесимметричной задачи изгиба круглой плиты при μ=0,3 и ψ=5% следует принять отношение h/a=0,2 (см. п. 2.4.1). Интервал значений $0{,}2 \prec h/a \prec 0{,}4$ определяет область эффективного применения теории изгиба плит средней толщины для вычисления прогибов (если полагать в качестве точных результаты, полученные на основе теории толстых плит).

В литературе имеется целый ряд рекомендаций по поводу применимости различных приближенных теорий изгиба плит. Так, в работе [8] рассматриваются как сомнительные любые решения для круглой плиты, основанные на удовлетворении граничным условиям на краю лишь в среднем, а не точечно.

В работе [9] даны рекомендации по расчету толстых плит, в частности стрелу прогиба жестко защемленной по контуру и загруженной равномерно распределенной нагрузкой плиты рекомендуется определять по формуле (f – стрела прогиба по соответствующей формуле теории тонких плит, b – радиус плиты, h – ее толщина):

$$f' = f(1 + 3{,}33(\frac{h}{b})^2)\,. \qquad (2.47)$$

Если круглая плита свободно оперта по контуру, то

$$f' = f(1 + 0{,}7(\frac{h}{b})^2)\,.$$

Прогиб в центре прямоугольной плиты $a \times b$ $(a \geq b)$ шарнирно опертой и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q, рекомендуется определять по формуле [9]

$$f' = f(1 + \alpha(\frac{h}{2b})^2).$$

Коэффициент α принимают в зависимости от отношения a/b

a/b	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0	5,0	∞
α	1,18	0,98	0,87	0,80	0,75	0,72	0,64	0,62	0,61	0,61

В соответствии с [8] нормальные напряжения при изгибе шарнирно опертых толстых плит можно определять по формулам теории тонких пластинок даже в том случае, если отношение толщины к наименьшему размеру в плане достигает 0,5.

В работе [8] к плитам средней толщины отнесены все плиты, у которых отношение толщины к наименьшему из размеров в плане составляет величину менее 0,2. При расчете многослойных плит средней толщины (минимальный размер в плане составляет величину порядка трех-пяти толщин) рекомендуется принимать во внимание не только деформации поперечного сдвига, но и поперечное обжатие. Учет влияния поперечного обжатия необходим и для сравнительно тонких плит, если физико-механические характеристики слоев различаются существенно, а нагрузка имеет локальный характер.

Теория тонких плит даже в области ее эффективного применения не обеспечивает необходимой точности в двух случаях:

– в окрестности сосредоточенной поперечной нагрузки;

– в узких краевых зонах, в особенности в областях близ углов плиты и вокруг отверстий, диаметр которых имеет величину порядка ее толщины.

В первом из этих двух случаев как напряжение σ_z, так и поперечные касательные напряжения оказывают влияние, сопоставимое с эффектом действия удерживаемых в рассмотрении в теории тонких плит компонентов напряженного состояния. Во втором – влияние σ_z пренебрежимо мало по сравнению с влиянием поперечных касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} [11]. Многие из граничных задач, относящихся к упомянутым случаям, являются

предметом одного из специальных разделов механики твердого тела – науки о концентрации напряжений.

Следует иметь в виду, что теория толстых плит также является приближенной и нуждается в проверке, особенно для толщин, близких к минимальному размеру толстой плиты в плане. Так, например, решения для круглой плиты, рассмотренные в работе [8], основаны на приближенном представлении граничных условий на торцевой поверхности (так называемые «условия в среднем»), в которых вместо условий для напряжений в каждой точке вводятся условия для изгибающего момента и приведенной перерезывающей силы по всей толщине так, как это показано в п. 2.3.2 для свободного края тонкой плиты. В решения в ряде случаев вводятся частные предположения относительно характера напряженного состояния, отсюда, как следствие, должно быть принято, что силы, действующие по краям плиты и учитываемые в граничных условиях для жестко защемленной или свободно опертой плиты, заранее определенным образом распределены по боковой поверхности (например, касательное напряжение меняется по параболическому закону). На напряженно-деформированное состояние плиты в зонах, не лежащих непосредственно у краев плиты, такая замена в соответствии с принципом Сен-Венана не может влиять сколько-нибудь существенно, однако при толщинах, близких к минимальному размеру в плане, трудно выделить зоны, «не лежащие непосредственно у краев».

Поэтому единственно обоснованным способом проверки достоверности тех или иных приближенных теорий расчета толстых плит и определения области их практической применимости, кроме, естественно, физического эксперимента, является сопоставление полученных на их основе результатов с результатами решения соответствующей граничной задачи в строгой постановке трехмерной теории упругости. В настоящее время данную проблему для многих классов задач можно считать вполне разрешимой на основе приближенных методов и применения современных персональных компьютеров. Именно приближенные методы, о которых пойдет речь в дальнейшем, являются в наши дни мощным оружием в руках проектировщика.

В то же время любое новое точное решение граничной задачи механики твердого тела является неоценимым вкладом в сокровищницу мировой науки, так как оно имеет не только самостоятельное значение, но и может быть применено в качестве надежного эталона в процессе развития новых и совершенствования существующих приближенных методов.

В качестве примера проведем анализ уровня точности двух теорий изгиба толстой плиты для различных соотношений между толщиной и размерами в плане, пользуясь результатами решения аналогичных граничных задач в строгой постановке теории упругости для трехмерного тела методом определяющих состояний [8].

Для определения прогибов круглой жестко защемленной по контуру плиты радиусом a и толщиной h, загруженной по верхней грани равномерно распределенной нагрузкой q, рекомендуется формула [4]

$$W = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2 + \frac{4h^2}{1-\mu}(a^2 - r^2). \qquad (2.48)$$

В табл. 2.1 для μ=0,25 приведены значения прогибов в центре плиты (r=0), полученные методом определяющих состояний [9] и по формулам (2.46), (2.48) для отношений h/a=1; 0,4; 0,2.

Таблица 2.1

$\gamma = h/a$	Решение трехмерной задачи [10]	Формула (2.48)	Формула (2.46)
1	0,848	1,113 (31,3)	0,762 (10,2)
0,4	4,543	5,089 (12,1)	4,208 (7,0)
0,2	25,61	26,65 (4,46)	24,92 (2,6)

В скобках приведены также погрешности в процентах результатов применения приближенных теорий относительно решения пространственной задачи [9].

Как видно из проведенного сравнения, при отношении h/a=1 результаты применения обеих приближенных теорий, особенно с применением формулы (2.48), вряд ли можно считать удовлетворительными. Лишь при h=0,2a погрешности результатов этих теорий находятся в пределах пяти процентов. Интересен также тот факт, что уровень расхождений между двумя приближенными теориями больше, чем с точным решением. Так, для h=a величина W, вычисленная по формуле (2.48), превышает результат применения формулы (2.46) на 46%. Даже для плиты с h=0,2a расхождение составляет 7%.

В ряде работ определение напряжений в круглых толстых свободно опертых по контуру плитах рекомендуется проводить по теории тонких плит вплоть до соотношений между толщиной и радиусом, близких к единице. В табл. 2.2 проведено сравнение значений нормальных напряжений, σ_z/q, в характерных сечениях – в центре (r=0) и на контуре (r=a) жестко защемленных плит. Результаты сравнения являются одним из свидетельств того, что теория тонких плит применима для определения напряжений в случае жесткого защемления лишь при отношении h/a=0,1.

Эта теория вообще не учитывает возникновение в изгибаемых плитах касательных напряжений, в то время как в соответствии с данными [9] максимальные значения касательных напряжений при h=a достигают 150% максимальных значений нормальных напряжений (при h=0,1a – 20%).

Таблица 2.2

h/a	Координаты, z	r=0		r=a	
		Теория тонких плит	По данным [10]	Теория тонких плит	По данным [10]
1	$h/2$	–0,469 (–54,7)	–1,036	0,75 (–69,2)	2,432
	0	0	–0,131	0	–0,164
	$-h/2$	0,469	0,532	–0,75	–1,403
0,4	$h/2$	–2,93 (–19,4)	–3,634	4,69 (–21,1)	5,939
	0	0	–0,151	0	–0,268
	$-h/2$	2,93	3,209	–4,69	5,866
0,2	$h/2$	–11,72 (–10,9)	–13,15	18,75 (–15,6)	19,66
	0	0	–0,157	0	–0,182
	$-h/2$	11,72	12,77	–18,75	–20,03

Как видно из приведенных примеров, проблема определения границ эффективной применимости приближенных теорий расчета плит все еще требует дальнейших исследований. Кроме соотношения между толщиной плиты и размерами в плане качество результатов, полученных на основе таких теорий, зависит еще от целого ряда других факторов, в том числе формы плиты в плане, типа граничных условий, характера внешней нагрузки, структуры плиты и даже значений упругих постоянных материала.

2.5. Изгиб плиты при совместном действии поперечной нагрузки и сил в ее срединной плоскости

Если в срединной плоскости плиты, загруженной поперечной нагрузкой, действуют силы (после отнесения к единице длины обозначим их $N_x, N_y, N_{xy} = N_{yx}$ (рис. 2.7), то эти силы могут оказать значительное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкции.

Рассмотрим при сохранении всех гипотез теории тонких плит равновесие малого элемента, вырезанного из плиты двумя парами плоскостей, параллельных координатным плоскостям xOz и yOz. Проектируя силы $N_x, N_y, N_{xy} = N_{yx}$ на оси Ox и Oy, получим:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \qquad (2.49)$$

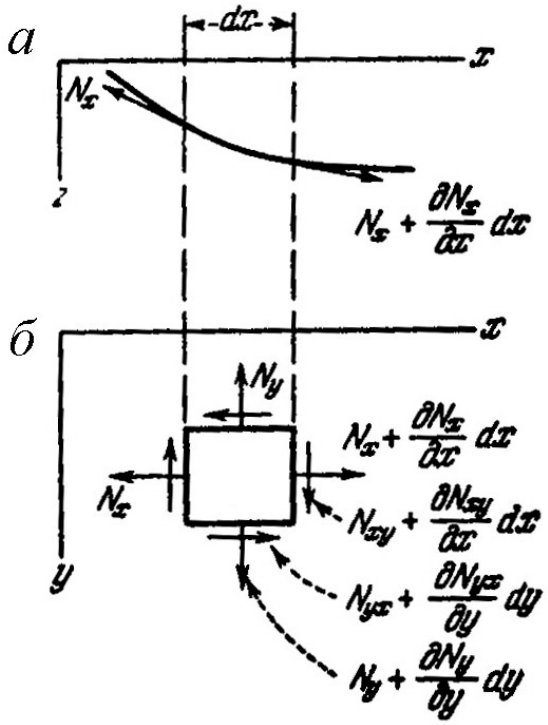


Рис. 2.7. К изгибу тонкой плиты при совместном действии поперечной нагрузки и сил в ее срединной плоскости

Рассматривая проекцию этих сил на ось *Oz*, необходимо учесть, что плита изгибается, и в результате этого изгиба между направлениями сил N_x, действующих на противоположные грани элемента, равно как и между направлениями сил N_y, образуются малые углы. Вследствие этого изгиба проекция нормальных сил N_x на ось *Oz* равна:

$$- N_x dy \frac{\partial W}{\partial x} + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx)(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx) dy.$$

Пренебрегая бесконечно малыми величинами выше второго порядка малости, окончательно запишем:

$$N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dxdy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} dxdy . \qquad (2.50)$$

Рассуждая точно так же, выражение для проекции нормальных сил N_y на ось *Oz* запишем в виде:

$$N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dxdy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} dxdy . \qquad (2.51)$$

Выражение для проекции перерезывающих сил N_{xy}, N_{yx} на ось *Oz* после исключения бесконечно малых порядка выше второго можно записать [11]:

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} dxdy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} dxdy . \qquad (2.52)$$

Сумма сил (2.50) – (2.52) выражается следующим образом:

$$N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\right) \frac{\partial W}{\partial x} dxdy + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\right) \frac{\partial W}{\partial y} dxdy. \qquad (2.53)$$

Учитывая уравнения (2.49), обратим в нуль выражения в скобках (2.53), сложим полученную поперечную силу с внешней поперечной нагрузкой *q*, действующей на элемент *dxdy* (рис. 2.7), и введем в правую часть уравнения (2.31) вместо *q:*

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(q + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right). \qquad (2.54)$$

Это уравнение вместе с граничными условиями (2.32), (2.33) или (2.34), (2.35) образует модель тонкой плиты, изгибаемой совместно поперечной нагрузкой и силами, действующими в ее срединной плоскости.

Данная модель применяется при расчете предварительно напряженных в одном и двух направлениях железобетонных плит. Если стержни предварительно напряженной арматуры расположены с эксцентриситетом относительно срединной поверхности, то ее влияние на изгиб сводится к суммарному воздействию сил предварительного натяжения в срединной поверхности и соответствующих моментов на краях.

2.6. Большие прогибы плиты

2.6.1. Гибкие плиты. Гибкой называют плиту, при расчете которой, наряду с чисто изгибными напряжениями, необходимо учитывать напряжения, равномерно распределенные по ее толщине. Обычно полагают, что максимальный прогиб гибких плит превышает 1/5 ее толщины [14].

Для исследования общего случая больших прогибов плиты воспользуемся уравнением (2.54), однако заметим при этом, что силы

N_x, N_y, N_{xy} зависят теперь не только от приложенных в плоскости *xOy* внешних сил, но также и от деформации срединной плоскости плиты, вызванной ее изгибом. При отсутствии объемных сил в плоскости *xOy* и внешней нагрузки *q*, действующей перпендикулярно к плоскости плиты, уравнения равновесия в плоскости *xOy* записываются в виде (2.49).

Третье уравнение, необходимое для определения трех функций, получим из рассмотрения деформации в срединной плоскости плиты при ее изгибе. Соответствующие выражения имеют вид [17]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2;$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}. \qquad (2.55)$$

Отсюда после приведения подобных получим:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \qquad (2.56)$$

После подстановки в (2.56) вместо компонентов деформации их выражений через напряжения (2.21)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{hE}(N_x - \mu N_y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{hE}(N_y - \mu N_x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{hG} N_{xy} \qquad (2.57)$$

получим третье уравнение системы. Ее решение существенно упрощается после ввода в рассмотрение функции напряжений *F(x, y)*. Уравнения (2.49) тождественно удовлетворяются, если принять

$$N_x = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\ \ N_y = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\ \ N_{xy} = -h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \qquad (2.58)$$

Если эти выражения подставить в уравнения (2.55), то компоненты деформации будут выражаться следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right);$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \qquad (2.59)$$

Подставив эти выражения в уравнение (2.56), получим:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right). \qquad (2.60)$$

Второе уравнение, необходимое для определения функций *F(x, y), W(x, y),* получим подстановкой выражений (2.58) в уравнение (2.54):

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} =$$

$$= \frac{h}{D}\left(\frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right). \qquad (2.61)$$

Уравнения (2.60), (2.61) совместно с граничными условиями определяют функции *F* и *W*. Зная функцию напряжений, с помощью выражений (2.58) можно определить напряжения в срединной поверхности плиты. Нормальные и касательные напряжения выражаются через функцию *F* с помощью формул (2.23) теории тонких плит.

Таким образом, исследование больших прогибов плиты сводится к исследованию нелинейной граничной задачи с дифференциальными уравнениями (2.60), (2.61), решение которых в общем виде до сих пор не получено.

2.6.2. Мембраны. Система уравнений равновесия. Мембраной принято называть плиту, прогибы которой в процессе деформации в 5 и более раз превышают толщину плиты. При расчете мембран можно пренебречь изгибными напряжениями, которые в данном случае пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями в срединной поверхности. Полагая в уравнении (2.61) *D*=0, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия мембраны:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{q}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right). \qquad (2.62)$$

2.6.3. Граничные условия. Рассмотрим граничные условия для общего случая изгиба гибкой прямоугольной плиты применительно к краю x=0, параллельному оси Oy.

Край свободно оперт, тогда $(W)_{x=0}$=0, $(M_x)_{x=0}$ =0.

Второе условие можно записать в виде:

$$(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2})_{x=0} = 0.$$

Край x=0 жестко защемлен. При этом

$$(W)_{x=0}=0;$$

$$(\frac{\partial^2 W}{\partial x})_{x=0} = 0.$$

Точки незагруженного края x=0 свободно смещаются вдоль оси Oz. В этом случае

$$V_x =0.$$

Давление V_x на подкрепляющее ребро определяют по формуле (2.34), отсюда

$$(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2})_{x=0} = 0.$$

Край x=0 оперт на упругое ребро. При этом должно быть

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = V_x,$$

или

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = -D(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}),$$

где EI – жесткость ребра по отношению к изгибу в вертикальной плоскости.

Точки незагруженного края x=0 свободно смещаются вдоль оси Oy. В этом случае напряжение σ_x вдоль края должно быть

$$(\sigma_x)_{x=0} \equiv (\frac{\partial^2 F}{\partial y^2})_{x=0} = 0.$$

Точки незагруженного края x=0 свободно смещаются вдоль оси Oy. При этом должно быть

$$(\tau)_{x=0} \equiv (\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y})_{x=0} = 0.$$

Края x=0, x=a закреплены так, что взаимное смещение их точек вдоль оси Ox исключено. Тогда должно соблюдаться условие

$$U_{x=a} - U_{x=0} = 0.$$

Согласно первой из зависимостей (2.55) имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon_x - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2,$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2.$$

2.7. Оболочки

2.7.1. К вопросу о классификации расчетных моделей оболочек. В теории упругости и технике оболочкой называют твердое тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с двумя другими размерами. Поверхность, которая делит пополам толщину оболочки, называют ее срединной поверхностью; в зависимости от очертания срединной поверхности рассматривают различные типы оболочек, в том числе цилиндрические, конические, тороидальные и др.

Оболочки могут быть постоянной и переменной толщины. В зависимости от структуры различают одно-, двух- и многослойные оболочки, в зависимости от материала – изотропные и анизотропные. Выполняются оболочки из железобетона, стали, дерева, легких сплавов, пластмасс и других строительных материалов.

Под воздействием внешних нагрузок в оболочках возникают внутренние усилия, равномерно распределенные по толщине (так называемые мембранные напряжения), и усилия изгиба, образующие в сечениях оболочки изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы.

Благодаря возникновению мембранных усилий в оболочках сочетается значительная жесткость и прочность со сравнительно малым весом, что выгодно отличает их от плит.

Если погрешностями изгиба при расчете оболочки пренебрегают ввиду их относительно малой величины, то такую расчетную модель называют безмоментной оболочкой, а теорию ее расчета – безмоментной теорией. Наличие моментов характерно для участков оболочки, примыкающих к краям (так называемый краевой эффект).

Оболочки принято делить на тонкие и толстые в зависимости от величины соотношения h/R (R – наименьший линейный размер срединной поверхности), тонкой считают оболочку если $h/R \prec 1/20$ [13]. Подавляющее большинство встречающихся в строительной практике оболочек имеют толщину, лежащую в диапазоне $1/1000 \prec h/R \prec 1/50$, т.е. принадлежат к числу

тонких оболочек. Поэтому именно теория тонких оболочек представляет наибольший практический интерес.

Параметры границы, разделяющей тонкие и толстые оболочки, являются условными. Если при определении напряженно-деформированного состояния оболочек допустить погрешность порядка 20…30%, то теорией тонких оболочек можно пользоваться даже при значениях h/R порядка 1/3, что в инженерной практике нередко и делают [13].

В основу теории тонких оболочек положены те же гипотезы, что и в теории тонких плит, в частности:

– любое прямое волокно, нормальное к срединной поверхности до деформации, остается прямым и нормальным к срединной поверхности и после деформации; при этом его длина остается неизменной;

– нормальными напряжениями в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности, можно пренебречь.

Указанные допущения позволяют, как и в теории тонких плит, свести трехмерную задачу теории упругости к двухмерной. Решение сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка при граничных условиях, определяемых характером сопряжения оболочек с другими частями сооружений. Если в расчетах прогибы могут считаться малыми по сравнению с толщиной, то все соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния и основные дифференциальные уравнения остаются линейными, в противном случае, как и при больших прогибах плит, приходится иметь дело с нелинейной задачей.

В практике проектирования и эксплуатации оболочек весьма важным является обеспечение их устойчивости. Специфическая особенность тонкостенных оболочек – потеря устойчивости хлопком, или, иначе, прощелкиванием, выражающаяся в резком переходе от одного устойчивого равновесного состояния к другому. Такой переход наступает при различных нагрузках в зависимости от исходных несовершенств формы, начальных напряжений и т.д. В случаях прощелкивания прогибы оказываются соразмерными с толщиной оболочек; анализ их поведения должен основываться теперь на нелинейных уравнениях.

Безмоментная теория расчета дает достаточно точное представление о напряженно-деформированном состоянии оболочек в случаях, когда пренебрежимо мала их жесткость при изгибе либо когда можно пренебречь изменением кривизны и кручением срединной поверхности. В первом случае имеет место равновесие абсолютно гибкой оболочки (мембраны), во втором – безмоментное напряженное состояние конструкции, обладающей конечной жесткостью на изгиб. Хотя для решения задач данного типа применяется одна и та же теория, каждая из них имеет специфические особенности.

Так, абсолютно гибкая оболочка, например матерчатая, совершенно не воспринимает сжимающие усилия; всякое сколь угодно малое сжатие немедленно вызовет потерю устойчивости ее формы. Поэтому при конструировании оболочек такого типа должны быть обеспечены условия, при которых усилия во всех сечениях должны быть растягивающими.

Оболочки с конечной жесткостью могут находиться в безмоментном напряженном состоянии при возникновении в них как растягивающих, так и сжимающих напряжений. Потерять устойчивость они могут только после того как сжимающие напряжения в них превзойдут некоторые критические значения. Если для абсолютно гибких оболочек безмоментное напряженное состояние является единственно возможным, то для оболочек конечной жесткости такое напряженное состояние является только одним из возможных напряженных состояний и для его возникновения необходимо выполнение ряда условий, связанных с формой оболочки, характером действующей на нее нагрузки и закрепления ее краев.

Именно свойство оболочек воспринимать действующую на них нагрузку без изгиба определяет их преимущество по сравнению с плитами и все более широкое применение, которое они получают в строительстве. Следует подчеркнуть, что понятие безмоментного напряженного состояния не обязательно связано с большой гибкостью оболочки. Даже толстая оболочка при соблюдении надлежащих условий может работать в безмоментном напряженном состоянии в том смысле, что напряжения изгиба в ней будут во много раз меньше сжимающих напряжений, равномерно распределенных по толщине.

Расчет тонких оболочек в общей постановке часто связан с существенными математическими трудностями, поэтому стремятся к упрощению расчетной модели на основе учета тех или иных особенностей рассматриваемой конструкции. Так, в частности, модель существенно упрощается при расчете широко применяемых в строительстве пологих оболочек. К конструкциям такого типа относят оболочки при условии, что в каждой точке ее срединной поверхности выполняются условия [13]

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2 \le 1,\ (\frac{\partial z}{\partial y})^2 \le 1,$$

где $z=z(x,y)$ – уравнение поверхности в декартовой системе координат.

Упрощающие гипотезы, вводимые в теорию пологих оболочек, считают вполне допустимыми при условии $a/f \ge 5$ [19], где f – стрела подъема оболочки, a – наименьший ее размер в плане.

В настоящее время применяется большое число различных типов оболочек, различающихся формой, структурой, материалом, характером загружения. Здесь ограничимся рассмотрением основных соотношений и уравнений теории тонких оболочек в общей постановке.

2.7.2. Геометрия оболочки. Обычно оболочку описывают, задавая ее срединную поверхность, граничный контур этой поверхности и толщину. Считают, что боковая поверхность образуется отрезком нормали к срединной поверхности, движущейся вдоль граничного контура. Тогда задание срединной поверхности, ее граничного контура и толщины оболочки полностью определяет геометрию оболочки [16].

Срединную поверхность относят к криволинейным координатам α, β, задавая ее векторным равенством (рис. 2.8)

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta). \tag{2.63}$$

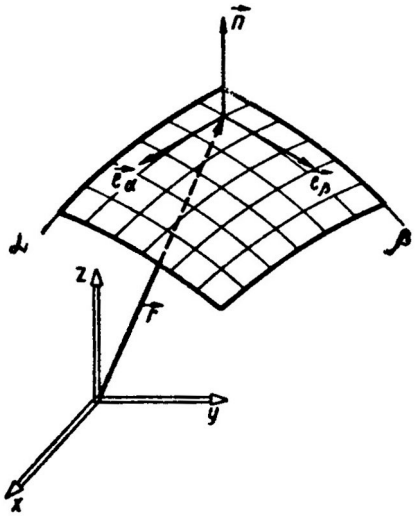


Рис. 2.8. К определению срединной поверхности оболочки

Введены единичные векторы – орты $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{n},$ первые два из которых касательны к координатным линиям α и β, а $\vec{n}$ – вектор единичной нормали к срединной поверхности. Для ортогональных координат

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha};\ \vec{e}_\beta = \frac{1}{B}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta};\ \vec{n} = [\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta], \tag{2.64}$$

где

$$A = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\right|;\ B = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}\right| \tag{2.65}$$

так называемые параметры Ламе, являющиеся масштабными множителями в формулах

$$ds_\alpha = Ad\alpha; ds_\beta = Bd\beta, \tag{2.66}$$

связывающих приращения криволинейных координат с приращениями дуг соответствующих координатных линий.

Искривленность срединной поверхности характеризуется значениями радиусов нормальной кривизны $R_\alpha, R_\beta, R_{\alpha\beta}$. Первый из них является радиусом плоской кривой, образующейся пересечением срединной поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности и касательной к линии. Второй, соответственно, является радиусом нормального сечения в направлении второй координатной линии. Введенные величины связаны с радиусом-вектором срединной поверхности и ортом нормали соотношениями

$$\frac{1}{R_\alpha} = -\vec{n}\frac{\partial^2\vec{r}}{A\partial\alpha A\partial\alpha};\ \frac{1}{R_{\alpha\beta}} = \vec{n}\frac{\partial^2\vec{r}}{A\partial\alpha B\partial\beta};\ \frac{1}{R_\beta} = -\vec{n}\frac{\partial^2\vec{r}}{B\partial\beta B\partial\beta}. \qquad (2.67)$$

Координатные линии, в которых $\frac{1}{R_{\alpha\beta}} = 0,$ называют линиями главных кривизн.

С радиусами кривизны связана очень важная для понимания характера работы оболочки величина

$$K = \frac{1}{R_\alpha R_\beta} - \frac{1}{R^2{}_{\alpha\beta}}, \qquad (2.68)$$

называемая гауссовой кривизной срединной поверхности. Примером оболочки, имеющей во всех своих точках положительную гауссову кривизну, может служить сферическая оболочка, нулевую – цилиндрическая и коническая, отрицательную – седлообразная. Встречаются оболочки и смешанной кривизны, например торообразная.

Радиусы кривизны и параметры Ламе связаны между собой соотношениями Кодацци–Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_\beta}\right) + \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B^2}{R_{\alpha\beta}}\right) = \frac{1}{R_\beta}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta};$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_\beta}\right) + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A^2}{R_{\alpha\beta}}\right) = \frac{1}{R_\alpha}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha};$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) = -AB\left(\frac{1}{R_\alpha R_\beta} - \frac{1}{R^2{}_{\alpha\beta}}\right). \qquad (2.69)$$

Если граничный контур не совпадает с координатной линией и внешняя нормаль к нему составляет с координатной линией (α) некоторый угол ω, то для направлений, характеризуемых так называемой

тангенциальной нормалью $\vec{\nu}$ и касательной к контуру $\vec{t}$ (рис. 2.9), кривизны (величины, обратные радиусам кривизн) вычисляют по формулам

$$\frac{1}{R_\nu}=\frac{\cos^2\omega}{R_\alpha}-\frac{2\sin\omega\cos\omega}{R_{\alpha\beta}}+\frac{\sin^2\omega}{R_\beta};$$

$$\frac{1}{R_{\nu t}}=\sin\omega\cos\omega\left(\frac{1}{R_\alpha}-\frac{1}{R_\beta}\right)+\frac{\cos^2\omega-\sin^2\omega}{R_{\alpha\beta}};$$

$$\frac{1}{R_t}=\frac{\sin^2\omega}{R_\alpha}+\frac{2\sin\omega\cos\omega}{R_{\alpha\beta}}+\frac{\cos^2\omega}{R_\beta}. \qquad (2.70)$$

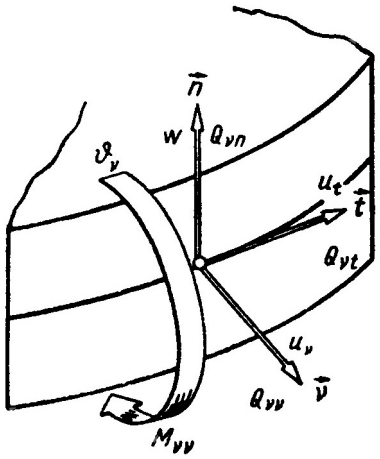


Рис. 2.9. К определению кривизн оболочки при не совпадении граничного контура с координатной линией

2.7.3. Деформация оболочки. В линейной теории оболочек рассматривают перемещения, малые по сравнению с толщиной. Определяют положение точки в оболочке ее расстоянием от срединной поверхности по нормали (ζ) и координатами основания нормали (α,β). В рассмотрение введен вектор смещения точек срединной поверхности

$$\vec{V}=U\vec{e}_\alpha+V\vec{e}_\beta+W\vec{n} \qquad (2.71)$$

и вектор смещения произвольной точки оболочки

$$\vec{V}^\zeta=U^\zeta\vec{e}_\alpha+V^\zeta\vec{e}_\beta+W^\zeta\vec{n}. \qquad (2.72)$$

Как уже отмечалось выше, при рассмотрении деформации тонкой оболочки принимают первую (кинематическую) гипотезу Кирхгофа, согласно которой волокно, нормальное к срединной поверхности до деформации, остается нормальным к деформированной срединной поверхности, не меняя

при этом своей длины. На основе этой гипотезы установлена связь между смещениями рассматриваемой точки оболочки и соответствующей ей точки срединной поверхности:

$$U^{\zeta} = U + \zeta\theta_{\alpha};\ V^{\zeta} = V + \zeta\theta_{\beta};\ W^{\zeta} = W, \tag{2.73}$$

здесь θ_{α} и θ_{β} обозначены два из четырех углов (рис. 2.10), описывающих поворот в процессе деформации касательных к координатным линиям.

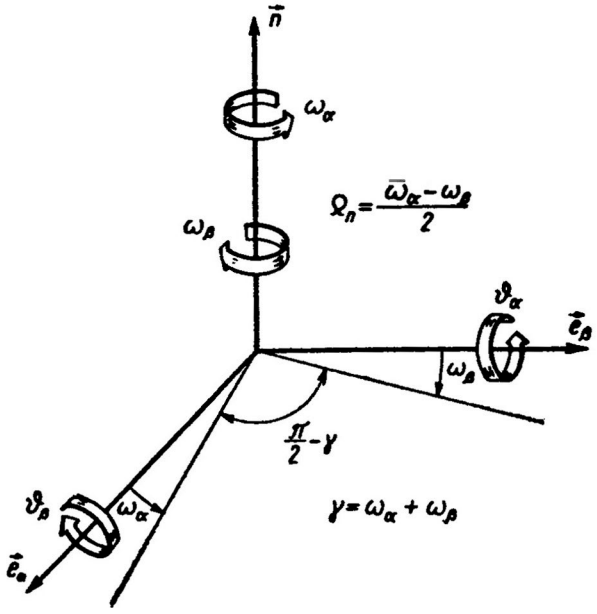


Рис. 2.10. К вопросу установления связи между смещениями точки оболочки и соответствующей ей точки срединной поверхности

При этом

$$\theta_{\alpha} = -\frac{\partial W}{A\partial\alpha} + \frac{U}{R_{\alpha}} - \frac{V}{R_{\alpha\beta}};$$

$$\theta_{\beta} = -\frac{\partial W}{B\partial\beta} + \frac{V}{R_{\beta}} - \frac{U}{R_{\alpha\beta}};$$

$$\omega_{\alpha} = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}U - \frac{W}{R_{\alpha\beta}};$$

$$\omega_{\beta} = \frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v - \frac{W}{R_{\alpha\beta}}. \tag{2.74}$$

Величина

$$\Omega_n = \frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{2} = \frac{1}{2AB}\left(\frac{\partial BV}{\partial \alpha} - \frac{\partial AU}{\partial \beta}\right) \tag{2.75}$$

выражает средний поворот окрестности рассматриваемой точки срединной поверхности вокруг нормали к срединной поверхности.

Деформацию же срединной поверхности описывают шесть компонентов деформации

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}V + \frac{W}{R_\alpha};$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}U + \frac{W}{R_\beta};$$

$$\gamma = \omega_\alpha + \omega_\beta = \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{V}{B}\right) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{U}{A}\right) - \frac{2W}{R_{\alpha\beta}};$$

$$\chi_\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\theta_\beta - \frac{\Omega_n}{R_{\alpha\beta}};$$

$$\chi_\beta = \frac{1}{B}\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\theta_\alpha + \frac{\Omega_n}{R_{\alpha\beta}};$$

$$\tau = \tau_\beta + \frac{\omega_\alpha}{R_\beta} + \frac{\varepsilon_\beta}{R_{\alpha\beta}} = \tau_\alpha + \frac{\omega_\beta}{R_\alpha} + \frac{\varepsilon_\alpha}{R_{\alpha\beta}};$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\theta_\alpha;$$

$$\tau_\beta = \frac{1}{B}\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\theta_{\beta.} \tag{2.76}$$

Величины $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \gamma$ обычно называют компонентами тангенциальной деформации. При этом величины ε_α и ε_β выражают относительные удлинения волокон, совпадающие с координатными линиями α и β соответственно; величина γ характеризует сдвиг срединной поверхности, т.е. уменьшение первоначально прямого угла между координатными линиями. Компоненты изгибной деформации χ_α, χ_β описывают изгиб срединной поверхности, а τ – ее скручивание в процессе деформации.

Компоненты деформации не являются независимыми величинами, а должны удовлетворять уравнениям неразрывности срединной поверхности:

$$\frac{\partial B\chi_\beta}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial A\tau}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\chi_\alpha-\frac{1}{R_\alpha}(\frac{\partial B\varepsilon_\beta}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial A^2\frac{\gamma}{2}}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_\alpha)+$$

$$+\frac{1}{R_{\alpha\beta}}(\frac{\partial A\varepsilon_\alpha}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B^2\frac{\gamma}{2}}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_\beta)+\frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{A}{R_\alpha}\frac{\gamma}{2}+\frac{A}{R_{\alpha\beta}}\varepsilon_\alpha)+$$

$$+\frac{\partial A}{\partial\beta}(\frac{1}{R_\beta}\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{R_{\alpha\beta}}\varepsilon_\beta)=0;$$

$$\frac{\partial A\chi_\alpha}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B^2\tau}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\chi_\beta-\frac{1}{R_\beta}(\frac{\partial A\varepsilon_\alpha}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B^2\frac{\gamma}{2}}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_\beta)+$$

$$+\frac{1}{R_{\alpha\beta}}(\frac{\partial B\varepsilon_\beta}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial A^2\frac{\gamma}{2}}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_\alpha)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{B}{R_\beta}\frac{\gamma}{2}+\frac{B}{R_{\alpha\beta}}\varepsilon_\beta)+$$

$$+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(\frac{1}{R_\alpha}\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{R_{\alpha\beta}}\varepsilon_\alpha)=0;$$

$$\frac{\chi_\beta}{R_\alpha}+\frac{2\tau}{R_{\alpha\beta}}+\frac{\chi_\alpha}{R_\beta}+\frac{1}{AB}(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}(\frac{\partial B\varepsilon_\beta}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial A^2\frac{\gamma}{2}}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_\alpha)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}(\frac{\partial A\varepsilon_\alpha}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B^2\frac{\gamma}{2}}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_\beta))-$$

$$-\frac{1}{R_{\alpha\beta}}((\frac{1}{R_\alpha}+\frac{1}{R_\beta})\frac{\gamma}{2}+\frac{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta}{R_{\alpha\beta}})=0, \qquad (2.77)$$

выведенным из условия, что элемент срединной поверхности деформируется как неразрывная часть всей оболочки.

Перемещения точек граничного элемента оболочки (рис. 2.11) позволяют определить вектор смещений точек граничного контура

$$\vec{U}=U_\nu\vec{\nu}+U_t\vec{t}+W\vec{n} \qquad (2.78)$$

и угол поворота граничного элемента вокруг касательной к граничному контуру ϑ_ν.

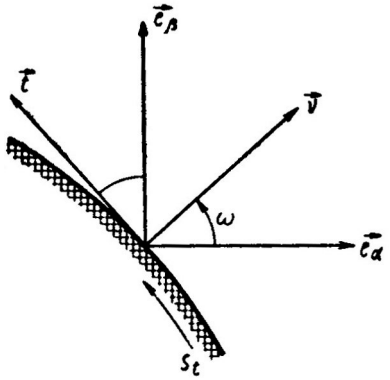


Рис. 2.11. Перемещения точек граничного элемента оболочки

При этом

$$U_\nu = U\cos\omega + V\sin\omega;\ U_t = -U\sin\omega + V\cos\omega; \tag{2.79}$$

$$U_\nu = U\cos\omega + V\sin\omega;\ U_t = -U\sin\omega + V\cos\omega, \tag{2.80}$$

где $\frac{\partial}{\partial s_\nu} = \frac{\cos\omega}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\sin\omega}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$ – производная по нормали к граничному контуру.

Деформация граничного элемента определяется четырьмя компонентами деформации

$$\vec{\chi}_t = -\chi_{tt}\vec{v} + \chi_{t\nu}\vec{t} - \chi_{tn}\vec{n}; \tag{2.81}$$

$$\chi_{tt} = \cos^2\omega\chi_\beta - 2\sin\omega\cos\omega\tau + \sin^2\omega\chi_\alpha +$$
$$+ \sin\omega\cos\omega\left(\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta}\right)\frac{\gamma}{2} + \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta}{R_{\alpha\beta}}\right) - \frac{\varepsilon_{t\nu}}{R_\nu}; \tag{2.82}$$

$$\chi_{t\nu} = \sin\omega\cos\omega(\chi_\beta - \chi_\alpha) + (\cos^2\omega - \sin^2\omega)\tau + \left(\frac{\sin^2\omega}{R_\alpha} - \frac{\cos^2\omega}{R_\beta}\right)\frac{\gamma}{2} -$$
$$- \frac{\cos^2\omega\varepsilon_\beta - \sin^2\omega\varepsilon_\alpha}{R_{\alpha\beta}} - \frac{\varepsilon_{t\nu}}{R_t};$$

$$\chi_{tn} = -\frac{\cos\omega}{AB}\left(\frac{\partial B\varepsilon_\beta}{\partial\alpha} - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A^2\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_\alpha\right) -$$

$$-\frac{\sin\omega}{AB}\left(\frac{\partial A\varepsilon_\alpha}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B^2\frac{\gamma}{2})-\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_\beta\right)+\frac{\partial\varepsilon_{tv}}{\partial s_l};$$

$$\varepsilon_{tt}=\cos^2\omega\varepsilon_\beta-\sin\omega\cos\omega\gamma+\sin^2\omega\varepsilon_{\alpha,}$$

где

$$\varepsilon_{tv}=\sin\omega\cos\omega(\varepsilon_\beta-\varepsilon_\alpha)+(\cos^2\omega-\sin^2\omega)\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial s_l}=-\frac{\sin\omega}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\cos\omega}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$$

производная вдоль граничного контура; ε_{tt} – относительное удлинение граничного контура (рис.2.11); χ_{tt} – искривление граничного элемента в своей плоскости; χ_{tn} – искривление из плоскости; χ_{tv} – скручивание граничного элемента.

2.7.4. Уравнения равновесия. Компоненты напряженного состояния на границе. В теории тонких оболочек напряжения, действующие в нормальных сечениях, заменяют статически эквивалентной системой усилий и моментов, приложенных к срединной поверхности. В результате полагают, что в срединной поверхности действуют следующие внешние силовые факторы:

– поверхностная нагрузка (в расчете на единицу площади)

$$\vec{q}=q_\alpha\vec{e}_\alpha+q_\beta\vec{e}_\beta+q_n\vec{n};\qquad(2.83)$$

– краевые усилия

$$\vec{T}^{(v)}=T_{vv}\vec{v}+T_{vt}\vec{t}+T_{vn}\vec{n};\qquad(2.84)$$

– краевые моменты

$$\vec{M}^{(v)}=M_{vv}\vec{t}-M_{vt}\vec{v}.\qquad(2.85)$$

В каждом нормальном сечении оболочки, проведенном в направлении координатной линии, внешняя нагрузка уравновешивается системой усилий и моментов (в расчете на единицу длины координатной линии):

$$\vec{T}^{(\alpha)}=N_\alpha\vec{e}_\alpha+T_{\alpha\beta}\vec{e}_\beta+Q_\alpha\vec{n};\ \vec{M}^{(\alpha)}=M_\alpha\vec{e}_\beta-M_{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha;$$

$$\vec{T}^{(\beta)}=N_\beta\vec{e}_\beta+T_{\beta\alpha}\vec{e}_\alpha+Q_\beta\vec{n};\ \vec{M}^{(\beta)}=M_{\beta\alpha}\vec{e}_\beta-M_\beta\vec{e}_\alpha.\qquad(2.86)$$

Усилия N_α,N_β,T_{vv} называют нормальными, $T_{\alpha\beta},T_{\beta\alpha},T_{vt}$ – сдвигающими, а Q_α,Q_β,T_{vn} – перерезывающими, M_α,M_β,M_{vv} – изгибающими, а $M_{\alpha\beta},M_{\beta\alpha},M_{vt}$ – скручивающими моментами.

Положительные направления введенных компонентов напряженно-деформированного состояния показаны на рис. 2.12.

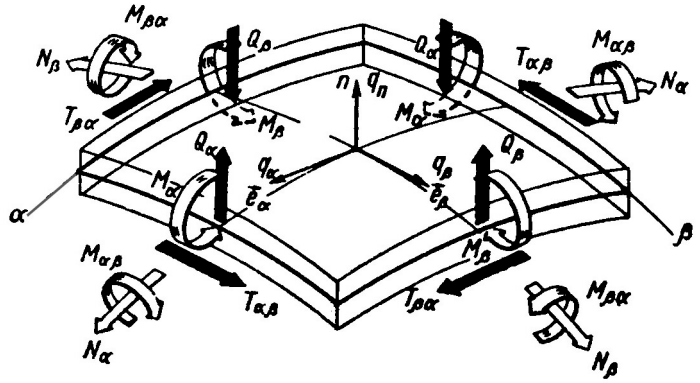


Рис. 2.12. Положительные направления компонентов напряженно-деформированного состояния оболочки

Приравнивая нулю главный вектор и главный момент всех действующих на элемент срединной поверхности силовых факторов, получим два векторных уравнения равновесия

$$\frac{\partial B\vec{T}^{(\alpha)}}{\partial\alpha}+\frac{\partial A\vec{T}^{(\beta)}}{\partial\beta}+AB\vec{q}=0; \tag{2.87}$$

$$\frac{\partial B\vec{M}^{(\alpha)}}{\partial\alpha}+\frac{\partial A\vec{M}^{(\beta)}}{\partial\beta}+(Q_\beta\vec{e}_\alpha-Q_\alpha\vec{e}_\beta+(T_{\alpha\beta}-T_{\beta\alpha})\vec{n})AB=0, \tag{2.88}$$

равносильные шести скалярным, из которых шестое уравнение

$$T_{\alpha\beta}-T_{\beta\alpha}+\frac{M_{\beta\alpha}}{R_\alpha}-\frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta}+\frac{M_\alpha-M_\beta}{R_{\alpha\beta}}=0 \tag{2.89}$$

не включает дифференциальные операторы и, как показано в работе [2], фактически выражает условие симметричности напряжений $(\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{\beta\alpha})$.

Учитывая симметрию компонентов напряженного состояния и исключая из остальных пяти скалярных уравнений перерезывающие усилия Q_α и Q_β, получим систему уравнений равновесия

$$\frac{\partial BN_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial A^2T}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}N_\beta+\frac{1}{R_a}(\frac{\partial BM_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial A^2H}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_\beta)-$$

$$-\frac{1}{R_{\alpha\beta}}(\frac{\partial AM_\beta}{\partial\beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial B^2H}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_\alpha)+\frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{A}{R_\alpha}H-\frac{A}{R_{\alpha\beta}}M_\beta)+$$

$$+\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{1}{R_\beta}H-\frac{1}{R_{\alpha\beta}}M_\alpha\right)+ABq_\alpha=0;$$

$$\frac{\partial AN_\beta}{\partial \beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial B^2T}{\partial \alpha}-\frac{\partial A}{\partial \beta}N_\alpha+\frac{1}{R_\beta}\left(\frac{\partial AM_\beta}{\partial \beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial B^2H}{\partial \alpha}-\frac{\partial A}{\partial \beta}M_\alpha\right)-$$

$$-\frac{1}{R_{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial BM_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial A^2H}{\partial \beta}-\frac{\partial B}{\partial \alpha}M_\beta\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{R_\beta}H-\frac{B}{R_{\alpha\beta}}M_\alpha\right)+$$

$$+\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{R_\alpha}H-\frac{1}{R_{\alpha\beta}}M_\beta\right)+ABq_\beta=0;$$

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha}-\frac{2T}{R_{\alpha\beta}}+\frac{N_\beta}{R_\beta}-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial BM_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial A^2H}{\partial \beta}-\frac{\partial B}{\partial \alpha}M_\beta\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial AM_\beta}{\partial \beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial B^2H}{\partial \alpha}-\frac{\partial A}{\partial \beta}M_\alpha\right)\right)+\frac{1}{R_{\alpha\beta}}\left(-\left(\frac{1}{R_\alpha}+\frac{1}{R_\beta}\right)H+\right.$$

$$\left.+\frac{M_\alpha+M_\beta}{R_{\alpha\beta}}\right)=q_n. \qquad (2.90)$$

В соответствии с выражениями (2.84), (2.85) на краю оболочки должны быть заданы пять компонентов $T_{\nu\nu}, T_{\nu\tau}, T_{\nu n}, M_{\nu\nu}, M_{\nu\tau}$. Однако порядок системы дифференциальных уравнений теории оболочек (восьмой) позволяет удовлетворить лишь четырем условиям на каждом краю. Поэтому в теории тонких оболочек систему усилий – моментов заменяют статически ей эквивалентной системой четырех приведенных обобщенных усилий (рис. 2.11)

$$Q_{\nu\nu}=T_{\nu\nu}-\frac{M_{\nu\tau}}{R_{\nu\tau}};\ Q_{\nu\tau}=T_{\nu\tau}+\frac{M_{\nu\tau}}{R_t};\ Q_{\nu\tau}=T_{\nu n}+\frac{\partial M_{\nu\tau}}{\partial s_t};\ M_{\nu\nu}, \qquad (2.91)$$

здесь

$$\frac{\partial}{\partial s_t}=-\frac{\sin\omega}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}+\frac{\cos\omega}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Через компоненты на краю оболочки эти обобщенные усилия выражаются:

$$\vec{Q}_\nu=Q_{\nu\nu}\vec{\nu}+Q_{\nu\tau}\vec{t}+Q_{\nu n}\vec{n};$$

$$Q_{\nu\nu}=\cos^2\omega N_\alpha+2\sin\omega\cos\omega T+\sin^2\omega N_\beta+$$

$$+\sin\omega\cos\omega((\frac{1}{R_\alpha}+\frac{1}{R_\beta})H-\frac{M_\alpha-M_\beta}{R_{\alpha\beta}})-\frac{M_{\nu t}}{R_{\nu t}};$$

$$Q_{\nu t}=\sin\omega\cos\omega(N_\beta-N_\alpha)+(\cos^2\omega-\sin^2\omega)T+(\frac{\cos^2\omega}{R_\beta}-\frac{\sin^2\omega}{R_\alpha})H+$$

$$+\frac{\sin^2\omega M_\beta-\cos^2\omega M_\alpha}{R_{\alpha\beta}}+\frac{M_{\nu t}}{R_t};$$

$$Q_{\nu n}=\frac{\cos\omega}{AB}(\frac{\partial BM_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial A^2H}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_\beta)+$$

$$+\frac{\sin\omega}{AB}(\frac{\partial AM_\beta}{\partial\beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial B^2H}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_\alpha)+\frac{\partial M_{\nu t}}{\partial s_t};$$

$$M_{\nu\nu}=\cos^2\omega M_\alpha+2\sin\omega\cos\omega H+\sin^2\omega M_\beta;$$

$$M_{\nu t}=(\cos^2\omega-\sin^2\omega)H+\sin\omega\cos\omega(M_\beta-M_\alpha).$$

На границе, совпадающей с координатной линией β, $\omega=0$; на границе, совпадающей с линией α, $\omega=\frac{\pi}{2}$.

Тангенциальные напряжения, равномерно распределенные по толщине оболочки (называемые также цепными или мембранными) выражаются:

$$\sigma_\alpha^{(p)}=\frac{N_\alpha}{h};\ \sigma_{\alpha\beta}^{(p)}=\frac{T}{h};\ \sigma_\beta^{(p)}=\frac{N_\beta}{h}.$$

Изгибные (линейно меняющиеся по толщине) напряжения вычисляют по формулам

$$\sigma_\alpha^{(u)}=\frac{6M_\alpha}{h^2};\ \sigma_{\alpha\beta}^{(u)}=\frac{6H}{h^2};\ \sigma_\beta^{(u)}=\frac{6M_\beta}{h^2}.$$

Суммарные напряжения на расстоянии ζ от срединной поверхности вычисляют по формулам

$$\sigma_\alpha=\sigma_\alpha^{(p)}+\frac{\zeta}{0{,}5h}\sigma_\alpha^{(u)};\ \sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\beta}^{(p)}+\frac{\zeta}{0{,}5h}\sigma_{\alpha\beta}^{(u)};$$

$$\sigma_\beta=\sigma_\beta^{(p)}+\frac{\zeta}{0{,}5h}\sigma_\beta^{(u)}.$$

Связь между компонентами деформации и усилиями-моментами могут быть выражены формулами [16]

$$N_\alpha = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta);\ M_\alpha = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\chi_\alpha + \mu\chi_\beta);$$

$$N_\beta = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\beta + \mu\varepsilon_\alpha);\ M_\beta = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\chi_\beta + \mu\chi_\alpha);$$

$$T = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma;\ H = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\tau. \qquad (2.92)$$

2.7.5. Граничные условия. Рассмотрим математические модели наиболее часто применяемых при конструировании тонких оболочек типов закрепления краев [13]:

Шарнирно неподвижное закрепление

$$M_{\nu\nu} = 0;\ U_\nu = U_t = W = 0.$$

Жесткий край (в отличие от абсолютно заделанного жесткий край может смещаться как жесткое целое)

$$\chi_{tt} = \chi_{t\nu} = \chi_{tn} = 0;\ \varepsilon_{tt} = 0.$$

Абсолютно заделанный край

$$U_\nu = U_t = W = 0;\ \vartheta_\nu = 0.$$

Свободный край

$$Q_{\nu\nu} = Q_{\nu t} = Q_{\nu n} = 0;\ M_{\nu\nu} = 0.$$

Шарнирный, свободный в нормальном направлении край

$$M_{\nu\nu} = 0;\ Q_{\nu n} = 0;\ U_\nu = U_t = 0.$$

Упругоподатливый край

$$Q_{\nu\nu} = -\frac{\partial R}{\partial U_\nu};\ Q_{\nu t} = -\frac{\partial R}{\partial U_t};\ Q_{\nu n} = -\frac{\partial R}{\partial W};\ M_{\nu\nu} = -\frac{\partial R}{\partial \vartheta_\nu},$$

где так называемый потенциал обобщенных краевых сил R выражается формулой

$$R = \frac{1}{2}(a_{11}U_\nu{}^2 + 2a_{12}U_\nu U_t + 2a_{13}U_\nu W + 2a_{14}U_\nu\vartheta_\nu + a_{22}U_t{}^2 +$$
$$+ 2a_{23}U_t W + 2a_{24}U_t\vartheta_\nu + + a_{33}W^2 + 2a_{34}W\vartheta_\nu + a_{44}\vartheta_\nu{}^2).$$

2.7.6. Безмоментная теория тонких оболочек. Система дифференциальных уравнений (2.90) может служить исходной при формировании целого ряда упрощенных моделей тонких оболочек. Так, если

принять равными нулю моменты, то данная система преобразуется в уравнения безмоментной теории

$$\frac{\partial BN_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial A^2T}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}N_\beta=-ABq_\alpha;$$

$$\frac{\partial AN_\beta}{\partial\beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial B^2T}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}N_\alpha=-ABq_\beta;$$

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha}-2\frac{T}{R_{\alpha\beta}}+\frac{N_\beta}{R_\beta}=q_{n.} \qquad (2.93)$$

Система (2.93) включает безмоментные усилия, связь между ними и перемещениями определяет следующая система дифференциальных уравнений безмоментной теории:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}V+\frac{1}{R_\alpha}W=\frac{1}{Eh}(N_\alpha-\mu N_\beta);$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}U+\frac{1}{R_\beta}W=\frac{1}{Eh}(N_\beta-\mu N_\alpha);$$

$$\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{V}{B})+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{U}{A})-\frac{2}{R_{\alpha\beta}}W=\frac{2(1+\mu)}{Eh}T. \qquad (2.94)$$

При расчете оболочек на основе безмоментной теории вначале определяют усилия решением системы (2.93) и соответствующих граничных условий, а затем, после подстановки теперь уже известных функций N_α, N_β, T в систему (2.94), определяют перемещения.

Так как в безмоментной теории значения моментов и перерезывающих сил полагают пренебрежимо малыми, то соответствующие упрощения введены также и в граничные условия, т.е. принято, что $M_{\nu\nu}=0$ и $Q_{\nu n}=0$. Отсюда следует, что в рамках безмоментного решения на краю оболочки можно задавать лишь по одной величине из каждой пары обобщенная сила – обобщенное смещение $Q_{\nu\nu}, u_\nu$; $Q_{\nu t}, u_t$. Системы (2.93), (2.94) содержат производные до второго порядка включительно, решением первой из них являются две произвольные функции, и такой произвол может быть единственным образом определен, если оба граничных условия соответствующей задачи включают усилия. В противном случае, вводя в решение системы (2.94) две произвольные функции, в итоге получим еще две, а это значит, что задача расчета оболочки на основе безмоментной теории имеет единственное решение, если из четырех граничных условий два обязательно являются геометрическими, т.е. накладывают те или иные ограничения на смещения. В противном случае решение окажется

неопределенным, что соответствует случаю, когда оболочка не закреплена и ведет себя не как несущая конструкция, а как механизм, перемещающийся тем или иным образом в пространстве.

По сравнению с более общей постановкой задачи о напряженно-деформированном состоянии тонкой оболочки безмоментная теория является, естественно, приближенной и в ряде случаев может привести к существенным погрешностям.

Так, весьма существенными могут быть погрешности в зонах резкого или скачкообразного изменения величин, характеризующих геометрию оболочки и внешнюю нагрузку $R_\alpha, R_\beta, R_{\alpha\beta}, h, q_\alpha, q_\beta, q_n$. Значительные изгибающие моменты возникают в местах изменения знака гауссовой кривизны поверхности оболочки; на очень пологих ее участках нормальная к срединной поверхности нагрузка вызывает появление больших изгибающих напряжений.

В целом практика проектирования и теоретический анализ позволили сформулировать следующие критерии безмоментности напряженного состояния оболочки, определяющие область эффективного применения безмоментной теории [13]:

– края оболочки должны быть свободными от действия моментов и перерезывающих сил, а их перемещения (повороты и нормальные прогибы) не должны быть стеснены. С этой целью должны быть предусмотрены надлежащие бортовые подкрепления;

– при проектировании оболочки необходимо обеспечить плавное изменение радиусов кривизны, граничного контура, толщины, компонентов поверхностной и краевой нагрузок, следует избегать применения оболочек со срединной поверхностью, меняющей знак гауссовой кривизны, и содержащих очень пологие или плоские участки;

– краев оболочки с большими незакрепленными участками и очень длинных оболочек следует при проектировании избегать.

Безмоментному напряженному состоянию оболочек здесь уделено повышенное внимание, так как вследствие равномерного нагружения материала по всей их толщине оно является технически наиболее выгодным. В тех же случаях, когда сформулированные выше условия полностью выполнены быть не могут в силу специального назначения проектируемой конструкции, технологии, габаритов, экономических соображений и т.п., выбором соответствующей геометрии оболочки и бортовых подкреплений удается обычно добиться работы основной ее части в безмоментном напряженном состоянии. Моментные же напряжения локализуются при этом в узкой зоне, примыкающей к краю; в результате получают тот тип напряженного состояния оболочки, который называется краевым эффектом. Оболочку считают удачно сконструированной с точки зрения прочностных

расчетов, если напряжения краевого эффекта по величине не превосходят безмоментных напряжений.

2.7.7. Пологие оболочки. После соответствующих упрощений, учитывающих характерные особенности пологих оболочек, система (2.90) может быть сведена к системе двух уравнений

$$\frac{1}{Eh}\Delta\Delta(\Phi)+D(w)=0;$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\Delta\Delta(w)-D(\Phi)=q_n.$$

Здесь

$$\Delta=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right);$$

$$D=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{AR_\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{R_{\alpha\beta}}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{R_{\alpha\beta}}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{BR_\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\right).$$

При этом усилия определяют по формулам

$$N_\alpha=-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha};$$

$$N_\beta=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta};$$

$$T=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right),$$

а моменты – по соотношениям (2.92), в которых компоненты изгибных деформаций необходимо выражать следующим образом:

$$\chi_\alpha=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial\alpha}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial\beta};$$

$$\chi_\beta=-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial\alpha};$$

$$\tau=-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial W}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial W}{\partial\beta}\right),$$

в которых опущены слагаемые, зависящие от тангенциальных смещений U и V.

2.8. Стержни

Стержень – тело, один из размеров которого существенно больше двух других. В современной строительной практике тела, математическая модель которых может быть сведена к стержневой, используются в роли самостоятельных несущих или вспомогательных элементов сооружений (балки, подвески, колонны) или входят в состав более сложных плоских и пространственных конструкций (фермы, рамы и пр.). Здесь рассмотрим так называемые призматические стержни с прямой осью, т.е. стержни, у которых все поперечные сечения одинаковы и центры их тяжести лежат на одной прямой, называемой осью стержня.

Всякое сложное напряженно-деформированное состояние может быть представлено как комбинация четырех основных его типов:

– осевое растяжение или сжатие;
– изгиб;
– кручение;
– сдвиг (перерезывание).

2.8.1. Осевое растяжение или сжатие. Рассмотрим случай, когда к концам стержня из однородного материала с модулем упругости *E,* длиной l и площадью поперечного сечения *F* приложены растягивающие или сжимающие (обозначим сжатие знаком «минус») силы *P*. В сечениях, удаленных от концов стержня на расстояния порядка его поперечных размеров, напряжения в соответствии с принципом Сен-Венана можно считать распределенными равномерно и выразить формулой [3]

$$\sigma = \pm \frac{P}{F}. \tag{2.95}$$

Абсолютная величина изменения длины стержня

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \tag{2.96}$$

деформация

$$\varepsilon = \frac{P}{EF}. \tag{2.97}$$

Из формул (2.95), (2.97) следует закон Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{2.98}$$

или

$$\sigma = \varepsilon E. \tag{2.99}$$

2.8.2. Изгиб. Деформация изгиба в призматическом стержне с прямой осью развивается при воздействии на него сил или пар сил, которые

размещены в плоскостях, проходящих через его ось, в направлении, перпендикулярном к оси (будем называть такую нагрузку поперечной). Стержень, изгибаемый поперечной нагрузкой, обычно называют балкой. Характерным признаком изгиба балки является взаимный поворот и сдвиг соседних ее сечений относительно друг друга. Количественная мера таких деформаций зависит от величин изгибающего момента *M(x)* и перерезывающей силы *Q(x),* действующих в каждом из сечений балки. В более сложных случаях, когда внешняя нагрузка действует в нескольких плоскостях, проходящих через ось балки, ее деформацию определяют как результат изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Не останавливаясь здесь на методике определения опорных реакций, изгибающих моментов и перерезывающих сил в сечениях балки, рассмотрим приближенную модель ее напряженно-деформированного состояния [3].

Дифференциальное уравнение изгиба балки связывает функцию его прогибов *W(x)* и интенсивность *q(x)* поперечной нагрузки:

$$EI\frac{d^4W}{dx^4}=q; \tag{2.100}$$

здесь E – модуль упругости материала балки, I – момент инерции поперечного сечения балки, зависящий от его формы и геометрических размеров. Предполагается, что ось балки совпадает с координатной осью *Ox*.

Изгибающий момент связан с функцией прогибов дифференциальной зависимостью

$$M=-EI\frac{d^2W}{dx^2}. \tag{2.101}$$

Перерезывающая сила

$$Q=-EI\frac{d^3W}{dx^3}. \tag{2.102}$$

Угол поворота сечения

$$\varphi=\frac{dW}{dx}. \tag{2.103}$$

Граничные условия в концевых сечениях:

свободное опирание:

$$W=0;\ M=0;$$

жесткое защемление:

$$W=0;\ \varphi=0;$$

свободный конец балки:

$$M=0;\ Q=0.$$

Данная модель изгиба балки может рассматриваться в качестве частного случая модели изгиба тонкой плиты при аналогичных упрощающих

гипотезах, если в последней принять, что в направлении оси *Oy* компоненты напряженно-деформированного состояния не изменяются, т.е. производные от любого из его компонентов по *y* равны нулю и поперечная деформация в направлении *Oy* не развивается ($\mu = 0$). В этом случае уравнение (2.31) сводится к виду (2.100), (2.24) – к виду (2.101), (2.30) – к (2.102) и т.п. Нормальное напряжение в соответствии с формулой (2.23) выражается зависимостью

$$\sigma_x = -Ez\frac{d^2W}{dx^2}.$$

Аналогично теории изгиба тонких плит в данном случае применяется понятие «жесткость» балки

$$D = EI,$$

где для прямоугольного сечения (b – ширина балки)

$$I = \frac{bh^3}{12}.$$

Если рассматривать балку шириной b=1, то

$$I = \frac{h^3}{12}.$$

В общем случае сечения стержня, имеющего ось симметрии *Oy*, касательные напряжения при изгибе на расстоянии *y* от оси *Ox* (рис. 2.13) вычисляют по формуле

$$\tau(y) = \frac{QS(y)}{b(y)I_x},$$

где Q – перерезывающая сила в сечении, $S(y)$ – статический момент отсеченной линией $y=b$ части сечения относительно оси *Ox*, I_x – момент инерции сечения относительно оси *Ox*.

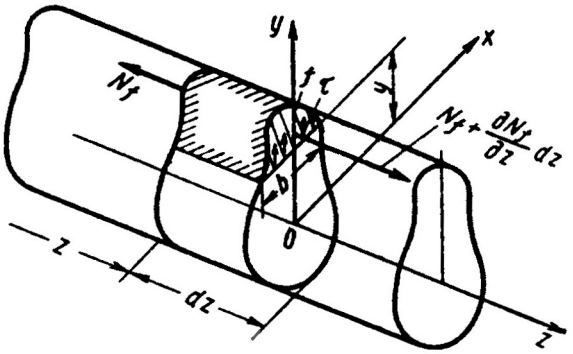


Рис. 2.13. К определению касательных напряжений при изгибе стержня общего вида

Для стержня прямоугольного сечения высотой h и шириной b (рис. 2.14)

$$S(y)=\frac{b}{2}(\frac{h^2}{2}-y^2);$$

$$I_x=\frac{bh^3}{12};$$

$$\tau_y=\frac{6Q}{bh^3}(\frac{h^2}{4}-y^2).$$

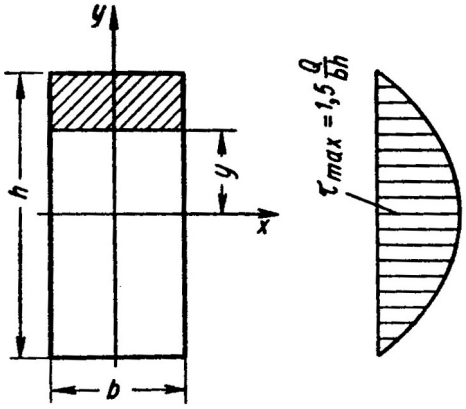


Рис. 2.14. К определению касательных напряжений при изгибе стержня прямоугольного сечения

Максимальное касательное напряжение при y=0

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{Q}{bh}=\frac{3}{2}\frac{Q}{F}.$$

В случае чистого сдвига (как, например, при соединении металлических листов внахлестку с помощью болтов и заклепок, во врубках в деревянных конструкциях) полагают, что касательные напряжения равномерно распределены по всей площади среза [3]:

$$\tau=\frac{Q}{F},$$

где F – площадь среза, Q – перерезывающая сила.

2.8.3. Кручение. Деформации кручения вызываются парами сил, действующими в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня. Момент пар, скручивающих стержень, называется крутящим моментом, обозначим его $M_{кр}$.

Установлено, что касательное напряжение, возникающее в элементах поперечного сечения скручиваемого стержня, прямо пропорционально расстоянию ρ точки от центра сечения и выражается формулой [3]

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{I_\rho}\rho = \frac{M_{кр}}{W_\rho}, \qquad (2.104)$$

где полярный момент инерции

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF, \qquad (2.105)$$

W_ρ – момент сопротивления при кручении.

В прямоугольном сечении высотой h и шириной b касательное напряжение достигает максимальной величины посредине длинной стороны:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{\beta b^3},$$

где, например, $\beta = 0{,}228$ при $h=b$; 0,346 при $h=1{,}5b$ и 1,15 при $h=4b$.

При длине стержня l наибольшим будет угол закручивания между крайними сечениями:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G I_\rho},$$

где

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Угол закручивания между сечениями, расположенными на расстоянии x:

$$\varphi = \frac{M_{кр} x}{G I_\rho}.$$

В случае сложного напряженно-деформированного состояния стержня при напряжениях в пределах упругости материала задачей проектировщика является его анализ, представление в виде комбинации задач рассмотренного выше типа, решение каждой из них и вычисление максимальных суммарных величин напряжений, деформаций и перемещений. Так, например, внецентренное сжатие можно представить как суммарный результат осевого сжатия и изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

2.9. Нити конечной жесткости (уточненные модели)

В настоящее время в гражданском, промышленном и транспортном строительстве все более широкое применение получают висячие конструкции, что можно объяснить возможностями перекрытия такими конструкциями практически неограниченных площадей без промежуточных колонн при произвольном в плане опорном контуре, а также наиболее рациональном использовании прочностных свойств материала, практической осуществимостью легких и выразительных архитектурных форм, относительной простотой изготовления, преимуществами индустриального монтажа без лесов и подмостей на ограниченной территории при сравнительно небольшой трудоемкости. Такие системы мало чувствительны к различного рода перегрузкам, сейсмическим воздействиям, осадкам, неравномерному смещению опор и пр.

Указанные преимущества удачно сочетаются с требованиями универсальности по отношению к типу производства и возможностью быстрой переналадки технологического процесса. В то же время при проектировании висячих систем, обладающих повышенной деформативностью при действии сосредоточенных и особенно несимметричных нагрузок, повышенное внимание следует уделять проблемам стабилизации формы, созданию уточненных расчетных моделей несущих элементов таких систем.

2.9.1. Вводные замечания и основные гипотезы. Рассматриваемая в настоящем разделе модель разработана применительно к расчету нитей конечной жесткости при выполнении следующих условий:

– отношение пролета нити к стреле ее провисания находится в пределах $8 \le l/f \prec \infty$, т.е. нить принимается пологой;

– если опоры нити расположены на разных уровнях, то угол наклона линии, соединяющей точки ее подвеса, к горизонту не превышает 20^{O};

– отношение напряжений изгибных к растягивающим должно находиться в пределах $0{,}05 \prec \sigma_u/\sigma_p \prec \infty$.

Следует отметить, что в подавляющем большинстве возведенных до настоящего времени висячих конструкций (порядка 95%) несущие элементы, выполненные в виде нитей конечной жесткости, соответствуют этим условиям.

В основу рассматриваемой модели положены следующие упрощающие гипотезы:

1. Материал, из которого изготовлена нить, является упругим, изотропным и однородным.

2. Сечения, плоские и нормальные к оси нити до изгиба, остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси нити после изгиба.

3. В процессе деформации нить остается в одноосном напряженном состоянии; продольные волокна нити не взаимодействуют между собой.

4. Кривизна изогнутой оси нити в любой ее точке зависит только от величины изгибающего момента в этой точке.

5. Перемещения нити не являются малыми и соизмеримы со стрелой ее провисания.

Гипотезы 2–4 приняты в качестве основных в теории изгиба балок, их применение не приводит к сколько-нибудь существенным погрешностям даже при высоте балки порядка одной пятой ее пролета. В висячих системах отношение аналогичных параметров нитей конечной жесткости, как правило, составляет существенно меньшую величину.

Гипотеза 5 отражает реальный характер напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости, что свидетельствует о необходимости расчета конструкций такого типа в нелинейной постановке.

2.9.2. Дифференциальные уравнения состояния нити конечной жесткости. Здесь рассматривается общий случай расчета несущих элементов висячих систем с учетом произвольной вертикальной *g(x)* и горизонтальной *p(x)* поперечной нагрузки. При выводе разрешающих уравнений для нити конечной жесткости с моментом инерции поперечного сечения *I* и модулем упругости материала *E* в качестве искомой функции принята величина распора *H*, а в качестве независимой переменной – площадь поперечного сечения *F*. Если площадь поперечного сечения нити получит приращение δF, то изменятся ее геометрия и величины действующих в ней внутренних усилий. Изгибающий момент в вертикальной плоскости $M_в$ получит некоторое приращение $\delta M_в$, угол между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями – приращение $\delta\varphi$, а прогиб произвольной точки на оси нити изменится на величину δy. Аналогично, в горизонтальной плоскости изгибающий момент $M_г$ получит приращение $\delta M_г$, угол ψ между двумя бесконечно близкими сечениями – приращение $\delta\psi$ и координата *z* оси нити в горизонтальной плоскости изменится на величину δz (рис. 2.15).

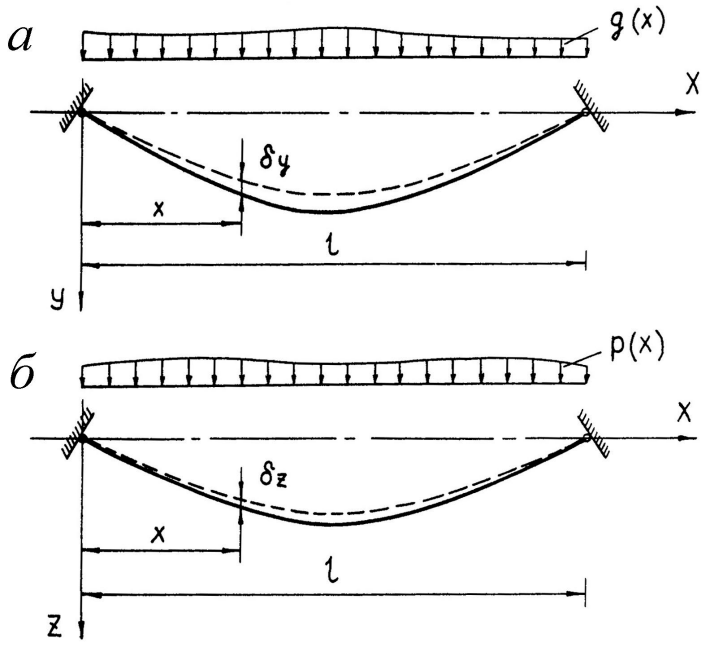


Рис. 2.15. К расчету нити конечной жесткости: а – действие начальной нагрузки; б – действие дополнительной нагрузки

Кроме того, распор H получит некоторое приращение своей величины δH. На основе известных соотношений [20]

$$H = \frac{M^{б} - M}{f};\ M = M^{б}\frac{f}{f^{б}}$$

получены следующие выражения для прогибов и изгибающих моментов в сечениях нити конечной жесткости:

$$y = \frac{M_{в}^{б} y^{б}}{Hy^{б} + M_{в}^{б}};$$

$$z = \frac{M_{г}^{б} z^{б}}{Hz^{б} + M_{г}^{б}};$$

$$M_{в} = \frac{(M_{в}^{б})^{2}}{Hy^{б} + M_{в}^{б}};$$

$$M_{г} = \frac{(M_{в}^{б})^{2}}{Hz^{б} + M_{в}^{б}}, \qquad (2.106)$$

здесь $M_г^б$, $M_в^б$ – балочные моменты и $z^б$, $y^б$ – балочные прогибы соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Приращения параметров напряженно-деформированного состояния нити выражаются следующим образом:

$$\delta y = -\frac{M_в^б (y^б)^2 \delta H}{(Hy^б + \delta H y^б + M_в^б)(Hy^б + M_в^б)}; \tag{2.107}$$

$$\delta z = -\frac{M_г^б (z^б)^2 \delta H}{(Hz^б + \delta H z^б + M_г^б)(Hz^б + M_г^б)}; \tag{2.108}$$

$$\delta M_в = -\frac{(M_в^б)^2 y^б \delta H}{(Hy^б + \delta H y^б + M_в^б)(Hy^б + M_в^б)}; \tag{2.109}$$

$$\delta M_г = -\frac{(M_г^б)^2 z^б \delta H}{(Hz^б + \delta H z^б + M_г^б)(Hz^б + M_г^б)}; \tag{2.110}$$

$$\delta dx = \frac{EF\delta H - HE\delta F}{EF(EF + E\delta F)} dx; \tag{2.111}$$

$$\delta d\varphi = -\frac{(M_в^б)^2 (y^б \delta HEI + y^б HE\delta I + y^б \delta HE\delta I + M_в^б E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^б + \delta H y^б + M_в^б)(Hy^б + M_в^б)} dx; \tag{2.112}$$

$$\delta d\psi = -\frac{(M_г^б)^2 (z^б \delta HEI + z^б HE\delta I + z^б \delta HE\delta I + M_г^б E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^б + \delta H z^б + M_г^б)(Hz^б + M_г^б)} dx. \tag{2.113}$$

Работа внешних сил выражается интегралом по длине пролета l от произведения сил *g(x)* и *p(x)* на соответствующие перемещения x, y, выраженные формулами (2.107) и (2.108):

$$U_1^1 = -\int_0^l \frac{g(x) M_в^б (y^б)^2 \delta H}{(Hy^б + \delta H y^б + M_в^б)(Hy^б + M_в^б)} dx; \tag{2.114}$$

$$U_2^1 = -\int_0^l \frac{p(x) M_в^б (z^б)^2 \delta H}{(Hz^б + \delta H z^б + M_г^б)(Hz^б + M_г^б)} dx. \tag{2.115}$$

Работа внутренних сил складывается из работы действующего на элементарном участке *dx* нити усилия $H+\delta H$ на соответствующем упругом перемещении δdx и работы изгибающих моментов $M_в + \delta M_в$, $M_г + \delta M_г$ на соответствующих приращениях углов $\delta d\varphi$, $\delta d\psi$ между двумя бесконечно близкими ее поперечными сечениями (формулы (2.112), (2.113)):

$$U_2^1 = -\int_0^l \frac{(EF\delta H - HE\delta F)(H + \delta H)}{EF(EF + E\delta F)} dx; \tag{2.116}$$

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M_в^б)^4 (y^б \delta HEI + y^б HE\delta I + y^б \delta HE\delta I + M_в^б E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hy^б + M_в^б)(Hy^б + \delta Hy^б + M_в^б)^2} dx; \quad (2.117)$$

$$U_2^3 = \int_0^l \frac{(M_г^б)^4 (z^б \delta HEI + z^б HE\delta I + z^б \delta HE\delta I + M_г^б E\delta I)}{EI(EI + E\delta I)(Hz^б + \delta Hz^б + M_г^б)^2} dx. \quad (2.118)$$

Исходя из этих рассуждений и на основе принципа Лагранжа о равенстве нулю суммы работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых перемещениях системы дифференциальное уравнение для определения распора в упругой нити конечной жесткости получено в виде [19]:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{g(x) M_в^б m^2}{(Hm + EIM_в^б)^2} dx - \frac{EF^2}{lH^2} \int_0^l \frac{p(x) M_г^б n^2}{(Hn + EIM_г^б)^2} dx +$$

$$+ \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_в^б)^4 m}{(Hm + EIM_в^б)^3} dx + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_г^б)^4 n}{(Hn + EIM_г^б)^3} dx = 0; \quad (2.119)$$

здесь $m=EIy$, $n=EIz$.

Интегралы, входящие в уравнение (2.119), зависят от вида приложенной к нити внешней нагрузки и условий закрепления ее концов. Их значения могут быть определены точно или, в случае сложных подынтегральных выражений, с помощью формул приближенного интегрирования.

В случае, когда внешняя нагрузка действует только в вертикальной плоскости, а $p(x)=0$, уравнение (2.119) упрощается и принимает вид:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{lH^2} \times$$

$$\times \int_0^l \frac{g(x) M_в^б m^2}{(Hm + EIM_в^б)^2} dx + \frac{E^2 F^2 I}{lH^2} \int_0^l \frac{(M_в^б)^4 m}{(Hm + EIM_в^б)^3} dx = 0. \quad (2.120)$$

Уравнение (2.120) еще более упрощается, если вертикальная нагрузка, действующая на нить, является равномерно распределенной ($g(x)=q$). Интегралы, входящие в уравнение (2.120), для основных случаев закрепления концов нити выражаются следующим образом [19]:

шарнирное закрепление:

$$\int_0^l \frac{q M_в^б m^2}{(Hm + EIM_в^б)^2} dx = \frac{25 q^2 l^7}{12(5l^2 H + 48EI)^2};$$

$$\int_0^l \frac{(M_в^б)^4 m}{(Hm + EIM_в^б)^3} dx = \frac{120 q^2 l^7}{(5l^2 H + 48EI)^2};$$

жесткое защемление:

$$\int_0^l \frac{qM_в^б m^2}{(Hm + EIM_в^б)^2}\,dx = \frac{q^2 l^7}{36(l^2H + 16EI)^2};$$

$$\int_0^l \frac{(M_в^б)^4 m}{(Hm + EIM_в^б)^3}\,dx = \frac{8q^2 l^7}{27(l^2H + 16EI)^3}.$$

2.9.3. Влияние температурных воздействий на напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости. При расчете и конструировании висячих систем, как правило, необходимо принимать во внимание влияние температурных воздействий на напряженно-деформированное состояние их элементов. В частности, изменение температуры вызывает изменение длины нити, что, в свою очередь, влияет на величины стрелы провисания и внутренних усилий в ней.

При построении расчетной модели в данном случае в качестве независимой переменной принята температура *t* конструкции. Пусть приращению температуры $\delta\Delta_t$ соответствуют приращения δH распора *H*, $\delta M_в$ – изгибающего момента $M_в$, $\delta\varphi$ – угла φ между двумя бесконечно близкими сечениями нити, δy – вертикального перемещения y оси нити. Аналогично в горизонтальной плоскости обозначим приращения: $\delta M_г$ – изгибающего момента $M_г$, $\delta\psi$ – угла ψ между двумя бесконечно близкими сечениями, δz – перемещения *z* оси нити. Выражения для приращений $\delta y, \delta z, \delta M_в, \delta M_г$ по-прежнему записываются в виде (2.107)–(2.110), величины приращений $\delta dx, \delta d\varphi, \delta d\psi$ в данном случае выражаются следующим образом:

$$\delta dx = \frac{\delta H}{EF}dx + \alpha_t \delta\Delta_t dx;$$

$$\delta d\varphi = -\frac{(M_в^б)^2 y^б \delta H}{EI(Hy^б + \delta H y^б + M_в^б)(Hy^б + M_в^б)}dx;$$

$$\delta d\psi = -\frac{(M_в^б)^2 z^б \delta H}{EI(Hz^б + \delta H z^б + M_в^б)(Hz^б + M_в^б)}dx,$$

где α_t – коэффициент линейного удлинения материала нити.

Работа внешних сил в данном случае, как и в п. 2.9.2, складывается из работы нагрузок *g(x)* и *p(x)* на перемещениях *y* и *z* соответственно и выражается формулами (2.114) и (2.115). Работа внутренних сил состоит из работы действующего в элементе *dx* усилия $H + \delta H$ на упругом

перемещении δdx и работы изгибающих моментов $M_в + \delta M_в$ и $M_г + \delta M_г$ на соответствующих угловых перемещениях $\delta d\varphi$ и $\delta d\psi$:

$$U_2^1 = -\int_0^l (\frac{\delta H}{EF} + \alpha_t \delta\Delta_t)(H + \delta H)dx;$$

$$U_2^2 = \int_0^l \frac{(M_в^б)^4 y^б \delta H}{EI(Hy^б + M_в^б)(Hy^б + \delta Hy^б + M_в^б)^2} dx;$$

$$U_2^3 = \int_0^l \frac{(M_в^б)^4 z^б \delta H}{EI(Hz^б + M_в^б)(Hz^б + \delta Hz^б + M_в^б)^2} dx.$$

Выражения для работы внутренних и внешних сил позволяют теперь сформулировать на основе принципа Лагранжа дифференциальное уравнение, связывающее распор с изменением температуры в нитях конечной жесткости [19]:

$$\frac{d\Delta_t}{dH} + \frac{1}{\alpha_t EF} + \frac{1}{\alpha_t lH}\int_0^l \frac{g(x)M_в^б m^2}{(Hm + EIM_в^б)^2} dx + \frac{1}{\alpha_t lH}\int_0^l \frac{p(x)M_в^б n^2}{(Hn + EIM_г^б)^2} dx -$$

$$- \frac{EI}{\alpha_t lH}\int_0^l \frac{(M_в^б)^4 m}{(Hm + EIM_в^б)^3} dx - \frac{EI}{\alpha_t lH}\int_0^l \frac{(M_г^б)^4 n}{(Hn + EIM_г^б)^3} dx = 0.$$

2.10. Гибкие нити

Стержень с пренебрежимо малой жесткостью называется гибкой нитью. Два основных свойства гибких нитей:

– нить работает только на растяжение (отсутствие изгибной жесткости приводит к потере устойчивости при появлении сжимающих усилий);

– при расчете гибких нитей всегда следует принимать во внимание, что усилие, растягивающее нить, направлено по касательной к нити, что следует из условия равенства нулю изгибающих моментов в любом ее сечении.

Теорию расчета гибких нитей широко применяют при проектировании конструкций, содержащих в себе в качестве элементов тросы, шарнирные цепи, канаты, струны и т.п. Ниже рассмотрим некоторые основные положения теории гибких нитей [7], которая является частным случаем более общей теории нитей конечной жесткости.

При заданной поперечной нагрузке на нить обычно рассматривают два типа задач:

– известен распор нити (горизонтальная составляющая растягивающего усилия в нити) и требуется определить ее прогибы и длину;

– известна длина нити и необходимо найти распор и прогибы.

2.10.1. Основное уравнение прогиба нити. Основное уравнение прогибов нити записывается в виде:

$$\frac{d}{dz}(H\frac{dy}{dz}) = q$$

и следует из выражения для значения тангенса наклона касательной к осевой линии

$$\frac{dy}{dz} = tg\ \alpha = \frac{Q}{H},$$

а также условий равновесия элемента нити (рис. 2.16):

$$\frac{dQ}{dz} = q;\ \ \frac{dH}{dz} = h,$$

где q и h – интенсивность вертикальной и горизонтальной составляющих нагрузки на единицу длины нити, H – распор, Q – перерезывающая сила.

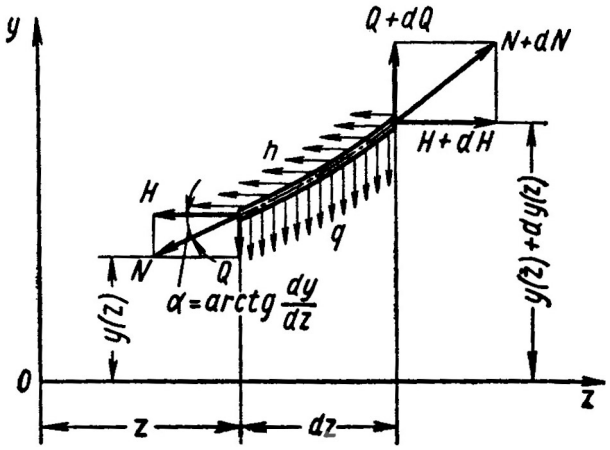


Рис. 2.16. К расчету гибкой нити

Суммарное усилие, действующее в сечениях нити:

$$N = \sqrt{H^2 + Q^2}.$$

При отсутствии распределенной горизонтальной нагрузки (h=0) распор H по всей длине нити выражается постоянной величиной, при этом дифференциальное уравнение прогиба принимает вид:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q}{H}.$$

Уравнения прогиба нити в интегральной форме:

$$y(z) = \int_0^z \operatorname{tg}\alpha(z_1)dz_1 + y(0) = \int_0^z \frac{Q(z_1)}{H(z_1)}dz_1 + y(0)$$

и при постоянном распоре:

$$y(z) = \frac{1}{H}\int_0^z Q(z_1)dz_1 + y(0).$$

Если опоры расположены на одном уровне, то перерезывающее усилие не зависит от распора и прогибы нити обратно пропорциональны величине *H*.

Для пологих нитей $(\frac{y_{\max}}{l} \prec 0{,}1)$ без больших погрешностей можно принять *N=H*.

2.10.2. Расчет гибких нитей без учета упругости нити и собственного веса. Если собственный вес нити не превышает 10% суммарной внешней нагрузки, действующей в вертикальной плоскости, то его влиянием на напряженно-деформированное состояние конструкции можно пренебречь. Также можно пренебречь и упругостью нити, если отношение ее длины к расстоянию между опорами превышает величину 1,03 [19].

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся в инженерной практике задачи в такой постановке.

Нить под действием n сосредоточенных сил (рис. 2.17)*, при этом известна величина распора H*. Прогиб нити

$$y(\alpha_i) = -\frac{1}{H}\left(\sum_{j=1}^{i} P_i \frac{(l-\alpha_i)\alpha_i}{l} + \sum_{j=i+1}^{n} P_j \frac{(l-\alpha_j)\alpha_i}{l}\right) + c\,\frac{\alpha_i}{l}.$$

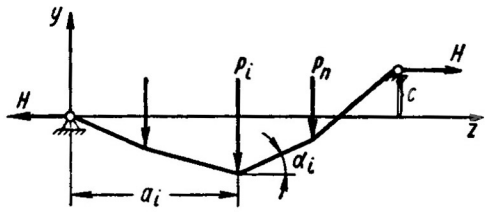


Рис. 2.17. К расчету гибкой нити с опорами на разном уровне под действием сосредоточенных сил

Напряжение нити на участке *i, i*+1

$$N_i = H\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_i};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{y(\alpha_{i+1}) - y(\alpha_i)}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}.$$

В случае, когда нить находится под действием одной сосредоточенной силы *P*, приложенной на расстоянии a от левой опоры (рис. 2.18), и распор известен, то прогиб нити в точке a выражается формулой

$$y(a) = \frac{1}{H}\int_0^a Q dz = -\frac{P(l-a)a}{Hl}.$$

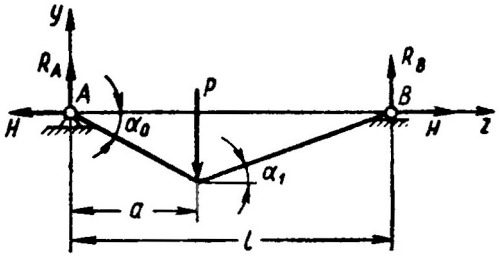


Рис. 2.18. К расчету гибкой нити под действием сосредоточенной силы

Тангенсы угла наклона нити:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{P(l-a)}{Hl};\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{Pa}{Hl}.$$

Вертикальные реакции в опорах *A* и *B* :

$$R_A = \frac{P(l-a)}{l};\ R_B = \frac{Pa}{l}.$$

Если в случае действия одной силы известна длина нити, то распор *H* определяется формулой

$$H = P\frac{2\frac{La}{l^2}(1-\frac{a}{l})}{\sqrt{\frac{L^4}{l^4} - 2\frac{L^2}{l^2}(\frac{2a^2}{l^2} - \frac{2a}{l} + 1) + \frac{4a^2}{l^2} - \frac{4a}{l} + 1}}.$$

При стремлении отношения $\frac{L}{l}$ (*L* – длина нити) к единице натяжение *H* делается бесконечно большим, однако при учете упругости нити натяжение остается конечным.

При $a = \frac{1}{2}l$ прогиб нити

$$y_{\max} = -\frac{Pl}{4H} = -\frac{l}{2}\sqrt{(\frac{L}{l})^2 - 1}.$$

Даже незначительное превышение длины нити над длиной пролета приводит к значительным прогибам. Например, при $L = 1{,}01l$

$$y = 0{,}07\,l\,.$$

Нить под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 2.19)*, величина H известна*. Прогиб нити определяется формулой

$$y(z) = -\frac{q}{2H}(lz - z^2) + c\frac{z}{l}.$$

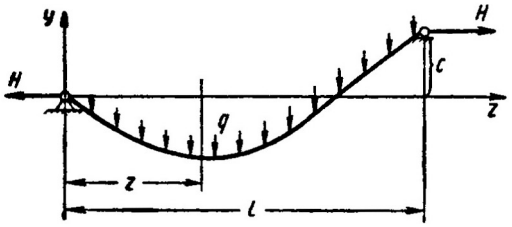


Рис. 2.19. К расчету гибкой нити с опорами на разном уровне под действием равномерно распределенной нагрузки

При расположении опор на одном уровне максимальный прогиб

$$y_{\max} = y(\frac{l}{2}) = -\frac{ql^2}{8H}\,.$$

Нить под действием равномерно распределенной нагрузки, известна длина нити L. Распор определяется приближенно из уравнения

$$L = \frac{l}{2}\sqrt{1 + (\frac{ql}{2H})^2} + \frac{H}{q}\operatorname{Arcsh}\frac{ql}{2H}.$$

Для пологих нитей

$$H = \frac{ql}{2\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{l} - 1}}.$$

Максимальный прогиб

$$y_{\max} = -\frac{\sqrt{6}}{4}l\sqrt{\frac{L}{l} - 1.}$$

При расчете сравнительно пологих нитей ($y_{\max} \prec 0{,}3l$) с учетом собственного веса его влияние на напряженно-деформированное состояние сводят к действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = q_0 = \gamma F$, где γ – удельный вес материала нити, F – площадь поперечного сечения.

При больших прогибах нити дифференциальное уравнение состояния с учетом собственного веса записывается в виде (в случае, если распор выражается постоянной величиной)

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+(\frac{dy}{dz})^2}.$$

2.10.3. Расчет гибких нитей с учетом упругости материала. Рассмотрим некоторые частные случаи моделирования состояния гибкой нити в данной постановке.

Пологая нить под действием равномерно распределенной нагрузки. При расчете в распределенную нагрузку может быть включен собственный вес. Выражения для распора и максимального прогиба в предположении, что усилие N в нити равно распору, записываются соответственно в виде:

$$H = \frac{ql}{2\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{\frac{L_0}{l}(1+\frac{H}{EF})-1}};$$

$$y_{\max} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}l\sqrt{\frac{L_0}{l}(1+\frac{H}{EF})-1}.$$

Если первоначальная длина нити L_0 равна длине пролета, то

$$ql = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{EF}}\sqrt{H^3};$$

$$y_{\max} = \frac{\sqrt[3]{3}}{4}\frac{l}{\sqrt[3]{EF}}\sqrt[3]{ql}.$$

Нить под действием поперечной сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета (рис. 2.20).

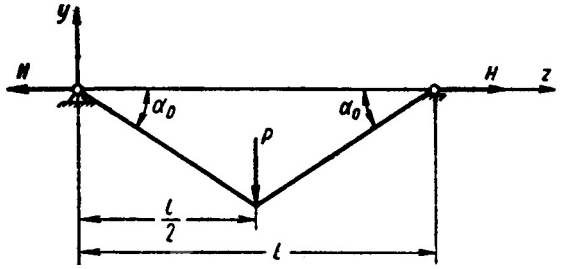


Рис. 2.20. К расчету гибкой нити под действием сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета

Тангенс угла наклона

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{P}{2H}.$$

Наибольший прогиб $y(\frac{l}{2}) = -\frac{Pl}{4H}$.

Натяжение нити $N = H\sqrt{1+\frac{P^2}{4H^2}}$ постоянно по ее длине.

Длина нити $L = l\sqrt{1+\frac{P^2}{4H^2}}$.

Если первоначальная длина нити L_0, то длина нити под нагрузкой $L = L_0(1+\varepsilon)$, где деформация $\varepsilon = \frac{N}{EF} = \frac{H}{EF}\sqrt{1+\frac{P^2}{4H^2}}$.

Уравнение, используемое для определения распора:

$$P = 2H\sqrt{\frac{(\frac{L_0}{l})^2}{(1-\frac{H}{EF}\frac{L_0}{l})^2}-1}.$$

Прогиб нити в середине пролета $y_{\max} = -\frac{Pl}{4H}$.

2.10.4. Расчет нитей с учетом упругости материала и температурных деформаций. *Нить под действием поперечной сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета.* Длина нити при воздействии указанных факторов:

$$l = L_0(1+\varepsilon+\varepsilon_t);$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{L_0}\int_0^{L_0}\alpha t dz,$$

здесь t – температура нити в сечении z; α – коэффициент линейного расширения.

Уравнение для вычисления распора:

$$P = 2H\sqrt{\frac{(\frac{L_0}{l})^2(1+\varepsilon_t)^2}{(1-\frac{H}{EF}\frac{L_0}{l})^2}-1}.$$

Максимальный прогиб

$$y_{\max} = -\frac{Pl}{4H}.$$

Нить под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 2.21).

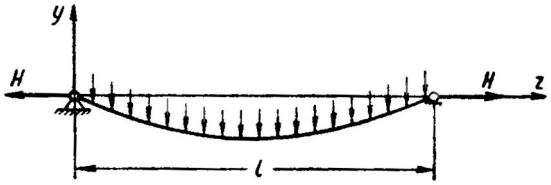


Рис. 2.21. К расчету гибкой нити
под действием равномерно распределенной нагрузки

Уравнение для вычисления распора записывается в виде:

$$H = \frac{ql}{2\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{\frac{L_0}{l}(1 + \frac{H}{EF} + \varepsilon_t)}}.$$

Решение задач данного пункта в уточненной постановке необходимо выполнять в том случае, если порядок величин упругих и температурных деформаций равен порядку разности первоначальной длины нити и расстояния между опорами.

2.11. Заключение

В настоящей работе в силу ограниченного ее объема рассматриваются, в основном, модели напряженно-деформированного состояния различных типов конструкций, вызванного действием статической, т.е. не изменяющейся во времени нагрузки. Данные модели служат основой при описании целого ряда других важных классов задач механики деформируемого твердого тела.

Так, в случае колебаний частиц упругого тела, вызванных изменяющейся во времени t внешней нагрузкой, возникающие внутри тела силы инерции в направлениях осей Ox, Oy, Oz, в соответствии со вторым законом Ньютона выражаются величинами $\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ и $\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, где вторые производные перемещений есть проекции ускорения элемента размером $dxdydz$ на соответствующие оси, ρ – объемный вес.

Перемещения U, V, W упругого тела, зависящие теперь не только от координат, но и от времени, определяются решением граничной задачи, описанной уравнениями равновесия (2.2), которые в данном случае принимают вид:

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + G\nabla^2 U + X - \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0;$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + G\nabla^2 V + Y - \rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0;$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + G\nabla^2 W + Z - \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

и граничными условиями для перемещений или сил на поверхности (2.6) с учетом их изменения в зависимости от времени. Кроме граничных при решении динамических задач должны быть приняты во внимание также начальные условия, описывающие напряженно-деформированное состояние тела в некоторый «начальный» момент времени.

Аналогично дифференциальное уравнение движения изотропной тонкой плиты под действием переменной во времени нагрузки *F(x, y, t)* может быть получено из уравнения (2.31) заменой в нем статической нагрузки *q(x, y)* динамической *F(x, y, t)* и вводом «инерционного» члена $\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ (*h* – толщина плиты).

Уравнения равновесия неравномерно нагретого трехмерного тела в перемещениях (предполагается, что температурное поле не влияет на упругие постоянные материала λ, *G*) записываются в виде (*T* – температура, α – коэффициент линейного расширения) [9]:

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + G\nabla^2 U + X - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + G\nabla^2 V + Y - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha\frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + G\nabla^2 W + Z - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

и отличаются от уравнений (2.2) лишь наличием «температурных» членов, позволяющих учитывать влияние неравномерного температурного поля внутри тела на его напряженно-деформированное состояние.

Решение физически и геометрически нелинейных задач в большинстве случаев так или иначе сводится к решению в несколько этапов соответствующих линейных задач.

Литература к главе 2

1. *Безухов Н.И.* Теория упругости и пластичности. - М.: Гостехиздат, 1953. - 411 с.

2. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л. и др.* Расчеты на прочность, устойчивость, колебания в условиях высоких температур. - М.: Машиностроение, 1965. - 547 с.

3. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. - М.: Гостехиздат, 1964. - 852 с.

4. *Биргер И.А., Пановко Я.Г.* Прочность, устойчивость, колебания: Т.1. - М.: Машиностроение, 1968. - 831 с.

5. *Болотин В.В.* Некоторые вопросы теории хрупкого разрушения. Расчеты на прочность. - Вып. 8. - М.: Госмашгиз, 1962. - С. 36-52.

6. *Вайнберг Д.В., Синявский А.Л.* Расчет оболочек. - К.: Госстройиздат УССР, 1961. - 118 с.

7. *Качурин В.К.* Теория висячих систем. - М.-Л.: Госстройиздат, 1962. - 224 с.

8. *Лисицин Б.М.* Расчет защемленных плит в постановке пространственной задачи теории упругости // Прикл. механика. - 1970. - Т. 6. - Вып. 5. - С. 18-23.

9. *Лисицин Б.М.* Проекционные и проекционно-сеточные методы. - К.: Вища школа, 1991. - 171 с.

10. *Лисицин Б.М.* Расчет железобетонных предварительно напряженных в двух направлениях плит // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. - Новосибирск, 1960. - № 6. - С. 23-44.

11. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. - 491 с.

12. *Новожилов В.В.* Теория упругости. - М.: Судпромгиз, 1958. - 369 с.

13. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. - Л.: Судпромгиз, 1962. - С. 393.

14. *Огибалов П.М.* Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. - М.: Изд-во МГУ, 1958. - 389 с.

15. *Писаренко Г.С., Можаровский Н.С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. - К.: Наук. думка, 1981. - 493 с.

16. *Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. и др.* Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. - К.: Вища школа, 1987. - 198 с.

17. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз, 1963. - 635 с.

18. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. - М.: Физматгиз, 1959. - 364 с.

19. *Шимановский А.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости при активном нагружении и разгрузке // Прикладная механика. - 1991. - Т.27. - № 11. - С. 110-117.

20. *Шимановский А.В., Оглобля А.И.* Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. - Киев: Изд-во “Сталь”, 2002. - 372 с.

РАЗДЕЛ 2
МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Расчет строительных конструкций является важнейшим этапом процесса возведения гражданских, промышленных, транспортных и специальных объектов, его главная цель – определение внутренних усилий, перемещений, деформаций в их элементах, обеспечение устойчивости и необходимых динамических свойств сооружений при действии различных типов внешних нагрузок и выбранных условиях закрепления.

Классификация методов расчета строительных конструкций может проводиться на основе различных принципов и признаков. Один из подходов связан с характером принятых физических и математических моделей рассматриваемых строительных объектов, возможностью применения для их реализации более простых приемов и подходов или необходимостью перехода к более сложным и трудоемким вычислительным процедурам. В этом смысле все методы могут быть разделены на три основные группы:

1. *Методы расчета статически определимых конструкций*. В данной группе методов все необходимые компоненты напряженно-деформированного состояния определяются с помощью соответствующих уравнений равновесия; специфика методов связана лишь с особенностями расчетной модели и приемами, позволяющими наиболее эффективно использовать эти уравнения.

2. *Методы расчета конечное число раз статически неопределимых конструкций*. Главное назначение одних методов этой группы – определение так называемых «лишних неизвестных» (реакций в опорах или внутренних усилий), число которых и определяет степень статической неопределимости. После того как лишние неизвестные определены и отнесены к внешним силовым воздействиям, расчет новой, уже статически определимой конструкции может проводиться методами первой группы.

В других методах в качестве основных неизвестных рассматриваются деформации. Их определение позволяет свести расчет отдельных элементов схемы к применению готовых, заранее разработанных процедур вычисления всех прочих необходимых компонентов напряженно-деформированного состояния.

Особенностью всех методов второй группы является то, что их реализация в точной относительно принятой математической модели

постановке сводится к решению системы конечного и строго определенного числа линейных алгебраических уравнений.

В строительной механике стержневых систем широкое применение получили методы сил и перемещений – типичные представители методов второй группы.

3. *Методы третьей группы предназначены для расчета, в основном, двухмерных и трехмерных тел, представляющих собой материальные континуумы;* рассмотрение условий равновесия бесконечно малых их элементов приводит к системам основных дифференциальных уравнений и граничных (часто дифференциальных) соотношений, образующих математическую модель конструкции с бесконечно большим числом неизвестных.

Методы этой группы можно разделить на аналитические, в которых искомые компоненты напряженно-деформированного состояния выражаются в виде функциональных последовательностей с неопределенными числовыми параметрами, и дискретные, в которых решение сводится к определению неизвестных в заранее выбранных точках (узлах) заданной области. Как аналитические, так и дискретные методы являются приближенными, уточнение решения в аналитических методах достигается увеличением числа членов функциональных последовательностей, в дискретных – увеличением числа узлов.

Во всех случаях реализация методов третьей группы сводится к решению системы (будем называть ее разрешающей) линейных алгебраических уравнений. В аналитических методах разрешающая система в качестве неизвестных содержит неопределенные параметры функциональных последовательностей, в дискретных методах – значения искомых компонентов напряженно-деформированного состояния в выбранных узлах.

Применение дискретных численных методов (конечно-разностных, проекционно-разностных, вариационно-разностных, в том числе метода конечных элементов) для решения граничных задач приводит к системе линейных алгебраических уравнений специального вида – к разностным уравнениям. Такие системы обладают следующими характерными особенностями:

1. Высокий порядок, зависящий от степени сложности рассматриваемой граничной задачи (характер заданной области, число неизвестных функций в выбранном варианте математической модели, тип и порядок основных дифференциальных уравнений и граничных условий) и количества узлов в расчетной схеме; порядок системы возрастает при стремлении получить приближенное решение более высокого качества.

2. Система плохо обусловлена (отношение максимального собственного значения матрицы коэффициентов при неизвестных системы к его минимальному значению велико; так, для конечно-разностного аналога

оператора Лапласа это отношение обратно пропорционально квадрату шага сетки, т.е. быстро возрастает с увеличением числа узлов).

3. Матрица коэффициентов при неизвестных системы является разреженной – в каждой ее строке отлично от нуля лишь несколько элементов, при этом их число не зависит от числа узлов расчетной схемы.

4. Ненулевые элементы матрицы расположены специальным образом – матрица является ленточной в отличие от матриц разрешающих систем линейных алгебраических уравнений аналитических методов решения граничных задач, которые в большинстве случаев, если не применяются специальные приемы, являются заполненными.

Поэтому для реализации дискретных приближенных методов решения граничных задач разработан целый ряд специальных алгоритмов, которые в той или иной степени учитывают специфику задачи и позволяют найти решение более эффективно по основным оценочным параметрам, чем при применении общих методов линейной алгебры.

Вообще следует иметь в виду, что создание многих современных методов линейной алгебры, с одной стороны, было в большой мере вызвано практическими потребностями строительного дела, гидравлики, теоретической физики, теплотехники и других наук, а с другой – явилось необходимым условием их успешного развития.

Глава 1
МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Одним из наиболее эффективных и широко применяемых методов решения самых сложных задач, возникающих в процессе проектирования строительных конструкций и сооружений, является метод конечных разностей. Следует отметить, что этот метод был разработан задолго до появления ЭВМ, однако именно быстродействующая вычислительная техника явилась важнейшим стимулятором дальнейшего его развития и практического применения. Основной смысл метода поясним вначале на примере решения одномерной граничной задачи.

1.1. Выражения для производных в конечных разностях

Выразим производные функции $y = f(x)$ линейной комбинацией ее значений в определенных точках рассматриваемого промежутка изменения независимой переменной x, которые будем называть узлами. Существует несколько форм выражения производных подобным образом. Например, первую производную y' в узле k (рис. 1.1) можно выразить следующими конечными разностями [6]:

$$\frac{y_k - y_a}{h_{ak}}; \tag{1.1}$$

$$y'_k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_k \approx \frac{y_b - y_k}{h_{kb}}; \tag{1.2}$$

$$\frac{y_b - y_a}{h_{ak} + h_{kb}}. \tag{1.3}$$

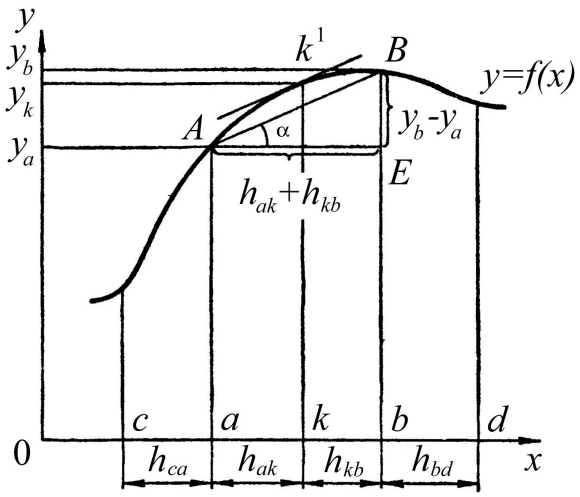


Рис. 1.1. К определению производной функции в конечных разностях

Выражение (1.3) называется центрированной формулой для y'_k в конечных разностях. Как видно из рис. 1.1,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_b - y_a}{h_{ak} + h_{kb}}, \tag{1.4}$$

и, таким образом, выражение (1.3) для производной $(\frac{dy}{dx})_k$ равносильно приближенному выражению тангенса угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в узле k тангенсом угла α наклона хорды *AB*. В пределе при $a \to k$, $b \to k$ погрешность такого приближенного выражения стремится к нулю.

Выражения (1.1), (1.2) называются соответственно левой и правой односторонними формулами для первой производной в узле k в конечных разностях.

Часто расстояние (шаг) между узлами принимают одинаковым, в этом случае для $h_{ak} = h_{kb} = h$ формула (1.3) записывается в виде:

$$y'_k = \frac{y_b - y_a}{2h}. \tag{1.5}$$

Вторую производную в центральных конечных разностях можно приближенно выразить, применяя формулу (1.5) при $h_{ca} = h_{ak} = h_{kb} = h_{bd} = h$ следующим образом:

$$y''_k = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)_k \approx \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_b - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a}{2h} =$$

$$= \frac{\frac{y_d - y_k}{2h} - \frac{y_k - y_c}{2h}}{2h} = \frac{y_d - 2y_k + y_c}{4h^2}. \qquad (1.6)$$

Однако при решении прикладных задач чаще применяется формула для второй производной, полученная на основе выражений (1.1), (1.2) для односторонних конечных разностей (при $h_{kb} = h_{ak} = h$):

$$y''_k = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_k \approx \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_b - \left(\frac{dy}{dx}\right)_k}{h} =$$

$$= \frac{\frac{y_b - y_k}{h} - \frac{y_k - y_a}{h}}{h} = \frac{y_b - 2y_k + y_a}{h^2}. \qquad (1.7)$$

Формулы для производных в конечных разностях можно получить также с помощью ряда Тейлора [6], выражая значение функции $y = f(x)$ в узле $x + h$ через ее значение в узле x (рис. 1.2):

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{\mathrm{IY}}(x) + \ldots \qquad (1.8)$$

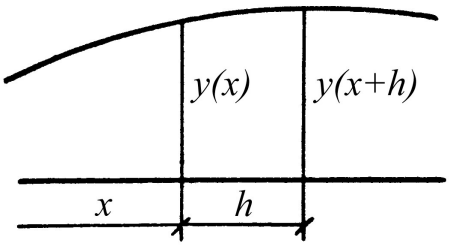


Рис. 1.2. К определению производной функции в конечных разностях с помощью ряда Тейлора

Пользуясь разложением (1.8), выразим значение функции в узле b с координатой $x + \alpha h$ через значение функции в узле k с координатой x (рис. 1.3):

$$y_b = y_k + \alpha h y'_k + \frac{\alpha^2 h^2}{2!}y''_k + \frac{\alpha^3 h^3}{3!}y'''_k + \frac{\alpha^4 h^4}{4!}y_k^{\mathrm{IY}} + \ldots \qquad (1.9)$$

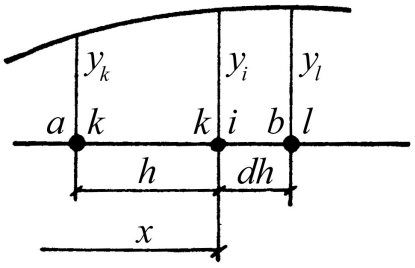


Рис. 1.3. К определению значения функции

Аналогично, выразим значение функции в узле a с координатой $x-h$:

$$y_a = y_k - hy'_k + \frac{h^2}{2!}y''_k - \frac{h^3}{3!}y'''_k + \frac{h^4}{4!}y_k^{\mathrm{IY}} - \ldots \qquad (1.10)$$

Вычитая равенство (1.10) из (1.9), получим

$$y_b - y_a = (\alpha+1)hy'_k + (\alpha^2-1)\frac{h^2}{2}y_k + (\alpha^3+1)\frac{h^3}{6}y'''_k + \ldots,$$

откуда

$$y'_k = \frac{y_b - y_a}{(\alpha+1)h} + (1-\alpha)\frac{h}{2}y''_k - \frac{(1+\alpha^3)}{1+\alpha}\frac{h^2}{6}y'''_k + \ldots \qquad (1.11)$$

Удерживая в (1.11) различное число членов, можно получить формулы в конечных разностях различного уровня точности в зависимости от введенного в рассмотрение количества узлов. Если в (1.11) ограничиться только первым членом разложения, то при $\alpha = 1$ получим формулу (1.5), а погрешность *O(h)* приближенного выражения первой производной y'_k в узле k в общем случае будет выражаться:

$$O(h) = (1-\alpha)\frac{h}{2}y''_k - \frac{(1+\alpha^3)}{1+\alpha}\frac{h^2}{6}y'''_k + \ldots, \qquad (1.12)$$

т.е. величина $O(h)$ зависит от расстояния h между узлами и величины α. Очевидно, что существенно больший по абсолютной величине по сравнению с суммой остальных член выражения (1.12) стремится к нулю при $h \to 0$ различным образом в зависимости от величины α: как первая степень h при $\alpha \neq 1$ и как h^2 при $\alpha = 1,$ так как в этом случае

$$(1-\alpha)\frac{h}{2}y''_k = 0.$$

Таким образом, предпочтительна схема с равноотстоящими узлами, так как в этом случае погрешность приближенного выражения дифференциальных операторов в конечных разностях уменьшается на порядок быстрее при $h \to 0.$

Следует также иметь в виду, что характер стремления к нулю остаточного члена при $h \to 0$ зависит от числа узлов, введенных в соответствующую формулу для производной в конечных разностях, а также от того, является ли эта формула центрированной или односторонней. Как правило, специалисты во всех возможных случаях стремятся применять более точные центрированные формулы, однако использование односторонних формул в ряде случаев не только допустимо, но и целесообразно. В качестве примера в табл. 1.1 приведены некоторые формулы, выражающие центрированные производные в конечных разностях для различного числа узлов (рис. 1.4), а также выражения для соответствующих остаточных членов.

Таблица 1.1

Производная	y_{i-3}	y_{i-2}	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	y_{i+2}	y_{i+3}	Погрешность остаточного члена
$2h(\frac{dy}{dx})_i$			–1		1			$O(h^2)$
$12h(\frac{dy}{dx})_i$		1	–8		8	1		$O(h^4)$
$60h(\frac{dy}{dx})_i$	–1	9	–45		45	–9	1	$O(h^6)$
$h^2(\frac{d^2y}{dx^2})_i$			1	–2	1			$O(h^2)$
$12h^2(\frac{d^2y}{dx^2})_i$		–1	16	–30	16	–1		$O(h^4)$
$180h^2(\frac{d^2y}{dx^2})_i$	2	–27	270	–490	270	–27	2	$O(h^6)$
$2h^3(\frac{d^3y}{dx^3})_i$		–1	2		–2	1		$O(h^2)$
$8h^3(\frac{d^3y}{dx^3})_i$	1	–8	13		–13	8	–1	$O(h^4)$
$h^4(\frac{d^4y}{dx^4})_i$		1	–4	6	–4	1		$O(h^2)$
$6h^4(\frac{d^4y}{dx^4})_i$	–1	12	–30	56	–39	12	–1	$O(h^4)$

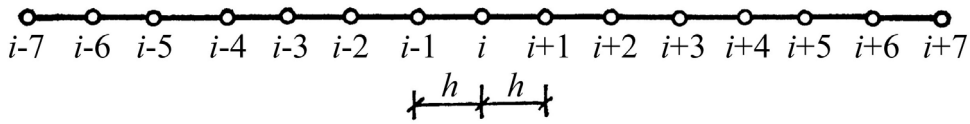


Рис. 1.4. К определению центрированных производных в конечных разностях

Центрированная формула для третьей производной с четырьмя узлами получена на основе формул (1.2) и (1.7) следующим образом:

$$(\frac{d^3y}{dx^3})_i = (\frac{d}{dx}(\frac{d^2y}{dx^2}))_i \approx \frac{(\frac{d^2y}{dx^2})_{i+1} - (\frac{d^2y}{dx^2})_{i-1}}{2h} =$$

$$= \frac{\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2} - \frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{h^2}}{2h} = \frac{-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^3}. \quad (1.13)$$

Центрированная формула с пятью узлами для четвертой производной в узле i получена на основе формулы (1.7):

$$(\frac{d^4y}{dx^4})_i = (\frac{d^2}{dx^2}(\frac{dy^2}{dx^2}))_i \approx \frac{(\frac{d^2y}{dx^2})_{i-1} - 2(\frac{d^2y}{dx^2})_i + (\frac{d^2y}{dx^2})_{i+1}}{h^2} =$$

$$= (\frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{h^2} - 2\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2})\frac{1}{h^2} =$$

$$= \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4}. \quad (1.14)$$

Рассмотрим также особенности вывода односторонних формул в конечных разностях на примере левой односторонней формулы для третьей производной (рис. 1.4). С этой целью, пользуясь формулой (1.1), выведем вначале левую одностороннюю формулу для второй производной в точке i:

$$(\frac{d^2y}{dx^2})_i = (\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}))_i \approx \frac{(\frac{dy}{dx})_i - (\frac{dy}{dx})_{i-1}}{h} \approx$$

$$\approx \frac{\frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h}}{h} = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2}.$$

Отсюда

$$(\frac{d^3y}{dx^3})_i = (\frac{d}{dx}(\frac{d^2y}{dx^2}))_i \approx \frac{(\frac{d^2y}{dx^2})_i - (\frac{d^2y}{dx^2})_{i-1}}{h} \approx$$

$$\approx \frac{\frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2} - \frac{y_{i-1} - 2y_{i-2} + y_{i-3}}{h^2}}{h} =$$

$$= \frac{y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}}{h^3}. \qquad (1.15)$$

Левую одностороннюю формулу для третьей производной со значениями функции в меньшем числе узлов получим, применяя как односторонние, так и центрированные формулы (рис. 1.4):

$$(\frac{d^3y}{dx^3})_i = (\frac{d^2}{dx^2}(\frac{dy}{dx}))_i \approx \frac{(\frac{dy}{dx})_{i-1} - 2(\frac{dy}{dx})_i + (\frac{dy}{dx})_{i+1}}{h^2} \approx$$

$$\approx \frac{\frac{y_i - y_{i-2}}{2h} - 2\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h}}{h^2} = \frac{-y_{i-2} + 2y_{i-1} - y_i}{2h^3}. \qquad (1.16)$$

В дальнейшем воспользуемся также центрированной формулой для третьей производной, включающей пять узловых значений функции:

$$(\frac{d^3y}{dx^3})_i \approx \frac{y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^3}. \qquad (1.17)$$

1.2. Метод конечных разностей

Смысл метода конечных разностей рассмотрим вначале на простом, но достаточно характерном примере, в котором полученные результаты можно сопоставить с известным точным решением. Пусть необходимо определить компоненты напряженно-деформированного состояния жестко защемленной левым концом $(x = 0)$ балки длиной l и постоянной жесткостью D, загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью – q. Разделим заданную область $0 \le x \le l$ на четыре равные части и обозначим узлы (рис. 1.5).

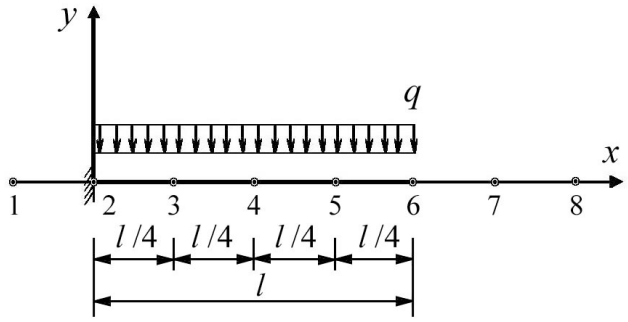


Рис. 1.5. К определению компонент напряженно-деформированного состояния жестко защемленной левым концом балки

В соответствии с моделью жестко защемленной одним концом балки, изгибаемой поперечной нагрузкой (глава 2 раздел 1), дифференциальное уравнение изгиба записывается в виде:

$$\frac{d^4W}{dx^4} = -\frac{q}{D} \tag{1.18}$$

при граничных условиях:

$$x = 0:\ W = 0,\ \frac{dW}{dx} = 0; \tag{1.19}$$

$$x = l:\ M = D\frac{d^2W}{dx^2},\ Q = D\frac{d^3W}{dx^3} = 0. \tag{1.20}$$

Пользуясь центрированной формулой (1.14), запишем уравнение (1.18) в конечных разностях для узла i (см. рис. 1.4):

$$W_{i-2} - 4W_{i-1} + 6W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2} = -\frac{qh^4}{D}. \tag{1.21}$$

Поставив в соответствие внутренний узел 3 на схеме рис. 1.5 узлу i на схеме рис. 1.4 при $h = \frac{l}{4}$, запишем конечно-разностный аналог (1.21) уравнения (1.18) для узла 3:

$$W_1 - 4W_2 + 6W_3 - W_4 + W_5 = -\frac{ql^4}{256}. \tag{1.22}$$

На основе аналогичных рассуждений запишем уравнение (1.21) для внутренних узлов 4, 5:

$$W_2 - 4W_3 + 6W_4 - W_5 + W_6 = -\frac{ql^4}{256}; \tag{1.23}$$

$$W_3 - 4W_4 + 6W_5 - 4W_6 + W_7 = -\frac{ql^4}{256}. \tag{1.24}$$

Граничные условия (1.19), (1.20) для выбранной схемы узлов (см. рис. 1.5) в конечных разностях на основе формул (1.2), (1.7), (1.16):

$$W_2 = 0; \tag{1.25}$$

$$\frac{W_3 - W_1}{2\frac{l}{4}} = 0; \tag{1.26}$$

$$D\frac{W_7 - 2W_6 + W_5}{(\frac{l}{4})^2} = 0; \tag{1.27}$$

$$D\frac{-W_4 + 2W_5 - W_6}{2(\frac{l}{4})^3} = 0. \tag{1.28}$$

Из уравнений (1.26), (1.27) получим выражения $W_1 = W_3$, $W_7 = -W_5 + 2W_6$ и вместе со значением $W_2 = 0$ подставим их в уравнения (1.22)–(1.24), которые вместе с уравнением (1.28) образуют разрешающую систему линейных алгебраических уравнений метода конечных разностей при выбранной схеме узлов. Решением системы являются значения прогибов балки:

$$W_3 = -0{,}0117\frac{ql^4}{D};\ W_4 = -0{,}0352\frac{ql^4}{D};$$

$$W_5 = -0{,}0625\frac{ql^4}{D};\ W_6 = -0{,}0898\frac{ql^4}{D}.$$

Вычислим также величину изгибающего момента в опоре:

$$M_2 = D(\frac{d^2W}{dx^2})_2 \approx D\frac{W_1 - 2W_2 + W_3}{(\frac{l}{4})^2} =$$

$$= D\frac{2W_3}{(\frac{l}{4})^2} = D\frac{2(-0{,}0117\frac{ql^4}{D})}{\frac{l^2}{16}} = -0{,}374ql^2.$$

Вычисленные величины W_6, M_2 при выбранной схеме узлов существенно меньше точных значений (соответственно $-0{,}125\frac{ql^4}{D}$; $-0{,}5ql^2$), погрешности приближенного решения: 28,16% и 25,2%, что вполне объясняется особенностями метода. Дело в том, что в дифференциальном

уравнении изгиба балки, записанном в конечных разностях, учитывается нагрузка, действующая симметрично относительно соответствующего узла на участке, равном выбранному шагу h. Так, в уравнении (1.24) для узла 5 учитывается нагрузка интенсивностью – q, действующая на участке $\frac{5}{8}l \le x \le \frac{7}{8}l$, а нагрузка, действующая у свободного конца консоли на участке $\frac{7}{8}l \le x \le l$ (рис. 1.6) и оказывающая весьма существенное влияние на напряженно-деформированное состояние балки, при данном выборе схемы узлов вообще не принимается во внимание.

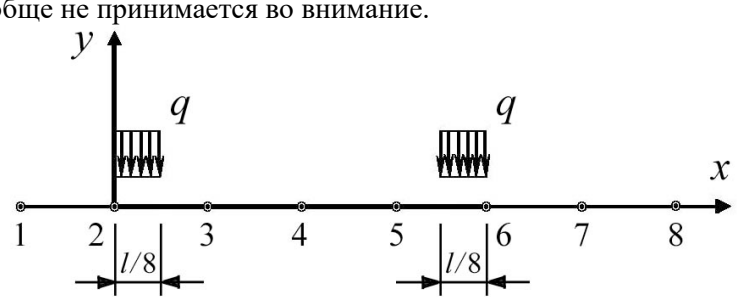


Рис. 1.6. К определению величины нагрузки на балку

Точно так же не учитывается в уравнении (1.22) для узла 3 и нагрузка, действующая на участке $0 \le x \le \frac{l}{8}$. При увеличении числа узлов и уменьшении шага h погрешность данного рода будет, очевидно, стремиться к нулю, однако при этом порядок разрешающей системы линейных алгебраических уравнений и, соответственно, трудоемкость решения будет быстро возрастать.

Уточнить решение практически без увеличения порядка разрешающей системы можно несколькими способами. Реализуя один из них, запишем уравнение (1.21) и для узла 6, что вполне правомерно, так как этому узлу соответствует реальное сечение балки. При этом свободный член уменьшим вдвое, так как на данный узел нагрузка передается с участка $\frac{7}{8}l \le x \le l$, длина которого равна половине шага $\frac{l}{4}$:

$$W_4 - 4W_6 + 6W_6 - 4W_7 + W_8 = -\frac{ql^4}{256D}. \qquad (1.29)$$

Граничное условие для Q в узле 6 запишем в данном случае, используя для третьей производной от прогиба более точную центрированную формулу (см. таблицу 1.1):

$$(\frac{d^3W}{dx^3})_6 = \frac{-W_4 + 2W_5 - 2W_7 + W_8}{2h^3} = 0. \quad (1.30)$$

На основе формул (1.27), (1.30) получим выражения для прогибов во внеконтурных узлах 7 и 8:

$$W_7 = 2W_6 - W_5;\ W_8 = W_4 - 4W_5 + 4W_6$$

и, подставив их в уравнение (1.29), в результате получим:

$$2W_4 - 4W_5 + 2W_6 = -\frac{ql^4}{512D}. \quad (1.31)$$

Решив систему уравнений (1.22)–(1.24), (1.31), получим значения $W_6 = -0{,}1113\frac{ql^4}{D}$, $M_2 = -0{,}4375ql^2$ (погрешности по сравнению с точным решением составляют соответственно 10,96% и 12,5%). При рассмотренной схеме узлов решение еще можно уточнить, если учесть действие нагрузки на участке $0 \le x \le \frac{l}{8}$.

Таким образом, расчет конструкций в перемещениях методом конечных разностей сводится к реализации следующих этапов:

1. Формирование физической и математической моделей конструкции, запись основных (основного) дифференциальных уравнений и граничных условий.

2. Формирование исходного узлового шаблона и формирование конечно-разностных аналогов основных (основного) дифференциальных уравнений и граничных условий применительно к исходному шаблону. Какого типа формулы в конечных разностях применять (с каким количеством узлов, центрированные или односторонние), зависит от целого ряда факторов, в том числе от уровня требуемой точности решения, характера граничных условий, возможностей применяемой вычислительной техники и т.п.

3. Формирование расчетной схемы конструкции, выбор схемы узлов и их обозначение.

4. Запись конечно-разностных аналогов основных (основного) дифференциальных уравнений во всех внутренних узлах, в которых неизвестны значения искомых перемещений.

5. Запись конечно-разностных аналогов граничных условий во всех граничных узлах. В тех узлах, где значения искомых перемещений известны, полученные уравнения могут быть использованы для выражения неизвестных в законтурных точках.

6. Решение полученной в результате реализации пп. 4, 5 разрешающей системы линейных алгебраических уравнений и определение основных неизвестных.

7. Формирование конечно-разностных аналогов формул, выражающих прочие необходимые компоненты напряженно-деформированного состояния через перемещения, и вычисление значений этих компонентов в заданных узлах.

Как и в случае применения других приближенных методов, в методе конечных разностей важнейшее практическое значение имеет оценка уровня точности полученного при выбранной схеме узлов решения. Можно ли довольствоваться полученными результатами решения или следует продолжить его при меньшем шаге h и, следовательно, большем числе неизвестных и более высоком порядке разрешающей системы уравнений? При расчете сложных и ответственных конструкций чаще всего проводят анализ «относительной сходимости» решения, т.е. сравнение результатов, полученных при различной «густоте» схемы узлов, например при шаге h и $0{,}5h$. Если разница в результатах не превышает некоторой наперед заданной, например в процентах, величины, то решение для шага $0{,}5h$ принимается в качестве окончательного.

1.3. Метод конечных разностей для двухмерных областей

Основной смысл метода конечных разностей сохраняется и при решении задач для многомерных областей. В двухмерной области выбираются узлы, которые вместе с соединяющими их отрезками прямой образуют сетку. Поэтому метод конечных разностей, применяемый для решения двухмерных задач, часто называют еще методом сеток, а для решения трехмерных задач – методом решеток. Наиболее широко и эффективно применяются типы сеток с прямоугольными и квадратными ячейками.

Запишем несколько формул, выражающих производные функции двух переменных $u(x, y)$ в конечных разностях для сетки с квадратной ячейкой и шагом сетки h (рис. 1.7).

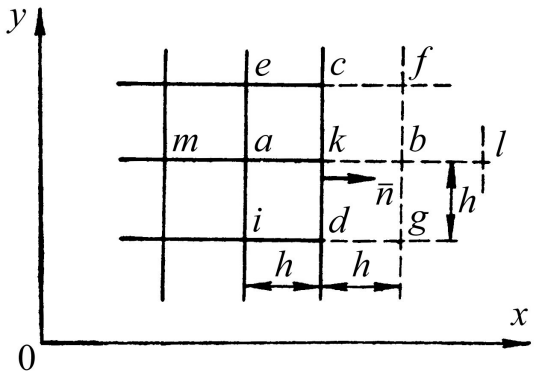


Рис. 1.7. К определению производных функции двух переменных в конечных разностях для сетки с квадратной ячейкой

Аналогично формулам (4.2), (4.7) можно записать:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_k \approx \frac{u_b - u_a}{2h};\ \ (\frac{\partial u}{\partial y})_k \approx \frac{u_c - u_d}{2h};$$

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_k \approx \frac{u_a - 2u_k + u_b}{h^2};\ \ (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_k \approx \frac{u_d - 2u_k + u_c}{h^2}. \qquad (1.32)$$

Выведем теперь формулу для смешанной производной:

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})_k = (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}))_k \approx \frac{(\frac{\partial u}{\partial y})_b - (\frac{\partial u}{\partial y})_a}{2h} \approx \frac{\frac{u_f - u_g}{2h} - \frac{u_e - u_i}{2h}}{2h} =$$

$$= \frac{u_f - u_g - u_e + u_i}{4h^2}. \qquad (1.33)$$

В качестве примера решим методом сеток в квадрате $-2h \le x \le 2h$, $-2h \le y \le 2h$ (рис. 1.8) граничную задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.34)$$

и граничных условий

$x = \pm 2h$: $u = 0$;

$y = 0$: $u = 0$;

$-2h \le x \le 2h, y = 4h$: $u = 1 + \frac{x}{2h}$;

$0 \le x \le 2h, y = 4h$: $u = 1 - \frac{x}{2h}$.

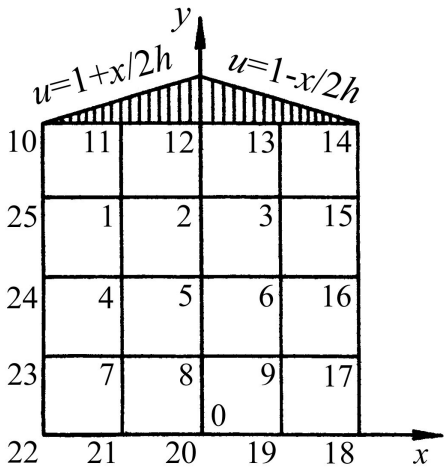


Рис. 1.8. К решению граничной задачи для уравнения Лапласа

Решение задачи выражает характер распределения температуры в области, занимаемой пластинкой, температура которой на границе выражена данными граничными условиями.

В соответствии с формулами (1.32) уравнение Лапласа (1.34) в конечных разностях для узла k (см. рис. 1.7) можно записать:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_k \approx \frac{u_a-2u_k+u_b}{h^2}+\frac{u_d-2u_k+u_c}{h^2}=0,$$

отсюда

$$u_a+u_b+u_c+u_d-4u_k=0. \qquad (1.35)$$

Теперь система уравнений Лапласа в конечных разностях для внутренних узлов выбранной сетки (см. рис. 1.8) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
u_2 + u_{25} + u_{11} + u_4 - 4u_1 &= 0;\\
u_3 + u_1 + u_{12} + u_5 - 4u_2 &= 0;\\
u_{15} + u_2 + u_{13} + u_6 - 4u_3 &= 0;\\
u_5 + u_{24} + u_1 + u_7 - 4u_4 &= 0;\\
u_6 + u_4 + u_2 + u_8 - 4u_5 &= 0;\\
u_{16} + u_5 + u_3 + u_9 - 4u_6 &= 0;\\
u_8 + u_{23} + u_4 + u_{21} - 4u_7 &= 0;\\
u_9 + u_7 + u_5 + u_{20} - 4u_8 &= 0;\\
u_{17} + u_8 + u_6 + u_{19} - 4u_9 &= 0.
\end{aligned} \qquad (1.36)$$

Подставим в уравнения системы (1.36) заданные граничными условиями значения функции $u(x,y)$ в узлах на границе $u_{11}=u_{13}=0{,}5;$

$u_{21}=1;\ u_{15}=u_{16}=u_{17}=u_{19}=u_{20}=u_{21}=u_{23}=u_{24}=u_{25}=0.$ Учтем также, что в силу симметрии относительно оси *Oy* справедливы равенства $u_3=u_1$, $u_6=u_1, u_9=u_7$ и уравнения, записанные для узлов 3, 6, 9, выражают соотношения, полностью совпадающие с соотношениями, выражаемыми уравнениями для узлов 1, 4, 7. Поэтому одну из этих групп уравнений следует из рассмотрения исключить.

Исключив из рассмотрения уравнения для узлов 3, 6, 9, окончательно получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
4u_1 &- u_1 - u_1 - 0{,}5 = 0;\\
2u_1 &- 4u_1 + u_1 + 1 = 0;\\
u_1 &- 4u_1 + u_1 + u_1 = 0;\\
u_2 &+ 4u_1 - 4u_1 + u_1 = 0;\\
u_4 &- 4u_{74} + u_8 = 0;\\
u_5 &+ 2u_{74} - 4u_8 = 0.
\end{aligned}$$

Решением данной системы являются значения $u_1=0{,}26340;$ $u_4=0{,}12501;\ u_5=0{,}18750;\ u_7=0{,}04911;\ u_8=0{,}07144.$

Для прямоугольной сетки нерегулярной структуры оператор Лапласа в конечных разностях может быть выражен следующим образом (рис. 1.9):

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_i \approx \frac{2}{h_1+h_2}\left(\frac{u_k}{h_1}+\frac{u_l}{h_2}\right)+\frac{2}{h_3+h_4}\left(\frac{u_m}{h_3}+\frac{u_n}{h_4}\right)-2\left(\frac{1}{h_1h_2}+\frac{1}{h_3h_4}\right)u_i.$$

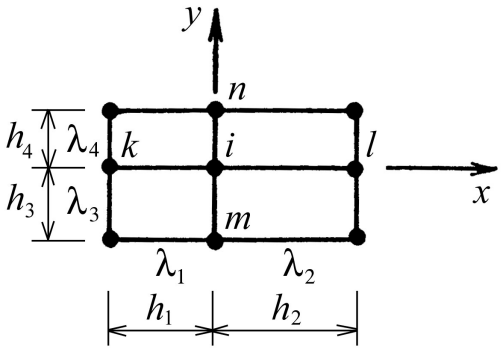


Рис. 1.9. К определению оператора Лапласа в конечных разностях для прямоугольной сетки нерегулярной структуры

При расчете тонких изгибаемых плит методом конечных разностей с применением прямоугольной сетки нерегулярной структуры (рис. 1.10) конечно-разностный аналог основного дифференциального уравнения изгиба (2.31) главы 2 раздела 1 может быть выражен следующим образом [6]:

$$\frac{2}{h_2(h_2+h_3)}\left(\frac{2}{h_1+h_3}\left(\frac{W_s}{h_1}+\frac{W_i}{h_2}\right)+\frac{2}{h_6+h_7}\left(\frac{W_0}{h_6}+\frac{W_q}{h_7}\right)-\right.$$
$$-2W_k\left(\frac{1}{h_1h_2}+\frac{1}{h_6h_7}\right)\Big)+\frac{2}{h_3(h_2+h_3)}\left(\frac{2}{h_3+h_4}\left(\frac{W_i}{h_3}+\frac{W_t}{h_4}\right)+\right.$$
$$+\frac{2}{h_6+h_7}\left(\frac{W_r}{h_6}+\frac{W_p}{h_7}\right)-2W_l\left(\frac{1}{h_3h_4}+\frac{1}{h_6h_7}\right)\Big)+$$
$$+\frac{2}{h_6(h_6+h_7)}\left(\frac{2}{h_2+h_3}\left(\frac{W_0}{h_2}+\frac{W_r}{h_3}\right)+\frac{2}{h_5+h_6}\left(\frac{W_u}{h_5}+\frac{W_i}{h_6}\right)-\right.$$
$$-2W_m\left(\frac{1}{h_2h_3}+\frac{1}{h_5h_6}\right)\Big)+\frac{2}{h_7(h_6+h_7)}\left(\frac{2}{h_2+h_3}\left(\frac{W_q}{h_2}+\frac{W_p}{h_3}\right)+\right.$$
$$+\frac{2}{h_7+h_8}\left(\frac{W_i}{h_7}+\frac{W_v}{h_8}\right)-2W_n\left(\frac{1}{h_2h_3}+\frac{1}{h_7h_8}\right)\Big)-$$
$$-2\left(\frac{1}{h_2h_3}+\frac{1}{h_6h_7}\right)\left(\frac{2}{h_2+h_3}\left(\frac{W_k}{h_2}+\frac{W_l}{h_3}\right)+\frac{2}{h_6+h_7}\left(\frac{W_m}{h_6}+\frac{W_n}{h_7}\right)-\right.$$
$$\left.-2W_i\left(\frac{1}{h_2h_3}+\frac{1}{h_6h_7}\right)\right)=\frac{q_i}{D}. \qquad (1.37)$$

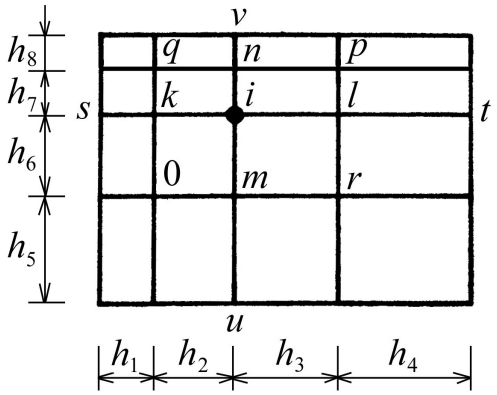


Рис. 1.10. К расчету тонких изгибаемых плит методом конечных разностей с применением прямоугольной сетки нерегулярной структуры

Если $h_1=h_2=h_3=h_4=h_x;\ h_5=h_6=h_7=h_8=h_y$ (прямоугольная сетка регулярной структуры), то уравнение (1.37) сводится к виду:

$$(6(\alpha+\frac{1}{\alpha})+8)W_i-4((1+\alpha)(W_k+W_l)+(1+\frac{1}{\alpha})(W_m+W_n))+$$

$$+2(W_0+W_p+W_q+W_r)+\alpha(W_s+W_t)+\frac{1}{\alpha}(W_u+W_v)=\frac{q_i h_y^4}{D}, \quad (1.38)$$

где $\alpha=\dfrac{h_y^4}{h_x^4}$.

Наконец, для квадратной сетки получим:

$$20W_i-8(W_k+W_l+W_m+W_n)+2(W_0+W_p+W_q+W_r)+$$
$$+W_s+W_l+W_u+W_v=\frac{q_i h^4}{D}. \quad (1.39)$$

Формулы (2.24), (2.25) главы 2 раздел 1 для M_x, M_y, M_{xy} в конечных разностях в узле i прямоугольной сетки можно записать в виде:

$$M_x=-(\alpha(W_k+W_l)+\mu(W_m+W_n)-2(\alpha+\mu)W_i)\frac{D}{h_y^2}; \quad (1.40)$$

$$M_y=-(\alpha\mu(W_k+W_l)+W_m+W_n-2(1+\alpha\mu)W_i)\frac{D}{h_y^2}; \quad (1.41)$$

$$M_{xy}=-(1-\mu)\sqrt{\alpha}((W_0+W_p)-(W_q+W_r))\frac{D}{4h_y^2}. \quad (1.42)$$

Формулу (2.34) главы 2 раздела 1 для обобщенной поперечной силы V_x в конечных разностях для узла i прямоугольной сетки можно записать в виде:

$$V_x=(2\sqrt{\alpha}(\alpha-\mu+2)(W_l-W_k)-\sqrt{\alpha}(2-\mu)(W_r-$$
$$-W_0+W_p-W_q)-\alpha\sqrt{\alpha}(W_t-W_s))\frac{D}{2h_y^3}. \quad (1.43)$$

Обобщенная поперечная сила V_y:

$$V_y=(2(1+2\alpha-\mu\alpha)(W_n-W_m)-(2-\mu)\alpha(W_p-$$
$$-W_r+W_q-W_0)+W_v-W_u)\frac{D}{2h_y^3}. \quad (1.44)$$

На примере изотропной прямоугольной плиты постоянной толщины на упругом основании рассмотрим основные особенности составления разрешающей системы линейных алгебраических уравнений метода сеток [6]. Основное дифференциальное уравнение изгиба плиты в этом случае записывается в виде:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q(x,y) - k}{D}, \tag{1.45}$$

где k – коэффициент постели.

Обозначим

$$\frac{k}{D} = \bar{k},\ WD = \overline{W} \tag{1.46}$$

и запишем уравнение (1.45) следующим образом:

$$\frac{\partial^4 \overline{W}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \overline{W}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \overline{W}}{\partial y^4} + \bar{k}\overline{W} = q. \tag{1.47}$$

Уравнение (1.47) в конечных разностях для точки i (рис. 1.11) в случае квадратной сетки с шагом $h = y_x = y_y$ имеет вид

$$(20 + \bar{k}h^4)\overline{W}_i - 8(\overline{W}_k + \overline{W}_l + \overline{W}_m + \overline{W}_n) +$$
$$+ 2(\overline{W}_0 + \overline{W}_p + \overline{W}_q + \overline{W}_r) + \overline{W}_s + \overline{W}t + \overline{W}_u + \overline{W}_v = q_i h^4. \tag{1.48}$$

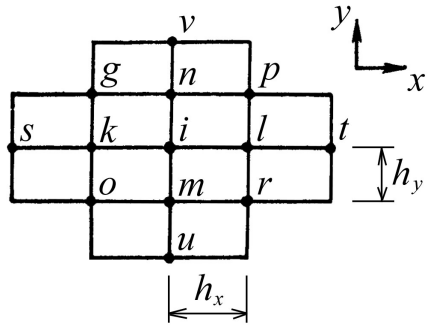


Рис. 1.11. К расчету изотропной прямоугольной плиты постоянной толщины

Выражения для граничных условий в конечных разностях будут иметь такой же вид, как (1.40)–(1.44), если в них заменить W на $\overline{W}$ и приравнять D единице.

В данном примере принято, что плита опирается на упругое основание, а ее края остаются свободными, в каждом граничном узле момент, действующий в плоскости, нормальной к краю, и обобщенная поперечная сила равны нулю. При записи данных условий в центрированных конечных разностях для каждого из граничных узлов в рассмотрение попадают два законтурных узла, значения функции $W(x,y)$ в которых неизвестны, поэтому в случае свободного края в каждом из граничных узлов записывают дополнительно основное дифференциальное уравнение изгиба плиты в конечных разностях, в данном случае – уравнение (1.48). Выражая функцию прогибов W в первом и втором законтурных узлах через внутренние, а также граничные узлы из двух указанных выше граничных условий и подставляя

эти выражения в уравнение (1.48), можем ввести в разрешающую систему линейных алгебраических уравнений вместо трех лишь по одному для каждого граничного узла уравнению (будем называть его приведенным), при этом значения W во внеконтурных узлах в качестве неизвестных в данную систему не входят.

Приведенные основные дифференциальные уравнения для их применения в узлах свободного края плиты для квадратной сетки при $\mu = \frac{1}{6}$ (бетон, железобетон) предложены в работе [6]:

Произвольный узел i свободного края (рис. 1.12, *а*):

$$(14{,}499996 + \bar{k}h^4)\overline{W}_i - 11{,}333332\overline{W}_k - 7{,}222220(\overline{W}_m + \overline{W}_n) +$$

$$+ 3{,}666666(\overline{W}_0 + \overline{W}_q) + 2\overline{W}_s + 0{,}972222(\overline{W}_u + \overline{W}_v) = \frac{q_i h^4}{2}.$$

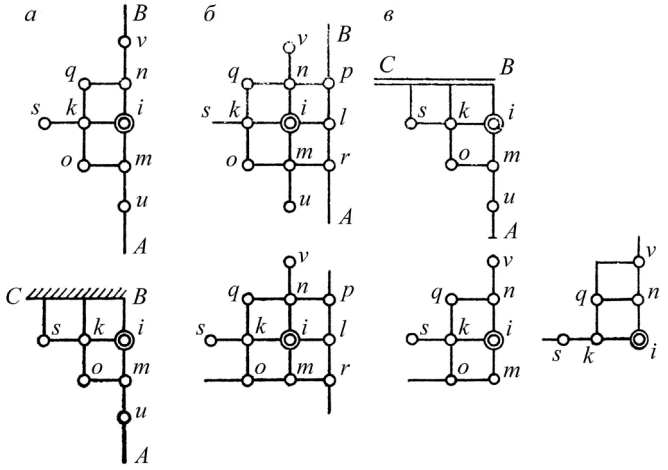


Рис. 1.12. К определению функции прогибов

Предконтурная точка i свободного края (рис. 1.12, *б*):

$$(19 + \bar{k}h^4)\overline{W}_i - 8\overline{W}_k - 5{,}666666\overline{W}_l - 8(\overline{W}_m + \overline{W}_n) + 2\overline{W}_0 +$$

$$+ 1{,}833333\overline{W}_p + 2\overline{W}_q + 1{,}833333\overline{W}_r + \overline{W}_s + \overline{W}_u + \overline{W}_v = q_i h^4.$$

Для узла i свободного края, примыкающего к шарнирно опертому краю BC (рис. 1.12, *в*):

$$(13{,}527774 + \bar{k}h^4)\overline{W}_i - 11{,}333333\overline{W}_k - 7{,}222222\overline{W}_m +$$

$$+ 3{,}666666\overline{W}_0 + 2\overline{W}_s + 0{,}97\overline{W}_u = 0{,}5q_i h^4.$$

Для узла i свободного края, примыкающего к жестко защемленному краю BC (рис. 1.12, *г*):

$$(17{,}416667 + \bar{k}h^4)\overline{W}_i - 11{,}33333\overline{W}_k - 7{,}708331\overline{W}_m + 3{,}666666\overline{W}_0 +$$

$$+2\overline{W}_s + 0{,}972222\overline{W}_u = 0{,}5q_i h^4.$$

Для узла i, когда перпендикулярные края pr и ro свободны (рис. 1.12, *д*):

$$(18+\bar{k}h^4)\overline{W}_i - 8\overline{W}_k - 5{,}666666\overline{W}_l - 5{,}666666\overline{W}_m - 8\overline{W}_n +$$
$$+1{,}833333(\overline{W}_0 + \overline{W}_p) + 2\overline{W}_q + 1{,}666666\overline{W}_r + \overline{W}_s + \overline{W}_v = q_i h^4.$$

Для узла i, расположенного на свободном краю, когда примыкающий край ot также свободен (рис. 1.12, *е*):

$$(13{,}527774+\bar{k}h^4)\overline{W}_i - 11{,}333332\overline{W}_k - 5{,}2777776\overline{W}_m -$$
$$-7{,}222220\overline{W}_n + 3{,}666666\overline{W}_0 + 3{,}666666\overline{W}_q + 2\overline{W}_s = 0{,}5q_i h^4.$$

Для узла i свободного угла (рис. 1.12, *ж*):

$$(10{,}555555+\bar{k}h^4)\overline{W}_i - 10{,}555552(\overline{W}_k + \overline{W}_n) +$$
$$+6{,}666664\overline{W}_q + 1{,}944444(\overline{W}_s + \overline{W}v) = 0{,}25q_i h^4.$$

Следует отметить, что для углового узла i с двумя примыкающими свободными краями si и iu записать основное дифференциальное уравнение и граничные условия для M_x, M_y, V_x, V_y в центрированных конечных разностях не удается, так как в этом случае на пять уравнений приходится шесть узлов (граничный узел i и пять внеконтурных узлов v, n, p, l, t). Конечно-разностный аналог основного дифференциального уравнения и граничных условий необходимо в этом случае составить с применением односторонних формул таким образом, чтобы один из названных граничных узлов в них не входил.

1.4. Выражения для операторов в косоугольных сетках

Метод сеток может быть эффективно применен для решения граничных задач в областях различного типа и различных системах координат [6]. Пусть в общем случае u и v – косоугольные координаты (рис. 1.13); α – угол наклона оси v, ось u совпадает с осью x.

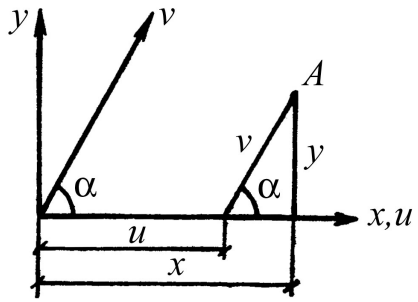


Рис. 1.13. К определению косоугольных координат

При этом

$$x = u + v\cos\alpha;\quad y = v\sin\alpha;$$

$$u = x - \frac{y\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad v = \frac{y}{\sin\alpha}. \tag{1.49}$$

Тогда для некоторой функции $\varphi(x, y)$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{1.50}$$

Аналогично:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\sin^2\alpha;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\sin\alpha;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\frac{1}{\sin^2\alpha} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}. \tag{1.51}$$

Выражение для оператора Лапласа $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ можно получить, используя уравнения (1.51):

$$\sin^2\alpha\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cos\alpha. \tag{1.52}$$

Для узла i параллелограммной сетки (рис. 1.14) выражение (1.52) преобразуется к виду:

$$2\chi^2\lambda^2\sin^2\alpha\nabla^2\varphi = 2\chi^2(\varphi_k+\varphi_l)+2(\varphi_m+\varphi_n)-$$
$$-4(1+\chi^2)\varphi_i-\chi\cos\alpha((\varphi_o+\varphi_p)-(\varphi_q+\varphi_r)). \qquad (1.53)$$

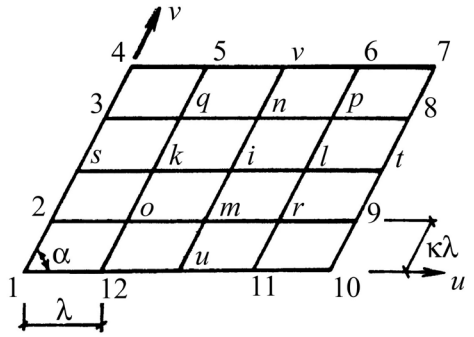


Рис. 1.14. К определению оператора Лапласа с использованием параллелограммной сетки

Выражение (1.53) упрощается в случае ромбической сетки при $\chi = 1$:

$$\lambda^2\sin^2\alpha\nabla^2\varphi = \varphi_k+\varphi_l+\varphi_m+\varphi_n-4\varphi_i-$$
$$-0{,}5\cos\alpha((\varphi_o+\varphi_p)-(\varphi_q+\varphi_r)). \qquad (1.54)$$

Бигармонический оператор $\nabla^2\nabla^2 = \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$ для узла i ромбической сетки (см. рис. 1.14) имеет вид:

$$(\nabla^2\nabla^2\varphi)_i = \frac{1}{\lambda^2\sin^2\alpha}(\nabla^2\varphi_k+\nabla^2\varphi_l+\nabla^2\varphi_m+\nabla^2\varphi_n-4\nabla^2\varphi_i)-$$
$$-0{,}5\cos\alpha((\nabla^2\varphi_o+\nabla^2\varphi_p)-(\nabla^2\varphi_g+\nabla^2\varphi_r)).$$

Этот оператор будет двадцатипятичленным в отличие от тринадцатичленного для прямоугольной сетки. Для $\alpha = 60^\circ$ этот оператор принимает вид:

$$9\lambda^4\nabla^4\varphi = 320\varphi_i-120(\varphi_k+\varphi_l+\varphi_m+\varphi_n)+32(\varphi_o+\varphi_p)+$$
$$+16(\varphi_s+\varphi_t+\varphi_u+\varphi_v)+8(\varphi_3+\varphi_5+\varphi_9+\varphi_{11})+\varphi_4+\varphi_{10}-\varphi_1-\varphi_7.$$

Рассмотрим сетку, ячейки которой представляют правильные шестиугольники (рис. 1.15).

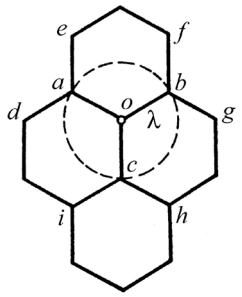


Рис. 1.15. К определению оператора Лапласа с использованием сетки из правильных шестиугольников

Радиус окружности, проходящей через точки a, b и c, $R = \lambda$.

На основании теоремы о среднем можно записать:

$$\nabla^2\varphi_o = \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c}{3} - \varphi_o\right)$$

или

$$\frac{\lambda^2}{4}\nabla^2\varphi_o = \varphi_{cp} - \varphi_o.$$

Бигармонический оператор можно представить в виде:

$$\nabla^2\nabla^2\varphi_o = \frac{4}{3\lambda^2}(\nabla^2\varphi_a + \nabla^2\varphi_b + \nabla^2\varphi_c - 3\nabla^2\varphi_o).$$

После подстановки выражений для гармонических операторов и приведения подобных получим:

$$\frac{9\lambda^4}{16}\nabla^2\nabla^2\varphi = 12\varphi_o - 6(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c) + \varphi_d + \varphi_f + \varphi_l + \varphi_g + \varphi_h + \varphi_i.$$

Для ячеек в форме равносторонних треугольников (рис. 1.16) оператор Лапласа для узла o можно представить в виде:

$$\frac{3\lambda^2}{2}\nabla^2\varphi_o = \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d + \varphi_e + \varphi_j - 6\varphi_o.$$

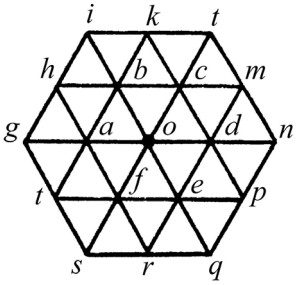


Рис. 1.16. К определению оператора Лапласа с использованием сетки с ячейками в форме равносторонних треугольников

Бигармонический оператор в этом случае может быть представлен в виде:

$$\frac{9\lambda^4}{4}\nabla^2\nabla^2\varphi = 42\varphi_o - 10(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d + \varphi_e + \varphi_f) +$$

$$+ 2(\varphi_h + \varphi_k + \varphi_m + \varphi_p + \varphi_r + \varphi_t) + \varphi_{g+}\varphi_i + \varphi_l + \varphi_n + \varphi_g + \varphi_{s.}$$

Эффективно применяется метод конечных разностей и в полярной системе координат. Для радиальной сетки регулярной структуры $\theta = \text{const},\ \lambda = \text{const}$ (рис. 1.17) оператор Лапласа в конечных разностях выражается следующим образом:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}. \qquad (1.55)$$

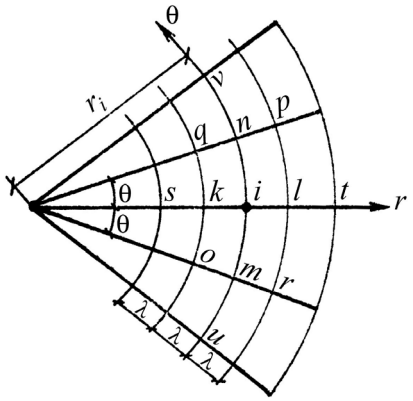


Рис. 1.17. К определению оператора Лапласа с использованием радиальной сетки регулярной структуры

Применяя для производных, входящих в (1.55), выражения в конечных разностях для узла *i*:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{\varphi_k - 2\varphi_i + \varphi_l}{\lambda^2};\ \ \frac{1}{r_i}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r_i}\frac{\varphi_l - \varphi_k}{2\lambda};$$

$$\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial(r_i\theta)^2} = \frac{\varphi_m - 2\varphi_i + \varphi_n}{s_i^2},$$

где $s_i = r - \theta$, получим:

$$\lambda^2(\nabla^2\varphi)_i = (1-\chi_i)\varphi_k + (1+\chi_i)\varphi_l + \alpha_i(\varphi_m + \varphi_n) - 2(1+\alpha_i)\varphi_i, \qquad (1.56)$$

где $\chi_i = \dfrac{\lambda}{2r_i},\ \alpha_i = \dfrac{\lambda^2}{s_i^2}.$

Пользуясь выражением (1.56), бигармонический оператор можно представить в виде:

$$\lambda^4(\nabla^2\nabla^2\varphi)_i = (1-\chi_i)\nabla^2\varphi_k + (1+\chi_i)\nabla^2\varphi_l +$$
$$+(1+\chi_i)\nabla^2\varphi_l + a_i\nabla^2(\varphi_m+\varphi_n) - 2(1+a_i)\nabla^2\varphi_i. \qquad (1.57)$$

Очевидно, имеют место следующие равенства между величинами: $a_i = a_m = a_n$, $a_k = a_o = a_g$, $a_l = a_r = a_p$, $\chi_i = \chi_m = \chi_n$, $\chi_o = \chi_k = \chi_q$, $\chi = \chi_r = \chi_p$, и теперь на основе соотношений (1.56), (1.57) можно записать:

$$\lambda^4(\nabla^2\nabla^2\varphi)_i = ((1-\chi_i)(1+\chi_k) + (1+\chi_i)(1-\chi_l) + 2a_i^2 - 4(1+a_i)^2)\varphi_i -$$
$$-2(1-\chi_i)(2+a_i+a_k)\varphi_k - 2(1+\chi_i)(2+a_i+a_l)\varphi_l - 4a_i(1+a_i)\times$$
$$\times(\varphi_m+\varphi_n) + (1-\chi_i)(a_k+a_i)(\varphi_o+\varphi_g) + (1+\chi_i)(a_l+a_i)(\varphi_p+\varphi_r) +$$
$$+(1-\chi_i)(1-\chi_k)\varphi_s + (1+\chi_i)(1+\chi_l)\varphi_t + a_i^2(\varphi_u+\varphi_v).$$

Центральный узел o (рис. 1.18) и узлы, примыкающие к центру, являются особыми: операторы, записанные для них в конечных разностях, имеют своеобразную структуру.

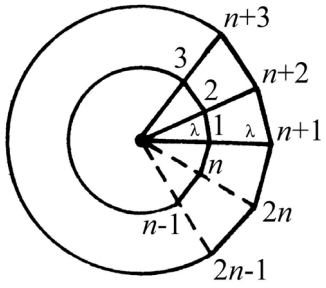


Рис. 1.18. К описанию центрального узла и узлов, примыкающих к центру

Так, оператор Лапласа для узла o, выраженный на основе теоремы о среднем, имеет вид:

$$\nabla^2\varphi_o = \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n}{n} - \varphi_o\right),$$

или

$$\nabla^2\varphi_o = \frac{4}{n\lambda^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i - n\varphi_o\right).$$

Бигармонический оператор имеет вид:

$$\nabla^2\nabla^2\varphi_o = \frac{4}{n\lambda^2}\left(\nabla^2\sum_{i=1}^{n}\varphi_i - n\nabla^2\varphi_o\right),$$

откуда

$$\lambda^4\nabla^2\nabla^2\varphi_o = \frac{4}{n}\left(n(1-\chi_1)\varphi_o + (1+\chi_1)\sum_{I=1}^{N}\varphi_{n+1} - 2\sum_{i=1}^{i=n}\varphi_i\right).$$

Для циклически симметричных задач $\varphi_1 = \varphi_2 = ... = \varphi_n$, $\varphi_{n+1} = \varphi_{n+2} = ... = \varphi_{2n}$ и тогда

$$\nabla^2 \varphi_o = \frac{4}{\lambda^2}(\varphi_1 - \varphi_o);$$

$$\lambda^4 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_o = 4((1-\chi_1)\varphi_o + (1+\chi_1)\varphi_{n+1} - 2\varphi_1).$$

Учитывая, что $\chi_1 = 0{,}5$, получим:

$$\lambda^4 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_0 = 2(\varphi_o + 3\varphi_{m+1} - 4\varphi_1).$$

Так как $\varphi_i = \varphi_m = \varphi_n$, оператор (1.56) упрощается:

$$\lambda^2 \nabla^2 \varphi_i = (1-\chi_1)\varphi_k + (1+\chi_i)\varphi_l - 2\varphi_i.$$

Аналогично можно упростить и бигармонический оператор.

Для точки 1 (см. рис. 1.18) бигармонический оператор можно получить следующим образом. Запишем оператор Лапласа на основании выражения (1.56) и с учетом $\chi_i = \chi_1 = 0{,}5$:

$$a_i = \frac{\lambda^2}{s_i^2} = \frac{\lambda_2}{(\lambda\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{(2\frac{\pi}{n})^2} = \frac{n^2}{4\pi^2},$$

получим:

$$\lambda^2 \nabla^2 \varphi_1 = 0{,}5\varphi_o + 1{,}5\varphi_{n+1} + \frac{n^2}{4\pi^2}(\varphi_n + \varphi_2) - 2(1 + \frac{n^2}{4\pi^2})\varphi_1.$$

Бигармонический оператор в этом случае выражается:

$$\lambda^4 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_1 = 0{,}5\nabla^2 \varphi_o + 1{,}5\nabla^2 \varphi_{n+1} + \frac{n^2}{4\pi^2}\nabla^2(\varphi_n + \varphi_2) - 2(1 + \frac{n^2}{4\pi^2})\nabla^2 \varphi_1.$$

В случае радиальной решетки нерегулярной структуры (рис. 1.19) гармонический оператор можно представить в виде:

$$\nabla^2 \varphi_i = \frac{2}{\lambda_i + \lambda_l}(\frac{\varphi_l}{\lambda_l} - (\frac{1}{\lambda_l} + \frac{1}{\lambda_i})\varphi_i + \frac{\varphi_{k\lambda}}{\lambda_i}) + \frac{1}{r_i(s_i + s_{n)}}(\varphi_n \frac{s_i}{s_n} -$$

$$-(\frac{s_i}{s_n} - \frac{s_n}{s_i})\varphi_i - \frac{s_n}{s_i}\varphi_m) + \frac{2}{s_i + s_n}(\frac{\varphi_n}{s_n} - (\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_i})\varphi_i + \frac{\varphi_m}{s_i}).$$

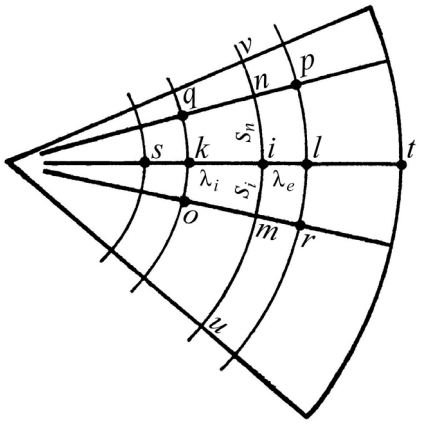


Рис. 1.19. Случай радиальной решетки нерегулярной структуры

Аналогично записывают бигармонический оператор.

1.5. Дифференциальные операторы в прямоугольной пространственной системе координат

В случае параллелепипедной решетки регулярной структуры (рис. 1.20) оператор Лапласа от трех переменных x, y, z выражается:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

а для точки o примет вид:

$$\nabla^2\varphi_o = \frac{\varphi_1 - 2\varphi_o + \varphi_2}{\lambda_x^2} + \frac{\varphi_3 - 2\varphi_o + \varphi_4}{\lambda_y^2} + \frac{\varphi_5 - 2\varphi_o + \varphi_6}{\lambda_z^2}. \qquad (1.58)$$

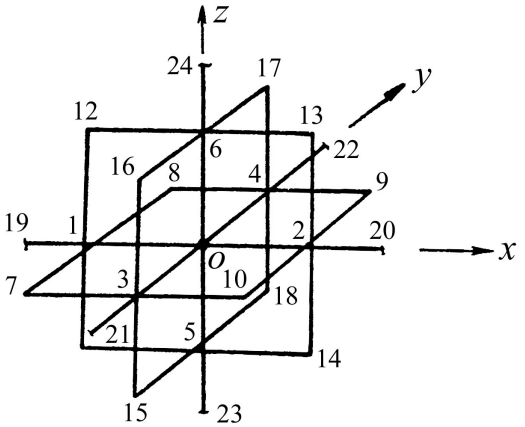


Рис. 1.20. Случай параллелепипедной решетки регулярной структуры

Обозначив в (1.58) $(\frac{\lambda_z}{\lambda_x})^2 = a, (\frac{\lambda_z}{\lambda_y})^2 = \beta,$ получим:

$$\lambda_z^2 \nabla^2 \varphi_o = a(\varphi_1 + \varphi_2) + \beta(\varphi_3 + \varphi_4) + \varphi_5 + \varphi_6 - 2(1 + a + \beta)\varphi_o. \quad (1.59)$$

Бигармонический оператор для трех переменных имеет вид:

$$\lambda^4 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_o = 2((1 + a^2\beta^2) + 2(1 + a + \beta)^2)\varphi_o - 4(1 + a + \beta)(a(\varphi_1 + \varphi_2) + \beta(\varphi_3 + \varphi_4) + \varphi_5 + \varphi_6) + 2(a\beta(\varphi_7 + \varphi_8 + \varphi_9 + \varphi_{10}) + a(\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13}\varphi_{14}) + \beta(\varphi_{15} + \varphi_{16} + \varphi_{17} + \varphi_{18})) + a^2(\varphi_{19} + \varphi_{20}) + \beta^2(\varphi_{21} + +\varphi_{22})\varphi_{23} + \varphi_{24}. \quad (1.60)$$

Для кубической решетки $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda, \alpha = \beta = 1$ оператор (1.59) упрощается:

$$\lambda^2 \nabla^2 \varphi_o = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 - 6\varphi_o,$$

или

$$\lambda^2 \nabla^2 \varphi_o = 6(\varphi_{cp} - \varphi_o).$$

Точно так же упрощается и 25-членное выражение (1.60):

$$\lambda^4 \nabla^2 \nabla^2 \varphi_o = 42\varphi_o - 12\sum_{i=1}^{6} \varphi_i + 2\sum_{i=7}^{18} \varphi_i + \sum_{i=19}^{24} \varphi_i.$$

Для тетраэдрической решетки регулярной структуры (рис. 1.21) оператор для точки o, являющейся центром описанного шара радиуса $R = \lambda \frac{\sqrt{6}}{4}$, выражается на основе теоремы о среднем следующим образом:

$$\nabla^2 \varphi_o = \frac{3}{2R^2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_o).$$

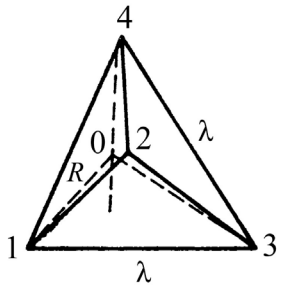


Рис. 1.21. Случай тетраэдрической решетки регулярной структуры

Подставив вместо обозначений узлов обозначения гармонического оператора для соответствующих узлов, можно получить выражение для бигармонического оператора.

Глава 3
ВАРИАЦИОННЫЕ И ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

3.1. Вариационные принципы

Большинство современных приближенных и численных методов, получивших широкое развитие в связи с внедрением в инженерную практику ЭВМ, базируется на вариационных принципах. Среди многих несомненных достоинств таких методов особенно важными являются следующие:

– большая общность и, в силу этого, возможность приложения к решению самых различных классов граничных задач;

– инвариантность формы представления основных уравнений и соотношений;

– четкая и логически обоснованная последовательность реализации основных этапов.

Следуя изложению материала в работах [39, 42], рассмотрим основные понятия, относящиеся к теме данной главы.

Вариация и функционал. Через две фиксированные точки *A, B* на плоскости (рис. 3.1) проведем кривую $y = y(x)$ и кривую $y_1 = y_1(x)$, всюду отличающуюся от первой кривой на бесконечно малую величину.

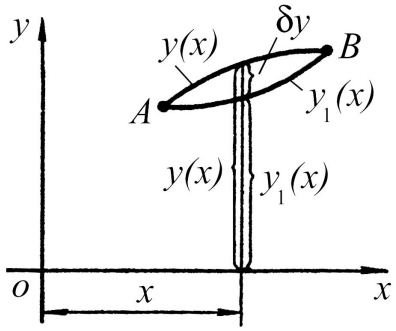


Рис. 3.1. К определению понятия вариации

Разность между $y(x)$ и $y_1(x)$ обозначим символом δy и назовем вариацией (точнее, первой вариацией). Символ δ был предложен Лагранжем, чтобы подчеркнуть ее виртуальный характер. Варьирование означает бесконечно малое изменение функции при фиксированном положении точек *A* и *B*.

Фактически бесконечно малое изменение, называемое варьированием, подобно дифференцированию в математическом анализе и выполняется по тем же правилам, но не связано с действительным изменением независимой переменной.

Обозначим длину кривой $y(x)$ буквой L, кривая $y_1(x)$ будет уже другой длины. Поэтому можно утверждать, что

$$L = L(y(x)),$$

или

$$\Pi = \Pi(y(x)).$$

Переменная величина Π называется функционалом, зависящим от функции $y(x)$, если каждой функции $y(x)$ соответствует некоторое число Π.

В механике твердого тела под функционалом понимают в общем случае некоторую энергетическую величину, выражаемую через перемещения или напряжения, соответствующие принятой математической модели. Решение граничной задачи вариационными методами сводится к нахождению стационарного значения (обычно – минимума) некоторого функционала.

Принцип сохранения механической энергии. Пусть на балку *AB* (рис. 3.2) в вертикальном направлении действует постепенно возрастающая от нуля до значения P сила, и окончательная величина прогиба балки под точкой приложения силы равна W.

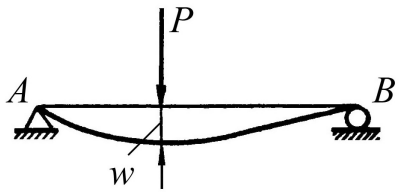


Рис. 3.2. Балка под действием вертикальной сосредоточенной силы

В процессе деформации балки сила совершает работу

$$W_e = \frac{1}{2} PW.$$

При деформации в упругом теле возникают внутренние силы, совершающие работу на соответствующих перемещениях, после удаления нагрузки конструкция возвращается в исходное состояние, при этом работа, как и деформация, обратима (в данном случае потери не принимаются во внимание).

Таким образом, балка приобретает способность совершать работу и накапливать энергию, которая зависит от формы ее изогнутой оси и называется потенциальной энергией. Потенциальная энергия внутренних сил W_i называется еще энергией деформации U. Она равна отрицательной работе внутренних сил:

$$U = -W_{i.}$$

В силу закона сохранения энергии работа внутренних сил равна и противоположна работе внешних сил:

$$W_i = -W_{e,}$$

или

$$W_e + W_i = 0.$$

В этом и состоит принцип сохранения механической энергии.

Энергия деформации и дополнительная энергия. Представим стержень, растягиваемый силой P (рис. 3.3), модуль которой постепенно возрастает от нуля до P_1 (рис. 3.4), а окончательное удлинение при этом равно Δ_1.

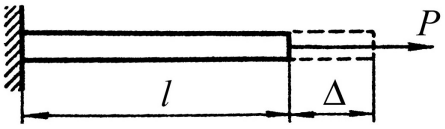


Рис. 3.3. Стержень, растягиваемый силой P

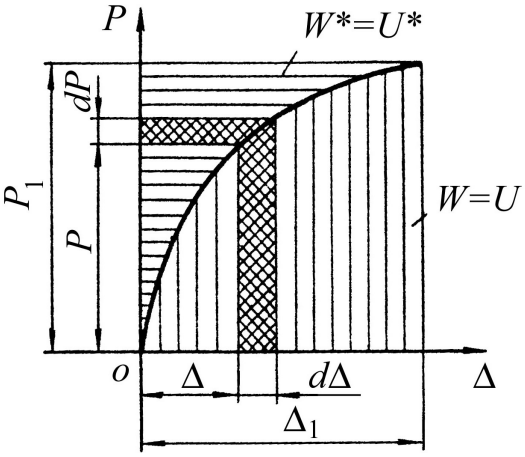


Рис. 3.4. График «P-Δ»

Деформацию будем считать упругой и нелинейной. Работа, совершаемая силой P, выражается, по-видимому, величиной

$$W = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta .$$

Здесь интеграл соответствует площади, расположенной под кривой, отображающей изменение деформации при изменении силы (рис. 3.4). Эта работа накапливается в стержне в виде энергии деформации:

$$W = U.$$

Аналогично, удельная энергия (рис. 3.5)

$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon.$$

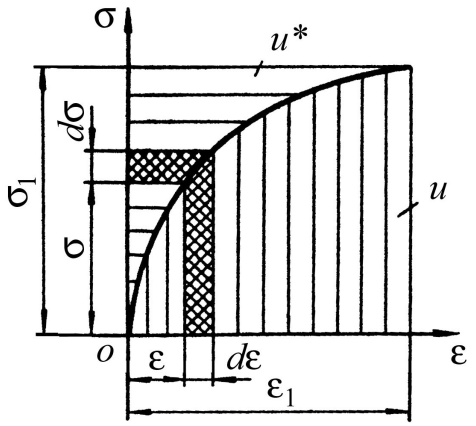


Рис. 3.5. График «σ-ε» в случае нелинейного закона изменения деформации

Тогда полная энергия деформации

$$U = \int_v u dv.$$

В случае линейного закона изменения деформации (рис. 3.6)

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2}.$$

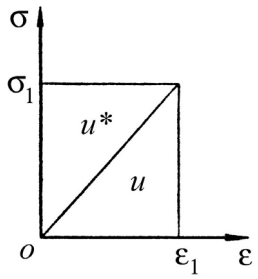


Рис. 3.6. График «σ-ε» в случае линейного закона изменения деформации

Рассмотрим теперь часть площади, расположенной на рис. 3.4 над кривой (заштрихована горизонтальными линиями). Назовем эту площадь *дополнительной работой* и обозначим W^*. Она определяется по формуле

$$W^* = \int_0^{P_1} \Delta dP.$$

Дополнительной энергией U^* назовем величину, равную дополнительной работе W^*:

$$U^* = W^*.$$

Обратим внимание на то, что

$$W + W^* = P_1 \Delta_i.$$

Аналогично, удельная дополнительная энергия равна

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma,$$

а полная дополнительная энергия

$$U^* = \int_v u^* dv.$$

В случае, когда зависимости $P - \Delta$ или $\sigma - \varepsilon$ линейны,

$$W = W^*; \;\; U = U^*; \;\; u = u*.$$

Принцип виртуальной работы для материальной точки. Пусть свободная материальная точка *a* под действием системы сил находится в равновесии (рис. 3.7), ее возможное бесконечно малое (в любом направлении) перемещение обозначим δr.

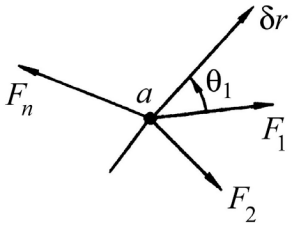


Рис. 3.7. Равновесие свободной материальной точки *a* под действием системы сил

При этом величины сил и их направления считаются неизменными. Тогда возможная работа силы $F_1 \delta r \cos\theta_1 = F_{1r} \delta r$, где F_{1r} – проекция силы F_1 на δr. Элементарная работа всех сил

$$\delta W = F_{1r}\delta r + F_{2r}\delta r + ... + F_{nr}\delta r = (\sum_{i=1}^{n} F_{ir})\delta r. \qquad (3.1)$$

Поскольку материальная точка находится в равновесии, то сумма проекций всех сил (выражение в скобках) равна нулю. Следовательно,

$$\delta W = 0.$$

В этом и состоит принцип виртуальной (возможной) работы (виртуальных, или возможных перемещений), который формулируется следующим образом: *если материальная точка находится в равновесии, то полная работа всех сил на возможных перемещениях равна нулю.*

Выдвинув гипотезу о равенстве нулю элементарной работы всех сил $(\delta W = 0)$, придем, в соответствии с (3.1), к условию равновесия $(\sum_{i=1}^{n} F_{ir} = 0)$, так как $\delta r \neq 0$. Таким образом, законы Ньютона и принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) представляют собой альтернативные, но эквивалентные формулировки двух основных законов.

Принцип виртуальной работы для балки. Пусть под действием системы сил (рис. 3.8, *а*) балка деформировалась и находится в равновесии.

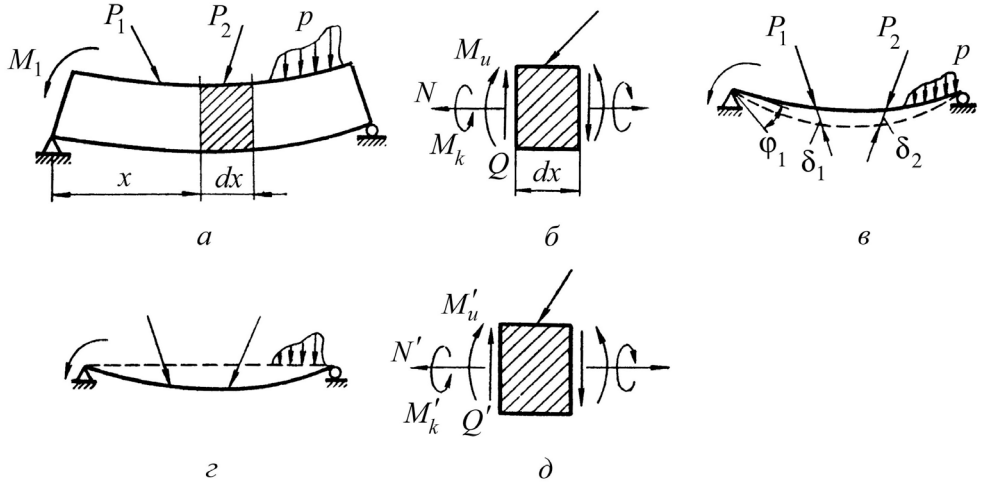


Рис. 3.8. К определению принципа виртуальной работы: а - деформированное состояние балки под действием системы сил; б - схема действия силовых факторов на бесконечно малый элемент балки, находящейся под действием системы сил; в - возможные перемещения балки в случае трансформации уже изогнутого состояния в новое изогнутое состояние; г - возможные перемещения балки в случае трансформации уже изогнутого состояния в первоначальное, неизогнутое состояние; д - схема действия силовых факторов на бесконечно малый элемент балки, находящейся под действием новой произвольной системы сил

Выделим из нее бесконечно малый элемент dx (рис. 3.8, *б*), на левую грань которого действуют силовые факторы M_u, Q, N, M_k. С противоположной стороны действуют те же факторы, но с соответствующими приращениями.

Сообщим уже изогнутой балке возможные деформации (например, для случая, когда изогнутая ось балки совпадает со штриховой линией на рис. 3.8, *в*), не нарушающие ее внутренних и внешних связей. Внешние и внутренние силы уже имеют заданные величины и направления, которые при возможных перемещениях не меняются. Другой вариант возможных перемещений показан штриховой линией на рис. 3.8, *г*, где в качестве возможных приняты перемещения балки, которая возвращается из изогнутого состояния в первоначальное, неизогнутое.

В качестве возможных можно принять перемещения, вызванные действием любой нагрузки, любой температуры, осадки опор и т.д. В качестве возможных можно также принять и те перемещения, которые

вызываются окончательным значением действующих сил. Тогда виртуальная работа внешних сил запишется так:

$$W_e = P_1\delta_1 + M_1\varphi_1 + \ldots$$

Поскольку силы P_1, M_1 и т.д., возраставшие от нуля, достигли своих величин, а их направления при возможных деформациях не меняются, то работа записывается без множителя $1/2$.

Работу внутренних сил можно определить через силовые факторы, напряжения и деформации. Для балки, показанной на рис. 3.8,*а*, в качестве виртуальных перемещений выберем те, которые возникнут под действием новой произвольной системы сил. Пусть при этом в сечении возникнут силовые факторы M'_u, Q', N', M'_k (рис. 3.8, *д*). Тогда, например, от M'_u возникнет угловая деформация $\dfrac{M'_u dx}{EI}$, которая может рассматриваться как виртуальное перемещение для M_u, и т.д. В соответствии с этим работу внутренних сил можно записать так:

$$W_i = \int \frac{M_u M'_u}{EI} dx + \int \frac{QQ'k}{GF} dx + \int \frac{NN'}{EF} dx + \int \frac{M_k M'_k}{GI_k} dx . \qquad (3.2)$$

Нетрудно увидеть, что действительная работа внутренних сил, соответствующая потенциальной энергии, запишется формулой, аналогичной формуле (3.2), но с множителем $1/2$.

Принцип виртуальной работы для упругого тела. Упругое тело можно рассматривать как систему материальных точек (рис. 3.9, *а*).

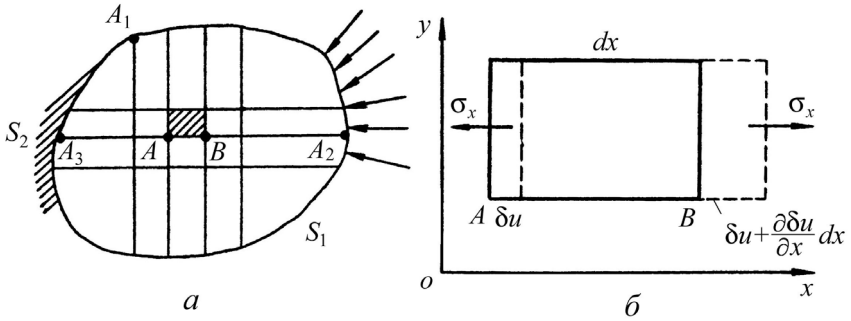


Рис. 3.9. К определению принцип виртуальной работы для упругого тела: а - упругое тело как система материальных точек; б - деформирование бесконечно малого элемента упругого тела

Допустим, что произошло возможное перемещение каждой из точек тела. Возможная работа сил, действующих на каждую точку, равна нулю, а потому общая возможная работа тоже должна равняться нулю.

Следует принять во внимание важную особенность материальной точки тела (например, точки A) по сравнению со свободной точкой. Все точки тела, как и точка A, связаны с примыкающими точками, и эта связь при любом возможном перемещении не должна нарушаться. Иначе говоря, должно соблюдаться условие сплошности, или неразрывности. Условие это будет соблюдаться, если возможное перемещение выразить с помощью непрерывных функций. Перемещение точки A не фиксируется, и вариация здесь допустима. Точно так же можно варьировать перемещения на свободной поверхности S_1, например, в точках A_1 или A_2. Если же точка (например, A_s) принадлежит участку поверхности S_2, где перемещения зафиксированы (например, в случае закрепления это перемещение равно нулю), то вариация перемещения равна нулю.

Выделим из тела бесконечно малый элемент (на рисунке этот элемент заштрихован). Пусть действительные перемещения точки A будут u, v, w, а составляющие виртуальных перемещений – соответственно $\delta u, \delta v, \delta w$ – непрерывные функции координат x, y, z – согласуются с граничными условиями.

Рассмотрим перемещения и работу в направлении оси Ox. Если перемещению u придать приращение δu, то элемент переместится в точке A на δu, а в точке B – на $\delta u + \dfrac{\partial \delta u}{\partial x}$. Возможная работа сил взаимодействия

$$\delta dW = \sigma_x(\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x}dx)dydz - \sigma_x \delta u dydz = \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x}dxdydz. \qquad (3.3)$$

Приращение деформаций

$$\delta\varepsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}.$$

Но при $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\delta\varepsilon_x = \delta(\frac{\partial u}{\partial x}).$$

Отсюда

$$\delta\varepsilon_x = \delta(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial \delta u}{\partial x}. \qquad (3.4)$$

Перепишем выражение (3.3), используя формулу (3.4):

$$\delta dW = \sigma_x \delta\varepsilon_x dxdydz = E\varepsilon_x \delta\varepsilon_x dxdydz.$$

Элементарная энергия деформации

$$dU = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dxdydz = \frac{E}{2}\varepsilon_x^2 dxdydz.$$

Варьируя по ε_x, получим приращение элементарной потенциальной энергии:

$$\delta dU = E\varepsilon_x \delta\varepsilon_x dxdydz,$$

откуда

$$d\delta W = d\delta U\ . \tag{3.5}$$

Интегрируя выражение (3.5), можно прийти к выводу, что полная работа δW усилий взаимодействия между элементами тела, являющимися внешними по отношению к каждому элементу, равна приращению потенциальной энергии δU, т.е.

$$\delta W = \delta U,$$

или

$$\delta U - \delta W = 0; \delta(U - W) = \delta\Pi = 0, \tag{3.6}$$

где $\Pi = U - W$ есть полная потенциальная энергия системы. Тем самым сформулирован *принцип потенциальной энергии,* или *вариационный принцип Лагранжа,* который можно представить следующим образом: *из множества кинематически допустимых систем перемещений, отвечающих заданным граничным условиям, те, которые удовлетворяют условиям равновесия, придают потенциальной энергии системы стационарное значение. В состоянии устойчивого равновесия величина* Π *минимальна.*

Вариационное уравнение Лагранжа порождает уравнение равновесия и граничные условия, оно же лежит в основе метода перемещений в строительной механике.

Запишем теперь уравнение (3.6) для общего случая пространственной задачи теории упругости. Пусть тело T (рис. 3.10) во всем объеме V нагружено объемными силами (X, Y, Z – единичные объемные силы), на части поверхности S_1 действуют поверхностные силы ($\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ – единичные поверхностные силы), на части поверхности S_2 тело закреплено.

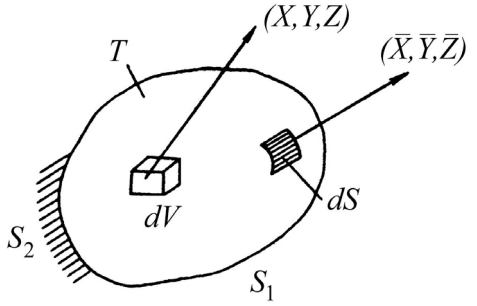


Рис. 3.10. К определению общего случая пространственной задачи теории упругости

Варьируя перемещения, запишем выражение δW следующим образом:

$$\delta W = \iiint\limits_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dV + \iint\limits_{S_1} (\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v + \overline{Z}\delta w)dS, \qquad (3.7)$$

где S_1 – часть поверхности, на которой перемещения не заданы. На основании (3.7) выражение (3.6) запишем следующим образом:

$$\iiint\limits_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dV + \iint\limits_{S_1} (\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v + \overline{Z}\delta w)dS - \delta U = 0. \qquad (3.8)$$

Поскольку при варьировании перемещений составляющие сил X, Y, Z и $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ не меняются, можно отнести знак δ ко всему выражению в целом. Тогда

$$\delta(\iiint\limits_V (Xu + Yv + Zw)dV + \iint\limits_{S_1} (\overline{X}u + \overline{Y}v + \overline{Z}w)dS - U) = 0;$$

здесь

$$W = \iiint\limits_V (Xu + Yv + Zw)dV + \iint\limits_{S_1} (\overline{X}u + \overline{Y}v + \overline{Z}w)dS$$

– работа объемных и поверхностных сил на возможных перемещениях, а U – потенциальная энергия или взятая с обратным знаком энергия деформации.

Удельная энергия деформации

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}). \qquad (3.9)$$

Воспользовавшись законом Гука, формулу (3.9) можно записать только через напряжения:

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2).$$

Точно так же можно u представить через составляющие деформаций:

$$u = \frac{1}{2}\lambda e^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{G}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2),$$

где

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

Иногда удобно удельную энергию u записать через составляющие перемещений, в частности для балки или пластинки – через одну компоненту вектора перемещений, а именно через прогибы w.

Описанный путь решения задач, когда варьируются перемещения, эквивалентен методу перемещений. Возможен и другой путь, эквивалентный методу сил. В этом случае варьируются не перемещения, а силы или

напряжения, которые не фиксированы. При этом должны соблюдаться условия равновесия как внутри тела, так и на части поверхности S_1.

Принцип дополнительной энергии. Для тела T (рис. 3.10) объемные силы X,Y,Z внутри всего тела и поверхностные $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$ на части поверхности S_1 фиксированы, а потому их нельзя варьировать.

На части поверхности S_2, где заданы перемещения, поверхностные силы не известны и могут варьироваться. Тогда аналогично выражению (3.8) имеем

$$\iint_{S_2}(u\delta\overline{X}+v\delta\overline{Y}+w\delta\overline{Z})dS-\delta U=0.$$

Поскольку при варьировании поверхностных сил составляющие перемещений не меняются, знак δ можно вынести за скобку:

$$\delta(\iint_{S_2}(\overline{X}u+\overline{Y}v+\overline{Z}w)dS-U)=0.$$

Величину

$$W^*=\iint_{S_2}(\overline{X}u+\overline{Y}v+\overline{Z}w)dS$$

называют *дополнительной работой,* а величину

$$U-W^*=\Pi^*$$

– *дополнительной энергией.* Отсюда следует новый принцип:

$$\delta\Pi^*=0,$$

который называется **принципом Кастильяно или принципом дополнительной энергии.** Этот принцип формулируется так: *из множества статически допустимых напряжений, удовлетворяющих условиям равновесия внутри тела и на той части поверхности, где заданы поверхностные силы, те напряжения, которые удовлетворяют условиям совместности, придают дополнительной энергии стационарное значение. В условиях устойчивого равновесия величина* Π^* *минимальна.*

Возможен и смешанный подход, когда частично варьируются перемещения, а частично – напряжения.

3.2. Энергетическое пространство

Рассмотрим некоторые фундаментальные положения теории энергетического пространства [41], положенные в основу теоретического обоснования вариационных методов.

Пусть основное дифференциальное уравнение граничной задачи записано в виде

$$Au = f, \tag{3.10}$$

где u – искомый элемент некоторого функционального пространства, т.е. пространства, базис в котором составляют функции, например, гильбертова пространства L_2 [41], A – заданный дифференциальный оператор, f – известный элемент того же или некоторого другого пространства.

Оператор A называется оператором данной граничной задачи. Если заданная функция f удовлетворяет определенным условиям в заданной области *G*, то решением граничной задачи может быть только функция из некоторого функционального множества, элементы которого также удовлетворяют в *G* и на ее границе S определенным условиям, в том числе граничным условиям задачи. Такое множество называют областью определения оператора A и обозначают его $M(A)$.

Например, если в граничной задаче в области *G* для уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f$$

и граничного условия всюду на S

$$U = 0$$

заданная функция f является в G непрерывной, то искомая функция U должна быть непрерывной в замкнутой области $G + S$, а ее первые и вторые производные – непрерывными в области G. Оператор A задачи, в данном случае оператор Лапласа, определен на функциях, удовлетворяющих следующим условиям:

– непрерывность в замкнутой области $G + S$ и равенство нулю на границе;

– непрерывность первых и вторых производных в области *G*.

Множество $M(A)$ можно превратить в гильбертово пространство, если в нем определить скалярное произведение $(v \cdot w)$ двух его произвольных элементов v и w.

В рассматриваемом примере введем скалярное произведение в $M(A)$:

$$(v \cdot w) = \int_G vw dG. \tag{3.11}$$

Оператор A называется самосопряженным, если для двух любых элементов v и w из $M(A)$ выполняется равенство

$$(Av \cdot w) = (v \cdot Aw). \tag{3.12}$$

В данном примере оператор A является самосопряженным. Действительно, для любых двух элементов $M(A)$ может быть записана формула Грина [2]:

$$\int_G (\Delta v) w dG + \int_S \frac{\partial v}{\partial n} w dS = \int_G v(\Delta w) dG + \int_S v \frac{\partial w}{\partial n} dS. \qquad (3.13)$$

С учетом равенства нулю на S элементов $M(A)$ формула (3.13) принимает вид

$$\int_G (\Delta v)\, w dG = \int_G v(\Delta w)\, dG \qquad (3.14)$$

или, с учетом (3.11),

$$(Av \cdot w) = (v \cdot Aw), \qquad (3.15)$$

что и требовалось доказать.

Самосопряженный оператор A, определенный в некотором гильбертовом пространстве, называется положительным, если для любого элемента u из $M(A)$ выполняется равенство

$$(Au \cdot u) \geq 0\,. \qquad (3.16)$$

Если A – положительный оператор, то скалярное произведение $(Au \cdot u)$ называется энергией элемента u по отношению к оператору A

Доказано, что если оператор Aявляется положительным, то уравнение (3.10) имеет не более одного решения.

Всякий положительный оператор может быть связан с особым гильбертовым пространством, называемым энергетическим. Пусть A – положительный оператор и определено гильбертово пространство, которое обозначим H, полученное введением в $M(A)$ скалярного произведения. Введем новое скалярное произведение в M, которое для произвольных элементов v и w запишем в форме

$$[v, w] = (Av \cdot w). \qquad (3.17)$$

Величина $[v, w]$ называется энергетическим произведением элементов v и w.

Теорема 1. *Пусть A – положительный оператор. Если уравнение $Au = f$ имеет решение, то это решение сообщает функционалу*

$$F(u) = (Au \cdot u) - 2(u \cdot f) \qquad (3.18)$$

наименьшее значение. Обратно, если существует элемент, реализующий минимум функционала (3.18), *то этот элемент является решением уравнения $Au = f$.*

Как видим, функционал (3.18) включает энергетическое произведение элемента u самого на себя. Отсюда метод, состоящий в замене граничной задачи для уравнения (3.10) задачей о минимуме функционала (3.18), называется энергетическим методом, а функционал (3.18) – функционалом энергетического метода.

В качестве примера рассмотрим граничную задачу в двухмерной прямоугольной области $-a \le x \le a;\ \ -b \le y \le b$ для дифференциального уравнения

$$\Delta u = 2(x-a)^2 + 2(y-b)^2$$

и условия всюду на границе области

$$u = 0.$$

В данном примере оператор A есть оператор Лапласа Δ, $f = 2(x-a)^2 + 2(y-b)^2$. Функционал (3.18) имеет вид

$$F(u) = \int_{-a-b}^{a\ b} (\Delta u) u dx dy - 2 \int_{-a-b}^{a\ b} u(2(x-a)^2 + 2(y-b)^2) dx dy. \qquad (3.19)$$

Точным решением задачи является функция

$$u = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2). \qquad (3.20)$$

Среди всех функций, принадлежащих области определения оператора данной задачи, функция (3.20) сообщает функционалу (3.19) минимальное значение.

Сформулированная выше теорема не дает указаний ни на условия существования решения граничной задачи, ни на то, как такое решение можно построить. Одним из методов построения такого решения является метод Ритца.

3.3. Метод Ритца

Пусть существует такая последовательность элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots$ энергетического пространства H_A, что для любого элемента $u \in H_A$ и числа $\varepsilon \succ 0$ могут быть определены натуральное число N и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, удовлетворяющие неравенству

$$\left| u - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \psi_i \right| \prec \varepsilon.$$

Если указанное условие выполняется, последовательность элементов называется *полной по энергии*. Обычно полагают, что такая последовательность включает только линейно независимые элементы.

Применяя метод Ритца, задаются натуральным числом n и строят приближенное решение u_n вариационной задачи в виде:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i. \qquad (3.21)$$

Постоянные (коэффициенты) α_i выбирают таким образом, чтобы величина функционала (3.18) для выбранного числа n была минимальной:

$$F(u_n) = (Au_n \cdot u_n) - 2(u_n \cdot f) = \min . \qquad (3.22)$$

Поскольку $F(u_k)$ есть функция величин α_i, их значения, сообщающие функционалу минимальное значение, определяют решением системы n линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&[\psi_1,\psi_1]\alpha_1 + [\psi_2,\psi_1]\alpha_2 + ... + [\psi_n,\psi_1]\alpha_n = (f,\psi_1);\\
&[\psi_1,\psi_2]\alpha_1 + [\psi_2,\psi_2]\alpha_2 + ... + [\psi_n,\psi_2]\alpha_n = (f,\psi_2);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[\psi_1,\psi_n]\alpha_1 + [\psi_2,\psi_n]\alpha_2 + ... + [\psi_n,\psi_n]\alpha_n = (f,\psi_n). \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Систему (3.23) можно получить, если продифференцировать выражение (3.22) по каждому из коэффициентов $\alpha_i (i = \overline{1,n})$ и полученные выражения приравнять нулю. Действительно, в соответствии со свойствами скалярного и энергетического произведений

$$\begin{aligned}
F(u_n) &= (A(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi_i),(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi_i)) - 2((\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi_i),f) =\\
&= ((\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(A\psi_i)),(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi_i)) - 2(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\psi_i,f)).
\end{aligned}$$

Выразим производную от $F(u_n)$ по α_k и приравняем ее нулю:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u_n)}{\partial \alpha_k} &= (A\psi_k,(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi_i)) + ((\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(A\psi_i),\psi_k) - 2(\psi_k,f)) =\\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(A\psi_k,\psi_i) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(A\psi_i,\psi_k) - 2(\psi_k,f) = 0. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Поскольку $(A\psi_k,\psi_i) = A(\psi_i,\psi_k) = [\psi_i,\psi_k]$, то уравнение (3.24) можно записать в виде:

$$[\psi_1,\psi_k]\alpha_1 + [\psi_2,\psi_k]\alpha_2 + ... + [\psi_n,\psi_k]\alpha_k = (f,\psi_k).$$

Подставляя в (3.24) значения $k = 1,n$, получим систему (3.23), которую называют системой Ритца. В силу линейной независимости элементов $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$, называемых *координатными*, определитель системы Ритца не равен нулю и система (3.23) имеет единственное решение.

Таким образом, весь процесс реализации метода Ритца можно представить в виде последовательности следующих основных этапов:

1. Анализ условий решаемой задачи, их соответствия условиям применения метода Ритца.

2. Запись функционала (3.18) в форме, соответствующей типу решаемой задачи.

3. Выбор полной по энергии системы координатных функций, удовлетворяющих главным граничным условиям.

4. Представление приближенного решения задачи в форме (3.21) и выражение через (3.21) всех прочих компонентов напряженно-деформированного состояния рассматриваемой конструкции, входящих в функционал (3.18). Подстановка выражения (3.21) для искомого перемещения и выражений, полученных для прочих необходимых компонентов, а также заданной внешней нагрузки в функционал.

5. Последовательное дифференцирование сформированного в п. 4 функционала по каждому из параметров α_i выражения (3.21) и составление системы (3.23) Ритца.

6. Решение системы линейных алгебраических уравнений (3.23) и определение параметров α_i выражения (3.21) для искомого перемещения.

7. Выражение всех прочих необходимых компонентов напряженно-деформированного состояния через выражение (3.21) на основе соответствующих формул применяемой модели конструкции.

В качестве первого примера применения метода Ритца рассмотрим приближенное решение граничной задачи в области, имеющей форму квадрата $(-1 \le x \le 1;\ \ -1 \le y \le 1)$ для основного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1,$$

где искомая функция $u(x, y)$ равна нулю всюду на границе.

В качестве координатных применим функции

$$\psi_{mn} = (x^2 - 1)(y^2 - 1)x^m y^n, m = \overline{0,\infty}; n = \overline{0,\infty}.$$

С учетом симметрии решения (очевидно, что $u(x = c; y = d) = u(x = d; y = c)$) ограничимся в выражении (3.21) двумя первыми членами:

$$u_2 = \alpha_{00}\psi_{00} + \alpha_{22}\psi_{22},$$

где

$$\psi_{00} = (x^2 - 1)(y^2 - 1)x^0 y^0 = (x^2 - 1)(y^2 - 1);$$

$$\psi_{22} = (x^2 - 1)(y^2 - 1)x^2 y^2.$$

Для данной задачи энергетическое произведение записывают в виде (приведем его без доказательства):

$$[\psi_{ik}, \psi_{mp}] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x}\frac{\partial \psi_{mp}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial y}\frac{\partial \psi_{mp}}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (3.25)$$

Система Ритца в данном случае состоит из двух уравнений:

$$[\psi_{00},\psi_{00}]\alpha_{00}+[\psi_{22},\psi_{00}]\alpha_{22}=(f,\psi_{00});$$
$$[\psi_{00},\psi_{22}]\alpha_{00}+[\psi_{22},\psi_{22}]\alpha_{22}=(f,\psi_{22}). \quad (3.26)$$

Составим выражения для функций, входящих в (3.25):

$$\psi_{00}=x^2y^2-x^2-y^2+1;$$
$$\psi_{22}=x^4y^4-x^4y^2-x^2y^4+x^2y^2;$$
$$\frac{\partial\psi_{00}}{\partial x}=2xy^2-2x;\frac{\partial\psi_{00}}{\partial y}=2x^2y-2y;$$
$$\frac{\partial\psi_{22}}{\partial x}=4x^3y^4-4x^3y^2-2xy^4+2xy^2;$$
$$\frac{\partial\psi_{22}}{\partial y}=4x^4y^3-2x^4y-4x^2y^3+2x^2y.$$

Вычислим для примера

$$[\psi_{22},\psi_{00}]=[\psi_{00},\psi_{22}]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}((2xy^2-2x)(4x^3y^4-4x^3y^2-2xy^4+$$
$$+2xy^2)+(2x^2y-2y)(4xy^3-2x^4y-4x^2y^3+2x^2y))dxdy\approx 0{,}1629.$$

После вычисления всех коэффициентов система (3.26) принимает вид:

$$6{,}0518\alpha_{00}+0{,}1629\alpha_{22}=1{,}7778;$$
$$0{,}1629\alpha_{00}+11{,}2016\alpha_{22}=0{,}7111.$$

Решением системы являются значения $\alpha_{00}=0{,}29217,\alpha_{22}=0{,}059233$ и, таким образом, функция $u_2=(x^2-1)(y^2-1)(0{,}29217+0{,}059233x^2y^2)$. В центре заданной области $(x=0,y=0)$ $u_2=0{,}29217.$

В рассмотренном примере граничное условие является однородным, т.е. всюду на границе искомая функция равна нулю. Если граничное условие является неоднородным, например, на границе *S*:

$$u=F(S),$$

то решение методом Ритца строят обычно в форме

$$u=u_G+u_S. \quad (3.27)$$

В выражении (3.27) функция $u_S=F(S)$ на границе заданной области, функция же u_G отыскивается методом Ритца в форме (3.21) как решение граничной задачи для дифференциального уравнения

$$Au_G=f-Au_S$$

и однородного граничного условия $u_G=0.$

Аналогично поступают и в случае нескольких неоднородных граничных условий, в том числе и включающих производные от искомой функции (функций), хотя в ряде случаев, особенно для областей сложной формы это связано с существенными трудностями.

3.4. Главные и естественные граничные условия

Область определения оператора A представляет собой множество функций, имеющих производные необходимого порядка и удовлетворяющих некоторым однородным граничным условиям. Соответствующее энергетическое пространство получается из области $M(A)$ определения оператора, но оно может кроме элементов $M(A)$ включать и другие элементы, удовлетворяющие всем условиям гильбертова пространства H_A, но не удовлетворяющие тем или иным граничным условиям задачи. Граничные условия, которым удовлетворяют все функции, входящие в область определения положительного оператора A, называются *естественными* для этого оператора, если в соответствующем энергетическом пространстве имеются функции, этим условиям не удовлетворяющие. Граничные условия, которым обязательно удовлетворяют все элементы H_A, называются *главными*.

В методе Ритца координатные функции для построения выражения (3.21) не обязательно должны быть элементами $M(A)$, достаточно, если они являются элементами H_A. Отсюда следует, что координатные функции могут не удовлетворять естественным граничным условиям, что существенно облегчает процесс их построения. В то же время удовлетворение каждой из координатных функций главным граничным условиям является обязательным.

Существует простое правило, позволяющее отличать естественные граничные условия от главных. Пусть положительный оператор A включает операции дифференцирования наивысшего порядка $2D$. Тогда естественными будут такие граничные условия, которые включают операции дифференцирования порядка D и выше. Если наивысший порядок дифференцирования в граничном условии $D-1$ или ниже, то такое граничное условие является главным. Так, в задаче изгиба балки дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4W}{dx^4} = \frac{q}{D}$$

включает операцию дифференцирования четвертого порядка. В данном случае $2D = 4,\ D = 2,$ следовательно, главными граничными условиями являются граничные условия для функции прогибов $W(x)$ и углов поворота сечений на концах балки $\varphi(x) = \dfrac{dW}{dx}$, дифференциальные операторы, выражающие эти условия, включают наивысший порядок дифференцирования соответственно 0 и 1, не превышающий величину $D - 1 = 1$. Условия же для изгибающего момента и поперечной силы, выражаемые соответственно производными второго и третьего порядков функции прогибов, являются естественными.

3.5. О применении метода Ритца к расчету строительных конструкций

Из изложенного видно, что важнейшими условиями эффективного применения метода Ритца являются соответствие дифференциального оператора (или операторов) рассматриваемой граничной задачи условиям теоремы 1, построение функционала (3.18), соответствующего принятой модели твердого деформируемого тела, и выбор координатных функций, удовлетворяющих главным граничным условиям, линейно независимых и образующих полную по энергии систему. Отметим, что операторы основных типов граничных задач механики твердого деформируемого тела являются положительными, а в качестве функционала (3.18) при решении таких задач методом Ритца правомерно применять, как правило, соответствующие интегральные соотношения, выражающие вариационный принцип Лагранжа.

Приближенное решение граничных задач методом Ритца сходится в соответствующем смысле [41] к точному при увеличении числа координатных функций в функциональной последовательности (3.21). Основные положения метода Ритца применительно к механике твердого тела рассмотрим на примере решения задач о напряженно-деформированном состоянии тонких плит [39].

Потенциальную энергию деформации в плите находят интегрированием (по всей срединной поверхности) отрицательной работы внутренних сил $(U = -W)$.

В общем случае энергия деформации плиты состоит из изгибной U_b и мембранной U_m частей:

$$U_b = \frac{1}{2}\iint_F (M_x\chi_x + M_y\chi_y + 2M_{xy}\chi_{xy})dxdy;$$

$$U_m = \frac{1}{2}\iint_F (N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + N_{xy}\gamma_{xy})dxdy, \qquad (3.28)$$

где M_x, M_y, M_{xy} – внутренние погонные изгибные силовые факторы; N_x, N_y, N_{xy} – мембранные силовые факторы. При малых деформациях плиты эти силовые факторы можно рассматривать раздельно. Часть энергии, порожденная действием поперечных сил, незначительна и ею можно пренебречь.

Если u, v, w – составляющие действительного перемещения; p_x, p_y, p_z – компоненты распределенной нагрузки; P_i – сосредоточенные силы; Δ_i – соответствующие им перемещения; M_i – сосредоточенные моменты; θ_i – соответствующие им углы поворота (рис. 3.11, *а*), то виртуальная работа внешних сил выражается следующим образом:

$$W_e = -(\iint_F (p_x u + p_y v + p_z w)dxdy + \sum_i P_i\Delta_i + \sum_j M_j\theta_j). \qquad (3.29)$$

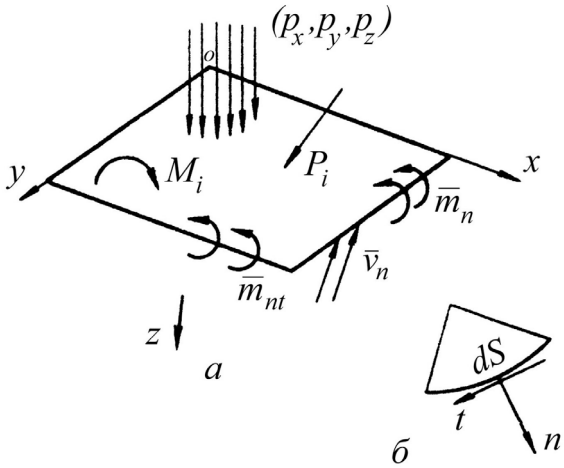


Рис. 3.11. К решению задачи о напряженно-деформированном состоянии тонких плит: а – параметры внешних и внутренних силовых факторов; б - нормаль и касательная к элементу края

В выражении (3.28) не учтен потенциал краевых сил. Если края плиты допускают перемещения, то краевые силы $\overline{v}_n, \overline{m}_n, \overline{m}_{nt}$ (см. рис. 3.11, *а*) также совершают виртуальную работу:

$$W_1 = -\oint (\overline{v}_n w + \overline{m}_n \frac{\partial w}{\partial n} + \overline{m}_{nt} \frac{\partial w}{\partial t})dS, \qquad (3.30)$$

здесь n и t – нормаль и касательная к элементу края dS (рис. 3.11, *б*).

Подставив выражения для силовых факторов

$$M_x = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}); M_y = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}); M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

и кривизн

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

через прогибы w в (3.28), получим в декартовых координатах:

$$U_b = \frac{1}{2}\iint_F D((\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\mu)(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2))dxdy. \quad (3.31)$$

Для многоугольных плит с защемленными краями, а также для прямоугольных опертых плит выражение (3.31) упрощается:

$$U_b = \frac{1}{2}\iint_F D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 dxdy.$$

Потенциальная энергия деформации для круглой плиты в полярных координатах (рис. 3.12) выражается следующим образом:

$$U_b = \frac{1}{2}\iint_F D((\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2})^2 + 2(1-\mu)(\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}))^2 -$$

$$- 2(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}))rdrd\varphi. \quad (3.32)$$

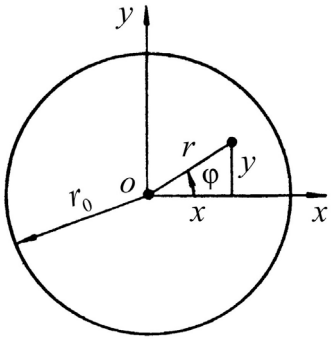


Рис. 3.12. К решению задачи о напряженно-деформированном состоянии для круглой плиты в полярных координатах

Для плиты с защемленными краями

$$U_b = \frac{1}{2}\iint_F D(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2})Rdrd\varphi.$$

Для осесимметричной задачи выражение (3.32) упрощается:

$$U_b = \pi \int_0^r D((\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r})^2 - 2(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r})rdr.$$

Пусть прямоугольная плита размерами $a \times b$ в плане находится под действием вертикальной распределенной нагрузки p_z. Полная потенциальная энергия в этом случае

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^b D((\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\mu)(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} -$$

$$-(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2))dxdy - \int_0^a \int_0^b p_z w dxdy.$$

Если под действием краевых сил, включая реакции, в процессе деформации потенциал может накапливаться или уменьшаться, то это выражение должно быть дополнено выражением (3.30). Так, для упруго опертых краев, например, для случая опирания на упругие балки,

$$U_{bkp} = \frac{1}{2}\oint w^2 \rho dS,$$

где ρ – жесткость балки.

В случае упругой заделки

$$U_{bkp} = \frac{1}{2}\oint (\frac{\partial w}{\partial n})^2 \rho^* dS,$$

где ρ^* – крутильная жесткость заделки.

Часть энергии, вызванная действием мембранных силовых факторов,

$$U_m = \frac{1}{2}\iint_F (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy}\gamma)dxdy = \frac{1}{2}\iint_F (N_x \frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}))dxdy. \qquad (3.33)$$

Выражение (3.33) можно записать через компоненты вектора перемещений:

$$U_m = \pi \int_0^r D((\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r})^2 - 2(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r})rdr.$$

$$U_m = \frac{1}{2}\iint_F (\frac{Eh}{1-\mu^2}(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2)dxdy$$

или через компоненты тензора напряжений и функцию напряжений:

$$U_m = \frac{h}{2E}\int\int((\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2(1+\mu)(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2))dxdy =$$

$$= \frac{h}{2E}\int\int((\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2})^2 - 2(1+\mu)(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y})^2))dxdy.$$

В данном классе задач широко применяется приближенное решение в форме:

$$W(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}F_i(x)P_k(y), \tag{3.34}$$

где $F_i(x)$, $P_k(y)$ – тригонометрические или степенные функции. Для области $0 \le x \le a$ с шарнирным опиранием в точках $x = 0$, $x = a$ можно применить функции

$$F_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{a}, i = 1,2,3,\ldots . \tag{3.35}$$

В той же области при условиях жесткого защемления в точках $x = 0$, $x = a$:

$$F_i(x) = \frac{1}{2}(1-\cos\frac{2i\pi x}{a}), i = 1,3,5,\ldots$$

или

$$F_i(x) = \frac{x}{a}(\frac{x}{a}-1)^2 + (-1)^i\frac{x^2}{a^2}(\frac{x}{a}-1) - \frac{1}{i\pi}\sin\frac{i\pi x}{a},\ i = 1,2,3,\ldots .$$

В области $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$ при жестком защемлении в точках $x = -\frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$

$$F_i(x) = (a^2 - 4x^2)^2 x^i, i = 0,1,2,\ldots,$$

или

$$F_i(x) = (-1)^i\cos\frac{2i\pi x}{a},\ i = 1,3,5,\ldots .$$

В области $0 \le x \le a$ при жестком защемлении в точке $x = 0$ и свободном опирании в точке $x = a$

$$F_i(x) = \frac{x}{a}(\frac{x}{a}-1)(\frac{x}{2a}-1) - \frac{1}{i\pi}\sin\frac{i\pi x}{a}, i = 1,2,3,\ldots .$$

В области $0 \le x \le a$ при свободном опирании в точке $x = 0$ и жестком защемлении в точке $x = a$

$$F_i(x) = \frac{x}{2a}(\frac{x^2}{a^2}-1)(-1)^i - \frac{1}{i\pi}\sin\frac{i\pi x}{a},\ i = 1,2,3,\ldots .$$

Функции $P_k(y)$ можно построить по аналогии с рассмотренными выше. Например, в области $0 \le y \le b$ при свободном опирании в точках $y = 0,\ y = b$ функция $P_k(y)$ строится по аналогии с функцией (3.35)

$$P_k(y) = \sin\frac{k\pi y}{b},\ k = 1,2,3,\ldots\ .$$

Координатные функции типа (3.34), построенные на основе принципа разделения переменных, пригодны, как правило, в случае двухмерных областей в форме прямоугольника и трехмерных – в форме параллелепипеда. В случаях нерегулярных областей проблема построения координатных функций усложняется, для ее решения необходимо применение специальных приемов. Пусть, например, некоторая функция $Q(x, y)$ разыскивается в области, имеющей форму треугольника, ограниченного линиями $y = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}x, y = \alpha_{\ 0}^{(2)} + \alpha_1^{(2)}x, y = \alpha_0^{(3)} + \alpha_1^{(3)}x$; при этом в качестве граничного задано условие $Q(x, y) = 0$ всюду на границе. Тогда в качестве координатных можно применить функции

$$\psi_{ik} = (y - \alpha_0^{(1)} - \alpha_1^{(1)}x)(y - \alpha_0^{(2)} - \alpha_1^{(2)}x)(y - \alpha_0^{(3)} - \alpha_1^{(3)}x)x^i y^k;$$
$$i = 0,1,2,\ldots;\ \ k = 0,1,2,\ldots\ .$$

В случае выпуклой (без входящих углов) n-угольной области, ограниченной линиями $y = \alpha_0^{(r)} + \alpha_1^{(r)}x; r = 1,2,\ldots,n$, координатные функции можно представить в виде:

$$\psi_{ik} = (y - \alpha_0^{(1)} - \alpha_1^{(1)}x)\cdots(y - \alpha_0^{(n)} - \alpha_1^{(n)}x)x^i y^k; i = 0,1,2,\ldots; k = 0,1,2,\ldots\ .$$

Аналогичный прием можно пытаться применить в случае выпуклых двухмерных областей, ограниченных заданными кривыми, и трехмерных областей, ограниченных заданными плоскостями и поверхностями более общего вида.

В общем случае, как и при применении других приближенных методов, оценку уровня точности результатов решения методом Ритца проводят на основе анализа его относительной сходимости, т.е. сравнивая результаты, полученные с удержанием различного числа координатных функций.

В качестве примера приведем решение задачи изгиба тонкой свободно опертой квадратной плиты $(a \times a)$ постоянной толщины под воздействием нагрузки, распределенной по закону (рис. 3.13) [42]:

при $0 \le x \le \frac{a}{2}\ \ p_z = \frac{2p_0x}{a}$;

при $\frac{a}{2} \le x \le a\ \ p_z = 2p_0 - \frac{2p_0x}{a}$.

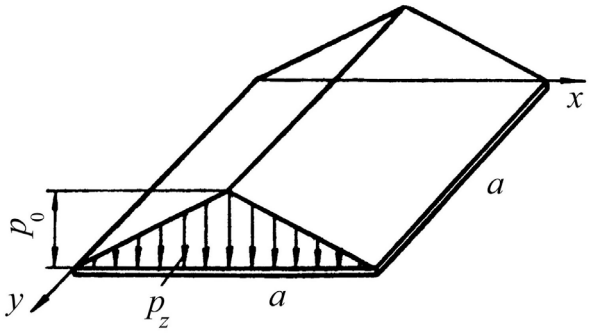


Рис. 3.13. К решению задачи изгиба тонкой свободно опертой квадратной плиты постоянной толщины

В качестве координатных примем функции

$$\psi_{ik} = \sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{a}$$

и приближенное решение представим в виде (учитывая симметрию относительно линии $x = \frac{a}{2}$):

$$w_3(x,y) = c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + c_{13}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a} + c_{31}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}. \quad (3.36)$$

Виртуальная работа внешней нагрузки

$$W = -\int_0^a\int_0^a p_z(x,y)w_3(x,y)dxdy = -\frac{8p_0a^2}{\pi^3}(c_{11} + \frac{1}{3}c_{13} - \frac{1}{9}c_{31}).$$

Потенциальная энергия деформации

$$U_b = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^a(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2\,dxdy = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^a(-\frac{2\pi^2}{a^2}c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} -$$

$$-\frac{10\pi^2}{a^2}c_{13}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a} - \frac{10\pi^2}{a^2}c_{31}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a})^2\,dxdy.$$

После вычисления интеграла получим:

$$U_b = \frac{D\pi^4}{8a^2}(4c_{11}^2 + 100c_{13}^2 + 100c_{31}^2).$$

Минимизируя полную потенциальную энергию

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_{ik}} = \frac{\partial W}{\partial c_{ik}} - \frac{\partial U_b}{\partial c_{ik}},$$

получим систему трех уравнений, каждое из которых содержит один искомый параметр c_{ik} выражения (3.36):

$$c_{11} = \frac{8p_0a^4}{\pi^7 D};\ c_{13} = \frac{32p_0a^4}{300\pi^7 D};\ c_{31} = \frac{32p_0a^4}{900\pi^7 D}. \qquad (3.37)$$

Подставим значения (3.37) в (3.36) и получим окончательное выражение для w_3. Максимальный прогиб плиты в центре при $x = y = \frac{a}{2}$

$$w_{\max} = 0{,}002625\frac{p_0a^4}{D}.$$

Решение с применением большего числа координатных функций приводит к весьма незначительному уточнению окончательных величин прогибов плиты. Для вычисления величин изгибающих моментов в сечениях плиты с высокой точностью придется ввести в выражение для w значительно большее число координатных функций, причем удовлетворительная сходимость решения обеспечена не во всех случаях. Эта особенность является обычно «слабым местом» всех приближенных аналитических методов решения граничных задач механики твердого тела в перемещениях.

Одним из вариантов метода Ритца является получивший в настоящее время широкое и весьма эффективное применение метод конечных элементов. Его основной отличительной особенностью является форма построения приближенного решения. Если в «классической» форме метода каждая координатная функция вносит свой вклад в приближенное решение во всей заданной области, а уточнение решения производится увеличением числа координатных функций, то в методе конечных элементов каждая координатная функция выражает решение лишь в части заданной области и уточнение решения производится увеличением числа таких частей. При этом структура координатных функций и их физический смысл определяются заранее и не зависят от числа частей-подобластей, на которые заданная область разделяется на каждом этапе приближенного решения.

3.6. Метод конечных элементов

Процедура реализации метода конечных элементов в общем случае включает следующие основные этапы:

1. Формирование конечного элемента и вывод коэффициентов жесткости.

2. Составление расчетной схемы: разделение заданной области на конечные элементы, нумерация конечных элементов и узлов, выбор глобальной и локальных систем координат, выделение основных неизвестных.

3. Преобразование матриц жесткости конечных элементов из локальных систем координат в глобальную.

4. Формирование разрешающей системы линейных алгебраических уравнений.

5. Решение разрешающей системы и определение основных неизвестных.

6. Вычисление прочих необходимых компонентов напряженно-деформированного состояния рассматриваемой конструкции.

Рассмотрим метод вначале на примере расчета плоских систем, основными элементами которых являются стержни или балки, изгибаемые поперечной нагрузкой. Соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния таких элементов приведены в главе 2 раздел 1. В одном из них выделим часть, ограниченную узлами i и j (рис. 3.14), каждый из которых имеет две степени свободы – возможны прогибы w_i, w_j и углы поворота соответственно φ_i, φ_j. Положительные направления перемещений показаны на рис. 3.14.

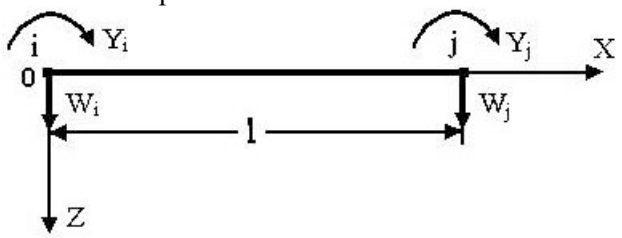


Рис. 3.14. Положительные направления перемещений при изгибе стержня поперечной нагрузкой

Матрицу-столбец узловых перемещений выделенного элемента можно представить в виде:

$$\sigma^e = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}.$$

Выделенный элемент является частью некоторой реальной конструкции, испытывающей воздействие внутренних усилий, передаваемых от соседних элементов. Реакции в узлах рассматриваемого конечного элемента и направления их действия, принятые в качестве положительных, показаны на рис. 3.15.

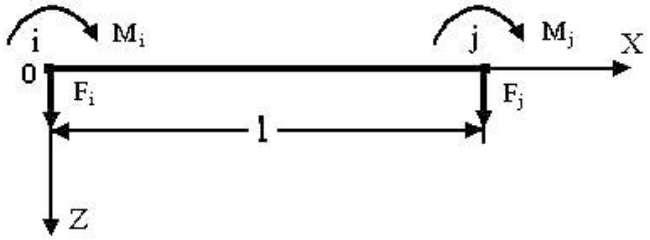


Рис. 3.15. Положительные направления реакций при изгибе стержня поперечной нагрузкой

Матрица-столбец реакций

$$F^{e} = \begin{bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix}.$$

Формально можно записать

$$F^{e} = \begin{bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix} = K \cdot \delta^{e} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\begin{aligned} F_i &= r_{11}w_i + r_{12}\varphi_i + r_{13}w_j + r_{14}\varphi_j; \\ M_i &= r_{21}w_i + r_{22}\varphi_i + r_{23}w_j + r_{24}\varphi_j; \\ F_j &= r_{31}w_i + r_{32}\varphi_i + r_{33}w_j + r_{34}\varphi_j; \\ M_j &= r_{41}w_i + r_{42}\varphi_i + r_{43}w_j + r_{44}\varphi_j. \end{aligned} \qquad (3.38)$$

В выражениях (3.38), например, элемент r_{12} матрицы жесткости K представляет собой величину реакции F_i при повороте i-го сечения на угол $\overline{\varphi}_i = 1.$

Для построения матрицы жесткости K пользуются обычно принципом возможных перемещений. С этой целью зададим выражение для функции прогибов стержня в виде:

$$W = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \qquad (3.39)$$

Число неизвестных параметров a в выражении (3.39) равно числу степеней свободы в принятом конечном элементе. Выразим эти параметры из условий:

$$x = 0:\ W = w_i;$$
$$x = l:\ W = w_j;$$
$$x = 0:\ (\frac{\partial W}{\partial x})_i = \varphi_i;$$
$$x = l:\ (\frac{\partial W}{\partial x})_j = \varphi_j.$$

Отсюда получим четыре уравнения с параметрами $a_i, i = 1,2,3,4$, в качестве неизвестных:

$$a_0 = w_i;\ a_0 + la_1 + l^2 a_2 + l^3 a_3 = w_j;$$
$$a_1 = \varphi_i;\ a_1 + 2la_2 + 3l^2 a_3 = \varphi_j.$$

Решением этой системы являются выражения для параметров:

$$a_0 = w_i;\ a_1 = \varphi_i;$$
$$a_2 = \frac{3w_j - 3w_i}{l^2} - \frac{\varphi_j + 2\varphi_i}{l};\ a_3 = \frac{2w_i - 2w_j}{l^3} + \frac{\varphi_i + \varphi_j}{l^2}.$$

Выразим теперь функцию W через узловые перемещения:

$$W = w_i + \varphi_i x + (\frac{3w_j - 3w_i}{l^2} - \frac{\varphi_j + 2\varphi_i}{l})x^2 + (\frac{2w_i - 2w_j}{l^3} + \frac{\varphi_i + \varphi_j}{l^2})x^3$$

и после приведения подобных окончательно получим:

$$W = (1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3})w_i + (\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3})w_j +$$
$$+ (x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2})\varphi_i + (-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2})\varphi_j. \qquad (3.40)$$

Процедура формирования матрицы жесткости в общем случае включает следующие основные этапы:

1. Запись выражения для полной потенциальной энергии, соответствующего принятой модели деформируемого тела. В данном случае для балки прямоугольного сечения (рис. 3.16) полная потенциальная энергия выражается:

$$V = \int_0^l ((\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z^{(x)} \varepsilon_z^{(x)} dz) b) dx - M_i \varphi_i - M_j \varphi_j - F_i w_i - F_j w_j.$$

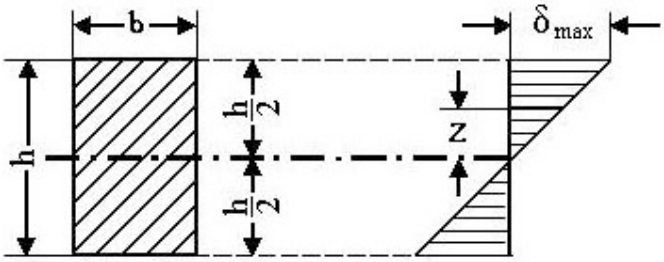


Рис. 3.16. К определению полной потенциальной энергии для балки прямоугольного сечения

2. Подстановка в него вместо компонентов напряженно-деформированного состояния их выражений через принятые узловые перемещения конечного элемента (в данном случае на основе выражения (3.40)).

3. Подстановка в выражение для полной потенциальной энергии вместо обобщенных сил их выражений через неизвестные узловые перемещения и элементы матрицы жесткости (в данном случае используются выражения (3.38)).

4. В соответствии с принципом Лагранжа для дискретных систем минимизируем функционал V относительно обобщенных перемещений (в данном случае – узловых перемещений и углов поворота). С этой целью дифференцируем выражение для V последовательно по каждому из основных неизвестных и приравниваем полученные выражения нулю.

5. В каждом из полученных уравнений приравниваем единице то обобщенное перемещение, множителем при котором в выражениях (3.38) является искомый элемент матрицы жесткости; остальные обобщенные перемещения приравниваем нулю. В результате получим выражение для искомого элемента матрицы жесткости. Аналогичную процедуру реализуем для всех прочих элементов матрицы жесткости.

Напряжение $\sigma_z^{(x)}$ в сечении прямоугольной формы (см. рис. 3.16) выражается:

$$\sigma_z^{(x)} = \frac{\sigma_{\max}^{(x)}}{\frac{h}{2}},$$

где

$$\sigma_{\max}^{(x)} = \frac{M_x}{W} = \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}.$$

Отсюда

$$\sigma_z^{(x)} = \frac{M_x z}{\frac{bh^2}{6}\cdot\frac{h}{2}} = \frac{M_x z}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{M_x z}{I}. \qquad (3.41)$$

В соответствии с законом Гука относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

отсюда

$$\varepsilon_z^{(x\}} = \frac{\sigma_z^{(x)}}{E} = \frac{M_x z}{EI}. \qquad (3.42)$$

На основе выражений (3.41), (3.42) представим:

$$b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z^{(x)}\varepsilon_z^{(x)}dz = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{M_x z}{I}\frac{M_x z}{EI}dz = \frac{bM_x^2}{EI^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{bM_x^2}{EI^2}\frac{1}{3}\frac{2h^3}{8} =$$

$$= \frac{bM_x^2}{EI^2}\frac{h^3}{12} = \frac{M_x^2}{EI^2}\frac{bh^3}{12} = \frac{M_x^2}{EI^2}I = \frac{M_x^2}{D}.$$

Отсюда принцип возможных перемещений можно представить в виде:

$$V = \int_0^l \frac{M_x^2}{D}dx - M_i\varphi_i - M_j\varphi_j - F_i w_i - F_j w_j. \qquad (3.43)$$

Пользуясь выражением (3.40), приступим к составлению матрицы жесткости, следуя сформулированной выше последовательности действий:

$$M_x = D\frac{d^2W}{dx^2} = D(w_i(-\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3}) + w_j(\frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3}) +$$
$$+\varphi_i(-\frac{4}{l}+\frac{6x}{l^2}) + \varphi_j(-\frac{2}{l}+\frac{6x}{l^2}). \qquad (3.44)$$

Подставим выражение (3.44) в выражение (3.43) и получим окончательное выражение для потенциальной энергии через узловые перемещения в соответствии с принятой схемой конечного элемента (см. рис. 3.15):

$$V = \int_0^l \frac{1}{D}(D(w_i(-\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3}) + w_j(\frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3}) + \varphi_i(-\frac{4}{l}+\frac{6x}{l^2}) +$$
$$+\varphi_j(-\frac{2}{l}++\frac{6x}{l^2})))^2 dx - (r_{21}w_i + r_{22}\varphi_i + r_{23}w_i + r_{24}\varphi_j)\varphi_i -$$
$$-(r_{41}w_i + r_{42}\varphi_i + r_{43}w_j + r_{44}\varphi_j)\varphi_j - (r_{11}w_i + r_{12}\varphi_i + r_{13}w_j$$
$$+r_{14}\varphi_j)w_i - (r_{31}w_i + r_{32}\varphi_i + r_{33}w_j + r_{34}\varphi_j)\ w_j. \qquad (3.45)$$

Для формирования элемента r_{11} матрицы жесткости выражение (3.45) необходимо продифференцировать по перемещению, при котором данный элемент является множителем в (3.38) и в полученном выражении принять $w_i = 1,\ \ w_j = 0,\ \ \varphi_i = 0,\ \ \varphi_j = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial w_i} = D\int_0^l 2(w_i(-\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3}) + w_j(\frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3}) + \varphi_i(-\frac{4}{l}+\frac{6x}{l^2}) +$$

$$+ \varphi_j(-\frac{2}{l}+\frac{6x}{l^2}))(-\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3})dx - r_{21}\varphi_i - r_{41}\varphi_j -$$

$$-(r_{11}w_i + r_{12}\varphi_i + r_{13}w_j + r_{14}\varphi_j) - r_{11}w_i - r_{31}w_j = 0.$$

Окончательно получим:

$$2D\int_0^l(-\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3})(-\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3})dx - 2r_{11} = 0;$$

$$r_{11} = D\int_0^l(\frac{36}{l^4}-\frac{144x}{l^5}+\frac{144x^2}{l^6})dx = D(\frac{36}{l^3}-\frac{72}{l^3}+\frac{48}{l^3}) = \frac{12D}{l^3}.$$

Для формирования элемента r_{13} выражение (3.45) следует продифференцировать по w_j и принять $w_j = 1, w_i = 0, \varphi_i = 0, \varphi_j = 0$:

$$2D\int_0^l(\frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3})(-\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3})dx - r_{13} - r_{31} = 0.$$

Учитывая симметрию элементов матрицы жесткости относительно главной диагонали $r_{ik} = r_{ki}$, получаем:

$$2r_{13} = -2D\int_0^l(\frac{36x}{l^4}-\frac{72x^2}{l^5}+\frac{48x^3}{l^6})dx = -2\frac{12D}{l^3},$$

отсюда

$$r_{13} = -\frac{12D}{l^3}.$$

В целом матрица жесткости имеет вид:

$$K=D\begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

и

$$F^e = \begin{bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix} = DK\sigma^e \cdot$$

В каждом из узлов выбранной расчетной схемы записываем уравнения равновесия $\sum M = 0$, если неизвестна соответствующая величина угла поворота сечения, и $\sum Y = 0$, если неизвестна величина прогиба в данном узле; пользуясь формулами (3.38), (3.46), выражаем узловые силовые факторы через перемещения с учетом заданных граничных условий и получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений с узловыми перемещениями в качестве неизвестных.

При составлении уравнений равновесия следует учитывать, что в расчетной схеме МКЭ передача внешней нагрузки возможна только в выбранных узлах, что в ряде случаев является причиной существенных погрешностей, особенно при малом числе конечных элементов.

3.7. Пример расчета неразрезной балки методом конечных элементов

В качестве примера применения метода конечных элементов рассмотрим расчет двухпролетной неразрезной балки постоянной жесткости D, загруженной на части длины равномерно распределенной нагрузкой и парой сил (рис. 3.17, *а*).

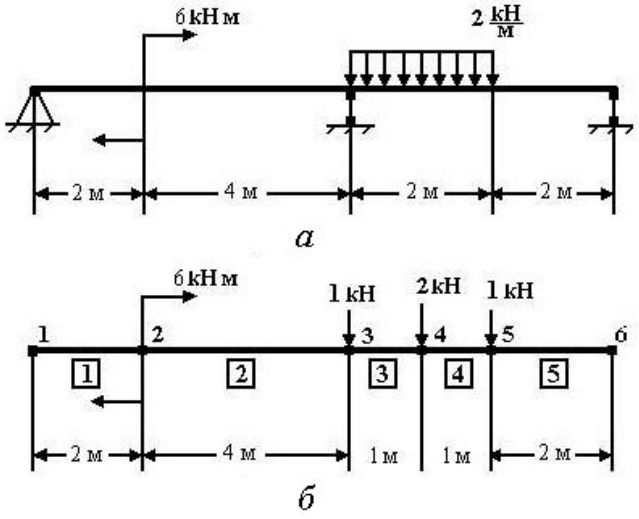


Рис. 3.17. К расчету двухпролетной неразрезной балки постоянной жесткости: а – схема загружения; б – расчетная схема

Примем расчетную схему, состоящую из пяти конечных элементов с шестью узлами, равномерно распределенную нагрузку заменим тремя сосредоточенными силами, приложенными в узлах 3–5, как показано на рис. 3.17, *б*. Общее число неизвестных – 9, из них три узловых перемещения – w_2, w_4, w_5 и шесть углов поворота – $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$; в соответствии с граничными условиями на опорах $w_1 = w_3 = w_6 = 0$.

Как отмечалось выше, в разрешающей системе уравнений равновесия каждому неизвестному перемещению соответствует уравнение, выражающее равенство нулю всех сил, действующих в соответствующем узле в направлении этого перемещения. К таким силам относятся внешняя узловая нагрузка и реакции, вызванные перемещениями узлов в примыкающих к рассматриваемому узлу конечных элементах.

В первом конечном элементе матричное соотношение между узловыми реакциями и узловыми перемещениями выражается с учетом (3.46) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \frac{12}{2^3} & \frac{6}{2^2} & -\frac{12}{2^3} & \frac{6}{2^2} \\ \frac{6}{2^2} & \frac{4}{2} & -\frac{6}{2^2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{12}{2^3} & -\frac{6}{2^2} & \frac{12}{2^3} & -\frac{6}{2^2} \\ \frac{6}{2^2} & \frac{2}{2} & -\frac{6}{2^2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.47)$$

После вычисления элементов матрицы жесткости и с учетом граничного условия для w_1 получим окончательно:

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1{,}5 & -1{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2 & -1{,}5 & 1 \\ -1{,}5 & -1{,}5 & 1{,}5 & -1{,}5 \\ 1{,}5 & 1 & -1{,}5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.48)$$

Для второго конечного элемента матричное соотношение после вычисления элементов матрицы жесткости $(l_2 = 4)$ и с учетом заданных граничных условий принимает вид:

$$\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 0{,}1875 & 0{,}375 & -0{,}1875 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 1 & -0{,}375 & 0{,}5 \\ -0{,}1875 & -0{,}375 & 0{,}1875 & -0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}5 & -0{,}375 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}. \qquad (3.49)$$

На узел 1 передаются только реакции, вызванные деформацией первого конечного элемента, поэтому в соответствии с (3.48):

$$\sum M(1) = M_1^{(1)} = D(1{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot \varphi_1 - 1{,}5 \cdot w_2 + 1 \cdot \varphi_2) = 0$$

и отсюда получаем первое уравнение разрешающей системы линейных алгебраических уравнений метода (при составлении и решении данной системы следует иметь в виду, что коэффициенты при w и φ имеют различную размерность, соответствующую размерностям элементов матрицы жесткости):

$$-6w_2 + 8\varphi_1 + 4\varphi_2 = 0\,.$$

На узел 2 передается изгибающий момент $M = 6$ кН/м и реакции от первого и второго конечных элементов:

$$\sum M(2) = 6 + M_2^{(1)} + M_2^{(2)} = 6 + D(1{,}5 \cdot 0 + 1 \cdot \varphi_1 - 1{,}5 \cdot w_2 + 2 \cdot \varphi_2) +$$
$$+ D(0{,}375w_2 + 1 \cdot \varphi_2 - 0{,}375 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot \varphi_3) = 0,$$

отсюда

$$-1{,}125w_2 + \varphi_1 + 3\varphi_2 + 0{,}5\varphi_3 + \frac{6}{D} = 0.$$

$$\sum Z(2) = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} = D(-1{,}5\cdot 0 - 1{,}5\cdot\varphi_1 + 1{,}5\cdot w_2 - 1{,}5\cdot\varphi_2) +$$
$$+ D(0{,}1875\cdot w_2 + 0{,}375\cdot\varphi_2 - 0{,}1875\cdot 0 + 0{,}375\cdot\varphi_3) = 0,$$

отсюда

$$1{,}6875w_2 - 1{,}5\varphi_1 - 1{,}125\varphi_2 + 0{,}375\varphi_3 = 0.$$

На основе аналогичных рассуждений можно составить остальные шесть уравнений разрешающей системы линейных алгебраических уравнений; ее решением являются значения (размерность значений $w - \frac{\text{кН}\cdot\text{м}^3}{D}$, $\varphi - \frac{\text{кН}\cdot\text{м}^2}{D}$):

$$w_2 = 1{,}733;\ \ w_4 = 0{,}645;\ \ w_5 = 1{,}142;$$
$$\varphi_1 = -0{,}025;\ \ \varphi_2 = 2{,}65;\ \ \varphi_3 = 0{,}05;$$
$$\varphi_4 = 0{,}822;\ \ \varphi_5 = 0{,}0875;\ \ \varphi_6 = -0{,}901.$$

По известным теперь величинам перемещений на основе матричных соотношений можно вычислить значения изгибающих моментов и перерезывающих сил, например, из соотношения (3.48):

$$M_1^{(1)} = 2\varphi_1 - 1{,}5w_2 + \varphi_2 = 2\cdot(-0{,}025) - 1{,}5\cdot 1{,}733 + 2{,}65 = 0,$$

что соответствует заданным условиям на опорах балки.

$$F_1^{(1)} = 1{,}5\cdot(-0{,}025) - 1{,}5\cdot 1{,}733 + 1{,}5\cdot 2{,}65 = 1{,}3375\ \text{кН}.$$

Изгибающий момент в сечении чуть-чуть слева от узла 2:

$$M_2^{(1)} = 1\cdot(-0{,}025) - 1{,}5\cdot 1{,}733 + 2\cdot 2{,}65 = 2{,}675\ \text{кН}\cdot\text{м}$$

и чуть-чуть справа от узла 2:

$$M_2^{(2)} = D(0{,}375w_2 + 1\cdot\varphi_2 - 0{,}375w_3 + 0{,}5\varphi_3) =$$
$$= 0{,}375\cdot 1{,}733 + 2{,}65 + 0{,}5\cdot 0{,}05 = 3{,}325\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

При вычислении изгибающих моментов и перерезывающих сил следует иметь в виду, что соотношение (3.46) выражает усилия, передающиеся от узла на конечный элемент со знаками, соответствующими схеме на рис. 3.15. Поэтому при переходе через сечение в узле 2 изгибающий момент изменяется скачкообразно от величины $-2{,}675\ \text{кН}\cdot\text{м}$ до величины $+3{,}325\ \text{кН}\cdot\text{м}$, что согласуется с действием в узле 2 заданной пары сил с моментом $+6\ \text{кН}\cdot\text{м}$. Эпюры моментов и перерезывающих сил в сечениях рассматриваемой балки приведены на рис. 3.18.

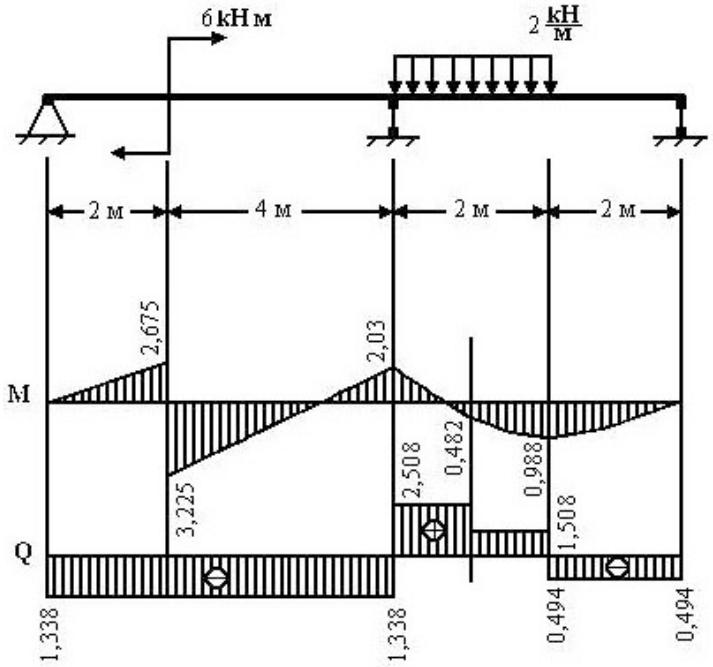


Рис. 3.18. Эпюры моментов и перерезывающих сил в сечениях двухпролетной неразрезной балки постоянной жесткости

Реакции в опорах балки, соответствующие принятой расчетной схеме выражаются величинами $R_1 = 1{,}338$ кН, $R_3 = -3{,}846$ кН, $R_6 = -0{,}494$ кН, их результирующая равна $3{,}002$ кН и направлена вверх, в то время как равнодействующая заданной равномерно распределенной нагрузки равна 4 кН и направлена вниз. Эта весьма существенная погрешность полученного приближенного решения объясняется особенностью метода конечных элементов, отмеченной выше: при замене распределенной нагрузки тремя сосредоточенными силами одна из них, равная 1 кН, оказалась приложенной к опорному узлу 3 и в процессе расчета во внимание не принималась, так как на напряженно-деформированное состояние балки не влияла. Расчет балки производился с учетом воздействия на балку двух сосредоточенных сил, приложенных в узлах 4 и 5. По мере увеличения числа конечных элементов неучтенная часть распределенной нагрузки и соответственно погрешность этого типа уменьшается.

В связи с заменой распределенной нагрузки сосредоточенными силами эпюра изгибающих моментов на части балки между узлами 3–5 ограничена ступенчатой линией вместо наклонной прямой, по мере увеличения числа конечных элементов и числа неизвестных ломаная линия со все большей

точностью выражает действительный характер изменения изгибающих моментов на данном участке.

При расчете плоских стержневых систем, элементы которых взаимно расположены под различными углами, даже кратными прямому, эта модель МКЭ с двумя неизвестными в каждом узле, как правило, уже непригодна, так как пренебрежение осевыми перемещениями узлов может привести к недопустимым погрешностям. Уточненная модель расчета должна включать в каждом узле по три неизвестных – нормальное к оси стержня и осевое перемещения, а также угол поворота. Матрица жесткости в этом случае имеет размер 6×6 и включает 36 элементов, кроме того, расчет усложняется необходимостью перехода для части стержней от глобальной к локальным системам координат.

3.8. Расчет балок на упругом основании

Рассмотрим задачу изгиба балки на упругом основании, в соответствии с гипотезой Винклера полагая, что реакция основания прямо пропорциональна прогибу w балки (k – коэффициент пропорциональности, называемый обычно коэффициентом постели):

$$R(x) = -kw(x).$$

Реакция основания в узлах i, j конечного элемента (см. рис. 3.15) выражается соответственно величинами $P_i = -kw_i, P_j = -kw_j$.

Будем полагать, что величина реакции упругого основания изменяется между узлами конечного элемента по линейному закону, тогда эпюра реактивного «отпора» основания будет иметь форму трапеции (рис. 3.19).

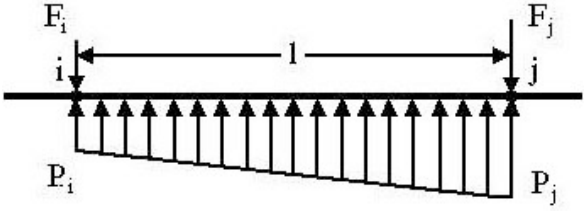


Рис. 3.19. К расчету изгиба балки на упругом основании

Так как внешние силы, распределенные по тому или иному закону по длине конечного элемента, должны быть преобразованы к сосредоточенным силам, действующим в его узлах, определим эти силы.

Очевидно (рис. 3.20):

$$R_i = P_j l\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{(P_i - P_j)l}{2} = kw_j\frac{l}{2} + \frac{1}{3}(kw_i - kw_j)l = \frac{kl(2w_i + w_j)}{6};$$

$$R_j = P_j l\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{(P_i - P_j)}{2} l = \frac{kl(w_i + 2w_j)}{6}.$$

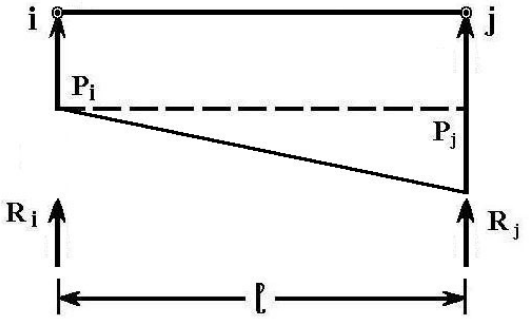


Рис. 3.20. К расчету изгиба балки на упругом основании

При расчете балок на упругом основании методом конечных элементов на основе гипотезы Винклера полученные выражения должны быть учтены при составлении уравнений, выражающих равенство нулю суммы проекций всех сил, действующих в соответствующем узле, на ось Oz. Так, в примере п. 3.7 при опирании балки на упругое основание и прочих равных условиях реакции отпора грунта в узлах 1 и 2 первого конечного элемента выражаются:

$$R_1^{(1)} = \frac{kl_1(2w_1 + w_2)}{6} = \frac{k2(2\cdot 0 + w_2)}{6} = \frac{1}{3}kw_2;$$

$$R_2^{(1)} = \frac{kl_1(w_1 + 2w_2)}{6} = \frac{k2(0 + 2w_2)}{6} = \frac{2}{3}kw_2.$$

В узлах второго конечного элемента

$$R_2^{(2)} = \frac{kl_2(2w_2 + w_3)}{6} = \frac{k4(2w_2)}{6} = \frac{4}{3}kw_2;$$

$$R_3^{(2)} = \frac{kl_2(w_2 + 2w_3)}{6} = \frac{k4(w_2)}{6} = \frac{2}{3}kw_2.$$

Уравнение $\Sigma Z(2) = 0$ в данном случае записывается в виде:

$$\sum Z(2) = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} = D(-1{,}5\cdot 0 - 1{,}5\varphi_1 + 1{,}5w_2 - 1{,}5\varphi_2) +$$
$$+ D(0{,}1875w_2 + 0{,}375\varphi_2 - 0{,}18750 + 0{,}375\varphi_3) - R_2^{(1)} - R_2^{(2)} = 0,$$

или, после подстановки выражений для $R_2^{(1)}$, $R_2^{(2)}$:

$$\sum Z(2) = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} = D(-1{,}5\varphi_1 + 1{,}5w_2 - 1{,}5\varphi_2) +$$
$$+ D(0{,}1875w_2 + 0{,}375\varphi_2 + 0{,}375\varphi_3) - \frac{2}{3}kw_2 - \frac{4}{3}kw_2 = 0$$

и после приведения подобных:

$$D(-1{,}5\varphi_1 - 1{,}125\varphi_2 + 0{,}375\varphi_3) + (1{,}6875D - 2k)w_2 = 0.$$

3.9. Пространственный конечный элемент для стержня

В пространственных стержневых системах их элементы могут находиться в сложном напряженно-деформированном состоянии, подвергаясь поперечному изгибу в двух направлениях относительно осей инерции y, z сечения стержня, кручению и продольным деформациям.

Как правило, в таких системах поперечные размеры их элементов малы по сравнению с длиной, и обоснованным является пренебрежение влиянием сдвигающих усилий, а также применение гипотезы плоских сечений. Функционал полной потенциальной энергии в этом случае записывается в виде [41]:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l (EI_y(\frac{d^2w}{dx^2})^2 + EI_z(\frac{d^2v}{dx^2})^2 + EF(\frac{du}{dx})^2 + GI_{кр}\alpha^2)dx -$$

$$-(\int_0^l (p_x(x)u + p_y(x)v + p_z(x)w + m_x\alpha + m_y\beta + m_z\gamma)dx, \qquad (3.50)$$

где u, v, w – линейные перемещения сечений стержня соответственно вдоль осей Ox, Oy, Oz; α, β, γ – угловые перемещения относительно осей Ox, Oy, Oz; $EI_y, EI_z, EF, GI_{кр}$ – жесткости стержня на изгиб относительно осей Oy, Oz соответственно, продольная жесткость стержня и жесткость на кручение; $p_x(x), p_y(x), p_z(x)$ – распределенные нагрузки на стержень вдоль осей Ox, Oy, Oz соответственно; M_x, M_y, M_z – распределенные крутящие моменты относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 3.21).

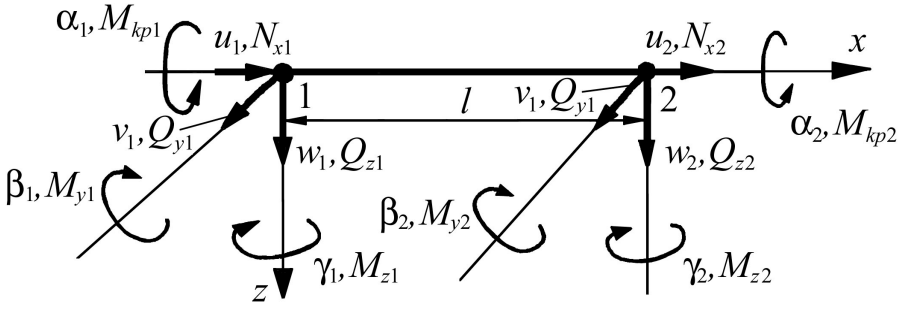


Рис. 3.21. Положительные направления параметров напряженно-деформированного состояния для общего случая работы стержня

Угловые перемещения β, γ – функции перемещений v, w ($\beta = \dfrac{dv}{dx}$; $\gamma = \dfrac{dw}{dx}$), поэтому, аппроксимируя v, w выражениями

$$v = b_0^{(v)} + b_1^{(v)} x + b_2^{(v)} x^2 + b_3^{(v)} x^3; \tag{3.51}$$

$$w = b_0^{(w)} + b_1^{(w)} x + b_2^{(w)} x^2 + b_3^{(w)} x^3, \tag{3.52}$$

получим

$$\beta = b_1^{(v)} + 2b_2^{(v)} x + 3b_3^{(v)} x^2;$$

$$\gamma = b_1^{(w)} + 2b_2^{(w)} x + 3b_3^{(w)} x^2.$$

Для перемещений u, α достаточной является линейная аппроксимация:

$$u = b_0^{(u)} + b_1^{(u)} x; \tag{3.53}$$

$$\alpha = b_0^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} x. \tag{3.54}$$

Для выражения перемещений по всей длине конечного элемента через перемещения $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ в узлах 1 и 2 конечного элемента (см. рис. 3.21) применим методику, реализованную в п. 3.6 при выводе матрицы жесткости для стержня, изгибаемого в плоскости, и после упрощений получим:

$$u(x) = \frac{1-x}{l} u_1 + \frac{x}{l} u_2;$$

$$v(x) = \frac{2x^3 - 3lx^2 + l^3}{l^3} v_1 + \frac{x^3 - 2lx^2 + l^2 x}{l^2} \gamma_1 - \frac{2x^3 - 3lx^2}{l^3} v_2 + \frac{x^3 - lx^2}{l^2} \gamma_2;$$

$$w(x) = \frac{2x^3 - 3lx^2 + l^3}{l^3} w_1 - \frac{x^3 - 2lx^2 + l^2 x}{l^2} \beta_1 - \frac{2x^3 - 3lx^2}{l^3} w_2 - \frac{x^3 - lx^2}{l^2} \beta_2;$$

$$\alpha(x) = \frac{l-x}{l} \alpha_1 + \frac{x}{l} \alpha_2.$$

Выражения для элементов матрицы жесткости, которая в данном случае имеет размер 12×12, получим на основе функционала (3.50), применяя методику, описанную в п. 3.6. Матрица включает большое число нулевых элементов, поэтому здесь менее громоздкой будет запись выражений для узловых реакций через узловые перемещения в развернутом виде (l – длина конечного элемента):

$$N_{x1} = \frac{EF}{l} u_1 - \frac{EF}{l} u_2;$$

$$Q_{y1}=\frac{12EI_z}{l^3}v_1+\frac{6EI_z}{l^2}\gamma_1-\frac{12EI_z}{l^3}v_2+\frac{6EI_z}{l^2}\gamma_2;$$

$$Q_{z1}=\frac{12EI_y}{l^3}w_1-\frac{6EI_y}{l^2}\beta_1-\frac{12EI_y}{l^3}w_2-\frac{6EI_y}{l^2}\beta_2;$$

$$M_{\text{кр}1}=\frac{GI_{\text{кр}}}{l}\alpha_1-\frac{GI_{\text{кр}}}{l}\alpha_2;$$

$$M_{y1}=-\frac{6EI_y}{l^2}w_1+\frac{4EI_y}{l}\beta_1-\frac{6EI_y}{l^2}w_2+\frac{2EI_y}{l}\beta_2;$$

$$M_{z1}=\frac{6EI_z}{l^2}v_1+\frac{4EI_z}{l}\gamma_1+\frac{6EI_z}{l^2}v_2+\frac{2EI_z}{l}\gamma_2;$$

$$N_{x2}=-\frac{EF}{l}u_1+\frac{EF}{l}u_2;$$

$$Q_{y2}=-\frac{12EI_z}{l^3}v_1-\frac{6EI_z}{l^2}\gamma_1+\frac{12EI_z}{l^3}v_2-\frac{6EI_z}{l^2}\gamma_2;$$

$$Q_{z2}=-\frac{12EI_y}{l^3}w_1+\frac{6EI_z}{l^2}\beta_1+\frac{12EI_y}{l^3}w_2+\frac{6EI_y}{l^2}\beta_2;$$

$$M_{\text{кр}2}=-\frac{GI_{\text{кр}}}{l}\alpha_1+\frac{GI_{\text{кр}}}{l}\alpha_2;$$

$$M_{y2}=\frac{6EI_y}{l^2}w_1+\frac{2EI_y}{l}\beta_1+\frac{6EI_y}{l^2}w_2+\frac{4EI_y}{l}\beta_2;$$

$$M_{z2}=\frac{6EI_z}{l^2}v_1+\frac{2EI_z}{l}\gamma_1-\frac{6EI_z}{l^2}v_2+\frac{4EI_z}{l}\gamma_2.$$

Если неизвестны все узловые перемещения, то разрешающая система линейных алгебраических уравнений в каждом узле может содержать при необходимости шесть уравнений равновесия: три из условий равенства нулю сумм проекций всех сил, действующих на узел, на три координатные оси и три – равенства нулю сумм моментов всех сил относительно трех осей.

3.10. Метод конечных элементов в задачах теории упругости

Рассмотрим теперь МКЭ в приложении к одному из основных типов задач теории упругости – задаче о плоском напряженном состоянии упругого тела. Соответствующая математическая модель рассмотрена в главе 2 раздел 1; некоторые ее соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния u, v (перемещения); $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ (деформации);

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (напряжения), необходимые для дальнейшего, можно представить в матричной форме, обозначив предварительно

$$q = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix};\ p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix};\ \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix};\ \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

Выражения для деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.55}$$

можно представить в виде

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = D \cdot q. \tag{3.56}$$

Формулы для напряжений

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_x + \frac{\mu E}{1-\mu^2}\varepsilon_y;\ \sigma_y = \frac{\mu E}{1-\mu^2}\varepsilon_x + \frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_y;$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \tag{3.57}$$

записываются в виде матричного соотношения

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = T \cdot \varepsilon. \tag{3.58}$$

Функционал энергетического метода для рассматриваемого класса задач (G – заданная область, S – ее граница):

$$F = \frac{1}{2}\int_G (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})dG - \int_S (p_x u + p_y v)dS \tag{3.59}$$

на основе выражений (3.55), (3.56) можно представить в виде:

$$F = \frac{1}{2}\int_G \sigma_T \varepsilon dG - \int_S p_T q dS,$$

где символами σ_T, p_T обозначены матрицы-строки

$$\sigma_T = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy)}; \;\; p_T = (p_x, p_y).$$

При решении задачи в перемещениях в случае, когда заданная область G разделена на n конечных элементов-подобластей $G_1, G_2, ..., G_n$, решение представим в форме:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y); \;\; v_n = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x, y),$$

где $\varphi_i(x, y), \; \psi_i(x, y)$ – координатные элементы, выражающие приближенное решение в области G_i. В соответствии с основными положениями метода Ритца каждый координатный элемент должен удовлетворять, в частности, следующим условиям:

– сообщать минимальное значение функционалу (3.59) в области $G_i, i = \overline{1, n}$;

– удовлетворять главным граничным условиям задачи на тех частях границы S_i области G_i, которая совпадает с внешней границей всей заданной области G;

– на границе между соседними конечными элементами G_i, $G_k (i = \overline{1, n}; \; k = \overline{1, n})$ соответствующие координатные элементы φ_i, φ_k должны удовлетворять условиям совместности, обеспечивающим требование непрерывности искомых функций и их производных, входящих в выражения для рассматриваемых компонентов напряженно-деформированного состояния, во всей заданной области G. Например, в связи с условиями непрерывности искомой функции u в G необходимо, чтобы на границе между конечными элементами соответствующие координатные элементы φ_i были равны между собой.

В качестве примера построения координатных элементов рассмотрим случай, когда заданная область разделена на прямоугольные подобласти. Подобласть G_i (рис. 3.22) имеет размеры $a \times b$, вершины углов прямоугольника обозначим номерами от 1 до 4.

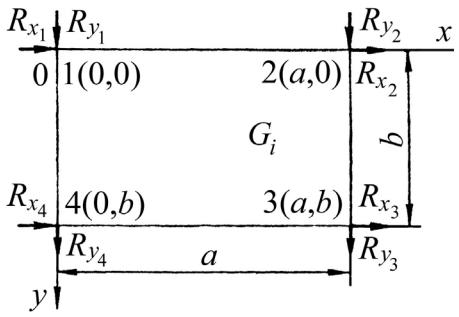


Рис. 3.22. К построению координатных элементов в случае разделения заданной области на прямоугольные подобласти

Именно вершины таких прямоугольников и образуют в данном случае сетку узлов.

Компоненты u, v вектора перемещений в подобласти G_i представим в форме:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy;$$
$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy. \qquad (3.60)$$

В рассматриваемой двухмерной области всякую силу, приложенную к узлу, можно представить в виде двух составляющих, направленных вдоль осей Ox, Oy. Таким образом, на подобласть G_i в узлах действуют восемь сосредоточенных сил, в общем случае передающихся от соседних конечных элементов или из окружающего пространства. Соответственно может быть записано восемь уравнений равновесия – по два для каждого узла ($\sum X = 0, \sum Y = 0$). Силы, передающиеся от соседних конечных элементов, выражают реакции, вызванные перемещениями узлов данной подобласти. Так, зависимость между реакцией R_{x1} и перемещениями узлов подобласти G_i можно представить следующим образом:

$$R_{x1} = k_{u1}^{(x1)} u_1 + k_{v1}^{(x1)} v_1 + k_{u2}^{(x1)} u_2 + k_{v2}^{(x1)} v_2 + k_{u3}^{(x1)} u_3 + k_{v3}^{(x1)} v_3 + k_{u4}^{(x1)} u_3 + k_{v4}^{(x1)} v_4.$$

Постоянная $k_{v2}^{(x1)}$, например, выражает величину реакции в узле 1 по направлению оси Ox, вызванной единичным перемещением узла 2 в направлении оси Oy. Аналогично можно записать выражения для остальных реакций в узлах подобласти G_i. В этой подобласти введем в рассмотрение матрицы:

$$q_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}; R_i = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x2} \\ R_{y2} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{bmatrix}; K_i = \begin{bmatrix} k_{u1}^{(x1)} & k_{v1}^{(x1)} & k_{u2}^{(x1)} & . & . & k_{v4}^{(x1)} \\ k_{u1}^{(y1)} & k_{v1}^{(y1)} & k_{u2}^{(y1)} & . & . & k_{v4}^{(y1)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ k_{u1}^{(x4)} & k_{v1}^{(x4)} & k_{u2}^{(x4)} & . & . & k_{v4}^{(x4)} \\ k_{u1}^{(y4)} & k_{v1}^{(y4)} & k_{u2}^{(y4)} & . & . & k_{v4}^{(y4)} \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Теперь соотношения между реакциями в узлах и узловыми перемещениями запишем в матричной форме:

$$R_i = K_i \cdot q_i. \quad (3.62)$$

В данном случае матрица K_i является матрицей жесткости для подобласти G_i, ее порядок 8×8.

Выразим перемещения u, v в любой точке G_i через узловые перемещения. В выражение (3.60) для u последовательно подставим координаты узлов и получим систему четырех уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\alpha_1 = u_1;\ \alpha_1 + a\alpha_2 = u_2;$$
$$\alpha_1 + a\alpha_2 + b\alpha_3 + ab\alpha_4 = u_3;\ \alpha_1 + b\alpha_3 = u_4. \quad (3.63)$$

Решением данной системы являются выражения для коэффициентов

$$\alpha_1 = u_1;\ \alpha_2 = \frac{1}{a}(u_2 - u_1);\ \alpha_3 = \frac{1}{b}(u_4 - u_1);$$
$$\alpha_4 = \frac{1}{ab}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4). \quad (3.64)$$

Подставив выражения (3.64) в выражение (3.60) для u, после приведения подобных получим:

$$u = \frac{1}{ab}((a-x)(b-y)u_1 + x(b-y)u_2 + xyu_3 + (a-x)yu_4). \quad (3.65)$$

Аналогичным образом получим следующее выражение для v:

$$v = \frac{1}{ab}((a-x)(b-y)v_1 + x(b-y)v_2 + xyv_3 + (a-x)yv_4). \quad (3.66)$$

Применяя в каждой из подобластей выражения, аналогичные (3.65), (3.66) для перемещений, обеспечим выполнение условий их непрерывности всюду в заданной области G. Действительно, выражения для u во всех

подобластях, примыкающих к узлу 1, при подстановке в них координат x, y узла 1 равны u_1. То же имеет место и при подстановке координат других узлов, лежащих на границе между подобластями. Перемещения же между узлами, как легко убедиться, анализируя структуру выражений (3.65), (3.66), изменяются вдоль границы каждой подобласти по линейному закону, что обеспечивает условия непрерывности для перемещений в любой точке границы между соседними подобластями. Условия совместности для компонентов, выражаемых производными первого и более высоких порядков, в данном классе задач в методе Ритца не являются обязательными, так как они относятся (в силу сказанного выше) к естественным граничным условиям.

Перейдем теперь к построению матрицы жесткости для рассматриваемой модели МКЭ. Работу внешних сил в выражении (3.59) для функционала выразим, относя к таковым реакции в узлах, следующим образом:

$$\int_S (p_x u + p_y v) dS = R_{x1}u_1 + R_{y1}v_1 + R_{x2}u_2 + \ldots + R_{y4}v_4 \,. \qquad (3.67)$$

Функционал (3.59) теперь выражается:

$$F = \frac{1}{2}\int_G (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}) dG -$$
$$- R_{x1}u_1 - R_{y1}v_1 - R_{x2}u_2 - \ldots - R_{y4}v_4 \,. \qquad (3.68)$$

На основе (3.65), (3.66) выразим производные от перемещений в подобласти G_i через узловые перемещения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{ab}(-(b-y)u_1 + (b-y)u_2 + yu_3 - yu_4);$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{ab}(-(a-x)u_1 - xu_2 + xu_3 + (a-x)u_4);$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{ab}(-(b-y)v_1 + (b-y)v_2 + yv_3 - yv_4);$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{ab}(-(a-x)v_1 - xv_2 + xv_3 + (a-x)v_4). \qquad (3.69)$$

Теперь, пользуясь соотношениями (3.55), (3.57), (3.62), (3.69), выразим все компоненты, входящие в (3.68), через узловые перемещения:

$$F = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^b \left(\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{1}{ab}(-(b-y)u_1 + (b-y)u_2 + yu_3 - yu_4) + \right.$$

$$+\frac{\mu E}{1-\mu^2}\cdot\frac{1}{ab}(-(a-x)v_1-xv_2+xv_3+(a-x)v_4))\frac{1}{ab}(-(b-y)u_1+$$

$$+(b-y)u_2+yu_3-yu_4)+(\frac{\mu E}{1-\mu^2}\frac{1}{ab}(-(b-y)u_1+(b-y)u_2+$$

$$+yu_3-yu_4)+\frac{E}{1-\mu^2}\frac{1}{ab}(-(a-x)v_1-xv_2+xv_3+(a-x)v_4))\frac{1}{ab}(-(a-$$

$$-x)v_1-xv_2+xv_3+(a-x)v_4)+\frac{E}{2(1+\mu)}(\frac{1}{ab}(-(a-x)u_1-xu_2+xu_3+$$

$$+(a-x)u_4)+\frac{1}{ab}(-(b-y)v_1+(b-y)v_2+yv_3-yv_4))(\frac{1}{ab}(-(a-x)u_1-$$

$$-xu_2+xu_3+(a-x)u_4)+\frac{1}{ab}(-(b-y)v_1+(b-y)v_2+yv_3-yv_4))dxdy-$$

$$-(k_{u1}^{(x1)}u_1+k_{v1}^{(x1)}v_1+k_{u2}^{(x1)}u_2+k_{v2}^{(x1)}v_2+k_{u3}^{(x1)}u_3+k_{v3}^{(x1)}v_3+k_{u4}^{(x1)}u_4+$$

$$+k_{v4}^{(x1)}v_4)u_1-(k_{u1}^{(y1)}u_1+k_{v1}^{(y1)}v_1+k_{u2}^{(y1)}u_2+k_{v2}^{(y1)}v_2+k_{u3}^{(y1)}u_3+k_{v3}^{(y1)}v_3+$$

$$+k_{u4}^{(y1)}u_4+k_{v4}^{(y1)}v_4)v_1-\ldots-(k_{u1}^{(y4)}u_1+k_{v1}^{(y4)}v_1+k_{u2}^{(y4)}u_2+k_{v2}^{(y4)}v_2+$$

$$+k_{u3}^{(x4)}u_3+k_{v3}^{(x4)}v_3+k_{u4}^{(y4)}u_4+k_{v4}^{(y4)}v_4)v_4. \qquad (3.70)$$

Решением рассматриваемой задачи должны быть значения искомых величин перемещений u, v в узлах, которые сообщают функционалу (3.70) минимальное значение. Поскольку величина F зависит от значений $u_1, v_1, u_2, ..., v_4$, функционал (3.70) принимает минимальное значение, если выполняются равенства

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}=0;\ \ \frac{\partial F}{\partial v_k}=0,\ \ i,k=\overline{1,4}.$$

Этими уравнениями пользуемся для выражения элементов K_i, которое в данном случае является матрицей порядка 8×8. Приравниваем нулю производную выражения (3.70) и после упрощений получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b(\frac{E}{1-\mu^2}\frac{2}{a^2b^2}((y-b)u_1+(b-y)u_2+yu_3-yu_4)(y-b)+$$

$$+\frac{2\mu E}{1-\mu^2}\frac{1}{a^2b^2}(y-b)((x-a)v_1-xv_2+xv_3+(a-x)v_4)+$$

$$+\frac{E}{1+\mu}\frac{1}{a^2b^2}((x-a)u_1-xu_2+xu_3+(a-x)u_4)(x-a)+$$

$$+\frac{E}{1+\mu}\frac{1}{a^2b^2}((y-b)v_1+(b-y)v_2+yv_3-yv_4)(x-a))dxdy-$$
$$-(k_{u1}^{(x1)}u_1+k_{v1}^{(x1)}v_1+k_{u2}^{(x1)}u_2+k_{v2}^{(x1)}v_2+k_{u3}^{(x1)}u_3+k_{v3}^{(x1)}v_{3+}$$
$$+k_{u4}^{(x1)}u_4+k_{v4}^{(x1)}v_4)-k_{u1}^{(x1)}u_1-k_{u1}^{(y1)}v_1-k_{u2}^{(x2)}u_2-$$
$$-k_{u1}^{(y2)}v_2-k_{u1}^{(x3)}u_3-k_{u1}^{(y3)}v_3-k_{u1}^{(x4)}u_4-k_{u1}^{(y4)}v_4=0. \quad (3.71)$$

В соответствии с теоремой о взаимности работ выполняются соотношения

$$k_{up}^{(xr)}=k_{ur}^{(xp)},\ k_{up}^{(yr)}=k_{vr}^{(xp)},\ p,r=\overline{1,4}, \quad (3.72)$$

вследствие чего матрица K_i является симметричной.

Элемент $k_{u1}^{(x1)}$ матрицы жесткости выражает величину реакции в узле 1 по направлению оси *Ox* при перемещении его вдоль этой оси на единицу в отсутствие перемещений всех прочих узлов. Примем в (3.71) $u_1=1$ и приравняем нулю все прочие перемещения:

$$\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b(\frac{E}{1-\mu^2}\frac{2}{a^2b^2}(y-b)^2+\frac{E}{1+\mu}\frac{1}{a^2b^2}(x-a)^2)dxdy-$$
$$-k_{u1}^{(x1)}-k_{u1}^{(x1)}=0. \quad (3.73)$$

Отсюда после вычисления интеграла выразим элемент $k_{u1}^{(x1)}$:

$$k_{u1}^{(x1)}=\frac{E}{6(1-\mu^2)}(\frac{b}{a}+(1-\mu)\frac{a}{2b}).$$

Выразим теперь элемент $k_{v1}^{(x1)}$ из уравнения (3.71), принимая в нем $v_1=1$ и приравнивая нулю все прочие перемещения:

$$\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b(\frac{2\mu E}{1-\mu^2}\frac{1}{a^2b^2}(y-b)(x-a)+\frac{E}{1+\mu}\frac{1}{a^2b^2}(y-b)(x-a))dxdy-$$
$$-k_{v1}^{(x1)}-k_{u1}^{(y1)}=0. \quad (3.74)$$

С учетом (3.72) из (3.74) имеем:

$$\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\frac{2\mu E}{1-\mu^2}\frac{1}{a^2b^2}(y-b)(x-a)+\frac{E}{1+\mu}\frac{1}{a^2b^2}(y-b)(x-a)dxdy-2k_{v1}^{(x1)}=0$$

откуда

$$k_{v1}^{(x1)}=\frac{E}{16(1-\mu)}.$$

Аналогично вычисляются все прочие элементы матрицы жесткости (здесь рассматривается балка-стенка единичной толщины).

Ниже приведем выражения для элементов матрицы жесткости балки-стенки толщиной h (все результаты следует умножить на величину $\frac{Eh}{2(1-\mu^2)}, m=\frac{b}{a}$):

$$r_{x1}^{(u1)}=r_{x2}^{(u2)}=r_{x3}^{(u3)}=r_{x4}^{(u4)}=\frac{m}{3}+\frac{1-\mu}{6m};$$

$$r_{x1}^{(v1)}=-r_{x1}^{(v3)}=-r_{y1}^{(u3)}=-r_{x2}^{(v2)}=r_{x2}^{(v4)}=r_{y2}^{(u4)}=r_{x3}^{(v3)}=-r_{x4}^{(v4)}=\frac{1+\mu}{8};$$

$$r_{x1}^{(u2)}=r_{x3}^{(u4)}=-\frac{m}{3}+\frac{1-\mu}{12m};$$

$$r_{x1}^{(v2)}=-r_{x1}^{(v4)}=-r_{y1}^{(u2)}=r_{y1}^{(u4)}=r_{x2}^{(v3)}=-r_{y2}^{(u3)}=r_{x3}^{(v4)}=-r_{y3}^{(u4)}=-\frac{1}{8}+\frac{3\mu}{8};$$

$$r_{x1}^{(u3)}=r_{x2}^{(u4)}=-\frac{m}{6}-\frac{1-\mu}{12m};$$

$$r_{x1}^{(u4)}=r_{x2}^{(u3)}=\frac{m}{6}-\frac{1-\mu}{6m};$$

$$r_{y1}^{(v1)}=r_{y2}^{(v2)}=r_{y3}^{(v3)}=r_{y4}^{(v4)}=\frac{1}{3m}+\frac{(1-\mu)m}{6};$$

$$r_{y1}^{(v2)}=r_{y3}^{(v4)}=\frac{1}{6m}-\frac{(1-\mu)m}{6};$$

$$r_{y1}^{(v3)}=r_{y2}^{(v4)}=-\frac{1}{6m}-\frac{(1-\mu)m}{12};$$

$$r_{y1}^{(v4)}=r_{y2}^{(v3)}=-\frac{1}{3m}+\frac{(1-\mu)m}{12}. \qquad (3.75)$$

Все прочие элементы определяются из приведенных выражений с учетом симметрии относительно главной диагонали матрицы жесткости.

После составления матрицы жесткости для всех выбранных конечных элементов решение задачи сводится к составлению уравнений равновесия для каждого из узлов выбранной сетки. В данном случае такие уравнения можно получить, если приравнять нулю суммы проекций на оси *Ox*, *Oy* всех сил, передающихся на каждый из узлов от всех примыкающих к нему конечных элементов. Выражая проекции сил R_x, R_y через узловые перемещения на основе равенства (3.62), получим разрешающую систему уравнений метода, включающих перемещения узлов в качестве неизвестных. Условия равновесия узлов, перемещения в которых известны, например, заданы граничными условиями, не записываются. Если какой-либо узел

принадлежит нескольким конечным элементам, то его перемещения включаются в выражения (3.62) для реакций, вызванных перемещениями узлов каждого из этих элементов.

Таким образом, в данном случае решение сводится к определению таких величин узловых перемещений, которые в соответствии с процедурой построения матрицы жесткости сообщают функционалу (3.59) минимальное значение.

Вычисление величин перемещений в произвольных точках области по найденным узловым перемещениям производится на основе формул (3.65), (3.66), деформаций и напряжений – соответственно по формулам (3.55), (3.57).

При решении сложных граничных задач метод конечных элементов оказывается весьма трудоемким и может быть реализован только на компьютере. В этом случае наиболее удобной является матричная форма записи, которая и положена в основу всех автоматизированных вычислительных комплексов.

3.11. Треугольный конечный элемент в задаче о плоском напряженном состоянии

При построении расчетных схем в областях сложной формы, особенно для аппроксимации граничного контура применение прямоугольных конечных элементов существенно усложняет процесс решения, делает его более громоздким и может привести в ряде случаев к существенным погрешностям. В таких случаях более целесообразно применять только треугольные конечные элементы или их комбинации с прямоугольными элементами. Приведем здесь основные формулы и соотношения МКЭ [39] для подобласти в форме треугольника общего вида (рис. 3.23).

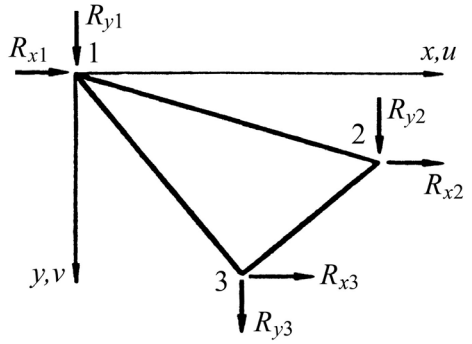


Рис. 3.23. Случай подобласти в форме треугольника общего вида

В данной модели выражения для перемещений приняты в форме линейных многочленов

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \tag{3.76}$$

$$v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y. \tag{3.77}$$

Подставив координаты узлов рассматриваемой подобласти в (3.76), (3.77), получим систему трех линейных алгебраических уравнений с параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ в качестве неизвестных:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Решение этих систем и приведение подобных позволяет выразить перемещения, а после их подстановки в соответствующие формулы – деформации и напряжения во всей рассматриваемой подобласти – через узловые перемещения. Реализуя уже дважды рассмотренную выше процедуру, получим следующие выражения для элементов матрицы жесткости:

$$r_{x1}^{(u1)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}(y_2 - y_3)^2 + G(x_3 - x_2)^2\right);$$

$$r_{x1}^{(v1)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2} + G\right)(x_3 - x_2)(y_2 - y_3);$$

$$r_{x1}^{(u2)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}(y_2 - y_3)y_3 - G(x_3 - x_2)x_3\right);$$

$$r_{x1}^{(v2)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}(y_3 - y_2)x_3 + G(x_3 - x_2)y_2\right);$$

$$r_{x1}^{(u3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}(y_3 - y_2)y_2 + G(x_3 - x_2)x_2\right);$$

$$r_{x1}^{(v3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}(y_2 - y_3)x_2 - G(x_3 - x_2)y_2\right);$$

$$r_{y1}^{(v1)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}(x_3 - x_2)^2 + G(y_2 - y_3)^2\right);$$

$$r_{y1}^{(u2)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}(x_3 - x_2)y_3 - G(y_2 - y_3)x_3\right);$$

$$r_{y1}^{(v2)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}(x_2 - x_3)x_3 + G(y_2 - y_3)y_3\right);$$

$$r_{y1}^{(u3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}(x_2 - x_3)y_2 + G(y_2 - y_3)x_2\right);$$

$$r_{y1}^{(v3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}(x_3 - x_2)x_2 - G(y_2 - y_3)y_2\right);$$

$$r_{x2}^{(u2)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}y_3^2 + Gx_3^2\right);$$

$$r_{x2}^{(v1)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2} + G\right)(-x_3 y_3);$$

$$r_{x2}^{(u3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(-\frac{E}{1-\mu^2}y_2 y_3 - Gx_2 x_3\right);$$

$$r_{x2}^{(v3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}x_2 y_3 + Gx_3 y_2\right);$$

$$r_{y2}^{(v2)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}x_3^2 + Gy_3^2\right);$$

$$r_{y2}^{(u3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}x_3 y_2 + Gx_2 y_3\right);$$

$$r_{y2}^{(v3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(-\frac{E}{1-\mu^2}x_2 x_3 - Gy_2 y_3\right);$$

$$r_{x3}^{(u3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}y_2^2 + Gx_2^2\right);$$

$$r_{x3}^{(v3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2} + G\right)(-x_2 y_2);$$

$$r_{y3}^{(v3)} = \frac{h}{2\Delta}\left(\frac{E}{1-\mu^2}x_2^2 + Gy_2^2\right). \qquad (3.78)$$

Остальные элементы матрицы жесткости могут быть выражены из (3.78) на основе симметрии относительно главной диагонали.

Напряжения выражаются через узловые перемещения следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2)\Delta}((y_2 - y_3)u_1 + \mu(x_3 - x_2)v_1 + (y_3 - y_1)u_2 + \\ + \mu(x_1 - x_3)v_2 + (y_1 - y_2)u_3 + \mu(x_2 - x_1)v_3);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2)\Delta}(\mu(y_2 - y_3)u_1 + (x_3 - x_2)v_1 + \mu(y_3 - y_1)u_2 + \\ + (x_1 - x_3)v_2 + \mu(y_1 - y_2)u_2 + (x_2 - x_1)v_3);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{(1-\mu^2)\Delta}(\frac{1-\mu}{2}((x_3 - x_2)u_1 - (y_3 - y_2)v_1 - (x_3 - x_1)u_2 + \\ + (y_3 - y_1)v_2 + (x_2 - x_1)u_3 - (y_2 - y_1)v_3)). \qquad (3.79)$$

Как следует из выражений (3.79), в рассматриваемой модели МКЭ все напряжения в пределах подобласти выражаются постоянными величинами, а следовательно, на границе между подобластями напряжения должны изменяться скачкообразно.

3.12. Пример решения задачи о плоском напряженном состоянии методом конечных элементов

Прямоугольный конечный элемент во всех случаях, когда форма соответствующей подобласти достаточна для аппроксимации заданной области с необходимой точностью, является предпочтительным по сравнению с треугольным конечным элементом, так как позволяет более качественно описывать напряженно-деформированное состояние балки-стенки. Об уровне достоверности решения при выбранной расчетной схеме можно судить, как уже отмечалось выше, на основе анализа относительной сходимости приближенного решения. Во многих случаях для достижения приемлемого качества такого решения приходится применять расчетную схему с большим числом неизвестных.

В работе [39] приведен пример расчета квадратной балки-стенки, свободно опертой в нижних углах и загруженной равномерно распределенной нагрузкой на верхнем торце (рис. 3.24, *а*), модуль упругости $E = 10^4$ МПа, $\mu = 0{,}1;$ особый интерес представляет проведенный в примере анализ относительной сходимости приближенного решения методом конечных элементов.

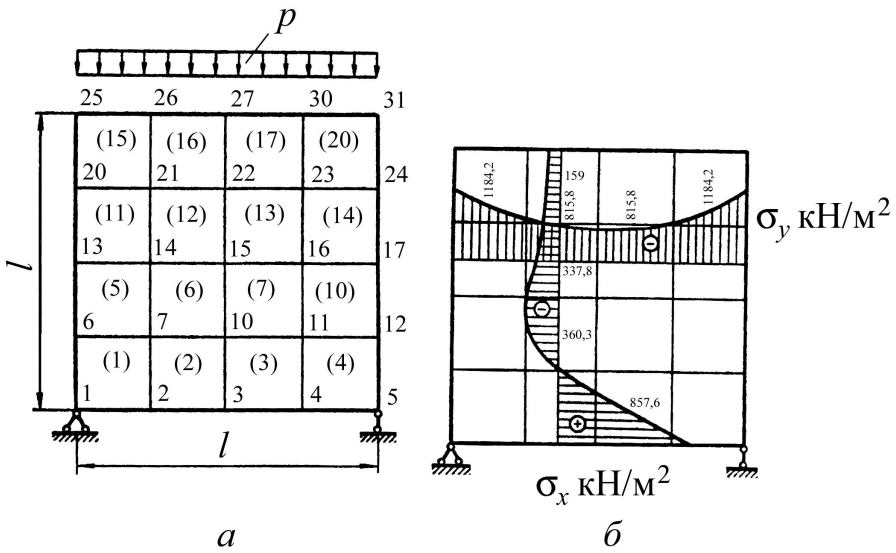


Рис. 3.24. К расчету квадратной балки-стенки: а – расчетная схема; б – эпюры нормальных напряжений

В первом приближении заданная область разделена на 16 одинакового размера квадратных подобластей, при этом сформирована следующая расчетная схема (обозначения подобластей и узлов – в восьмеричной системе счисления):

– условия для перемещений на границе области: $u_1 = v_1 = v_5 = 0$;

– внешняя нагрузка: $P_{25} = P_{31} = \frac{pl}{8}, P_{26} = P_{27} = P_{28} = \frac{pl}{4}$;

– общее число неизвестных – 47, однако введена упрощающая гипотеза о симметрии относительно вертикали, проходящей через узлы 27, 3, вследствие чего число неизвестных узловых перемещений сократилось до 24 (узел 5 может перемещаться по вертикали, узел 1 закреплен неподвижно, поэтому такое упрощение должно привести к дополнительным погрешностям).

В процессе решения соответственно числу неизвестных составлена система из 24 линейных алгебраических уравнений с 24 неизвестными. В качестве примера составим уравнение $\sum Y_{30} = 0$ для узла 30:

$$\sum Y_{30} = R_{y30}^{(17)} + R_{y30}^{(20)} + \frac{pl}{4} = 0, \qquad (3.80)$$

где $R_{y30}^{(17)}, R_{y30}^{(20)}$ – вертикальные реакции, передающиеся на узел 30 соответственно из подобластей 17 и 20. Для того чтобы выразить эти реакции

через узловые перемещения и элементы матрицы жесткости, необходимо определить соответствие между узлом 30, как составной частью подобластей 17 и 20 на рис. 3.24, *а*, и узлами на схеме рис. 3.22. Очевидно, величина $R_{y30}^{(17)}$, как вертикальной реакции в правом верхнем углу подобласти 17, должна определяться выражением для R_{y2} – вертикальной реакции в верхнем правом углу подобласти на рис. 3.22 в матричном соотношении (3.62). Отсюда выражение для R_{y2} (см. рис. 3.22):

$$R_{y2} = r_{y2}^{(u1)}u_1 + r_{y2}^{(v1)}v_1 + r_{y2}^{(u2)}u_2 + r_{y2}^{(v2)}v_2 + \\ + r_{y2}^{(u3)}u_3 + r_{y2}^{(v3)}v_3 + r_{y2}^{(u4)}u_4 + r_{y2}^{(v4)}v_4$$

применительно к узлу 30 подобласти 17 (см. рис. 3.24) следует записать в виде:

$$R_{y30}^{(17)} = r_{y2}^{(u1)}u_{27} + r_{y2}^{(v1)}v_{27} + r_{y2}^{(u2)}u_{30} + r_{y2}^{(v2)}v_{30} + \\ + r_{y2}^{(u3)}u_{23} + r_{y2}^{(v3)}v_{23} + r_{y2}^{(u4)}u_{22} + r_{y2}^{(v4)}v_{22}.$$

Таким же образом можно прийти к выводу, что реакция $R_{y30}^{(20)}$ в левом верхнем углу подобласти 20, вызванная перемещениями ее узлов, выражается:

$$R_{y30}^{(20)} = r_{y1}^{(u1)}u_{30} + r_{y1}^{(v1)}v_{30} + r_{y1}^{(u2)}u_{31} + r_{y1}^{(v2)}v_{31} + \\ + r_{y1}^{(u3)}u_{24} + r_{y1}^{(v3)}v_{24} + r_{y1}^{(u4)}u_{23} + r_{y1}^{(v4)}v_{23}.$$

После вычисления элементов матрицы жесткости по формулам (3.75) и приведения подобных уравнение (3.80) принимает вид:

$$-0{,}24167v_{22} - 0{,}51667v_{23} - 0{,}13750u_{24} - 0{,}24167v_{24} + 0{,}016667v_{27} + \\ + 0{,}96667v_{30} + 0{,}0875u_{31} + 0{,}016667v_{31} + 0{,}2475\cdot 10^{-4}\frac{pl}{h}.$$

На рис. 3.24, *б* приведены величины нормальных напряжений в характерных сечениях балки-стенки при $p = 100$ кН/м при $l = 1$ м, $h = 0{,}1$ м. Полученное решение содержит существенные погрешности, о чем свидетельствуют результаты (рис. 3.25), полученные при делении заданной области на 100 подобластей (сгущение сетки узлов по сравнению с первым вариантом в 2,5 раза).

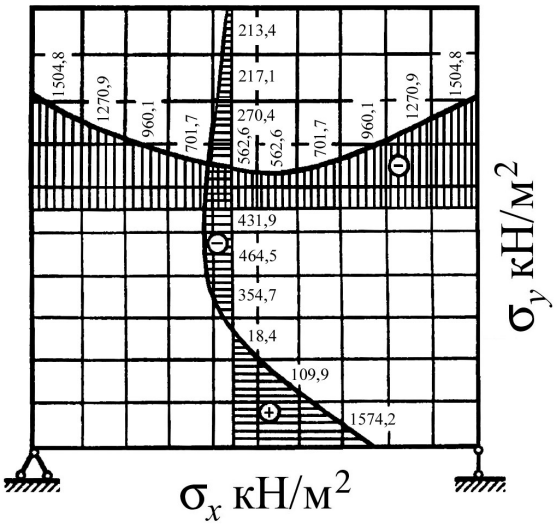


Рис. 3.25. К сопоставлению результатов расчета квадратной балки-стенки

При проектировании «ответственной» конструкции следовало бы для уверенности, что решение во втором варианте действительно близко к точному, «сгустить» сетку еще в два раза.

3.13. Расчет тонких плит методом конечных элементов

Математическая модель напряженно-деформированного состояния тонкой изгибаемой поперечной нагрузкой $q(x,y)$ плиты описана в гл. 2. Функционал полной потенциальной энергии, соответствующий этой модели, записывается в виде:

$$\prod = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(M_x\chi_x + M_y\chi_y + 2M_{xy}\chi_{xy})dxdy - \int_{\Omega} q(x,y)wdxdy, \qquad (3.81)$$

где

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\ \ \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y};\ \ \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Выражения для σ (2.24), (2.25) главы 2 раздела 1 в матричной форме можно представить следующим образом:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -M_x \\ -M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix}.$$

Функционал (3.81) выразим полностью через функцию прогибов плиты, что упрощает процесс построения матрицы жесткости:

$$\prod = \frac{1}{2} D \int_D ((\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\mu)(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2))dxdy - \int_G qwdxdy. \quad (3.82)$$

Рассмотрим более подробно построение конечного элемента применительно к прямоугольной подобласти с тремя неизвестными – прогибом w и углами поворота φ_x, φ_y относительно координатных осей в каждом из четырех узлов, расположенных в вершинах прямоугольника (рис. 3.26).

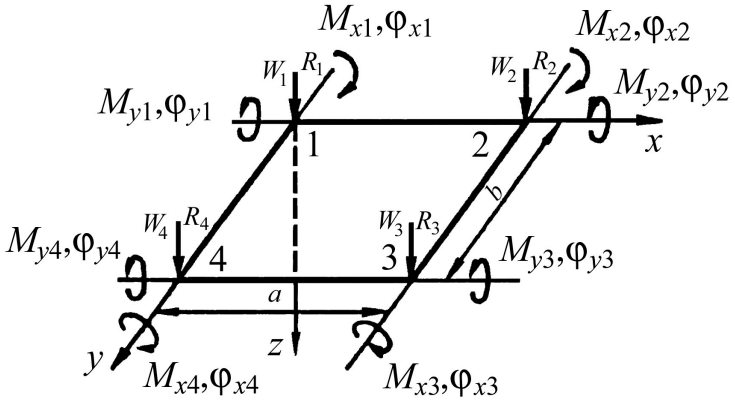


Рис. 3.26. Случай прямоугольной подобласти с тремя неизвестными в каждом узле

Функцию прогибов выразим с помощью неполного полинома 4-й степени от двух переменных:

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (3.83)$$

Число числовых параметров полинома (3.83) равно числу неизвестных перемещений в узлах и числу узловых реакций – сосредоточенных сил R_i и моментов M_{xi} и M_{yi} (рис. 3.26).

Углы поворота выражаются из функции (3.83) следующим образом:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + 2\alpha_5 y + \alpha_6 x + \alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2; \quad (3.84)$$

$$\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_6 y + 2\alpha_7 xy + \\ + \alpha_8 y^2 + 3\alpha_9 x^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3. \quad (3.85)$$

Используя рассмотренную ранее методику, последовательно подставим в (3.83)–(3.85) координаты узлов 1–4 и получим систему 12 линейных алгебраических уравнений с 12 параметрами выражения (3.83) в качестве неизвестных. В результате решения этой системы выразим функцию прогибов через узловые неизвестные $w_i, \varphi_i^{(x)}, \varphi_i^{(y)}$ $(i = \overline{1,4}; \xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b})$:

$$w = \sum_{i=1}^{4} (\psi_{iw} w_i + \psi_{i\varphi}^{(x)} \varphi_i^{(x)} + \psi_{i\varphi}^{(y)} \varphi_i^{(y)}),$$

где

$$\psi_{1w} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\eta^2 + 2\eta^3 - \xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3;$$
$$\psi_{1\varphi}^{(x)} = b(1-\xi)(\eta - 2\eta^2 + \eta^3); \ \psi_{1\varphi}^{(y)} = -a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(1-\eta);$$
$$\psi_{2w} = 3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\eta - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3;$$
$$\psi_{2\varphi}^{(x)} = b\xi(\eta - 2\eta^2 + \eta^3); \ \psi_{2\varphi}^{(y)} = a(\xi^2 - \xi^3)(1-\eta);$$
$$\psi_{3w} = 3\eta^2 - 2\eta^3 + \xi\eta - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3;$$
$$\psi_{3\varphi}^{(x)} = b(1-\xi)(-\eta^2 + \eta^3); \ \psi_{3\varphi}^{(y)} = -a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\eta;$$
$$\psi_{4w} = -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 2\xi^3\eta;$$
$$\psi_{4\varphi}^{(x)} = b\xi(-\eta^2 + \eta^3); \ \psi_{4\varphi}^{(y)} = -a(-\xi^2 + \xi^3)\eta.$$

Элементы матрицы жесткости для прямоугольной области и принятой системы узлов выражаются следующим образом:

$$k_{11} = k_{44} = k_{77} = k_{10,10} = \frac{D}{a^2}(4m + \frac{4}{m^3} + \frac{14 - 4\mu}{5m});$$
$$k_{22} = k_{55} = k_{88} = k_{11,11} = D(\frac{4m}{3} + \frac{4(1-\mu)}{15m});$$
$$k_{33} = k_{66} = k_{99} = k_{12,12} = D\left[\frac{4}{3m} + \frac{4(1-\mu)}{15} m\right];$$
$$k_{12} = -k_{45} = -k_{78} = k_{10,11} = \frac{D}{a}(2m + \frac{1 + 4\mu}{5m});$$
$$k_{13} = k_{46} = -k_{79} = -k_{10,12} = \frac{D}{a}(\frac{2}{m^2} + \frac{1 + 4\mu}{5});$$
$$k_{23} = -k_{56} = k_{89} = -k_{11,12} = \mu D;$$

$$k_{14} = k_{7,10} = \frac{D}{a^2}(-4m + \frac{2}{m^3} - \frac{14-4\mu}{5m});$$

$$k_{1,10} = k_{47} = \frac{D}{a^2}(-\frac{4}{m^3} + 2m - \frac{14-4\mu}{5m});$$

$$k_{15} = -k_{24} = -k_{7,11} = k_{8,10} = \frac{D}{a}(2m + \frac{1-\mu}{5m});$$

$$k_{25} = k_{8,11} = D(\frac{2}{3}m - \frac{1-\mu}{15m});$$

$$k_{16} = k_{34} = -k_{7,12} = -k_{9,10} = \frac{D}{a}(\frac{1}{m^2} - \frac{1+4\mu}{5});$$

$$k_{36} = k_{9,12} = D\left[\frac{2}{3m} - \frac{4(1-\mu)}{15}m\right];$$

$$k_{1,11} = k_{2,10} = -k_{48} = -k_{57} = \frac{D}{a}(m - \frac{1+4\mu}{5m});$$

$$k_{1,12} = -k_{3,10} = k_{49} = -k_{67} = \frac{D}{a}(\frac{2}{m^2} + \frac{1-\mu}{5});$$

$$k_{17} = k_{4,10} = \frac{D}{a^2}(-2m - \frac{2}{m^3} + \frac{14-4\mu}{5m});$$

$$k_{18} = -k_{27} = -k_{4,11} = k_{5,10} = \frac{D}{a}(m - \frac{1-\mu}{5m});$$

$$k_{19} = -k_{37} = k_{4,12} = -k_{6,10} = \frac{D}{a}(\frac{1}{m^2} - \frac{1-\mu}{5});$$

$$k_{2,11} = k_{58} = D\left[\frac{2}{3}m - \frac{4(1-\mu}{15m}\right];$$

$$k_{28} = k_{5,11} = D(\frac{1}{3}m + \frac{1-\mu}{15m});$$

$$k_{39} = k_{6,12} = D(\frac{1}{3m} + \frac{1-\mu}{15}m);$$

$$k_{3,12} = k_{69} = D(\frac{2}{3m} - \frac{1-\mu}{15}m);$$

$$k_{26} = k_{29} = k_{2,12} = k_{35} = k_{38} = k_{3,11} = k_{59} =$$
$$= k_{5,12} = k_{68} = k_{6,11} = k_{8,12} = k_{9,11} = 0.$$

Рассматриваемый конечный элемент разработан Р. Клафом.

В процессе решения местные нагрузки, в том числе и сосредоточенные силы, приложенные вне узлов, следует приводить к узлам. Разработаны специальные приемы приведения к сосредоточенным силам, действующим в узлах, нагрузок, распределенных различным образом на поверхности плиты.

3.14. Треугольные конечные элементы для тонкой изгибаемой плиты. К проблеме совместности конечных элементов и сходимости приближенного решения

Поскольку метод конечных элементов является приближенным, важнейшей проблемой при выборе для решения поставленной задачи той или иной модификации МКЭ является ее сходимость, при этом данная характеристика вычислительного процесса в существенной, если не в решающей, мере зависит от обеспечения выбранными координатными функциями совместности соответствующего типа конечных элементов.

По мере развития МКЭ получен ряд важных теоретических результатов, содержащих доказательство его сходимости для того или иного типа конечных элементов и связывающих качество сходимости с характером убывания некоторых числовых параметров. Следует, однако, отметить, что в инженерной практике оценка качества сходимости на основе таких параметров оказывается во многих случаях весьма затруднительной, в то же время практика применения аналитических приближенных методов убедительно свидетельствует о том, что не всякий тип сходимости применяемых последовательностей координатных функций является приемлемым. При этом качество сходимости МКЭ в решающей мере зависит от совместности применяемого конечного элемента.

При развитии эффективных модификаций МКЭ применительно к расчету тонких изгибаемых плит проблема обеспечения совместности конечных элементов осложнена тем, что главные граничные условия, которым в методе Ритца обязательно должна удовлетворять каждая координатная функция, включают не только искомые перемещения, но и их производные. В конечном элементе Клафа, например, соблюдается совместность только вертикальных перемещений; функции углов поворота (первые производные функции прогибов) на границах конечных элементов претерпевают разрыв.

Поэтому для расчета тонких изгибаемых плит широко применяется также прямоугольный конечный элемент с 16 неизвестными узловыми перемещениями; кроме прогибов и углов поворота относительно координатных осей (как в конечном элементе Клафа) в рассмотрение введены также деформации кручения в узлах. При использовании такого конечного элемента совместность обеспечивается не только для вертикальных

перемещений, но и для углов поворота. Численные исследования подтверждают, что при решении задачи изгиба плит с одним и тем же общим числом неизвестных использование конечного элемента с шестнадцатью неизвестными на более редкой сетке дает большую точность, чем использование конечного элемента Клафа на более густой сетке.

Этот результат свидетельствует о том, что, несмотря на теоретическую доказанность сходимости МКЭ с конечным элементом Клафа, качество сходимости может быть иное (а в ряде случаев - неприемлемое), чем при применении хотя и более сложного, но более надежного конечного элемента с шестнадцатью неизвестными. Это особенно следует иметь в виду при расчете элементов ответственных сложных сооружений, где ошибка в расчетах может привести к весьма нежелательным последствиям. Оправданием вряд ли послужит утверждение, что конечный элемент Клафа применен «благодаря естественности и физической наглядности его узловых неизвестных». По-видимому, следует рекомендовать специалистам следующий вполне обоснованный теоретически и практически принцип: во всех случаях, когда это возможно, применять при расчете сложных сооружений совместные конечные элементы.

Однако разработка таких элементов в ряде случаев связана со значительными трудностями. В качестве примера рассмотрим данную проблему применительно к треугольному конечному элементу, без которого трудно обойтись при построении расчетной модели для плит сложной конфигурации, сгущении сетки в местах ожидаемой концентрации напряжений и т.п.

В совместном треугольном конечном элементе узлы приняты в вершинах треугольника и в каждом из них введены шесть неизвестных – $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Прогиб плиты выражается 21-членным полиномом

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 y^3 + \alpha_9 x^2 y +$$
$$+ \alpha_{10} xy^2 + \alpha_{11} x^4 + \alpha_{12} y^4 + \alpha_{13} x^3 y + \alpha_{14} xy^3 + \alpha_{15} x^2 y^2 + \alpha_{16} x^5 +$$
$$+ \alpha_{17} y^5 + \alpha_{18} x^4 y + \alpha_{19} xy^4 + \alpha_{20} x^3 y^2 + \alpha_{21} x^2 y^3,$$

в который для полноты включены все члены до пятой суммарной степени включительно.

Чтобы привести в соответствие число членов полинома и число неизвестных, введено три дополнительных условия: вдоль каждой стороны треугольника нормальная производная функции прогибов должна выражаться полиномом третьей степени относительно координаты, отсчитываемой вдоль этой стороны. В эти условия вводятся первые производные по нормали к стороне и смешанные производные в каждой из

двух примыкающих к этой стороне вершин треугольника. Такая модель обеспечивает непрерывность прогиба и углов поворота при переходе от одного конечного элемента к другому.

Основным недостатком данного конечного элемента является его несовместимость с прямоугольными элементами (различное число неизвестных в узлах), а также большая заполненность матрицы коэффициентов при неизвестных разрешающей системы линейных алгебраических уравнений ненулевыми элементами (большая ширина ленты), однако при пользовании современными компьютерами это не вызывает особых проблем. Указанных недостатков лишен треугольный конечный элемент с девятью неизвестными – по три ($w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$) в каждой из вершин треугольника. Для построения аппроксимирующих функций, соответствующих девяти неизвестным, принят многочлен 3-й степени:

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \\ + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3.$$

Как и в предыдущем случае, неопределенных числовых параметров в данном выражении больше, чем узловых неизвестных. Дополнительное условие получено вводом в рассмотрение дополнительной функции, которая не зависит от узловых неизвестных и всегда равна нулю на его сторонах, что соответствует вариационной постановке задачи.

В итоге функциональные множители при узловых неизвестных содержат по одной дополнительной функции и обеспечивается удовлетворение матрицей жесткости условиям равновесия. Однако указанные функциональные множители не удовлетворяют условиям полноты, вследствие чего результаты применения такого конечного элемента могут оказаться совершенно неприемлемыми.

3.15. Метод конечных элементов при расчете массивов

При расчете массивных конструкций часто используют модель напряженно-деформированного состояния упругого трехмерного тела (соотношения (2.1)–(2.5) глава 2 раздел 1). Функционал потенциальной энергии применительно к этой модели записывается в виде:

$$\prod = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \\ + \tau_{yz}\gamma_{yz}) d\Omega - \int_{\Omega} (p_x u + p_y v + p_z w) d\Omega,$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – нормальные и касательные напряжения; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – соответствующие им относительные и сдвиговые деформации; *u,v,w* – перемещения точек трехмерного тела (массива), а p_x, p_y, p_z – внешняя нагрузка в направлении осей *Ox, Oy, Oz* соответственно.

Все зависимости удобно представить в матричной форме:

$$[u]=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}; [p]=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}; [\sigma]=\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}; [\varepsilon]=\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}, \tag{3.86}$$

где $[u], [p], [\sigma], [\varepsilon]$ – соответственно векторы перемещений, внешних усилий, напряжений и деформаций. Тогда основные соотношения теории упругости примут вид:

$$[\sigma]=[E][\varepsilon]; [\varepsilon]=[D][u], \tag{3.87}$$

где $[E]$ – матрица упругости; $[D]$ – матрица дифференциальных операторов.

Матрица упругости для изотропного тела

$$[E]=\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}, \tag{3.88}$$

где $\lambda=\dfrac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$; $\nu=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$ – коэффициенты Ламе.

Матрица дифференциальных операторов:

$$[D]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}. \qquad (3.89)$$

Теперь функционал полной потенциальной энергии для трехмерного тела можно представить в достаточно компактной форме:

$$\prod=\frac{1}{2}\int_{\Omega}[\varepsilon]^T[\sigma]d\Omega-\int_{\Omega}[p]^T[u]d\Omega. \qquad (3.90)$$

Это выражение лежит в основе построения матриц жесткости для конечных элементов трехмерных тел.

Конечный элемент в форме тетраэдра. Тетраэдрический конечный элемент для пространственной задачи – аналог треугольного элемента для плоской задачи теории упругости. В каждой из четырех вершин тетраэдра (рис. 3.27) в качестве неизвестных рассматриваются перемещения $u_i, v_i, w_i, i=\overline{1,4}$, вдоль координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно.

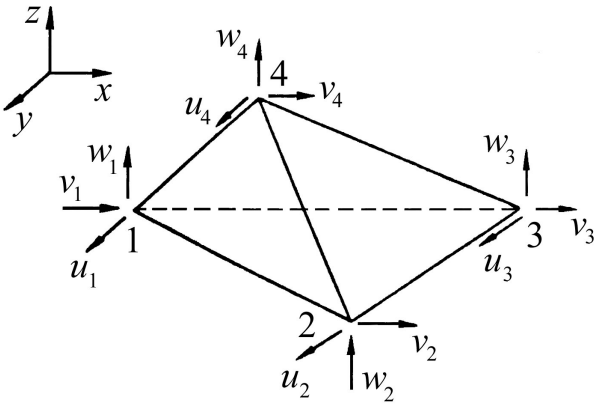


Рис. 3.27. Случай тетраэдрической подобласти с тремя неизвестными в каждом узле

Перемещения вдоль осей Ox, Oy, Oz представим соответственно в форме:

$$u(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z;$$
$$v(x,y,z) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z;$$
$$w(x,y,z) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z. \qquad (3.91)$$

Таким образом, через узловые перемещения предстоит выразить 12 неизвестных параметров $\alpha_i, i = \overline{1,12}$. Полагая, что функция $u(x,y,z)$ зависит только от перемещений $\overline{u_1, u_4}$ и применяя подробно рассмотренную ранее методику, получим:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}.$$

Решением данной системы линейных алгебраических уравнений являются выражения

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

отсюда

$$u(x,y,z) = (a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z)u_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z)u_2 +$$
$$+ (a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z)u_3 + (a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z)u_4, \qquad (3.92)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; b_1 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; c_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$d_1 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}; \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}. \qquad (3.93)$$

Значения a_2, b_2, c_2, d_2 и т. д. определяются с помощью круговой перестановки узловых индексов. Например,

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Выражения для *v(x,y,z)* аналогичны выражению (3.92):

$$v(x,y,z) = (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)v_1 + (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)v_2 + \\ + (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)v_3 + (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)v_4, \qquad (3.94)$$

то же для *w(x,y,z)* .

В качестве примера построим один из элементов матрицы жесткости – горизонтальную реакцию в первом узле, вызванную единичным перемещением этого узла в направлении оси *Oy,* т.е. элемент $k_{u1}^{(y1)}$. Сначала построим вектор $\{\varepsilon\}_{v_1}$, соответствующий перемещению v_1, когда все остальные перемещения узлов равны нулю. На основе принятых предпосылок перемещения по области конечного элемента имеют вид:

$$u(x,y,z) = 0;\ v(x,y,z) = (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)v_1;\ w(x,y,z) = 0. \qquad (3.95)$$

Компоненты вектора деформаций найдем, используя соотношение (3.87):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0;\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = c_1v_1;\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0;\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = b_1v_1;$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = d_1v_1;\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \qquad (3.96)$$

Таким образом, вектор

$$\{\varepsilon\}_v^T = \{0; c_1v_1; 0; b_1v_1; d_1v_1; 0\}.$$

Теперь построим вектор $\{\sigma\}_{u_1}$, соответствующий перемещению u_1 узла 1 в направлении оси *Ox*, когда все остальные перемещения узлов равны нулю. В данном случае перемещения по области конечного элемента:

$$u(x,y,z) = (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)u_1;\ v(x,y,z) = 0;\ w(x,y,z) = 0.$$

Компоненты вектора напряжений найдем, воспользовавшись соотношением (3.87):

$$\sigma_x = (\lambda + 2\nu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z = (\lambda + 2\nu)u_1;\ \sigma_y = 0;$$

$$\sigma_z = 0;\ \sigma_{xy} = \nu c_1u_1;\ \sigma_{yz} = 0;\ \sigma_{xz} = \nu d_1u_1.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$[\sigma]_{u_1}^T = [(\lambda + 2\nu)u_1; 0; 0; \nu c_1u_1; 0; \mu d_1u_1].$$

Определив $[\sigma]_{u_1}$ и $[\varepsilon]_{v_1}$, можем найти элемент матрицы жесткости:

$$k_{u1}^{(y1)} = \iiint_{\Omega} \{\sigma\}_{u_1}^{T} \{\varepsilon\} v_1 d\Omega = \iiint_{\Omega} v c_1 b_1 d\Omega = v c_1 b_1 \Omega,$$

где $\Omega = \dfrac{\Delta}{6}$ – объем тетраэдра.

Подставляя вместо b_i, c_i их выражения, окончательно получим:

$$k_{u1}^{(y1)} = -\frac{E}{12(1+\mu)} \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Аналогично строятся и остальные элементы матрицы жесткости для конечного элемента в форме тетраэдра.

Конечный элемент в форме параллелепипеда (рис. 3.28) – аналог прямоугольного конечного элемента для плоской задачи теории упругости, где аппроксимация перемещений принималась по линейному закону.

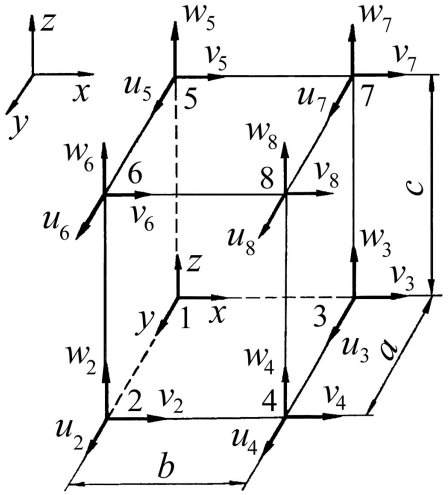


Рис. 3.28. Случай параллелепипедной подобласти с тремя неизвестными в каждом узле

Для трехмерного случая такая аппроксимация имеет вид (узлы приняты в вершинах углов параллелепипеда):

$$u(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 zy + \alpha_8 xyz;$$

$$v(x,y,z) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} xz + \alpha_{15} zy + \alpha_{16} xyz;$$

$$w(x,y,z) = \alpha_{17} + \alpha_{18} x + \alpha_{19} y + \alpha_{20} z + \alpha_{21} xy + \alpha_{22} xz + \alpha_{23} zy + \alpha_{24} xyz. \quad (3.97)$$

По сравнению с тетраэдром количество членов полиномов, аппроксимирующих каждый компонент вектора перемещений, в связи с увеличением числа узлов увеличено до 8.

Функции перемещений по всей области конечного элемента могут быть выражены через узловые перемещения следующим образом:

$$u(x,y,z)=\sum_{i=1}^{8} f_i u_i;\ \ v(x,y,z)=\sum_{i=1}^{8} f_i v_i;\ \ w(x,y,z)=\sum_{i=1}^{8} f_i w_i, \qquad (3.98)$$

где

$$f_1=\frac{1}{abc}(a-x)(b-y)(c-z);\ \ f_2=\frac{1}{abc}x(b-y)(c-z);$$

$$f_3=\frac{1}{abc}y(a-x)(c-z);\ \ f_4=\frac{1}{abc}xy(c-z);$$

$$f_5=\frac{1}{abc}(a-x)(b-y)z;\ \ f_6=\frac{1}{abc}xz(b-y);$$

$$f_7=\frac{1}{abc}yz(a-x);\ \ f_8=\frac{1}{abc}xyz.$$

В качестве примера построим элемент матрицы жесткости $k_{u2}^{(x2)}$, представляющий собой реакцию узла 2 в направлении оси *Ox* от перемещения этого же узла по тому же направлению (рис. 3.28).

Перемещения по области конечного элемента u_2:

$$u(x,y,z)=\frac{1}{abc}x(b-y)(c-z)u_2;\ \ v(x,y,z)=0;\ \ w(x,y,z)=0.$$

Используя соотношения (3.87), получим компоненты вектора деформаций, соответствующие перемещению u_2, при прочих перемещениях, равных нулю:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{abc}(b-y)(c-z)u_2;$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=0;\ \ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{abc}x(c-z)u_2;$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{abc}x(b-y)u_2.$$

Применяя соотношения (3.87), получим компоненты вектора напряжений, соответствующие перемещению u_2 при прочих перемещениях, равных нулю:

$$\sigma_x=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)abc}(b-y)(c-z)u_2;$$

$$\sigma_y = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)abc}(b-y)(c-z)u_2;$$

$$\sigma_z = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)abc}(b-y)(c-z)u_2;$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)abc}x(c-z)u_2;\ \ \tau_{yz} = 0;$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)abc}x(b-y)u_2.$$

Теперь получим выражение для $k_{u2}^{(x2)}$, соответствующее значению $u_2 = 1$:

$$k_{u2}^{(x2)} = \int_{\Omega}[\sigma][\varepsilon]d\Omega = \int_0^a\int_0^b\int_0^c(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} +$$

$$+\tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dxdydz = \int_0^a\int_0^b\int_0^c\left[\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)a^2b^2c^2}\times\right.$$

$$\times(b-y)^2(c-z)^2 + \frac{E}{2(1+\mu)a^2b^2c^2}x^2(c-z)^2 +$$

$$\left.+\frac{E}{2(1+\mu)a^2b^2c^2}x^2(b-y)^2\right]dxdydz = \frac{v}{9}(2\frac{bc}{a} + \frac{bc}{a}\frac{\lambda}{v} + \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b}).$$

Аналогично можно получить и остальные элементы матрицы жесткости. Сравнивая аппроксимирующие полиномы (3.98) для параллелепипеда с аппроксимирующими полиномами (3.91) для тетраэдра, легко убедиться, что в первом случае применяются полиномы более высокой степени, а следовательно, и приближенное решение выполняется на более высоком уровне.

3.16. Метод Трефтца

Вариационный метод Трефтца получил эффективное применение при решении некоторых классов трехмерных задач теории упругости. Решение граничных задач в перемещениях для уравнений (2.2) главы 2 раздел 1 при отсутствии объемных сил X, Y, Z выражается в форме:

$$u = \sum_m \alpha_m f_m(x, y, z);$$

$$v = \sum_n \beta_n \varphi_n(x, y, z);$$
$$w = \sum_p c_p \psi_p(x, y, z), \qquad (3.99)$$

где параметры α_m, β_n, c_p определяются в процессе решения, а каждая из функций $f_m(x, y, z)$, $\varphi_n(x, y, z)$, $\psi_p(x, y, z)$ удовлетворяет однородным уравнениям 2.2 главы 2 раздел 1.

Выразим компоненты напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела, входящие в вариационное уравнение Лагранжа (3.8), через выражения для перемещений (3.99), подставим их в это уравнение вместе с заданными граничными условиями и продифференцируем по каждому из параметров α_m, β_n, c_p. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений, позволяющих вычислить значения этих параметров и тем самым определить приближенное решение задачи, соответствующее числу координатных функций в (3.99).

Точно так же можно строить приближенное решение пространственной задачи теории упругости, применяя для выражения компонентов тензора напряжений координатные функции, удовлетворяющие однородным уравнениям Коши, и соответствующее интегральное соотношение вариационного принципа Лагранжа.

Особенностью метода Трефтца является обращение в нуль объемного интеграла, входящего в (3.8), и возможность эффективного применения хорошо развитого в настоящее время аппарата формирования общих решений уравнений равновесия пространственной теории упругости.

Глава 4
ПРОЕКЦИОННЫЕ И ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

4.1. Понятие о проекционном методе

Рассмотрим семейство векторов и системы координат, имеющие начало в некоторой произвольной точке *O* трехмерного пространства. Проведем ось *Oy*, совпадающую по направлению с некоторым вектором, который обозначим $\overline{B}$.

Проекцией произвольного вектора $\overline{A}$ на ось *Oy* называют величину

$$A_y = A\cos(\overline{A}, y), \tag{4.1}$$

где A – модуль вектора $\overline{A}$; $\cos(\overline{A}, y)$ – косинус угла между вектором $\overline{A}$ и положительным направлением оси *Oy*.

Скалярным произведением $\overline{A}, \overline{B}$ векторов $\overline{A}$ и $\overline{B}$ называют величину

$$(\overline{A}, \overline{B}) = A \cdot B \cdot \cos(\overline{A}, \overline{B}). \tag{4.2}$$

Применяется понятие *нормированный вектор:*

$$\overline{B}_n = \frac{1}{\sqrt{(\overline{B}, \overline{B})}}\overline{B}; \tag{4.3}$$

Поскольку

$$(\overline{B}, \overline{B}) = B \cdot B \cdot \cos(\overline{B}, \overline{B}) = B^2,$$

$$\overline{B}_n = \frac{1}{\sqrt{B^2}}\overline{B} = \frac{1}{B}\overline{B}. \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что нормированный вектор $\overline{B}_n$ совпадает по направлению с вектором $\overline{B}$ и его модуль равен единице.

Выразим скалярное произведение векторов $\overline{A}$ и $\overline{B}_n$:

$$(\overline{A}, \overline{B}_n) = A \cdot 1 \cdot \cos(\overline{A}, \overline{B}_n) = A\cos(\overline{A}, \overline{B}) = A\cos(\overline{A}, y). \tag{4.5}$$

Из сопоставления выражений (4.1), (4.5) следует, что проекция вектора $\overline{A}$ на ось равна скалярному произведению $\overline{A}$ на нормированный вектор, направленный вдоль этой оси.

Два ненулевых вектора (имеющих не равные нулю модули) называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Из (4.2) следует, что произвольные ненулевые векторы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ ортогональны, если $\cos(\overline{A}, \overline{B}) = 0,$ в частности, если угол между векторами равен 90°.

Выберем систему координат, состоящую из трех произвольно направленных осей Oz_1, Oz_2, Oz_3, не лежащих в одной плоскости, и направим соответственно вдоль каждой из них нормированные векторы $\overline{Z}_{1n}, \overline{Z}_{2n,} \overline{Z}_{3n}$. Любой вектор однозначно определяется своими проекциями на данную систему координат, при этом все три проекции могут быть нулевыми только у нулевого вектора. Точно так же однозначно определяется любой вектор его скалярными произведениями на векторы $\overline{Z}_{1n,}\ \overline{Z}_{2n}, \overline{Z}_{3n}$. В этом смысле данная система векторов обладает свойством *полноты*. В трехмерном пространстве полной является система всяких трех ненулевых векторов, не лежащих в одной плоскости.

Сформулируем теперь важное для дальнейшего положение: *если скалярные произведения некоторого вектора на все векторы полной системы равны нулю, то такой вектор является нулевым.*

Однако оперировать с произвольной полной системой векторов оказывается неудобным, так как это приводит к дополнительным вычислениям. Сохраняя направление вектора $\overline{Z}_{1n}$ неизменным, повернем вектор $\overline{Z}_{2n}$ так, чтобы угол между ними оказался равным 90°. Далее, расположим вектор $\overline{Z}_{3n}$ перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $\overline{Z}_{1n}$ и $\overline{Z}_{2n}$, и таким образом получим систему ортогональных и нормированных, или, иначе, ортонормированных векторов.

Построим декартову систему координат с осями $Oz_1^{(0)}, Oz_2^{(0)}, Oz_3^{(0)}$, совпадающими по направлению соответственно с векторами $\overline{Z}_{1n}, \overline{Z}_{2n}, \overline{Z}_{3n}$. Произвольный вектор $\overline{A}$ выражается своими проекциями A_1, A_2, A_3 на эти оси :

$$\overline{A} = A_1\overline{Z}_{1n} + A_2\overline{Z}_{2n} + A_3\overline{Z}_{3n}. \qquad (4.6)$$

Сформулируем теперь следующую задачу. Пусть известны некоторая произвольная полная система векторов $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3$ и скалярные произведения вектора $\overline{A}$ на эти векторы. Пусть по каким-либо причинам представление вектора $\overline{A}$ в форме (4.6) является более удобным.

Для решения задачи применим метод, аналогичный всем разновидностям проекционного метода решения задач механики твердого тела. В данном случае решение задачи сводится к определению чисел A_1, A_2, A_3. Векторы $\overline{Z}_{1n}, \overline{Z}_{2n}, \overline{Z}_{3n}$, входящие в выражение для искомого вектора $\overline{A}$, будем называть *координатными.*

При подстановке в правую часть (4.6) произвольных значений величин A_1, A_2, A_3 получим различные векторы, отличающиеся от искомого вектора $\overline{A}$. Разность выражается вектором $\overline{C}$:

$$\overline{C} = \overline{A} - (A_1\overline{Z}_{1n} + A_2\overline{Z}_{2n} + A_3\overline{Z}_{3n}). \quad (4.7)$$

Искомое решение соответствует таким значениям A_1, A_2, A_3, при которых вектор $\overline{C}$ делается нулевым. Но нулевой вектор должен удовлетворять условиям

$$(\overline{C}, \overline{B}_i) = 0, i = 1,2,3. \quad (4.8)$$

Подставим вместо $\overline{C}$ в (4.8) его выражение (4.7):

$$((\overline{A} - (A_1\overline{Z}_{1n} + A_2\overline{Z}_{2n} + A_3\overline{Z}_{3n})), \overline{B}_i) = 0, i = 1,2,3 \quad (4.9)$$

и, учитывая свойства скалярного произведения, получим окончательно систему линейных алгебраических уравнений с коэффициентами A_1, A_2, A_3 в качестве неизвестных:

$$\begin{aligned}
&(\overline{Z}_{1n}, \overline{B}_1)A_1 + (\overline{Z}_{2n}, \overline{B}_1)A_2 + (\overline{Z}_{3n}, \overline{B}_1)A_3 = (\overline{A}, \overline{B}_1);\\
&(\overline{Z}_{1n}, \overline{B}_2)A_1 + (\overline{Z}_{2n}, \overline{B}_2)A_2 + (\overline{Z}_{3n}, \overline{B}_2)A_3 = (\overline{A}, \overline{B}_2);\\
&(\overline{Z}_{1n}, \overline{B}_3)A_1 + (\overline{Z}_{2n}, \overline{B}_3)A_2 + (\overline{Z}_{3n}, \overline{B}_3)A_3 = (\overline{A}, \overline{B}_3). \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Значения скалярных произведений в левой части (4.10) могут быть вычислены по формуле (4.2), в правой части такие величины заданы условиями задачи.

Таким образом, основная идея проекционного метода в данном случае заключается в том, что невязка между искомым вектором и его выражением в форме координатных векторов, умноженных на неопределенные числовые параметры, делается ортогональной по отношению к векторам некоторой полной системы. Отметим, что координатные векторы не обязательно должны быть ортогональными и нормированными.

В задачах математической физики вся процедура оказывается более сложной. Роль векторов в общем случае в бесконечномерном пространстве выполняют сложные комплексы функций – состояния, в понятие «скалярное произведение» вкладывается обобщенный, более сложный смысл, однако основная идея проецирования невязки на векторы полной системы и обращения этой невязки в нуль путем соответствующего подбора числовых параметров сохраняется неизменной.

4.2. Соотношения взаимности

Простейшим соотношением взаимности является равенство скалярных произведений двух произвольных векторов $\overline{A}$ и $\overline{B}$ (переместительный закон):

$$(\overline{A},\overline{B}) = (\overline{B},\overline{A}). \tag{4.11}$$

Рассмотрим два состояния с основными функциями u_1, u_2, связанные с оператором Лапласа. Их компоненты обозначим соответственно индексами 1 и 2.

Составим выражение

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial z}$$

и выразим интеграл от него по области Ω

$$L_{12} = \int_{\Omega} (\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial z}) d\Omega .$$

Точно так же обозначим

$$L_{21} = \int_{\Omega} (\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_1}{\partial z}) d\Omega .$$

Очевидна справедливость равенства

$$L_{12} = L_{21}, \tag{4.12}$$

которое выражает одно из соотношений взаимности.

Введем в рассмотрение функцию

$$F = u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}. \tag{4.13}$$

Воспользуемся теперь формулой Остроградского–Гаусса

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} P \cos(n,x) d\Omega .$$

Подставив в нее выражение (4.13):

$$\int_{\Omega} (\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}) d\Omega = \int_{S} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} \cos(n,x) dS$$

выразим:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}d\Omega=\int_{S}u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}\cos(n,x)dS-\int_{\Omega}u_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}d\Omega. \qquad (4.14)$$

Точно так же в соответствии с формулами Остроградского–Гаусса справедливы равенства

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y}d\Omega=\int_{S}u_1\frac{\partial u_2}{\partial y}\cos(n,y)dS-\int_{\Omega}u_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}d\Omega;$$

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial z}d\Omega=\int_{S}u_1\frac{\partial u_2}{\partial z}\cos(n,z)dS-\int_{\Omega}u_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}d\Omega. \qquad (4.15)$$

Суммируя выражения (4.14), (4.15), получим вторую форму соотношения взаимности:

$$\int_{\Omega}(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial z})d\Omega=\int_{S}u_1(\frac{\partial u_2}{\partial x}\cos(n,x)+$$

$$+\frac{\partial u_2}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial u_2}{\partial z}\cos(n,z))dS-\int_{\Omega}u_1(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2})d\Omega,$$

или, иначе:

$$L_{12}=\int_{\Omega}(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial z})d\Omega=$$

$$=\int_{S}u_1\frac{\partial u_2}{\partial n}dS-\int_{\Omega}u_1\nabla^2 u_2 d\Omega. \qquad (4.16)$$

Точно так же можно доказать, что

$$L_{21}=\int_{\Omega}(\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_1}{\partial z})d\Omega=$$

$$\int_{S}u_2\frac{\partial u_1}{\partial n}dS-\int_{\Omega}u_2\nabla^2 u_1 d\Omega. \qquad (4.17)$$

Теперь, принимая во внимание (4.12), получим третью форму соотношения взаимности:

$$\int_{\Omega}u_1\nabla^2 u_2 d\Omega-\int_{S}u_1\frac{\partial u_2}{\partial n}dS=\int_{\Omega}u_2\nabla^2 u_1 d\Omega-\int_{S}u_2\frac{\partial u_1}{\partial n}dS, \qquad (4.18)$$

играющую в дальнейшем роль основного интегрального соотношения, применяемого в проекционных методах. Обратим внимание, что в соотношение (4.18) входят все компоненты, с которыми приходится иметь дело при решении основных типов граничных задач для уравнения Пуассона. Формы соотношений взаимности, обладающие таким свойством, будем называть в дальнейшем *полными.*

Легко видеть, что под знак каждого из интегралов полного соотношения взаимности (4.18) входит произведение двух компонентов. Компоненты каждой такой пары будем называть *взаимно соответствующими компонентами.* Каждое из состояний, связанных с граничными задачами для уравнений Пуассона, включает две пары ($r_1 = 2$) взаимно соответствующих состояний: $\nabla^2 u, u$ – в области Ω и $\frac{\partial u}{\partial n}, u$ – на границе S.

Формула (4.18) называется формулой Грина. Обобщенная формула Грина

$$\int_{\Omega} (u_2 L u_1 - u_1 M u_2) d\Omega = \int_{S} (\sum_{i=1}^{n} P_i \cos(n_i, x_i)) dS, \qquad (4.19)$$

где

$$P_i = \sum_{j=i}^{n} (u_2 A_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} - u_1 \frac{\partial (A_{ij} u_2)}{\partial x_j}) + B_i u_1 u_2 ; \; i = 1,2,...,n.$$

Формула (4.19) справедлива для линейного дифференциального оператора

$$L u_1 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + C u_1$$

и сопряженного с ним оператора

$$M u_2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} u_2)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i u_2)}{\partial x_i} + C u_2.$$

Соотношение (4.19) записано для случая *n* независимых переменных, A_{ij}, B_i, C – заданные функции этих переменных. Следует отметить, что различными частными случаями уравнения $Lu = f$ описываются многие граничные задачи математической физики, в том числе стационарные задачи теплопроводности и электропроводности для неоднородной среды.

В теории упругости соотношения взаимности основаны на известной теореме о взаимности работ, полученной Э.Бетти. Для трехмерных задач в декартовой системе координат полная форма интегрального соотношения теоремы о взаимности работ для двух состояний, компоненты которых обозначены индексами 1 и 2, принимает такой вид:

$$\int_{\Omega} (X_1 u_2 + Y_1 v_2 + Z_1 w_2) d\Omega + \int_{S} (\overline{X_1} u_2 + \overline{Y_1} v_2 + \overline{Z_1} w_2) dS =$$

$$= \int_{\Omega} (X_2 u_1 + Y_2 v_1 + Z_2 w_1) d\Omega + \int_{S} (\overline{X_2} u_1 + \overline{Y_2} v_1 + \overline{Z_2} w_1) dS. \qquad (4.20)$$

Под знак интеграла данного соотношения входят все компоненты, с которыми приходится иметь дело при решении пространственной задачи теории упругости, в том числе все компоненты, выражаемые условиями основных типов граничных задач. Взаимное соответствие компонентов в задачах механики твердого тела имеет энергетический смысл: работа компонентов высшего порядка – здесь обобщенных сил $X, Y, Z, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ – совершается на взаимно (энергетически) соответствующих компонентах низшего порядка – перемещениях u, v, w.

Аналогом формул Грина (4.12), (4.17) в данном случае являются соответственно соотношения:

$$\int_{\Omega}(\sigma_{1x}\varepsilon_{2x}+\sigma_{1y}\varepsilon_{2y}+\sigma_{1z}\varepsilon_{2z}+\tau_{1xy}\gamma_{2xy}+\tau_{1xz}\gamma_{2xz}+\tau_{1yz}\gamma_{2yz})d\Omega =$$

$$=\int_{\Omega}(\sigma_{2x}\varepsilon_{1x}+\sigma_{2y}\varepsilon_{1y}+\sigma_{2z}\varepsilon_{1z}+\tau_{2xy}\gamma_{1xy}+\tau_{2xz}\gamma_{1xz}+\tau_{2yz}\gamma_{1yz})d\Omega$$

и

$$\int_{\Omega}(X_1u_2+Y_1v_2+Z_1w_2)d\Omega+\int_{S}(\overline{X_1}u_2+\overline{Y_1}v_2+\overline{Z_1}w_2)ds =$$

$$=\int_{\Omega}(\sigma_{1x}\varepsilon_{2x}+\sigma_{1y}\varepsilon_{2y}+\sigma_{1z}\varepsilon_{2z}+\tau_{1xy}\gamma_{2xy}+\tau_{1xz}\gamma_{2xz}+\tau_{1yz}\gamma_{2yz})d\Omega,$$

которые свойством полноты не обладают.

Теорема о взаимности работ является весьма общим принципом механики. Так, Ю.Н. Шевченко показал, что из теоремы о взаимности работ следуют равенства, выражающие принцип возможных перемещений и теорему Кастильяно.

4.3. Метод определяющих состояний

Рассмотрим общий случай деформированного состояния трехмерного однородного изотропного тела, занимающего область Ω с границей S. Для удобства изложения введем обобщенную форму записи основных уравнений и выражений, соответствующих применяемым в каждом случае теориям и гипотезам, полагая, что последние не противоречат теореме о взаимности работ.

Пусть u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора перемещений являются независимыми функциями координат x_1, x_2, x_3, а задача имеет решение и притом единственное. Совокупность функций, выражающих компоненты искомого напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела,

будем называть действительным состоянием и обозначим R_∂. Систему уравнений равновесия в перемещениях запишем следующим образом:

$$A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 = K_2;$$
$$A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 = K_1;$$
$$A_{31}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3 = K_3, \qquad (4.21)$$

где $A_{ik}(i = 1,2,3; k = 1,2,3)$ – дифференциальные операторы, K_1, K_2, K_3 – компоненты вектора действующих в Ω сил (в пространственной задаче теории упругости $\overline{K}$ – вектор объемных сил, в задачах изгиба тонких плит – вектор внешних сил и т.п.).

Компоненты деформированного состояния – обобщенные силы (кроме K_1, K_2, K_3) обозначим P_p, соответствующие им обобщенные перемещения (в том числе и перемещения u_1, u_2, u_3 на поверхности тела) – F_P; $p = 1,2,...,r_2$ – число рассматриваемых в задаче пар энергетически соответствующих обобщенных сил и перемещений, кроме $K_1, u_1; K_2, u_2;$ K_3, u_3. Выражения для компонентов F_p и P_p через u_1, u_2, u_3 запишем в форме ($C_{pi}, D_{pi}, i = 1,2,3$ – дифференциальные в общем случае операторы):

$$F_p = C_{p1}u_1 + C_{p2}u_2 + C_{p3}u_3; p = 1,2,...,r_2; \qquad (4.22)$$
$$P_p = D_{p1}u_1 + D_{p2}u_2 + D_{p3}u_3; p = 1,2,...,r_2. \qquad (4.23)$$

Совокупность функций выражает некоторое напряженно-деформированное состояние рассматриваемого тела, если эти функции удовлетворяют уравнениям (4.21)–(4.23), условиям малости деформаций и компоненты вектора перемещений являются непрерывными всюду в замкнутой области Ω.

Обычно в инженерной практике рассматриваются три основных типа граничных задач механики твердого тела (компоненты K_1, K_2, K_3 всегда заданы).

Первая основная задача: всюду на границе области заданы обобщенные внешние силы.

Вторая основная задача: всюду на границе области заданы обобщенные перемещения.

Смешанная задача: на различных частях границы S заданы различные сочетания обобщенных сил и обобщенных перемещений, причем в одной точке границы не могут быть одновременно заданы оба энергетически соответствующих компонента.

Граничные условия задачи представим, формально включая в них все r_1 рассматриваемых на границе пар энергетически соответствующих компонентов действительного состояния R_o:

всюду на частях $S_p^{(F)}$ границы S:

$$F_p = \Phi_p; p = 1,2,...,r_1; \tag{4.24}$$

всюду на частях $S_p^{(P)}$ границы S:

$$P_p = \Theta_p, p = 1,2,...,r_1. \tag{4.25}$$

В задачах механики твердого тела для всякого значения *p* выполняется равенство

$$S_p^{(F)} + S_p^{(P)} = S, \tag{4.26}$$

т.е. во всякой точке границы всегда должен быть задан один из компонентов каждой из r_1 энергетически соответствующих пар. Таким образом, здесь рассматривается наиболее общий случай задач механики твердого тела – смешанная задача с неоднородными граничными условиями.

Если все заданные в (4.24), (4.25) компоненты F_p, P_p равны нулю всюду на соответствующих частях границы *S*, то такие граничные условия называются полностью однородными.

Искомые функции перемещений действительного состояния выразим:

$$u_1 = \sum_{k=1}^{n(1)} a_{kn(1)} f_k; u_2 = \sum_{k=1}^{n(2)} b_{kn(2)} \varphi_k; u_3 = \sum_{k=1}^{n(3)} c_{kn(3)} \psi_k, \tag{4.27}$$

где $a_{kn(1)}, b_{kn(2)}, c_{kn(3)}$ – неопределенные, разыскиваемые в процессе решения задачи параметры (часто их называют также коэффициентами), зависящие, в частности, от количества n_1, n_2, n_3 удерживаемых в (4.27) членов; f_k, φ_k, ψ_k – координатные функции.

Определение неизвестных параметров выражений (4.27) производим на основе наиболее общей формы интегрального соотношения теоремы о взаимности работ, записанного для двух состояний рассматриваемой модели: действительного и некоторого вспомогательного, компоненты которого обозначены штрихом:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} K'_j u_j d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_S P'_p F_p dS = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} (K_j u'_j d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_S P_p F'_p dS. \tag{4.28}$$

Подставив последовательно в (4.28) необходимое число $n = n_1 + n_2 + n_3$ вспомогательных состояний $R'_i (i = 1,2,...,n)$, получим систему интегральных соотношений, число которых равно числу неопределенных параметров (4.27). После переноса в левую часть всех интегралов, включающих неизвестные

компоненты действительного состояния R_o, а в правую – интегралов с его компонентами, заданными условиями (4.24), (4.25), запишем эту систему с учетом (4.26) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega} K'_{ji}u_j d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_p^{(P)}} P'_{pi}F_p dS - \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_p^{(F)}} F'_{pi}P_p dS =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega} K_j u'_{ji} d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_p^{(P)}} \Theta_p F'_{pi} dS - \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_p^{(F)}} \Phi_p P'_{pi} dS; i = 1,2,...,n. \qquad (4.29)$$

Обозначим

$$d_i = \sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega} K_j u'_{ji} d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_p^{(P)}} \Theta_p F'_{pi} dS - \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_p^{(F)}} \Phi_p P'_{pi} dS$$

и представим систему (4.29) в виде

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega} K'_{ji}u_j d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_p^{(P)}} P'_{pi}F_p dS - \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_p^{(F)}} F'_{pi}P_p dS = d_i; i = 1,2,...,n. \qquad (4.30)$$

Каждый из компонентов действительного и вспомогательных состояний входит под знак интеграла по некоторой области (всей или части Ω и S), которая называется областью рассмотрения этого компонента в данной задаче. Если какой-либо компонент входит под знак интеграла по нескольким различным областям и для него поставлены условия, связанные с его областью рассмотрения, то подразумевается, что эти условия должны выполняться во всех таких областях.

После подстановки вместо неизвестных компонентов R_∂ их выражений, полученных из (4.27), вычисления интегралов и приведения подобных система (4.30) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, включающих в качестве неизвестных параметры $a_{kn(1)}, b_{kn(2)}, c_{kn(3)}$:

$$\sum_{k=1}^{n(1)} e_{ik}^{(1)} a_{kn(1)} + \sum_{k=1}^{n(2)} e_{ik}^{(2)} b_{kn(2)} + \sum_{k=1}^{n(3)} e_{ik}^{(3)} c_{kn(3)} = d_i; i = 1,2,...,n. \qquad (4.31)$$

Таким образом, сущность метода заключается в подборе координатных функций для выражения перемещений действительного состояния, построения вспомогательных состояний, составлении и решении разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (4.31).

В этом методе построение вспомогательных состояний проводится обычно простым и осуществимым практически во всех случаях способом. Задаются перемещениями вспомогательных состояний в виде некоторых непрерывных в Ω функций

$$u'_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3);$$

$$u_2' = \xi_2(x_1, x_2, x_3);$$
$$u_3' = \xi_3(x_1, x_2, x_3). \qquad (4.32)$$

Все прочие необходимые компоненты вспомогательного состояния выразим подстановкой (4.32) в уравнения и формулы (4.21)–(4.23):

$$K_j' = A_{j1}\xi_1 + A_{j2}\xi_2 + A_{j3}\xi_3; \quad j = 1,2,3;$$
$$F_p' = C_{p1}\xi_1 + C_{p2}\xi_2 + C_{p3}\xi_3; \quad p = 1,2,...r_2;$$
$$P_p' = D_{p1}\xi_1 + D_{p2}\xi_2 + D_{p3}\xi_3; \quad p = 1,2,...r_2. \qquad (4.33)$$

Таким образом, построение вспомогательных состояний метода определяющих состояний сводится к дифференцированию по существующим формулам выбранных непрерывных функций u_1', u_2', u_3' .

Как и при развитии всякого прямого метода решения задач математической физики, в данном случае возникает ряд проблем, связанных с возможностью реализации и эффективностью применения рассматриваемого метода. При неограниченном возрастании числа членов в приближенном решении (4.27) системы интегральных соотношений (4.30) и линейных алгебраических уравнений (4.31) переходят в соответствующие бесконечные системы. Существенным является вопрос о том, приводит ли к уточнению решения увеличение числа удержанных в (4.27) членов. В качестве необходимого для этого условия рассматривается обычно доказанность существования и единственности решений соответствующих бесконечных систем интегральных соотношений и алгебраических уравнений.

Рассмотрение указанного круга вопросов для общего случая проводится с использованием аппарата теории гильбертова пространства, без которого обоснование метода оказалось бы затруднительным. Эффективность использования этого аппарата в теории вариационных методов достаточно убедительно показана С.Г. Михлиным.

Выражения (4.27) могут быть построены в данном методе на основе небольшого числа систем ортогональных функций. Так, для самых различных типов граничных задач в декартовой системе координат применимы полиномы Лежандра, в цилиндрической системе – полиномы Лежандра и полиномы Якоби с весом x. Вспомогательные состояния в общем случае также не связаны с условиями задачи, однако от их выбора во многом зависит трудоемкость всего процесса вычислений. В дальнейшем такие состояния будем называть определяющими, а рассматриваемый здесь метод – методом определяющих состояний.

4.4. Гильбертово пространство возможных состояний

Возможным состоянием данного тела называют всякое состояние, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (4.21)–(4.23) и являются квадратично-суммируемыми в соответствующих областях рассмотрения, а компоненты вектора перемещений, кроме того, непрерывными в замкнутой области Ω функциями. На компоненты возможных состояний не накладывается условие малости деформаций – одно из основных положений классической теории упругости; как показано ниже, между удовлетворяющими этому условию возможными состояниями и не удовлетворяющими ему существует простая связь.

Таким образом, под возможным состоянием в общем случае подразумеваем совокупность нескольких функций, называемых его компонентами, не обязательно соответствующих всем гипотезам классической теории упругости.

В теории метода определяющих состояний применяется аппарат интеграла Лебега, основные свойства которого совпадают со свойствами интеграла Римана. Отметим одно характерное свойство интеграла Лебега и вытекающее из него следствие.

Значение интеграла Лебега не изменится, если изменить значение подынтегральной функции на множестве меры нуль. Интеграл Лебега равен нулю, если подынтегральная функция почти везде равна нулю. Эти свойства следует учитывать при анализе характера решения в точках с особенностями напряженно-деформированного состояния.

Чтобы избежать противоречия с принятым в механике понятием о работе сосредоточенных сил – нагрузок, распределенных в элементах объема, поверхности или длины меры нуль, будем рассматривать интегралы, входящие в (4.29), как обобщенное выражение работы внешних сил одного из состояний на перемещениях второго. В случае действия известной сосредоточенной силы ее работу измеряем непосредственно произведением этой силы на соответствующее перемещение точки ее приложения.

В силу удовлетворения уравнениям (4.21)–(4.23) система «внешних сил» всякого возможного состояния является уравновешивающейся.

Под сложением двух или нескольких возможных состояний подразумевается операция, в ходе которой суммируются все соответствующие компоненты слагаемых состояний. При умножении возможного состояния на вещественное число каждый из компонентов умножается на это число.

Состояние, полученное умножением любого возможного состояния на вещественное число, также является возможным состоянием.

Таким образом, если имеется некоторое конечное число возможных состояний $R_1, R_2, ..., R_n$ и система чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, то состояние

$R = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + ... + \alpha_n R_n$ также является возможным. Действительное состояние можно пытаться с той или иной степенью точности выразить линейной комбинацией выбранного числа возможных состояний. В этом заключается сущность многих методов приближенного аналитического решения задач механики твердого тела, в том числе и широко применяемых методов Ритца, Галеркина и Трефтца. В данном случае представление решения в форме выражений (4.27) равносильно приближенному выражению R_∂ возможным состоянием

$$R(n_1, n_2, n_3) = \sum_{k=1}^{n(1)} a_{kn(1)} R_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n(2)} b_{kn(2)} R_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{n(3)} c_{kn(3)} R_k^{(3)}. \qquad (4.34)$$

Состояниям $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}, R_k^{(3)}$ соответствуют компоненты

$$U_{1k}^{(1)} = f_k;\ U_{2k}^{(1)} = 0;\ U_{3k}^{(1)} = 0;$$
$$U_{1k}^{(2)} = 0;\ U_{2k}^{(2)} = \varphi_k;\ U_{3k}^{(2)} = 0;$$
$$U_{1k}^{(3)} = 0;\ U_{2k}^{(3)} = 0;\ U_{3k}^{(3)} = \psi_k. \qquad (4.35)$$

Рассматривая всякое возможное состояние в обобщенном смысле как вектор, можно представить приближенное выражение (4.34) как разложение вектора R_∂ по векторам $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}, R_k^{(3)}$. Возможные состояния, применяемые для аппроксимирования R_∂, по аналогии с вариационными методами называются координатными состояниями.

При неограниченном возрастании чисел n_1, n_2, n_3 выражение (4.34) преобразуется к виду:

$$R_{\partial,B} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k R_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k R_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k R_k^{(3)}. \qquad (4.36)$$

Состояние $R_{\partial,B}$ является пределом последовательности (4.34) при $n_1 \to \infty, n_2 \to \infty, n_3 \to \infty$, сходящейся в некотором смысле при соответствующих условиях к действительному состоянию. Естественно, что $R_{\partial,B}$ должно быть возможным состоянием.

Множество всех возможных состояний, которое обозначим H, является линейной системой, так как в нем определены операции сложения двух элементов и умножения элемента на число с выполнением следующих условий (обозначим R_i, R_k, R_m – произвольные элементы H; ς, μ – постоянные):

1. $R_i + R_k = R_k + R_i$;
2. $(R_i + R_k) + R_m = R_i + (R_k + R_m)$;

3. $\lambda(R_i + R_k) = \lambda R_i + \lambda R_k$;

4. $(\lambda + \mu)R_i = \lambda R_i + \mu R_i$;

5. $\lambda(\mu R_i) = (\lambda\mu)R_i$;

6. Существует такое возможное состояние $\theta \in H$ (т.е. входящее в H), называемое нулевым, что $0 \cdot R_i = \theta$ для любого $R_i \in H$ (произведение любого элемента на число нуль равно нулевому элементу);

7. $1 \cdot R_i = R_i$.

Любым двум элементам R_i и R_k из H сопоставим вещественное число

$$(R_i, R_k) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} K_{ji} u_{jk} d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_{S} P_{pi} F_{pk} dS, \tag{4.37}$$

выражающее суммарную работу всех внешних сил состояния R_i на соответствующих перемещениях состояния R_k. Для линейной системы H справедливы следующие свойства данного числа (R_i, R_k, R_m – элементы H, λ – вещественное число):

1. $(\lambda R_i, R_k) = \lambda(R_i, R_k)$;

2. $(R_i + R_k, R_m) = (R_i, R_m) + (R_k, R_m)$;

3. $(R_i, R_k) = (R_k, R_i)$. (4.38)

Условие (4.38) представляет собой третью форму интегрального соотношения теоремы о взаимности работ (4.29) и, в силу сделанного предположения, выполняется для любых двух возможных состояний из H, удовлетворяющих уравнениям (4.21)–(4.23) и условию малости деформаций. Доказано, что равенство (4.38) справедливо и для любых возможных состояний R_i' и R_k', не удовлетворяющих этому условию.

Таким образом, в качестве определяющих могут быть применены возможные состояния, не удовлетворяющие условиям малости деформаций;

4. $(R, R) \geq 0$ для любого $R \in H$, причем $(R, R) = 0$ тогда и только тогда, когда $R = \theta$, т.е. является недеформированным состоянием. Данное условие выполняется в силу физического смысла величины (R, R), выражающей работу всех внешних сил деформированного состояния R на вызванных этими силами перемещениях. Такая работа, равная потенциальной энергии деформации данного тела, всегда положительна и равна нулю лишь при отсутствии деформаций, т.е. для состояния θ. Если элемент $R \in H$ не

удовлетворяет принципу малости деформации, то, выражая его через элемент R, удовлетворяющий этому условию: $R' = \lambda R,$ можем записать:

$$(R', R') = (\lambda R, \lambda R) = \lambda^2 (R, R).$$

Условие $(R', R') = \lambda^2 (R, R) \geq 0$ выполняется при любых значениях числа $\lambda,$ так как $(R, R) \geq 0.$ Число $(R_i, R_k),$ удовлетворяющее условиям 1–4, по аналогии с терминами функционального анализа называются скалярным произведением элементов R_i и R_k.

На основе понятия о скалярном произведении определена норма элемента $R \in H$:

$$\|R\| = \sqrt{(R, R)}\,. \tag{4.39}$$

Норма произвольного элемента $R \in H$ удовлетворяет условиям нормированного пространства:

1. $\|R\| \geq 0$ для любого $R \in H$; $\|R\| = 0$ только для $R = \theta$;

2. $\|\lambda R\| = |\lambda| \cdot \|R\|$ для любого $R \in H$ и любого числа $\lambda.$

Действительно,

$$\|\lambda R\| = \sqrt{(\lambda R, \lambda R)} = \sqrt{\lambda^2 (R, R)} = |\lambda| \cdot \|R\|.$$

3. $\|R_i + R_k\| \leq \|R_i\| + \|R_k\|$ для любых $R_i, R_k \in H$ (аксиома треугольника). Доказательство этого свойства, основанного на неравенстве Коши–Буняковского, здесь не приводим.

Рассмотрим некоторые основные определения и формулировки теории нормированного пространства применительно к H. Элемент $R \in H$ называется пределом бесконечной последовательности возможных состояний $R_n \in H$ (пишем $R_n \to R$ или $R = \lim R_n$), если

$$\|R_n - R\| = 0.$$

Определенная таким образом сходимость называется сходимостью по норме нормированного пространства H.

На основе выражений (4.37), (4.39)

$$\|R_n - R\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} (K_{jn} - K_j)(U_{jn} - U_j)\, d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_{s} (P_{pn} - P_p)(F_{pn} - F_p)\, dS} \tag{4.40}$$

Из (4.40) следует, что сходимость последовательности R_n по норме H к возможному состоянию *R* имеет место при выполнении условий

$$\int_{\Omega} (K_{jn} - K_j)(U_{jn} - U_j)\, d\Omega = 0; \quad j = 1,2,3;$$

$$\int_S (P_{pn} - P_p)(F_{pn} - F_p)\, dS = 0; \quad p = 1,2,..., r_1. \tag{4.41}$$

Условия (4.41) будем рассматривать как необходимые для сходимости по норме пространства H.

Последовательность R_n называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если $\|R_n - R_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Пополним пространство H таким образом, чтобы всякая фундаментальная последовательность в нем имела предел. Полученное гильбертово пространство H называется пространством возможных состояний. Всякое возможное состояние представляет собой совокупность нескольких функций и комбинаций их производных; взаимосвязь между компонентами возможных состояний выражается различными способами в зависимости от положенных в основу расчета теорий и гипотез, формы тела, применяемой системы координат. Введение гильбертова пространства H возможных состояний значительно упростило развитие теории метода и ее обобщение на любой из рассматриваемых типов задач; аппарат гильбертова пространства может быть успешно применен в различных приложениях метода. Один из примеров такого приложения рассмотрен в данном параграфе.

Множество элементов H называется линейно независимым, если ни один из них не выражается в виде линейной комбинации некоторого числа других элементов этого множества. Понятие линейной зависимости, применяемое обычно к конечному числу элементов, может быть распространено и на случай множеств, включающих счетное их число. Счетное множество линейно независимых элементов $R_k (k = 1,2,...)$ называется базисом H или некоторого множества из H, если всякое состояние R из H или данного множества допускает единственное представление вида (имея в виду сходимость по норме):

$$R = \lim \sum_{k=1}^{m} \lambda_k R_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k R_k. \tag{4.42}$$

Система возможных состояний $R_1, R_2, ...$ называется ортогональной, если $(R_i, R_k) = 0$ при $i \neq k$, и ортонормированной, если

$$(R_i, R_k) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k; \\ 1 \text{ при } i = k. \end{cases}$$

Преобразование счетной системы линейно независимых возможных состояний $R_1, R_2, ...$ в ортонормированную систему может быть проведено обычным путем. Вначале строят ортогональную систему $R_1^{(0)}, R_2^{(0)}, ...$, полагая последовательно

$$R_1^{(0)} = R_1, ..., R_n^{(0)} = R_n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{nk} R_k^{(0)}.$$

Коэффициенты λ_{nk} определяются по формуле

$$\lambda_{nk} = \frac{(R_n, R_k^{(0)})}{\left\| R_k^{(0)} \right\|^2}.$$

Затем выражаются возможные состояния $R_1^{(n)}, R_2^{(n)}, ...$ счетной ортонормированной системы:

$$R_n^{(H)} = \frac{1}{\left\| R_n^{(0)} \right\|} R_n^{(0)}. \tag{4.43}$$

Ортонормированная система возможных состояний называется полной, если в H не существует возможного состояния, кроме θ, ортогонального ко всем элементам этой системы. Всякая полная ортонормированная система в сепарабельном пространстве является ортонормированным базисом. Числа α_n для элемента $R \in H$, выражаемые формулой

$$\alpha_n = (R, R_n^{(H)}), \tag{4.44}$$

называются коэффициентами Фурье возможного состояния *R* относительно ортонормированного базиса $R_1^{(H)}, R_2^{(H)}, ...,$ а выражение для *R* в виде:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n R_n^{(H)} = \sum_{n=1}^{\infty} (R, R_n^{(H)}) R_n^{(H)} \tag{4.45}$$

называется рядом Фурье возможного состояния R по этому базису. Среди всех элементов подпространства D элементом наилучшего приближения к данному возможному состоянию R называется такой элемент R', для которого величина $\left\| R' - R \right\|$ имеет наименьшее значение. Коэффициенты Фурье α_n состояния *R* относительно ортонормированного базиса $R_1^{(H)}$, $R_2^{(H)}, ...$ обладают тем свойством, что элементом наилучшего приближения к R, построенным по некоторому числу состояний $R_1^{(H)}, R_2^{(H)}, ..., R_n^{(H)}$, является отрезок ряда Фурье по этим состояниям. Применим такой способ наилучшего приближения элементов гильбертова пространства для решения задач теории упругости.

Допустим, что в *H* существует ортонормированный базис $R_1, R_2, ...,$ все необходимые компоненты элементов которого известны. Последовательно подставляя эти элементы в качестве определяющих состояний в (4.29), получим систему счетного числа интегральных соотношений

$$(R_\partial, R_g) = (R_\partial, R_i);\ i = 1,2,\ldots\ . \tag{4.46}$$

В случае первой основной задачи теории упругости во все интегралы левой части соотношений (4.46) входят неизвестные компоненты действительного состояния R_∂, в правую часть – его компоненты, заданные условиями задачи. Вычислив

$$\alpha_i = (R_\partial, R_i),$$

получим

$$(R_i, R_\partial) = \alpha_i;\ i = 1,2,\ldots\ . \tag{4. 47}$$

Но в соответствии с условиями (4.44) числа $(R_i, R_\partial), i = 1,2,\ldots$ есть коэффициенты Фурье действительного состояния по ортонормированному базису $R_1, R_2,\ldots$. Таким образом, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} d_i R_i$, в котором коэффициенты α_i вычисляются по формуле (4.47), является рядом Фурье искомого в задаче состояния R_g по выбранному ортонормированному базису. В случае неортогонального базиса преобразуем его в ортонормированный. Этот способ может быть применен и для решения второй основной и смешанной задач теории упругости.

Рассмотрим смешанную задачу с граничными условиями (4.24), (4.25) при том, что все условия (4.24) являются однородными. Выделим в H пространство всех элементов, удовлетворяющих однородным условиям (4.24), и допустим, что существует ортонормированный базис этого подпространства, элементы которого также удовлетворяют этим условиям. Выражение для скалярного произведения двух элементов R_k и R_m (4.37) такого базиса запишем с учетом условия (4.26):

$$(R_k, R_m) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} K_{jk} u_{jm} d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_{S_p^{(P)}} P_{pk} F_{pm} dS + \sum_{p=1}^{r_1} \int_{S_p^{(F)}} P_{pk} F_{pm} dS. \tag{4.48}$$

Так как компоненты $F_{pm}(p = 1,2,\ldots,r_1)$ удовлетворяют всюду на частях $S_p^{(F)}$ границы S условиям

$$F_{pm} = 0;\ p = 1,2,\ldots,r_1,$$

то выражение (4.48) окончательно принимает вид:

$$(R_k, R_m) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} K_{jk} u_{jm} d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_{S_p^{(p)}} P_{pk} F_{pm} dS. \tag{4.49}$$

Приняв в качестве определяющих состояний элементы данного базиса, получим из (4.29) счетную систему интегральных соотношений. В этой системе, в силу однородных граничных условий (4.24),

$$\int_{S_p^{(F)}} P_{pi} F_p dS = 0; \;\; p = 1,2,...,r_1,$$

и, в силу удовлетворения тем же граничным условиям элементами базиса,

$$\int_{S_P^{(F)}} P_p F_{pi} dS = 0; \;\; p = 1,2,...r_1.$$

Получим:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} K_{ji} u_j d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_{S_p^{(P)}} P_{pi} F_p dS = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} K_j u_{ji} d\Omega +$$

$$+ \sum_{p=1}^{r_2} \int_{S_P^{(P)}} P_p F_{pi} dS; \;\; i = 1,2,... \;. \qquad (4.50)$$

Как видно из (4.49), выражение в левой части (4.50) представляет собой скалярное произведение элемента базиса R_i и действительного состояния R_o (все компоненты R_o в правой части (4.47) заданы условиями задачи). Выразив

$$d_i = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} K_j u_{ji} d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_{S_p^{(P)}} P_p F_{pi} dS; \;\; i = 1,2,...,$$

запишем систему (4.50) следующим образом:

$$(R_i, R_o) = d_i; \;\; i = 1,2,... \;.$$

Итак, аналогично случаю первой основной задачи, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i R_i$ представляет собой ряд Фурье действительного состояния по ортонормированному базису множества состояний, удовлетворяющих однородным условиям (4.24) данной смешанной задачи. Все проведенные рассуждения справедливы и для второй основной задачи теории упругости.

Рассмотренный способ может оказаться весьма эффективным, особенно в случае первой основной задачи, когда необходимо исследовать напряженное и деформированное состояние данного тела при различных сочетаниях заданных внешних сил. Решение такого комплекса задач, выполняемое на основе однажды построенного ортонормированного базиса, сводится к вычислению по формуле (4.50) для каждого вида загружения коэффициентов Фурье соответствующих действительных состояний. По мере накопления новых решений может быть создана библиотека ортонормированных базисов для различных случаев, что в дальнейшем чрезвычайно упростит решение задач уже однажды рассмотренного типа. Несомненный интерес представляет исследование качества решений, полученных по способу наилучшего приближения в H.

Для обоснования метода определяющих состояний в общем случае смешанной задачи введены некоторые понятия, соответствующие сложной структуре и специфике элементов H.

4.5. Некоторые основные понятия пространства *H*

Введено понятие B-скалярного произведения двух возможных состояний R_k и R_m, связанное с характером граничных условий (4.24), (4.25) и соответствующее структуре основных интегральных соотношений (4.30) теоремы Бетти рассматриваемой задачи:

$$(R_k, R_m)_B = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} K_{jk} u_{jm} d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int_{S_P^{(P)}} P_{pk} F_{pm} dS -$$

$$- \sum_{p=1}^{r_2} \int_{S_P^{(F)}} P_{pm} F_{pk} dS. \qquad (4.51)$$

Условимся, что в B-скалярное произведение всегда входят компоненты вектора $\overline{K}$ первого из сомножителей. Легко доказать, что B-скалярное произведение двух элементов H обладает следующими свойствами:

1. $(\lambda R_i, R_k)_B = \lambda (R_i, R_k)_B$;
2. $(R_i + R_k, R_m)_B = (R_i, R_m)_B + (R_k, R_m)_B$;
3. $(R_i, R_k)_B = (R_k, R_i)$.

Условие $(R, R)_B \geq 0$, аналогичное условию (4.39) для скалярного произведения, выполняется не во всех случаях. Систему интегральных уравнений (4.30) запишем в виде:

$$(R_i', R_o)_B = d_i; \ \ i = 1,2,..., n, \qquad (4.52)$$

где

$$d_i = (R_o, R_i')_B; \ \ i = 1,2,..., n. \qquad (4.53)$$

Всякое деформированное состояние данного тела может рассматриваться как искомое при решении целого ряда задач с различным образом заданными граничными условиями. Пространство H и выражение (4.37) для скалярного произведения не зависят от характера граничных условий и в общем случае второй основной и смешанной задач скалярное произведение с R_o в качестве одного из сомножителей включает как заданные условиями задачи, так и неизвестные его компоненты. Структура же *B*-скалярного произведения такова, что в любом случае в $(R_o, R_i')_B$ входят

только известные, заданные условиями задачи компоненты R_∂. Скалярное произведение является частным случаем *B*-скалярного произведения и совпадает с ним в первой основной задаче. Смысл приближенного решения задач теории упругости методом определяющих состояний может быть сформулирован следующим образом:

Для выбранной системы определяющих состояний $R'_1, R'_2, ..., R'_n$ *известны величины B-скалярных произведений* $(R_j, R'_i)_B = d_i$. *Выразить неизвестные компоненты* R_∂, *входящие в B-скалярные произведения* $(R'_i, R_\partial)_B$ *таким образом, чтобы выполнялись соотношения (4.52) для любого значения* $i = 1,2,..., n$.

Пусть граница S рассматриваемой области Ω состоит из m гладких кусков $S_i, i = 1,2,..., m$. Говорят, что последовательность возможных состояний $R_1, R_2, ..., R_n, ...$ сходится в среднем в H к $R \in H$, если выполняются условия:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_{jn} - u_j)^2 d\Omega = 0; \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (K_{jn} - K_j)^2 d\Omega = 0; \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_i} (P_{pn} - P_p)^2 dS = 0; \quad p = 1,2,..., r_1; \quad i = 1,2,..., m;$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_i} (F_{pn} - F_p)^2 dS = 0; \quad p = 1,2,..., r_1; \quad i = 1,2,..., m. \qquad (4.54)$$

Условия (4.54) выражают покомпонентную сходимость в среднем последовательности $R_1, R_2, ..., R_n, ...$ к возможному состоянию R в области Ω и на каждом из участков $S_i (i = 1,2,..., m)$, а следовательно, и на всей границе *S*.

Если на основе системы возможных состояний $R_1^{(в)}, R_2^{(в)}, ...$ для всякого элемента множества D из H можно построить сходящуюся в среднем в *H* последовательность, то такую систему называют B-базисом множества D.

В ходе теоретического обоснования метода определяющих состояний применена теорема 1:

Пусть последовательность $\varphi_n(P)$ *сходится в среднем к* $\varphi(P)$ *в ограниченной области* Ω. *Пусть, далее,* ω *– часть области* Ω *и* $f(P)$ *– произвольная квадратично-суммируемая в* Ω *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\omega} f(P)\varphi_n(P)d\omega = \int_{\omega} f(P)\varphi(P)d\omega,$$

причем сходимость – равномерная относительно выбора области ω.

Отсюда следует, что на основе B-базиса D при произвольно выбранном фиксированном элементе $R_\Phi \in H$ для всякого $R' \in H$ можно построить такую последовательность состояний $R_1, R_2, ..., R_n, ...$, что выполняются условия:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} K_{jn}u_{j\Phi}d\Omega = \int_{\Omega} K'_j u_{j\Phi}d\Omega;\ \ j=1,2,3;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{S_p^{(P)}} P_{pn}F_{p\Phi}dS = \int_{S_P^{(P)}} P'_p F_{p\Phi}dS;\ \ p=1,2,...,r_1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{S_P^{(F)}} P_{p\Phi}F_{pn}dS = \int_{S_P^{(F)}} P_{p\Phi}F'_P dS;\ \ p=1,2,...,r_1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} K_{j\Phi}u_{jn}d\Omega = \int_{\Omega} K_{j\Phi}u'_j d\Omega;\ \ j=1,2,3;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{S_P^{(P)}} P_{p\Phi}F_{pn}dS = \int_{S_p^{(P)}} P_{p\Phi}F'_p dS;\ \ p=1,2,...,r_1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{S_P^{(F)}} P_{pn}F_{p\Phi}dS = \int_{S_P^{(F)}} P'_p F_{p\Phi}dS;\ \ p=1,2,...,r_1. \qquad (4.55)$$

На основе *B*-базиса для всякого элемента *D* можно построить линейную комбинацию, выражающую данный элемент в смысле условий (4.55). Будем говорить, что элементы *D* в таком смысле *B*-линейно зависимы от *B*-базиса *D.* Применяя элементы *B*-базиса множества *D* в качестве определяющих состояний, получим систему соотношений:

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega} K_{ji}^{(B)}u_j d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_P^{(P)}} P_{pi}^{(B)}F_p dS - \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_P^{(F)}} P_p F_{pi}^{(B)}dS =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega} K_j u_{ji}^{(B)}d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_P^{(P)}} \theta_p F_{pi}^{(B)}dS - \sum_{p=1}^{r_2}\int_{S_P^{(F)}} P_{pi}^{(B)}\Phi_p dS;\ \ i=1,2,... \ .$$

Как отмечалось выше, процесс реализации метода определяющих состояний в конечном счете сводится к составлению и решению системы линейных алгебраических уравнений (4.31). Одним из наиболее важных результатов, полученных в ходе теоретического обоснования метода, является доказательство теоремы 2:

Если для решения задачи применена достаточная система определяющих и полная система координатных состояний, а перемещения u_1, u_2, u_3 *выражены полными в* $L_2(\Omega)$ *ортонормированными системами*

функций, то единственным решением бесконечной системы линейных алгебраических уравнений метода являются коэффициенты Фурье функций u_1, u_2, u_3 *по соответствующим ортонормированным системам.*

При выполнении условий данной теоремы имеются возможности эффективной оценки качества приближенного решения на различных его этапах.

4.6. Примеры применения метода определяющих состояний

Решение пространственных задач теории упругости

Методом определяющих состояний получены приближенные решения пространственной задачи теории упругости для жестко защемленных по боковой поверхности плит различной толщины. Для выражения искомых перемещений применены функциональные последовательности по ортогональным степенным полиномам; каждый член последовательностей не удовлетворяет ни одному из условий задачи.

Квадратная в плане и полубесконечная плиты рассматриваются в декартовой системе координат (рис. 4.1) соответственно при значениях $\gamma = \dfrac{a}{h} =$ 2, 4, 5, 10, 20.

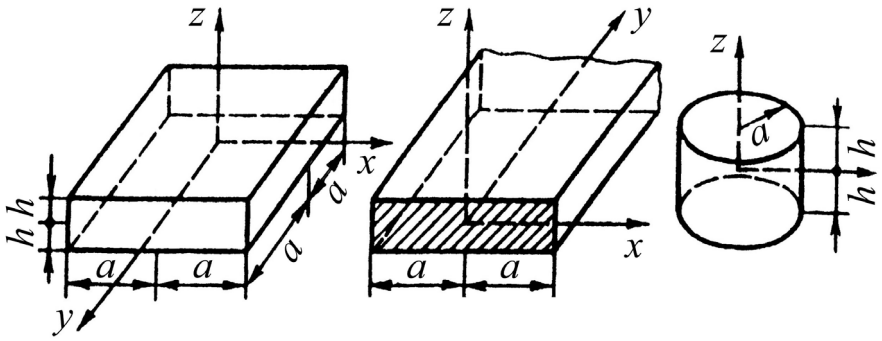


Рис. 4.1. Расчетные схемы квадратной, полубесконечной и круглой плит

Решение для круглой плиты в цилиндрической системе координат получено для соотношений $\gamma = 2,\ 5,\ 10,\ 20$. Нагрузка интенсивностью q равномерно распределена на грани $z = h$; вектор объемных сил равен нулю всюду в области Ω плит всех типов; коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}25$. Граничные условия для перемещений квадратной плиты записываются в виде:

$$x = \pm a: \quad u = 0,\ v = 0,\ w = 0;$$
$$y = \pm a: \quad u = 0,\ v = 0,\ w = 0. \tag{4.56}$$

Условия для напряжений на поверхности имеют вид:

$$z = h: \quad \sigma_z = -q,\ \tau_{xz} = 0,\ \tau_{yz} = 0;$$
$$z = -h: \quad \sigma_z = 0,\ \tau_{xz} = 0,\ \tau_{yz} = 0. \tag{4.57}$$

Напряженно-деформированное состояние полубесконечных плит соответствует случаю плоской деформации с перемещением $v = 0$. Граничные условия на гранях $x = \pm a, z = \pm h$ выражаются формулами (4.56), (4.57).

Граничные условия для напряжений σ_z, τ_{rz} круглых плит могут быть получены из выражений (4.57) для σ_z, τ_{xz} заменой индекса x на r. В силу симметрии перемещение v всюду в области Ω равно нулю, на поверхности $r = a$ для перемещений u, w приняты условия

$$u = 0,\ w = 0. \tag{4.58}$$

Искомые перемещения квадратной плиты выражены следующим образом:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{m,n,k} p_m(\frac{x}{a}) p_n(\frac{y}{a}) p_k(\frac{z}{h}) \begin{bmatrix} A_{mnk} \\ B_{mnk} \\ C_{mnk} \end{bmatrix}, \tag{4.59}$$

здесь $p_m(\frac{x}{a}), p_n(\frac{y}{a}), p_k(\frac{z}{h})$ – полиномы Лежандра; в выражении для u удержаны все возможные сочетания полиномов с индексами $m = 1,3,5,7;$ $n = 0,2,4,6;$ для v – с индексами $m = 0,2,4,6; n = 1,3,5,7;$ для w – с индексами $m = 0,2,4,6; n = 0,2,4,6;$ во всех случаях $k = \overline{0,5}.$ Таким образом, в каждом из выражений (4.59) удерживается в общем случае по 96 членов.

В силу симметрии принято

$$C_{ipk} = C_{pik};\ B_{ipk} = A_{pik} \tag{4.60}$$

для всех соответствующих значений i, p, и общее число неизвестных A_{mnk}, C_{mnk} сокращается до 156. Поскольку задача автоматически разделяется на симметричную ($k = 0,2,4$ для $u; k = 1,3,5$ для w), то необходимые величины A_{mnk}, C_{mnk} получены решением двух независимых систем линейных алгебраических уравнений 78-го порядка каждая (число неизвестных A_{mnk}, C_{mnk} равно соответственно 48 и 30).

Две системы определяющих состояний соответствуют следующим выражениям для перемещений:

$$u = R_p Q_r T_q;\ \ v = 0;\ \ w = 0$$
$$(p = 1,3,5,7;\ \ r = 0,2,4,6;\ \ q = \overline{0,5}); \tag{4.61}$$

$$u = 0;\ \ v = 0;\ \ w = R_p Q_r T_q$$
$$(p = 0,2,4,6;\ \ r = 0,2,4,6;\ \ q = \overline{0,5}), \tag{4.62}$$

где

$$R_p = (\frac{x}{a})^p - (\frac{x}{a})^{p+2};\ \ Q_r = (\frac{y}{a})^r - (\frac{y}{a})^{r+2};\ \ T_q = (\frac{z}{h})^q. \tag{4.63}$$

Все прочие необходимые компоненты определяющих состояний получены подстановкой выражений (4.61), (4.62) в соответствующие соотношения теории упругости, связывающие эти компоненты с перемещениями (см. гл. 2 раздела 1).

Интегральное соотношение теоремы о взаимности работ применено в данном случае в виде:

$$\int_\Omega (X'u + Y'v + Z'w)d\Omega + \int_S (\overline{X}'u + \overline{Y}'v + \overline{Z'w})dS =$$
$$= \int_\Omega (Xu' + Yv' + Zw')d\Omega + \int_S (\overline{X}u' + \overline{Y}v' + \overline{Z}w')dS. \tag{4.64}$$

Перемещения определяющих состояний удовлетворяют условиям (4.56), что в общем случае при применении данного метода не является обязательным. Построение выражений (4.62) не связано с какими-либо затруднениями и позволяет обратить в ноль часть интегралов (4.64), которое в окончательном виде записывается:

$$\int_\Omega (X'u + Y'v + Z'w)d\Omega + \int_{S(z=\pm h)} (\overline{X}'u + \overline{Y}'v + \overline{Z}'w)dS = q \int_{S(z=h)} w'dS. \tag{4.65}$$

После подстановки в (4.65) последовательно компонентов всех определяющих состояний и выражений (4.59) и преобразований получена система линейных уравнений, необходимая для вычисления значений A_{mnk} и C_{mnk}. Искомым коэффициентам (4.59) ставятся в соответствие определяющие состояния с перемещениями (4.61) для A_{mnk} и (4.62) – для C_{mnk} при $p = m,\ \ r = n, q = k.$

Решения для полубесконечных плит получены по аналогичной схеме, перемещения u, w круглых плит аппроксимируются выражениями

$$u = \sum_{m,k} A_{mk} G_m^{(2)}(\frac{r}{a}) P_k(\frac{z}{h}),\ \ m = \overline{1,6};\ \ k = \overline{0,5};$$

$$w = \sum_{m,k} C_{mk} G_m^{(1)}(\frac{r}{a}) P_k(\frac{z}{h}),\ \ m = \overline{0,5};\ \ k = \overline{0,5}, \qquad (4.66)$$

здесь $G_m^{(1)}$ – полиномы Якоби $G_m(\alpha,\gamma,r)$ при $\alpha = 2, \gamma = 2,$ ортогональные на отрезке $0 \le r \le 1$ с весом r [19]. Функции $G_m^{(2)}$ равны нулю при $r = 0$ и получены ортогонализацией с весом r на отрезке $0 \le r \le 1$ комбинаций $G_m^{(1)} - G_{m+1}^{(1)}, m = 0,1,2,...$. Применение в данном случае систем функций, ортогональных с весом *r*, связано со спецификой выражения элемента объема $d\Omega = rdrd\varphi dz$ в цилиндрической системе координат.

Две системы определяющих состояний, введенных в решение при расчете круглых плит, соответствуют перемещениям

$$u' = ((\frac{r}{a})^p - (\frac{r}{a})^{p+1})(\frac{z}{h})^q;\ \ w' = 0;\ \ p = \overline{1,6};\ \ q = \overline{0,5}; \qquad (4.67)$$

$$u' = 0;\ \ w' = ((\frac{r}{a})^p - (\frac{r}{a})^{p+1})(\frac{z}{h})^q;\ \ p = \overline{0,5};\ \ q = \overline{0,5}. \qquad (4.68)$$

Реализацию процесса вычислений удобно осуществлять в матричной форме. Весь процесс решения разделен на три этапа:

1. Составление исходных матриц.

2. Составление системы линейных алгебраических уравнений по матричному алгоритму и решение этой системы. Применен алгоритм, позволяющий в процессе решения системы максимального порядка найти решения усеченных систем последовательно всех порядков, начиная с первого. Полученные результаты использованы для оценки относительной сходимости решения при удержании возрастающего числа членов выражений (4.59) и (4.66).

3. Вычисление перемещений и напряжений, характеризующих искомые состояния тел, в выбранных точках областей.

Каждый член выражений (4.59) и (4.66) не удовлетворяет ни одному из условий задачи. Степень соответствия этим условиям полученных решений в целом является одним из критериев качественной оценки эффективности метода. Граничные условия для перемещений выполняются с весьма высокой точностью: наибольшее по абсолютной величине для всех рассмотренных случаев отношение максимального значения *w* на защемленной грани $(x = \pm a, y = \pm a)$ к максимальному прогибу квадратной плиты $(\gamma = 2,\ x = 0,\ y = 0, z = h)$ составило 0,0535. Таким образом, наибольшее отклонение от условий (4.56), (4.58) составляет 5,35% прогиба в центре

соответствующей плиты. В большинстве случаев такое отклонение от граничных условий для u, w не превышает 2%.

В табл. 4.1 приведены значения напряжений $\sigma_z : q$ на гранях $z = \pm h$ для плит с отношением $\gamma = 5$.

Таблица 4.1

Плита		$\frac{z}{h}$			$\frac{x}{a}\left(\frac{r}{a}\right)$			
		0	0,05	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95
Квадратная	1	–0,993	–0,987	–1,032	–1,031	–1,034	–0,965	–0,921
	–1	–0,010	–0,002	0,030	0,035	0,028	–0,030	–0,063
Полубеско-	1	–1,027	–1,013	–0,971	–1,038	–1,000	–1,023	–0,818
нечная	–1	0,024	0,009	–0,027	0,035	–0,003	0, 008	–0,160
Круглая	1	–1,107	–1,007	–1,010	–0,984	–1,045	–1,061	–0,959
	–1	0,108	0,008	–0,010	–0,015	0,043	0,062	–0,035

На участках $0 \le x \le 0{,}9a$ $(0 \le r \le 0{,}9a)$ граничные условия для σ_z выполняются в основном с точностью до 3%. Лишь в центре круглой плиты отклонение превысило 10%, но уже при $r = 0{,}05\,a$ оно составляет 1% точного значения. В точках с особенностями напряженного состояния $x = a\,(r = a), z = \pm h$ [12] полученные результаты выражают некоторые усредненные для зоны вблизи особых точек значения, что не влияет существенно на общую картину напряженно-деформированного состояния.

В табл. 4.2 сопоставляются результаты, полученные для жестко защемленного цилиндра при $\gamma = 2$ на основе решения с выделением особенностей напряженного состояния [34] и методом определяющих состояний.

Таблица 4.2

Значения	$\frac{z}{h}$				$\frac{r}{a}$		
		0	0,30	0,50	0,70	0,90	1,00
	Результаты, приведенные в работе [54]						
$w : \frac{qa}{E}$	1,00	–0,928	–	–0,691	–	–0,197	–0,006
	0,50	–0,879	–	–0,620	–	–0,125	0
	0,00	–0,850	–	–0,587	–	–0,119	–0,005
$\sigma_r : q$	1,00	–0,749	–0,647	–0,457	–0,153	–0,468	
	0,75	–	–	–	–	0,258	0,195
	0,50	–0,270	–0,214	–0,118	0,004	0,048	0,023
	Получено методом определяющих состояний						

$w:\frac{qa}{E}$	1,00	–0,932	–	–0,690	–	–0,196	–0,015
	0,50	–0,875	–	–0,619	–	–0,123	0,006
	0,00	–0,848	–	–0,583	–	–0,115	–0,006
$\sigma_r : q$	1,00	–0,783	–0,638	–0,453	0,162	0,583	1,917
	0,75	–	–	–	–	0,249	0,188
	0,50	–0,264	0,209	–0,117	–0,030	0,055	–0,021

Цилиндр загружен на гранях $z = \pm h$ направленной вниз равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 0,5q, значения $w:\frac{qa}{E}$ весьма близки во всех рассмотренных точках; радиус зоны вблизи особых точек, где расхождение между соответствующими значениями $\sigma_r : q$ превышает 10%, составляет 0,15 высоты цилиндра.

В табл. 4.3 приведены некоторые основные результаты, характеризующие напряженно-деформированное состояние квадратных в плане плит; в этой таблице введены обозначения: σ_x ,σ_z – нормальные напряжения в точках с координатами $x = 0, y = 0$; σ_x^* – нормальные напряжения в точках защемленных граней $(x = a)$; w – прогибы в центре плит. Эти результаты положены в основу анализа применимости приближенных теорий расчета плит различной толщины (см. гл. 2 раздела 1).

Таблица 4.3

		$\gamma = 2$				$\gamma = 5$		
$\frac{z}{h}$	$\sigma_x : q$	$\sigma_x^* : q$	$\sigma_z : q$	$w:\frac{qa}{E}$	$\sigma_x : q$	$\sigma_x^* : q$	$\sigma_z : q$	$w:\frac{qa}{E}$
1,0	–1,242	3,815	–1,032	–1,398	–4,150	10,37	–0,993	–5,723
0,5	–0,585	0,076	–0,843	–1,193	–2,031	3,446	–0,859	–5,794
0,0	–0,149	–0,562	–0,521	–1,068	–0,048	–0,016	–0,491	–5,729
–0,5	0,256	–0,688	–0,177	–0,965	1,750	–3,096	–0,162	–5,459
–1,0	0,845	–2,396	0,041	–0,893	3,825	–9,899	–0,010	–5,414

Качество приближенного аналитического решения граничной задачи проверяется, в частности, по следующим критериям:

– относительная сходимость решения. При расчете ответственных конструкций и сооружений обязательным является сравнение результатов, полученных с применением выбранного в первом приближении и (желательно) удвоенного во втором приближении числа координатных состояний; уточнение решения продолжается, если разница между

результатами двух следующих один за другим приближений выше заранее установленной величины (как правило, в процентах);

– соответствие приближенного решения граничным условиям, которым не удовлетворяет каждое координатное состояние.

Расчет тонких плит

Достаточно полное представление о качестве решения задач механики твердого тела методом определяющих состояний можно составить на примере расчета свободно опертой по контуру пластинки размерами $2a \times 2a$, загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Точное решение этой задачи было получено Навье [57]. Начало координат примем в центре плиты.

Дифференциальное уравнение изгиба плиты приведено в гл. 2 разд. 1, граничные условия:

$$x = \pm a:\ w = 0,\ M_x = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0;$$

$$y = \pm a:\ w = 0,\ M_y = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x}) = 0. \qquad (4.69)$$

Учитывая симметрию относительно координатных осей, искомую функцию w представим в виде:

$$w_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} c_{ik} P_i(\frac{x}{a}) P_k(\frac{y}{a}),\ i = 0,2,4,...,m;\ k = 0,2,4,...,n, \qquad (4.70)$$

где $P_i(\frac{x}{a}), P_k(\frac{y}{a})$ – многочлены Лежандра.

Ни один член выражения (4.70) не удовлетворяет уравнению изгиба плиты и ни одному из граничных условий (4.69).

Функцию прогибов определяющих состояний выразим следующим образом:

$$w'_{pr} = (P_p(\frac{x}{a}) - P_0(\frac{x}{a}))(P_r(\frac{y}{a}) - P_0(\frac{y}{a})), p = 0,2,4,...; r = 0,2,4,... . \qquad (4.71)$$

Система функций (4.71) обладает полнотой в пространстве квадратично-суммируемых в квадрате $-a \le x \le a,\ -a \le y \le a$ функций, равных нулю на границе области. Каждому члену выражения (4.70) с индексами i, k ставим в соответствие определяющее состояние с индексами $p = i + 2, r = k + 2$ в выражении (4.71). Выбор функций w'_{pr} определяющих состояний, удовлетворяющих граничным условиям задачи для прогибов, в данном случае не вызывает существенных затруднений и в то же время упрощает процесс вычислений.

С учетом сосредоточенных реакций в углах свободно опертой плиты [57] интегральное соотношение теоремы о взаимности работ записывается в данном случае следующим образом (со штрихом приведены компоненты определяющего состояния):

$$\int_{\Omega} q' w d\Omega + \int_{S} V_n' w dS + \int_{S} M_n' \varphi_n dS + \sum R_o' w_o = 0 . \qquad (4.72)$$

С учетом граничных условий задачи, в силу равенства нулю на границе функций w_{pr}' обращаются в нуль члены $\int_{S} V_n w' dS, \sum R_o w_o'$ и отпадает необходимость в выражении неизвестных компонентов V_n, R_o действительного состояния через прогибы из выражения (4.60). Окончательно система интегральных соотношений записывается в виде:

$$\int_{\Omega} q' w d\Omega + \int_{S} M' \varphi_n dS = 0 . \qquad (4.73)$$

Кроме функции w_{pr}' в (4.73) входят компоненты $q_{pr}', M_{x,pr}', M_{y,pr}'$ определяющих состояний, которые выражаем из уравнений (2.31), (2.24), (2.25) гл. 2 разд. 1, например (см. выражение (4.71)):

$$q_{pr}' = \frac{\partial^4 w_{pr}'}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_{pr}'}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{pr}'}{\partial y^4}, \qquad (4.74)$$

для края $x = -a$:

$$M_{x,pr}' = -D\left(\frac{\partial^2 w_{pr}'}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_{pr}'}{\partial y^2}\right) \qquad (4.75)$$

и т.д. В формулы для компонентов напряженно-деформированного состояния на краях плиты следует вводить корректирующие знаки, обеспечивающие выполнение принципа: *обобщенная сила и энергетически соответствующее ей обобщенное перемещение одного знака должны иметь одинаковое направление* [34].

Неизвестные компоненты $\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ действительного состояния выразим через функцию прогибов из выражения (4.70):

$$\varphi_x = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} c_{ik} \frac{\partial P_i(\frac{x}{a})}{\partial x} P_k(\frac{y}{a});$$

$$\varphi_y = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_{ik} P_i(\frac{x}{a}) \frac{\partial P_k(\frac{y}{a})}{\partial y}. \qquad (4.76)$$

Подставим в (4.73) выражения (4.70), (4.76) для компонентов искомого состояния и выражения (4.71), (4.74), (4.75) для компонентов определяющих состояний последовательно при всех сочетаниях выбранных значений индексов p, r и после преобразований получим разрешающую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} e_{pr,ik} c_{ik} = d_{pr}, \;\; p = 0,2,4,...,m+2; \;\; r = 0,2,4,...,n+2. \qquad (4.77)$$

При решении задачи в выражении (4.70) удержано различное число членов, в частности, получены величины прогибов и других компонентов искомого состояния, соответствующие (с учетом симметрии $c_{ik} = c_{ki}$) приближенному решению с 2, 4, 5, 7 членами (4.70). Результаты приведены в табл. 4.4 и сопоставляются с точным решением Навье.

Таблица 4.4

Координаты точек	Компоненты	Количество членов (4.70)				Точное решение
$(\frac{x}{a}, \frac{y}{a})$		2	4	5	7	
0;0		0,347	0,408	0,408	0,407	0,406
0;0,5		0,282	0,295	0,294	0,294	0,294
0,5;0,5	$w : \frac{qa^4}{D} \cdot 10^{-2}$	0,217	0,211	0,212	0,214	0,214
0;1		0,087	–0,004	0,001	0,001	0
0,5;1		0,022	0	0,002	–0,001	0
1;1		–0,174	0,054	–0,008	0,007	0
0;0	$\frac{M_y}{qa \cdot 10^{-2}}$	2,71	4,84	4,96	4,84	4,79
0;1		2,71	1,14	0,47	–0,01	0

В соответствии с теоремой 2 п. 4.5 параметры c_{ik} с уточнением решения стремятся к обобщенным коэффициентам Фурье точного решения по функциям, принятым в (4.60). В табл. 4.5 показано, что в данном случае такое приближение происходит достаточно быстро.

Таблица 4.5

Обобщенные коэффициенты Фурье точного решения Навье по функциям (4.60)	$\gamma_{00} = 0{,}0269$	$\gamma_{22} = 0{,}0311$	$\gamma_{02} = -0{,}0291$
c_{ik}	$c_{00} = 0{,}0278$	$c_{02} = -0{,}0280$	$c_{22} = 0{,}0301$
Число членов (4.60)	2	4	5

4.7. Общая характеристика метода определяющих состояний

При применении метода определяющих состояний решение системы уравнений равновесия (4.21) и граничных условий (4.24), (4.25) сводится к нахождению возможного состояния $R_{gB,}$ удовлетворяющего системе интегральных соотношений теоремы о взаимности работ. Запишем эту систему в форме (4.52):

$$(R_i', R_{gB})_B = d_i, \ \ i = 1,2,\ldots \ . \tag{4.78}$$

Пусть выбрана некоторая полная система координатных состояний $R_1^{(K)}, R_2^{(K)}, \ldots$. Ограничиваясь вместо R_{gB} возможным состоянием R_n, выраженным суммой

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} R_k^{(K)},$$

воспользуемся для определения α_{kn} соответствующей усеченной из (4.78) системой

$$(R_i', R_{gB})_B = d_i, \ \ i = 1,2,\ldots n, \tag{4.79}$$

в которую подставим вместо R_{gB} возможное состояние R_n.

Говорят, что возможные состояния R, R' B-ортогональны, если $(R, R')_B = 0.$ Возможное состояние $R_{\Delta n} = R_{gB} - R_n$, выражающее невязку приближенного решения R_n, B-ортогонально к определяющим состояниям $R_1', R_2', \ldots, R_n'.$ Уточнение решения вводом в (4.79) новых координатных состояний равносильно B-ортогонализации невязки $R_{\Delta n} (\lim\limits_{n\to\infty} R_{\Delta n} = R_\Delta)$ ко все возрастающему числу определяющих состояний. В пределе, при $n \to \infty$ выполняется условие

$$(R_i', R_\Delta)_B = 0, \ \ i = 1,2,\ldots,$$

т.е. возможное состояние R_n при $n \to \infty$ сходится к искомому решению задачи в рассматриваемом здесь смысле. В теории метода определяющих состояний показано, что данный метод является наиболее общей формой проекционных методов. Анализ относительных значений $(R_i', R_{\Delta n})_B$, $i = n+1, n+2,...,$ и характера их изменения с увеличением n может послужить основой эффективного в некоторых задачах способа оценки полученных приближенных решений.

Использование теоремы о взаимности работ и применение двух различных в общем случае систем возможных состояний – координатных и определяющих – обеспечивает широкие возможности выбора наиболее рациональных путей решения. Аппроксимируя искомые перемещения ортонормированными функциями, можно варьировать определяющие состояния различным образом с учетом целей решения, характера задачи, опыта исполнителя и применяемых вычислительных средств.

Интегральное соотношение теоремы о взаимности работ в форме (4.28) позволяет ввести в решение все условия основных типов граничных задач теории упругости. При выборе определяющих и координатных состояний нет необходимости в удовлетворении каким-либо заданным условиям, что значительно упрощает решение многих сложных задач и создает благоприятные возможности для эффективного использования быстродействующей вычислительной техники.

При применении в качестве определяющих деформированных состояний, вызванных действием единичных сил, данный метод может быть сведен к методам потенциала, а соотношения (4.29) преобразуются к формулам для соответствующих таким силам перемещений действительного состояния.

В настоящей работе метод определяющих состояний рассматривается применительно к решению статических задач теории упругости, его обоснование проводится с учетом физического смысла задачи. Распространение теоремы взаимности на задачи механики анизотропных тел с физической и геометрической нелинейностью [21] и динамические задачи теории упругости [1] создает реальные предпосылки для исследования возможности приложения метода в этих актуальных разделах механики твердого тела.

При выборе соответствующего основного интегрального соотношения метод может быть применен и в других областях математической физики. В задачах, связанных с уравнениями Лапласа и Пуассона, в качестве такого соотношения может быть применена формула Грина [16].

4.8. Понятие о регионально-проекционном методе

Процедура реализации метода определяющих состояний усложняется при решении задач механики твердого тела в случаях, когда в различных частях заданной области напряженно-деформированное состояние описывается различными физическими теориями и гипотезами, например при расчете сложных пространственных систем, состоящих из разнородных элементов – трехмерных тел, тонкостенных элементов, стержней. В задачах теплопроводности в одной части заданной области необходимо учитывать неоднородность среды, например зависимость коэффициента теплопроводности от координат, в других частях можно приближенно считать среду однородной, что существенно уменьшит объем вычислений при вполне допустимых погрешностях.

В рассмотренных случаях более целесообразно разделить всю заданную область соответствующим образом на подобласти и в каждой из них применить метод определяющих состояний. В отличие от метода конечных элементов в данном случае, в силу свойств метода определяющих состояний, нет необходимости формировать соответствующие матрицы жесткости и, что наиболее существенно, решать трудноразрешимую в ряде случаев проблему совместности конечных элементов.

Следует отметить, что актуальность проблемы решения сложных граничных задач рассмотренного типа возрастает, по-видимому, в связи с быстрым развитием строительного дела, в направлении применения как новых архитектурных форм, так и современных строительных материалов.

Пусть решение граничной задачи производится в некоторой области Ω с границей S. Разделим заданную область на N подобластей $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_i, ..., \Omega_N$. Решение задачи сводится к формированию функций $u_\xi, \xi = 1,2,3.$ Пусть при этом каждая из них может быть представлена в виде:

$$u_\xi = \sum_{\lambda=1}^{N} u_{\xi\lambda};\ \xi = 1,2,3, \tag{4.80}$$

где функция $u_{\xi\lambda}$ тождественно равна нулю во всех подобластях Ω_λ, кроме подобласти Ω_i. Реализуя метод определяющих состояний одновременно в каждой из подобластей, рассматривая их как составные части единого целого, получим решение для всей заданной области.

Пусть подобласть Ω_i граничит с некоторым числом N_i других подобластей $\Omega_k, k = 1,2,..., N_i$; границу между Ω_i и Ω_k обозначим S_{ik}. В любой задаче механики твердого тела на границах между подобластями должны выполняться определенные соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния в этих подобластях, которые могут

иметь название условий неразрывности, совместности, гладкости и т.д. В наиболее сложных случаях удобно связывать все компоненты напряженно-деформированного состояния в подобласти Ω_i с перемещениями в соседних подобластях. Формально такую, в общем случае дифференциальную, связь на границе S_{ik} представим в виде (см. 4.3 и формулы (4.24), (4.25)):

$$F_{pi} = L_{ikp}^{(F1)} u_{1k} + L_{ikp}^{(F2)} u_{2k} + L_{ikp}^{(F3)} u_{3k};\ p = 1,2,...,r_1;\ k = 1,2,...,N_1;$$

$$P_{pi} = L_{ikp}^{(P1)} u_{1k} + L_{ikp}^{(P2)} u_{2k} + L_{ikp}^{(P3)} u_{3k};\ p = 1,2,...,r_1;\ k = 1,2,...,N_i.$$

Смысл данных граничных условий заключается в том, что хотя в Ω_i отыскиваются локальные выражения искомых функций перемещений, эти локальные функции должны удовлетворять общим для всей заданной области условиям.

Если для всей области Ω задана одна и та же система основных дифференциальных уравнений (4.21) и соотношений (4.22), (4.23), то условия совместности удобнее применять в виде:

$$F_{pi} = F_{pk}; P_{pi} = P_{pk};\ p = 1,2,...,r_1;\ k = 1,2,...,N_i. \qquad (4.81)$$

Сформулируем теперь граничную задачу для основных уравнений (4.21) и граничных условий (4.24), (4.25) в подобласти Ω_i. Очевидно, что искомые функции внутри этой подобласти должны удовлетворять соответствующей системе дифференциальных уравнений равновесия, на части границы S_i, совпадающей с внешней границей всей заданной области, условиям (4.24), (4.25) и на частях границы S_{ik} – условиям (4.81). В такой постановке задачи при вводе условий (4.81) в качестве граничных условий на части границы S_{ik} подобласти Ω_k число граничных условий точно соответствует количеству и характеру уравнений (4.21). В частности, если в задачах для одномерного пространства искомые функции могут быть выражены непосредственно интегрированием, то число произвольных постоянных равно числу граничных условий.

Искомые функции перемещений в подобласти Ω_i выражаем, как в методе определяющих состояний, через выбранные системы координатных функций $f_{gj}^{(i)}, j = \overline{1,n}_{gi}, g = 1,2,3$, и неопределенные параметры $\alpha_{gj}^{(i)}$:

$$u_{gi}(n_{gi}) = \sum_{j=1}^{n(gi)} \alpha_{gj}^{(i)}(n_{gi}) f_{gj}^{(i)}; g = 1,2,3. \qquad (4.82)$$

В соседних подобластях $\Omega_k, k = 1,2,...,N_i$,

$$u_{gk}(n_{gk}) = \sum_{j=1}^{n(gk)} \alpha_{gj}^{(k)}(n_{gk}) f_{gj}^{(k)}; g = 1,2,3. \qquad (4.83)$$

Для определения трех множеств параметров $\alpha_{gj}^{(i)}, g = 1,2,3,$ в подобласти Ω_i применим *каноническую* систему определяющих состояний, состоящую из трех множеств состояний $R_{m(1)}^{(i1)}$, $R_{m(2)}^{(i2)}$, $R_{m(3)}^{(i3)}$ соответственно с перемещениями:

$$R_{m(1)}^{(i1)} - u_{1,m(1)}^{(i1)} = Q_{m(1)}^{(i1)};\ u_{2,m(1)}^{(i1)} = 0;\ u_{3,m(1)}^{(i1)} = 0;\ m(1) = \overline{1,n(1i)};\ p = \overline{1,r_{2;}}$$

$$R_{m(2)}^{(i2)} - u_{1,m(2)}^{(i2)} = 0;\ u_{2,m(2)}^{(i2)} = Q_{m(2)}^{(i2)};\ u_{3,m(2)}^{(i2)} = 0;\ m(2) = \overline{1,n(2i)};\ g = 1,2,3;$$

$$R_{m(3)}^{(i3)} - u_{1,m(3)}^{(i3)} = 0;\ u_{2,m(3)}^{(i3)} = 0;\ u_{3,m(3)}^{(i3)} = Q_{m(3)}^{(i3)};\ m(3) = \overline{1,n(3i)}. \quad (4.84)$$

Исходя из общих принципов реализации метода, все прочие необходимые компоненты определяющих состояний выражаем из уравнений (4.21) и формул (4.22), (4.23):

$$R_{m(1)}^{(i1)} - F_{pm(1)}^{(i1)} = C_{pi1} Q_{m(1)}^{(i1)};\ P_{pm(1)}^{(i1)} = D_{pi1} Q_{m(1)}^{(i1)};\ K_{m(1)}^{(ig1)} = A_{g1}^{(i)} Q_{m(1)}^{(i1)};$$

$$R_{m(2)}^{(i2)} - F_{pm(2)}^{(i2)} = C_{pi2} Q_{m(2)}^{(i2)};\ P_{pm(2)}^{(i2)} = D_{pi2} Q_{m(2)}^{(i2)};\ K_{m(2)}^{(ig2)} = A_{g2}^{(i)} Q_{m(2)}^{(i2)};$$

$$R_{m(3)}^{(i3)} - F_{pm(3)}^{(i3)} = C_{pi3} Q_{m(3)}^{(i3)};\ P_{pm(3)}^{(i3)} = D_{pi3} Q_{m(3)}^{(i3)};\ K_{m(3)}^{(ig3)} = A_{g3}^{(i)} Q_{m(3)}^{(i3)}. \quad (4.85)$$

Разделим границу S_i подобласти Ω_i на две части: границу $S_i^{(S)}$, совпадающую с внешней границей заданной области, и границу между подобластью Ω_i и соседними подобластями, которую можно представить в виде суммы $\sum_{k=1}^{N(i)} S_{ik}$ границ между Ω_i и каждой из подобластей $\Omega_k, k = \overline{1,N_i}$. Подставив теперь в интегральное соотношение теоремы о взаимности работ соответствующей математической модели твердого тела заданные условиями задачи компоненты действительного состояния, неизвестные его компоненты в подобласти Ω_i и всех соседних с нею подобластях через выражения (4.82), (4.83) и затем последовательно все сформированные определяющие состояния канонической системы (4.84), (4.85), получим систему $n_i = \sum_{g=1}^{3} n_{gi}$ интегральных соотношений, которая преобразуется в блок линейных алгебраических уравнений, включающих в качестве неизвестных неопределенные параметры при координатных состояниях, выражающих приближенное решение задачи в подобласти Ω_i и всех соседних с ней подобластях. Совокупность таких блоков, соответствующих всем выбранным подобластям, образует разрешающую систему линейных алгебраических уравнений регионально-проекционного метода.

Таким образом, к основным особенностям метода могут быть отнесены следующие:

1. Заданная область может быть разделена на произвольную совокупность подобластей более простой формы, и решение заданной граничной задачи сводится к решению граничных задач в каждой из них с учетом условий совместности.

2. Применяемыми в каждой из подобластей Ω_i определяющими и координатными состояниями можно не удовлетворять ни одному из основных дифференциальных уравнений, граничных условий и условий совместности. Необходимыми для этих состояний являются лишь условия полноты в соответствующем характеру применяемого соотношения взаимности смысле [34].

3. Для выражения компонентов определяющих и координатных состояний могут применяться различные, отличающиеся друг от друга, системы функций. Так, для построения координатных состояний могут применяться тригонометрические функции, в то время как перемещения определяющих состояний выражаются ортогональными степенными многочленами.

4. Алгоритм регионально-проекционного метода и метода определяющих состояний сформулирован применительно к решению в общем случае неоднородных задач; в предварительном приведении их к однородным, как это имеет место в ряде вариационных методов [42], нет необходимости.

5. Матрица коэффициентов разрешающей системы линейных алгебраических уравнений метода является в общем случае несимметричной, относительное число нулевых элементов в ней возрастает по мере увеличения числа подобластей, на которые разделяется заданная область.

6. Важнейшей особенностью рассматриваемых методов является возможность уточнения решения одновременно двумя путями: в одной части заданной области – увеличением числа делений и в другой части – увеличением числа координатных состояний в каждой из подобластей предыдущего приближения при сохранении их числа. Возможно, естественно, и уточнение решения одновременным увеличением числа подобластей и числа применяемых в каждой из них координатных состояний.

Процесс численной реализации регионально-проекционного метода можно разделить на следующие основные этапы:

1) выбор типов подобластей, на которые разделяется заданная область, и их классификация;

2) построение системы определяющих и координатных состояний для каждого из выбранных типов подобластей;

3) выбор полной формы интегрального соотношения взаимности для каждого из выбранных типов подобластей и составление выражений для коэффициентов при неизвестных и свободных членов разрешающей системы линейных алгебраических уравнений;

4) подготовка к реализации первого этапа приближения, выбор схемы разделения области на подобласти и числа координатных состояний в каждой из них;

5) составление разрешающей системы первого этапа приближения;

6) решение разрешающей системы первого этапа приближения;

7) вычисление необходимых компонентов искомого состояния в выбранных точках области или их усредненных в различном смысле значений во всей или в части рассматриваемой подобласти, анализ полученных результатов и принятие решения о необходимости реализации второго этапа приближения;

8) подготовка к реализации второго этапа приближения, если это признано целесообразным; выбор схемы разделения заданной области на подобласти и числа координатных функций в каждой из них;

9) реализация этапов 5, 6, 7 второго приближения и т.д. вплоть до получения результатов заданного качества.

В случае двухмерной области в декартовой системе координат наиболее целесообразно применять подобласти в форме прямоугольников, четырехугольников, включающих один прямой угол, и прямоугольных треугольников. Применение подобластей такой формы достаточно при решении задач для многосвязных областей, ограниченных отрезками прямой. При этом подобласти в форме прямоугольников относятся к основному типу, применяемому для заполнения внутренних частей области, а неправильные четырехугольники и треугольные подобласти используются для описания зон вблизи границы.

Один из целесообразных путей представления плоской многоугольной области в виде системы подобластей указанных типов заключается в делении ее прямыми линиями, проведенными через каждую вершину параллельно координатным осям. При этом область следует ориентировать по отношению к выбранной координатной системе так, чтобы максимальное число ее сторон располагалось параллельно осям координат. В случае областей, ограниченных кривыми, целесообразно вначале, если возможно, представить их приближенно в форме области, ограниченной отрезками прямой.

В декартовой системе координат возможно применение подобластей и других типов, имеющих форму криволинейных многоугольников.

При решении задач для трехмерных областей в декартовой системе координат основным типом подобласти является прямоугольный параллелепипед. Для представления зон вблизи границы могут применяться многогранники различной формы.

Следует отметить, что применение как в декартовой, так и в других системах координат подобластей нерегулярной формы приводит к усложнениям при построении определяющих и координатных состояний. Возможности применения ортогональных функций одной переменной,

например многочленов Якоби, весьма ограничены. Кроме того, в каждом отдельном случае применения подобластей нерегулярной формы требуется обоснование полноты применяемых систем функций. Поэтому целесообразно использовать опыт представления областей нерегулярной формы совокупностью прямоугольников или прямоугольных параллелепипедов в методе конечных элементов. Решение данной проблемы заключается в создании библиотеки стандартных подобластей нерегулярной формы, достаточных систем определяющих и полных систем координатных состояний [39] в каждой из таких подобластей, построении полных систем функций, ортогональных по областям различной нерегулярной формы [2]. В регионально-проекционном и методе определяющих состояний данная проблема существенно упрощается вследствие того, что одна и та же система вспомогательных состояний – определяющих или координатных, построенная для подобласти некоторой нерегулярной формы, может быть эффективно применена для решения в этой подобласти самых различных граничных задач всех основных типов. Все граничные условия в терминологии вариационных методов являются естественными, и вспомогательные состояния применяются независимо от того, какие значения их компоненты принимают на тех или иных участках границы. Процесс создания библиотеки стандартных подобластей может быть полностью автоматизирован.

В цилиндрической системе координат к основному типу относятся подобласти, ограниченные координатными поверхностями $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$; в сферической системе – координатными поверхностями $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$.

Для плоской области в полярной системе координат подобласть основного типа ограничена двумя дугами концентрических окружностей с центром в начале координат и двумя проходящими через него лучами.

Координатные и определяющие состояния для подобластей основных типов строятся для различных классов задач на основе небольшого числа систем ортогональных функций, что целесообразно для ускорения сходимости приближенного решения, повышения его устойчивости.

Во многих случаях может оказаться целесообразным применение целых положительных степеней независимых переменных. На основе таких функций строятся различные системы алгебраических полиномов в двухмерных и трехмерных областях. К простейшим из них относятся системы

$$1, x, y, x^2, y^2, xy, x^3, \ldots \tag{4.86}$$

в двухмерной области и

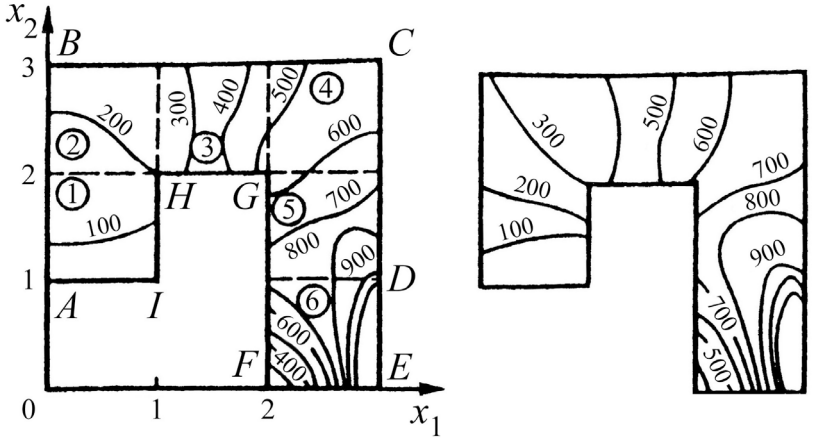
$$1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz, x^3, \ldots \tag{4.87}$$

в трехмерной области. Более сложные полиномы образуются различными комбинациями элементов систем (4.86), (4.87).

Однако при использовании для построения определяющих и координатных состояний систем, включающих степени независимых переменных выше четвертой, устойчивость решения резко снижается. Уточнение решения в этом случае следует осуществлять увеличением числа подобластей.

4.9. Пример применения регионально-проекционного метода

Регионально-проекционным методом решена плоская статическая задача термоупругости для сложной области [34] при комплексном воздействии нагрева и внешней нагрузки (рис. 4.2).



а б

Рис. 4.2. К расчету плоской статической задачи термоупругости для сложной области: а – схема разделения области на подобласти и значения температуры в изотермах; б – температурное поле, соответствующее постоянному значению коэффициента теплопроводности

Температурные граничные условия заданы следующим образом: на участках границы AI и DE задана постоянная температура, равная соответственно 20° C и 1200° C. На участке FE температура меняется по закону $T = 4740 + 4720x_1 + 1180x_1^2$. На остальной части границы плита изолирована, $\dfrac{\partial T}{\partial n'} = 0$. На участке AI пластинка жестко защемлена, $u_1 = u_2 = 0$; на участке BC приложена равномерно распределенная вертикальная нагрузка интенсивностью 4,9010 Па.

Уравнение стационарной задачи теплопроводности записывается в виде:

$$Q(T) = A_{ij}T_{,ij} + B_iT_{,i} + CT = F_T, \tag{4.88}$$

где $A_{ij} = A_{ij}(x)$ – элементы тензора коэффициентов теплопроводности среды; $B_i = A_{ij,j}; C = C(x)$ – источники (или стоки) тепла, пропорциональные температуре; $F_T = F_T(x)$ – плотность внутренних источников тепла.

В рассматриваемом случае уравнение (4.88) сводится к виду:

$$(\lambda_q T_{,i})_i = 0, \tag{4.89}$$

коэффициент теплопроводности λ_q меняется по закону

$$\lambda_q = (51 - 19x_1 + 36x_1^2)(1 + 0{,}08x_2^2). \tag{4.90}$$

В процессе решения заданная область разделена на шесть подобластей, границы которых показаны на рис. 4.2, *а* штриховой линией. Функция T в подобласти Ω_r приближенно выражена в виде:

$$T^{(r)} = \sum_i \sum_j \alpha_{ij}^{(r)} P_i(x_1^{(r)}) P_j(x_2^{(r)}),\ r = \overline{1,6}, \tag{4.91}$$

где P_i, P_j – полиномы Лежандра, $x_1^{(r)}$, $x_2^{(r)}$ – локальная для каждой из подобластей система координат.

Определяющие состояния соответствуют выражениям

$$u_{mn}^{(r)} = P_m(x_1^{(r)}) P_n(x_2^{(r)}),\ r = \overline{1,6}. \tag{4.92}$$

Таким образом, применяемые координатные и определяющие состояния в каждой из подобластей не удовлетворяют ни одному из граничных условий, основному дифференциальному уравнению и условиям совместности на границе между подобластями.

В качестве основного интегрального соотношения в задачах теплопроводности целесообразно применить формулу Грина [14], которая с учетом формальной самосопряженности уравнения (4.88) для T и некоторой вспомогательной функции u принимает вид:

$$\int_\Omega (Q(T)u - TQ(u))d\Omega = \int_S \left(\frac{\partial T}{\partial n'}u - \frac{\partial u}{\partial n'}T + \sigma u T\right)dS, \tag{4.93}$$

где

$$\sigma = \cos(\nu, x_j)(B_j - A_{ij,i}).$$

На рис. 4.2, *а* приведены значения температуры в изотермах, полученные при решении рассматриваемой задачи. Температурное поле, соответствующее постоянному значению коэффициента теплопроводности $\lambda = 59{,}31 \dfrac{Bm}{\text{м} \cdot \text{град}}$, изображено на рис. 4.2, *б*. Поле перемещений плиты

определялось для двух вариантов характера изменения модуля упругости E. В первом варианте во всей области принято $E = 1{,}96 \cdot 10^8$ Па, во втором – модуль E выражался функцией координат, соответствующей полученному температурному полю. Разбиение области на подобласти производилось так же, как при определении температурного поля. Координатные и канонические определяющие состояния внутри каждой подобласти построены на основе функций – степеней координат локальной системы.

Система уравнений равновесия термоупругости в случае зависимости упругих характеристик материала от координат имеет вид [33]:

$$\mu = \nabla^2 u_j + (\lambda + \mu) e_{,j} + \lambda_{,i} e + (u_{i,j} + u_{j,i}) \mu_{,j} -$$
$$- ((3\lambda + 2\mu)\alpha_t)_{,i} T - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_{,i} + X_i = 0,$$

где μ, λ – коэффициенты Ламе; α_T – температурный коэффициент линейного расширения тела; X_i – компоненты вектора массовых сил; $e = u_{i,i}$.

Интегральное соотношение теоремы о взаимности работ:

$$\int_\Omega X_i' u_i d\Omega + \int_S P_i' u_i dS = \int_\Omega X_i u_i' d\Omega + \int_S P_i u_i' dS + \int_\Omega (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T e' d\Omega.$$

В первом варианте расчета вертикальные перемещения в точках с координатами (0,5;1,5); (0,5;2,5); (1,5;2,5); (2,5;2,5); (2,5;1,5); (2,5;0,5) составили соответственно 0,41; 1,05; 1,17; 1,22; 2,86; 4,83. Во втором варианте эти величины равны 0,44; 1,16; 1,21; 1,28; 3,14; 5,31. Следовательно, неравномерность физических свойств материала может существенным образом влиять на напряженно-деформированное состояние конструкции.

4.10. Ортогональные функции. Ряды Фурье

Рассмотрим некоторые основные положения теории ортогональных функций, которые получили широкое и эффективное применение в приближенных аналитических методах решения граничных задач механики твердого тела.

Пусть линейно независимые функции $f_1, f_2, \ldots$ определены и непрерывны в промежутке (a, b). Если эти функции удовлетворяют условию

$$\int_a^b f_i f_n dx = 0 \text{ при } i \neq n, \tag{4.94}$$

то они называются *ортогональными.*

Если выполняются условия

$$\int_a^b f_i f_k dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & i = k, \end{cases} \tag{4.95}$$

то данная система функций называется *ортогональной* и *нормированной* (*ортонормированной*).

Если функции $f_1, f_2, \ldots$ не являются ортогональными, то на их основе могут быть построены ортогональная и нормированная системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, причем каждая функция этой системы представляет некоторую линейную комбинацию:

$$\varphi_n = a_1^{(n)} f_1 + a_2^{(n)} f_2 + \ldots + a_n^{(n)} f_n, \; n = 1,2,\ldots . \tag{4.96}$$

Первая функция φ_1 должна иметь вид:

$$\varphi_1 = C_1^{(1)} f_1,$$

при этом постоянная C подбирается из условия

$$\int_a^b \varphi_1^2 dx = 1.$$

Таким образом,

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b f_1^2 dx}} f_1. \tag{4.97}$$

Полагая теперь первые n функций определенными, составим из них и функции f_{n+1} выражение для функции φ_{n+1}. Такое выражение составляется как линейная комбинация указанных функций и может быть записано в виде:

$$\varphi_{n+1} = C_1^{(n+1)}\varphi_1 + C_2^{(n+1)}\varphi_2 + \ldots + C_n^{(n+1)}\varphi_n + C_{n+1}^{(n+1)} f_{n+1}. \tag{4.98}$$

Постоянные $C_i^{(n+1)}$ определяем из условий ортогональности φ_{n+1} к каждой из функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. В общем виде для функции $\varphi_i, i = 1,2,\ldots,n$, такое условие запишем:

$$\int_a^b (C_1^{(n+1)}\varphi_1 + C_2^{(n+1)}\varphi_2 + \ldots + C_i^{(n+1)}\varphi_i + \ldots + C_n^{(n+1)}\varphi_n + \ldots + C_{n+1}^{(n+1)} f_{n+1})\varphi_i dx = 0.$$

Иначе:

$$C_1^{(n+1)}\int_a^b \varphi_1\varphi_i dx + C_2^{(n+1)}\int_a^b \varphi_2\varphi_i dx + \ldots + C_i^{(n+1)}\int_a^b \varphi_i^2 dx + \ldots +$$

$$+ C_n^{(n+1)}\int_a^b \varphi_n\varphi_i dx + C_{n+1}^{(n+1)}\int_a^b f_{n+1}\varphi_i dx = 0, \;\; i = \overline{1,n}. \tag{4.99}$$

Поскольку функции $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_i,...,\varphi_n$ ортогональны и нормированы, то после упрощений из (4.99) получим систему *n* линейных алгебраических уравнений

$$C_i^{(n+1)} + C_{n+1}^{(n+1)} \int_a^b f_{n+1}\varphi_i dx = 0,\ \ i = \overline{1,n},$$

включающих $(n+1)$ неизвестных $C_i^{(n+1)}(i = \overline{1,n})$ и $C_{n+1}^{(n+1)}$. Необходимое (*n* + 1)-е уравнение получим из условия

$$\int_a^b \varphi_{n+1}^2 dx = 1.$$

В окончательном виде функция φ_{n+1} может быть представлена так [5]:

$$\varphi_{n+1} = \frac{f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(\int_a^b f_{n+1}\varphi_i dx)\varphi_i}{(\int_a^b (f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(\int_a^b f_{n+1}\varphi_i dx)\varphi_i)^2 dx)^{1/2}}. \qquad (4.100)$$

Выражение (4.100) может быть применено для построения ортонормированных функций φ_{n+1} при произвольном значении *n*=0,1,2… . Условие линейной независимости функций $f_1, f_2,...$ исходной системы принято в качестве обязательного.

Рассматриваемая система функций $f_1, f_2,...$ называется полной, если не существует функции $F(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_a^b \left|F\right|^2 dx \prec \infty \qquad (4.101)$$

и ортогональной одновременно ко всем функциям данной системы, т.е. такой, что

$$\int_a^b f_i F dx = 0,\ \ i = 1,2,... \ .$$

Очевидно, что система функций $\varphi_1,\varphi_2,...$ будет полной одновременно с системой функций $f_1, f_2,...$. Доказательство полноты получено для многих систем функций. Так, системы тригонометрических функций $\cos ix$, $\sin ix\ (i = 0,1,2,...)$ являются полными в промежутке $(0,2\pi)$, система целых положительных степеней *x*: 1, *x*, $x^2,...$ является полной в промежутке (0,1). Общим условием полноты ортонормированной системы функций $\varphi_1,\varphi_2,...$

является выполнение для любой квадратично-суммируемой, т.е. удовлетворяющей условию (4.101) функции $F(x)$, уравнения замкнутости [5]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = \int_a^b F dx, \tag{4.102}$$

где

$$\alpha_i = \int_a^b F\varphi_i dx.$$

Числа α_i, определяемые формулой (4.102), называются коэффициентами Фурье функции F по ортонормированной системе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Обобщением рассмотренного понятия ортогональности является понятие ортогональности функций с весом [5]. Пусть p – неотрицательная функция, не равная тождественно нулю и непрерывная на открытом интервале (a,b), причем интеграл $\int_a^b p dx$ существует и имеет положительное значение.

Пусть для функции F, заданной на $[a,b]$, интегралы

$$\int_a^b pF dx$$

и

$$\int_a^b p[F]^2 dx$$

существуют. В этом случае функцию F называют квадратично-суммируемой с весом p на $[ab]$. Частным случаем является квадратичная суммируемость функций с весом p=1, определенная условием (4.101).

Система функций $f_1, f_2, \ldots$ называется ортогональной с весом p на интервале $[a,b]$, если выполняется условие

$$\int_a^b p f_i f_k dx = 0 \text{ при } i \neq k. \tag{4.103}$$

Система функций $f_1, f_2, \ldots$ называется ортонормированной с весом p, если выполняются условия

$$\int_a^b p f_i f_k dx = \begin{array}{l} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k. \end{array} \tag{4.104}$$

Очевидно, что при $p = 1$ условия (4.103), (4.104) сводятся соответственно к условиям (4.94), (4.95).

Пусть система функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ является ортонормированной с весом p на $[a,b]$, а функция F квадратично-суммируемая на том же интервале. Тогда числа

$$\alpha_i = \int_a^b F\varphi_i p dx, \;\; i = 1,2,\ldots \tag{4.105}$$

называются коэффициентами Фурье функции F по данной системе. Выражение (4.105) совпадает с (4.102) при $p = 1$.

Системы функций, ортогональных с весом, находят в математической физике широкое применение.

Пусть на интервале $[a,b]$ имеется некоторая система функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \; \varphi_i, \ldots, \tag{4.106}$$

на основе которой сформирована последовательность функций

$$\varphi_n = C_1^{(n)}\varphi_1 + C_2^{(n)}\varphi_2 + \ldots + C_n^{(n)}\varphi_n, \;\; n = 1,2,\ldots \; . \tag{4.107}$$

В выражения (4.107) включены некоторые, выбранные из тех или иных соображений числа $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \ldots, C_n^{(n)}$, $n = 1,2,\ldots$. Пусть эти соображения основаны на обеспечении определенного соответствия между последовательностью (4.107) и некоторой функцией F на $[a,b]$, называемого сходимостью φ_n к F при $n \to \infty$. Если заранее предположить, что на основе одной и той же системы (4.106) могут быть построены последовательности, сходящиеся к различным функциям, заданным на $[a,b]$, то становится очевидным, что сходимость к той или иной заданной функции (если таковая возможна) зависит полностью от выбора чисел $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \ldots, C_n^{(n)}$.

В данном случае понятие «сходимость» рассматривается абстрактно, лишь как некоторый тип связи между последовательностью (4.107) и функцией F. В современной математике известны несколько типов сходимости. Перейдем к рассмотрению некоторых из них [5].

Подставим в функциональную последовательность (4.107) вместо текущего x некоторое фиксированное значение $x_0 \in [a,b]$ и превратим ее тем самым в числовую последовательность

$$\varphi_1(x_0), \;\; \varphi_2(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0), \ldots \; . \tag{4.108}$$

Функциональная последовательность (4.107) называется сходящейся в точке x_0, если числовая последовательность (4.108) сходится. Если последовательность функций сходится в каждой точке $x \in [a,b]$, то говорят,

что она сходится на сегменте $[a,b]$. При этом в каждой точке x сегмента $[a,b]$ существует определенный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$, который зависит от x и является некоторой функцией $\psi(x)$, определенной на $[a,b]$. Эту функцию называют пределом последовательности функций (4.107):

$$\varphi_n(x)\to\psi(x) \text{ при } n\to\infty,$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\psi(x) \text{ на } [a,b].$$

Последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется сходящейся к функции *F(x)* на сегменте $[a,b]$, если при каждом фиксированном значении *x* $\in[a,b]$ последовательность чисел $\varphi_n(x)$ сходится к числу $F(x)$, т.е. для каждого $\varepsilon\prec 0$ и каждого $x\in[a,b]$ найдется такое $N=N(\varepsilon,x)$, зависящее от ε и от x, что будет

$$|\varphi_n(x)-F(x)|\prec\varepsilon$$

при каждом $n\succ N(\varepsilon,x)$.

Такой тип сходимости часто называют обычной сходимостью.

Последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся к функции *F(x)* на сегменте $[a,b]$, если для каждого $\varepsilon\succ 0$ найдется такое $N=N(\varepsilon)$, зависящее от ε и не зависящие от *x*, что отклонение $\varphi_n(x)$ от *F(x)* удовлетворяет неравенству

$$|\varphi_n(x)-F(x)|\prec\varepsilon$$

при каждом $n\succ N(\varepsilon)$.

Характером сходимости функциональной последовательности или ряда, полученных в ходе решения граничной задачи, в существенной мере определяется качество решения, которое в большинстве случаев зависит от скорости убывания модулей коэффициентов при координатных состояниях в зависимости от их порядкового номера *n* в функциональной последовательности. Например, в случае равномерной сходимости функциональной последовательности $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n\ldots$ модули коэффициентов α_n часто уменьшаются, как $1/n^2$, т.е. десятый коэффициент в 100 раз меньше первого и в 4 раза меньше пятого, а значит, «вклад» в окончательный результат десятого $\alpha_{10}f_{10}$ и последующих членов последовательности пренебрежимо мал по сравнению с несколькими первыми по порядку членами; соответственно можно оценить сходимость полученного приближенного решения. Если какой-либо искомый компонент

напряженно-деформированного состояния выражается первой производной от данной последовательности, которая выражается как $\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + ... + n\alpha_n x^{n-1} ...$, то качество решения относительно этого компонента существенно ухудшается, для получения удовлетворительного результата необходимо удержать значительно большее число членов; вторая производная не сходится вообще.

В ряде случаев приходится ограничиваться сходимостью функциональной последовательности или ряда к искомой функции в некотором интегральном смысле, называемой сходимостью в среднем.

Последовательность функций (4.107) называется сходящейся в среднем к функции $F(x)$ на $[a,b]$, если выполняется условие

$$\int_a^b |\varphi_n - F|^2 dx \to 0 \text{ при } n \to +\infty. \qquad (4.109)$$

Рассмотрим первые n функций (фиксированный отрезок)

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$$

системы, ортогональной с весом p и нормированной на $[a,b]$. Линейная комбинация функций

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + ... + C_n\varphi_n \qquad (4.110)$$

с произвольными числовыми коэффициентами $C_i, i = \overline{1,n}$, называется полиномом n-го порядка по данной ортонормированной системе. Пусть функция F интегрируема на $[a,b]$ и полином

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + ... + \alpha_n\varphi_n \qquad (4.111)$$

включает коэффициенты Фурье $\alpha_i, i = \overline{1,n}$, этой функции по рассматриваемой системе. Доказано [5], что полином (4.111) с коэффициентами Фурье из всех полиномов (4.110) с самыми различными значениями C_i имеет наименьшее квадратичное отклонение от функции F на отрезке $[a,b]$, т.е. величина

$$\rho^2 = (F, \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i) = \int_a^b (F - \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i)^2 p dx$$

достигает своего абсолютного минимума [5] при $C_i = \alpha_i, i = \overline{1,n}$.

Аппарат рядов Фурье по ортогональным и ортонормированным функциям одной или нескольких переменных широко применяется в теории и практике приближенных методов решения граничных задач. Специалистам приходится иметь дело с еще одним типом сходимости – слабой сходимостью.

Последовательность функций $f_1, f_2, ..., f_n, ...$, определенных и интегрируемых на (a,b), слабо сходится к функции f в классе функций, непрерывных на (a,b), если для любой непрерывной и ограниченной на (a,b) функции ψ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi f_n dx = \int_a^b \psi f dx.$$

Связь между рассмотренными типами сходимости изучена в [5]. Так, если последовательность (4.107) равномерно сходится на $[a,b]$ к функции F, то имеет место также обычная сходимость, сходимость в среднем, слабая сходимость в классе непрерывных и ограниченных функций данной последовательности к функции F. Таким образом, из равномерной сходимости следует обычная сходимость, сходимость в среднем и слабая сходимость. Слабая сходимость следует также из сходимости в среднем.

Из обычной сходимости сходимость в среднем не следует. Доказано также, что равномерная и обычная сходимости из сходимости в среднем не следуют.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых полных систем ортогональных функций, используемых в качестве основы для построения координатных и определяющих состояний.

Функция $f(t)$ одной переменной t называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, называемое ее периодом, что $f(t+T) = f(t)$ при всех значениях $-\infty \prec x \prec +\infty$.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$ с периодом $T = 2\pi$.

Система функций, ортогональных на отрезке $[-l,l]$,

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, ...$$

называется основной тригонометрической системой [53].

Если функция $F(x)$ интегрируема на отрезке $[-l,l]$, то ей можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$F(x) \approx \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \beta_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad (4.112)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$\alpha_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)dx;$$

$$\alpha_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

$$\beta_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \qquad (4.113)$$

Коэффициенты, вычисляемые по формулам (4.113), называются коэффициентами Фурье функции F по основной тригонометрической системе.

Функция $F(x)$, заданная на отрезке $[-l,l]$, называется четной, если $F(-x)=F(x)$ при всех $x\in[-l,l]$.

Функция $F(x)$, заданная на отрезке $[-l,l]$ называется нечетной, если $F(-x)=-F(x)$ при всех $x\in[-l,l]$.

Поскольку функции $\frac{1}{2},\cos\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},...,\cos\frac{k\pi x}{l},...,$ являются четными на отрезке $[-l,l]$, то коэффициенты Фурье $\alpha_0,\alpha_k,k=1,2,...,$ нечетной функции $F(x)$ равны нулю и ее ряд Фурье принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{\sin k\pi x}{l}. \qquad (4.114)$$

Ряд Фурье четной функции $F(x)$ в силу того, что функции $\sin\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{2\pi x}{l},...,\sin\frac{k\pi x}{l},...$ являются нечетными, имеет вид:

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l}. \qquad (4.115)$$

Всякую непериодическую функцию, заданную на отрезке $[0,l]$, можно продолжить на отрезок $[-l,0]$ как четную или нечетную, а затем разложить в ряд Фурье вида соответственно (4.115) или (4.114).

Важным для дальнейшего является определение характера сходимости тригонометрических рядов Фурье и связанных с этим условий для аппроксимируемых функций.

С этой целью приведем здесь два определения [53].

1. Функция $F(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a,b]$, если она непрерывна всюду на этом отрезке, исключая конечное число точек разрыва первого рода. Такая функция имеет в каждой точке *x* отрезка $[a,b]$ конечные правое и левое предельные значения:

$$F(x+0)=\lim_{\substack{r\to 0\\ r\succ 0}}F(x+r),\quad F(x-0)=\lim_{\substack{r\to 0\\ r\succ 0}}F(x-r),$$

а в концах отрезка $[a,b]$ – конечные предельные значения $F(a+0)$ и $F(b-0)$.

2. Кусочно-непрерывную на $[a,b]$, $a\prec b$, функцию $F(x)$ называют кусочно-гладкой на $[a,b]$, если $F'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом отрезке, кроме, может быть, конечного числа точек, в которых, однако, существуют конечные правое и левое предельные значения:

$$F'(x+0)=\lim_{\substack{k\to 0\\ k\succ 0}}F'(x+r),\quad F'(x-0)=\lim_{\substack{r\to 0\\ r\succ 0}}F'(x-r).$$

При этом предполагается также, что существуют конечные предельные значения $F'(a+0)$ и $F'(b-0)$ в концах отрезка $[a,b]$.

Сформулируем теперь основную теорему о сходимости тригонометрического ряда Фурье:

Теорема. *Если функция $F(x)$ является кусочно-гладкой на отрезке $-l\prec x\prec l$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке x этого отрезка, причем для суммы*

$$S(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\beta_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

этого ряда выполняются равенства

$$S(x)=F(x),\ \textit{если}\ -l\prec x\prec l\ \textit{и}\ x$$

является точкой непрерывности $F(x)$;

$$S(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2},\ \textit{если}\ -l\prec x\prec l\ \textit{и}\ x$$

является точкой разрыва $F(x)$;

$$S(-l)=S(l)=\frac{F(-l+0)+F(l-0)}{2}.$$

Эта теорема имеет важное значение для анализа качества приближенного решения регионально-проекционным методом и методом определяющих состояний, так как коэффициенты последовательностей координатных состояний, сформированных на основе ортонормированных систем функций, при увеличении их числа стремятся к соответствующим коэффициентам Фурье.

Как отмечалось выше, при применении рядов Фурье для выражения основных функций состояния, выражающего решение граничной задачи (обычно это перемещения), приходится эти ряды дифференцировать для выражения других компонентов. Поэтому качество применяемого ряда Фурье характеризуется не только его сходимостью, но и возможностью его

дифференцирования (т.е. сходимостью производных этого ряда) необходимое число раз.

Возможность почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье зависит от характера изменения его коэффициентов α_k и β_k с увеличением значения k. Известно [5], что если периодическая функция $F(x)$ имеет разрывы первого рода, то ее коэффициенты Фурье при $k \to \infty$ будут порядка $\frac{1}{k}$.

Анализ сходимости применяемых рядов Фурье может существенно упроститься, если известны заранее свойства компонентов искомого напряженно-деформированного состояния. В этом случае может оказаться полезной следующая теорема.

Теорема. *Если периодическая непрерывная функция* $F(x)$ *имеет непрерывные производные до* $(n-1)$*-го порядка включительно, а производная* n*-го порядка есть кусочно-гладкая функция, то коэффициенты* α_k, β_k *функции* $F(x)$ *будут порядка не ниже* $\frac{1}{k^{n+1}}$.

Эффективное применение при реализации проекционных методов находят степенные ортогональные полиномы, причем особое место среди них занимают ортогональные полиномы Якоби.

Полиномами Якоби называют полиномы вида [19]:

$$G_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \times$$

$$\times \frac{d^n}{dx^n}((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}), \alpha, \beta \succ -1. \qquad (4.116)$$

Многочлены Якоби ортогональны на отрезке [–1,1] с весом

$$p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}. \qquad (4.117)$$

При применении различных систем координат может оказаться необходимым использование полиномов Якоби, ортогональных с весами того или иного вида. Для построения полиномов с необходимыми свойствами, в частности ортогональных с заданным весом на основе формулы (4.116), подбираются соответствующие значения величин α и β.

Значениям $\alpha = 0, \beta = 0$ в формуле (4.116) соответствуют полиномы Лежандра $L_n(x)$, ортогональные с весом $p(x) = 1$. Данная формула преобразуется в этом случае в формулу Родрига

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n). \qquad (4.118)$$

Приведем первые восемь полиномов Лежандра

$$L_0(x)=1;$$
$$L_1(x)=x;$$
$$L_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1);$$
$$L_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x);$$
$$L_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3);$$
$$L_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x);$$
$$L_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5);$$
$$L_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x).$$

При применении полиномов Лежандра могут оказаться полезными следующие соотношения [19]:

$$\int_{-1}^{1}L_m(x)L_n(x)dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n;\\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } m=n;\end{cases} \tag{4.119}$$

$$\int_{-1}^{1}x^kL_n(x)dx=0 \text{ при } k=\overline{0,n-1}; \tag{4.120}$$

$$\int_{0}^{1}x^kL_n(x)dx=\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)(k+n-3)\cdots(k-n+3)}. \tag{4.121}$$

Полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, являются частным случаем полиномов Якоби при $\alpha=\beta=-\dfrac{1}{2}$. Первые восемь полиномов Чебышева первого рода:

$$T_0(x)=1;$$
$$T_1(x)=x;$$
$$T_2(x)=2x^2-1;$$
$$T_3(x)=4x^3-3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x;$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1;$$
$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x.$$

Полиномы Чебышева второго рода $U_n(x)$ также являются частным случаем полиномов Якоби при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ и ортогональны на отрезке [–1,1] с весом $\sqrt{1-x^2}$.

$$U_0(x) = 1;$$
$$U_1(x) = 2x;$$
$$U_2(x) = 4x^2 - 1;$$
$$U_3(x) = 8x^3 - 4x;$$
$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1;$$
$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x;$$
$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1;$$
$$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x.$$

Полиномы Лагерра $P_n(x)$, ортогональные с весом $p(x) = e^{-x}$ на интервале $[0,+\infty]$, находят применение при решении граничных задач в полубесконечных областях.

$$P_0(x) = 1;$$
$$P_1(x) = -x + 1;$$
$$P_2(x) = x^2 - 4x + 2;$$
$$P_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6;$$
$$P_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24;$$
$$P_5(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120;$$
$$P_6(x) = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x = 720;$$
$$P_7(x) = -x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29400x^3 + 52920x^2 - 35280x + 5040.$$

Обобщенные полиномы Лагерра ортогональны с весом $p(x) = x^{\alpha}e^{-x}(\alpha \succ -1)$ на том же интервале [19].

Полиномы $H_n(x)$, ортогональные на $[-\infty,+\infty]$ с весом $p(x)=e^{-x^2}$, называются полиномами Эрмита:

$$H_0(x)=2;$$
$$H_1(x)=2x;$$
$$H_2(x)=4x^2-2;$$
$$H_3(x)=8x^3-12x;$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12;$$
$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120;$$
$$H_6(x)=64x^6-480x^4+720x^2-120;$$
$$H_7(x)=128x^7-1344x^5+3360x^3-1680.$$

Условия сходимости рядов Фурье по многочленам Якоби определяются теоремой [19]:

Теорема. *Если F(x) имеет на* $[a,b]$ *непрерывную производную порядка* n, *где* n *– наименьшее целое число, большее или равное* $2max(\alpha,\beta)+2,$ а $max(\alpha,\beta)\geq-\frac{1}{2},$ *то ее ряд Фурье по многочленам Якоби равномерно сходится к* $F(x)$.

В частности, для многочленов Лежандра *n*=2, а для многочленов Чебышева первого рода *n*=1. Доказано, что равномерная сходимость многочленов Чебышева первого рода будет иметь место, если выполняется лишь условие ограниченности первой производной.

Для многочленов Чебышева второго рода в соответствии с теоремой *n* = 3, однако данное условие также может быть ослаблено [2].

Для сходимости рядов Фурье по многочленам Лаггера достаточно потребовать, чтобы функция *F(x)* была кусочно-гладкой на $[0,\infty]$ и сходился интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{1}{4}}|F(x)|dx.$$

При этом в точках непрерывности ряд сходится к *F(x),* а в точках разрыва – к значению $\frac{1}{2}(F(x+0)+F(x-0)).$

Первое требование сохраняется и для многочленов Эрмита. Кроме того, должен быть ограниченным интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} F^2(x) dx.$$

Часто удобно применять смещенные многочлены Якоби, ортогональные на отрезке [0,1].

Для построения способом разделения переменных ортогональных функций двух или трех переменных применительно к различным системам координат необходимы многочлены, ортогональные с весом различного вида. Так, в декартовой системе координат элемент объема выражается $dxdydz$, в цилиндрической – $rdrd\varphi dz$, в сферической – $r^2 \sin\theta drd\theta dy$, соответственно в цилиндрической системе коодинат целесообразно применять функции независимой переменной *r,* ортогональные с весом *r*, в сферической – функции *r,* ортогональные с весом r^2, и функции θ, ортогональные с весом $\sin\theta$. Многочлены Якоби эффективно применяются в качестве ортогональных систем функций всех рассмотренных переменных, кроме переменной θ в сферической системе координат.

В декартовой системе координат удобно применять полиномы Лежандра, ортогональные с весом 1 в интервале $-1 \le x \le 1,$ такие многочлены с четными индексами *n* включают только четные и с нечетными – только нечетные степени *x.* В случаях, когда заранее известен характер аппроксимируемых функций, для выражения четных функций целесообразно применять многочлены P_n только с четными значениями *n* и, соответственно, для нечетных функций – многочлены Лежандра с нечетными значениями *n.*

В качестве ортогональных в интервале $0 \le x \le 1$ с весом 1 функций могут быть применены смещенные многочлены Лежандра [19].

Многочлены Якоби $Q_n^{(1)} = Q_n(2,2,x)$ и $Q_n^{(2)} = Q_n(3,3,x),$ ортогональные в интервале $0 \le x \le 1$ с весом соответственно x и x^2, применены для решения задач в цилиндрической и сферической системах координат (при замене переменной *x* на *r*).

Для решения симметричных задач в цилиндрической системе координат может быть применена система функций $F_n^{(1)}(x),$ равных нулю при $x = 0,$ и ортогональных с весом x в промежутке $0 \le x \le 1.$ Многочлены $F_n^{(1)}(x)$ получены ортогонализацией с весом *x* в промежутке (0,1) функций $Q_n^{(1)}(x) - Q_{n-1}^{(1)}(x), n = 1,2,...$. Отметим, что в силу особенностей многочленов Якоби вычисление интегралов от произведений таких функций и их величин при различных значениях аргумента следует производить с повышенной точностью. Применение для построения координатных состояний ненормированных ортогональных систем и полученных на их основе

ортонормированных функций приводит при всех прочих равных условиях к одинаковым результатам. Так, коэффициенты выражений по ортогональной системе функций могут быть получены умножением коэффициентов по ортонормированной системе умножением на соответствующие нормы.

Вернемся еще раз к важнейшей проблеме способов оценки степени точности результатов приближенного решения граничных задач проекционными методами. Чаще всего в приложениях регионально-проекционного метода используются два способа оценки приближенных решений (при условии, что сходимость процесса приближенного решения в заданном смысле всегда обеспечена).

1. Широко применяемый в приближенных методах анализ относительной сходимости, который заключается в сравнении результатов, полученных при удержании различного, возрастающего по выбранному закону числа координатных состояний или подобластей. Принято считать, что решение достигло требуемой точности, если абсолютная или, чаще, относительная разница между результатами двух следующих одним за другим приближений – относительная невязка – становится меньше некоторой наперед заданной величины. В частности, может быть проведена оценка относительной сходимости величин рассматриваемых в задаче компонентов искомого состояния в выбранных характерных точках области.

В общем случае применения для построения координатных состояний ортонормированных функций может оказаться эффективным анализ относительной сходимости значений коэффициентов выражений (4.82), (4.83), пределом которых при $n_{\xi i} \to \infty, n_{\xi k} \to \infty$ являются соответствующие коэффициенты Фурье. Такой анализ не требует обработки результатов решения разрешающей системы. Допустим, что можно заранее в области Ω_i выделить группу коэффициентов (4.82), решающим образом влияющих на окончательный результат. Тогда незначительное изменение этих коэффициентов во всех последующих, начиная с некоторого *n*-го, приближениях может служить признаком достижения необходимой точности в *n*-м приближении. Коэффициенты Фурье с увеличением их порядкового номера стремятся к нулю, и обычно решающее влияние на результат в каждой подобласти оказывают начальные члены выражений (4.82).

2. Как уже отмечалось, на координатные состояния в регионально-проекционном методе не накладываются заранее какие-либо ограничения, вытекающие из условий задачи, в том числе однородные или неоднородные граничные условия для основных функций. Если каждая из функций $f_{\xi j}^{(i)}$ в подобласти Ω_i не удовлетворяет заранее граничным условиям для функций u_ξ, то в распоряжении вычислителя при анализе результатов приближенного решения оказываются точные значения этих функций на соответствующих

частях границы $S_{pi}^{(P)}$. То же относится и к другим компонентам искомого состояния, входящим в условия задачи, не выполняемые каждым из применяемых координатных состояний.

Результаты сопоставления полученных приближенных значений компонентов с их точными значениями в тех частях области, где последние заданы условиями задачи, рассматриваются в качестве показателя качества приближенного решения во всей заданной области. При этом можно исходить из характера задачи и особенностей используемых систем функций. Известно, что погрешность разложения функций по многочленам Лежандра не вполне одинаково распределена по интервалу $1 \le x \le 1$ и увеличивается к его крайним точкам. Исходя из этого, можно при применении многочленов Лежандра рассматривать погрешность удовлетворения условиям на границе как максимальное значение погрешности полученных результатов.

В ряде случаев определенное представление о характере решения можно составить на основе оценки быстроты убывания коэффициентов выражений (4.82) по ортонормированным системам функций. При проведении такого анализа в случае применения ненормированных ортогональных систем вычисленные коэффициенты целесообразно разделить на норму.

Как и в других прямых методах, основанных на соотношениях или функционалах, в которых компоненты искомого состояния входят под знак определенного интеграла, основным типом сходимости для искомых функций является сходимость в среднем. При этом для компонентов, включающих производные основных неизвестных более высоких порядков, качество решения ухудшается и сходимость в каждой точке может не иметь места. В этом случае могут быть использованы оценки сходимости в том или ином интегральном смысле.

Так, о сходимости процесса вычислений может свидетельствовать убывание модулей значений интегралов от взвешенных невязок приближенного решения по соответствующим областям по мере увеличения числа членов (4.82):

$$\Delta_{ji}^{(k)}(n_{gi}) = \int_{\Omega_i} (K_{ji} - \sum_{g=1}^{3} A_{jg}^{(i)} u_{gi}(n_{gi})) v_j^{(k)} d\Omega; \;\; j = 1,2,3;$$

$$\Delta_{pi}^{(P)}(n_{gi}) = \int_{S_{pi}^{(P)}} (\theta_{pi} - \sum_{g=1}^{3} C_{pig} u_{gi}(n_{gi})) v_p^{(P)} dS; \;\; p = 1,2,...,r_1;$$

$$\Delta_{pi}^{(F)}(n_{gi}) = \int_{S_{pi}^{(F)}} (\Phi_{pi} - \sum_{g=1}^{3} B_{pig} u_{gi}(n_{gi})) v_p^{(F)} dS; \;\; p = 1,2,...,r_1, \qquad (4.122)$$

где $v_j^{(k)}, v_p^{(P)}, v_p^{(F)}$ – выбранные из тех или иных соображений весовые функции. В случае, например, весовой функции $v_j^{(k)}$, равной единице в некоторой, особенно интересующей вычислителя, части $\Omega_i^{(1)}$ подобласти Ω_i, и нулю в области $\Omega_i - \Omega_i^{(1)}$, может быть проведен анализ убывания усредненной невязки в области $\Omega_i^{(1)}$.

При применении весовых функций, равных единице всюду в соответствующей области, выражения (4.122) принимают вид:

$$\Delta_{ji}^{(k)}(n_{gi}) = \int_{\Omega_i} (K_{ji} - \sum_{g=1}^{3} A_{jg}^{(i)} u_{gi}(n_{gi}))d\Omega;\ \ j = 1,2,3;$$

$$\Delta_{pi}^{(P)}(n_{gi}) = \int_{S_{pi}^{(P)}} (\theta_{pi} - \sum_{g=1}^{3} C_{pig} u_{gi}(n_{gi}))dS;\ \ p = 1,2,...,r_1;$$

$$\Delta_{pi}^{(F)}(n_{gi}) = \int_{S_{pi}^{(F)}} (\Phi_{pi} - \sum_{g=1}^{3} B_{pig} u_{gi}(n_{gi}))dS;\ \ p = 1,2,...,r_1.$$

Если в областях $\Omega_i, S_{pi}^{(P)}, S_{pi}^{(F)}$ соответствующий компонент K_{ji}, P_{pi}, F_{pi}, заданный условиями задачи, есть постоянная величина, то о качестве решения можно судить, сравнивая заданное значение с соответствующими относительными величинами:

$$\delta_{ji}^{(k)}(n_{gi}) = \frac{\int_{\Omega_i} (\sum_{g=1}^{3} A_{jg}^{(i)} u_{gi}(n_{gi}))d\Omega}{\Omega_i};\ \ j = 1,2,3;$$

$$\delta_{ji}^{(P)}(n_{gi}) = \frac{\int_{S_{pi}^{(P)}} (\sum_{f=1}^{3} C_{pig} u_{gi}(n_{gi}))dS}{S_{pi}^{(P)}};\ \ p = 1,2,...,r_1;$$

$$\delta_{ji}^{(F)}(n_{gi}) = \frac{\int_{S_{pi}^{(F)}} (\sum_{g=1}^{3} B_{pig} u_{gi}(n_{gi}))dS}{S_{pi}^{(F)}};\ \ p = 1,2,...,r_1.$$

Выше более детально был рассмотрен первый способ уточнения приближенного решения увеличением числа координатных функций в каждой из выбранных подобластей при неизменном их числе. Второй способ осуществляется увеличением числа подобластей при сохранении неизменным на всех этапах приближения числа координатных функций в выражениях

(4.82), (4.83). Третий способ может быть реализован комбинацией первых двух, исходя из характера заданной области, граничных условий, анализа результатов решения, полученного на предыдущем этапе приближения.

Как показывает опыт применения регионально-проекционного метода, при разделении заданной области на подобласти следует стремиться к минимальному их числу и возможно более простой их форме, а уточнение решения проводить увеличением количества применяемых в каждой из них координатных состояний. В случае, если заданная область имеет простую форму и условия задачи позволяют эффективно применить для построения определяющих состояний стандартные системы функций, деление на подобласти является нецелесообразным.

Минимальное число координатных состояний в каждой из подобластей должно быть таким, чтобы на их основе можно было построить приближенное решение с ненулевыми компонентами K_1, K_2, K_3, если соответствующие компоненты искомого состояния не равны нулю. В противном случае данное требование может быть нарушено.

Увеличение числа подобластей на некотором этапе приближения может оказаться необходимым, если на предыдущих этапах обнаружены признаки потери устойчивости процесса решения, например при применении степеней x, y, z выше четвертой.

Процесс реализации всех этапов приближения для каждой схемы разделения области, в том числе анализа качества решения, может быть полностью автоматизирован на основе матричной формы метода определяющих состояний и специальных алгоритмов решения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений.

4.11. О классификации проекционных методов

Регионально-проекционный метод является наиболее широким обобщением проекционных методов, что обусловлено следующими его основными особенностями:

– для построения координатных и определяющих состояний могут быть применены различные системы функций;

– каждое из координатных и определяющих состояний может не удовлетворять основным дифференциальным уравнениям и всем граничным условиям на любой части границы, включая условия совместности на границе между конечными элементами (т.е. в данном методе проблема обеспечения условий совместности вообще не существует);

– при решении задач с неоднородными граничными условиями нет необходимости предварительно приводить их к однородным;

– в рассматриваемом классе граничных задач одни и те же системы определяющих и координатных состояний могут применяться независимо от заданных граничных условий всех основных типов и вида правых частей основных дифференциальных уравнений.

При рассмотрении всей области в целом без деления на подобласти регионально-проекционный метод сводится к «классическому» методу определяющих состояний, впервые предложенному Б. Лисицыным в работе [21]; после выхода в свет работы Финлайссона [61] этот метод чаще именуется в литературе методом взвешенных невязок.

В *первом частном случае метода определяющих состояний* в качестве определяющих и координатных применяется одна и та же система возможных состояний, не удовлетворяющих ни одному из условий задачи. Первый частный случай оказывается эффективным при решении многих классов задач, так как применение одной и той же системы возможных состояний естественно приводит к уменьшению трудоемкости подготовительных операций. В то же время применение различных систем возможных состояний в качестве координатных и определяющих при умелом их подборе приводит к упрощению подынтегральных выражений и процесса формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, увеличению числа нулевых элементов матрицы коэффициентов при неизвестных этой системы.

Как в общем, так и в первом частном случае координатные и определяющие состояния не удовлетворяют ни одному из условий основных типов граничных задач, что существенно упрощает процесс их построения и способствует созданию универсальных комплексов программ, позволяющих полностью автоматизировать весь процесс решения.

Если в первом частном случае возможные состояния, применяемые в качестве координатных и определяющих, удовлетворяют главным (по терминологии теории вариационных методов) граничным условиям задачи, то такой *второй частный случай метода определяющих состояний* приводит к тем же результатам, что и метод Ритца [34].

Метод Бубнова–Галеркина является *третьим частным случаем метода определяющих состояний*, в котором в качестве определяющих и координатных применяются одни и те же возможные состояния, удовлетворяющие всем полностью однородным граничным условиям.

Следует отметить, что основная идея метода Бубнова–Галеркина более универсальна и применима в тех случаях, когда справедливость соотношений взаимности, ограничивающих область применимости метода определяющих состояний, не доказана.

Проблемы теории и численной реализации метода Бубнова – Галеркина хорошо изучены, качество решения, как правило, соответствует необходимым требованиям, однако построение координатных состояний,

удовлетворяющих всем граничным условиям, связано при решении многих задач с существенными трудностями.

Если основные дифференциальные уравнения задачи являются однородными, а определяющие и координатные состояния, выражаемые одними и теми же возможными состояниями, удовлетворяют этим уравнениям, то придем к *четвертому частному случаю метода определяющих состояний*, для многих классов граничных задач совпадающему с известным методом Трефтца. Данный частный случай может привести к существенному упрощению процесса вычислений при решении задач, в которых заданная сложная область ограничена границей, состоящей из простых частей.

Среди других частных случаев метода определяющих состояний для задач с однородными граничными условиями отметим его разновидность, в которой координатные состояния удовлетворяют всем заданным граничным условиям, определяющие же состояния не совпадают с координатными и являются B-базисом подпространства T возможных состояний, удовлетворяющих полностью однородным граничным условиям, или B-базисом любого другого подпространства, включающего T, вплоть до всего пространства H возможных состояний. Данный *пятый частный случай метода определяющих состояний* эквивалентен обобщению Г. Петрова метода Бубнова–Галеркина.

Можно показать [34], что применение специальных типов возможных состояний приводит к разновидностям метода определяющих состояний, эквивалентным методам разделения области, коллокаций, моментов, методу наименьших квадратов.

Особое место среди разновидностей регионально-проекционного метода занимает обобщенный проекционно-сеточный метод [34].

4.12. Обобщенный проекционно-сеточный метод

Сформулируем дискретную форму регионально-проекционного метода, в которой в качестве неизвестных рассматриваются значения искомых функций в некоторых точках (узлах) заданной области Ω.

Пусть рассматривается общий случай смешанной граничной задачи математической физики (п. 4.3) с заданной системой основных дифференциальных уравнений (4.21) и граничными условиями (4.24), (4.25). В области Ω выбрано общее число M узлов, значения искомой функции u_ξ неизвестны в M_ξ из них ($M_\xi \le M$). Пронумеруем узлы. Пусть в i-м узле значение функции u_ξ неизвестно. В области Ω выделим подобласть

$\Omega_i^{(\xi)}$, которой принадлежит узел $M_i^{(\xi)}$ из принятого набора M узлов, в том числе i-й узел; будем называть его основным для подобласти $\Omega_i^{(\xi)}$. Основной узел может находиться как внутри, так и на границе соответствующей подобласти.

Проделав такую же операцию для каждой из функций u_1, u_2, u_3 в каждом из узлов, в котором их значение неизвестно, сформируем число $m = \sum_{\xi=1}^{3} M_\xi$ подобластей, равное числу неизвестных значений искомых функций в выбранном наборе узлов. Каждая из подобластей может быть отнесена к тому или иному типу в соответствии с ее формой, числом узлов и в некоторых случаях размерами. Для определения этих неизвестных необходимо составить и решить разрешающую систему m линейных алгебраических уравнений. Каждое из таких уравнений соответствует определенному неизвестному и есть результат выполнения операций над компонентами искомого и определяющего состояний в соответствующей подобласти по определенному алгоритму.

Характерной особенностью метода, в отличие от регионально-проекционного, является то, что подобласти могут пересекаться, т.е. узел, принадлежащий одной из подобластей, может быть не только граничным, но и внутренним узлом другой подобласти.

В одной и той же подобласти даже для одной и той же неизвестной функции роль основного могут играть несколько узлов. Каждому из основных узлов соответствует определяющее состояние, особенности методики построения которого рассматриваются в п. 4.14. Таким образом, всякое уравнение разрешающей системы соответствует определенному комплексу характеристик, в том числе типу подобласти, положению узла, играющего роль основного, искомой функции и определяющему состоянию. Такой комплекс в дальнейшем будем объединять понятием «конечный элемент».

Пусть подобласть $\Omega_i^{(\xi)}$ включает $M_i^{(\xi)}$ узлов, из них $M_{is}^{(\xi)}$ узлов расположены на ее границе $S_i^{(\xi)}$. Для удобства проведем локальную нумерацию всех узлов. С учетом положения основного узла и типа искомой функции строим определяющее состояние $R_i^{(\xi)}$ канонической системы с компонентом $u'_{i\xi} = Q_i^{(\xi)}$ и двумя другими функциями $u'_{i\xi}$, равными нулю. Все прочие необходимые компоненты $R_i^{(\xi)}$ выражаем в соответствии с методикой, описанной в п. 4.3. Функция $Q_i^{(\xi)}$ должна быть подобрана таким образом, чтобы на границе подобласти по крайней мере один из каждой пары

энергетически соответствующих компонентов не был равен нулю. Поскольку основой алгоритма является интегральное соотношение, то исключение допускается лишь для множества элементов границы меры нуль, в том числе в отдельных узлах, принадлежащих границе.

Для области $\Omega_i^{(\xi)}$ запишем интегральное соотношение теоремы о взаимности работ:

$$\int\limits_{\Omega_i^{(\xi)}} (K'_{i\xi 1}u_1 + K'_{i\xi 2}u_2 + K'_{i\xi 3}u_3)d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int\limits_{S_i^{(\xi)}} P_{i\xi p}F_p dS =$$

$$= \int\limits_{\Omega_i^{(\xi)}} (K_1 u'_{i1} + K_2 u'_{i2} + K_3 u'_{i3})d\Omega + \sum_{p=1}^{r_2} \int\limits_{S_i^{(\xi)}} P_p F'_{i\xi p} dS. \qquad (4.123)$$

Интегралы, входящие в соотношение (4.123), выразим с помощью формул приближенного интегрирования по области $\Omega_i^{(\xi)}$ и границе $S_i^{(\xi)}$. Пусть для некоторой функции f такие формулы можно записать в виде:

$$\int\limits_{\Omega_i^{(\xi)}} f d\Omega = \sum_{j=1}^{M_i^{(\xi)}} d_j f_j;$$

$$\int\limits_{S_i^{(\xi)}} f dS = \sum_{M_{iS}^{(\xi)}} g_j f_j \ , \qquad (4.124)$$

где d_j, g_j – числа, соответствующие применяемому типу формулы. Пользуясь формулами (4.124), интегралы, входящие в соотношение (4.123), представим в виде:

$$\int\limits_{\Omega_i^{(\xi)}} K'_{i\xi k}u_k d\Omega \cong \sum_{j=1}^{M_i^{(\xi)}} d_j K'_{i\xi kj}u_{kj};$$

$$\int\limits_{\Omega_i^{(\xi)}} K_k u'_{ik} d\Omega \cong \sum_{j=1}^{M_i^{(\xi)}} d_j K_{kj}u'_{ikj}; \ k=1,2,3; \qquad (4.125)$$

$$\int\limits_{S_i^{(\xi)}} P_{i\xi p}F_p dS \cong \sum_{M_{iS}^{(\xi)}} g_i P'_{i\xi pj}F_{pj};$$

$$\int\limits_{S_i^{(\xi)}} P_p F'_{i\xi p} dS \cong \sum_{M_{iS}^{(\xi)}} g_j P_{pj}F'_{i\xi pj}, \ p=1,2,\ldots, \ r_2. \qquad (4.126)$$

Интегральное соотношение (4.123) заменим теперь уравнением

$$A^*_\xi(u_1,u_2,u_3) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{M_i^{(\xi)}} d_j K'_{i\xi kj}u_{kj} + \sum_{p=1}^{r_2}\sum_{M_{iS}^{(\xi)}} g_j P'_{i\xi pj}F_{pj} -$$

$$-\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{M_i^{(\xi)}} d_j K_{kj} u'_{ikj} - \sum_{p=1}^{r_2}\sum_{M_{iS}^{(\xi)}} g_j P_{pj} F'_{i\xi pj} = 0,\ k=1,2,3. \qquad (4.127)$$

Вычислим значения всех компонентов определяющего состояния в узлах области $\Omega_i^{(\xi)}$ и подставим их в уравнение (4.123). Если значения чисел d_j, g_j и компонентов определяющего состояния во всех узлах инвариантны относительно положения подобласти в системе координат, то получим выражение для дискретного оператора A_k^* метода, соответствующего уравнениям (4.21), формулам (4.22), (4.23), типу конечного элемента и применяемым формулам приближенного интегрирования.

Выразим компоненты (кроме перемещений) искомого состояния R_g в узлах границы $S_i^{(\xi)}$ через перемещения в узлах $\Omega_i^{(\xi)}$. Эти выражения и оператор A_k^* являются основой для составления уравнений разрешающей системы. Переходя к конкретному конечному элементу, устанавливаем соответствие между номерами его узлов и локальными номерами узлов в операторе. Все заданные условиями задачи значения компонентов искомого состояния в узлах подставим в оператор (4.127). Если компонент в некотором узле на границе не задан, выражаем его через перемещения в узлах подобласти $\Omega_i^{(\xi)}$. После приведения подобных получим уравнение разрешающей системы.

Рассматриваемая последовательность действий реализуется для всех выбранных типов конечных элементов. В результате в общем случае получим систему уравнений с несимметричной разреженной матрицей коэффициентов при неизвестных, причем относительное число нулевых коэффициентов возрастает по мере увеличения числа подобластей.

4.13. Выражение компонентов искомого состояния в обобщенном проекционно-сеточном методе

В интегральное соотношение (4.123) входят компоненты искомого состояния, не заданные условиями задачи в соответствующих частях области или границы. В обычных граничных задачах в каждой точке границы задан лишь один из каждой пары энергетически соответствующих компонентов.

В данном методе все компоненты, кроме перемещений, в тех точках, где значения не заданы, целесообразно выражать через перемещения в узлах. Рассмотрим один из приемов, позволяющих получить такие выражения. Его реализация сводится к следующему:

– если рассматривается конечный элемент в n-мерной области, включающий m узлов, то каждый из компонентов вектора перемещений выражается алгебраическим полиномом по n независимым переменным, включающим m членов с m неизвестными коэффициентами;

– коэффициенты подбираются таким образом, чтобы каждый из полиномов был равен соответствующему перемещению в каждом из m рассматриваемых узлов. Тем самым обращаем эти полиномы в интерполирующие для соответствующих перемещений по выбранной схеме узлов в конечном элементе. Существует целый ряд эффективных методов построения интерполирующих полиномов;

– подставляем интерполирующие полиномы вместо соответствующих перемещений в формулы (4.22), (4.23) и выражаем необходимые компоненты в области, занимаемой конечным элементом, через перемещения в рассматриваемых узлах. Подставляя координаты того или иного узла, выразим значение компонента в этом узле через перемещения в узлах данного конечного элемента.

Пусть, например, рассматривается подобласть в форме прямоугольного треугольника с тремя узлами: $a(1,2)$, $b(3,2)$, $c(3,5)$ (рис. 4.3).

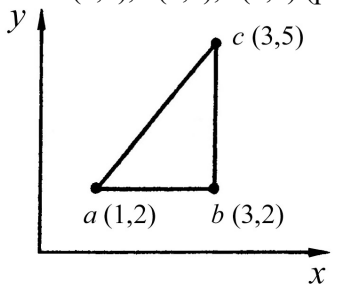


Рис. 4.3. Случай подобласти в форме прямоугольного треугольника с тремя узлами

Выразим компонент $\overline{X}$ вектора поверхностных сил в узле C границы. В случае задачи о плоской деформации упругого тела

$$\overline{X} = (\lambda + 2G)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (4.128)$$

где u, v – перемещения соответственно в направлении осей Ox, Oy; λ, G – упругие постоянные.

Поскольку в рассматриваемый конечный элемент включены три узла, выразим перемещение u в нем полиномом по переменным x, y, включающим три числа:

$$u_n = a_0 + a_1 x + a_2 y. \qquad (4.129)$$

Глава 5
МЕТОДЫ ПОТЕНЦИАЛА

5.1. Основные интегральные соотношения

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние произвольного трехмерного тела, которое в общем случае занимает область *S*, ослабленную полостями S_0 и ограниченную поверхностью Г. Для описания геометрии объема S воспользуемся общей декартовой системой координат O, x_1, x_2, x_3 и в каждой точке $N(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma$ зафиксируем три характерных направления: n_1 – внешняя нормаль к поверхности, n_2 и n_3 – ортогональные оси в касательной плоскости, обычно связываемые с направлениями главных кривизн (рис. 5.1).

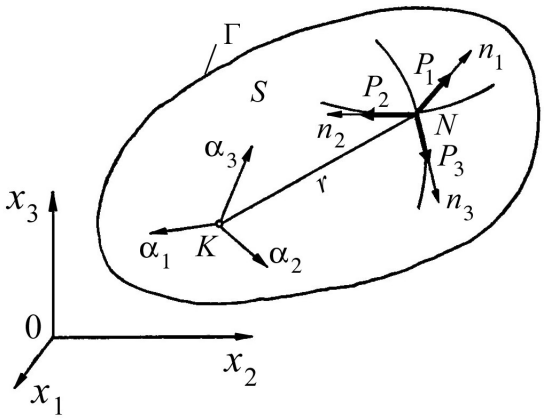


Рис. 5.1. К определению напряженно-деформированного состояния произвольного трехмерного тела

Изотропный и линейно деформируемый материал конструкции характеризуется коэффициентом Пуассона *v* и модулем упругости *E*. Объект подвержен действию массовых сил X_i и поверхностных нагрузок (или реакций) на границе p_i. Состояние тела S характеризуется полями перемещений u_i, относительных деформаций ε_{ij} и внутренних напряжений $\sigma_{ij}(i, j = 1,2,3)$. Основные обозначения и правила знаков приняты в соответствии с работой [7].

Исследуемое напряженно-деформированное состояние определяется граничными условиями задачи и системой трех уравнений Ламе, которые здесь удобно рассматривать в векторном виде:

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda + \mu) grad\ div\, u + X = 0, \tag{5.1}$$

где $\mu = E(2(1+\nu))^{-1}$ – модуль сдвига, $\lambda = E\nu((1+\nu)(1-2\nu))^{-1}$ – коэффициент Ламе.

В общем случае закрепление и нагружение поверхности $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$ характеризуется смешанными граничными условиями. На части границы Γ_u заданы компоненты вектора смещений

$$u_i(N) = u_i^0(N),\ \ N \in \Gamma_u, \tag{5.2}$$

где $u_i^{\circ}(N)$ – известные функции, выражающие распределение перемещений на границе.

На части Γ_σ выполняются статические условия нагружения:

$$p_i(N) = p_i^0(N) = \sigma_{ij}(N) n_{1j}(N),\ \ T \in \Gamma_\sigma, \tag{5.3}$$

где $n_{1j}(N)$ – направляющие косинусы внешней единичной нормали к поверхности Г.

При решении многих практических задач граничные условия задают в другой, более естественной форме: перемещения $u_i(N)$ и напряжения $\sigma_{ij}(N)$ на наклонных площадках приводят к компонентам $u_i^{(n)}(N)$ и $p_i^{(n)}(N)$, ориентация которых определяется направлением внешней нормали и сопряженной касательной плоскостью рассматриваемого участка граничной поверхности.

Назовем исследуемое напряженно-деформированное состояние объекта основным, аналогичным образом введем в рассмотрение какое-либо второе вспомогательное состояние. Воспользуемся теорией Бетти о взаимности суммарных работ соответствующих компонентов двух состояний деформируемого тела S. Тогда работа поверхностных сил и реакций будет представляться интегральными выражениями, которые определяются на Г, а работа массовых сил будет выражаться объемными интегралами по S. В результате получим формулу Грина, которая традиционно записывается в виде следующего обобщенного функционального соотношения:

$$\int_S X_i^* u_i dS + \int_\Gamma p_i^{(n)*} u_i^{(n)} d\Gamma = \int_S X_i u_i^* dS + \int_\Gamma p_i^{(n)} u_i^{(n)*} d\Gamma. \tag{5.4}$$

Отметим, что соотношение (5.4) выполняется при весьма широких предположениях относительно свойств составляющих его функций. В

частности, допускается рассмотрение анизотропных, неоднородных, а при определенных условиях – и нелинейных деформаций.

Из формулы Грина (5.4) получают основное следствие, имеющее важнейшие приложения в теории потенциала. Для этого используют вспомогательное состояние, где внешней нагрузкой является единичная сосредоточенная сила, приложенная в произвольной точке $K(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ по выбранному направлению α_1 в некотором пространстве $S_\infty \supset S$:

$$A_1^*(K) = \delta_1^*(K,N). \tag{5.5}$$

В соответствии с расположением силы A_1^* введем в рассмотрение еще одну систему координат $K,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,$ с которой координатная система N,n_1,n_2,n_3 связана матрицей направляющих косинусов $\{c_{mk}\}$:

$$\alpha_m = c_{mk}n_k. \tag{5.6}$$

При действии силы $A_m^*(K)$ в точке N возникают перемещения $u_m^{(\alpha)}u_i^{(n)*}(K,N)$ и напряжения $u_m^{(\alpha)}\sigma_{ij}^{(n)*}(K,N),$ где $u_m^{(\alpha)}$ – тождественный оператор, характеризующий специфику вспомогательного состояния.

Если все множество S исследуемых объектов принадлежит среде S_∞, то для любой задачи совокупность необходимых вспомогательных состояний будем строить, выделяя область S из S_∞ и задавая на поверхности Γ напряжения и перемещения, обусловленные взаимодействием с внешней отбрасываемой частью S_∞/S. Полученные вспомогательные состояния можно описать и полностью исследовать заранее, что существенно упрощает и стандартизирует алгоритмы решений.

Для изотропных упругих объектов первую группу универсальных вспомогательных состояний строим на основе решения задачи Кельвина о действии сосредоточенной силы в бесконечной среде [7]. Деформированная поверхность Γ выделенного объекта S при ориентации силы $A_l^*(K)$ вдоль оси α_l описывается перемещениями

$$u_l^{(\alpha)}u_i^{(n)*}(K,N) = (16\pi\mu(1-\nu)r)^{-1}((3-4\nu)c_{li} + n_i\alpha_l r^{-2}), \tag{5.7}$$

где $r = ((x_i-\xi_i)^2)^{1/2}$ – расстояние между точками *K* и *N*.

Соответствующие реакции определяются выражениями

$$u_l^{(\alpha)}p_i^{(n)*}(K,N) = (8\pi(1-\nu)r^3)^{-1}(3n_1n_i\alpha_l r^{-2} + \\ + (1-2\nu)(\delta_{i1}\alpha_l - (c_{l1}n_i + c_{li}n_1))), \tag{5.8}$$

где символ Кронекера $\delta_{mi} = \begin{cases} 1, \text{ при } m = i, \\ 0, \text{ при } m \neq i. \end{cases}$

Вторую группу универсальных вспомогательных состояний получим, выделяя область S из изотропного пространства S_∞, в котором заданы единичные перемещения точки K. Функции напряжений и перемещений построим подстановкой в соотношения (5.7), (5.8) дифференциальных операторов, входящих в соотношения для нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_{ml}^{(\alpha)} = \lambda\delta_{ml}\Delta^{(\alpha)} + 2\mu\varepsilon_{ml}^{(\alpha)}, \tag{5.9}$$

где относительные деформации определяются формулами Коши:

$$\varepsilon_{ml}^{(\alpha)} = 0{,}5\left(\frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial\alpha_l} + \frac{\partial u_l^{(\alpha)}}{\partial\alpha_m}\right), \ \Delta^{(\alpha)} = \varepsilon_{ii}^{(\alpha)}.$$

В результате граничные условия в точках $N \in \Gamma$ найдем из выражений:

$$\sigma_{ml}^{(\alpha)} u_i^{(n)*}(K,N) = -(8\pi(1-\nu)r^3)^{-1}(3\alpha_m\alpha_l r^{-2}n_i + \\ + (1-2\nu)((c_{mi}\alpha_l + c_{li}\alpha_m) - \delta_{ml}n_i)); \tag{5.10}$$

$$\sigma_{ml}^{(\alpha)} p_i^{(n)*}(K,N) = -\mu(4\pi(1-\nu)r^3)^{-1}((1-2\nu)(c_{m1}c_{li} + c_{l1}c_{mi}) + \\ + (4\nu-1)\delta_{ml}\delta_{1i} + 3(1-2\nu)r^{-2}(\delta_{ml}n_1n_i + \delta_{i1}\alpha_m\alpha_l) + \\ + 6\nu r^{-2}(n_1(c_{mi}\alpha_l + c_{li}\alpha_m) - \delta_{ml}(c_{mi}n_1 + c_{m1}n_i)\alpha_l - \delta_{k1}(1-\delta_{ml})\times \\ \times(c_{m1}\alpha_l + c_{l1}\alpha_m)n_i) - 15n_1n_i\alpha_m\alpha_l r^{-4}). \tag{5.11}$$

Универсальные вспомогательные состояния (5.7), (5.8), (5.10), (5.11) являются аналогом полной системы фундаментальных решений уравнений (5.1) пространственной задачи теории упругости.

Последовательное применение теоремы Бетти к определяемому основному и построенным вспомогательным состояниям объекта приводит к формированию формул Сомилиана, которые записываются в виде обобщенного интегрального представления перемещений или напряжений в точке K как функции граничных условий и нагрузки:

$$\Omega_{ml}^{(\alpha)}(K) = \Omega_S + \iint_\Gamma p_i^{(n)}(N)\Omega_{ml}^{(\alpha)}u_i^{(n)*}(K,N)d\Gamma - \\ - \iint_\Gamma u_i^{(n)}(N)\Omega_{ml}^{(\alpha)}p_i^{(n)*}(K,N)d\Gamma;$$

$$\Omega_S = \iiint_S X_i(P)\Omega_{ml}^{(\alpha)}u_i^*(K,P)dS, \tag{5.12}$$

здесь $\Omega_{ml}^{(\alpha)}(K)$ – напряжение или перемещение в точке K в основном состоянии, $\Omega_{ml}^{(\alpha)}$ – соответствующий $\Omega_{ml}^{(\alpha)}(K)$ дифференциальный оператор, обозначение которого подчеркивает назначение универсального вспомогательного состояния.

В частном случае, когда все площадки, связанные с одним каким-либо направлением, например, перпендикулярные к оси Ox_3, являются заведомо главными, пространственная задача вырождается в плоскую. Тогда касательные напряжения σ_{31} и σ_{32} становятся равными нулю, а главные напряжения σ_{33} или равны нулю (плоское напряженное состояние) или выражаются через напряжения σ_{11} и σ_{22} (плоская деформация). Векторы объемных сил и перемещений являются функциями только двух переменных:

$$X_i \equiv X_i(x_1, x_2),\ u_i = u_i(x_1, x_2),\ i = 1,2. \qquad (5.13)$$

Разрешающая система двух уравнений в перемещениях, соответствующая выражениям пространственной задачи (5.1), принимает следующий вид:

$$\mu\nabla_1^2 u_1 + (\lambda_0 + \mu)\frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} + X_1 = 0,\ \mu\nabla^2 u_2 + (\lambda_0 + \mu)\frac{\partial \Delta_1}{\partial x_2} + X_2 = 0, \qquad (5.14)$$

где $\Delta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2})$, $\lambda_0 = \lambda$ для плоской деформации, $\lambda_0 = (vE(1-v^2)^2)^{-1}$ для плоского напряженного состояния.

Кинематические граничные условия первой краевой задачи на Γ_u (5.2) и статические условия нагружения (5.3) на Γ_σ также представляются не зависящими от x_3.

Вспомогательное состояние строим по аналогии с (5.7), выделяя исследуемую область S из бесконечной среды S_∞, в точке $K(\xi_1, \xi_2)$ которой действует сосредоточенная единичная сила δ^* (рис.5.2).

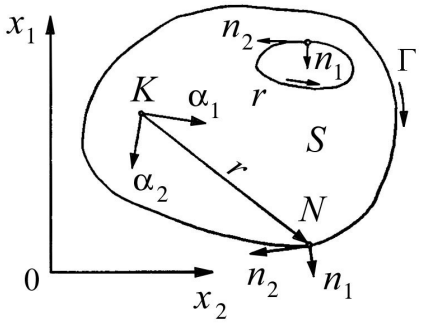


Рис. 5.2. К определению вспомогательного состояния

Такое состояние при ориентации силы $A_l^*(K)$ вдоль оси α_l характеризуется соотношениями:

$$u_l^{(\alpha)}\, u_i^{(n)*}\,(K,N) = H(\alpha_l n_i r^{-2} - \aleph c_{li}\ln r),\ \ i,l = 1,2, \tag{5.15}$$

где $H = (2\pi\mu(1+\aleph))^{-1}$, $r^2 = (x_i - \xi_i)^2$, $\aleph = (3-\nu)(1+\nu)^{-1}$ – при плоском напряженном состоянии, $\aleph = 3-4\nu$ – при плоской деформации.

Соответствующие напряжения на наклонных площадках в точке $N(x_1, x_2)$ определяются выражениями:

$$u_l^{(\alpha)} p_i^{(n)*}(K,N) = H\mu r^{-2}((1-\aleph)(c_{l1}n_i + c_{li}n_1) - \\ -\delta_{i1}\alpha_l) - 4\alpha_l n_1 n_i r^{-2}. \tag{5.16}$$

Аналогичным образом, применяя дифференциальные операторы вида

$$\sigma_{ml}^{(\alpha)} = \lambda\delta_{ml}u_{mm}^{(\alpha)} + 2\mu\varepsilon_{ml}^{(\alpha)},\ \ m,l = 1,2, \tag{5.17}$$

построим вторую группу универсальных вспомогательных состояний для определения нормальных и касательных напряжений в точке *K*:

$$\sigma_{ml}^{(\alpha)} u_i^{(n)*}(K,N) = H\mu r^{-2}((1-\aleph)(c_{mi}\alpha_l + c_{li}\alpha_m - \delta_{ml}n_i) - 4n_i\alpha_m\alpha_l r^{-2});$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ml}^{(\alpha)} p_i^{(n)*}(K,N) &= 2H\mu^2 r^{-2}((1-\aleph)(c_{m1}c_{li} + c_{l1}c_{mi}) + \\ &+ 2(1-\aleph)r^{-2}(\delta_{ml}n_1n_i + \delta_{i1}\alpha_m\alpha_l) + 16n_1n_i\alpha_m\alpha_l r^{-1} + \\ &+ (\aleph-3)r^{-2}(2(c_{11}\alpha_l n_i + c_{li}\alpha_1 n_1) + \delta_{li}(l-1)(c_{21}\alpha_1 n_2 + \\ &+ c_{12}\alpha_2 n_1 - c_{11}\alpha_2 n_2 - c_{22}\alpha_1 n_1)) + 2\delta_{li}(2-l)(\aleph-2)).\end{aligned} \tag{5.18}$$

Использование универсальных вспомогательных состояний (фундаментальных решений вида (5.15), (5.16), (5.18)) приводит к изменению размерности компонентов формулы Сомилиана, в которой поверхностные интегралы вырождаются в контурные, а объемные – в двойные.

Таким образом, для всех задач рассматриваемого класса основные интегральные соотношения – формулы Грина и Сомилиана – выводятся на основе единой методики. Применение методов потенциала для расчета объектов, характеризующихся более сложными законами деформации, зависит от возможности построения фундаментальных решений для соответствующих пространств S_∞.

Все интегральные соотношения, приведенные выше, были получены на основе обобщенных фундаментальных решений, что определяет единообразие исследований. Однако, если вспомогательное состояние учитывает особенности рассматриваемого объекта полнее, чем универсальное, то разрешающие соотношения упрощаются.

Пусть вспомогательное состояние характеризуется таким закреплением граничной поверхности, что краевые условия основного состояния частично повторяются. Пусть также Γ' – фрагменты граничной поверхности Г, где граничные условия во вспомогательном и основном состояниях различны. Тогда формулы Сомилиана преобразуются к виду:

$$\Omega_{ml}^{(\alpha)}(K) = \int_{\Gamma'} p_i^{(n)}(N)\Omega_{ml}^{(\alpha)} u_i^{(n)*} d\Gamma - \int_{\Gamma'} u_i^{(n)}(N)\Omega_{ml}^{(\alpha 0} p_i^{(n)*}(K,N) d\Gamma + \Omega_S. \quad (5.19)$$

Очевидно, что решение граничной задачи потребует определения меньшего числа неизвестных плотностей упругих потенциалов по сравнению с универсальным расчетом. В предельном случае при сохранении одинаковых условий закрепления в основном и вспомогательном состояниях взаимная работа реактивных усилий на соответствующих перемещениях по границе Г равна нулю, и в интегральных представлениях (5.19) остаются только известные потенциалы, зависящие от нагрузки.

Если исследуется напряженно-деформированное состояние упругого полупространства или полуплоскости при воздействии нагруженного штампа, то обычная постановка такой граничной задачи требует первоочередного определения условий сопряжения двух контактирующих тел. При использовании методики, связанной с применением универсальных вспомогательных состояний, необходимо не только составить интегральные уравнения относительно неизвестных плотностей упругих потенциалов по границе контакта, но и определить перемещения по поверхности полупространства. Если в этом случае не использовать естественных упрощений, определяемых особенностью постановки задачи, то процедура расчета становится необозримой.

Решение значительно упрощается, если вспомогательное состояние строится путем выделения из упругого полупространства, нагруженного единичной сосредоточенной силой, выемки, граничная поверхность которой определяется конфигурацией штампа [23, 24]. Разрешающие интегральные уравнения, сформированные на основе такого подхода, содержат только

неизвестные плотности, характеризующие напряженно-деформированное состояние контактной зоны.

Аналогично упрощается составление разрешающих систем при исследовании изгиба толстой плиты, защемленной по боковым граням. При использовании универсальных вспомогательных состояний приходится не только полностью определять граничные условия в зонах опирания, но и находить неизвестные перемещения по нижней и верхней плоскостям плиты. Но если применить фундаментальное решение, которое описывает деформацию упругого слоя, имеющего бесконечную протяженность и ограниченную толщину, под действием единичных сосредоточенных сил, то основное состояние будет полностью определяться интегральными уравнениями, в которых неизвестными будут усилия на закрепленных гранях.

Упрощения различной степени достигаются при расчете сферической и цилиндрической толстых оболочек, если вспомогательное состояние строить при рассмотрении соответственно шара или сферического сосуда и сплошного или полого цилиндров. Аналогичным образом сокращается расчет напряженно-деформированного состояния прямоугольной призмы, в котором вспомогательное состояние может быть получено путем выделения рассматриваемого объекта из бесконечного клина, ограниченного тремя взаимно ортогональными плоскостями.

Такие же способы используют для исследования напряженно-деформированных состояний объектов, имеющих характерные изломы границы, где возникает концентрация напряжений. Теорему Бетти применяют к основному и специально подобранному вспомогательному состояниям для области, граничные условия которой несколько отличаются от заданных. Тогда общие разрешающие уравнения модифицируются и расчет выполняют в два этапа: сначала выявляют эффект угловых точек или ребер, а затем получают полное решение задачи [7, 8].

Формулы Сомилиана (5.12), (5.19) объясняют основное преимущество методов потенциала, так как из них следует, что компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в произвольной точке $K \in S$ при известном вспомогательном состоянии определяются как функции полных граничных условий и нагрузки основного состояния. Требуемое первоочередное определение группы неизвестных величин реакций и перемещений на границе Г составляет наиболее существенную часть решения и выполняется сведением рассматриваемой пространственной или плоской задачи к соответствующей системе двухмерных или линейных интегральных уравнений, разрешимых относительно искомых плотностей.

Возможны несколько способов построения таких систем. В первом составляют функциональные уравнения. Этот способ исключения левых неинтегральных членов в выражениях вида (5.12), предложенный

В.Д. Купрадзе, состоит в формальном выражении тривиальных перемещений и усилий для точки $K \overline{\in} S$.

Во втором способе точку K располагают непосредственно на контуре $(K \equiv N_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \Gamma)$, что позволяет составить соотношения, связывающие величины усилий и деформаций в N_0 с остальными составляющими граничных условий. При последовательном обходе поверхности Γ и представлении на основе (5.12) определяющих характеристик напряженно-деформированного состояния получают замкнутую систему интегральных уравнений, близких по виду к линейным интегральным уравнениям Фредгольма, либо строят итерационный процесс решения граничной задачи без формирования интегральных уравнений в явном виде.

Если при предельном переходе $K \to N_0 \in \Gamma$ появляются неустранимые особенности, то определяющую точку $K_0(\xi_i^0)$ фиксируют на некотором малом расстоянии ε от N_0 на пути K к границе Γ из области *S*. Величина $\varepsilon = ((x_i^0 - \xi_i^0)^2)^{1/2}$ зависит от характера особенности рассматриваемых функций основного и вспомогательного состояний и определяется необходимой точностью вычислений.

Особое место занимают разрешающие соотношения комбинированных методов, в которых граничные условия полностью или частично определяют экспериментально или на основе других численных методов.

Очевидно, что возможно существование бесконечного множества комбинаций уравнений, построенных при различных подходах.

Общий метод численного решения полученных систем основан на дискретизации объекта и аппроксимации плотностей упругих потенциалов, что позволяет перейти от функциональных к алгебраическим уравнениям. Однако в результате таких преобразований нарушается равновесие и неразрывность деформаций объекта, а граничные условия соблюдаются только в отдельных точках. Допущенные погрешности вычислений зависят от степени дискретизации области и с учащением шага разбивочной сети уменьшаются. Оценить точность решения граничной задачи можно на основе соотношений, построенных также с помощью специальных вспомогательных состояний.

Уравнение равновесия выводят исходя из принципа взаимности работ при сопоставлении основного исследуемого состояния со вспомогательными, в которых недеформируемый объект последовательно смещается либо по осям x_i, либо вокруг них. Предположив, что область *S* выделяется из S_∞, находящейся под действием сжимающей нагрузки, равномерно

распределенной по цилиндрической поверхности вокруг оси x_i, получим еще одно универсальное вспомогательное состояние.

Легко показать, что приведенные выше специальные вспомогательные состояния обобщаются при добавлении регулярных слагаемых к фундаментальным решениям (5.7):

$$u_l^{(\alpha)} u_i^{(n)*}(K,N)^{(+)} = u_i^{(\alpha)} u_i^{(n)*}(K,N) + u_l^{(\alpha)} u_i^{(n)+}(K,N);$$
$$u_l^{(\alpha)} p_i^{(n)*}(K,N)^{(+)} = u_l^{(\alpha)} p_i^{(n)*}(K,N) + u_l^{(\alpha)} p_i^{(n)+}(K,N), \qquad (5.20)$$

где $u_l^{(\alpha)} u_i^{(n)+}(K,N) = (v_l^{(\alpha)} + w_l^{(\alpha)} r) c_{li}$, $u_l^{(\alpha)} p_i^{(n)+}(K,N) = p w_l^{(\alpha)} c_{li}$; $v_l^{(\alpha)}, w_l^{(\alpha)}$, $p w_l^{(\alpha)}$ – произвольные постоянные, зависящие соответственно от значений дополнительных смещений и интенсивности сил обжатия.

Подставив соотношения (5.20) в формулу Грина (5.4), получим интегральные контрольные равенства. На каждом этапе итерационного процесса решения граничной задачи их можно использовать в качестве критерия сходимости вычислений. Кроме того, их целесообразно добавлять в основные интегральные уравнения, определяющие дискретные значения функций неизвестных плотностей упругих потенциалов, что способствует устойчивости вычислительной процедуры. Заметим, что соотношения (5.20) могут быть расширены при введении компонентов, использование которых в формуле Грина (5.4) позволяет построить интегральные равенства для контроля за неразрывностью деформаций или учесть преимущественное влияние каких-либо факторов (например, сдвигающих усилий).

5.2. Упругие потенциалы при различных аппроксимациях плотностей

Некоторые приемы приближенных вычислений. Возможности построения аналитических решений интегральных уравнений задач механики твердых деформируемых тел весьма ограничены, поэтому искомые плотности потенциалов обычно определяются приближенными и численными методами. Выбор способа решения обусловливается необходимостью наиболее быстрого достижения результатов заданного уровня точности и конкретными особенностями рассматриваемой задачи. Важное значение имеет конструирование универсальных алгоритмов, заведомо обладающих наибольшей оптимальностью на широком круге краевых задач.

Во всех методах аппроксимации линейных интегральных уравнений алгебраическими системами приходится находить значения интегралов, взятых на всей границе Г либо на отдельных ее участках. Если элементарный участок интегрирования расположен достаточно далеко от зоны возмущения, то значения любых потенциалов можно найти сравнительно легко, применяя

различные квадратурные формулы. Трудности возникают, если точка K приложения единичных воздействий вспомогательных состояний находится в непосредственной близости к участку интегрирования. Причина этих затруднений заключается в разрывности ядер большинства потенциалов при $K \to \Gamma$. В этом случае для вычисления интегралов вводятся приемы, основанные на приближенном представлении ядер потенциалов.

Любая степень точности при условии сходимости процесса определения неизвестных плотностей потенциалов может быть достигнута разложением ядер на отрезки из рядов Фурье и посредством увеличения числа компонентов. К таким же результатам приводят и квадратурные формулы, построенные по принципу наименьшей алгебраической погрешности относительно надлежащим образом подобранных весовых функций. В частности, такое построение применяется при сгущении узлов интерполяции на наиболее близком к особой точке участке интергрирования. Однако следует иметь в виду, что в этом случае существенно возрастает порядок N_{mn} матрицы аппроксимирующей системы с неизбежным, как правило, нарастанием влияния погрешностей округления.

Весьма эффективным в ряде случаев оказывается применение итерационных вычислительных алгоритмов.

Возможной причиной появления особенностей является наличие угловых точек и ребер на контуре Γ. Для исключения подобного рода сингулярностей привлекают известные методы сглаживания изломов контура.

Однако приведенные приемы численной реализации метода интегральных уравнений либо не обладают необходимой универсальностью и эффективны в приложениях лишь к узким классам задач, либо чрезвычайно громоздки, и их применение для решения сложных задач, обычно встречающихся в инженерной практике, оказывается весьма затруднительным.

Аппроксимация функциональных соотношений алгебраическими аналогами. Изучение свойств функций, представляемых потенциалами в окрестности точки $K \to N_0 \in \Gamma,$ позволило разработать разрешающие уравнения для плоских и пространственных задач математической теории упругости и для расчета оболочек. Как правило, способы выявления особенностей упругих потенциалов не используются для вычисления значений интегралов. Поэтому оказалось целесообразным разработать такую методику, которая была бы применимой как для исследования граничных свойств полигармонических функций, так и для построения эффективного аппарата непосредственной численной реализации методов потенциала [7].

Каждый интеграл, входящий в соотношения (5.4), (5.12), (5.19), выражает работу обобщенной силы одного состояния на соответствующем

перемещении другого состояния. Ввиду универсальности построенных вспомогательных состояний ядра упругих потенциалов всегда являются известными функциями (5.7)–(5.11), (5.15)–(5.18). Поэтому одна группа интегралов, составляющих (5.4), (5.12) и (5.19), определяется геометрией объекта и характером массовых и поверхностных сил и смещений. Вторая группа слагаемых содержит неизвестные реакции и перемещения, обусловленные статической неопределимостью основного состояния. И, наконец, третью группу составляют неинтегральные члены, вырождение которых из соответствующих упругих потенциалов вызывается наличием сосредоточенных воздействий или опор.

Будем считать, что в общем случае граничная поверхность Γ аппроксимируется набором элементарных фрагментов $\Delta\Gamma_g$, а функции неизвестных плотностей упругих потенциалов *F(N)* – некоторыми полиномами, построенными на интерполяционных узлах N_t:

$$F(N) = F(N_t) f_g(N), \;\; g = 1,2,...,k; \;\; t = 1,2,...,c, \tag{5.21}$$

где $F(N_t)$ – значения интерполируемой функции в опорных точках, $f_g(N)$ – координатная составляющая полинома интерполяции, зависящая от вида аппроксимации.

Для простоты выкладок будем полагать, что участки интерполяции совпадают с фрагментами $\Delta\Gamma_g$. Тогда интегральные формулы (5.12) преобразуются к следующим аналогам:

$$\Omega_{ml}^{(\alpha)}(K) = \delta_i^{(\sigma)} \sum_{g=1}^{k} \sum_{t=1}^{c} p_i^{(n)}(N_t) \int_{\Gamma_g} f_g(N) \Omega_{ml}^{(\alpha)} u_i(K,N) d\Gamma +$$

$$+ \Omega_S - \delta_i^{(u)} \sum_{g=1}^{k} \sum_{t=1}^{c} u_i^{(n)}(N_t) \int_{\Gamma_g} f_g(N) \Omega_{ml}^{(\alpha)} p_i^{(n)*}(K,N) d\Gamma, \tag{5.22}$$

где $\delta_i^{(u)} = 1$, если $u_i^{(n)}(N) \neq 0$; $\delta_i^{(u)} = 0$, если $u_i^{(n)}(N) = 0$; $\delta_i^{(\sigma)} = 1$, если $p_i^{(n)}(N) \neq 0$; $\delta_i^{(\sigma)} = 0$, если $p_i^{(n)}(N) = 0$.

Аналитическое определение интегралов на элементарных участках граничной поверхности. Оптимальное вычисление всех компонентов интегральных представлений (5.4), (5.12), (5.19) можно выполнять с помощью универсальной методики, основанной на дискретизации исследуемого объекта и аналитическом определении упругих потенциалов в пределах некоторого элементарного фрагмента, характеризующегося нулевой кривизной. В этом случае граничная поверхность аппроксимируется набором плоских элементов (обычно треугольных или прямоугольных), а криволинейный контур – ломаной. Если контур Г не искривлен, то можно построить первообразные для всех интегралов этого класса и при $K \in \Gamma$

определить их значения в пределах $\Delta\Gamma$. Полученные формулы делают также почти очевидными граничные свойства исследуемых полигармонических функций при различных предельных переходах $K \to \Gamma$. Проиллюстрируем применение этой методики при исследовании пространственных объектов.

Легко показать на основании формул (5.7)–(5.11), что определение упругих потенциалов в пределах какого-либо плоского фрагмента, произвольно ориентированного в системе $K,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, путем преобразования координат сводится к интегрированию по этой области, совмещенной с одной из местных координатных плоскостей.

Пусть элементарным фрагментом аппроксимации будет многоугольник общего вида *ABC*… (рис. 5.3).

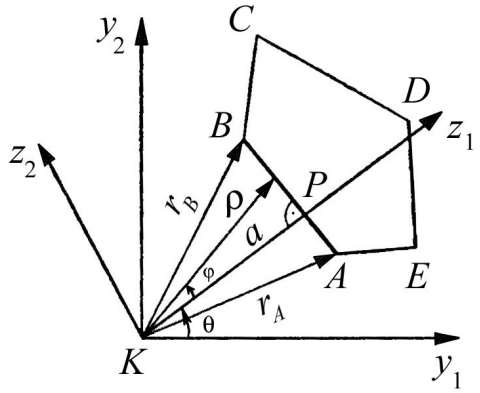


Рис. 5.3. К определению элементарного фрагмента аппроксимации в виде многоугольника общего вида

Повернем базисную систему координат $K,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ таким образом, чтобы одна из ее плоскостей стала параллельной многоугольнику $ABC...$. Для общности обозначений при различных вариантах преобразований будем считать, что фрагмент $ABC...$ расположен в системе K,y_1,y_2,y_3. Тогда значение любого поверхностного упругого потенциала из (5.22) по области $\Delta\Gamma_{ABC...}$ будет определяться комбинацией интегралов, вычисленных по треугольникам вида ABK_1, при суммировании в соответствии с правилом обхода периметра $ABC...$ (рис. 5.3). Построение первообразных эластопотенциалов будем выполнять на основе цилиндрической системы координат, которая приводит к более рациональным операторным формулам, чем декартова система.

Для удобства интегрирования по области K_1AB еще раз повернем оси y_1, y_2 в соответствии с полярными координатами отрезка AB и воспользуемся полученной системой K_1, z_1, z_2, z_3 :

$$y_1 = z_1\cos\theta - z_2\sin\theta;\ \ y_2 = z_1\sin\theta + z_2\cos\theta. \qquad (5.23)$$

В простейшем варианте кусочно-постоянной аппроксимации плотностей упругих потенциалов в выражении (5.21) $f_g(N) = 1$. Тогда всю совокупность компонентов интегральных представлений (5.22) определим следующими формулами:

$$I_1 = \int\int r^{-1}dz_1dz_2 = \int\int \rho r^{-1}d\rho d\varphi = -\left|z_3\right|\varphi\Big|_\varphi + (z_3\psi_1 + a\psi_2)\Big|_\rho;$$

$$I_2 = \int\int z_3 r^{-3}dz_1dz_2 = \int\int z_3\rho r^{-3}d\rho d\varphi = (\operatorname{sign} z_3)\varphi\Big|_\varphi - \psi_1\Big|_\rho;$$

$$I_3 = \int\int z_2 r^{-3}dz_1dz_2 = \int\int \rho^2 r^{-3}\ \sin\varphi d\rho d\varphi = -(\psi_3\cos\varphi)\Big|_\varphi;$$

$$I_4 = \int\int z_1z_2r^{-3}dz_1dz_2 = \int\int \rho^3 r^{-3}\ \sin\varphi\ \cos\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= -(\left|z_3\right|\sin^2\varphi + r\cos^2\varphi)\Big|_\varphi;$$

$$I_5 = \int\int z_2^2 r^{-3}dz_1dz_2 = \int\int \rho^3 r^{-3}\sin^2\varphi d\rho d\varphi = (\left|z_3\right|(\varphi -$$
$$-\sin\varphi\cos\varphi) + r\sin\varphi\cos\varphi)\Big|_\varphi + (z_3\psi_1 + a\psi_2)\Big|_\rho;$$

$$I_6 = \int\int z_3^3 r^{-5}dz_1dz_2 = \int\int z_3^3\rho r^{-5}d\rho d\varphi = ((\operatorname{sign}z_3)\varphi\Big|_\varphi +$$
$$+ z_3a(\rho^2 - a^2)^{1/2}(r(z_3^2 + a^2))^{-1}\left|\rho - \psi_1\right|\rho)3^{-1};$$

$$I_7 = \int\int z_2z_3^2r^{-5}dz_1dz_2 = \int\int z_3^2\rho^2r^{-5}\sin\varphi d\rho d\varphi = -a\left[3r\right]^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$I_8 = \int\int z_1z_2z_3r^{-5}dz_1dz_2 = \int\int z_3\rho^3r^{-5}\sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= \left[(\operatorname{sign}z_3)\sin^2\varphi + z_3r^{-1}\cos^2\varphi\right]3^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$I_9 = \int\int z_2^2z_3r^{-5}dz_1dz_2 = \int\int \rho^3z_3r^{-5}\ \sin^2\varphi d\rho d\varphi = \left[(\operatorname{sign}z_3)\times\right.$$
$$\left.\times(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\Big|_\varphi + z_3r^{-1}\sin\varphi\cos\varphi\left|\varphi - \psi_1\right|_\rho\right]3^{-1};$$

$$I_{10} = \int\int z_1r^{-3}dz_1dz_2 = \int\int \rho^2r^{-3}\ \cos\varphi d\rho d\varphi = \sin\varphi\psi_3\Big|_\varphi - \psi_2\Big|_\rho;$$

$$I_{11} = \int\int z_1^2 r^{-3} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^3 r^{-3} \cos^2\varphi d\rho d\varphi = \left[-|z_3|(\varphi + \right.$$
$$\left. + \sin\varphi\cos\varphi) + r\sin\varphi\cos\varphi\right]\Big|_\varphi + \psi_1\Big|_\rho;$$

$$I_{12} = \int\int z_1 z_3^2 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int z_3^2 \rho^2 r^{-5} \cos\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= a(\rho^2 - a^2)^{1/2} \times \left[3r(z_3^2 + a^2)\right]^{-1}\Big|_\rho;$$

$$I_{13} = \int\int z_1^2 z_3 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int z_3 \rho^3 r^{-5} \cos^2\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= \left\{(\operatorname{sign} z_3)(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\Big|_\varphi - z_3 r^{-1}\sin\varphi\cos\varphi\Big|_\varphi - \psi_1\Big|_\rho - \right.$$
$$\left. - z_3 a(\rho^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\left[r(z_3^2 + a^2)\right]^{-1}\Big|_\rho\right\} 3^{-1};$$

$$I_{14} = \int\int z_1^2 z_2 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 r^{-5} \sin\varphi\cos^2\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= \cos^2\varphi(ar^{-1} - \psi_3\cos\varphi)\, 3^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$I_{15} = \int\int z_2^3 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 r^{-5} \sin^3\varphi d\rho d\varphi =$$
$$[\cos\varphi(\cos^2\varphi - 3)\psi_3 + ar^{-1}\sin^2\varphi]\, 3^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$I_{16} = \int\int z_3^4 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int z_3^4 \rho r^{-7} d\rho d\varphi = \{\varphi|z_3|^{-1}\Big|_\varphi - \psi_1 z_3^{-1}\Big|_\rho +$$
$$+ a(\rho^2 - a^2)^{1/2}[r^2(6r^2 + 3a^2 - z_3^2) + z_3^2(z_3^2 + a^2)] \times$$
$$\times [3r^3(z_3^2 + a^2)^2]^{-1}\Big|_\rho\}\, 5^{-1};$$

$$I_{17} = \int\int z_2 z_3^3 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^2 z_3^3 r^{-7} \sin\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= a(2r^2 + z_3^2)(15 z_3^2 r^3)^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$I_{18} = \int\int z_1 z_2 z_3^2 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^3 z_3^2 r^{-7} \sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= (|z_3|^{-1}\sin^2\varphi + z_3^2 r^{-3}\cos^2\varphi) 15^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$I_{19} = \int\int z_2^2 z_3^2 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^3 z_3^2 r^{-7} \sin^2\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= \{[z_3^2 r^{-3} \sin\varphi\cos\varphi + (\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)|\, z_3|^{-1}]\Big|_\varphi +$$
$$+ a(\rho^2 - a^2)^{1/2}\,[r(z_3^2 + a^2)]^{-1}\Big|_\rho - z_3^{-1}\psi_3\Big|_\rho\} 15^{-1};$$

$$I_{20} = \int\int z_1^2 z_2 z_3 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 z_3 r^{-7}$$
$$\cos^2\varphi \sin\varphi d\rho d\varphi = -a^3 (15 r^3 z_3)^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$I_{21} = \int\int z_2^3 z_3 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 z_3 r^{-7} \sin^3\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= a(z_3^2 + a^2 - 3r^2)(15 r^3 z_3)^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$I_{22} = \int\int z_1 z_2^2 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 r^{-5} \cos\varphi \sin^2\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= [\sin\varphi(\psi_3 \sin^2\varphi + a r^{-1}\cos\varphi)\Big|_\varphi - \psi_3\Big|_\rho] 3^{-1};$$

$$I_{23} = \int\int z_1^3 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 r^{-5} \cos^3\varphi d\rho d\varphi = \{\sin\varphi[(3 -$$
$$\sin^2\varphi)\psi_3 - a(r^2 + z_3^2)\cos\varphi r^{-1}(z_3^2 + a^2)^{-1}]\Big|_\varphi - 2\psi_2\Big|_\rho\} 3^{-1};$$

$$I_{24} = \int\int z_1 z_3^3 r^{-7} dz_1 dz_3 = \int\int z_3^3 \rho^2 r^{-7} \cos\varphi d\rho d\varphi = a^2(\rho - a^2)^{1/2} \times$$
$$\times [2r^2(2z_3^2 + a^2) + z_3^2(z_3^2 + a^2)][15 r^3 z_3 (z_3^2 + a^2)^2]^{-1}\Big|_\rho;$$
$$I_{25} = \int\int z_1^2 z_3^2 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int z_3^2 \rho^3 r^{-7} \cos^2\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= \{[(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)|z_3|^{-1} - z_3^2 \sin\varphi\cos\varphi r^{-3}]\Big|_\varphi - z_3^{-1}\psi_1\Big|_\rho -$$
$$- a(\rho^2 - a^2)^{1/2}[r^2(z_3^2 - a^2) + z_3^2(z_3^2 + a^2)][r^3(z_3^2 + a^2)]^{-1}\Big|_\rho\} 15^{-1};$$

$$I_{26} = \int\int z_1 z_2^2 z_3 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 z_3 r^{-7} \sin^2\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= a^2(\rho^2 - a^2)^{1/2}[15 z_3 r^3 (z_3^2 + a^2)]^{-1}\Big|_\rho;$$
$$I_{27} = \int\int z_1^3 z_3 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 z_3 r^{-7} \cos^3\varphi d\rho d\varphi = a^4(\rho^2 - a^2)^{1/2} \times$$
$$\times (2r^2 + z_3^2 + a^2)[15 z_3 r^3 (z^2 + a^2)]^{-1}\Big|_\rho;$$

$$\psi_1 = \mathrm{arctg}[z_3(\rho^2 - a^2)^{1/2}(ra)^{-1}];\ \ \psi_2 = \ln\left|r + (\rho^2 - a^2)^{1/2}\right|;$$
$$\varphi_3 = \ln\left|r + \rho\right|. \qquad (5.24)$$

В приведенных соотношениях для упрощения записи опущены символы интегрирования по области Δ_{K_1AB} в предположении, что она расположена по одну сторону от высоты *a*, являющейся полярным параметром прямой *AB*. Если это предположение не удовлетворяется, то при определении упругих потенциалов область Δ_{K_1AB} разбиваем на две подобласти, разделяемые высотой *a*. При вычислении в формулы (5.24) подставляем параметры граничных точек *A* и *B*, определяющие нижний и верхний пределы на заключительном этапе повторного интегрирования. При этом обозначение $\left|_{\varphi}(\right|_{\rho})$ показывает, что значения аргументов в первообразных функциях (5.24) следует подставлять в порядке возрастания угла φ (радиуса ρ).

Следующей ступенью аппроксимации является кусочно-линейная интерполяция плотностей *F*(*N*). Аппроксимирующую функцию в пределах фрагмента $\Delta\Gamma_g$ строим по трем опорным точкам $N_t(y_1^{(t)}, y_2^{(t)})$, и компоненты формулы (5.21) принимают следующий вид:

$$f_1(N) = k^{-1}[y_1(y_2^{(3)} - y_2^{(2)}) + y_2(y_1^{(2)} - y_1^{(3)}) + y_1^{(3)}y_2^{(2)} - y_1^{(2)}y_2^{(3)}];$$
$$f_2(N) = k^{-1}[y_1(y_2^{(1)} - y_2^{(3)}) + y_2(y_1^{(3)} - y_1^{(1)}) + y_1^{(1)}y_2^{(3)} - y_1^{(3)}y_2^{(1)}];$$
$$f_3(N) = k^{-1}[y_1(y_2^{(2)} - y_2^{(1)}) - y_1(y_1^{(2)} - y_1^{(1)}) - y_1^{(1)}y_2^{(2)} + y_1^{(2)}y_2^{(1)}];$$
$$k = (y_1^{(3)} - y_1^{(1)})(y_2^{(2)} - y_1^{(1)}) - (y_1^{(2)} - y_1^{(1)})(y_2^{(2)} - y_2^{(1)}). \qquad (5.25)$$

Практика вычислений показывает, что можно использовать и некоторые другие виды сравнительно простых интерполяций. Если опорные узлы расположить по периметру треугольника на поверхности фрагмента $\Delta\Gamma_g$, то весьма удобной оказывается интерполяционная формула Ньютона для функции двух переменных:

$$F(N) = F_0 + [q_1\Delta^{10}F_0 + q_2\Delta^{01}F_0] + (1/2)[q_1(q_1 - 1)\Delta^{20}F_0 +$$
$$+ 2q_1q_2\Delta^{11}F_0 + q_2(q_2 - 1)\Delta^{02}F_0] + ..., \qquad (5.26)$$

где $q_1 = (y_1 - y_1^{(00)})h_1^{-1}$, $q_2 = (y_2 - y_2^{(00)})h_2^{-1}$, $F_0 = F(N_{00})$, $y_1^{(00)}, y_2^{(00)}, y_1^{(01)}$, $y_2^{(01)}$,... – координаты узлов интерполяции N_{00}, N_{01},...; $\Delta^{10}F_0, \Delta^{01}F_0, \Delta^{20}F_0$, $\Delta^{11}F_0, \Delta^{02}F_0$ – соответствующие первые и вторые разности.

Часто достаточно высокую степень точности обеспечивает формула, получаемая из выражения (5.26) в результате пренебрежения разностями, превышающими второй порядок:

$$F(N) = F(N_{00}) \cdot 2^{-1}[1-(q_1+q_2)](2-q_1-q_2) + F(N_{10}) \times$$
$$\times q_1(2-q_1-q_2) + F(N_{01})q_2(2-q_1-q_2) + F(N_{11})q_1q_2 +$$
$$+ 2^{-1}F(N_{20})q_1(q_1-1) + 2^{-1}F(N_{02})q_2(q_2-1). \qquad (5.27)$$

При использовании прямоугольной сети опорных узлов можно применить формулу Бесселя для двукратной интерполяции, которая в ряде случаев обладает определенными преимуществами:

$$F(N) = F(N_{00})(1-q_1)(1-q_2) + F(N_{01})q_2(1-q_1) +$$
$$+ F(N_{11})q_1q_2 + F(N_{10})q_1(1-q_2). \qquad (5.28)$$

Большинство формул (5.24), построенных для определения упругих потенциалов в предположении кусочно-постоянной аппроксимации плоскостей, пригодно и в рассмотренных выше случаях интерполяций (5.15)–(5.18). Этот набор основных аналитических выражений можно дополнить следующими соотношениями:

$$L_1 = \int\int z_1 r^{-1} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^2 r^{-1} \cos\varphi d\rho d\varphi = [-z_3^2 \sin\varphi\psi_4\big|_\varphi +$$
$$+ (z_3^2 + a^2)\psi_2\big|_\rho]\,2^{-1};$$

$$L_2 = \int\int z_2 r^{-1} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^2 r^{-1} \sin\varphi d\rho d\varphi = [z_3^2 \cos\varphi\psi_4\big|_\varphi + ar\big|_\varphi]\,2^{-1};$$

$$L_3 = \int\int z_1^2 z_2 r^{-3} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 r^{-3} \sin\varphi \cos^2\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= (z_3^2 \cos^3\varphi\psi_4 - ar\cos^2\varphi)2^{-1}\big|_\varphi;$$

$$L_4 = \int\int z_1 z_2^2 r^{-3} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 r^{-3} \sin^2\varphi \cos\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= (-z_3^2 \sin^3\varphi\psi_4 - ar\sin\varphi\cos\varphi)2^{-1}\big|_\varphi;$$

$$L_5 = \int\int z_1^3 r^{-3} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 r^{-3} \cos^3\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= [z_3^2(\sin^2\varphi - 3)\sin\varphi\psi_4 + ar\sin\varphi\cos\varphi]2^{-1}\big|_\varphi + z_3^2\psi_2\big|_\rho;$$

$$L_6 = \int\int z_2^3 r^{-3} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^4 r^{-3} \sin^3\varphi d\rho d\varphi =$$

$$= [z_3^2(3-\cos^2\varphi)\cos\varphi\psi_4 + ar\cos^2\varphi]2^{-1}\Big|_\varphi + 2^{-1}ar\Big|_\rho;$$

$$L_7 = \int\int z_1^2 z_2^2 z^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^5 r^{-5} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= \{-|z_3|(\varphi - 0{,}25\sin 4\varphi) - 0{,}25\sin 4\varphi[3(r^2+z_3^2)^2 -$$
$$-4z_3^4]r^{-3}\}3^{-1}\Big|_\varphi - 3^{-1}z_3\psi_1\Big|_\rho - 0{,}25a\psi_2\Big|_\rho - a(\rho^2-a_2)^{1/2}\times$$
$$\times(5r^2 - z_3^2 - 2a^2)(72r^3)^{-1}\Big|_\rho;$$

$$L_8 = \int\int z_1^3 z_2 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^5 r^{-5}\sin^3\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= \cos^4\varphi[2|z_3| - (r^2+z_3^2)r^{-1}]3^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$L_9 = \int\int z_1 z_2^3 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^5 r^{-5}\sin^3\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi = \{-2|z_3|\sin^4\varphi -$$
$$-0{,}25r^{-3}\cos^2\varphi(1+\sin^2\varphi)[3(r^2+z_3^2)^2 - 4z_3^4]\}3^{-1}\Big|_\varphi +$$
$$+a^2(6r^2 - a^2 - 2z_3^2)(12r^3)^{-1}\Big|_\rho;$$

$$L_{10} = \int\int z_1^4 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^5 r^{-5}\cos^4\varphi d\rho d\varphi = \{-3|z_3|[3\varphi +$$
$$+\sin\varphi\cos\varphi(5-2\sin^2\varphi)]64^{-1} + \sin\varphi\cos\varphi(5-2\sin^2\varphi)\times$$
$$\times[3(r^2+z_3^2)^2 - 4z_3^4](24r^3)^{-1}\}\Big|_\varphi - \{z_3\psi_1 + 0{,}75a\psi_2 -$$
$$-a(\rho^2-a^2)^{1/2}[(z_3^2+a^2)(12r^2 - 3z_3^2 + 2a^2) + r^2(9z_3^2 - 2a^2)]\}\Big|_\rho;$$
$$L_{11} = \int\int z_2^4 r^{-5} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^5 r^{-5}\sin^4\varphi d\rho d\varphi = -\{3|z_3|[3\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\times$$
$$\times(3+2\sin^2\varphi)]64^{-1} + \sin\varphi\cos\varphi(3+2\sin^2\varphi)\times$$
$$\times[3(r^2+z_3^2)^2 - 4z_3^4](24r^3)^{-1}\}\Big|_\varphi - \{z_3\psi_1 - 0{,}25a\psi_2 +$$
$$+a(\rho^2-a^2)^{1/2}[17r^2 - 2(a^2+z_3^2) - 3z_3^2](24r^3)^{-1}\}\Big|_\rho;$$

$$L_{12} = \int\int z_1^2 z_2^2 r^{-7} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^5 r^{-7}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= \{(\varphi - 0{,}25\sin 4\varphi)|z_3|_\varphi^{-1} - 0{,}25\sin 4\varphi[5r^2(3r^2 - 2z_3^2) + 3z_3^4]\Big|_\varphi -$$
$$-z_3^{-1}\psi_1\Big|_\rho - 0{,}125a(\rho^2-a^2)^{1/2}[(z_3^2+a^2)(8r^2 - 3z_3^2 - 6a^2) -$$

$$-2r^2(4r^2+2z_3^2)][r^5(z_3^2+a^2)]^{-1}\Big|_\rho\}15^{-1};$$

$$L_{13}=\int\int z_1^3 z_2 r^{-7}dz_1dz_2=\int\int \rho^5 r^{-7}\sin\varphi\cos^3\varphi d\rho d\varphi=$$
$$=\cos^4\varphi[(3r^2-z_3^2)r^{-3}-2|z_3|^{-1}]15^{-1}\Big|_\varphi;$$

$$L_{14}=\int\int z_1 z_2^3 r^{-7}dz_1dz_2=\int\int \rho^5 r^{-7}\sin^3\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi=$$
$$=\{2|z_3|^{-1}\sin^4\varphi+\cos^2\varphi(1+\sin^2\varphi)[5r^2(3r^2-2z_3^2)+3z_3^4]\}\times$$
$$\times 15^{-1}\Big|_\varphi - a^2[10r^2-3(a^2+2z_3^2)](60r^5)^{-1}\Big|_\rho;$$

$$L_{15}=\int\int z_1^4 r^{-7}dz_1dz_2=\int\int \rho^5 r^{-7}\cos^4\varphi d\rho d\varphi=\{-|z_3|^{-1}(1{,}5\varphi+\sin 2\varphi+$$
$$+0{,}125\sin 4\varphi)+0{,}25\sin 2\varphi(1+0{,}25\cos 2\varphi)[(5r^2-z_3^2)-$$
$$-15r^4]r^{-5}\}0{,}2\Big|_\varphi+\{1{,}5|z_3|^{-1}\psi_1-a(\rho^2-a^2)^{1/2}[4r^2(21r^2-2z_3^2)+$$
$$+(z_3^2+a^2)(9z_3^2-6a^2-13r^2)][24r(z_3^2+a^2)]^{-1}-2a^3(\rho^2-a^2)^{1/2}r^{-1}\times$$
$$\times(z_3^2+a^2)^{-2}\}0{,}2\Big|_\rho;$$

$$L_{16}=\int\int z_2^4 r^{-7}dz_1dz_2=\int\int \rho^5 r^{-7}\sin^4\varphi d\rho d\varphi=-\{|z_3|^{-1}(1{,}5\varphi-\sin 2\varphi+$$
$$+0{,}125\sin 4\varphi)+0{,}25\sin 2\varphi(1-0{,}25\cos 2\varphi)[(5r^2-z_3^2)^2-$$
$$-15r^4]r^{-5}\}0{,}2\Big|_\varphi+1{,}5|z_3|^{-1}\psi_1-a(\rho^2-a^2)^{1/2}[27r^4+(z_3^2+a^2)\times$$
$$\times(2a^2+\rho^2)][8r^5(z_3^2+a^2)]^{-1}\}0{,}2\ \Big|_\rho;$$

$$\psi_4=\ln\left|(r+\rho)z_3^{-1}\right|. \qquad (5.29)$$

Аналогичным образом определим интегралы при использовании более высоких степеней аппроксимации плотностей упругих потенциалов. Например:

$$S_1=\int\int z_1^3 z_2 r^{-3}dz_1dz_2=\int\int \rho^5 r^{-3}\sin\varphi\cos^3\varphi d\rho d\varphi=$$
$$=[-(2/3)|z_3|^3\cos^4\varphi-4^{-1}\cos^4\varphi(3^{-1}r^3-3z^2r)-4^{-1}a^2r\cos^2\varphi]\Big|_\varphi;$$

$$S_2 = \int\int z_1^3 z_2 r^{-3} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^5 r^{-3} \sin^3\varphi \cos\varphi d\rho d\varphi =$$
$$= [(2/3)|z_3|^3 \sin^4\varphi - 4^{-1}\cos^2\varphi(1+\sin^2\varphi)(3^{-1}r^3 - 2z^2 r - z^4 r^{-1})]\Big|_\varphi +$$
$$+ (4r)^{-1} a^2 (2r^2 + 2z^2 + a^2)\Big|_\rho;$$

$$S_3 = \int\int z_2^4 r^{-3} dz_1 dz_2 = \int\int \rho^5 r^{-3} \sin^4\varphi d\rho d\varphi = [-(2/3)|z_3|^3((3/2)\varphi -$$
$$- \sin 2\varphi + 8^{-1}\sin^4\varphi) - 4^{-1}\sin 2\varphi(1 - 4^{-1}\cos 2\varphi)\times$$
$$\times(3^{-1}r^3 - 2z^2 r - z^4 r^{-1})]\Big|_\varphi - [z_3^3 \operatorname{arctg} r^{-1} a^{-1} z_3 (\rho^2 - a^2)^{1/2} +$$
$$+ a/16(17z^2 + 6a^2)\ln\left|r + (\rho^2 - a^2)^{1/2}\right| - a(\rho^2 - a^2)^{1/2} r^{-1} \times$$
$$\times(2r^2 + 5z^2 + 2a^2)]\Big|_\rho. \qquad (5.30)$$

Разрешающие значения упругих потенциалов. Формулы для определения эластопотенциалов (5.28)–(5.30) построены в предположении $K \in \Delta\Gamma_g (z_3 \neq 0)$. Однако при формировании разрешающих интегральных уравнений необходимо вычислять интегралы для предельного случая, когда точка *K* приложения сил вспомогательного состояния расположена на границе Γ или в ее ε-окрестности. Легко показать, что в соответствии с особенностями функций, которые представляются компонентами (5.24) при предельном переходе к поверхности $\Gamma(z_3 \to 0, \quad r \to \rho)$, все упругие потенциалы можно условно разделить на три класса.

В первый класс Π_1 входят такие интегралы, как $I_1, I_4, I_7, I_{11}, I_{12}$, представляющие собой непрерывные функции при произвольном непрерывном перемещении определяющей точки *K* в пространстве S_∞. Так, при любом расположении точки K на плоскости $z_3 = 0$ значения интегралов I_1 и I_4 определяются следующими величинами:

$$RI_1 = \lim_{z_3 \to 0} I_1 = a \ln \left| \frac{\rho_{2\rho} + (\rho_{2\rho}^2 - a^2)^{1/2}}{\rho_{1\rho} + (\rho_{1\rho}^2 - a^2)^{1/2}} \right|;$$
$$RI_4 = \lim_{z_3 \to 0} I_4 = -\rho_{2\varphi}\cos\varphi_{2\varphi} + \rho_{1\varphi}\cos^2\varphi_{1\varphi}. \qquad (5.31)$$

Здесь индексы 2ρ и 1ρ использованы для обозначения соответственно верхних и нижних пределов аргументов в точках *A* или *B* в порядке возрастания параметра ρ, а 2φ и 1φ – в порядке возрастания угла φ.

Второй класс Π_2 составляют интегралы $I_2, I_6, I_8, I_9, I_{13}$, которые при пересечении точкой K поверхности Γ претерпевают разрывы, характерные для потенциала двойного слоя.

Рассмотрим изменение функции I нормальных напряжений $u_3\sigma_{33}^*(K,N)$ на фрагменте $\Delta\Gamma$, расположенном параллельно плоскости Oz_1z_2. Пусть точка K перемещается по направлению восставленной в $N_0 \in \Delta\Gamma$ нормали n_0. Тогда равнодействующая рассматриваемых напряжений будет определяться выражением:

$$RI = \lim_{z_3\to 0}\iint_\Gamma u_3\sigma_{33}^*(K,N)d\Gamma = -\left[A_3^*\Big/4\pi(\lambda+2\mu)\right]\times$$
$$\times\lim_{z_3\to 0}\iint_\Gamma z_3 r^{-3}\left[\mu+3(\lambda+\mu)z_3^2r^{-2}\right]d\Gamma = -\left[A_3^*/4\pi(\lambda+2\mu)\right]\times$$
$$\times\lim_{z_3\to 0}[\mu I_2+3(\lambda+\mu)I_6] = -(A_3^*/4\pi)[(\operatorname{sign} z_3)(\varphi_{2\varphi}-\varphi_{1\varphi})]. \qquad (5.32)$$

Таким образом, величина упругого потенциала *RI* прямо пропорциональна центральному углу *AKB* области интегрирования $\Delta\Gamma$. Предельные абсолютные значения функций $|RI(K)|$ слева и справа равны между собой. Но изменение знака z_3 приводит к скачку в последовательности *I*(*K*), и прямое значение интеграла при $K\in\Gamma$, $z_3=0$ должно обращаться в нуль. В частности, если точка *K* расположена в пределах некоторой области $\Gamma_\sum$, которая аппроксимируется набором треугольных фрагментов $\Gamma_\sum = \sum\Delta\Gamma_i$, то центральный угол равен 2π, и из (5.32) получаем:

$$\lim_{K\in S\atop z_3\to 0} RI(K) = \lim_{K\in S} RI(K) = -2^{-1}A_3^*. \qquad (5.33)$$

Использование математических преобразований, имеющих ясную механическую интерпретацию, позволяет упростить анализ интегральных соотношений и их аналогов. Например, исследование граничных свойств приведенного выше потенциала *I*(*K*) можно выполнить по следующей методике. Пусть сила $A_3^*(K)$ вынесена за пределы объекта *S*. Тогда реакции на его границе Γ должны составлять самоуравновешенную систему и удовлетворять уравнению равновесия

$$\sum z_3 = \sum\iint_\Gamma u_3\eta\sigma_{33}^*(K,N)d\Gamma + P_3^* = 0, \qquad (5.34)$$

где P_3^* – интегральная сумма проекций на ось Oz_3 всех напряжений (за исключением $u_3\sigma_{33}^*(K,N)$) на площадках, составляющих Γ.

При расположении силы $A_3^*(K)$ в области *S* реакции на границе Γ должны уравновешивать $A_3^*(K)$, что приводит к соотношению

$$\sum z_3 = \sum \iint_\Gamma u_3 \eta \sigma_{33}^*(K,N)d\Gamma + P_3^* = 1, \tag{5.35}$$

Наконец, условие $K \in \Gamma$ определяет реакцию в точке $N_0 \in \Gamma$, равную половине силы $A_3^*(K)$. Очевидно, что при пересечении точкой *K* границы Γ функция P_3^* остается гладкой и разрыв непрерывности обусловлен особенностью потенциала $\iint_\Gamma u_3\sigma_{33}^*(K,N)d\Gamma$.

Остальные интегралы в общем случае являются сингулярными и составляют класс Π_3. Они характеризуются особенностями вида z_3^{-1}. Приведем сводку формул для определения разрешающих значений интегралов при $z_3 \to 0$.

К л а с с Π_1:

$$RI_1 = a\ln\left|\rho + (\rho^2 - a^2)^{1/2}\right|\Big|_\rho;\ \ RI_3 = -\cos\varphi\ln 2\rho\Big|_\varphi;$$

$$RI_4 = -\rho\cos^2\varphi\Big|_\varphi;\ \ RI_5 = \rho\sin\varphi\cos\varphi\Big|_\varphi + a\ln\left|\rho + (\rho^2 - a^2)^{1/2}\right|\Big|_\rho;$$

$$RI_7 = -a(3\rho)^{-1}\Big|_\varphi;\ \ RI_{10} = \sin\varphi\ln 2\rho\,\Big|_\varphi - \ln\left|\rho + (\rho^2 - a^2)^{1/2}\right|\Big|_\rho;$$

$$RI_{11} = -\rho\sin\varphi\cos\varphi\Big|_\varphi;\ \ RI_{12} = (3\rho a)^{-1}(\rho^2 - a^2)^{1/2}\Big|_\rho;$$

$$RI_{14} = 3^{-1}\cos^2\varphi(ar^{-1} - \cos\varphi\ln 2\rho)\Big|_\varphi;$$

$$RI_{15} = [\cos\varphi(3^{-1}\cos^2\varphi - 1)\times\ln 2\rho + a(3\rho)^{-1}\sin^2\varphi)]\Big|_\varphi;$$

$$RI_{22} = [3^{-1}\sin^3\varphi\ln 2\rho + (3\rho)^{-1}a\sin\varphi\cos\varphi]\Big|_\varphi - 3^{-1}\ln\left|\rho + (\rho^2 - a^2)^{1/2}\right|\Big|_\rho;$$

$$RI_{23} = [\sin\varphi\ln 2\rho(1 - 3^{-1}\sin^2\varphi) - \rho(3a)^{-1}\sin\varphi\cos\varphi]\Big|_\varphi -$$
$$- 2/3\ln\left|\rho + (\rho^2 - a^2)^{1/2}\right\|_\rho. \tag{5.36}$$

К л а с с $\Pi_2(s_0 = \operatorname{sign} z_3)$:

$$RI_2 = s_0\varphi\big|_\varphi;\ RI_6 = 3^{-1}s_0\varphi\big|_\varphi;\ RI_8 = 3^{-1}s_0\sin^2\varphi\big|_\varphi;$$

$$RI_9 = 3^{-1}s_0(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\big|_\varphi;\ RI_{13} = 3^{-1}s_0(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\big|_\varphi.$$

В настоящее время построена полная математическая теория для исследования граничных свойств упругих потенциалов пространственной задачи теории упругости [29,31].

Аппроксимация функций плотностей и вычисление контурных интегралов для плоской области. Описанная схема построения упругих потенциалов, входящих в состав алгебраических аналогов основных интегральных соотношений, сохраняется и при анализе двухмерных напряженно-деформированных состояний. Для построения аппроксимирующих функций плотностей потенциалов на каждом элементарном фрагменте $\Delta\Gamma[a,b]$ задаем узлы интерполяции $a \prec l_0 \prec l_1 \prec \ldots \prec l_n = b.$ Наиболее целесообразно использовать многочлены Лагранжа, обеспечивающие достаточную общность алгоритмов при аппроксимации различной степени. По аналогии с выражением (5.21) запишем:

$$F_m(l) = \sum_{k=1}^{m} F(l_k)\omega_m(l)(\omega'_m(l_k)(l - l_k))^{-1}, \qquad (5.37)$$

где $\omega_m(l) = \prod_{j=1}^{m}(l - l_j),\ \omega'_m(l_k) = \prod_{j\neq k}(l_k - l_j).$

При расчленении контура Γ на прямолинейные отрезки геометрические параметры $\Delta\Gamma$ определим в соответствии с рис. 5.4.

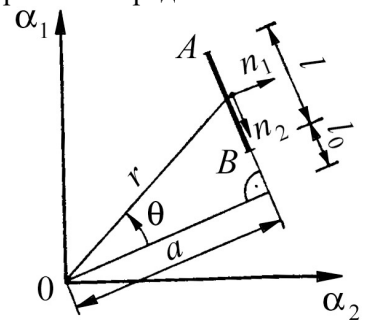


Рис. 5.4. К определению геометрических параметров при расчленении контура Γ на прямолинейные отрезки

Все компоненты интегральных представлений перемещений и напряжений, построенные по аналогии с соотношением (5.22) для исследования плоских задач, могут быть вычислены на основе следующих замкнутых аналитических выражений:

$$\oint_{\Gamma_{AB}}(l\pm l_0)^k u_l^{(a)}u_i^{(n)*}(K,N)dl = Ha^{k+1}(c_{1i}(\delta_{1i}T_1(k)+\delta_{2i}T_1(k+2)-$$
$$-\aleph T_4(k))+(c_{l2}\delta_{1i}+c_{l1}\delta_{2i})T_1(k+1));$$

$$\oint_{\Gamma_{AB}}(l\pm l_0)^k u_l^{(a)}p_i^{(n)*}(K,N)dl = \mu Ha^k(1-\aleph)(c_{li}T_1(k)+$$
$$+(c_{2i}\delta_{1i}+c_{li}\delta_{2i})T_1(k+1)-4c_{l1}\delta_{1i}T_2(k)-4(c_{l2}\delta_{1i}+$$
$$+c_{l1}\delta_{2i})T_2(k+1)-4c_{l2}\delta_{2i}T_2(k+2));$$

$$\oint_{\Gamma_{AB}}(l\pm l_0)^k \sigma_{ml}^{(a)}u_l^{(n)*}(K,N)dl = \mu Ha^k(1-\aleph)((c_{ml}c_{li}+$$
$$+\delta_{1l}c_{12}c_{2i}+\delta_{2l}c_{21}c_{1i})T_1(k)+(c_{1i}c_{l2}-\delta_{l1}c_{11}c_{2i}-$$
$$-\delta_{26}c_{21}c_{2i})T_1(k+1))-4(\delta_{1i}c_{11}c_{li}T_2(k)+\delta_{1i}(c_{11}c_{l2}+$$
$$+c_{12}c_{l1}+\delta_{2i}c_{11}c_{l1})T_2(k+1)+(\delta_{2i}(c_{11}c_{l2}+c_{12}c_{l1})+$$
$$+\delta_{1i}c_{12}c_{i2})T_2(k+2)+\delta_{2i}c_{12}c_{2j}T_2(k+3)). \qquad (5.38)$$

Основные компоненты приведенных операторных формул определим с помощью следующих интегралов:

$$T_1(k)=\int_{\theta_A}^{\theta_B}\mathrm{tg}^k\theta d\theta=[(k-1)^{-1}\mathrm{tg}^{k-1}\theta-\int\mathrm{tg}^{k-2}\theta d\theta]\Big|_{\theta_A}^{\theta_B};$$

$$T_2(k)=\int_{\theta_A}^{\theta_B}\sin^k\cos^{2-k}\theta d\theta=-0{,}5\sin^{k-1}\theta\cos^{3-k}\theta+$$
$$+0{,}5(k-2)\int\mathrm{tg}^{k-2}\theta d\theta\Big|_{\theta_A}^{\theta_B};$$

$$T_3(k)=\int_{\theta_A}^{\theta_B}\sin^k\theta\cos^{4-k}\theta d\theta=(-0{,}25\sin^{k-1}\theta\cos^{5-k}\theta+$$
$$+0{,}25(k-1)(-0{,}5\sin^{k-3}\theta\cos^{5-k}\theta+0{,}5(k-3)\int\mathrm{tg}^{k-4}\theta d\theta))\Big|_{\theta_A}^{\theta_B};$$

$$T_4(k)=\int_{\theta_A}^{\theta_B}\ln\left|a\cos^{-1}\theta\right|\sin^k\theta\cos^{-(k+2)}\theta d\theta=(k+1)^{-1}\times$$
$$\times\mathrm{tg}^{k+1}\theta\ln\left|a\cos^{-1}\theta\right|-(k+1)^{-1}\int\mathrm{tg}^{k+2}\theta d\theta\Big|_{\theta_A}^{\theta_B}. \qquad (5.39)$$

Уравнения, разрешающие граничные задачи рассматриваемых классов, построим, используя следующие соотношения, выведенные на основе предельного перехода:

$$Ru_1^{(\alpha)}u_1^{(n)*}(K,N) = -\aleph \mathrm{H}\sum_{i=0}^{k} c_k^i (k-i+1)^k (-r_B)^k \times$$
$$\times((k-i+1)(r_B^{k-i+1}\ln r_B - r_A^{k-i+1}\ln r_A) + r_A^{k-i+1} - r_B^{k-i+1});$$

$$Ru_1^{(\alpha)}p_2^{(n)*}(K,N) = -Ru_2^{(\alpha)}p_1^{(n)*}(K,N) = R\sigma_{11}^{(\alpha)}u_2^{(n)*}(K,N) -$$
$$-R\sigma_{12}^{(\alpha)}u_2^{(n)*}(K,N) = (1-\aleph)(2\pi(\aleph+1))^{-1}\sum_{i=0}^{k}(-r_B)^k c_k^i \varphi;$$

$$Ru_1^{(\alpha)}u_2^{(n)*}(K,N) = Ru_2^{(\alpha)}u_1^{(n)*}(K,N) = 0;$$

$$Ru_1^{(\alpha)}p_1^{(n)*}(K,N) = Ru_2^{(\alpha)}p_2^{(n)*}(K,N) = R\sigma_{11}^{(\alpha)}u_1^{(n)*}(K,N) =$$
$$= R\sigma_{12}^{(\alpha)}u_2^{(n)*}(K,N) = Q, \qquad (5.40)$$

где

$$\varphi = \begin{cases} (r_B^{k-i} - r_A^{k-i})(k-i) & \text{при } k \neq i, \\ \ln\left|r_A (r_B)^{-1}\right| & \text{при } k = i; \end{cases}$$

$$Q = \pm 0{,}5 \text{ при } \alpha = \pm n_0,\ c_k^i = i!(n!(m-n)!)^{-1}.$$

Определение интегралов на криволинейной границе. Для проверки полученных соотношений были применены алгоритмы вычисления упругих потенциалов в некоторых канонических областях. Из совокупности пространственных объектов была выбрана сфера, для которой при постоянной единичной плотности можно получить значения всех компонентов интегральных представлений (5.22) путем сведения их к известным определенным интегралам. Затем значения этих же потенциалов были определены численно с помощью общей программы, осуществляющей аппроксимацию поверхности набором плоских треугольных фрагментов $\Delta\Gamma$ и вычисление искомых величин как суммы интегралов по Γ.

Аналогичные алгоритмы были построены для отладки операторов плоской задачи. При постоянной единичной плотности потенциалов все компоненты формул Сомилиана были вычислены на окружности радиуса *a* в пределах $0 \le \theta \le 2\pi$. Были введены параметры

$$k = a_0 a^{-1},\ k_0 = 1 + k^2 - 2k\cos\theta, \qquad (5.41)$$

где a_0 – радиальная координата точки K, θ – угловая координата точки *N*, характеризующая также направление внешней нормали к контуру Γ.

Во всех основных случаях расположения точки K относительно области S упругие потенциалы удалось определить на основе известных формул интегрирования [10].

Для вычисления интегралов по криволинейным участкам граничной поверхности были разработаны и испытаны алгоритмы двух типов геометрической аппроксимации, основанные на формулах точного определения потенциалов для элементарных плоских фрагментов. Последовательно были рассмотрены ячейки прямоугольной или триангуляционной сети, с помощью которой граничная поверхность расчленялась на элементы, характеризуемые постоянной плотностью потенциалов. На первом этапе необходимые значения ядер, составляющие выражения (5.22), были вычислены в предположении, что элементарные участки являются плоскими. Затем ячейки были разделены (в зависимости от типа используемых формул) в соответствии с рис. 5.5, *а*.

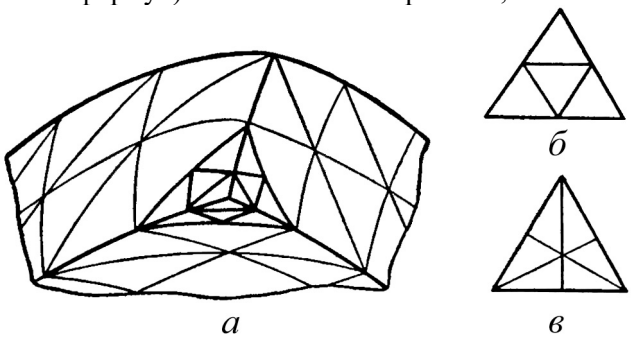


Рис. 5.5. К определению интегралов по криволинейным участкам граничной поверхности: а – схема разделения ячеек; б – первая схема разбивки; в – вторая схема разбивки

Узловые точки каждого элемента располагались на действительной криволинейной поверхности и служили основой для определения других геометрических характеристик фрагмента – координат центральной точки и направлений внешней нормали n. Были вычислены суммы интегралов, определяемых в пределах каждого участка разбиения, и результаты сравнены с первоначальным значением. Если невязка превышала заданную величину, то каждый из фрагментов предыдущего расчленения рассматривался как самостоятельный криволинейный элемент поверхности и был подвергнут аналогичной дискретизации. Ступенчатое дробление продолжалось либо до удовлетворения заданной точности счета, либо до тех пор, пока количество разбиений не превышало заданное предельное число.

Первая схема разбивки (рис. 5.5, *б*) наиболее хорошо согласуется с очертаниями поверхностей, описываемых потенциальными функциями при определении на центральном фрагменте. Было запрограммировано автоматическое учащение шага разбиения триангуляционной сети в зоне,

характеризуемой высокими градиентами подынтегральной функции, что способствовало экономичному расходу машинного времени. Вторая схема (рис. 5.5, *в*) позволяла составлять более компактные подпрограммы определения характерных точек и геометрических параметров, но сходимость процесса последовательных приближений замедлялась. Следует отметить, что при построении этих итерационных алгоритмов была выявлена целесообразность гибкого изменения предельного числа разбиений и значений допустимых невязок. В частности, если исследуемый объект имел плоские грани или фрагменты граничной поверхности характеризовались малой кривизной, то упругие потенциалы можно было определить по одноступенчатой схеме работы алгоритма.

Из соотношений (5.36), (5.40) следует, что разрешающие значения упругих потенциалов наиболее просто вычисляются для центрального участка Γ_g, содержащего особую точку *K*. Поэтому во многих алгоритмах были использованы комбинированные вычисления элементов системы алгебраических уравнений на основе определения точных значений интегралов на плоских центральных участках Γ_g с применением приближенных квадратурных формул в пределах фрагментов остальной поверхности. Следует отметить, что в этом случае источником погрешностей могут быть вычисления по областям поверхности, расположенным в окрестности центрального фрагмента, так как при детальном дроблении поверхности зона высоких градиентов может выходить за пределы центрального участка. Поэтому целесообразно использовать специальные алгоритмы приближенного интегрирования с переменной погрешностью.

В ряде случаев большие преимущества дает способ вычисления интегралов, связанный с выделением главной сингулярной части. В частности, можно использовать алгоритм, в котором значения некоторых потенциалов на центральном фрагменте граничной поверхности при $K \in \Gamma$ находят из условий равновесия всего объекта во вспомогательном универсальном состоянии. С этой целью последовательно рассматривают все фрагменты граничной поверхности, за исключением центрального, на котором располагается определяющая точка N_{0j}. При вычислении элементов матрицы алгебраической системы уравнений суммируют значения слагаемых по каждому компоненту интегральных уравнений (5.22). Затем учитывают, что потенциал, определяемый по всей поверхности Γ, представляет одно из уравнений равновесия. Поэтому можно легко найти полную величину, при вычитании из которой суммы интегралов при $N \neq N_{0j}$ в соответствии с граничными условиями определяют искомые значения.

Анализ свойств упругих потенциалов показывает, что все рассматриваемые функции могут иметь особенности лишь при $K \to N \in \Gamma$,

$\varepsilon \to 0$. Поверхности, представляемые подынтегральными функциями большинства упругих потенциалов, имеют сходные очертания. Поэтому существенное ускорение вычисления интегралов достигается при построении специальных алгоритмов, основанных на использовании известных особенностей геометрии функциональной поверхности. С этой целью сеть интерполяционных узлов, которой покрывается область интегрирования, заранее делают неравномерной с учащением шага разбивки вблизи особенности.

5.3. Интегральные и функциональные разрешающие уравнения

Задачи Дирихле и Неймана. Разрешающие интегральные уравнения для исследования напряженно-деформированного состояния пространственных и плоских объектов обычно строят на основе методов потенциала, разработанных при решении граничных задач математической физики. Наиболее известна классическая методика решения задач Дирихле и Неймана, в которых по заданным на границе Γ значениям функции

$$u^1_{1\Gamma} = f(N) \tag{5.42}$$

или ее нормальной производной

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi(N) \tag{5.43}$$

определяют саму функцию $u(K)$ в области S, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\nabla^2 u(K) = 0, \;\; K \in S\,. \tag{5.44}$$

Решение задачи Дирихле ищут в виде потенциала двойного слоя (Д.С.). При возникновении заряда в плоской области S этот потенциал имеет следующий вид:

$$I_{Д.С.} = \oint_{\Gamma} F(N) r^{-1} \cos\gamma d\Gamma. \tag{5.45}$$

Условие на контуре Γ для внутренней задачи представляют соотношением

$$I^{(+)}_{Д.С.}(N) = f(N). \tag{5.46}$$

Используя известные граничные свойства потенциала двойного слоя, получают равенство

$$I^{(+)}_{Д.С.}(N) = -2\pi F(N_0) - \int_{\Gamma} F(N) r^{-1} \cos\gamma dl. \tag{5.47}$$

Отсюда приходят к следующему интегральному уравнению относительно плотности:

$$F(N_0) - (2\pi)^{-1} \oint_{\Gamma} F(N) r^{-1} \cos\gamma dl = -(2\pi)^{-1} f(N_0). \tag{5.48}$$

В случае внешней задачи Дирихле граничное условие приводит к уравнению

$$F(N_0) + (2\pi)^{-1} \oint_{\Gamma} F(N) r^{-1} \cos\gamma dl = -(2\pi)^{-1} f(N_0). \tag{5.49}$$

Аналогично рассматривают задачу Неймана, решение которой ищут в виде потенциала простого слоя (П.С.)

$$I_{П.С.} = \int_{\Gamma} F(N) r^{-1} \cos\psi dl. \tag{5.50}$$

В случае внутренней задачи должно выполняться требование

$$\frac{\partial I_{П.С.}^{(+)}}{\partial n} = \varphi(N), \tag{5.51}$$

в случае внешней задачи –

$$\frac{\partial I_{П.С.}^{(-)}}{\partial n} = \varphi(N), \tag{5.52}$$

где $\varphi(N)-$ заданная непрерывная функция на границе Γ.

На основании теоремы о граничных свойствах нормальной производной потенциала простого слоя относительно неизвестной плотности $F(N)$ получают уравнения:

$$F(N_0) + (2\pi)^{-1} \oint_{\Gamma} F(N) r^{-1} \cos\psi dl = (2\pi)^{-1} \varphi(N_0) \tag{5.53}$$

для внутренней и

$$F(N_0) - (2\pi)^{-1} \oint_{\Gamma} F(N) r^{-1} \cos\psi dl = -(2\pi)^{-1} \varphi(N_0) \tag{5.54}$$

для внешней задачи Неймана.

Такая схема послужила прообразом решения ряда задач теории упругости; ниже рассмотрим также другие способы построения разрешающих интегральных уравнений. Общим будет использование эллиптических операторов и фундаментальных решений в интегральных функциональных соотношениях, связывающих основное и вспомогательное решения дифференциального уравнения, и прямое определение неизвестных плотностей в виде функций, входящих в граничные условия и разрешающие уравнения.

Эффективное применение получила методика, основанная на построении разрешающих интегральных уравнений при предельном переходе из области S на границу Γ. Рассмотрим ее на примере решения гармонических задач. Фундаментальное решение, удовлетворяющее уравнению

$$\nabla^2 u^*(K,N) = \delta^*(K,N), \tag{5.55}$$

имеет вид:

$$u^*(K,N) = (4\pi r)^{-1} \tag{5.56}$$

для пространственной среды и

$$u*(K,N) = -(2\pi)^{-1} \ln r \tag{5.57}$$

для плоской области.

Вторая формула Грина, связывающая функции основного и вспомогательного решения, может быть представлена следующим обобщенным выражением:

$$\int_S (u\nabla^2 u^* - u^*\nabla^2 u)dS = \int_\Gamma (u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n})d\Gamma, \qquad (5.58)$$

где в зависимости от постановки задачи интеграл $\int_S$ является объемным или двойным, а $\int_\Gamma$ – поверхностным или криволинейным. Использование фундаментальных решений (5.56) или (5.57) в формуле Грина (5.58) приводит к тождеству Сомилиана:

$$u(K) = \int_\Gamma (\frac{\partial u}{\partial n}u^* - u\frac{\partial u^*}{\partial n})d\Gamma, \quad K \in S. \qquad (5.59)$$

Устремив точку K к границе Γ и осуществив полный предельный переход к $K \to N_0 \in \Gamma$, получим из интегрального представления (5.59) следующее общее уравнение для трехмерного пространства:

$$2\pi u(N_0) + \iint_\Gamma u(N)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r(N_0,N)})d\Gamma = \iint_\Gamma \frac{\partial u(N)}{\partial N}(\frac{1}{r(N_0,N)})d\Gamma. \qquad (5.60)$$

Соответственно, для плоской области будем иметь:

$$\pi u(N_0) + \int_\Gamma u(N)\frac{\partial}{\partial n}(\ln r(N_0,n))d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial u(N)}{\partial n}(\ln r(N_0,N))d\Gamma. \qquad (5.61)$$

При решении задачи Дирихле подстановка граничных условий в интегральные уравнения (5.60) и (5.61) приводит к уравнению Фредгольма первого рода, построенному относительно неизвестных плотностей потенциалов:

$$\iint_\Gamma \frac{\partial u(N)}{\partial n}(\frac{1}{r(N_0,N)})d\Gamma = 2\pi f(N_0) + \iint_\Gamma f(N)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r(N_0,N)})\,d\Gamma \qquad (5.62)$$

или

$$\oint_\Gamma \frac{\partial u(N)}{\partial n}(\ln r(N_0,N))d\Gamma = \pi f(N_0) + \oint_\Gamma f(N)\frac{\partial}{\partial n}(\ln r(N_0,N))\,d\Gamma.$$

Уравнения этого типа будем обозначать Y_1.

Учет граничных условий (5.43), характеризующих задачу Неймана, позволяет из (5.60), (5.61) сформировать разрешающие уравнения Фредгольма второго рода (Y_2):

$$2\pi u(N_0) + \iint_\Gamma u(N)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r(N_0,N)})\,d\Gamma = \iint_\Gamma \varphi(N)(\frac{1}{r(N_0,N)})\,d\Gamma \qquad (5.63)$$

или

$$\pi u(N_0) + \oint_\Gamma u(N) \frac{\partial}{\partial n} (\ln r(N_0, N))\, d\Gamma = \oint_\Gamma \varphi(N) (\ln r(N_0, N))\, d\Gamma.$$

Важно отметить, что к разрешающим уравнениям вида (5.62) и (5.63) можно прийти и без предельного перехода к прямым значениям граничных интегралов. С этой целью достаточно записать в формуле Сомилиана (5.59) функции $Ru(K)$ в точке $K \in S$, расположенной на расстоянии $\varepsilon \to 0$ от точки $N_0 \in \Gamma$. Тогда свойства функций потенциалов, построенных с помощью фундаментальных решений (5.56), (5.57), обеспечат получение функциональных уравнений, тождественных (5.62) и (5.63). Это обстоятельство было положено в основу метода разрешающих значений, разработанного Ю.В. Верюжским.

В.Д. Купрадзе предложил строить решение в виде некоторой комбинации потенциалов двойного и простого слоя при рассмотрении функциональных уравнений, сформированных относительно неизвестных плотностей потенциалов при расположении определяющей точки *K* вне области *F*. Здесь будет рассмотрена только одна разновидность данного метода, применяемая в случае, когда тривиальные величины $u(K) = 0$, $K \in S$, могут быть выражены на основе тождеств Сомилиана (5.59). Для задачи Дирихле это приводит к функциональным уравнениям вида:

$$\iint_\Gamma \frac{\partial u(N)}{\partial n} \left(\frac{1}{r(K,N)}\right) d\Gamma = \iint_\Gamma f(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(K,N)}\right) d\Gamma \qquad (5.64)$$

или

$$\oint_\Gamma \frac{\partial u(N)}{\partial n} (\ln(K,N))\, d\Gamma = \oint_\Gamma f(N) \frac{\partial}{\partial N} (\ln r(K,N))\, d\Gamma,$$

а для задачи Неймана – к уравнениям

$$\iint_\Gamma u(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(K,N)}\right) d\Gamma = \iint_\Gamma \varphi(N) \left(\frac{1}{r(K,N)}\right) d\Gamma \qquad (5.65)$$

или

$$\oint_\Gamma u(N) \frac{\partial}{\partial n} (\ln r(K,N))\, d\Gamma = \oint_\Gamma \varphi(N) (\ln r(K,N))\, d\Gamma.$$

Основные граничные пространственные и плоские задачи теории упругости. Воспользуемся схемой прямого построения разрешающих интегральных уравнений типа (5.62), (5.63) на основе формул Сомилиана (5.59) для перемещений. В общем случае, когда закрепление и нагружение границы Γ характеризуются смешанными граничными условиями (5.2) и

(5.3), при стремлении определяющей точки $K \in S$ к точке $N_0 \in \Gamma$ для триады смещений получим следующие выражения:

$$u_i^{(n)}(K) = Ru_i^{(n)}(N_0) = \Pi^{(u_i q)} + \oint\limits_{\Gamma-\Delta\Gamma_0} p_j^{(n)}(N)u_i^{(n)}u_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma -$$

$$- \oint\limits_{\Gamma-\Delta\Gamma_0} u_j^{(n)}(N)u_i^{(n)}p_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma + R\oint\limits_{\Delta\Gamma_o} p_j^{(n)}(N)u_i^{(n)}u_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma -$$

$$- R\oint\limits_{\Delta\Gamma_0} u_j^{(n)}(N)u_i^{(n)}p_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma,\ \ i,j = 1,2,3, \qquad (5.66)$$

где суммарный потенциал нагрузки, заданной по области S и на границе Γ, имеет вид:

$$\Pi^{(u_i q)} = \int\limits_S X_j(P)u_i^{(n)}u_j^{(n)*}(N_0,P)dS +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma-\Delta\Gamma_0} p_j^{(n)0}(N)u_i^{(n)}u_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma - \int\limits_{\Gamma-\Delta\Gamma_0} u_j^{(n)0}(N)u_i^{(n)}p_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma +$$

$$+ R\int\limits_{\Delta\Gamma_0} p_j^{(n)0}(N)u_i^{(n)}u_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma - R\int\limits_{\Delta\Gamma_0} u_j^{(n)0}(N)u_i^{(n)}p_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma.$$

Эти уравнения содержат упругие потенциалы, характеризуемые особенностями наиболее низких степеней:

$$R\int\limits_{\Delta\Gamma_0} p_1^{(n)}(N)u_i^{(n)}u_i^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma = p_1^{(n)}(N)RF_1(I_1,I_2,I_3,I_{10}) = \Pi_1^{(u_i u_1)};$$

$$R\int\limits_{\Delta\Gamma_0} p_2^{(n)}(N)u_i^{(n)}u_2^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma =$$

$$= p_2^{(n)}(N)RF_2(I_1,I_4,I_{10},I_{11}) = \Pi^{(u_i u_2)};$$

$$R\int\limits_{\Delta\Gamma_0} u_j^{(n)}(N)u_i^{(n)}p_j^{(n)*}(N_0,N)d\Gamma = u_j^{(n)}(N)R\Phi_j(I_2,I_3,I_{6-13}) = \Pi_2^{(u_i p_j)}. \qquad (5.67)$$

Здесь обозначения $RF_j(...)$ и $R\Phi_j(...)$ показывают, что потенциал определяется как функция предельных значений интегралов $F_j(...)$, $\Phi_j(...)$ из (5.36) при $z_3 = 0$.

Таким образом, для первой основной краевой задачи разрешающие уравнения (5.66) с учетом граничных свойств потенциалов (5.67) можно переписать в следующем условном виде:

$$u_i^{(n)}(K) = Ru_i^{(n)}(N_0) = \Pi^{(u_i q)} + \Pi_1^{(u_i u_j)}. \qquad (5.68)$$

Для второй краевой задачи соответственно будем иметь:

$$u_i^{(n)}(K) = Ru_i^{(n)}(N_0) = \Pi^{(u_i q)} + \Pi_2^{(u_j p_j)}. \qquad (5.69)$$

Уравнение (5.68) можно отнести к типу уравнений Фредгольма первого рода (Y_1). Соотношения (5.69) относят к наиболее оптимальному виду – граничным уравнениям Фредгольма второго рода Y_2, для которых доказана теорема существования и единственности решения. При численной реализации метода схемы расчета, основанные на уравнениях вида Y_2, отличаются наибольшей устойчивостью.

В ряде случаев уравнения (5.68) можно преобразовывать на основе приема, характерного для исследования некорректных задач и связанного с соотношениями, содержащими сингулярные интегралы Π_3. Процесс формирования уравнений, описывающих краевую задачу, строят на основе гипотезы о том, что в большинстве видов инженерных конструкций действительное напряженно-деформированное состояние позволяет выделить у поверхности исследуемого объекта пограничную зону ε, где внутренние усилия и перемещения практически не отличаются от соответствующих граничных плотностей поверхностных упругих потенциалов. Глубина зоны ε зависит от вида граничных условий. Ее развитие обычно может быть предсказано на основе анализа известных решений сходных задач. Поэтому для определяющих точек *K*, расположенных на расстоянии ε от точек $N_0 \in \Gamma$, записываем интегральные представления внутренних напряжений, которым соответствуют неизвестные граничные реакции:

$$p_i^{(n)}(K) = Rp_i^{(n)}(N_0) = \Pi^{(p_i q)} + \int\limits_{\Gamma-\Delta\Gamma_0} p_j^{(n)}(N) p_i^{(n)} u_j^{(n)*}(N_0, N) d\Gamma -$$

$$- \int\limits_{\Gamma-\Delta\Gamma_0} u_j^{(n)}(N) p_i^{(n)} p_j^{(n)*}(N_0, N) d\Gamma + R \int\limits_{\Delta\Gamma_0} p_j^{(n)}(N) p_i^{(n)} u_j^{(n)*}(N_0, N) d\Gamma -$$

$$- R \int\limits_{\Delta\Gamma_0} u_j^{(n)}(N) p_i^{(n)} p_j^{(n)*}(N_0, N) d\Gamma;$$

$$\Pi^{(p_i q)} = \int\limits_S X_j(P) p_i^{(n)} u_j^{(n)*}(N_0, N) dS +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma-\Delta\Gamma_0} p_j^{(n)0}(N) p_i^{(n)} u_j^{(n)*}(N_0, N) d\Gamma - \int\limits_{\Gamma-\Delta\Gamma_0} n_j^{(n)}(N) p_i^{(n)} p_j^{(n)*}(N_0, N) d\Gamma +$$

$$+ R \int\limits_{\Delta\Gamma_0} p_j^{(n)0}(N) p_i^{(n)} u_j^{(n)*}(N_0, N) d\Gamma - R \int\limits_{\Delta\Gamma_0} u_j^{(n)0}(N) p_i^{(n)} p_j^{(n)*}(N_0, N) d\Gamma;$$

$$p_i^{(n)}(K) \approx Rp_i^{(n)}(N_0) = \Pi^{(p_i q)} + \Pi_2^{(p_i u_j)} + \Pi_3^{(p_i p_j)}. \qquad (5.70)$$

Сравнительное «спокойствие» функций, описывающих основное напряженно-деформированное состояние, позволяет при масштабировании

области S и окрестности ε добиться достаточной близости компонентов тензора $p_i^{(n)}(K)$ и $Rp_i^{(n)}(K)$ и существенно уменьшить сингулярность уравнений (5.70) при сохранении доминирующих значений диагональных элементов аппроксимирующих матриц. Понятно, что такой подход требует предварительного анализа уравнений, который выполняется при варьировании основных параметров в формулах (5.70).

При формировании разрешающих систем по методу В.Д. Купрадзе тривиальные величины компонентов тензора напряжений и перемещений для точек $K \in S$ представляют следующим образом:

$$\Omega(K) = 0 = \Pi^{(u_i q)} + \Pi_1^{(u_i u_j)} + \Pi_1^{(u_i p_j)}. \qquad (5.71)$$

Все упругие потенциалы, входящие в состав функциональных уравнений (5.71), не имеют разрывов, что позволяет условно отнести их к классу Π_1. Отметим, что этот способ, обладающий рядом существенных преимуществ, также требует предварительного анализа систем, поскольку необходимо учитывать возможность «размазывания» матриц при значительном удалении определяющих точек K от границы Γ, зависимость расположения точек K от количества подобластей S_0 и т.д.

5.4. Прямые и итерационные алгоритмы

Алгебраические аналоги при простейших аппроксимациях. Построенные в 5.3 интегральные и функциональные уравнения решают численно при переходе к аппроксимирующим линейным алгебраическим системам, которые можно представить в следующем общем матричном виде:

$$[A]\{x\} = [B]\{y\}, \qquad (5.72)$$

где векторы $\{x\}$ и $\{y\}$ объединяют соответственно неизвестные и известные дискретные значения плотностей упругих потенциалов в зависимости от граничных условий и нагружения тела; $[A]$ и $[B]$ – матрицы, члены которых вычисляются как интегралы произведений функций компонентов вспомогательных состояний и составляющих используемых интерполяционных полиномов.

Известно, что эффективность вычислительного аппарата обеспечивается не только рациональностью аппроксимаций функций плотностей и возможностью вычисления коэффициентов $[A]$ и правых частей $[B]$ уравнений (5.72) с помощью замкнутых аналитических выражений, выведенных на основе теорем о граничных свойствах упругих потенциалов, но и направленным выбором прямых или итерационных алгоритмов определения неизвестных перемещений и реакций на границе. Поэтому для

оптимизации расчета каждого объекта в рамках единого комплекса необходимо учитывать особенности постановки конкретной задачи.

Простейший вариант однократного процесса прямого решения граничных задач связан с расчленением границы Γ на элементарные фрагменты $\Delta\Gamma$, в пределах которых плотности потенциалов принимаются постоянными. Такой подход вполне целесообразен при исследовании объектов, характеризующихся несложной конфигурацией и простым нагружением. В этом случае в качестве определяющих точек $K_i \approx N_{0i} \in \Delta\Gamma_i$ обычно выбирают центры тяжести фрагментов $\Delta\Gamma_i$. При последовательном представлении компонентов $\Omega(K_i) \approx R\Omega(N_{0i})$ из соотношений вида (5.12), (5.19) формируют замкнутую разрешающую систему уравнений (5.72), в которой коэффициенты $[A]$ и правые части $[B]\{y\}$ вычисляют с помощью аналитических формул (5.24), (5.36) или (5.38), (5.40). При большой кривизне граничного фрагмента или сложности функций нагрузки компоненты $[A]$ и $[B]\{y\}$ находим с помощью итерационного алгоритма укрупнения.

Для кусочно-линейной аппроксимации плотностей необходимо формирование интегральных представлений для трех (пространственное тело) или двух (плоская задача) опорных точек N_0 на каждом фрагменте $\Delta\Gamma_i$. Если каждая триада опорных узлов N_0 относится только к фрагменту $\Delta\Gamma_i$, то алгоритмы и точность расчетов такие же, как в приведенном выше варианте кусочно-постоянной аппроксимации. Можно значительно сократить порядок матрицы $[A]$ аппроксимирующей системы (5.72), приводя подобные члены в том случае, когда опорные точки являются общими вершинами подобластей $\Delta\Gamma_i$. При вычислении коэффициентов $\delta a(K)$ и правых частей δb (5.72) для каждого узла N_{0i} суммируем величины соответствующих интегралов, определяемых по всем примыкающим к N_{0i} фрагментам $\Delta\Gamma_i$. Поэтому алгоритмы расчета усложняются по сравнению с вариантами, допускающими разрыв функций плотностей на стыке элементов, но этот недостаток при исследовании многих объектов компенсируется экономичностью и точностью расчетов.

С повышением степени аппроксимации увеличивается количество опорных точек, расположенных в пределах каждого фрагмента $\Delta\Gamma$. Общие узлы интерполяции располагаются не только в вершинах многогранника аппроксимации, но и на его ребрах. Поэтому алгоритмы приведения подобных в уравнениях, образуемых путем последовательного представления усилий и перемещений в опорных точках $K = N_{0i}$, существенно усложняются по сравнению с алгоритмами кусочно-линейной интерполяции (особенно при исследовании пространственных объектов). Для построения

функций с особенностями необходимо применять разрешающие алгебраические системы высокого порядка. Поэтому при расчете трехмерных тел даже сравнительно простые аппроксимации вида (5.26)–(5.28) рациональны лишь в весьма редких случаях.

Аппроксимация сплайнами. В последнее время в различных разделах прикладной математики традиционная интерполяция многочленами вытесняется аппаратом гладких кусочно-полиномиальных функций – сплайнов.

Рассмотрим методику численного определения известных функций плотностей упругих потенциалов, приближенно представляемых сплайнами, на примере решения плоской граничной задачи. В общем случае нелинейной интерполяции, когда участок границы Γ_g разделен на элементарные отрезки

$$\Delta_n : a = l_0 \prec l_1 \prec \ldots \prec l_n = b, \tag{5.73}$$

можно использовать разложение в ряд Тейлора:

$$F_m(l) = \sum_{k=0}^{m-1} F^{(k)}(a)(l-a)^k / k!. \tag{5.74}$$

Аппроксимирующий сплайн должен удовлетворять следующим условиям [56]:

– на каждом участке функция представима в виде полинома степени *m*:

$$S_m(l) \in P_m, l \in (l_i, l_{i+1}); \tag{5.75}$$

– на всем интервале [*a,b*] она имеет *m*-1 непрерывную производную:

$$S_m(l) \in c^{m-1}[a,b]; \tag{5.76}$$

– в каждом узле значения сплайна и аппроксимируемой функции плотности совпадают:

$$S_m(l_i) = F(l_i), \ \ i = 0,1,\ldots,m. \tag{5.77}$$

Для однозначного определения сплайна требуется учет дополнительных краевых условий.

Из всего многообразия функций, удовлетворяющих условиям (5.4)–(5.6), для иллюстрации выберем кубический сплайн ($m = 3$), который наиболее часто употребляется в вычислительной практике. Он обычно обеспечивает достаточную точность расчетов и не требует громоздких соотношений или сложных алгоритмов.

Согласно определению [56] кубический сплайн имеет два свободных параметра, и для участка $[l_{i-1}, l_i]$ можно построить выражение

$$S_3(l) = M_{i-1}(l_i - l)^3 (6h_{i-1})^{-1} + M_i (l - l_{i-1})^3 (6h_{i-1})^{-1} + (F_{i-1} -$$
$$- 6^{-1} M_{i-1} h_{i-1})(l_i - l)(h_{i-1})^{-1} + (F_i - 6^{-1} M_i h_{i-1}^2)(l - l_{i+1})(h_{i-1})^{-1}; \tag{5.78}$$

здесь $h_i = l_{i+1} - l_i, \ \ M_i = S_3''(l_i)$.

Учитывая условия интерполяции (5.75) и гладкости (5.76) на интервале $[a,b]$, можно получить систему характеристических уравнений для определения параметров:

$$\beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \ \ i = 1,2,...,n, \tag{5.79}$$

где

$$\beta_i = h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)^{-1}, \ \ \lambda_i = h_i(h_{i-1} + h_i),$$
$$d_{i+1} = \alpha_i F(l_{i-1}) - (\alpha_i + \gamma_i) \times F(l_i) + \gamma_i F(l_{i+1}),$$
$$\alpha_i = [6h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)]^{-1}, \ \ \gamma_i = [6h_i(h_{i-1} + h_i)]^{-1}.$$

Пусть граница Γ плоской области S заменена аппроксимирующей ломаной, имеющей t_1 звеньев. Задача характеризуется кусочно-постоянными граничными условиями. На каждом из t_2 участков, где заданы однородные условия закрепления и нагружения, неизвестные плотности упругих потенциалов опишем кубическими сплайнами (5.78), которые преобразуем к следующим выражениям:

$$S_{3,i}(l,F) = h_i^{-1}(F(l_i)(l - l_{i+1}) + F(l_{i+1})(l - l_i)) - 6^{-1}(M_i((l - l_{i+1})^3 h_i^{-1} -$$
$$-(l - l_{i+1})h_i) + M_{i+1}((l - l_i)^3 h_i^{-1} - (l - l_i)h_i)). \tag{5.80}$$

В соответствии с описанной выше методикой формирования разрешающих алгебраических аналогов при полиномиальной аппроксимации плотностей для каждого узла интерполяции с помощью формул Сомилиана (5.12), (5.19) выразим компоненты напряжений и перемещений $\Omega(K_i)$, которые после подстановки формул аппроксимации (5.80) запишем в виде следующих алгебраических обобщенных выражений:

$$\Omega(K_i) = \Omega(N_{0i}) = a_{i1}^k X_1^k(N) + ... + a_{in}^k X_n^k(N) + b_{i1}^k u_1^k(N) + ...$$
$$+ b_{in}^k u_n^k(N) + c_{i1}^k M_{X_1}^k(N) + ... + c_{in}^k M_{X_n}^k(N) + d_{i1}^k M_{u_2}^k(N) + ...$$
$$+ d_{in}^k M_{u_n}^k(N) + \Delta_i(\Omega_p), \ \ i = 1,2,...,n; \ \ k = 1,2. \tag{5.81}$$

В результате последовательного обхода всех узлов строим систему порядка $2t_1$ относительно неизвестных дискретных значений функций $X_n^k(N)$, $u_n^k(N)$ и вторых производных $M_{X_n}^k(N)$, $M_{u_n}^k(N)$. Вторую подсистему, дополняющую (5.81), формируем из $2(t_1 - 2t_2)$ уравнений (5.79).

Недостающие $4t_2$ уравнений получим, удовлетворив краевым условиям для аппроксимирующих сплайнов. Наиболее просто такие соотношения можно построить для первой или второй однородных граничных задач, когда на контуре Γ неизвестны либо только напряжения, либо только перемещения. В этих случаях при скруглении углов контура функции плотностей становятся непрерывными и к уравнениям (5.79)

добавляем периодические условия для сплайна, в результате чего образуется подсистема

$$\beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i,\ \ i = 1,2,...,n,$$
$$M_n = M_0,\ \ M_{n+1} = M_1,\ \ h_n = h_0. \qquad (5.82)$$

Для смешанных граничных задач разрешающие системы строить сложнее. На свободной границе, стыкующейся с защемленной частью контура, учет естественных краевых условий для сплайна приводит к соотношениям

$$\beta_i M_{i-1} + \lambda_i M_2 = d_1;\ \ \beta_1 M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i;\ \ i = 2,3,...,n-2;$$
$$\beta_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1};\ \ f_0 = 0;\ \ M_0 = 0;\ \ f_{n+1} = 0;\ \ M_{n+1} = 0. \qquad (5.83)$$

Основные трудности возникают при рассмотрении соседних защемленных участков, в крайних точках которых характерные напряжения возрастают бесконечно, а в ε-окрестностях имеют высокие градиенты. Тогда наиболее целесообразно выделить эти особенности на основе известных приемов [10] и аппроксимировать сплайном только регулярную часть. Но можно использовать другой прием, обеспечивающий необходимую точность вычислений при сохранении общности подхода.

На защемленном контуре задают достаточно малые крайние участки аппроксимации и предполагают, что функции напряжений на них описываются такими же сплайнами, как на их продолжении или на предыдущих отрезках. Поскольку вторая производная от кубического сплайна является линейной функцией:

$$M_0 = (1 + h_0 h_1^{-1}) M_1 - h_0 h_1^{-1} M_2;$$
$$M_n = (1 + h_{n-1} h_{n-2}^{-1}) M_{n-1} - h_{n-1} h_{n-2}^{-1} M_{n-2}, \qquad (5.84)$$

то получают следующую систему характеристических уравнений:

$$(2 + h_0 h_1^{-1}) M_1 + (h_1 - h_0) h_1^{-1} M_2 = d_1;$$
$$\beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i,\ \ i = 2,3,...,n-2;$$
$$(h_{n-2} - h_{n-1}) h_{n-2}^{-1} M_{n-2} + (2 + h_{n-1} h_{h-2}^{-1}) M_{n-1} = d_{n-1};$$

$$F_0 = F(l_1)(h_1 + h_0) h_1^{-1} - F(l_2) h_0 h_1^{-1} + M_1 (h_0 + h_1)(6h_1)^{-1} \times$$
$$\times ((h_0 + h_1)^2 - h_1^2) - M_2 h_0 (6h_1)^{-1} (h_0^2 - h_1^2);$$

$$F_n = F_{n-1}(h_{n-2} + h_{n-1}) h_{n-2}^{-1} - F_{n-2} h_{n-1} h_{n-2}^{-1} + M_{n-1}(h_{n-2} + h_{n-1}) \times$$
$$\times (6h_{n-2})^{-1} ((h_{n-2} + h_{n-1})^2 - h_{n-2}^2) - M_{n-2} h_{n-1} (6h_{n-2})^{-1} (h_{n-1}^2 - h_{n-2}^2). \qquad (5.85)$$

Для определения коэффициентов $a_{ij}^k, b_{ij}^k, c_{ij}^k, d_{ij}^k$ в уравнениях (5.81) рассмотрим два соседних участка $\Delta\Gamma_{j-1}$ и $\Delta\Gamma_j$, на которых заданы однородные граничные условия. После приведения подобных получим:

$$a_{ij}^1 = \delta_\sigma\Big(\int_{l_{j-1}}^{lj}(l-l_{j-1})h_{j-1}^{-1}\Omega u_1^*(K_i,l)dl - \int_{l_j}^{l_{j+1}}(l-l_{j+1})h_i^{-1}u_1^*(K_i,l)dl\Big);$$

$$b_{ij}^1 = -\delta_u\Big(\int_{l_{j-1}}^{l_j}(l-l_{j-1})h_{j-1}^{-1}\Omega X_1^*(K_i,l)dl - \int_{l_j}^{l_{j+1}}(l-l_{j+1})h_j^{-1}\Omega X_1^*(K_i,l)dl\Big);$$

$$c_{ij}^1 = 6^{-1}\delta_\sigma\Big(\int_{l_{j-1}}^{l_j}((l-l_{j-1})^3 h_{j-1}^{-1} - (l-l_{j-1})h_{j-1})\Omega u_1^*(K_i,l)dl -$$
$$- \int_{l_j}^{l_{j+1}}((l-l_{j+1})^3 h_j^{-1} - (l-l_{j+1})h_j)\Omega u_1^*(K_i,l)dl\Big);$$

$$d_{ij}^1 = -6^{-1}\delta_u\Big(\int_{l_{j-1}}^{l_j}((l-l_{j+1})^3 h_{j-1}^{-1} - (l-l_{j+1})h_{j-1})\Omega X_1^*(K_i l)dl -$$
$$- \int_{l_j}^{l_{j+1}}((l-l_{j+1})^3 h_j^{-1} - (l-l_{j+1})h_j)\Omega X_1^*(K_i,l)dl. \qquad (5.86)$$

Остальные компоненты системы формируются аналогично (5.86).

Отметим, что подобным же образом преодолевают трудности определения напряженно-деформированного состояния и в местах стыков свободных и защемленных участков контура при использовании кусочно-линейной или традиционной полиномиальной аппроксимаций. Для этого, учащая шаг дискретизации границы, исключают из рассмотрения в качестве определяющих точки раздела. На свободном краю перемещения задают в точках раздела из условий задачи, а на защемленном участке опорные точки располагают в ε – окрестностях. Как показывает практика вычислений, при решении смешанных граничных задач сплайны обеспечивают более точное приближение по сравнению с другими видами аппроксимаций.

Приведенная методика является наиболее удобной в тех случаях, когда в зонах, примыкающих к точкам раздела свободных и защемленных участков границы, учитывают местные пластические деформации. Тогда функция интенсивности напряжений ограничивается пределом текучести материала конструкции, что находит отражение в краевых условиях сплайна,

задаваемых на основе анализа известных аналитических и численных решений подобных задач.

Замкнутая алгебраическая система, построенная относительно неизвестных дискретных величин F_i и M_i для всех разновидностей граничных задач, имеет весьма специфическую структуру с полностью заполненной матрицей подсистемы (5.82). Вторая подсистема, состоящая из характеристических уравнений и краевых условий аппроксимирующего сплайна, образует ленточную матрицу. Поэтому применять прямые методы типа Жордана–Гаусса для решения полученной общей системы неэкономично, целесообразно использовать следующий специально построенный алгоритм.

На первом этапе на основе метода прогонки преобразуем характеристический блок матрицы, в результате чего значения M_n^k выражаем через неизвестные ординаты искомых функций. Для большей простоты определение коэффициентов интегральной части матрицы совмещаем с вычислением характеристических членов. Далее, представляем граничное значение сплайна в виде следующего функционального соотношения:

$$M_0^k = c_0 M_1^k + \varphi_0[F(l_0), F(l_1), F(l_2)]. \qquad (5.87)$$

Используя данное соотношение в соответствующей системе из (5.82), (5.83),(5.85), получаем преобразованное уравнение

$$\beta_1 M_0^k + 2M_1^k + \lambda_1 M_2^k - \alpha_1 F(l_0) + (\alpha_1 + \gamma_1) F(l_1) - \gamma_1 F(l_2) = 0,$$

откуда находим $M_1^k = c_1 M_2^k + \varphi_1,\ c_1 = -0{,}5\lambda,\ \varphi_1 = d_1 - \beta_1 M_0^k.$

Значение M_0 подставляем в интегральный блок матрицы (5.81). После приведения подобных $F(l_0), F(l_1), F(l_2)$ аналогично преобразуем очередное уравнение характеристического блока и коэффициенты интегральной части. Такие операции продолжаются до тех пор, пока не получим соотношение вида

$$y_n = c_n y_{n+1} + \varphi_n. \qquad (5.88)$$

Подставляя его во второе краевое условие для сплайна и исключая неизвестную величину M_{n+1}^k в интегральной части матрицы, получаем первое модифицированное уравнение, построенное относительно неизвестных $F_k(l_0), F_k(l_1), ..., F_k(l_{n+1})$. В результате аналогичных преобразований следующих уравнений интегрального блока формируем замкнутую алгебраическую систему, для решения которой применимы традиционные методы. После определения неизвестных дискретных значений функций плотностей упругих потенциалов с помощью обратной прогонки их

характеристических уравнений находим значения величин $M_1^k(l_0),...,$ $M_k(l_{n+1})$.

Принятая схема аппроксимации сплайнами, предполагающая расчленение контура на отдельные спрямляемые кривые, выбор которых определяется граничными условиями, позволяет учесть особенности поставленной краевой задачи. Следует отметить, что соотношения вида (5.38), (5.39), (5.74) являются основой для построения операторных формул и в том случае, когда сплайны используются не только для аппроксимации плотностей потенциалов, но и для более точного описания границы.

Полиномиальная сплайновая аппроксимация плотностей упругих потенциалов при решении пространственной задачи требует более громоздких соотношений. Исключение составляет осесимметричная пространственная задача, постановка которой позволяет применить плоские сплайны. В общем случае описание напряженно-деформированного состояния трехмерных тел можно строить, сочетая различные многомерные структурные сплайны, имеющие известную физическую интерпретацию.

Представление граничных плотностей упругих потенциалов плоской задачи в виде кубических сплайнов аналогично применению функций, описывающих изгиб балок. Подсистема характеристических уравнений и краевых условий сплайна имеет сходную структуру с уравнениями «трех моментов». Поэтому деформацию границ пространственных объектов можно представить в виде комбинации изогнутых поверхностей тонких пластин и плоских балок-стенок. Например, вертикальные перемещения незакрепленных горизонтальных граней толстой изгибаемой плиты целесообразно описывать комбинацией фундаментальных решений

$$u_3(N) = a_i(K_i) r_i^2 \ln r_i, \qquad (5.89)$$

где $a_i(K_i)$ – сосредоточенная сила, изгибающая тонкую пластину и приложенная в точке K_i; r_i – расстояние $K_i N$.

Систему неизвестных сосредоточенных воздействий и масштаб комбинируемых аппроксимирующих функций (5.89) выбираем на основе анализа поведения известных компонентов $r_i^2 \ln r_i$ и предварительного представления напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции. Разрешающие уравнения вида (5.66), в которые подставляются функции (5.89), формируются по описанной выше методике. Порядок алгебраической подсистемы определяется количеством неизвестных $a_i(K_i)$. При удачном расположении системы сил $\alpha_i(K_i)$ расчет становится весьма рациональным, поскольку автоматически обеспечивается гладкость аппроксимирующих функций.

5.5. Примеры расчета

Простейшие объекты. Известно, что возможности приближенного метода выясняются, в первую очередь, на основе сравнительного анализа результатов его применения и решений контрольных задач, полученных на основе других апробированных методов. Такое сопоставление было проведено при анализе сплошных и полых цилиндрических и сферических объектов при разнообразных симметричных нагрузках. Контрольные расчеты с помощью численных методов потенциала были выполнены в общей постановке без учета симметрии. Для определения полных граничных условий применялись различные рассмотренные выше алгоритмы при варьировании схем расположения определяющих точек. Сравнение полученных результатов с известными решениями позволило сделать вывод о том, что любой из таких алгоритмов может обеспечить необходимую точность расчета. Однако даже при рассмотрении простых примеров было обнаружено, что всю совокупность определяющих точек $K_j \in S$ нельзя располагать за пределами внешней поверхности либо внутри полости. При численном решении функциональных уравнений, сформированных по методике В.Д. Купрадзе, обнаруживается, что удаление точек $K_j \in S$ от объектов приводит к вырождению алгебраической системы.

Анализ результатов определения компонентов во внутренних точках $K \in S$ показывает, что приближение $K \to \Gamma$ сопровождается заметным ростом погрешности вычислений напряжений. Если в точках $K \in S$, достаточно удаленных от границы, необходимая точность расчета может быть достигнута при грубом расчленении поверхности, то при $K \to \Gamma$, $K \in \Gamma_\varepsilon$ существенно сказывается влияние сингулярности $1/z_3$ упругих потенциалов класса Π_3 и погрешности решения граничной задачи приводят к недостоверности величин $\sigma_{ij}(K)$. В таких случаях приходится прибегать к масштабированию области либо определять напряжения из решения системы уравнений, сформированной на основе интегральных представлений (5.12) для заранее вычисленных перемещений $u^{(\alpha)}(K),\ K \in \Gamma_\varepsilon$.

Предварительная оценка применимости численных методов потенциала для исследования неосесимметричных объектов была получена на основе сравнительно простого расчета изотропного куба, подверженного действию гидростатического давления (вторая краевая задача). Результаты подтвердили, что для достоверного определения неизвестных граничных условий в зонах, примыкающих к ребрам и вершинам, требуются специальные приемы, а напряжения во внутренних точках, расположенных

вблизи поверхности, целесообразно вычислять путем последовательного решения фиктивных граничных задач.

Очевидно, что исследование простейших напряженно-деформированных состояний не позволяет оценить влияние различных видов аппроксимаций функций плотностей упругих потенциалов на трудоемкость и точность расчетов. Поэтому были использованы результаты других аналитических и численных решений сложных осесимметричных задач.

Толстая круглая плита. Рассматривается смешанная граничная задача теории упругости для короткого цилиндра, защемленного по боковой поверхности Γ_1 и имеющего свободные горизонтальные плоскости Γ_2 и Γ_3 (рис.5.6).

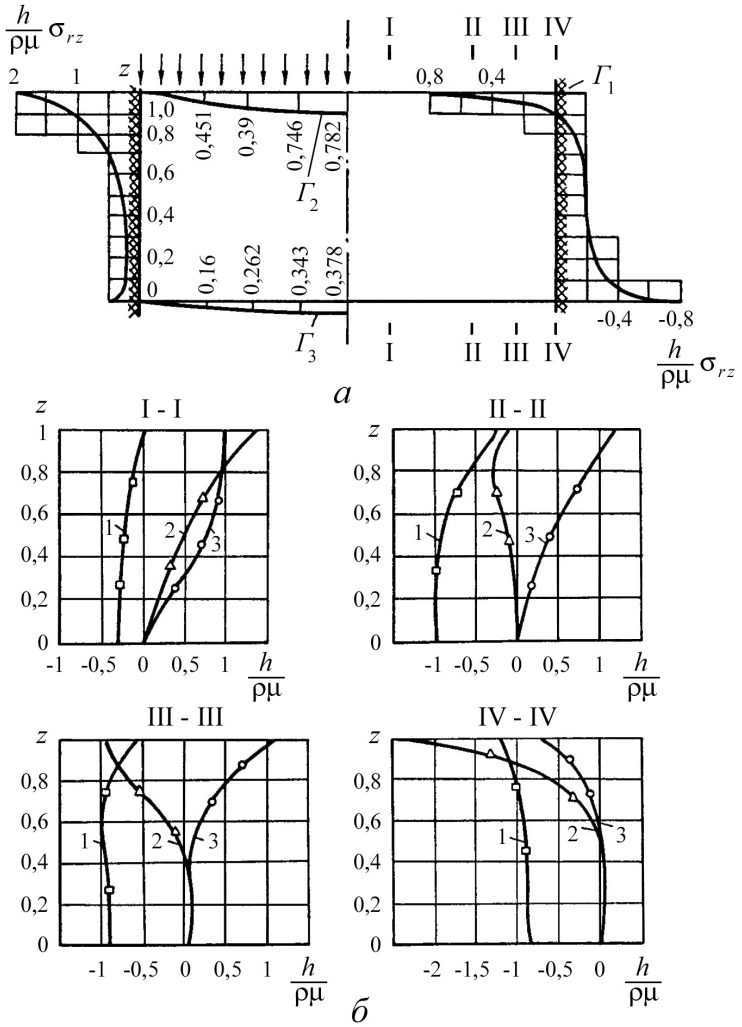


Рис. 5.6. К расчету толстой круглой плиты: а – расчетная схема, эпюры

напряжений и прогибов; б – графики внутренних усилий; 1 – σ_{rz}; 2 – σ_{rr}; 3 – σ_{zz}

Относительные размеры: высота $h=1{,}0$, радиус основания $R=1$. Материал характеризуется модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν=0,25 и модулем сдвига $\mu=0{,}4$ кН/см^2. К верхнему торцу плиты Γ_2 приложена равномерно распределенная нагрузка p. При заданных граничных условиях и дискретизации поверхности Γ в общем случае полиномиальной аппроксимации алгебраические аналоги интегральных представлений (5.22) принимают следующий вид:

$$\Omega_{ml}^{(a)}(K)=\sum_{g=1}^{k_1}\sum_{t=1}^{c_1}p_i^{(r)}(N_t)\int\limits_{\Gamma_{1g}}f_g(N)\times\Omega_{ml}^{(a)}u_i^{(r)*}(K,N)d\Gamma+$$

$$+\sum_{g=1}^{k_2}\sum_{t=1}^{c_2}(p\int\limits_{\Gamma_{2g}}\Omega_{ml}^{(a)}u_i^{(n)}(K,N)d\Gamma-u_i^{(n)}(N_t)\int\limits_{\Gamma_{2g}}f_g(N)\Omega_{ml}^{(a)}p_i^{(n)*}\times$$

$$\times(K,N)d\Gamma)-\sum_{n=1}^{l_3}\sum_{t=1}^{c_3}u_i^{(n)}(N_t)\int\limits_{\Gamma_{3g}}f_g(N)\Omega_{ml}^{(a)}p_i^{(n)*}(K,N)d\Gamma. \qquad (5.90)$$

На рис. 5.6, *а* изображена схема плиты и результаты расчета, полученные при использовании простейшей кусочно-постоянной аппроксимации плотностей $(f_g(N)=1)$, которая обеспечила достаточную точность решений рассматриваемой задачи по всей области S за исключением угловой зоны. Боковая поверхность Γ_1 была разделена равномерно на десять цилиндрических поверхностей. Каждое основание Γ_2 и Γ_3 представлено в виде пяти кольцевых фрагментов. Крупные фрагменты аппроксимировали набором плоских треугольных элементов, а для вычисления интегралов использовали итерационный процесс, основанный на шаговой дискретизации фрагментов.

Для проверки правильности работы алгоритмов применительно к симметричной матрице и симметричному распределению компонентов напряженно-деформированного состояния на первом этапе объект рассчитывали в общей постановке, когда элементарные участки Γ_g (5.90) были представлены в форме плоских треугольников. В основном варианте расчета учтена осевая симметрия, треугольные элементы объединены в цилиндрические и кольцевые фрагменты и значения коэффициентов правых частей определены суммированием компонентов, вычисленных по формулам (5.24). На основе интегральных представлений перемещений и напряжений последовательно сформированы уравнения относительно неизвестных

плотностей, определяемых в точках $N_{0j} \in \Gamma(\theta = 0^\circ)$, которые размещены в серединах соответствующих отрезков образующей. Системы уравнений сформированы по различным алгоритмам при $K_j \in S, K_j \to N_{0j} \in \Gamma$ и $K_j \in S$ с добавлением условий равновесия $\sum x_3 = 0$. В результате последовательного обхода множества K_j и представления компонентов $\Omega(K_j)$ на основе алгебраических аналогов вида (5.90) получена система, решение которой полностью определило напряженно-деформированное состояние объекта. Результаты решения граничной задачи в виде эпюр напряжений $h\sigma_{rz}/p\mu$, $h\sigma_{rr}/p\mu$ и линии прогибов $hu_z/p\mu$ приведены на рис. 5.6, *а*.

В связи с тем, что функции реакций и перемещений не зависят от угловой координаты, на следующих ступенях аппроксимации представилось возможным использовать плоскую интерполяцию. При представлении неизвестных реакций и перемещений кусочно-линейными функциями достаточная точность расчета была достигнута при уменьшении количества фрагментов и неравномерном расчленении с учащением шага вблизи угловой зоны. Точки, лежащие на окружности пересечения поверхностей Γ_1 с Γ_2 и Γ_3, исключены из рассмотрения. С этой целью введена модель защемления краев Γ_2 и Γ_3, а при определении неизвестных реакций на закрепленном участке точка $N_{0j} \in \Gamma_3$ смещена от вершины угла. Построенные на основе кусочно-линейной интерполяции по пяти участкам боковой поверхности Γ_3 граничные функции практически совпали с эпюрами, приведенными на рис. 5.6, *а*.

Из нескольких возможных типов полиномиальных приближений применена аппроксимация плоскими кубическими сплайнами, которая оказалась более рациональной, чем указанные выше интерполяции. Преимущество такой аппроксимации подтверждается заметным уточнением результатов не только на основной части границы, но и вблизи угловой зоны.

Компоненты внутренних напряжений определены для каждой характерной точки $K \in S$ подстановкой найденных дискретных значений плотностей в соотношение (5.90). Прямое определение напряжений вблизи границы приводит к недостоверным результатам, поэтому предварительно вычислены перемещения на $\Gamma_{3\varepsilon}$, а затем на основе интегральных представлений $u^{(r)}(N_{0j\varepsilon})$ сформирована и решена система относительно $\sigma_{ij}(N_{0t\varepsilon})$. На рис 5.6, *б* показаны графики внутренних усилий $\sigma_{rz}, \sigma_{rr}, \sigma_{zz}$

(кривые 1, 2, 3 соответственно) при $\rho/R = 0{,}2$ (сечение I–I); 0,6 (сечение II–II); 0,8 (сечение III–III); 0,99 (сечение IV–IV). Результаты расчета по внутренним точкам практически совпали при использовании всех трех видов аппроксимаций.

В работе [62] было получено аналитическое решение задачи, подобной приведенной выше, при симметричном относительно срединной плоскости нагружении и проведена оценка точности результатов, представленных на рис. 5.7.

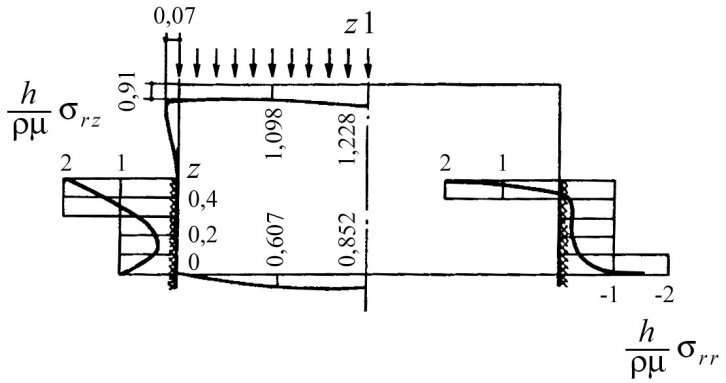


Рис. 5.7. К расчету толстой круглой плиты с неполным защемлением боковой поверхности при симметричном относительно срединной плоскости нагружении

Расхождение между соответствующими значениями по всей области не превышало 1% (за исключением угловой зоны, где аналитическое решение характеризуется бесконечным разрывом функций напряжений).

Возможность численного расчета плит в постановке пространственной задачи позволяет оценить влияние частичного варьирования граничных условий на напряженно-деформированное состояние. Такая оценка была выполнена при анализе результатов, полученных для описанной выше толстой плиты с неполным защемлением боковой поверхности Γ_1 (рис. 5.7) и основания Γ_3 (рис. 5.8).

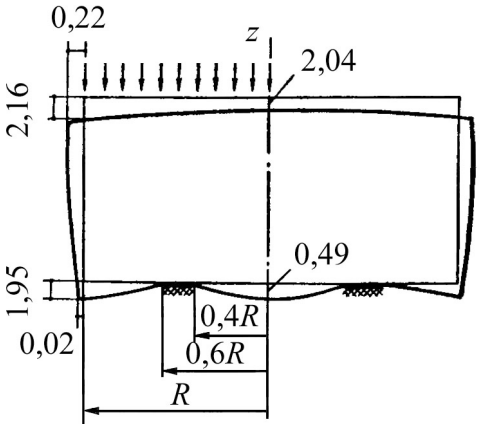


Рис. 5.8. К расчету толстой круглой плиты с неполным защемлением основания при симметричном относительно срединной плоскости нагружении

Из сравнения схем деформации поверхностей Γ_2, Γ_3 и эпюр напряжений σ_{rz}, σ_{rr}, построенных на Γ_1, с результатами предыдущего расчета следует, что изменение и идеализация условий закрепления существенно повлияли на характер напряженно-деформированного состояния.

Полученные результаты подтверждают вывод [10] о неприменимости упрощающих гипотез теории изгиба тонких пластин для исследования толстых плит.

Куб, защемленный по одной грани. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние изотропного куба, которое на основе прямого метода формирования интегральных уравнений было исследовано в работе [10]. Куб защемлен по грани Γ_1, к противоположной грани приложена равномерно распределенная нормальная нагрузка, остальная поверхность свободна. Коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$; размеры сторон, интенсивность равномерно распределенной нагрузки p и модуль упругости E приняты единичными. Анализ зависимости результатов решения от густоты разбивочной сетки показал, что достаточная точность построения полей компонентов напряженно-деформированного состояния достигается даже при сравнительно грубом расчленении поверхности. Поэтому для представления некоторых особенностей численного решения краевой задачи можно ограничиться вариантом кусочно-постоянной аппроксимации плотностей. Разобъем грани куба на равные треугольники Γ_g в соответствии с разверткой на рис. 5.9.

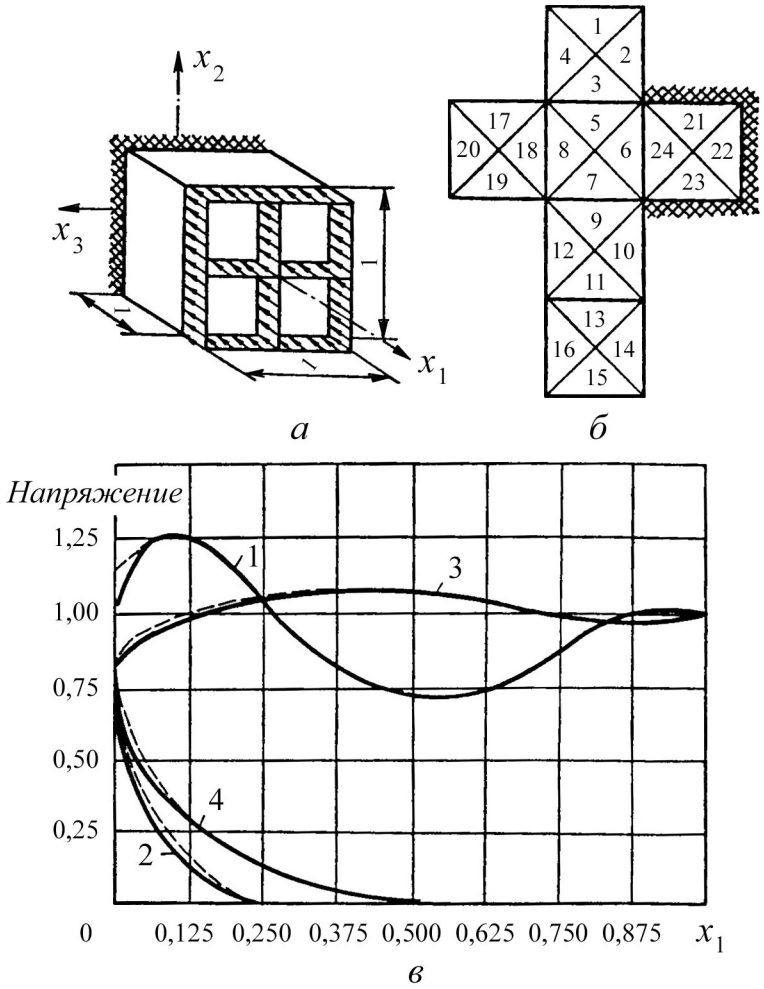


Рис. 5.9. К расчету защемленного по одной грани куба: а – расчетная схема; б – развертка граней; в –эпюры нормальных напряжений

Тогда алгебраический аналог формулы Сомилиана (5.22) примет следующий вид:

$$\Omega_{ml}^{(\alpha)}(K)=\sum_{g=1}^{k_1}(p\int_{\Gamma_{1g}}\Omega_{ml}^{(a)}u_3(K,N)(d\Gamma-u(N)\int_{\Gamma_{1g}}\Omega_{ml}^{(a)}p_i(K,N)d\Gamma)-$$

$$-\sum_{g=1}^{k_2}u_i^{(n)}(N)\int_{\Gamma_{2g}}\Omega_{ml}^{(a)}p_i^{(n)}(K,N)d\Gamma+\sum_{g=1}^{k_3}p_i^{(n)}(N)\int_{\Gamma_{3g}}\Omega_{ml}^{(a)}u_i^{(n)*}(K,N)d\Gamma. \quad (5.91)$$

Разрешающую систему формируем, последовательно располагая сосредоточенные единичные силы вспомогательных состояний в точках

$K_j \in S$ на расстоянии ε по направлению нормали *n* от поверхностных точек N_{0j}. Исследуем влияние величины ε на точность решения. С этой целью разрешающую систему строим при различных ε и определяем величины граничных усилий и перемещения. Матрицы при $\varepsilon = -0{,}001$ сформируем на основе гипотезы о практической неотличимости плотностей поверхностных упругих потенциалов от соответствующих усилий и перемещений основного состояния в некоторой пограничной зоне рассматриваемого объекта. Для стабилизации вычислений разрешающие уравнения будем строить с учетом дополнительных соотношений (5.20).

Из анализа матриц следует, что система, построенная при $\varepsilon \to 0$, характеризуется заметным преобладанием членов, лежащих на главной диагонали. Если точка K_j удаляется от границы Γ на расстояние $\varepsilon \le 0{,}05$, то диагональное преобладание сохраняется, и поэтому точность результатов достаточно высока. С увеличением параметра ε погрешности в процессе счета увеличиваются, и для решения требуется обращение к специальным методам. Результаты решения граничной задачи при $\varepsilon = 0{,}001$ и $\varepsilon = -0{,}001$ практически совпадают. В предельном случае, когда величины $RI(K)$ как при внешнем, так и при внутреннем стремлении точки $K_j \to N_{0j} \in \Gamma_g$ определяются точно, матрицы разрешающих систем становятся тождественными, что естественно следует из граничных свойств упругих потенциалов, составляющих уравнения.

Полные граничные условия (табл. 5.1) позволяют найти любое перемещение или усилие в произвольно расположенной точке $K \in S$ по операторной формуле (5.91).

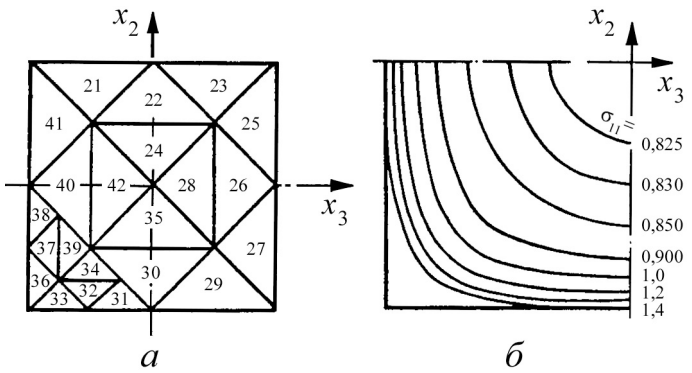
Таблица 5.1

Элемент развертки	Компонент	$\varepsilon = -0{,}001$	$\varepsilon = 0{,}001$	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = 0{,}1$	$\varepsilon = 1{,}0$
1	u_1	–0,500	–0,519	–0,505	–0,501	–1,093
	u_2	0,152	0,160	0,159	0,158	0,777
	u_3	0,204	0,208	0,209	0,226	–0,124
2	u_1	–0,180	–0,189	–0,191	–0,214	–0,142
	u_2	0,130	0,137	0,136	0,144	1,987
	u_3	0,007	0,008	0,008	0,008	0,241
4	u_1	–0,818	–0,859	–0,845	–0,804	–0,352
	u_2	0,166	0,173	0,168	0,155	1,187

	u_3	0,002	0,002	0,001	0,003	0,022
20	u_1	–1,001	–1,050	–1,022	–1,020	–0,934
	u_2	0,003	0,002	0,002	0,001	0,067
	u_3	–0,126	–0,126	–0,120	–0,094	–3,116
21	σ_{11}	0,989	0,995	0,988	0,989	1,556
	σ_{22}	–0,214	–0,215	–0,203	–0,120	–3,071

На рис. 5.9, *в* приведены эпюры нормальных напряжений при $x_2 = x_3 = 0 : \sigma_{11}$ (кривая 1), σ_{22}, σ_{33} (кривая 2) и при $x_2 = x_3 = 1/6 : \sigma_{11}$ (кривая 3), σ_{22}, σ_{33} (кривая 4). Результаты решения, отмеченные штриховой линией, в зоне при $x_1 \succ 0{,}1$ полностью совпадают с данными расчета [10] (сплошные линии). В зоне, примыкающей к защемлению, наблюдается расхождение результатов, которое при $x_1 = 0{,}01$ достигает 9%. Это объясняется тем, что расчет [10] выполнен при разбиении защемленной грани на большее число элементарных треугольников.

Для уточнения картины распределения напряжений по защемленной грани краевая задача была решена также при разбиении Γ_3 в соответствии с рис. 5.10, *а*.



а *б*

Рис. 5.10. К расчету защемленного по одной грани куба при более детальном разбиении защемленной грани: а – схема разбиения; б – поле нормальных напряжений σ_{11}

Нерегулярность принятой триангуляции связана с необходимостью увеличения количества элементарных фрагментов в угловых зонах, где наблюдается наибольшая концентрация напряжений. Результаты расчета в виде поля нормальных напряжений σ_{11} представлены на рис. 5.10, *б*.

Толстая квадратная плита. Некоторые характерные особенности применения различных схем численной реализации были выявлены при определении напряженно-деформированного состояния толстой изотропной плиты (рис. 5.11), боковая поверхность Γ_3 которой защемлена, нижняя грань Γ_2 свободна, а к верхней грани Γ_1 приложена равномерно распределенная нормальная поверхностная нагрузка *p* единичной интенсивности.

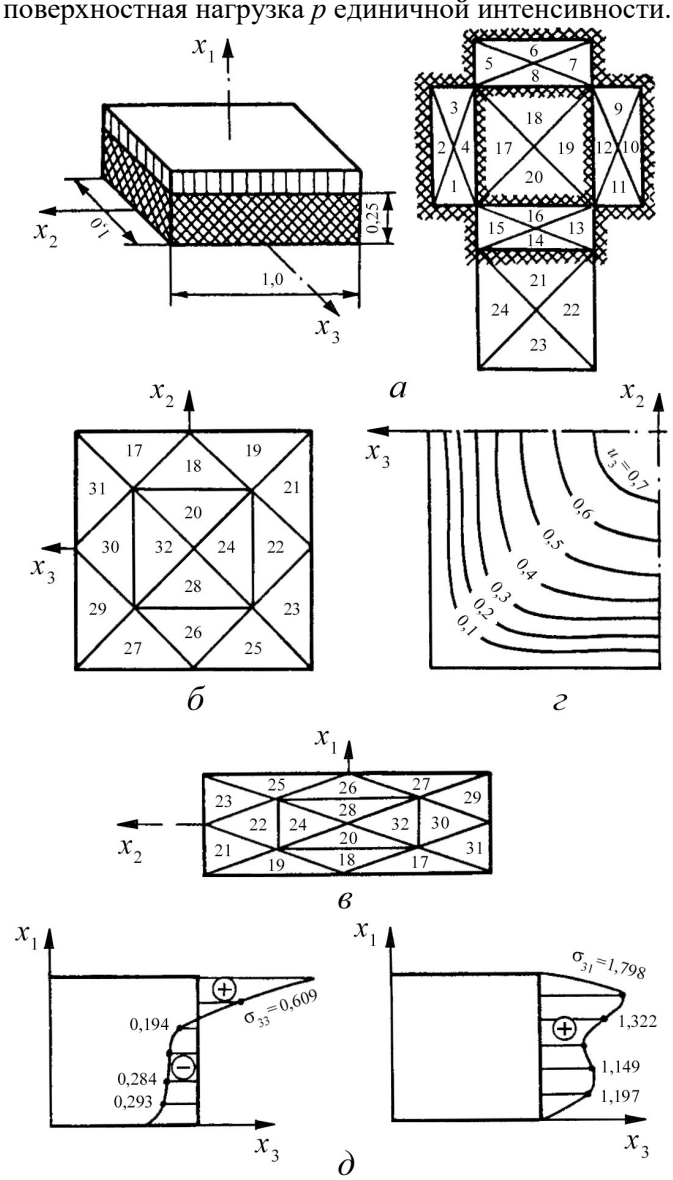


Рис. 5.11. К расчету толстой квадратной плиты: а – расчетная схема и

развертка граней; б, в – схемы более детального разбиения граней; г – изолинии перемещений u_3; д – эпюры напряжений σ_{33} и σ_{13}

Плита в плане представляет собой квадрат со стороной $a=1$ и имеет высоту $h=0{,}25$. Материал конструкции характеризуется модулем упругости E и коэффициентом Пуассона $\nu=0{,}3$. Для численного расчета грани поверхности разбиты в соответствии с разверткой на рис. 5.11, *а*. Центральными точками N_{0j} являются центры тяжести треугольных фрагментов Γ_g.

В соответствии с заданными граничными условиями интегральные представления компонентов напряженно-деформированного состояния в произвольной точке K подобны (5.91). Граничная задача решена при расположении точек K на поверхности тела $\Gamma(\varepsilon=0)$ и при $\varepsilon=-0{,}001;-0{,}005;0{,}001;0{,}005.$

Исследования показали, что при уменьшении какого-либо одного характерного размера трехмерного тела растут погрешности решения граничной задачи и для достижения требуемой точности результатов необходимо повысить степень аппроксимации плотностей и граничной поверхности.

Устранению неустойчивости процесса вычислений способствовало использование вспомогательных состояний вида (5.20), позволяющих учесть условия равновесия и неразрывности деформаций и контролировать перемещения граней. В частности, в аналоги интегральных представлений (5.91) вводились уравнения равновесия

$$\sum_{g=1}^{k_1}\sigma_{3n}\Delta\Gamma_{3g}=p\sum_{g=1}^{k_1}\Delta\Gamma_{2g}\ \text{ при }\ \Omega_{ml}^{(a)}(K)=u_1(K);$$

$$\sum_{g=1}^{k_1}\sigma_{in}\Delta\Gamma_{ig}=0\ \text{ при }\ \Omega_{ml}^{(a)}(K)=u_i(K),\ \ i=2,3. \qquad (5.92)$$

Результаты вычисления реакций и перемещений в наиболее характерных точках поверхности при различных ε приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Элемент развертки	Компонент	$\varepsilon=-0{,}005$	$\varepsilon=-0{,}001$	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=-0{,}001$	$\varepsilon=-0{,}005$
1	σ_{12}	0,6431	0,6536	0,6520	0,6730	0,6752
	σ_{12}	1,1268	1,1084	1,1040	1,1102	1,1096
2	σ_{22}	–0,2473	–0,2421	–0,2403	–0,2426	–0,2436

3	σ_{12}	0,6438	0,6529	0,6518	0,6701	0,6748
4	σ_{12}	1,6946	1,6620	1,6597	1,6714	1,6619
12	σ_{22}	0,2473	0,2421	0,2403	0,2426	0,2436
17	u_1	–0,4250	–0,4300	–0,4307	–0,4410	–0,4501
24	u_1	–0,3318	–0,3397	–0,3411	–0,3421	–0,3590

Для получения более точной картины распределения напряжений по защемленной грани Γ_3 и перемещений верхней нагруженной плоскости Γ_1 были выполнены уточняющие расчеты при уменьшении размеров элементарных фрагментов Γ_g (рис. 5.11, *б*, *в*). На рис. 5.11, *г* представлены изолинии перемещений u_3 по Γ_1, а на рис. 5.11, *д* – эпюры напряжений σ_{33} и σ_{13} при $x_2 = 0,\ x_3 = 0{,}5,$ которые соответствуют результатам расчета по методу сеток.

Численные методы потенциала применительно к решению многих актуальных классов задач механики твердого тела, в том числе задач изгиба тонких пластин различной формы в плане, плит средней толщины и на упругом основании, составных объектов получили дальнейшее развитие в работах Ю.В. Верюжского и его учеников. Особый интерес представляют исследования возможностей эффективного приложения метода к решению нелинейных задач, а также синтез методов потенциала с другими численными методами.

5.6. Понятие о методе граничных элементов

Как отмечалось выше, в любой задаче механики деформированного твердого тела на границе рассматриваемой области в виде граничных условий задается только часть параметров, тогда как остальные отыскиваются в процессе решения. Например, если в задаче линейной теории упругости на границе заданы смещения, то напряжения на границе (как и напряжения и смещения в любой точке области *R*) приходится искать как часть решения. Если на границе задано достаточное, но не избыточное число условий, то решение задачи определяется этими условиями единственным образом.

Аналитические решения краевых задач получить, как правило, легче, если рассматриваемая область *R* однородна и регулярна, а основные дифференциальные уравнения в частных производных линейны. Во многих случаях аналитические решения соответствуют точечному возмущению в бесконечной однородной среде. Это возмущение может представлять собой,

например, тепловой источник или сток в задачах теплопереноса или может быть вызвано действием сосредоточенной силы на упругое тело в задачах механики. Такие решения, которые принято называть *сингулярными*, оказываются вполне приемлемыми всюду в области R, за исключением точки возмущения, где имеет место математическая аномалия – сингулярность. При наличии в теле нескольких точек возмущения для отыскания решения (в линейных задачах) можно суммировать отдельные решения.

Для «реальных задач» построить аналитическое решение зачастую не удается. Даже когда определяющие дифференциальные уравнения в частных производных линейны, область R может оказаться неоднородной, геометрия – нерегулярной, а описание граничных условий простыми математическими функциями связано с существенными затруднениями. В таких случаях приходится обращаться к приближенным методам решения граничных задач; в одной широко применяемой группе таких методов (например, в методах конечных разностей и конечных элементов) аппроксимации приходится применять во всей области R, в другой, как в рассматриваемом ниже методе граничных элементов, – только на границе C.

Для иллюстрации различий между упомянутыми двумя типами вычислительных процедур сопоставим метод граничных элементов с методом конечных элементов. Для простоты представим R двухмерной плоской областью, ограниченной контуром C (рис. 5.12).

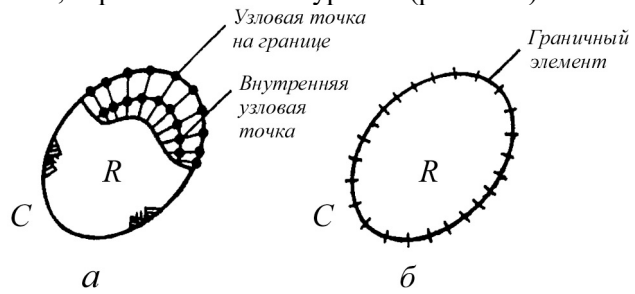


Рис. 5.12. Схемы разбиения двухмерной плоской области, ограниченной контуром C, с применением методов: а – конечных элементов; б – граничных элементов

В методе конечных элементов всю область R необходимо было бы разделить на подобласти с сеткой узлов, как показано на рис. 5.12, *а.* В методе граничных элементов на подобласти разбивается только граница C области, как показано на рис. 5.12, *б*. Численное решение строится на основе полученных предварительно аналитических решений для простых сингулярных задач таким образом, чтобы удовлетворить приближенно заданным граничным условиям в каждой подобласти контура C. Поскольку каждое сингулярное решение удовлетворяет в R определяющим дифференциальным уравнениям в частных производных, в этом случае нет

необходимости делить саму область R на сетку элементов. Порядок системы линейных алгебраических уравнений, подлежащих решению, оказывается значительно меньше порядка соответствующей разрешающей системы метода конечных элементов, однако относительное число нулевых элементов матрицы коэффициентов при неизвестных метода граничных элементов существенно меньше (как говорят, матрица коэффициентов при неизвестных в этом случае является полностью заполненной).

Технику граничных элементов можно пояснить более полно, если воспользоваться рис. 5.13.

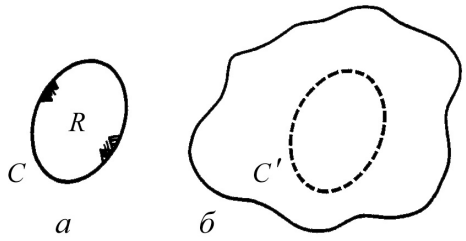


Рис. 5.13. К определению метода граничных элементов: а – область R, ограниченная контуром С; б – бесконечная область со штриховой линией C', отображающей след контура С на этой плоскости

Рис. 5.13, *а* представляет область R, ограниченную контуром C, – это тот же тип краевой задачи, который обсуждался выше в связи с рис. 5.12. На рис. 5.13, *б* показана *бесконечная область* со штриховой линией C', отображающей след контура C на этой плоскости. Зачастую легче находить аналитические решения соответствующих дифференциальных уравнений для неограниченной области (рис. 5.13, *б*), чем для фактической области R (рис. 5.13, *а*). В частности, достаточно просто найти сингулярное решение для точечного возмущения (например, источника, стока или сосредоточенной силы) в некоторой точке p в бесконечной области. Полагая, что это сингулярное решение соответствует на штриховой линии C' точно тем же условиям, которые заданы на границе C (рис. 5.13, *а*), можно пытаться решить задачу, соответствующую рис. 5.13, *а*, рассматривая задачу, которую иллюстрирует рис. 5.13, *б*.

Построение сингулярной функции, точно удовлетворяющей заданным граничным условиям на всем контуре C', в большинстве случаев также является трудно разрешимой задачей, поэтому обычно применяют следующую технику формирования приближенного решения [27]:

1. Контур C' разделяется на ряд элементов, внутри которых потенциал и его нормальная производная изменяются в соответствии с выбранными интерполирующими функциями. Эти элементы можно образовать с помощью прямых линий, круговых дуг, парабол и т.п.

2. Используется метод коллокаций, согласно которому для отдельных узловых точек, распределенных внутри каждого элемента, записывается дискретная форма уравнения, связывающего значение потенциала и его нормальных производных в каждом узле.

3. Интегралы по каждому элементу вычисляются с помощью одной из схем численного интегрирования.

4. Путем наложения граничных условий получается система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить остальные значения неизвестной функции на границе.

При необходимости значения искомой функции в произвольной внутренней точке могут быть определены по известным ее значениям на границе с помощью численного интегрирования соответствующих выражений теории потенциала.

В ряде случаев в методе граничных элементов для построения численного решения сложных задач используют частные сингулярные решения уравнений линейной теории упругости.

Характерно, что в методе граничных элементов точки аппроксимации можно выбирать произвольно и нет необходимости в автоматической привязке результатов к ряду фиксированных точек (узлов сетки), как в методе конечных элементов. Поскольку в методе граничных элементов используется аналитическое решение, которое справедливо всюду в области R, он потенциально более точен, чем метод конечных элементов, в котором аппроксимации производятся в каждой подобласти R. Компоненты напряженно-деформированного состояния более высокого порядка выражаются с помощью соответствующих операций дифференцирования основных сингулярных функций.

Вспомогательный контур C' на рис. 5.13, *б* можно рассматривать как границу для двух различных задач. В одной из них – так называемой *внутренней задаче* – рассматриваемая область R есть конечная область внутри контура C (см. рис. 5.13, *а*). Другая задача называется *внешней задачей*, и в этом случае R – неограниченная область вне контура C.

Методы граничных элементов особенно привлекательны во внешних задачах, когда контур C определяет границу полости в бесконечном теле. Если основное сингулярное решение выбрано так, что оно удовлетворяет соответствующим граничным условиям на бесконечности, то линейная комбинация таких решений также будет удовлетворять этим граничным условиям. Тогда при решении данной задачи достаточно поместить сингулярности только вдоль вспомогательного контура C'.

С другой стороны, конечно-элементная модель задачи требует, чтобы сетка была распространена «достаточно далеко» от границы полости, с тем чтобы условия, задаваемые на внешней границе сетки, не оказывали существенного влияния на решение вблизи полости. Элементы у внешней

границы сетки можно принимать достаточно большими, поскольку решение задачи мало изменяется от точки к точке на больших расстояниях от полости. Вместе с тем переход к сетке от внутренней границы к внешней должен быть «достаточно гладким», чтобы в решении точнее представить градиенты.

Таким образом, при задании конечно-элементной сетки в задаче о полости в бесконечном теле необходимо ответить на следующие три вопроса:

1. Достаточно ли детальна сетка на внутренней границе?
2. Достаточно ли удалена внешняя граница сетки от внутренней?
3. Достаточно ли удачно осуществлен в сетке переход между ними?

Замечательное вычислительное преимущество метода граничных элементов заключается в том, что при его применении возникает только первый вопрос. При этом легко исследовать влияние перехода ко все более мелким элементам с целью выяснить, как результаты вычислений зависят от задания элементов на границе полости. Процесс реализации такого анализа в методе конечных элементов весьма трудоемок, поскольку в каждом случае требуется полная перестройка конечно-элементной сетки.

Рассмотренное выше описание техники граничных элементов было намеренно упрощено и дано скорее в физических, нежели в математических терминах. Исторически методы граничных элементов развивались в двух различных и параллельных направлениях. Одно из них представляет интуитивный физический подход, а другое включает более тщательную математическую проработку на основе классической теории потенциалов.

Различие между физическими и математическими формулировками техники граничных элементов можно пояснить, напомнив, что в любой краевой задаче некоторые граничные параметры заданы как условия на границе, тогда как прочие отыскиваются при решении задачи в целом.

В физическом подходе, как подчеркнуто выше, вначале отыскиваются сингулярности, которые удовлетворяют заданным граничным условиям, и только затем через эти сингулярные решения вычисляются остальные граничные параметры. Поскольку неизвестные граничные параметры не определяются непосредственно, эта процедура носит название *непрямого* метода граничных элементов. В математическом подходе промежуточный этап исключается благодаря использованию некоторых фундаментальных интегральных теорем, что приводит к системе алгебраических уравнений, непосредственно связывающей неизвестные граничные параметры с параметрами, заданными на каждом элементе контура. Эта процедура называется *прямым* методом граничных элементов.

Ниже метод граничных элементов рассмотрим на примере статических задач линейной теории упругости. Следует, однако, иметь в виду возможности его эффективного применения для решения нестационарных задач, таких, как задачи о неустановившемся тепловом потоке, задачи линейной вязкоупругости и динамические задачи теории упругости.

Литература по методам граничных элементов в теории упругости более или менее равно распределяется между непрямыми и прямым подходами. В последние два десятилетия, в частности, получен целый ряд новых результатов в технике вычислений, используемой в методах граничных элементов; разработаны процедуры для решения различных классов нелинейных задач; разработаны методы, позволяющие учитывать упругопластическое поведение материала, исследованы процедуры для моделирования нелинейных граничных условий, которые возникают, когда на плоскости ослабления (например, на геологическом нарушении) возможно скольжение или раскрытие трещины.

5.7. Некоторые простые формы метода граничных элементов

Нормальная нагрузка на полуплоскости (задача Фламана). Задача о сосредоточенной силе, приложенной перпендикулярно к поверхности упругой изотропной полуплоскости, известна как задача Фламана и может служить примером применения сингулярных решений в теории упругости. Здесь покажем, как такое сингулярное решение можно использовать при построении численного метода решения более сложных задач, связанных с нагружением полуплоскости. Этот пример послужит для выяснения ряда основных черт метода граничных элементов в механике деформируемых твердых тел.

Задача Фламана иллюстрируется на рис. 5.14.

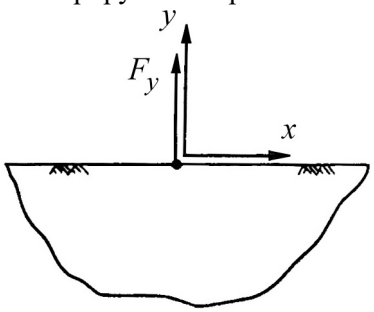


Рис. 5.14. К решению задачи Фламана

Нагрузка F_y, изображенная на нем, представляет линию сил, приложенных вдоль оси *Oz,* и имеет размерность силы, деленной на длину (Н/м). Таким образом, имеем задачу о плоской деформации и, следовательно, можно ограничиться рассмотрением типичного поперечного сечения – $\infty \le x \le \infty$ и $y \le 0$ с границей $y = 0$.

Напряжения в полуплоскости $y \le 0$ определяются следующими выражениями:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2}{\pi} F_y \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2}{\pi} F_y \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2}{\pi} F_y \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \qquad (5.93)$$

Перемещения, соответствующие этим напряжениям, выражаются формулами:

$$u_x = \frac{F_y}{2\pi G}\left[(1-2\mu)(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\frac{\pi}{2})+\frac{xy}{x^2+y^2}\right];$$

$$u_y = \frac{F_y}{2\pi G}\left[-2(1-\mu)\ln(\frac{x^2+y^2}{L^2})^{1/2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right], \qquad (5.94)$$

где L – произвольная постоянная, ее смысл поясняется в дальнейшем.

Компоненты вектора усилия $t_i = \sigma_{ji} n_j$ на границе полуплоскости определяются выражениями $t_x = \sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ и $t_y = \sigma_{yy}$, поскольку единичная внешняя нормаль n_j имеет компоненты $n_x = 0$ и $n_y = +1$. Из (5.93) ясно, что напряжения равны нулю на границе полуплоскости, за исключением начала координат $x = y = 0$, где они не определены. Говорят, что напряжения в этой точке сингулярны. Можно показать, что эти напряжения соответствуют сосредоточенной силе, приложенной в начале координат. Для этого достаточно убедиться в том, что результирующая нагрузка на внутренней поверхности, окружающей точку $x = y = 0$, равна F_y. Поскольку известно, что компоненты усилия равны нулю на границе полуплоскости $y = 0$, за исключением точки $x = y = 0$, то, очевидно, напряжения (5.93) вызваны сосредоточенной силой в начале координат.

Для того чтобы вычислить компонент смещения u_x в (5.94), необходимо определить функцию $\operatorname{arctg}(y/x)$, которая задается следующим образом:

$$\operatorname{arctg}(y/x) = \operatorname{Arctg}(y/x) + k\pi, \qquad (5.95)$$

где $\operatorname{Arctg}(y/x)$ означает главное значение арктангенса, т.е.

$$-\pi/2 \le \operatorname{Arctg}(y/x) \le +\pi/2.$$

Постоянная k в (5.95) определяется в зависимости от знаков x и y, а именно:

$$k = \begin{cases} +1, & x \prec 0, y \succ 0, \\ 0, \quad \text{при} & x \ge 0 \\ -1, & x \prec 0, y \prec 0. \end{cases} \qquad (5.96)$$

Эти условия требуют, чтобы значения функции $\operatorname{arctg}(x/y)$ находились в интервале от $-\pi$ до $+\pi$. Для полубесконечной области $y \le 0$ значения этой функции изменяются от $-\pi$ до 0, т.е.

$$-\pi \le \operatorname{arctg}(y/x) \le 0, \quad y \le 0. \qquad (5.97)$$

В частности, при $y = 0$ получаются следующие значения:

$$\operatorname{arctg}(y/x)=\begin{cases}-\pi, & \text{если} \quad x\prec 0, y=0,\\ 0, & \text{если} \quad x\succ 0, y=0.\end{cases} \tag{5.98}$$

Приняв во внимание эти результаты в первом из выражений (5.94), получим:

$$u_x=-\frac{1-2\mu}{4G}F_y,\ \ x\prec 0,\ \ y=0;$$

$$u_x=+\frac{1-2\mu}{4G}F_y,\ \ x\succ 0,\ \ y=0, \tag{5.99}$$

т.е. перемещение u_x границы полуплоскости есть постоянная по обе стороны от приложенной силы величина. Если $F_y\succ 0,$ то точки границы полуплоскости перемещаются всюду, включая начало координат.

И, наконец, принимая y равным нулю, из второго выражения (5.94) получаем:

$$u_y=-\frac{1-\mu}{\pi G}F_y\left[\ln|x|-\ln|L|\right],\ \ y=0\,. \tag{5.100}$$

В соответствии с этим уравнением перемещение u_y стремится к $+\infty$ в точке приложения линейной силы $F_y\succ 0$ и к $-\infty$ на большом удалении от этой точки. Бесконечно большие по модулю перемещения обусловлены характером нагрузки на границе области, напряженно-деформированное состояние в которой соответствует условиям плоской деформации и действию силы вдоль бесконечной в направлении оси Oz линии, действию же бесконечно большой по величине силы соответствуют неограниченные перемещения.

Постоянная L в (5.94) была введена, чтобы конкретизировать значения u_y в задаче Фламана. Согласно (5.100), u_y равно нулю при $x=\pm L,\ \ y=0$. Этот выбор произволен и означает, что мы условились измерять u_y относительно смещения произвольной точки $x=\pm L$ границы полуплоскости.

Распределенная нагрузка. Решение задачи Фламана с помощью принципа суперпозиции может быть обобщено для упругой полуплоскости $y\le 0$ при более сложном распределении напряжений на ее границе. Простейшим случаем является одновременное действие нескольких различных по величине сосредоточенных сил. В этом случае просто «сдвигаем» решение, данное выше, так чтобы оно соответствовало точке приложения нагрузки, и суммируем любое число таких трансформированных решений. Например, для решения задачи, изображенной на рис. 5.15, будем

совмещать два решения: одно, полученное заменой F_y на $F_y^{(1)}$ и x на $x-\xi^{(1)}$, и другое, полученное заменой F_y на $F_y^{(2)}$ и x на $x-\xi^{(2)}$. Иллюстрацией этой процедуры служит использование второго уравнения (5.94) для выражения перемещения u_y в задаче, изображенной на рис. 5.15:

$$u_y = \frac{F_y^{(1)}}{2\pi G}\{-2(1-\mu)[\ln\sqrt{(x-\xi^{(1)})^2+y^2} - \ln\left|L-\xi^{(1)}\right|] + \\ + \frac{y^2}{(x-\xi^{(1)})^2+y^2}\} + \frac{F_y^{(2)}}{2\pi G}\{-2(1-\mu)[\ln\sqrt{(x-\xi^{(2)})^2+y^2} - \\ - \ln\left|L-\xi^{(2)}\right|] + \frac{y^2}{(x-\xi^{(2)})^2+y^2}\}. \qquad (5.101)$$

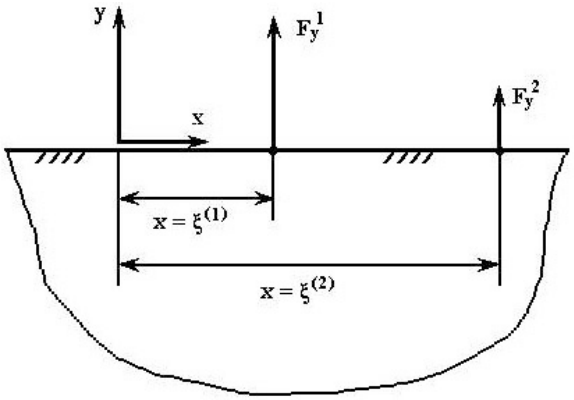


Рис. 5.15. К решению задачи Фламана при одновременном действии нескольких различных по величине сосредоточенных сил

Заметим, что произвольная постоянная L в (5.94) заменяется в различных членах этого выражения на $L-\xi^{(1)}$ и $L-\xi^{(2)}$. Это необходимо для того, чтобы в точке $x=L,\ y=0$ значение u_y было равным нулю для обеих сил $F_y^{(1)}$ и $F_y^{(2)}$.

Выражение (5.101) можно записать в форме

$$u_y = F_y^{(1)} I(x-\xi^{(1)}, y) + F_y^{(2)} I(x-\xi^{(2)}, y),$$

где, например, величина

$$I(x-\xi^{(2)}, y) = \frac{1}{2\pi G}\{-2(1-\mu)[\ln\sqrt{(x-\xi^{(2)})+y^2} - \\ - \ln\left|L-\xi^{(2)}\right|] + y^2/[(x-\xi^{(2)})^2+y^2]\}$$

равна перемещению u_y от действия силы $F_y^{(2)}$, показанной на рис. 5.15, и называется функцией влияния этой силы.

В случае непрерывного распределения нагрузки на границе полуплоскости решение может быть найдено путем интегрирования. Предположим, что напряжения $t_x = \sigma_{xy}$ и $t_y = \sigma_{yy}$ заданы следующим образом:

$$\sigma_{xy} = 0, \text{ если } -\infty \le x \le \infty,\ y = 0;$$
$$p_y(x), \text{ если } b_1 \le x \le b_2,\ y = 0;$$
$$\sigma_{yy} = 0 \text{ в других точках при } y = 0. \qquad (5.102)$$

Функция $p_y(x)$ может иметь вид, показанный для примера на рис. 5.16.

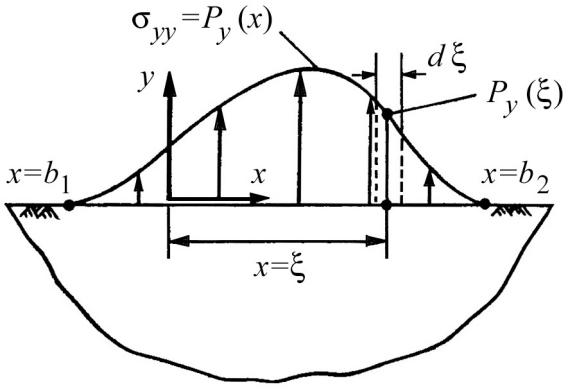


Рис. 5.16. К решению задачи Фламана при действии распределенной нагрузки

Результирующая сила (на единицу длины) F_y в пределах малого участка $d\xi$ границы около точки $x = \xi$ представляется произведением напряжения в этой точке $p_y(\xi)$ на длину элементарного участка $d\xi$, в пределах которой оно действует, т.е.

$$F_y(\xi) = p_y(\xi)d\xi. \qquad (5.103)$$

Если рассмотреть большое число, например *N*, таких точек $\xi^{(i)}$, *i*=1,2,…, *N*, вдоль границы, то можно просуммировать влияние дискретных сил по способу, указанному выше. Перемещение u_y, например, можно представить в виде

$$u_y = \frac{1}{2\pi G}\sum_{i=1}^{N}\{-2(1-\mu)[\ln\sqrt{(x-\xi^{(i)})^2 + y^2} - \ln\left|L-\xi^{(i)}\right|] +$$

$$+\frac{y^2}{(x-\xi^{(i)})^2+y^2}\}p_y(\xi^{(i)})d\xi^{(i)}. \qquad (5.104)$$

Переходя к пределу при $d\xi^{(i)} \to 0,$ заменим суммирование интегрированием вдоль отрезка $b_1 \le x \le b_2$. В результате получим:

$$u_y = \frac{1}{2\pi G}\int_{b(1)}^{b(2)_n} \{-2(1-\mu)[\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2} - \ln|L-\xi|] +$$

$$+\frac{y^2}{(x-\xi)^2+y^2}\}p_y(\xi)d\xi. \qquad (5.105)$$

Аналогичные выражения можно написать для $u_x, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ и σ_{xy}.

В каждом из них получается интеграл, аналогичный (5.105), но содержащий свою функцию влияния.

Постоянное нормальное напряжение вдоль полоски конечной ширины. Как пример задачи о распределенной нагрузке рассмотрим случай, когда напряжения $p_y(x)$ на границе $y = 0$ постоянны в пределах полоски $-a \le x \le a, y = 0$ и равны нулю вне ее. Этой задаче соответствует рис. 5.17 и следующие граничные условия:

$$\sigma_{xy} = 0, \ |x| \prec \infty, \ y = 0;$$

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} P_y, \text{ если } |x| \prec a, y = 0; \\ 0, \text{ если } |x| \succ a, y = 0. \end{cases} \qquad (5.106)$$

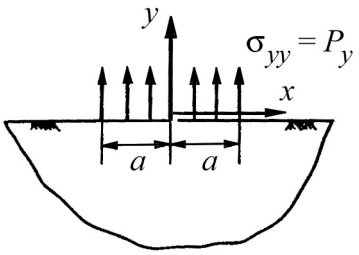


Рис. 5.17. К решению задачи Фламана при действии постоянного нормального напряжения вдоль полоски конечной ширины

Поступая, как указано выше, с учетом того, что $p_y(x) = P_y, b_1 = -a$ и $b_2 = a,$ получаем:

$$u_x = -\frac{P_y}{2\rho G}\{(1-2v)[(x-a)\theta_1 - (x+a)\theta_2 - \pi a] +$$

$$+(1-v)y\ln(r_1^2/r_2^2)\ \}; \qquad (5.107)$$

$$u_y = \frac{P_y}{2G}\{-(1-2v)y(\theta_1-\theta_2)+(1-v)[(x-a)\ln r_2^2 -$$
$$-(x+a)\ln r_2^2+(L+a)\ln(L+a)^2-(L-a)\ln(L-a)^2]\};$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{P_y}{\pi}[\theta_1-\theta_2+y(x-a)/r_1^2 - y(x+a)/r_2^2];$$
$$\sigma_{yy} = -\frac{P_y}{\pi}[\theta_1-\theta_2-y(x-a)/r_1^2 + y(x+a)/r_2^2];$$
$$\sigma_{xy} = -\frac{P_y}{\pi}y^2(1/r_1^2-1/r_2^2). \qquad (5.108)$$

В этих выражениях использованы обозначения

$$\theta_1 = \text{arctg}(y/(x-a));\ \theta_2 = \text{arctg}(y/(x+a)),$$
$$r_1^2 = (x-a)^2+y^2;\ r_2^2 = (x+a)^2+y^2. \qquad (5.109)$$

Смысл введенных параметров поясняет рис. 5.18. Параметры r_1 и r_2 выражают расстояния от точек $x=+a,\ y=0$ и $x=-a,\ y=0$ до произвольной точки (x,y); $-\theta_1, -\theta_2$ – углы между положительным направлением оси *Ox* и линиями r_1 и r_2.

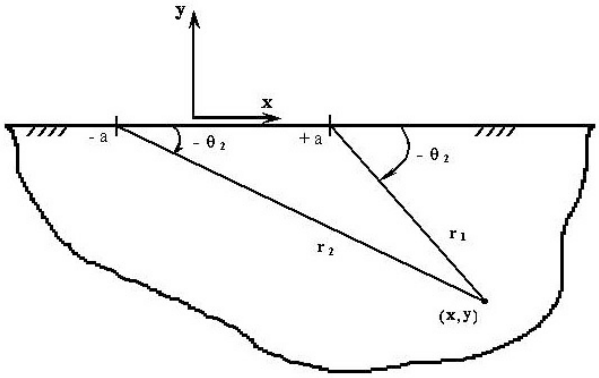


Рис. 5.18. К определению параметров r_1, r_2, θ_1, θ_2

Нетрудно убедиться в том, что напряжения σ_{xy} и σ_{yy} в (5.108) удовлетворяют граничным условиям (5.106). Например, при $y=0$ выражение для σ_{yy} преобразуется к виду:

$$\sigma_{yy} = -P_y(\theta_1-\theta_2)/\pi.$$

Согласно рис. 5.18, при $y = 0$ угол θ_1 равен θ_2, за исключением участка $|x| \prec a$, где $\theta_2 = 0$ и $\theta_1 = -\pi$. Таким образом, можно утверждать, что при $y = 0$ σ_{yy} равно нулю, если $|x| \succ a$, и σ_{yy} равно P_y, если $|x| \prec a$, как и должно быть согласно заданным условиям.

Численное решение задачи о распределенной нагрузке. Для большинства распределений $p_y(x)$ нагрузок на границе интегралы типа (5.105) не имеют аналитических выражений. Поэтому может оказаться невозможным получение аналитического решения для конкретного распределения нагрузки. Однако, рассматривая дискретную аппроксимацию фактического распределения напряжений на границе путем разбиения нагруженной части границы полуплоскости на *N* участков (рис. 5.19), всегда можно решить задачу численно.

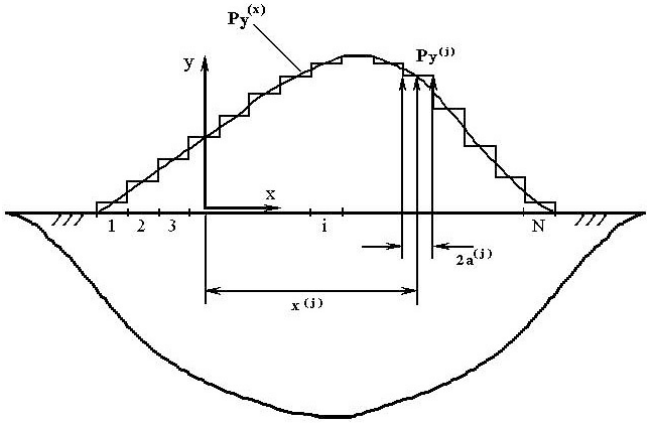


Рис. 5.19. Разбиение нагруженной части границы полуплоскости на участки

Эти участки называются граничными элементами.

Нормальные напряжения на каждом граничном элементе приняты постоянными; для типичного элемента *j* эти напряжения обозначаются через $P_y^{(j)}$. Смещения и напряжения в произвольной точке (x, y) полуплоскости, вызванные напряжением на *j*-м элементе, могут быть определены путем замены P_y, L, x и a в (5.107)–(5.109) на $P_y^{(j)}, L - x^{(j)}, x - x^{(j)}$ и $a^{(j)}$ соответственно, где $x^{(j)}$ – координата средней точки элемента, а $2a^{(j)}$ – его длина. Тогда численное решение задачи находится как сумма *N* отдельных решений, соответствующих всем номерам *j* от единицы до *N*.

Эта процедура эквивалентна простому численному интегрированию функций, определяющих смещения и напряжения в полуплоскости $y \le 0$ при произвольном распределении нормальных напряжений, приложенных на

границе. Очевидно, можно подойти сколь угодно близко к точному решению, выбирая граничные элементы все меньшей и меньшей длины.

Задача о вдавливании штампа. Задачи, рассмотренные выше, относятся к случаям, когда на границе упругой полуплоскости $y \le 0$ заданы напряжения $t_x = \sigma_{xy}$ и $t_y = \sigma_{yy}$. Согласно принятой терминологии, эти задачи относят к типу граничных задач в напряжениях.

Другой тип граничных задач для упругой полуплоскости относится к случаю, когда на границе заданы и смещения, и напряжения (смешанные задачи теории упругости). Пример смешанной граничной задачи о вдавливании в полуплоскость жесткого штампа со «смазкой» на контакте показан на рис. 5.20.

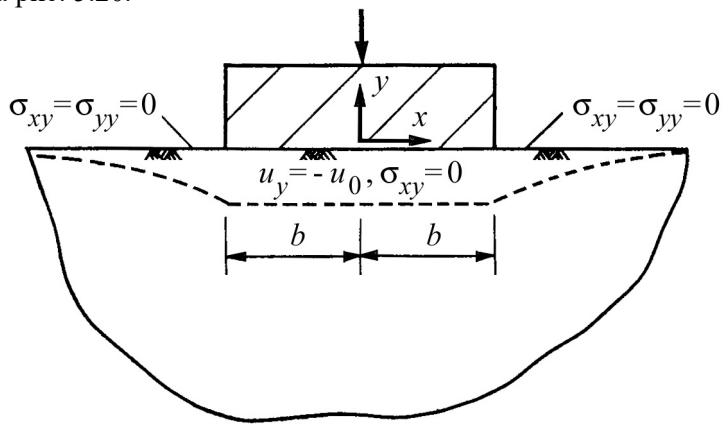


Рис. 5.20. К решению смешанной граничной задачи о вдавливании в полуплоскость жесткого штампа со «смазкой» на контакте

Граничные условия в этом случае записываются следующим образом:

$$u_y = -u_0, \ |x| \le b, \ y = 0;$$
$$\sigma_{xy} = 0, \ |x| \prec \infty, \ y = 0;$$
$$\sigma_{yy} = 0, \ |x| \succ b, \ y = 0. \qquad (5.110)$$

Эти условия требуют, чтобы смещения u_y непосредственно под штампом, $|x| \le b, \ y = 0,$ были постоянными и равными $-u_0 (u_0 \succ 0)$. Кроме того, касательные напряжения σ_{xy} равны нулю по всей границе, включая область $|x| \le b$ под штампом (предполагается, что смазка обеспечивает условия, при которых на контакте штампа с полуплоскостью не возникают касательные напряжения, вызванные трением). И, наконец, нормальные напряжения σ_{yy} равны нулю при $y = 0$ для $|x| \succ b,$ т.е. в точках, где не

заданы смещения u_y. Под штампом ($|x| \le b,\ y = 0$) нормальные напряжения неизвестны.

Решение смешанных краевых задач данного типа может быть получено в аналитической форме с применением теории комплексных переменных или интегральных преобразований. Здесь в качестве простого примера метода граничных элементов рассмотрим численную процедуру решения задачи.

Численная процедура. Вначале сформулируем следующую задачу: определить характер распределения нормальных напряжений $\sigma_{yy} = t_y(x)$ на участке $|x| \le b,\ y = 0$, соответствующий постоянному на этом участке и равному u_0 смещению u_y. Введем в рассмотрение на участке $|x| \le b,\ y = 0$ N граничных элементов одинаковых размеров и предположим, что эти элементы настолько малы, что нормальное напряжение σ_{yy} в каждом из них может считаться постоянным; такое напряжение в j-м элементе обозначим через $T_y^{(j)}$. Тогда численное решение рассматриваемой задачи сводится к отысканию таких значений напряжений $T_y^{(j)}$ для всех $j = 1,2,...,N$, при которых смещение в центре каждого из элементов окажется постоянным и равным u_0.

На рис. 5.21 участок $|x| \le b, y = 0$ разделен на N граничных элементов длиной $2a$ каждый, координаты x центров i-го и j-го элементов соответственно равны $x^{(i)}$ и $x^{(j)}$.

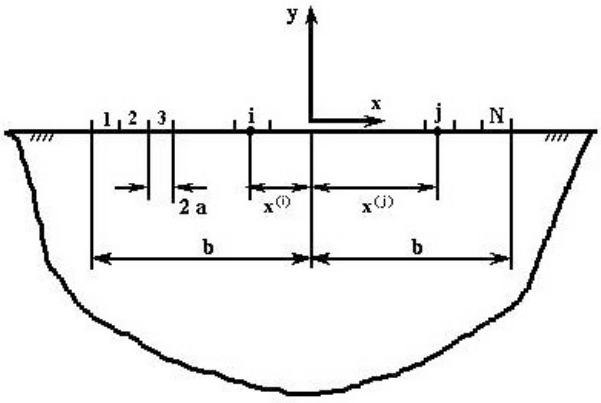


Рис. 5.21. К определению численной процедуры решения

Смещение u_y произвольной точки границы полуплоскости, вызванное действием нормальной нагрузки P_y на участке $|x| \le a, u = 0$, может быть определено из выражения (5.107):

$$u_y = -\frac{1-\mu}{\pi G} P_y [(x+a)\ln|x+a| - (x-a)\ln|x-a| + \\ + (L-a)\ln(L-a) - (L+a)\ln(L+a)], \qquad (5.111)$$

при этом рассматриваются только положительные значения величин $x+a$ и $x-a$. Если постоянная нагрузка действует на полоске шириной $2a$ с центром в точке $x = x^{(j)}$, $y = 0$, то (5.111) можно записать в виде:

$$u_y = -\frac{1-\mu}{\pi G} T_y^{(j)} [(x - x^{(j)} + a)\ln|x - x^{(j)} + a| - \\ - (x - x^{(j)} - a)\ln|x - x^{(j)} - a| + (L - x^{(j)} - a)\times \\ \times \ln(L - x^{(j)} - a) - (L - x^{(j)} + a)\ln(L - x^{(j)} + a)], \qquad (5.112)$$

где в соответствии с принятым ранее обозначением вместо P_y подставлено $T_y^{(j)}$. Смещение u_y, согласно (5.112), обращается в нуль при $x = L$.

Теперь смещение в центре *i*-го элемента, вызванное действием постоянной нагрузки в *j*-м элементе, выразим подстановкой $x = x^{(i)}$ в (5.112):

$$u_y(x^{(i)},0) = -\frac{1-\mu}{\pi G} T_y^{(j)} [(x^{(i)} - x^{(j)} + a)\ln|x^{(i)} - x^{(j)} + a| - \\ - (x^{(i)} - x^{(j)} - a)\ln|x^{(i)} - x^{(j)} - a| + (L - x^{(j)} - a)\times \\ \times \ln(L - x^{(j)} - a) - (L - x^{(j)} + a)\ln(L - x^{(j)} + a)].$$

Смещение u_y в центре *i*-го элемента, возникающее от действия постоянной нагрузки во всех *N* элементах, определяется путем суперпозиции:

$$u_y^{(i)} = u_y(x^{(i)},0) = \sum_{j=1}^{N} B^{(ij)} T_y^{(j)}, \qquad (5.113)$$

где

$$B^{(ij)} = -\frac{1-\mu}{\pi G} [(x^{(i)} - x^{(j)} + a)\ln|x^{(i)} - x^{(j)} + a| - \\ - (x^{(i)} - x^{(j)} - a)\ln|x^{(i)} - x^{(j)} - a| + (L - x^{(j)} - a)\times \\ \times \ln(L - x^{(j)} - a) - (L - x^{(j)} + a)\ln(L - x^{(j)} + a)]. \qquad (5.114)$$

Назовем коэффициент $B^{(ij)}$, выражающий смещение в центре *i*-го элемента, которое вызвано действием постоянной единичной нагрузки на *j*-м

элементе, коэффициентом влияния, его величина зависит от других постоянных, а также от размеров и положения граничных элементов. Из (5.114) следует, что коэффициенты $B^{(ij)}$ при рассмотрении интересующей нас области всегда конечны и не равны нулю (если выполняется условие $L \succ x^{(j)}$ для всех j от 1 до N).

Предположим, что смещение $u_y^{(i)}$ представляет собой смещение на участке $\left|x - x^{(i)}\right| \le a, y = 0$. Тогда численное решение задачи о штампе выражается следующей системой N линейных уравнений с N неизвестными:

$$u_y^{(i)} = -u_0 = \sum_{j=1}^{N} B^{(ij)} T_y^{(j)},\ i=1,\ldots,N. \tag{5.115}$$

Эти уравнения могут быть решены относительно $T_y^{(i)}, i = 1,..., N,$ с помощью стандартных методов численного анализа.

Решение задачи о жестком штампе. Аналитическое решение для напряжений $t_y(x) = \sigma_{yy}$ под жестким штампом со смазкой (см. рис. 5.20) может быть представлено в виде [48]:

$$t_y(x) = -\frac{Gu_0}{(1-\mu)\ln 2}\frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}},\ \left|x\right| \prec b. \tag{5.116}$$

Компонент y смещения на границе равен:

$$u_y = -u_0,\ \text{если}\ \left|x\right| \le b,\ \ y = 0,$$

$$u_y = -u_0\left[1 - \frac{\ln(x/b + \sqrt{x^2/b^2 - 1})}{\ln 2}\right],\ \text{если}\ \left|x\right| \succ b, y = 0. \tag{5.117}$$

Отсюда следует, что смещение под штампом измеряется относительно смещения границы полуплоскости в точке $x = L = 1{,}25b$.

Как иллюстрацию численной процедуры, описанной выше, приведем численное решение задачи о штампе для случая, когда $u_0 / b = 0{,}001$ и $\mu = 0{,}1$. На рис. 5.22 показаны две численные аппроксимации аналитического решения для напряжения $t_y(x)$ под штампом. Результаты представлены в безразмерной форме применительно к произвольным значениям G и b. Первая аппроксимация (рис. 5.22, *а*) соответствует схеме с 10 граничными элементами, вторая (рис. 5.22, *б*) – с 20 элементами (соответственно 10 и 20 линейных уравнений).

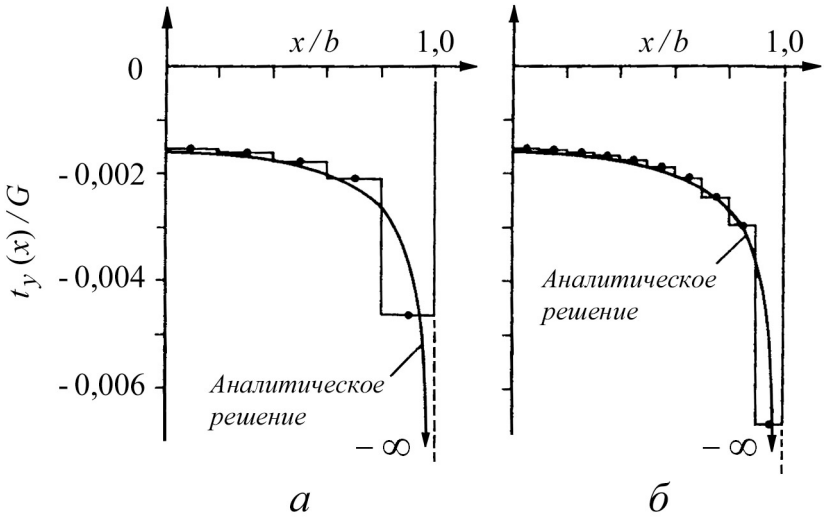


Рис. 5.22. К решению задачи о жестком штампе при различном разбиении границы: а – 10 граничных элементов; б – 20 граничных элементов

В обоих случаях численные результаты близки к результатам аналитического решения, за исключением точек непосредственно у края штампа, где теоретически напряжение бесконечно.

Смещения и напряжения в любой точке полуплоскости $y \le 0$ выражаются как линейные комбинации нагрузок $T_y^{(i)}, i = 1,..., N$. Соответствующие коэффициенты влияния получаются из (5.107) и (5.108). В частности, смещение $u_y(x,0)$ границы может быть представлено суммой N слагаемых вида (5.112). Значения для $u_y(x,0)$, рассчитанные таким способом, сопоставляются на рис. 5.23 с аналитическим решением (5.117) для случая $N = 20$.

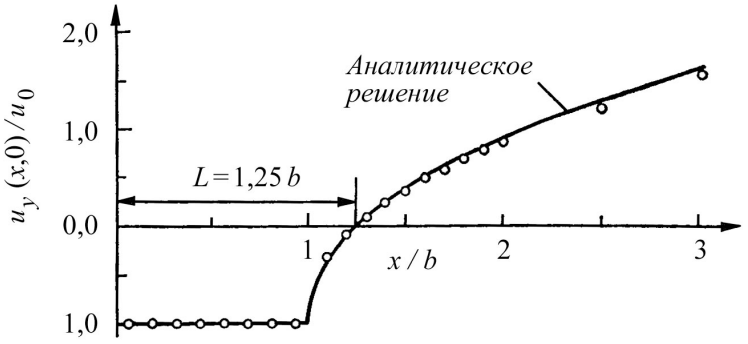


Рис. 5.23. Сопоставление численного и аналитического решений задачи о жестком штампе для $u_y(x,0)$

Результаты даны также в безразмерной форме и применимы при любых значениях u_0 и b. Погрешность численной аппроксимации при $x/b = 3$ составляет около 5%. Ошибка уменьшается с уменьшением величины x/b и равна нулю в серединах элементов при $x/b \le 1$.

Неравномерное расположение элементов. Коэффициенты влияния $B^{(ij)}$ в (5.114) получены для случая, когда все граничные элементы имеют одинаковую длину $2a$. В общем случае, когда принято разбиение на элементы различной длины $2a^{(j)}, j = 1,2,...,N$, и в каждом из них напряжения выражены постоянной величиной, т.е.

$$t_y(x) = T_y^{(j)} \text{ при } \left|x - x^{(j)}\right| \le a^{(j)},\ j = 1,...,N, \qquad (5.118)$$

исходя из вышеизложенного, коэффициенты влияния $B^{(ij)}$ можно выразить следующим образом:

$$B^{(ij)} = -\frac{1-\mu}{\pi G}[(x^{(i)} - x^{(j)} + a^{(j)})\ln\left|x^{(i)} - x^{(j)} + a^{(j)}\right| -$$
$$-(x^{(i)} - x^{(j)} - a^{(j)})\ln\left|x^{(i)} - x^{(j)} - a^{(j)}\right| + (L - x^{(j)} - a^{(j)})\times$$
$$\times\ln(L - x^{(j)} - a^{(j)}) - (L - x^{(j)} + a^{(j)})\ln(L - x^{(j)} + a^{(j)})]. \qquad (5.119)$$

Численное решение задачи о жестком штампе при неравномерном расположении элементов теперь можно найти, используя для $B^{(ij)}$ в (5.115) формулу (5.119).

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда участок вдавливания длиной $2b$ разделен на 10 граничных элементов разных размеров, и, кроме того, примем, что $u_0/b = 0{,}001$ и $\mu = 0{,}1$.

Размеры элементов приведены на рис. 5.24 и изменяются от $0{,}4b$ у осевой линии штампа до $0{,}1b$ у его концов.

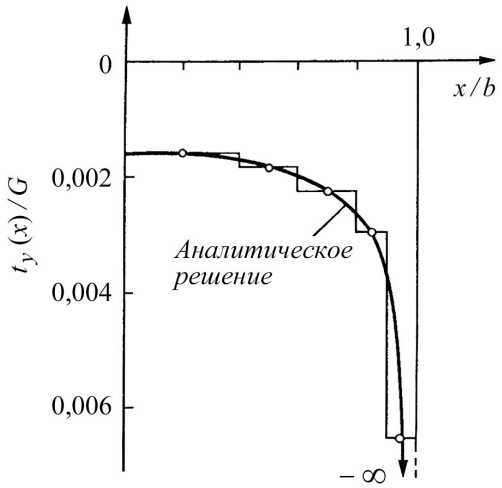


Рис. 5.24. Сопоставление численного и аналитического решений задачи о жестком штампе для $t_y(x)$

Численные результаты, представленные на рис. 5.24, хорошо согласуются с результатами, полученными ранее для элементов одинаковой длины (см. рис. 5.22), но при вдвое большем их числе. Однако в большинстве случаев целесообразно выбирать расчетную схему с граничными элементами примерно одинаковых размеров.

Значения $T_y^{(i)}$, показанные на рис. 5.22 и 5.24, постоянны в пределах каждого элемента i по построению. Однако удобнее представить, что эти значения соответствуют средним точкам элементов $x^{(i)}$. Тогда гладкую кривую, проходящую через эти точки, можно рассматривать как аппроксимацию точного решения.

Учет симметрии. Результаты, показанные на рис. 5.22–5.24, симметричны относительно линии $x = 0$. Условие симметрии такого рода встречается в практических задачах довольно часто, и его легко учесть в методе граничных элементов. Полезно проследить, как это делается в случае задачи о жестком штампе.

Прежде всего расположим граничные элементы симметрично относительно линии $x = 0$. Отсюда следует, что значения $T_y^{(j)}, j = 1,..., N,$ в (5.115) также симметричны относительно этой линии, и поэтому достаточно рассмотреть только одну половину границы полуплоскости, например часть $x \geq 0$ (рис. 5.25).

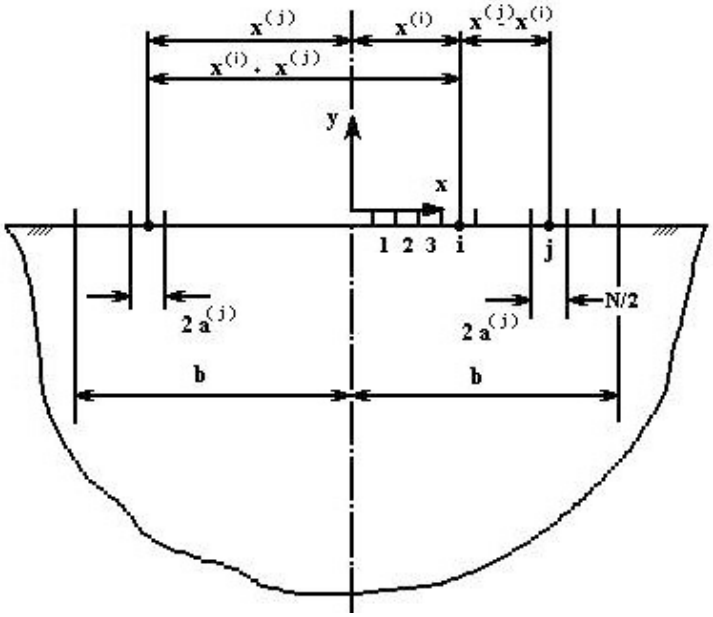


Рис. 5.25. К учету симметрии в задаче о жестком штампе

На рисунке интервал $0 \le x \le b$ разделен на $N/2$ граничных элементов.

Если напряжение на *j*-м граничном элементе равно $T_y^{(i)}$, то априори известно, что такое же напряжение действует на отражении этого элемента относительно линии $x = 0$. Координата x центра *j*-го элемента равна $x^{(j)}$, следовательно, его отражение имеет координату x центра, равную – $x^{(j)}$. Смещение $u_y^{(i)}$ в центре *i*-го элемента зависит от напряжений на обоих элементах – на самом *j*-м элементе и на его отражении. При этом известно, что напряжения на этих двух элементах равны, отсюда из (5.115) и (5.119) находим:

$$u_y^{(i)} = -\frac{1-\mu}{\pi G}\sum_{j=1}^{N/2}[(x^{(i)} - x^{(j)} + a^{(j)})\ln\left|x^{(i)} - x^{(j)} + a^{(j)}\right| -$$

$$-(x^{(i)} - x^{(j)} - a^{(j)})\ln\left|x^{(i)} - x^{(j)} - a^{(j)}\right| + (L - x^{(j)} - a^{(j)})\times$$

$$\times\ln(L - x^{(j)} - a^{(j)}) - (L - x^{(j)} + a^{(j)})\ln(L - x^{(j)} + a^{(j)})]T_y^{(j)} -$$

$$-\frac{1-\mu}{\pi G}\sum_{j=1}^{N/2}[(x^{(i)} + x^{(j)} + a^{(j)})\ln\left|x^{(i)} + x^{(j)} + a^{(j)}\right| - (x^{(i)} +$$

$$+ x^{(j)} - a^{(j)})\ln\left|x^{(i)} + x^{(j)} - a^{(j)}\right| + (L + x^{(j)} - a^{(j)})\ln(L +$$

$$+x^{(j)}-a^{(j)})-(L+x^{(j)}+a^{(j)})\ln(L+x^{(j)}+a^{(j)})]T_y^{(j)} \qquad (5.120)$$

для $i=1,2,...,N/2$.

Первая группа слагаемых в (5.120) определяет вклад $N/2$ граничных элементов, расположенных справа от линии симметрии. Вторая группа дает вклад $N/2$ отраженных элементов. Члены второй группы получены из первых путем замены $x^{(j)}$ на $-x^{(j)}$ (см. рис. 5.25). Эти две группы слагаемых можно объединить и представить (5.120) в виде:

$$u_y^{(i)}=\sum_{j=1}^{N/2}B^{(ij)}T_y^{(j)},\ \ i=1,...,N/2, \qquad (5.121)$$

в которой новые коэффициенты влияния $B^{(ij)}$ автоматически учитывают наличие линии симметрии $x=0$.

Таким образом, мы установили, что наличие линии симметрии можно использовать для сокращения вдвое числа искомых неизвестных. В заключение отметим, что подобная процедура может быть использована и в случае, когда центр какого-либо элемента лежит на линии симметрии. Единственное отличие заключается в том, что при определении коэффициентов влияния с этим элементом не сопоставляется отраженный элемент. Система уравнений при этом увеличивается на одно уравнение.

Резюмируя рассмотренные выше примеры, еще раз обратим внимание на основные приемы, используемые в методе граничных элементов.

Вначале получено сингулярное решение задачи Фламана для сосредоточенной силы, приложенной перпендикулярно к поверхности упругой полуплоскости $y\le 0.$

Затем это решение обобщено с целью решить задачу о действии постоянной нормальной нагрузки, приложенной к малому элементу поверхности полуплоскости. По построению это решение таково, что касательный компонент усилия $t_x=\sigma_{yx}=\sigma_{xy}$ равен нулю на всей поверхности $|x|\prec\infty, y=0.$ Нормальный компонент усилия $t_y=\sigma_{yy}$ равен постоянной P_y в пределах элемента $|x|\le a, y=0$ и равен нулю при всех значениях $|x|\succ a, y=0$.

Далее интегральная форма решения Фламана применена для нахождения численного решения краевой задачи при заданных напряжениях, когда рассматриваемая область – полуплоскость $y\le 0.$ Произвольное непрерывное распределение приложенной нормальной нагрузки можно аппроксимировать дискретным распределением, в котором различные по величине нормальные напряжения P_y действуют на каждом из *N* граничных элементов.

На части границы с неизвестными нормальными усилиями $t_y(x)$ должны быть заданы нормальные смещения, как, например, в задаче о вдавливании жесткого штампа со смазкой. В этом случае интегральная форма решения Фламана используется для того, чтобы выразить известные смещения в средних точках каждого из граничных элементов через неизвестные (но предполагаемые кусочно-постоянными) усилия в них. В итоге исходная смешанная краевая задача сводится к системе N алгебраических уравнений с N неизвестными. После решения этих уравнений можно вычислить смещения и напряжения в любой интересующей нас точке полуплоскости путем суперпозиции N решений.

Интегральная формулировка. В заключение отметим, что выражение (5.105) можно рассматривать как решение задачи о вдавливании жесткого штампа в строгой постановке. Если в (5.105) подставить $b_1 = -b$, $b_2 = +b$, $p_y(\xi) = t_y(\xi)$, получим следующее выражение:

$$u_y(x,y) = \frac{1}{2\pi G}\int_{-b}^{+b}\{-2(1-\mu)[\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2} - \ln(L-\xi)] + \frac{y^2}{(x-\xi)^2+y^2}\}t_y(\xi)d\xi. \qquad (5.122)$$

В этом выражении граничные напряжения $t_y(x)$ неизвестны при $|x| \le b$. Подставляя в (5.122) $y = 0$, приходим к уравнению для определения u_y на границе полуплоскости:

$$u_y(x,0) = -\frac{1-\mu}{\pi G}\int_{-b}^{+b}[\ln|x-\xi| - \ln(L-\xi)]t_y(\xi)d\xi. \qquad (5.123)$$

В соответствии с (5.110) имеем, что при $|x| \le b$ смещение $u_y(x,0)$ равно постоянной величине $-u_0$. Таким образом, левая часть (5.123) известна для всех x, лежащих на отрезке интегрирования.

Уравнение (5.123) называется интегральным уравнением, поскольку неизвестная величина находится под знаком интеграла. Аналитическое решение этого уравнения дается формулой (5.116), а численное решение можно построить на основе идеализированного представления об изменении напряжения $t_y(x)$ на отрезке $|x| \le b$.

Прежде всего заметим, что выражение (5.123) можно записать применительно к произвольной точке $x = x^{(i)}$ поверхности полуплоскости в виде:

$$u_y(x^{(i)},0) = -\frac{1-\mu}{\pi G}\int_{-b}^{+b}[\ln\left|x^{(i)}-\xi\right| - \ln(L-\xi)]t_y(\xi)d\xi, \qquad (5.124)$$

что является точным решением. Разделим теперь отрезок $|x| \le b$ на N элементов длиной $2a$ каждый и предположим, что в пределах каждого элемента напряжение $t_y(x)$ постоянно, т.е.

$$t_y(x) = T_y^{(j)} \text{ при } \left|x - x^{(j)}\right| \le a,\ j = 1,...,N, \qquad (5.125)$$

где $x^{(j)}$ – координата центра *j*-го элемента. Тогда, после подстановки (5.125) в (5.124), получим приближенное решение:

$$u_y(x^{(i)},0) = -\frac{1-\mu}{\pi G}\sum_{j=1}^{N} T_y^{(j)} \int_{x^{(j)}-a}^{x^{(j)}+a}[\ln\left|x^{(i)}-\xi\right| - \ln(L-\xi)]d\xi, \qquad (5.126)$$

в котором i изменяется от 1 до *N*. Записывая $u_y^{(i)}$ вместо $u_y(x^{(i)},0)$ и вычисляя интеграл в (5.126), придем к результатам описанной выше численной процедуры.

5.8. Прямой метод граничных интегралов

В рассмотренной выше разновидности метода граничных элементов, а также в методах фиктивных нагрузок и разрывных смещений [27] неизвестные перемещения и напряжения могут быть определены только после построения тех или иных вспомогательных функций, выражающих, в частности, разрывы смещений, фиктивные напряжения и др. В этом разделе используется несколько иной подход, позволяющий находить неизвестные смещения и напряжения на границе непосредственно через заданные граничные условия и известный в литературе под названием «прямой метод граничных интегралов». В основу этого подхода положена теорема о взаимности работ.

Теорема взаимности и ее следствия. Теорема взаимности связывает решения двух различных граничных задач для одной и той же области R. Теорема представляет собой прямое следствие линейных соотношений, выражающих уравнения равновесия и обобщенный закон Гука.

Предположим, что одна граничная задача характеризуется перемещениями u_s, u_n и напряжениями σ_s, σ_n на границе C области R, а другая – перемещениями u'_s, u'_n и напряжениями σ'_s, σ'_n на той же границе. Тогда в соответствии с теоремой взаимности работа, производимая первой системой сил на перемещениях второй системы, равна работе, производимой второй системой сил на перемещениях первой системы.

Математически это можно записать следующим образом:

$$\int_C (\sigma_s u'_s + \sigma_n u'_n) ds = \int_C (\sigma'_s u_s + \sigma'_n u_n) ds, \qquad (5.127)$$

где интегрирование выполняется по всей границе C.

В качестве первой будем рассматривать граничную задачу, решение которой необходимо найти, решение второй будем считать известным. Тогда соотношение (5.127) представляет собой интегральное уравнение, связывающее неизвестные компоненты напряженно-деформированного состояния, соответствующего данной задаче, с известным решением другой задачи для той же области R. Решение этой второй задачи здесь будем называть «контрольным» или «тестовым» решением.

Предположим теперь, как и ранее, что контур C можно аппроксимировать системой N примыкающих друг к другу прямолинейных отрезков. Тогда уравнение (5.127) можно представить в виде:

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Delta S(j)} (\sigma_s u'_s + \sigma_n u'_n) ds = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Delta S(j)} (\sigma'_s u_s + \sigma'_n u_n) ds, \qquad (5.128)$$

где $\Delta S(j)$ – j-й отрезок, длина которого составляет $2a^{(j)}$. Если предположить, далее, что для рассматриваемой задачи перемещения и

напряжения на границе в пределах каждого отрезка постоянны, выражение (5.128) принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{N}\sigma_s^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}u_s'ds+\sum_{j=1}^{N}\sigma_n^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}u_n'ds=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}u_s^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}\sigma_s'ds+\sum_{j=1}^{N}u_n^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}\sigma_n'ds, \qquad (5.129)$$

где $\sigma_s^{(j)},\sigma_n^{(j)}$ и $u_s^{(j)},u_n^{(j)}$ – значения напряжений и перемещений в центре *j*-го отрезка.

Поскольку число отрезков (граничных элементов) равно *N*, в итоге имеем 4*N* граничных параметров $u_s^{(j)},u_n^{(j)},\sigma_s^{(j)}$ и $\sigma_n^{(j)}$. Половина из них задана граничными условиями, которым мы пытаемся удовлетворить, а другая половина – неизвестные, которые мы стараемся найти. Предполагая пока, что нам также известно решение тестовой задачи (u_s',u_n',σ_s' и σ_n'), видим, что уравнение (5.129) содержит $2N$ неизвестных. Следовательно, для отыскания этих неизвестных необходимо иметь еще $2N-1$ уравнений, аналогичных (5.129). Другими словами, в целом для заданной области R необходимо иметь $2N$ различных контрольных решений.

В следующем пункте будет показано, что нужную систему $2N$ контрольных решений можно найти, прикладывая на границе в центре каждого *i*-го элемента сосредоточенные касательную и нормальную силы $F_s^{(i)}$ и $F_n^{(i)}$. Считая вначале, что *N* контрольных решений соответствуют сосредоточенным касательным силам $F_s^{(i)},i=1,...,N,$ запишем (5.129) в виде:

$$\sum_{j=1}^{N}\sigma_s^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}u_s'(F_s^{(i)})ds+\sum_{j=1}^{N}\sigma_n^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}u_n'(F_s^{(i)})ds=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}u_s^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}\sigma_s'(F_s^{(i)})ds+\sum_{j=1}^{N}u_n^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}\sigma_n'(F_s^{(i)})ds. \qquad (5.130)$$

Аналогично для *N* контрольных решений, соответствующих сосредоточенным нормальным силам $F_n^{(i)},i=1,...,N,$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{N}\sigma_s^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}u_s'(F_n^{(i)})ds+\sum_{j=1}^{N}\sigma_n^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}u_n'(F_n^{(i)})ds=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}u_s^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}\sigma_s'(F_n^{(i)})ds+\sum_{j=1}^{N}u_n^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}\sigma_n'(F_n^{(i)})ds. \qquad (5.131)$$

Уравнения (5.130) и (5.131) можно представить в форме:

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ss}^{(ij)}\sigma_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} B_{sn}^{(ij)}\sigma_n^{(j)} = \sum_{j=1}^{N} A_{ss}^{(ij)}u_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} A_{sn}^{(ij)}u_n^{(j)};$$

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ns}^{(ij)}\sigma_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} B_{nn}^{(ij)}\sigma_n^{(j)} = \sum_{j=1}^{N} A_{ns}^{(ij)}u_s^{i} + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{(ij)}u_n^{(j)}, \qquad (5.132)$$

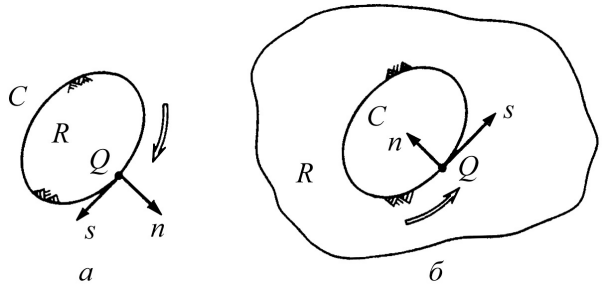
где i принимает значения от 1 до N, а граничные коэффициенты влияния

$$B_{ss}^{(ij)} = \int_{\Delta S(j)} u_s'(F_s^{(i)})ds$$

можно точно вычислить на основе известных контрольных решений.

На основе уравнений (5.132) $2N$ неизвестных граничных перемещений и напряжений определяются непосредственно по заданным граничным условиям.

Выбор контрольных решений. Представим бесконечную плоскость с контуром C на ней (рис. 5.26).



а *б*

Рис. 5.26. Бесконечная плоскость с контуром C

Если в некоторой точке p приложить силу, то можно вычислить перемещения и напряжения в любой точке плоскости и, в частности, касательные и нормальные перемещения и напряжения во всех точках контура C. В случае, когда область R внутренняя, а точка p лежит вне контура C, из способа определения напряжений следует, что если удалить область, внешнюю по отношению к C, то оставшаяся область, т.е. область R, будет находиться в равновесии под действием напряжений, которые мы вычислили на C. Следовательно, эти напряжения и соответствующие им перемещения образуют возможное для рассматриваемой задачи контрольное решение.

В случае, если точка p лежит внутри контура C, ее также следует рассматривать как расположенную вне рассматриваемой области – внутри некоторого выреза, а сосредоточенную силу – как приложенную к границе этого выреза. Таким образом, в этом случае область R должна рассматриваться как ограниченная двумя границами – контуром C и границей выреза вокруг точки p. Поэтому напряжения на границе C не являются

уравновешенными и необходимо использовать дополнительные приемы для построения корректного контрольного решения.

Проведенные рассуждения остаются в силе и в случае, когда рассматриваемая область R представляет неограниченную область вне контура C. Следовательно, при построении контрольных решений как для внешней, так и для внутренней граничных задач (рис. 5.26) сосредоточенная сила должна быть приложена вне области R.

Фактически одна произвольно направленная сосредоточенная сила может быть компонентом двух контрольных решений, поскольку она разлагается на две составляющие, направленные под прямым углом, и каждая такая составляющая позволяет сформировать системы (5.130) и (5.132). Для формирования $2N$ уравнений необходимо ввести N сил в N различных точках неограниченной плоскости, но не в самой области R. За исключением этого единственного ограничения, N точек могут быть выбраны произвольно, но при этом нет гарантии, что полученная система уравнений будет хорошо обусловленной или даже линейно независимой. Желаемый результат может быть получен, если сосредоточенные силы приложены к серединам N отрезков и действуют извне области R.

Коэффициенты влияния. В прямом методе граничных интегралов граничные коэффициенты влияния получают путем приложения сосредоточенной силы (с компонентами $F_s^{(i)}$ и $F_n^{(i)}$) в средней точке i-го отрезка контура C и интегрирования смещений и напряжений, вызванных этими силами, вдоль j-го отрезка в соответствии с (5.130) и (5.131). Изменяя значения i от 1 до N, т.е. прикладывая поочередно N сосредоточенных сил в серединах выбранных отрезков, получим необходимую систему алгебраических уравнений (5.133).

При вычислении коэффициентов влияния $B_{ss}^{(ij)}$ в (5.132) для удобства воспользуемся локальной системой координат $\bar{x}O\bar{y}$ с началом в центре j-го отрезка контура C (рис. 5.27).

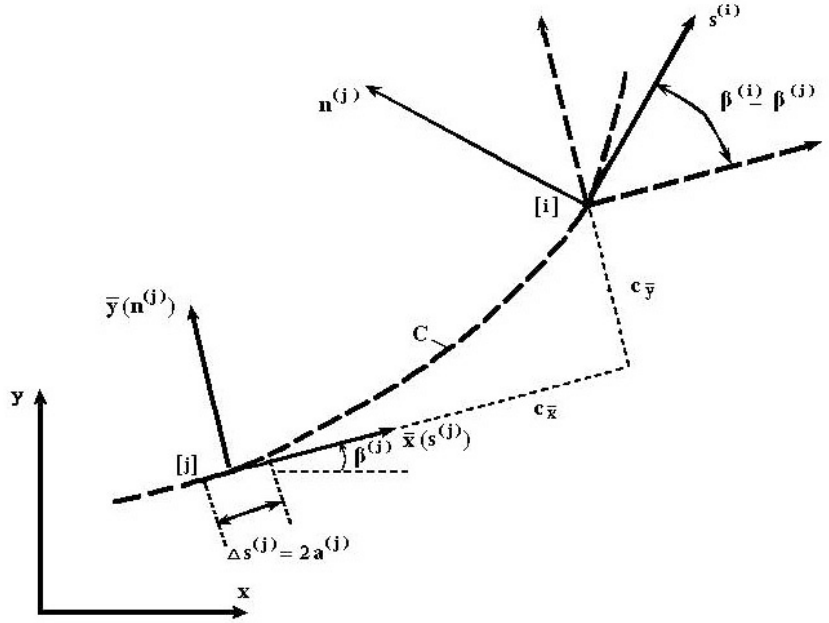


Рис. 5.27. К вычислению коэффициентов влияния $B_{ss}^{(ij)}$

Эти координаты соответствуют обычным локальным координатам $s^{(j)}$ и $n^{(j)}$, причем ось $O\bar{x}$ (или $s^{(j)}$) направлена в направлении обхода контура, а ось $O\bar{y}$ (или $n^{(j)}$) направлена вне рассматриваемой области (см. рис. 5.26). Пусть необходимо вычислить перемещения и напряжения на *j*-м отрезке, вызванные действием сосредоточенной силы, приложенной в центре *i*-го отрезка (в точке *i* на рис. 5.27). Компоненты этой силы, параллельный и перпендикулярный *i*-му отрезку, равны $F_s^{(i)}$ и $F_n^{(i)}$ соответственно. Из рис. 5.27 видно, что компоненты силы в направлениях $\bar{x} = s^{(j)}$ и $\bar{y} = n^{(j)}$ определяются следующими выражениями:

$$F_{\bar{x}} = F_s^{(i)} \cos\gamma - F_n^{(i)} \sin\gamma;$$
$$F_{\bar{y}} = F_s^{(i)} \sin\gamma + F_n^{(i)} \cos\gamma, \qquad (5.133)$$

где $\gamma = \beta^{(i)} - \beta^{(j)}$.

Теперь можно записать выражения для смещений и напряжений, вызванных силой $F_{\bar{x}}, F_{\bar{y}}$, приложенной в точке $\bar{x} = c_{\bar{x}}, \bar{y} = c_{\bar{y}}$, т.е. в точке $[i]$. Это осуществляется заменой x и y на $\bar{x} - c_{\bar{x}}$ и $\bar{y} - c_{\bar{y}}$ и, соответственно, изменением координатных индексов x и y на $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Тогда

смещения $u'_s = u_{\bar{x}}, u'_n = u_{\bar{y}}$ и напряжения $\sigma'_s = \sigma_{\bar{x}\bar{y}}, \sigma'_n = \sigma_{\bar{x}\bar{y}}$ на *j*-м отрезке находим из полученных выражений, подставляя в них $\bar{y} = 0$. Используя величины $F_{\bar{x}}$ и $F_{\bar{y}}$ из (5.133), находим перемещения, соответствующие контрольному решению:

$$u'_s = \frac{F_s^{(i)}}{2G}\left[(3-4\mu)g\cos\gamma - \frac{\partial g}{\partial \bar{x}}(\bar{x}-c_{\bar{x}})\cos\gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}}c_{\bar{y}}\sin\gamma\right] +$$
$$+\frac{F_n^{(i)}}{2G}\left[-(3-4\mu)g\sin\gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}}(\bar{x}-c_{\bar{x}})\sin\gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}}c_{\bar{y}}\cos\gamma\right];$$

$$u'_n = \frac{F_s^{(i)}}{2G}\left[(3-4\mu)g\sin\gamma - \frac{\partial g}{\partial \bar{y}}(\bar{x}-c_{\bar{x}})\cos\gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}}c_{\bar{y}}\sin\gamma\right] +$$
$$+\frac{F_n^{(i)}}{2G}\left[(3-4\mu)g\cos\gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}}(\bar{x}-c_{\bar{x}})\sin\gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}}c_{\bar{y}}\cos\gamma\right] \qquad (5.134)$$

и напряжения

$$\sigma'_s = F_s^{(i)}[(1-2\mu)\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\sin\gamma + (1-2\mu)\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\cos\gamma -$$
$$-\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}(\bar{x}-c_{\bar{x}})\cos\gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}c_{\bar{y}}\sin\gamma] + F_n^{(i)}[(1-2\mu)\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\cos\gamma -$$
$$-(1-2\mu)\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\sin\gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}(\bar{x}-c_{\bar{x}})\sin\gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}c_{\bar{y}}\cos\gamma];$$

$$\sigma'_n = F_s^{(i)}[2\mu\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\cos\gamma + 2(1-\mu)\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\sin\gamma -$$
$$-\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2}(\bar{x}-c_{\bar{x}})\cos\gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2}c_{\bar{y}}\sin\gamma] +$$
$$+F_n^{(i)}[-2\mu\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\sin\gamma + 2(1-\mu)\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\cos\gamma +$$
$$+\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2}(\bar{x}-c_{\bar{x}})\sin\gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2}c_{\bar{y}}\cos\gamma], \qquad (5.135)$$

где функция $g(\bar{x},\bar{y})$ имеет вид

$$g(\bar{x},\bar{y}) = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\ln\left[(\bar{x}-c_{\bar{x}})^2 + (\bar{y}-c_{\bar{y}})^2\right]^{1/2} \qquad (5.136)$$

и выражается вместе со своими производными формулами (5.134) и (5.135) при $\bar{y} = 0$.

Как отмечалось ранее, выражения (5.134) и (5.135) дают фактически два контрольных решения для каждого элемента *i*: одно – для касательной силы $F_s^{(i)}$, а другое – для нормальной силы $F_n^{(i)}$. Коэффициенты влияния $B_{ss}^{(ij)}$ в (5.132) получаются путем поочередного использования этих решений (т.е. $F_s^{(i)} \neq 0, F_n^{(i)} = 0$ и $F_s^{(i)} = 0, F_n^{(i)} \neq 0$), подстановки (5.134) и (5.135) в (5.130) и (5.131) и выполнения необходимого интегрирования вдоль $\Delta s^{(j)}$, т.е. интегрирования по $\bar{x}$ в пределах от $-a^{(j)}$ до $+a^{(j)}$. После выполнения указанных операций нет необходимости в определении величин $F_s^{(i)}$ и $F_n^{(i)}$, поскольку они входят как сомножители в обе части уравнений. В результате получим:

$$B_{ss}^{(ij)} = \int_{-a^{(j)}}^{+a^{(j)}} u_s'(F_s^{(i)})d\bar{x} = \frac{1}{2G}[(3-4\mu)\overline{T}_1 \cos\gamma + c_{\bar{y}}(\overline{T}_2 \sin\gamma - \overline{T}_3 \cos\gamma)];$$

$$B_{sn}^{(ij)} = \int_{-a^{(j)}}^{+a^{(j)}} u_n'(F_s^{(i)})d\bar{x} = \frac{1}{2G}[(3-4\mu)\overline{T}_1 \sin\gamma + c_{\bar{y}}(T_2 \cos\gamma + \overline{T}_3 \sin\gamma)];$$

$$B_{ns}^{(ij)} = \int_{-a^{(j)}}^{+a^{(j)}} u_s'(F_n^{(i)})d\bar{x} = \frac{1}{2G}[-(3-4\mu)\overline{T}_1 \sin\gamma + c_{\bar{y}}(\overline{T}_2 \cos\gamma + \overline{T}_3 \sin\gamma)]; \quad (5.137)$$

$$B_{nn}^{(ij)} = \int_{-a^{(j)}}^{+a^{(j)}} u_n'(F_n^{(i)})d\bar{x} = \frac{1}{2G}\left[(3-4\mu)\overline{T}_1 \cos\gamma - c_{\bar{y}}(\overline{T}_2 \sin\gamma - \overline{T}_3 \cos\gamma)\right];$$

$$A_{ss}^{(ij)} = \int_{-a^{(j)}}^{+a^{(j)}} \sigma_s'(F_s^{(i)})d\bar{x} = [(1-2\mu)\overline{T}_2 \sin\gamma + 2(1-\mu)\overline{T}_3 \cos\gamma + c_{\bar{y}}(\overline{T}_4 \sin\gamma + \overline{T}_5 \cos\gamma)];$$

$$A_{sn}^{(ij)} = \int_{-a^{(j)}}^{+a^{(j)}} \sigma_n'(F_s^{(i)})d\bar{x} = [-(1-2\mu)\overline{T}_2 \cos\gamma + 2(1-\mu)\overline{T}_3 \sin\gamma + c_{\bar{y}}(\overline{T}_4 \cos\gamma - \overline{T}_5 \sin\gamma)];$$

$$A_{ns}^{(ij)} = \int_{-a^{(j)}}^{+a^{(j)}} \sigma_s'(F_n^{(i)})d\bar{x} = [(1-2\mu)\overline{T}_2 \cos\gamma -$$
$$-2(1-\mu)\overline{T}_3 \sin\gamma + c_{\bar{y}}(\overline{T}_4 \cos\gamma - \overline{T}_5 \sin\gamma)];$$

$$A_{nn}^{(ij)} = \int_{-a^{(j)}}^{+a^{(j)}} \sigma_n'(F_n^{(i)})d\bar{x} = [(1-2\mu)\overline{T}_2 \sin\gamma +$$
$$+2(1-\mu)\overline{T}_3 \cos\gamma - c_{\bar{y}}(\overline{T}_4 \sin\gamma + \overline{T}_5 \cos\gamma)]. \qquad (5.138)$$

В этих формулах величины $\overline{T}_1,...,\overline{T}_5$ представляют собой определенные интегралы от функции $g(x,y)$ и ее производных (вычисленных при $\bar{y}=0$). Они равны:

$$\overline{T}_1 = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)}[c_{\bar{y}}\left(\operatorname{arctg}\frac{c_{\bar{y}}}{c_{\bar{x}}-a^{(j)}} - \operatorname{arctg}\frac{c_{\bar{y}}}{c_{\bar{x}}+a^{(j)}}\right) - (c_{\bar{x}}-a^{(j)})\times$$
$$\times \ln\sqrt{(c_{\bar{x}}-a^{(j)})^2 + c_y^2} + (c_{\bar{x}}+a^{(j)})\ln\sqrt{(c_{\bar{x}}+a^{(j)})^2 + c_y^2}];$$

$$\overline{T}_2 = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\ln\sqrt{(c_{\bar{x}}-a^{(j)})^2 + c_y^2} - \ln\sqrt{(c_{\bar{x}}+a^{(j)})^2 + c_y^2}\right];$$

$$\overline{T}_3 = \frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\operatorname{arctg}\frac{c_{\bar{y}}}{c_{\bar{x}}-a^{(j)}} - \operatorname{arctg}\frac{c_{\bar{y}}}{c_{\bar{x}}+a^{(j)}}\right];$$

$$\overline{T}_4 = \frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\frac{c_{\bar{y}}}{(c_{\bar{x}}-a^{(j)})^2 + c_{\bar{y}}^2} - \frac{c_{\bar{y}}}{(c_{\bar{x}}+a^{(j)})^2 + c_{\bar{y}}^2}\right];$$

$$\overline{T}_5 = \frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\frac{c_{\bar{x}}-a^{(j)}}{(c_{\bar{x}}-a^{(j)})^2 + c_y^2} - \frac{c_{\bar{x}}+a^{(j)}}{(c_{\bar{x}}+a^{(j)})^2 + c_y^2}\right]. \qquad (5.139)$$

Точки $[i]$ и $[j]$ на рис. 5.27 не совпадают, т.е. величины $c_{\bar{x}}$ и $c_{\bar{y}}$ одновременно в нуль не обращаются. Однако равенства (5.137) с учетом (5.139) справедливы и в случае совпадения точек, если при вычислении многозначной функции арктангенса использовать обычную процедуру предельного перехода. Подставляя $c_{\bar{x}}=0$ и переходя к пределу при $c_{\bar{y}}$, стремящемся к нулю со стороны положительных значений $\bar{y}$ (т.е. извне области R), находим, что в (5.139) отличны от нуля только величины $\overline{T}_1, \overline{T}_3$ и $\overline{T}_5$. Эти величины определяются выражениями

$$\overline{T}_1 = -\frac{a^{(j)}\ln a^{(j)}}{2\pi(1-\mu)} = -\frac{a^{(i)}\ln a^{(i)}}{2\pi(1-\mu)};$$
$$\overline{T}_3 = 1/\left[4\pi(1-\mu)\right];\ c_{\bar{x}} = 0; c_{\bar{y}} = 0;$$
$$\overline{T}_5 = -\frac{1}{2\pi a^{(j)}(1-\mu)} = -\frac{1}{2\pi a^{(i)}(1-\mu)}. \qquad (5.140)$$

Диагональные члены коэффициентов влияния, отражающие собственные воздействия элементов, выражаются подстановкой этих выражений в (5.137) и (5.138) с учетом того, что $\gamma = \beta^{(i)} - \beta^{(j)} = 0$:

$$B_{sn}^{(ii)} = B_{ns}^{(ii)} = 0;\ B_{ss}^{(ii)} = B_{nn}^{(ii)} = -\frac{3-4\mu}{4\pi G(1-\mu)} a^{(i)}\ln a^{(i)}; \qquad (5.141)$$

$$A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0;\ A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = +1/2. \qquad (5.142)$$

Построение системы уравнений. Уравнения (5.132) составляют основу прямого метода граничных интегралов. При решении любой граничной задачи половина из 4*N* параметров этих уравнений (т.е. $u_s^{(i)}, u_n^{(i)}, \sigma_s^{(i)}, \sigma_n^{(i)}$ для $i = 1,..., N$) должны быть заданы в качестве граничных условий, в то время как остальные неизвестны. Коэффициенты влияния определяются в соответствии с геометрией задачи по формулам (5.137) и (5.138). Следовательно, уравнения (5.132) могут быть положены в основу формирования системы $2N$ алгебраических уравнений с $2N$ неизвестными точно так же, как это делается в других методах граничных элементов. Неизвестными в этой системе уравнений являются фактические граничные перемещения или напряжения, которые не заданы граничными условиями.

При решении граничных задач в напряжениях, когда для всех N элементов известны значения $\sigma_s^{(i)} = (\sigma_s^{(i)})_0$ и $\sigma_n^{(i)} = (\sigma_n^{(i)})_0$, левая часть уравнений выражается:

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ss}^{(ij)}(\sigma_s^{(j)})_0 + \sum_{j=1}^{N} B_{sn}^{(ij)}(\sigma_n^{(j)})_0 = \sum_{j=1}^{N} A_{ss}^{(ij)} u_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} A_{sn}^{(ij)} u_n^{(j)};$$
$$\sum_{j=1}^{N} B_{ns}^{(ij)}(\sigma_s^{(j)})_0 + \sum_{j=1}^{N} B_{nn}^{(ij)}(\sigma_n^{(j)})_0 = \sum_{j=1}^{N} A_{ns}^{(ij)} u_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{(ij)} u_n^{(j)}. \qquad (5.143)$$

Аналогичную систему уравнений можно построить и в случае, когда на всех *N* элементах известны смещения $u_s^{(i)} = (u_s^{(i)})_0$ и $u_n^{(i)} = (u_n^{(i)})_0$; тогда роль неизвестных играют напряжения $\sigma_s^{(i)}$ и $\sigma_n^{(i)}, i = 1,..., N$.

Для смешанной граничной задачи система уравнений строится таким образом, чтобы $2N$ известных граничных параметров были в одной части равенств, а $2N$ неизвестных параметров – в другой. Например, если для всех

N граничных элементов заданы нормальные напряжения $\sigma_n^{(i)} = (\sigma_n^{(i)})_0$ и касательные смещения $u_s^{(i)} = (u_s^{(i)})_0$, систему уравнений можно записать в виде:

$$-\sum_{j=1}^{N} A_{ss}^{(ij)}(u_s^{(j)})_0 + \sum_{j=1}^{N} B_{sn}^{(ij)}(\sigma_n^{(j)})_0 = -\sum_{j=1}^{N} B_{ss}^{(ij)}\sigma_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} A_{sn}^{(ij)}u_n^{(j)};$$

$$-\sum_{j=1}^{N} A_{ns}^{(ij)}(u_s^{(j)})_0 + \sum_{j=1}^{N} B_{nn}^{(ij)}(\sigma_n^{(j)})_0 = -\sum_{j=1}^{N} B_{ns}^{(ij)}\sigma_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{(ij)}u_n^{(j)}. \quad (5.144)$$

В этой системе неизвестными являются касательные напряжения $\sigma_s^{(i)}$ и нормальные перемещения $u_n^{(i)}, i = 1,2,...,N$. Если коэффициенты при напряжениях умножить на постоянную $2G$, а напряжения разделить на ту же постоянную, то уравнение (5.144) можно записать в виде, содержащем коэффициенты влияния $B_{ss}^{(ij)}, B_{ns}^{(ij)}$ того же порядка, что и коэффициенты $A_{sn}^{(ij)}, A_{nn}^{(ij)}$:

$$-\sum_{j=1}^{N} A_{ss}^{(ij)}(u_s^{(j)})_0 + \sum_{j=1}^{N} B_{sn}^{(ij)}(\sigma_n^{(j)})_0 = -2G\sum_{j=1}^{N} B_{ss}^{(ij)}\frac{\sigma_s^{(j)}}{2G} + \sum_{j=1}^{N} A_{sn}^{(ij)}u_n^{(j)} -$$

$$-\sum_{j=1}^{N} A_{ns}^{(ij)}(u_s^{(j)})_0 + \sum_{j=1}^{N} B_{nn}^{(ij)}(\sigma_n^{(j)})_0 = -2G\sum_{j=1}^{N} B_{ns}^{(ij)}\frac{\sigma_s^{(j)}}{2G} + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{(ij)}u_n^{(j)}. \quad (5.145)$$

Аналогичный подход можно использовать для других типов смешанных краевых задач, включая и те, в которых на одной части границы заданы напряжения, а на другой – перемещения.

Согласно предыдущим рассуждениям, основную систему алгебраических уравнений для всех типов краевых задач можно представить в виде:

$$Y_s^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} C_{ss}^{(ij)}X_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} C_{sn}^{(ij)}X_n^{(j)};$$

$$Y_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} C_{ns}^{(ij)}X_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} C_{nn}^{(ij)}X_n^{(j)}. \quad (5.146)$$

В этих уравнениях $Y_s^{(i)}$ и $Y_n^{(i)}, i = 1,...,N,$ суть определенные линейные комбинации известных граничных параметров, а $C_{ss}^{(ij)} + C_{sn}^{(ij)}, C_{ns}^{(ij)}, C_{nn}^{(ij)}$ – коэффициенты влияния при неизвестных граничных параметрах $X_s^{(j)}$ и $X_n^{(j)}$. Например, коэффициент $C_{ss}^{(ij)}$ равен $A_{ss}^{(ij)}$, если в j-м элементе

неизвестно касательное смещение $u_s^{(j)}$, и равен $-2GB_{ss}^{(ij)}$, если в этом элементе неизвестно касательное напряжение $\sigma_s^{(i)}$.

Формулы Сомилиана. До сих пор прямой метод граничных интегралов мы привлекали только для вычисления неизвестных перемещений или усилий на границе C произвольной области R. Если же мы хотим найти решение внутри рассматриваемой области R, то можно воспользоваться формулами Сомилиана. С помощью этих формул при решении плоской задачи перемещения внутренней точки p области R можно выразить следующим образом:

$$u_x(p) = -\int_C \left[u_s\sigma'_s(F_x) + u_n\sigma'_n(F_x)\right]ds + \\ + \int_C \left[\sigma_s u'_s(F_x) + \sigma_n u'_n(F_x)\right]ds;$$

$$u_y(p) = -\int_C \left[u_s\sigma'_s(F_y) + u_n\sigma'_n(F_y)\right]ds + \\ + \int_C \left[\sigma_s u'_s(F_y) + \sigma_n u'_n(F_y)\right]ds, \qquad (5.147)$$

где u_s, u_n и σ_s, σ_n – граничные смещения и напряжения для задачи, решение которой мы уже имеем, а $u'_s(F_i)$, $u'_n(F_i)$ и $\sigma'_s(F_i)$, $\sigma'_n(F_i)$ – нормальные и касательные смещения и напряжения на границе C, вызванные действием сосредоточенной силы $F_i = (F_x, F_y) = (+1,+1)$ в точке p. (У читателя может возникнуть искушение приравнять правые части (5.147) нулю на основании теоремы взаимности. Этого нельзя делать, поскольку сосредоточенная сила приложена в точке, лежащей внутри области R, а применяя теорему взаимности, следует учитывать не только границу C, но и малый контур вокруг точки p. Формулы Сомилиана действительно получают, используя теорему взаимности для такой двойной границы и стягивая в точку малый контур вокруг p). Уравнения (5.147) можно решить приближенно, разбивая границу C на N элементов и предполагая, как и раньше, что u_s, u_n, σ_s и σ_n постоянны в пределах каждого элемента. Это дает:

$$u_x(p) = -\sum_{j=1}^{N}\left[u_s^{(j)}\int_{\Delta S(j)}\sigma'_s(F_x)ds + u_n^{(j)}\int_{\Delta S(j)}\sigma'_n(F_x)ds\right] + \\ + \sum_{j=1}^{N}\left[\sigma'_s\int_{\Delta S(j)}u'_s(F_x)ds + \sigma_n^{(j)}\int_{\Delta S(j)}u'_n(F_x)ds\right];$$

$$u_y(p) = -\sum_{j=1}^{N}\left[u_s^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}\sigma_s'(F_y)ds + u_n^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}\sigma_n'(F_y)ds\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left[\sigma_s^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}u_s'(F_y)ds + \sigma_n^{(j)}\int\limits_{\Delta S(j)}u_n'(F_y)ds\right], \qquad (5.148)$$

где все граничные параметры $u_s^{(j)}, u_n^{(j)}, \sigma_s^{(j)}$ и $\sigma_n^{(j)}$ теперь известны. Интегралы в (5.148) выражают коэффициенты, которые необходимо вычислить для каждой точки p, где отыскиваются значения перемещений $u_x(p)$ и $u_y(p)$. Дифференцируя выражение для перемещений в этих точках, находим деформации. Далее, используя соответствующую форму обобщенного закона Гука, определяем напряжения в точке p. Выражения для «внеграничных» коэффициентов влияния перемещений и напряжений рассматриваются ниже.

Коэффициенты перемещений. Интегралы в (5.148) вычисляются в локальной системе координат $\bar{x}, \bar{y}$ с началом в центре *j*-го элемента, как показано на рис. 5.28.

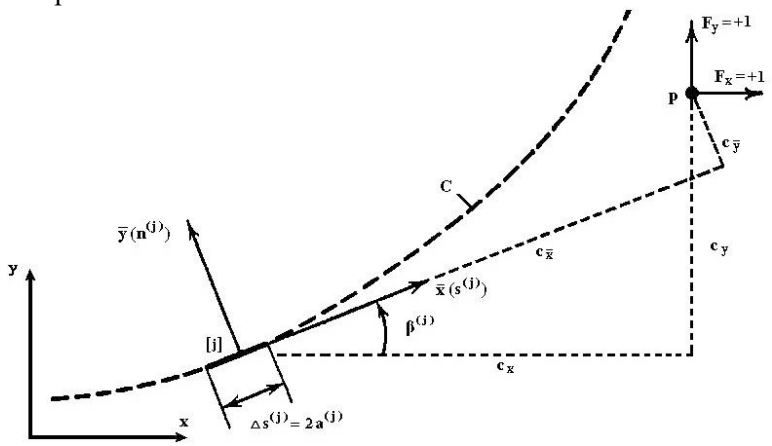


Рис. 5.28. К вычислению перемещений $u_x(p)$ и $u_y(p)$

Точка p на рисунке является произвольной точкой с координатами $\bar{x} = c_{\bar{x}}, \bar{y} = c_{\bar{y}},$ не лежащей на границе *C*.

Обозначения со штрихом в (5.148) представляют собой перемещения $u_s' = u_{\bar{x}}, u_n' = u_{\bar{y}}$ и напряжения $\sigma_s' = \sigma_{\bar{x}\bar{y}}, \sigma_n' = \sigma_{\bar{y}\bar{y}},$ возникающие в *j*-м граничном элементе под действием сосредоточенных сил $F_x = +1$ и $F_y = +1,$

приложенных в точке p. Выражения для этих величин можно получить непосредственно из (5.134) и (5.135), полагая $\gamma = -\beta^{(j)}$ (т.е. $\beta^{(i)} = 0$) и $F_s^{(i)} = F_x$, $F_n^{(i)} = F_y$. В (5.148) необходимые интегралы находятся точно так же, как ранее, путем рассмотрения в отдельности случаев $F_x = +1, F_y = 0$ и $F_x = 0,\ F_y = +1$. Уравнения (5.148) тогда можно записать в виде:

$$u_x(p) = \sum_{j=1}^{N}[(1-2\mu)\overline{T}_2 \sin\beta^{(j)} - 2(1-\mu)\overline{T}_3 \cos\beta^{(j)} +$$
$$+ c_{\bar{y}}(\overline{T}_4 \sin\beta^{(j)} - \overline{T}_5 \cos\beta^{(j)})]u_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N}[(1-2\mu)\overline{T}_2 \cos\beta^{(j)} +$$
$$+ 2(1-\mu)\overline{T}_3 \sin\beta^{(j)} - c_{\bar{y}}(\overline{T}_4 \cos\beta^{(j)} + \overline{T}_5 \sin\beta^{(j)})]u_n^{(j)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}[(3-4\mu)\overline{T}_1 \cos\beta^{(j)} - c_{\bar{y}}(\overline{T}_2 \sin\beta^{(j)} + \overline{T}_3 \cos\beta^{(j)})]\frac{\sigma_s^{(j)}}{2G} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}[-(3-4\mu)\overline{T}_1 \sin\beta^{(j)} + c_{\bar{y}}(\overline{T}_2 \cos\beta^{(j)} - \overline{T}_3 \sin\beta^{(j)})]\frac{\sigma_n^{(j)}}{2G};$$

$$u_y(p) = \sum_{j=1}^{N}[-(1-2\mu)\overline{T}_2 \cos\beta^{(j)} - 2(1-\mu)\overline{T}_3 \sin\beta^{(j)} -$$
$$- c_{\bar{y}}(\overline{T}_4 \cos\beta^{(j)} + \overline{T}_5 \sin\beta^{(j)})]u_s^{(j)} + \sum_{j=1}^{N}[(1-2\mu)\overline{T}_2 \sin\beta^{(j)} -$$
$$- 2(1-\mu)\overline{T}_3 \cos\beta^{(j)} - c_{\bar{y}}(\overline{T}_4 \sin\beta^{(j)} - \overline{T}_5 \cos\beta^{(j)})]u_n^{(j)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}[(3-4\mu)\overline{T}_1 \sin\beta^{(j)} + c_{\bar{y}}(\overline{T}_2 \cos\beta^{(j)} - \overline{T}_3 \sin\beta^{(j)})]\frac{\sigma_s^{(j)}}{2G} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}[(3-4\mu)\overline{T}_1 \cos\beta^{(j)} + c_{\bar{y}}(\overline{T}_2 \sin\beta^{(j)} + \overline{T}_3 \cos\beta^{(j)})]\frac{\sigma_n^{(j)}}{2G}, \qquad (5.149)$$

где $\overline{T}_1$ и другие коэффициенты определяются из (5.139).

Коэффициенты напряжений. Формулы для напряжений в точке p можно найти, определив деформации, соответствующие перемещениям (5.149), и применяя обобщенный закон Гука для плоской деформации. Деформации выражаются соотношениями

$$e_{xx}(p) = \frac{\partial u_x(p)}{\partial c_x};\ \ e_{yy}(p) = \frac{\partial u_y(p)}{\partial c_y};$$

$$e_{xy}(p)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_x(p)}{\partial c_y}+\frac{\partial u_y(p)}{\partial c_x}\right], \qquad (5.150)$$

где c_x и c_y – компоненты x и y вектора, соединяющего центр j-го граничного элемента с точкой p (рис. 5.28). Используя формулы преобразования

$$c_{\bar{x}}=c_x\cos\beta^{(j)}+c_y\sin\beta^{(j)},\ \ c_{\bar{y}}=-c_x\sin\beta^{(j)}+c_y\cos\beta^{(j)}, \qquad (5.151)$$

выразим:

$$\frac{\partial}{\partial c_x}=\frac{\partial c_{\bar{x}}}{\partial c_x}\frac{\partial}{\partial c_{\bar{x}}}+\frac{\partial c_{\bar{y}}}{\partial c_x}\frac{\partial}{\partial c_{\bar{y}}}=\cos\beta^{(j)}\frac{\partial}{\partial c_{\bar{x}}}-\sin\beta^{(j)}\frac{\partial}{\partial c_{\bar{y}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial c_y}=\frac{\partial c_{\bar{x}}}{\partial c_y}\frac{\partial}{\partial c_{\bar{x}}}+\frac{\partial c_{\bar{y}}}{\partial c_y}\frac{\partial}{\partial c_{\bar{y}}}=\sin\beta^{(j)}\frac{\partial}{\partial c_{\bar{x}}}+\cos\beta^{(j)}\frac{\partial}{\partial c_{\bar{y}}}, \qquad (5.152)$$

и, следовательно, выражения для деформаций (5.150) можно записать в виде:

$$e_{xx}(p)=\frac{\partial u_x(p)}{\partial c_{\bar{x}}}\cos\beta^{(j)}-\frac{\partial u_x(p)}{\partial c_{\bar{y}}}\sin\beta^{(j)};$$

$$e_{yy}(p)=\frac{\partial u_y(p)}{\partial c_{\bar{x}}}\sin\beta^{(j)}+\frac{\partial u_y(p)}{\partial c_{\bar{y}}}\cos\beta^{(j)};$$

$$e_{xy}(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x(p)}{\partial c_{\bar{x}}}\sin\beta^{(j)}+\frac{\partial u_x(p)}{\partial c_{\bar{y}}}\cos\beta^{(j)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u_y(p)}{\partial c_{\bar{x}}}\cos\beta^{(j)}-\frac{\partial u_y(p)}{\partial c_{\bar{y}}}\sin\beta^{(j)}\right). \qquad (5.153)$$

Подставляя (5.149) в (5.153) и используя затем обобщенный закон Гука, находим искомые формулы для напряжений. Окончательные выражения имеют вид:

$$\sigma_{xx}(p)=2G\sum_{j=1}^{N}[2\overline{T}_4\cos^2\beta^{(j)}+\overline{T}_5\sin 2\beta^{(j)}-c_{\bar{y}}(\overline{T}_6\sin 2\beta^{(j)}-$$

$$-\overline{T}_7\sin 2\beta^{(j)})]u_s^{(j)}+2G\sum_{j=1}^{N}[-\overline{T}_5-c_{\bar{y}}(\overline{T}_6\sin 2\beta^{(j)}+$$

$$+\overline{T}_7\cos 2\beta^{(j)})]u_n^{(j)}+\sum_{j=1}^{N}[-\overline{T}_2-2(1-\mu)(\overline{T}_2\cos 2\beta^{(j)}-$$

$$-\overline{T}_3\sin 2\beta^{(j)}+c_{\bar{y}}(\overline{T}_4\cos 2\beta^{(j)}+\overline{T}_5\sin 2\beta^{(j)})]\sigma_s^{(j)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\ [-\overline{T}_3+(1-2\mu)(\overline{T}_2\sin 2\beta^{(j)}+\overline{T}_3\cos 2\beta^{(j)})+$$
$$+c_{\bar{y}}(\overline{T}_4\sin 2\beta^{(j)}-\overline{T}_5\cos 2\beta^{(j)})]\sigma_n^{(j)};$$

$$\sigma_{yy}(p)=2G\sum_{j=1}^{N}[2\overline{T}_4\sin^2\beta^{(j)}-\overline{T}_5\sin 2\beta^{(j)}+c_y(\overline{T}_6\cos 2\beta^{(j)}-$$
$$-\overline{T}_7\sin 2\beta^{(j)})]u_s+2G\sum_{j=1}^{N}\ [-\overline{T}_5+c_{\bar{y}}(\overline{T}_6\sin 2\beta^{(j)}+$$
$$+\overline{T}_7\cos 2\beta^{(j)})]u_n^{(j)}+\sum_{j=1}^{N}[-\overline{T}_2+2(1-\mu)(\overline{T}_2\cos 2\beta^{(j)}-$$
$$-\overline{T}_3\sin 2\beta^{(j)}-c_{\bar{y}}(\overline{T}_4\cos 2\beta^{(j)}+\overline{T}_5\sin 2\beta^{(j)})]\sigma_s^{(j)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}[-\overline{T}_3-(1-2\mu)(\overline{T}_2\sin 2\beta^{(j)}+\overline{T}_3\cos 2\beta^{(j)})-$$
$$-c_{\bar{y}}(\overline{T}_4\sin 2\beta^{(j)}-\overline{T}_5\cos 2\beta^{j})]\sigma_n^{(j)};$$

$$\sigma_{xy}(p)=2G\sum_{j=1}^{N}[\overline{T}_4\sin 2\beta^{(j)}-\overline{T}_5\cos 2\beta^{(j)}-c_{\bar{y}}(\overline{T}_6\sin 2\beta^{(j)}+$$
$$+2G\sum_{j=1}^{N}[c_{\bar{y}}(\overline{T}_6\cos 2\beta^{(j)}-\overline{T}_7\sin 2\beta^{(j)})]u_n^{(j)}+\overline{T}_7\sin 2\beta^{(j)})]u_s^{(j)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}[-2(1-\mu)(\overline{T}_2\sin 2\beta^{(j)}+\overline{T}_3\cos 2\beta^{(j)})+c_{\bar{y}}(\overline{T}_4\sin 2\beta^{(j)}-$$
$$-\overline{T}_5\cos 2\beta^{(j)})]\sigma_s^{(j)}+\sum_{j=1}^{N}[-(1-2\mu)(\overline{T}_2\cos 2\beta^{(j)}-\overline{T}_3\sin 2\beta^{(j)}-$$
$$-c_{\bar{y}}(\overline{T}_4\cos 2\beta^{(j)}+\overline{T}_5\sin 2\beta^{(j)})]\sigma_n^{(j)}. \qquad (5.154)$$

В этих выражениях функции $\overline{T}_1,...,\overline{T}_5$ даются формулами (5.139), а функции $\overline{T}_6$ и $\overline{T}_7$ определяются выражениями

$$\overline{T}_6=-\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left\{\frac{(c_{\bar{x}}-a^{(j)})^2-c_{\bar{y}}^2}{[(c_{\bar{x}}-a^{(j)})^2+c_{\bar{y}}^2]^2}-\frac{(c_{\bar{x}}+a^{(j)})^2-c_{\bar{y}}^2}{[(c_{\bar{x}}+a^{(j)})^2+c_{\bar{y}}^2]^2}\right\};$$

$$\overline{T}_7 = -\frac{2c_{\bar{y}}}{4\pi(1-\mu)}\left\{\frac{c_{\bar{x}}-a^{(j)}}{[(c_{\bar{x}}-a^{(j)})^2+c_{\bar{y}}^2]^2}-\frac{c_{\bar{x}}+a^{(j)}}{[(c_{\bar{x}}+a^{(j)})^2+c_{\bar{y}}^2]^2}\right\}. \quad (5.155)$$

Формулы Сомилиана. В заключение этого раздела заметим, что формулы Сомилиана (5.147) также можно записать через компоненты x и y граничных перемещений и усилий. Точка нагружения p в этом случае лежит внутри рассматриваемой области. Используя обозначения, принятые ранее, имеем:

$$u_1(p) = -\int_C u_i(Q)T_{1i}(p,Q)ds(Q) + \int_C t_i(Q)U_{1i}(p,Q)ds(Q);$$
$$u_2(p) = -\int_C u_i(Q)T_{2i}(p,Q)ds(Q) + \int_C t_i(Q)U_{2i}(p,Q)ds(Q). \quad (5.156)$$

Решение с применением соотношений (5.156) можно выполнить приближенно, разбивая границу C на N элементов и считая, что перемещения u_i и усилия t_i в пределах каждого элемента постоянны. Тогда функции $T_{(j)i}(p,Q)$ и $U_{(j)i}(p,Q)$ можно просуммировать в каждом из элементов, определяя тем самым граничные коэффициенты влияния для перемещений в точке p. Напряжения в этой точке находятся с помощью процедуры, описанной выше.

Другие формулировки метода. С точки зрения вычислителя ключевым моментом любого метода граничных элементов является определение диагональных членов матрицы граничных коэффициентов влияния (собственного влияния элементов). Некоторые из этих членов терпят разрыв, или «скачок» при переходе с одной стороны граничного контура на другую. Разрывные члены определяются предварительным интегрированием сингулярности вдоль отрезка и переходом к пределу по соответствующему направлению. В частности, в прямом методе граничных интегралов вначале суммируют влияние от действия сосредоточенной силы в точке P (точке нагружения) на отрезок с центром в другой точке Q (точка поля) и затем находят пределы результирующих выражений при приближении P к Q извне рассматриваемой области R. Пределы необходимо брать именно таким образом, поскольку теорема взаимности корректна в случае, когда точка нагружения лежит внутри области R. В пределе, когда внутренняя точка p переходит в точку P на границе, соотношения (5.146–5.148) принимают вид:

$$\frac{1}{2}u_{(j)}(P) + \int_C u_i(Q)T_{(j)i}(P,Q)ds(Q) = \int_C t_i(Q)U_{(j)i}(P,Q)ds(Q) \quad (5.157)$$

при условии, что граничный контур C имеет в точке P единственную касательную (т.е. при условии, что эта точка не находится в точке перелома контура).

Когда точки P и Q совпадают, интегрирование в (5.157) должно выполняться специальным методом, поскольку в этом случае функции $T_{(j)i}(P,Q)$ и $U_{(j)i}(P,Q)$ сингулярны. Такие интегралы называются несобственными и вычисляются исключением из области интегрирования малого отрезка длиной 2ε с центром в сингулярной точке и последующим нахождением пределов при ε, стремящемся к нулю. Значение интеграла, вычисленное таким способом, называется *главным значением Коши.*

Уравнения (5.157) можно записать в развернутой форме следующим образом:

$$\int_C [t_x(Q)U_{xx}(P,Q) + t_y(Q)U_{xy}(P,Q)]ds(Q) =$$

$$= \frac{1}{2}u_x(P) + \int_C [u_x(Q)T_{xx}(P,Q) + u_y(Q)T_{xy}(P,Q)]ds(Q);$$

$$\int_C [t_x(Q)U_{yx}(P,Q) + t_y(Q)U_{yy}(P,Q)]ds(Q) =$$

$$= \frac{1}{2}u_y(P) + \int_C [u_x(Q)T_{yx}(P,Q) + u_y(Q)T_{yy}(P,Q)]ds(Q). \qquad (5.158)$$

Вводя такие же численные аппроксимации, какие были использованы ранее, заменим эти интегральные уравнения алгебраической системой:

$$\sum_{j=1}^{N} t_x(Q^{(j)}) \int_{\Delta s^{(j)}} U_{xx}(P^i,Q^{(j)})ds + \sum_{j=1}^{N} t_y(Q^{(j)}) \int_{\Delta s^{(j)}} U_{xy}(P^i,Q^{(j)})ds =$$

$$= \frac{1}{2}u_x(P^{(i)}) + \sum_{j=1}^{N} u_x(Q^{(j)}) \int_{\Delta s^{(j)}} T_{xx}(P^{(i)},Q^{(j)})ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} u_y(Q^{(j)}) \int_{\Delta s^{(j)}} T_{xy}(P^{(i)},Q^{(j)})ds;$$

$$\sum_{j=1}^{N} t_x(Q^{(j)} \int_{\Delta s^{(j)}} U_{yx}(P^{(i)},Q^{(j)})ds + \sum_{j=1}^{N} t_y(Q^{(j)}) \int_{\Delta s^{(j)}} U_{yy}(P^{(i)},Q^{(j)})ds =$$

$$= \frac{1}{2}u_y(P^{(i)}) + \sum_{j=1}^{N} u_x(Q^{(j} \int_{\Delta s^{(j)}} T_{yx}(P^{(i)},Q^{(j)})ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} u_y(Q^{(j)}) \int_{\Delta s^{(j)}} T_{yy}(P^{(i)},Q^{(j)})ds. \qquad (5.159)$$

Сравнивая уравнения (5.159) с аналогичной системой уравнений, полученной исходя из физической формулировки прямого метода граничных интегралов, можно видеть, что обе системы идентичны для всех недиагональных коэффициентов $(P^{(i)} \neq Q^{(j)})$ и различаются только диагональными членами коэффициентов для граничных параметров $u_x(P^{(i)})$ и $u_y(P^{(i)})$. Фактически эти коэффициенты в обеих системах уравнений совпадают, поэтому при любой формулировке прямого метода граничных интегралов приходим к одной и той же системе алгебраических уравнений, дающей приближенное решение общей граничной задачи линейной теории упругости.

И наконец, заметим, что система (5.159) представляет собой результат реализации простейших упрощенных моделей заданной области и изучаемого напряженно-деформированного состояния. Первый путь уточнения модели заключается в замене прямолинейных отрезков, на которые делится граничный контур, криволинейными сегментами, что может привести к заметному сокращению числа необходимых участков разбиения, например, при описании круговой границы. Второй путь уточнения заключается в применении более сложных законов изменения граничных перемещений и усилий в пределах каждого сегмента. В дальнейшем развитии указанных путей уточнения прямой метод граничных интегралов более перспективен, чем непрямые методы граничных элементов.

Глава 6
О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Как отмечалось в предыдущих главах, одним из основных этапов процесса реализации вариационных и проекционных методов, причем зачастую этапов трудоемких, выполняемых «вручную», является формирование систем функций, удовлетворяющих широкому спектру требований – от полноты и достаточности в соответствующем смысле до граничных условий, и построение на их основе координатных и определяющих состояний.

Особое место в методах решения граничных задач занимают системы функций, заведомо удовлетворяющих однородным дифференциальным уравнениям такого типа, как гармоническое и бигармоническое, а также однородным граничным условиям для регулярных областей. Применение таких систем дает существенный эффект в целом ряде случаев: например, в методе Трефтца трехмерную задачу удается свести к двухмерной, в методе определяющих состояний *B*-базис подпространства T возможных состояний, удовлетворяющих полностью однородным граничным условиям задачи, может быть применен в качестве достаточной системы определяющих состояний, что позволяет не только ускорить процесс сходимости приближенного решения, но и существенно уменьшить трудоемкость вычислительных процедур [34], и т.п.

6.1. Гармонические функции

Точные и приближенные решения всех основных типов задач теории упругости тесно связаны с гармоническими и бигармоническими функциями. Гармоническими, как уже отмечалось выше, называются функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа (здесь рассмотрим декартову систему координат в трехмерном пространстве):

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Полем гармонической функции называется та часть пространства, во всех точках которой эта функция принимает определенные конечные значения, оставаясь однозначной, и имеет частные производные по крайней мере до второго порядка.

Существует бесконечное множество функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Так, на основе какой-либо одной гармонической функции $\varphi(x, y, z, a, b, c, ...)$, где $a, b, c, ...$ – какие-либо параметры или коэффициенты, можно получить сколько угодно новых гармонических функций. Действительно, легко показать, что частная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, где t – любая из величин $x, y, z, a, b, c, \ldots$, также является гармонической функцией, так как

$$\nabla^2(\frac{\partial \varphi}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \varphi = 0) = 0.$$

Ясно, что если существуют последующие производные гармонической функции:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}, \ldots,$$

то все они также являются гармоническими функциями.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}, \tag{6.1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – радиус-вектор от начала координат в точку (x,y,z).

Покажем, что функция (6.1) – гармоническая. Очевидно

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x,$$

или $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$.

Справедливы также соотношения:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

отсюда с учетом (6.1) получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r})\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{r^3}) = -\frac{1 \cdot r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}. \tag{6.2}$$

Аналогично, дифференцируя по y и z, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{y^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{z^2}{r^5}.$$

Складывая эти равенства почленно, получим:

$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = -3\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = -3\frac{1}{r^3} + 3\frac{1}{r^3} = 0, \qquad (6.3)$$

что и требовалось доказать. Полем функции (6.1) является все безграничное пространство, за исключением одной точки – начала координат, где данная функция обращается в бесконечность. Гармонические функции часто называют потенциалами Лапласа.

Проекции градиента функции (6.1) на оси координат выражаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) = -\frac{x}{r^3};\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) = -\frac{y}{r^3};\ \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{r}) = -\frac{z}{r^3}. \qquad (6.4)$$

Так как

$$\frac{x}{r} = \cos(r,x);\ \frac{y}{r} = \cos(r,y);\ \frac{z}{r} = \cos(r,z),$$

то формулы (6.4) можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2}\cos(r,x);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2}\cos(r,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2\cos(r,z)}.$$

Отсюда можно заключить, что градиент направлен вдоль радиуса-вектора r и его величина равна $\frac{1}{r^2}$.

Так как функция $\frac{1}{r}$ есть функция гармоническая, то из нее дифференцированием можно получить ряд новых гармонических функций.

Например, формулы (6.4) выражают гармонические функции, функции (6.3) также являются гармоническими.

Если функция $\psi(x,y,z)$ – гармоническая, то справедливо тождество

$$\nabla^2(x\psi) = 2\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (6.5)$$

Дифференцируем последовательно функцию $x\psi$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\psi)=\psi+x\frac{\partial\psi}{\partial x};\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\psi)=2\frac{\partial\psi}{\partial x}+x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2};$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x\psi)=x\frac{\partial\psi}{\partial y};\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x\psi)=x\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2};$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(x\psi)=x\frac{\partial\psi}{\partial z};\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x\psi)=x\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \qquad (6.6)$$

Складывая почленно равенства (6.6), убедимся в справедливости (6.5). Отсюда следуют равенства:

$$\nabla^2(x\psi_1)=2\frac{\partial\psi_1}{\partial x};\ \nabla^2(y\psi_2)=2\frac{\partial\psi_2}{\partial y};\ \nabla^2(z\psi_3)=2\frac{\partial\psi_3}{\partial z}. \qquad (6.7)$$

На основании (6.7) легко доказать, что если функция $\varphi(x,y,z)$ – гармоническая, то функция

$$\Phi=x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (6.8)$$

также является гармонической.

Таким образом, имеются широкие возможности для построения функций, которые удовлетворяют не только гармоническому уравнению, но и тем или иным граничным условиям.

Функцию Ф можно представить в векторной форме. Действительно, если r – радиус-вектор точки (x,y,z), то

$$x=r\cos(r,x);$$
$$y=r\cos(r,y);$$
$$z=r\cos(r,z). \qquad (6.9)$$

Далее, если $\nabla\varphi$ есть градиент функции φ или производная ее по нормали $\left|\nabla\varphi\right|=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(\frac{\partial\varphi}{\partial n},x);$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(\frac{\partial\varphi}{\partial n},y);$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(\frac{\partial\varphi}{\partial n},z). \qquad (6.10)$$

Подставив (6.9), (6.10) в (6.8), получим:

$$\Phi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}r(\cos(\frac{\partial\varphi}{\partial n},x)\cos(r,x)+\cos(\frac{\partial\varphi}{\partial n},y)\cos(r,y)+\cos(\frac{\partial\varphi}{\partial n},z)\cos(r,z)),$$

или

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} r \cos(\frac{\partial \varphi}{\partial n}, r). \tag{6.11}$$

Но, так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(\frac{\partial \varphi}{\partial n}, r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

то окончательно получим следующее векторное выражение функции:

$$\Phi = x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z} = r\frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{6.12}$$

6.2. Бигармонические функции

Напомним, что бигармоническим называется дифференциальное уравнение вида:

$$\nabla^2\nabla^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0. \tag{6.13}$$

Функция *f*, удовлетворяющая этому уравнению, называется бигармонической. Уравнения типа (6.13) играют большую роль в механике твердого тела. Со случаем, когда функция *f* зависит только от двух переменных (*x,y*), мы уже встречались в плоской задаче, уравнения Ламе (глава 2 раздел 1) при отсутствии объемных сил (*X*=*Y*=*Z*=0) также могут быть приведены к бигармоническим. Имея это в виду, рассмотрим некоторые типы решений бигармонического уравнения; решения, полученные Буссинеском, тесно связаны с гармоническими функциями, что вполне естественно, если принять во внимание весьма близкую связь между гармоническим и бигармоническим уравнениями.

Прежде всего заметим, что всякая гармоническая функция $\varphi(x,y,z)$ есть решение бигармонического уравнения, так как она удовлетворяет уравнению $\nabla^2\varphi = 0,$ а следовательно, и уравнению (6.13). Таким образом, первый тип решений этого уравнения может быть выражен любой гармонической функцией.

Покажем теперь, что если $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – какие-либо гармонические функции, то функции $x\varphi_1$, $y\varphi_2$, $z\varphi_3$ являются решениями бигармонического уравнения. Действительно, применив оператор Лапласа к обеим частям первого из равенств (6.7), получим:

$$\nabla^2\nabla^2(x\varphi_1) = 2\nabla^2(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}). \tag{6.14}$$

Но так как φ_1 есть гармоническая функция, то $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ также будет гармонической, и, следовательно, правая часть последнего равенства равна нулю, а отсюда

$$\nabla^2 \nabla^2 (x\varphi_1) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Точно так же из второго и третьего равенств (6.7) следует, что остальные функции (6.14) также являются бигармоническими и вместе с первой функцией образуют второй тип решений бигармонического уравнения.

Если две функции f_1 и f_2 являются гармоническими, то их сумма также является решением уравнения (6.13). Отсюда, суммируя решения первого и второго типов, получим третий тип решений бигармонического уравнения:

$$\begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + x\varphi_1; \\ F_2 &= \varphi_2 + y\varphi_2; \\ F_3 &= \varphi_3 + z\varphi_3, \end{aligned} \qquad (6.15)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ – гармонические функции.

В (6.15) вместо гармонических функций можно брать любые их частные производные. Например, в дальнейшем применяются три решения бигармонического уравнения следующего вида (по типу третьей функции (6.15)):

$$\begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + z\frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ F_2 &= \varphi_2 + z\frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ F_3 &= \varphi_3 + z\frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \qquad (6.16)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ψ – гармонические функции.

Покажем теперь, что функция вида

$$r^2\psi \qquad (6.17)$$

является решением бигармонического уравнения, если ψ – функция гармоническая. Оператор Лапласа от функции (6.17) выражается:

$$\frac{\partial (r^2\psi)}{\partial x} = 2r\frac{\partial r}{\partial x}\psi + r^2\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

но из (6.2) имеем

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x, \tag{6.18}$$

следовательно,

$$\frac{\partial(r^2\psi)}{\partial x}=2x\psi+r^2\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2(r^2\psi)}{\partial x^2}=2\psi+2x\frac{\partial\psi}{\partial x}+2r\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

или, с учетом (6.18),

$$\frac{\partial^2(r^2\psi)}{\partial x^2}=2\psi+4x\frac{\partial\psi}{\partial x}+r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Аналогично получим:

$$\frac{\partial^2(r^2\psi)}{\partial y^2}=2\psi+4y\frac{\partial\psi}{\partial y}+r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2(r^2\psi)}{\partial z^2}=2\psi+4z\frac{\partial\psi}{\partial z}+r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Складывая последние три равенства почленно, получим:

$$\nabla^2(r^2\psi)=6\psi+4(x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}+z\frac{\partial\psi}{\partial z})+r^2\nabla^2\psi$$

и, так как по предположению ψ – гармоническая функция, то последний член равен нулю, следовательно

$$\nabla^2(r^2\psi)=6\psi+4(x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}+z\frac{\partial\psi}{\partial z}). \tag{6.19}$$

В силу того, что правая часть этого равенства есть сумма двух решений уравнения Лапласа, левая часть $\nabla^2(r^2\psi)$ также является гармонической функцией и поэтому представляет собой новый, четвертый тип решений бигармонического уравнения:

$$\nabla^2\nabla^2(r^2\psi)=0. \tag{6.20}$$

Так как $\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}$ – гармонические функции, то функции $r^2\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $r^2\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $r^2\frac{\partial\psi}{\partial z}$ также являются решениями бигармонического уравнения. Суммируя эти решения с решениями первого типа $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$, получим пятый тип решений:

$$F_1 = \varphi_1 + r^2 \frac{\partial \psi}{dx};$$

$$F_2 = \varphi_2 + r^2 \frac{\partial \psi}{dy};$$

$$F_3 = \varphi_3 + r^2 \frac{\partial \psi}{dz}. \qquad (6.21)$$

Решения шестого типа получим, суммируя с (6.21) функции

$$-a^2 \frac{\partial \psi}{\partial x};\ -a^2 \frac{\partial \psi}{\partial y};\ -a^2 \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

где a – постоянное число:

$$F_1 = \varphi_1 + (r^2 - a^2)\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$F_2 = \varphi_2 + (r^2 - a^2)\frac{\partial \psi}{\partial y};$$

$$F_3 = \varphi_3 + (r^2 - a^2)\frac{\partial \psi}{\partial z}. \qquad (6.22)$$

6.3. Приведение уравнений теории упругости к бигармоническим уравнениям

Рассмотренные выше частные решения бигармонического уравнения типов (6.16) и (6.21) имеют большое значение при решении задачи теории упругости в перемещениях, так как уравнения Ламе при отсутствии объемных сил (см. гл. 2)

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0;$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0;$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = 0$$

легко приводятся к трем независимым бигармоническим уравнениям. Запишем эти уравнения в форме

$$\nabla^2 u + (k+1)\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0;$$

$$\nabla^2 v + (k+1)\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

$$\nabla^2 w + (k+1)\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \qquad (6.23)$$

где

$$k = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Уравнения закона Гука соответственно этому напишем в форме:

$$X_x = \mu(2e_{xx} + k\theta);\ Y_y = \mu(2e_{yy} + k\theta);\ Z_z = \mu(2e_{zz} + k\theta);$$

$$Y_z = \mu e_{yz};\ Z_x = \mu e_{zx};\ X_y = \mu e_{xy}. \qquad (6.24)$$

Известно [3], что объемная деформация θ и ее производные являются гармоническими функциями, поэтому

$$\nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0;\ \nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;\ \nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

На этом основании, применяя к уравнениям (6.23) оператор Лапласа, заметим, что они могут быть приведены к виду:

$$\nabla^2 \nabla^2 u = 0;$$

$$\nabla^2 \nabla^2 v = 0;$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0. \qquad (6.25)$$

Особенно важно то, что эти уравнения независимы, т.е. в каждое из них входит лишь одна из искомых функций *u, v, w,* а так как эти уравнения – бигармонические, то результаты предыдущего пункта позволяют без труда подыскать для них сколько угодно частных решений.

Точно так же сводятся к бигармоническим уравнения Бельтрами:

$$\nabla^2 \nabla^2 X_x = 0;\ \ \nabla^2 \nabla^2 Y_z = 0;$$

$$\nabla^2 \nabla^2 Y_y = 0;\ \ \nabla^2 \nabla^2 Z_x = 0;$$

$$\nabla^2 \nabla^2 Z_z = 0;\ \ \nabla^2 \nabla^2 X_y = 0.$$

Отсюда следует весьма важное заключение: все основные неизвестные функции в общей задаче теории упругости:

$$u, v, w;\ X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$$

являются функциями бигармоническими.

6.4. Приложение гармонических функций к решению уравнений теории упругости

Таким образом, точные решения пространственных задач теории упругости можно разыскивать в форме бигармонических функций, задавая их выражения в виде (6.16), (6.21) и (6.22); входящие в их состав гармонические функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$ следует определять так, чтобы были удовлетворены уравнения Ламе и заданные граничные условия.

Рассмотрим решения типа (6.16):

$$u = \varphi_1 + z\frac{\partial \psi}{\partial x};$$
$$v = \varphi_2 + z\frac{\partial \psi}{\partial y};$$
$$w = \varphi_3 + z\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (6.26)$$

и решения типа (6.21):

$$u = \varphi_1 + r^2\frac{\partial \psi}{\partial x};$$
$$v = \varphi_2 + r^2\frac{\partial \psi}{\partial y};$$
$$w = \varphi_3 + r^2\frac{\partial \psi}{\partial z}. \qquad (6.27)$$

Решения типа (6.22) здесь не рассматриваем, отметим лишь, что они эффективно применяются в задачах о равновесии упругого шара.

Порядок уравнений (6.25) выше, чем уравнений (6.23), поэтому системы функций (6.26), (6.27), всегда удовлетворяющие бигармоническим уравнениям, не во всех случаях будут удовлетворять уравнениям Ламе. Очевидно, должны выполняться еще какие-то дополнительные условия; чтобы сформулировать их, необходимо подставить функции (6.26) и (6.27) в (6.23).

Дополнительные условия получим вначале для функций (6.26), для этого необходимо получить выражения для функций $\theta; \nabla^2 u; \nabla^2 v; \nabla^2 w$. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

то, складывая почленно эти уравнения и принимая во внимание, что функция ψ – гармоническая, найдем:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}. \qquad (6.28)$$

Далее получим:

$$\nabla^2 u = \nabla^2 \varphi_1 + \nabla^2 (z\frac{\partial \psi}{\partial x})$$

и, так как функции φ_1 и ψ – гармонические, то

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0.$$

Согласно (6.7)

$$\nabla^2 (z\frac{\partial \psi}{\partial x}) = 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \psi}{\partial z}),$$

т.е.

$$\nabla^2 u = 2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \psi}{\partial z});$$

$$\nabla^2 v = 2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \psi}{\partial z});$$

$$\nabla^2 w = 2\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial \psi}{\partial z}). \qquad (6.29)$$

Выражения (6.28) и (6.29) вносим в уравнения (6.23):

$$\frac{\partial}{\partial x}(2\frac{\partial \psi}{\partial z}) + (k+1)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(2\frac{\partial \psi}{\partial z} + (k+1)(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z})) = 0.$$

После приведения подобных получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}((k+1)(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}) + (k+3)\frac{\partial \psi}{\partial z}) = 0.$$

После аналогичных преобразований второе и третье уравнения могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial}{\partial y}((k+1)(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}) + (k+3)\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}((k+1)(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z})+(k+3)\frac{\partial \psi}{\partial z})=0.$$

Эти три уравнения удовлетворяются только при условии

$$(k+1)(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z})+(k+3)\frac{\partial \psi}{\partial z}=C, \qquad (6.30)$$

где C – произвольная постоянная.

Уравнение (6.30) выражает условие, при котором функции (6.26) будут решением системы уравнений Ламе (6.23). Произвольная постоянная C в (6.30) роли не играет, и мы положим ее равной нулю. Отсюда

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}=-\frac{k+1}{k+3}(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}). \qquad (6.31)$$

Таким образом, частное решение системы уравнений (6.23) можно получить в форме (6.26), где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – произвольные гармонические функции, а гармоническая функция ψ определяется из уравнения (6.31). Таким способом можно получить любое необходимое число частных решений, пользуясь имеющейся произвольностью выбора гармонических функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Рассмотрим теперь условия, при которых функции (6.27) удовлетворяют уравнениям (6.23). Составим выражения для объемного расширения θ и прочих необходимых компонентов напряженно-деформированного состояния, соответствующие выражениям (6.27):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(r^2\frac{\partial \psi}{\partial x}). \qquad (6.32)$$

Подставим в (6.32) выражение

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^2\frac{\partial \psi}{\partial x})=\frac{\partial (r^2)}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+r^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

или на основании (6.2)

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^2\frac{\partial \psi}{\partial x})=2x\frac{\partial \psi}{\partial x}+r^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

После аналогичных операций получим выражения для всех производных, определяющих объемное расширение:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+2x\frac{\partial \psi}{\partial x}+r^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+2y\frac{\partial \psi}{\partial y}+r^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2z\frac{\partial \psi}{\partial z} + r^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Складывая эти равенства почленно и принимая во внимание, что

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0,$$

получим:

$$\theta = \theta_0 + 2\Phi, \tag{6.33}$$

где введены следующие сокращенные обозначения (см. формулу (6.12)):

$$\theta_0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z};$$

$$\Phi = x\frac{\partial \psi}{\partial x} + y\frac{\partial \psi}{\partial y} + z\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{6.34}$$

Переходим теперь к составлению выражений для операторов Лапласа $\nabla^2 u,\ \nabla^2 v, \nabla^2 w$. Из первой формулы (6.27) следует:

$$\nabla^2 u = \nabla^2\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \tag{6.35}$$

так как $\nabla^2 \varphi_1 = 0.$

Воспользуемся формулой (6.19), заменив в ней ψ на $\frac{\partial \psi}{\partial x}$:

$$\nabla^2 u = 6\frac{\partial \psi}{\partial x} + 4\left(x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z}\right). \tag{6.36}$$

После подстановки в (6.36) выражений

$$x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$y\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial \psi}{\partial y}\right);$$

$$z\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

и с учетом (6.34) получим:

$$x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Теперь формулу (6.36) можно записать в виде:

$$\nabla^2 u = 2\frac{\partial \psi}{\partial x} + 4\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2\frac{\partial}{\partial x}(\psi + 2\Phi). \qquad (6.37)$$

На основе аналогичных рассуждений получим

$$\nabla^2 v = 2\frac{\partial}{\partial y}(\psi + 2\Phi);$$

$$\nabla^2 w = 2\frac{\partial}{\partial z}(\psi + 2\Phi).$$

Вносим (6.33) и (6.37) в первое из уравнений (6.23):

$$2\frac{\partial}{\partial x}(\psi + 2\Phi) + (k+1)\frac{\partial}{\partial x}(\theta_0 + 2\Phi) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}((k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi) = 0.$$

Два остальных уравнения (6.23) также можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial}{\partial y}((k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}((k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi) = 0.$$

Отсюда получим:

$$(k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi = \text{const}.$$

Не уменьшая общности данного уравнения, можем правую его часть принять равной нулю; разделив уравнение на $2(k+3)$, получим:

$$\Phi + \frac{1}{k+3}\psi = -\frac{k+1}{(k+3)}\theta_0. \qquad (6.38)$$

Применяя (6.12), уравнение (6.38) представим в виде:

$$r\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{k+3}\psi = -\frac{k+1}{2(k+3)}\theta_0,$$

или

$$r\frac{\partial \psi}{\partial r} + \alpha\psi = -\beta\theta_0, \qquad (6.39)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{k+3}; \quad \beta = \frac{k+1}{2(k+3)}.$$

Если от декартовых координат x, y, z перейти к системе, в которой одной из координат является радиус-вектор r (например, полярная система

координат в пространстве), то производную $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ можно рассматривать как частную производную ψ по переменной *r*. При этом, очевидно, можно предположить, что две другие координаты, определяющие направление радиуса-вектора *r*, остаются постоянными. Если таким же образом рассуждать в отношении функции θ_0, то уравнение (6.39) можно будет рассматривать как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно функции ψ. Интегрируя его, найдем ψ как функцию от радиуса-вектора *r*; однако произвольная постоянная, возникающая в результате интегрирования, будет, вообще говоря, зависеть от двух других координат, т.е. будет зависеть от направления радиуса-вектора *r*.

Представим функцию ψ в виде:

$$\psi = UV, \tag{6.40}$$

где *U* и *V* – две новые функции от *r*. После подстановки в (6.39) получим:

$$r(UV' + U'V) + \alpha UV = -\beta\theta_0,$$

или

$$rUV' + (rU' + \alpha U)V = -\beta\theta_0. \tag{6.41}$$

Подбираем функцию U из условия

$$rU' + \alpha U = 0, \text{ или } r\frac{\partial U}{\partial r} = -\alpha U. \tag{6.42}$$

Отсюда:

$$\frac{\partial U}{U} = -\alpha\frac{dr}{r}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln U = -\alpha \ln r, \text{ или } U = r^{-\alpha}. \tag{6.43}$$

Принимая во внимание (6.42) и (6.43), запишем уравнение (6.41) в виде:

$$(r^{-\alpha+1})\frac{dV}{dr} = -\beta\theta_0,$$

или

$$\frac{dV}{dr} = -\beta r^{\alpha-1}\theta_0.$$

Умножая обе части данного равенства на *dr* и интегрируя, находим:

$$V = -\beta\int \theta_0 r^{\alpha-1}dr + C. \tag{6.44}$$

Теперь, принимая во внимание (6.43), выражаем функцию ψ:

$$\psi = -\beta r^{-\alpha}\int \theta_0 r^{\alpha-1}dr + Cr^{-\alpha}. \tag{6.45}$$

Здесь постоянная интегрирования C зависит от направления радиуса-вектора r, при этом уравнение (6.45) выражает закон изменения функции ψ вдоль выбранного направления.

6.5. Полиномиальные решения уравнений теории упругости

Точные решения уравнений Ламе постоянно привлекают внимание исследователей не только потому, что с их помощью удается исследовать сложное напряженно-деформированное состояние трехмерных тел, но и как эталоны для проверки обоснованности и возможности эффективного применения всевозможных упрощающих гипотез и приближенных методов решения задач механики твердого тела.

Уравнения Ламе можно представить также в виде:

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x}\theta + \Delta u = 0;$$
$$\gamma \frac{\partial}{\partial y}\theta + \Delta v = 0;$$
$$\gamma \frac{\partial}{\partial z}\theta + \Delta w = 0, \qquad (6.46)$$

где

$$\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\mu}.$$

Г. Гродский [13] и П. Папкович [46] независимо друг от друга получили и в 1932 году опубликовали общее решение системы (6.46) через четыре гармонические функции, которое получило широкое применение, в частности для исследования местных напряжений вблизи отверстий и выточек в упругих телах. В дальнейшем новые формулы общих решений появлялись в литературе одна за другой, наконец В. Деев [14] показал, что существует бесчисленное множество общих решений уравнений Ламе. В настоящей главе рассмотрим полиномиальные решения через Hq-полиномы, предложенные в работе [3]; такие решения широко используются во многих приближенных решениях, в том числе в методе Трефтца, методе коллокаций, методе ортогональных проекций, некоторых вариантах метода наименьших квадратов.

Система дифференциальных уравнений (6.46) имеет $3(2n+1)$ линейно независимых однородных полиномиальных решений степени n, которые для удобства разделены на четыре группы. При этом из всех решений выделены «чисто» гармонические решения, т.е. решения, для которых каждое из перемещений является гармоническим полиномом, константой или нулем.

Первая группа $3l+\delta+1$ полиномов включает $l+1$ «чисто» гармонических решений:

$$U^{n,m,1}_{2,2,2-\delta}(x,y,z)=H^{n,m,1}_{2,2,2-\delta}(x,y,z);$$
$$V^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}(x,y,z)=H^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}(x,y,z)+H^{n,m-1,1}_{1,1,2-\delta}(x,y,z);$$
$$W^{n,m,1}_{1,2,1+\delta}(x,y,z)=0;$$
$$m=\overline{0,l}. \qquad (6.47)$$

Еще $l+\delta$ «чисто» гармонических решений:

$$U^{n,m,2}_{2,2,2-\delta}(x,y,z)=0;$$
$$V^{n,m,2}_{1,1,2-\delta}=H^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}(x,y,z);$$
$$W^{n,m,2}_{1,2,1+\delta}(x,y,z)=-H^{n,m,1}_{1,2,1+\delta}(x,y,z);$$
$$m=\overline{0,l+\delta-1}. \qquad (6.48)$$

Кроме того, первая группа включает также l бигармонических решений:

$$U^{n,m,3}_{2,2,2-\delta}(x,y,z)=H^{n,m,2}_{2,2,2-\delta}(x,y,z);$$
$$V^{n,m,3}_{1,1,2-\delta}(x,y,z)=H^{n,m-1,2}_{1,1,2-\delta}(x,y,z);$$
$$W^{n,m,3}_{1,2,2+\delta}(x,y,z)=(1+\frac{1}{\gamma})H^{n,m,1}_{1,2,1+\delta}(x,y,z)+H^{n,m,2}_{1,2,1+\delta}(x,y,z);$$
$$m=\overline{0,\ l-1}. \qquad (6.49)$$

Вторая группа включает $3l+\delta+1$ полиномиальных решений, в том числе $2l+\delta+1$ «чисто» гармонических решений:

$$U^{n,m,4}_{1,1,2-\delta}(x,y,z)=H^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}(x,y,z);$$
$$V^{n,m,4}_{2,2,2-\delta}(x,y,z)=-H^{n,m+1,1}_{2,2,2-\delta}(x,y,z);$$
$$W^{n,m,4}_{2,1,1+\delta}(x,y,z)=0;$$
$$m=\overline{0,\ l-1}; \qquad (6.50)$$

$$U^{n,m,5}_{1,1,2-\delta}(x,y,z)=0;$$
$$V^{n,m,5}_{2,2,2-\delta}(x,y,z)=H^{n,m,1}_{2,2,2-\delta}(x,y,z);$$
$$W^{n,m,5}_{2,1,1+\delta}(x,y,z)=-H^{n,m-1,1}_{2,1,1+\delta}(x,y,z);$$
$$m=\overline{0,l+\delta} \qquad (6.51)$$

и l бигармонических решений:

$$U^{n,m,6}_{1,1,2-\delta}(x,y,z) = -H^{n,m,2}_{1,1,2-\delta}(x,y,z) - H^{n,m-1,2}_{1,1,2-\delta}(x,y,z);$$

$$V^{n,m,6}_{2,2,2-\delta}(x,y,z) = H^{n,m,2}_{2,2,2-\delta}(x,y,z);$$

$$W^{n,m,6}_{2,1,1+\delta}(x,y,z) = \frac{1}{\gamma} H^{n,m,1}_{2,1,1+\delta}(x,y,z) + H^{n,m,2}_{2,1,1+\delta}(x,y,z);$$

$$m = \overline{0, l-1}. \qquad (6.52)$$

Третья группа включает $3l + 2\delta + 1$ полиномиальных решений, из них $2l + \delta + 1$ «чисто» гармонических решений:

$$U^{n,m,7}_{1,2,1+\delta}(x,y,z) = H^{n,m,1}_{1,2,1+\delta}(x,y,z);$$

$$V^{n,m,7}_{2,1,1+\delta}(x,y,z) = -H^{n,m,1}_{2,1,1+\delta}(x,y,z);$$

$$W^{n,m,7}_{2,2,2-\delta}(x,y,z) = 0;$$

$$m = \overline{0, l+\delta-1}; \qquad (6.53)$$

$$U^{n,m,8}_{1,2,1+\delta}(x,y,z) = 0;$$

$$V^{n,m,8}_{2,1,1+\delta}(x,y,z) = H^{n,m,1}_{2,1,1+\delta}(x,y,z);$$

$$W^{n,m,8}_{2,2,2-\delta}(x,y,z) = -H^{n,m,1}_{2,2,1-\delta}(x,y,z);$$

$$m = \overline{0, l} \qquad (6.54)$$

и $l + \delta$ бигармонических решений:

$$U^{n,m,9}_{1,2,1+\delta}(x,y,z) = -H^{n,m,2}_{1,2,1+\delta}(x,y,z) - H^{n,m-1,2}_{1,2,1+\delta}(x,y,z);$$

$$V^{n,m,9}_{2,1,1+\delta}(x,y,z) = H^{n,m-1,2}_{2,1,1+\delta}(x,y,z);$$

$$W^{n,m,9}_{2,2,2-\delta}(x,y,z) = \frac{1}{\gamma} H^{n,m,1}_{2,2,2-\delta}(x,y,z) + H^{n,m,2}_{2,2,2-\delta}(x,y,z);$$

$$m = \overline{0, l+\delta-1}. \qquad (6.55)$$

Четвертая группа включает $3l + 2\delta$ решений, в том числе $2l + \delta + 1$ «чисто» гармонических решений:

$$U^{n,m,10}_{1,2,1+\delta}(x,y,z) = H^{n,m-1,1}_{2,1,1+\delta}(x,y,z);$$

$$V^{n,m,10}_{1,2,1`+\delta}(x,y,z) = H^{n,m,1}_{1,2,1+\delta}(x,y,z) + H^{n,m-1,1}_{1,2,1+\delta}(x,y,z);$$

$$W^{n,m,10}_{1,1,2-\delta}(x,y,z) = 0;$$

$$m = \overline{0, l+\delta}; \qquad (6.56)$$

$$U^{n,m,11}_{2,1,1+\delta}(x,y,z) = 0;$$

$$V^{n,m,11}_{1,2,1+\delta}(x,y,z)=H^{n,m+1,1}_{1,2,1+\delta}(x,y,z);$$
$$W^{n,m,11}_{1,1,2-\delta}(x,y,z)=-H^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}(x,y,z);$$
$$m=\overline{0,l-1} \tag{6.57}$$

и $l+\delta-1$ бигармонических:

$$U^{n,m,12}_{2,1,1+\delta}(x,y,z)=H^{n,m,2}_{2,1,1+\delta}(x,y,z);$$
$$V^{n,m,12}_{1,2,1+\delta}(x,y,z)=H^{n,m,2}_{1,2,1+\delta}(x,y,z);$$
$$W^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}(x,y,z)=(1+\frac{1}{\gamma})H^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}(x,y,z)+H^{n,m,2}_{1,1,2-\delta}(x,y,z);$$
$$m=\overline{0,l+\delta-2.} \tag{6.58}$$

Решения (6.47)–(6.58) включают следующие полиномы:

$$H^{n,m,1}_{2,2,2-\delta}=\sum_{i=0}^{l-m}\sum_{k=0}^{m}A_{i,k}\binom{n}{2i+2k,2m-2k}x^{2i+2k}y^{2m-2k}z^{n-2m-2i},$$
$$m=\overline{0,l};$$

$$H^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}=\sum_{i=0}^{l-m-1}\sum_{k=0}^{m}A_{i,k}\binom{n}{2i+2k+1,2m-2k+1}x^{2i+2k+1}y^{2m-2k+1}z^{n-2m-2i-2},$$
$$m=\overline{0,l-1};$$

$$H^{n,m,1}_{1,2,1+\delta}=\sum_{i=0}^{l-m+\delta-1}\sum_{k=0}^{m}A_{i,k}\binom{n}{2i+2k+1,2m-2k}x^{2l+2k+1}y^{2m-2k}z^{n-2m-2i-1},$$
$$m=\overline{0,l+\delta-1};$$

$$H^{n,m,1}_{2,1,1+\delta}=\sum_{i=0}^{l-m+\delta-1}\sum_{k=0}^{m}A_{i,k}\binom{n}{2i+2k,2m-2k+1}x^{2i+2k}y^{2m-2k+1}z^{n-2m-2i-1},$$
$$m=\overline{0,l+\delta-1};$$

$$H^{n,m,2}_{2,2,2-\delta}=\sum_{i=1}^{l-m}\sum_{k=0}^{m}iA_{i,k}\binom{n}{2i+2k,2m-2k}x^{2i+2k}y^{2m-2k}z^{n-2m-2i},$$
$$m=\overline{0,l-1};$$

$$H^{n,m,2}_{1,1,2-\delta}=\sum_{i=1}^{l-m-1}\sum_{k=0}^{m}iA_{i,k}\binom{n}{2i+2k+1,2m-2k+1}x^{2i+2k+1}y^{2m-2k+1}z^{n-2m-2i-2},$$

$$m = \overline{0, l-2};$$

$$H^{n,m,2}_{1,2,1+\delta} = \sum_{i=1}^{l-m+\delta-1} \sum_{k=0}^{m} iA_{i,k} \binom{n}{2i+2k+1, 2m-2k} x^{2i+2k+1} y^{2m-2k} z^{n-2m-2i-1},$$
$$m = \overline{0, l+\delta-2};$$

$$H^{n,m,2}_{2,1,1+\delta} = \sum_{i=1}^{l-m+\delta-1} \sum_{k=0}^{m} iA_{i,k} \binom{n}{2i+2k, 2m-2k+1} x^{2i-2k} y^{2m-2k+1} z^{n-2m-2i-1},$$
$$m = \overline{0, l+\delta-2}. \qquad (6.59)$$

В приведенных формулах приняты следующие обозначения:

$$l = \left[\frac{n}{2}\right]; \quad \delta = \left\{\frac{n}{2}\right\};$$

при этом $\delta = 0$ при n четном и $\delta = 1$ при n нечетном;

$$A_{i,k} = (-1)^{i+k} \binom{i+k}{i} = (-1)^{i+k} \frac{(i+k)!}{i!k!};$$

$$\binom{a}{b,c} = \frac{a!}{b!c!(a-(b+c))!}.$$

В качестве примера сформируем бигармоническое решение (6.58) для $n = 4$ (отсюда $l = 2, \delta = 0$).

В соответствии с формулами (6.58) и (6.59) определяем (полином $H^{n,m,1}_{1,1,2-\delta}$ включается в рассмотрение для значений $m = 0, 1$):

$$u = U^{4,0,12}_{2,1,1} = H^{4,0,2}_{2,1,1} = \sum_{i=1}^{1} \sum_{k=0}^{0} A_{1,0} \binom{4}{2,1} x^2 yz = -12x^2 yz;$$

$$v = V^{4,0,12}_{1,2,1} = H^{4,0,2}_{1,2,1} = \sum_{i=1}^{1} \sum_{k=0}^{0} A_{1,0} \binom{4}{3,0} x^3 z = -4x^3 z;$$

$$w = W^{4,m,12}_{1,1,2} = (1+\frac{1}{\gamma}) H^{4,m,1}_{1,1,2} + H^{4,0,2}_{1,1,2} = (1+\frac{1}{\gamma})(H^{4,0,1}_{1,1,2} + H^{4,1,1}_{1,1,2}) + H^{4,0,2}_{1,1,2} =$$

$$= (1+\frac{1}{\gamma})(A_{0,0} \binom{4}{1,1} xyz^2 + A_{1,0} \binom{4}{3,1} x^3 y + A_{0,0} \binom{4}{1,3} xy^3 + A_{0,1} \binom{4}{3,1} x^3 y) +$$

$$+\sum_{i=1}^{1}\sum_{k=0}^{0} A_{1,0}\binom{4}{3,1}x^3y = (1+\frac{1}{\gamma})(12xyz^2 - 4x^3y + 4xy^3 - 4x^3y) - 4x^3y =$$

$$= (1+\frac{1}{\gamma})(12xyz^2 - 8x^3y + 4xy^3) - 4x^3y.$$

Отсюда

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -24xyz + 0 + (1+\frac{1}{\gamma})24xyz = 24\frac{1}{\gamma}xyz;$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -24yz;\ \ \Delta v = -24xz;\ \ \Delta w = -24xy.$$

Теперь легко убедиться, что полученное решение удовлетворяет всем уравнениям системы (6.46).

6.6. О применении *R*-функций при решении задач механики твердого тела для областей сложной формы

Решение многих задач механики твердого тела сводится к отысканию функции $u(x,y)$, удовлетворяющей в заданной области (s) основному дифференциальному уравнению и обращающейся в нуль на ее границе. Приближенное решение таких задач вариационными и проекционными методами, например методом Бубнова-Галеркина, может быть представлено в виде:

$$u^*(x,y) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x,y), \tag{6.60}$$

где функции $\varphi(x,y)$ линейно независимы и представляют собой первые n функций некоторой системы, относительно полной [40] в области (s), а $c_1, c_2, ..., c_n$ – неопределенные коэффициенты.

В качестве относительно полной системы функций может быть выбрана последовательность

$$\varphi_1 = \omega;\ \ \varphi_2 = \omega x;\ \ \varphi_3 = \omega y;\ \ \varphi_4 = \omega x^2; ..., \tag{6.61}$$

где $\omega(x,y)$ – непрерывная функция, имеющая внутри области (s) ограниченные и непрерывные производные $\frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}$ и удовлетворяющая условиям $\omega(x,y) \succ 0$ внутри (s), $\omega(x,y) = 0$ на границе (s) [50]. Тогда формула (6.60) преобразуется к виду:

$$u*(x,y)=\omega(x,y)\sum_{i=1}^{n}c_i\psi_i(x,y), \tag{6.62}$$

где $\psi_1=1;\ \psi_2=x;\ \psi_3=y;\ \psi_4=x^2;...,$ и задача сводится к отысканию функции $\omega(x,y)$ с описанными выше свойствами.

Построение функции $\omega(x,y)$ для некоторых областей (круг, эллипс, выпуклый многоугольник и др.) не составляет труда. Так, например, для области (s_1), изображенной на рис. 6.1, *а*, функция $\omega(x,y)$ может быть получена путем перемножения левых частей уравнений линий, из которых составлен контур:

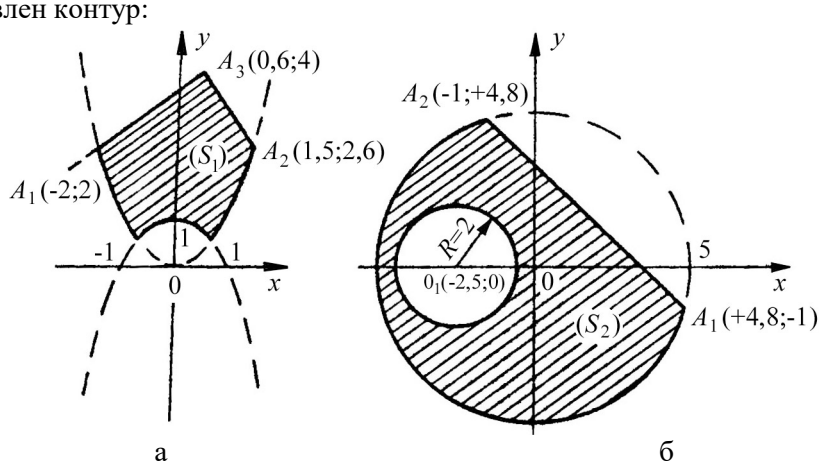


Рис. 6.1. К построению функций $\omega(x,y)$ для областей: а – s_1; б – s_2

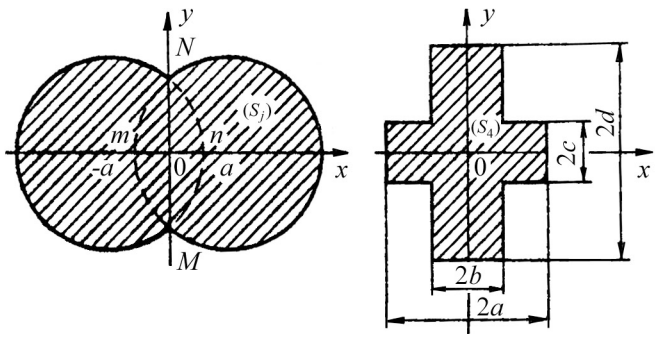
для области (s_1) (рис. 6.1, *а*) –

$$\omega_1(x,y)=(y+x^2-1)(y-x^2)(-1{,}4x-0{,}9y+4{,}44)(2x-2{,}6y+9{,}2),$$

а для области (s_2), изображенной на рис. 6.1, *б,* в виде

$$\omega_2(x,y)=(25-x^2-y^2)(y^2+(x+2{,}5)^2-1)(-5{,}8x-5{,}8y+22{,}04).$$

Однако для областей $(s_3),(s_4)$ (рис. 6.2, *а, б*) подобный подход к построению функции $\omega(x,y)$ оказывается невозможным.



а б

Рис. 6.2. К построению функций $\omega(x,y)$ для областей: а – s_3; б – s_4

В самом деле, если принять, например, для области (s_3) (рис. 6.2, *а*)

$$\omega(x,y)=(R^2-(x-a)^2-y^2)(R^2-(x+a)^2-y^2),$$

то будет нарушено условие строгой положительности функции $\omega(x,y)$ внутри области (s_3), так как на дугах *MnN* и *MmN* функция $\omega(x,y)=0.$

Аппарат *R*-функций [49] может быть эффективно применен, в частности, при построении функции $\omega(x,y)$ для областей, граница которых составлена из дуг гладких кривых с уравнениями

$$\varphi_1(x,y)=0,\ \varphi_2(x,y)=0,...,\ \varphi_n(x,y)=0,$$

где функции $\varphi_i(x,y)$ имеют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x},\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}(i=1,2,...,n).$

С этой целью могут быть использованы следующие *R*-операции:

1. *R*-конъюнкция $f_1\Lambda_\alpha f_2=\frac{1}{2}(f_1+f_2-\sqrt{f_1^2+f_2^2-2\alpha f_1f_2}).$
2. *R*-дизъюнкция $f_1\vee_\alpha f_2=\frac{1}{2}(f_1+f_2+\sqrt{f_1^2+f_2^2-2\alpha f_1f_2}).$
3. *R*-отрицание $\overline{f}=-f.$

Эти операции по некоторым своим свойствам напоминают операции алгебры логики $X\wedge Y$ (конъюнкция), $X\vee Y$ (дизъюнкция), $\overline{X}$ (отрицание), где X,Y – двоичные булевы переменные [49].

В частности, имеют место свойства:

1. $\overline{\overline{f}}=f;$
2. $f_1\wedge_\alpha f_2=f_2\wedge_\alpha f_1;$

3. $f_1 \vee_\alpha f_2 = f_2 \vee_\alpha f_1$;
4. $\overline{f}_1 \wedge_\alpha \overline{f}_2 = \overline{f_1 \vee_\alpha f_2}$;
5. $\overline{f}_1 \vee_\alpha \overline{f_2} = \overline{f_1 \wedge_\alpha f}_2$;
6. $f_1 \wedge_\alpha f_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $f_1 = 0, f_2 \geq 0$ или $f_2 = 0, f_1 \geq 0$;
7. $f_1 \vee_\alpha f_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $f_1 \leq 0, f_2 = 0$ или $f_1 = 0, f_2 \leq 0$;
8. $f_1 \wedge_\alpha f_2 \succ 0$, если $f \succ 0$ и $f_2 \succ 0$;
9. $f_1 \vee_\alpha f_2 \prec 0$, если $f_1 \prec 0$ и $f_2 \prec 0$.

При $\alpha = 1$ формулы (1)–(9) упрощаются и операции $f_1 \wedge_1 f_2; f_1 \vee_1 f_2$ получают ряд дополнительных свойств. Однако при $\alpha = 1$ функции $f_1 \wedge_1 f_2, f_1 \vee_1 f_2$ не дифференцируемы в точках, где $f_1 = f_2$, что делает их непригодными для построения функции $\omega(x, y)$.

Пусть (s_i) – области, определяемые соответственно неравенствами $f_i \succ 0, i = 1,2,...,n$. Условимся предикат $p_i(x, y)$, принимающий значение истинности, равное 1 в области (s_i), и значение ложности, равное 0 вне ее, обозначать так:

$$p_i(x, y) \equiv (f_i(x, y) \succ 0),\ i = 1,2,...,n.$$

Предположим, что область (*s*) составлена из областей $(s_1),(s_2),...,(s_n)$ так, что ей соответствует предикат

$$p(x, y) \equiv F[p_1(x, y); p_2(x, y);...; p_n(x, y)],$$

где $F(X_1, X_2,..., X_n)$ – некоторая булева функция. Известно, что всякая булева функция может быть представлена в форме, содержащей лишь операции $X \wedge Y, X \vee Y, \overline{X}$ [10]. Имеет место следующая теорема [49,50]:

Теорема 1. *Пусть открытая область (s) определяется с помощью предиката*

$$p(x, y) \equiv F[p_1(x, y); p_2(x, y);...; p_n(x, y)],$$

где $p_i(x, y) \equiv (f_i(x, y) \succ 0); f_i(x, y), i = \overline{1, n},$ *– всюду определенные непрерывные на плоскости xOy функции, а* $F(p_1, p_2,..., p_n)$ *– произвольная булева функция, записанная с помощью операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания с соблюдением строго скобочной записи (т.е. каждая двухместная операция берется в скобки). Тогда, если в формуле*

$F(p_1, p_2, ..., p_n)$ произвести формальную замену p_i на $f_i, i = \overline{1,n}$, знаков дизъюнкции, конъюнкции и отрицания соответственно знаками R-дизъюнкции, R-конъюнкции и R-отрицания, то полученная функция $\omega(x, y)$ будет всюду определена и непрерывна, положительна внутри области (s) и отрицательна вне этой области.

Из теоремы 1 следует правило построения функции $\omega(x, y)$ для области (s). Вначале нужно построить предикат $p(x, y)$, принимающий значение истинности внутри (*s*). Затем в предикате $p(x, y)$ операции $X \wedge Y, X \vee Y, \overline{X}$ заменить *R*-операциями $X \wedge_\alpha Y, X \vee_\alpha Y, \overline{X}$, а вместо предикатов $p_i(x, y) \equiv (f_i(x, y) \succ 0)$ записать функции $f_i(x, y), i = \overline{1,n}$, соответственно.

Пример 1. Пусть нужно построить функцию $\omega(x, y)$ для области (s_3) (см. рис. 6.2, *а*).

Область (s_3) можно рассматривать как объединение двух кругов радиуса *R* с центрами в точках $O_1(a,0)$ и $O_2(-a,0)$, определяемых неравенствами $f_1 = R^2 - (x-a)^2 - y^2 \succ 0$, $f_2 = R^2 - (x+a)^2 - y^2 \succ 0$.

Тогда область (s_3) может быть задана предикатом

$$p(x, y) \equiv ((f_1 \succ 0) \vee (f_2 \succ 0)).$$

Следуя теореме 1, получим функцию $\omega(x, y)$:

$$\omega(x, y) = (R_2 - (x-a)^2 - y^2) \vee_\alpha (R^2 - (x+a)^2 - y^2) = R^2 - x^2 -$$

$$- a^2 - y^2 + \frac{1}{2}((R^2 - (x-a)^2 - y^2)^2 + (R^2 - (x+a)^2 - y^2)^2 -$$

$$- 2a(R^2 - (x-a)^2 - y^2)(R^2 - (x+a)^2 - y^2))^{\frac{1}{2}}.$$

Пример 2. Рассмотрим более сложную область (*s*) (рис.6.3) и построим для нее функцию $\omega(x, y)$.

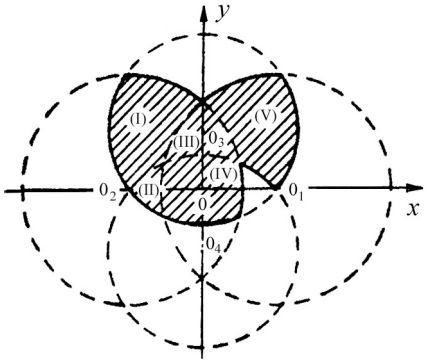


Рис. 6.3. К построению функций $\omega(x,y)$ для области s

Область (s) составлена из частей кругов $(p_1),(p_2),(p_3),(p_4)$ с центрами в точках $O_1(a,0)$, $O_2(-a,0)$, $O_3(0,b)$, $O_4(0,-b)$, определяемых предикатами

$$p_1(x,y) \equiv (R_2 - (x-a)^2 - y^2 \succ 0);$$
$$p_2(x,y) \equiv (R^2 - (x+a)^2 - y^2 \succ 0);$$
$$p_3(x,y) \equiv (R^2 - x^2 - (y-b)^2 \succ 0);$$
$$p_4(x,y) \equiv (R^2 - x^2 - (y+b)^2 \succ 0)$$

соответственно. Область (s) может быть разбита на области (I), (II), (III), (IV), (V). Если взять произвольную точку (x',y') в области (I), то получим:

$$p_1(x',y') = 0,\ \ p_2(x',y') = 1,\ \ p_3(x',y') = 1,\ \ p_4(x',y') = 0.$$

Следовательно, область (I) может быть определена предикатом

$$p_{\text{I}} \equiv (\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \overline{p_4}). \qquad (6.63)$$

Аналогично области (II),(III),(IV),(V) могут быть определены предикатами

$$p_{\text{II}} \equiv (p_1 \wedge \overline{p_2} \wedge p_3 \wedge \overline{p_4});$$
$$p_{\text{III}} \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \overline{p_4});$$
$$p_{\text{IV}} \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4);$$
$$p_{\text{V}} \equiv (\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4),$$

поэтому область (s) может быть определена предикатом

$$p \equiv (\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \overline{p_4}) \vee (p_1 \wedge \overline{p_2} \wedge p_3 \wedge \overline{p_4}) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \overline{p}_4) \vee$$
$$\vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\overline{p}_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4). \qquad (6.64)$$

Используя методы упрощения совершенных дизъюнктивных нормальных форм [49], формулу (6.64) можно переписать в виде:

$$p \equiv (p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_3) \wedge \overline{p}_4.$$

Отсюда на основании теоремы 1 можно записать

$$\omega(x,y) = (f_2(x,y) \wedge_\alpha f_3(x,y)) \vee_\alpha ((f_1(x,y) \wedge_\alpha f_3(x,y)) \wedge_\alpha \overline{f_4(x,y)}).$$

Как указывалось выше, функция $\omega(x,y)$ внутри области (s) должна иметь ограниченные и непрерывные производные $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$. Доказательство того, что построенная по описанному алгоритму функция $\omega(x,y)$ будет обладать этими свойствами, следует из теоремы, которую приводим здесь без доказательства.

Теорема 2. *Пусть область* (s) *определяется с помощью предиката* $p(x,y) \equiv F(p_1(x,y);\ \ p_2(x,y);...;\ \ p_n(x,y))$, *где* $p_i(x,y) \equiv (f_i(x,y) \succ 0)$, $i = \overline{1,n}$, *а функции* $f_i(x,y)$, $i = \overline{1,n}$, *имеют внутри области* (s) *непрерывные и ограниченные частные производные* $\frac{\partial f_i}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial f_i}{\partial y}, i = \overline{1,n}$. *Тогда функция* $\omega(x,y)$, *построенная согласно теореме 1 для предиката* $p(x,y)$, *имеет в области* (s) *непрерывные и ограниченные производные.*

Рассмотрим применение изложенного метода к решению уравнения Пуассона для крестообразной области (s_4), изображенной на рис. 6.2, *б*. Эту область можно построить, взяв в качестве исходных областей области $(s_{13}),(s_{23}),(s_{33})$ и (s_{43}), определяемые предикатами

$$p_{13}(x,y) \equiv (b^2 - x^2 \succ 0);\ \ p_{23}(x,y) \equiv (c^2 - y^2 \succ 0);$$
$$p_{33}(x,y) \equiv (d^2 - y^2 \succ 0);\ \ p_{43}(x,y) \equiv (a^2 - x^2 \succ 0)$$

соответственно.

Строим булеву функцию $F(p_{13}, p_{23}, p_{33}, p_{43})$, определяющую область (s_4):

$$F(p_{13}, p_{23}, p_{33}, p_{43}) \equiv (\overline{p}_{13} \wedge p_{23} \wedge p_{33} \wedge p_{43}) \vee$$
$$\vee (p_{13} \wedge \overline{p}_{23} \wedge p_{33} \wedge p_{43}) \vee (p_{13} \wedge p_{23} \wedge p_{33} \wedge p_{43}).$$

После упрощения

$$F(p_{13}, p_{23}, p_{33}, p_{43}) \equiv (p_{13} \wedge p_{33}) \vee (p_{23} \wedge p_{43}).$$

Согласно теореме 1, функция $\omega(x,y)$ может быть записана в виде:

$$\omega(x,y) = ((b^2 - x^2) \wedge_\alpha (d^2 - y^2)) \vee_\alpha ((c^2 - y^2) \wedge_\alpha (a^2 - x^2)).$$

Приближенное решение задачи ищем в форме

$$u*(x,y)=(((b^2-x^2)\wedge_\alpha(d^2-y_2))\vee_\alpha\times$$

$$\times((c^2-y^2)\wedge_\alpha(a^2-x^2)))\sum_{i=1}^{n}c_i\psi_i(x,y),$$

где, ввиду симметрии области, $\psi_1=1,\quad \psi_2=x^2,\quad \psi_3=y^2,\quad \psi_4=x^4,$ $\psi_5=x^2y^2,...$

Например, для a=d=1, b=c=0,25, n=6 приближенное решение имеет вид:

$$u*(x,y)=(((b^2-x^2)\wedge_\alpha(d^2-y^2))\vee_\alpha((c^2-y^2)\wedge_\alpha(a^2-x^2)))\times$$

$$\times(-1{,}08483+1{,}05706(x^2+y^2)-0{,}91999(x^4+y^4)-0{,}2881x^2y^2).$$

Полученное решение было использовано для определения жесткости кручения стержня с крестообразным поперечным сечением по формуле [51]:

$$c=\frac{4(\int\int_{(s)}udxdy)^2}{\int\int_{(s)}\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2\right]dxdy}.$$

В рассматриваемом случае было получено значение c = 0,1579, что на 0,0009 меньше значения этой же величины, которая определена другим методом.

Аппарат *R*-функций эффективно применяется и в случаях, когда координатные функции должны удовлетворять граничным условиям, выражаемым производными от искомых функций [50].

Глава 7
МЕТОДЫ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

7.1. Методы предельного равновесия

Кинематический метод предельного равновесия плит. Известно, что большинство конструктивных материалов могут считаться упругими лишь в ограниченных пределах. Поэтому расчет, основанный на уравнениях теории упругости, не может дать истинного представления ни о характере разрушения, ни о несущей способности конструкций. В полной мере это относится к расчету пластин и оболочек. В то время как для стержневых конструкций из металла и железобетона уже давно применяют методы расчета, учитывающие пластические свойства материалов, методы расчета оболочек и других пространственных систем за пределом упругости долгое время рассматривались как слишком сложные для практического использования. Как известно, впервые задача о точном расчете пластин и оболочек в пластической стадии их работы была поставлена А.А. Ильюшиным [18]. Им были найдены конечные соотношения между внутренними усилиями в сечении, находящемся в состоянии предельного равновесия. Отечественные и зарубежные исследователи получили решения для наиболее простых случаев расчета пластин и оболочек из жестко- и упругопластического материала. Но эти решения не обладали универсальностью и простотой практических методов расчета, используемых инженерами.

Между тем в теории пластичности уже давно существовало направление, которое можно назвать инженерным; оно нашло широкое применение в практических расчетах стержневых систем. Строгое теоретическое обоснование применяемых в нем методов было дано А.А. Гвоздевым [11] и распространено в дальнейшем на более сложные и общие задачи теории пластичности А.А. Марковым [36], А.Р. Ржаницыным [52], Гринбергом и Прагером [59]. Здесь имеются в виду вариационные принципы теории пластичности, лежащие в основе двух главных методов расчета по стадии предельного равновесия – статического и кинематического. Для цельности изложения рассмотрим вначале основной вариационный принцип, используемый в кинематическом методе, и некоторые его обобщения.

Обоснование кинематического метода. Простым деформированием будем называть такое изменение деформаций, при котором соотношения между компонентами тензора деформаций в каждой точке остаются постоянными. Ограничиваясь случаями простого деформирования, будем

считать, что для данного материала существует пластический потенциал Π, т.е. работа, затраченная на заданную деформацию, зависит только от компонентов этой деформации. Если материал изотропный, то этот потенциал и работа внутренних сил T зависят только от инваринтов тензора деформаций I_1, I_2, I_3 или от главных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, которые являются частным случаем трех независимых инвариантов тензора деформаций. В первом случае

$$T = -\int \Pi(I_1, I_2, I_3) d\omega, \tag{7.1}$$

во втором

$$T = -\int \Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) d\omega. \tag{7.2}$$

Интеграл в формулах (7.1) и (7.2) берется по всему объему тела.

Работу внешних сил V можно представить в виде произведения некоторой обобщенной силы или нагрузки P на соответствующее перемещение f:

$$V=Pf. \tag{7.3}$$

Во всех состояниях равновесия системы

$$\delta U = \delta(V + T) \le 0, \tag{7.4}$$

где $U=V+T$ – работа, затраченная на деформацию системы, δU – вариация этой работы.

Считая внешние силы постоянными, получим, что

$$\delta V = P\delta f. \tag{7.5}$$

Тогда согласно (7.4)

$$P\delta f + \delta T \le 0, \tag{7.6}$$

откуда

$$P \le -\frac{\delta T}{\delta f}. \tag{7.7}$$

Задаваясь различными возможными перемещениями системы δf, получим различные значения δT и $-\delta T/\delta f$. Обобщенная нагрузка P в предельном состоянии должна быть равна минимальному значению $-\delta T/\delta f$:

$$P = \min(-\frac{\delta T}{\delta f}). \tag{7.8}$$

Варьируя выражение (7.2), получим, что

$$\delta T = -\int \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon_i d\omega, \tag{7.9}$$

или, замечая, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_i} = \sigma_i, \tag{7.10}$$

$$\delta T = -\int \sigma_i \delta \varepsilon_i d\omega\,,\ i = 1,2,3. \tag{7.11}$$

Величины $\delta\varepsilon_i(x,y,z)$, $i=1,2,3$, связаны между собой заданной кинематически возможной формой деформации системы:

$$\varepsilon_i^1 = \frac{\delta \varepsilon_i}{\delta f},\ i = 1,2,3\,, \tag{7.12}$$

соответствующей единичному обобщенному перемещению системы $\delta f = 1$. Отсюда получим, что

$$\delta T = -\delta f \int \sigma_i \varepsilon_i^1 d\omega, \tag{7.13}$$

и согласно (7.7)

$$P \le \int \sigma_i \varepsilon_i^1 d\omega. \tag{7.14}$$

Поскольку понятие пластического потенциала определено здесь лишь для простого деформирования (система внутренних сил в упругопластическом теле неконсервативна), то в данном методе можно рассматривать только случаи сохранения формы деформации системы за все время деформирования последней. Поэтому для линейно деформируемой системы следует положить

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^1 f\,,\ i = 1,2,3. \tag{7.15}$$

На основании (7.15) неравенство (7.14) следует записать в виде

$$P \le \frac{1}{f} \int \sigma_i \varepsilon_i d\omega, \tag{7.16}$$

причем σ_i здесь есть заданные функции $\varepsilon_i, i = 1,2,3,$ согласно (7.10) и (7.2).

В частном случае упругопластического материала, пластический потенциал которого зависит только от второго инварианта тензора деформаций, а объемные деформации равны нулю, имеет место зависимость

$$\Pi = \Pi(e_u), \tag{7.17}$$

где e_u – интенсивность деформации:

$$e_u = \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \tag{7.18}$$

или, полагая на основании условия равенства нулю объемной информации, что

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{7.19}$$

$$e_u = \sqrt{6}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}\,. \tag{7.20}$$

На основании (7.10) и (7.17) значения напряжений при этом будут равны:

$$\sigma_1 = \Pi'(e_u)\frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_u}, \tag{7.21}$$

или с учетом (7.19)

$$\sigma_i = \frac{3\Pi'(e_u)}{e_u}\varepsilon_i,\ i = 1,2;$$

$$\sigma_3 = -\frac{3\Pi'(e_u)}{e_u}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \tag{7.22}$$

Отсюда

$$\sigma_i\varepsilon_i = \frac{3\Pi'(e_u)}{e_u}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2) =$$

$$= \frac{6\Pi'(e_u)}{e_u}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = e_u\Pi'(e_u). \tag{7.23}$$

При этом неравенство (7.16) принимает вид:

$$P \le \frac{1}{f}\int \Pi'(e_u)e_u d\omega. \tag{7.24}$$

Величину $\Pi'(e_u)$ можно обозначить через S_u и назвать интенсивностью напряжений. Из (7.16) следует, что

$$S_u = \Pi'(e^u) = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{7.25}$$

Обычно интенсивностью напряжений называют величину, пропорциональную S_u и равную:

$$\sigma_u = \frac{3}{\sqrt{2}}S_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{7.26}$$

При этом интенсивностью деформаций следует считать величину

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3}e_u = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}\ , \tag{7.27}$$

или, на основании условия равенства нулю объемных деформаций,

$$\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}. \tag{7.28}$$

Неравенство (7.24) при этом сохраняет свой вид:

$$P \le \frac{1}{f}\int \Pi'(\varepsilon_u)\varepsilon_u d\omega. \tag{7.29}$$

Преимущество обозначений (7.24), (7.25) заключается в том, что при простом растяжении $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ интенсивность напряжений $\sigma_u = \sigma_T$ – пределу текучести при растяжении.

Если система геометрически нелинейна, т.е. компоненты деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ нелинейно зависят от *f,* то следует положить:

$$\sigma\varepsilon_i = \frac{d\varepsilon_i}{df},\ i = 1,2,3. \tag{7.30}$$

Тогда из (7.11) вместо (7.13) получим:

$$\delta E = -\delta f \int \sigma_i \frac{d\varepsilon_i}{df_i} d\omega \tag{7.31}$$

и, считая справедливым закон простого деформирования

$$\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{d\varepsilon_i}{df} = c(f),\ i = 1,2,3, \tag{7.32}$$

получим:

$$\delta T = -\delta f \int c(f)\sigma_i\varepsilon_i d\omega. \tag{7.33}$$

Отсюда

$$P \le \int c(f)\sigma_i\varepsilon_i d\omega, \tag{7.34}$$

и, если справедливы соотношения (7.31) и (7.32),

$$P \le \int c(f)\sigma_u\varepsilon_u d\omega. \tag{7.35}$$

Так как на основе (7.31) и (7.32),

$$\frac{d\varepsilon_u}{df} = c(f)\varepsilon_u, \tag{7.36}$$

то

$$P \le \int \frac{d\varepsilon_u}{df}\sigma_u d\omega \tag{7.37}$$

и, если тело жесткопластическое, то

$$P \le \sigma_T \int \frac{d\varepsilon_u}{df} d\omega. \tag{7.38}$$

Следует сказать, что знак «меньше или равно» в неравенстве (7.16) и последующих нельзя заменить знаком min, так как кроме простого нагружения возможен иной путь деформирования системы, при котором величина *P*(*f*) будет принимать минимальное значение. Однако для стержневых конструкций и большинства случаев расчета пластин и оболочек

сохраняется условие простого деформирования ввиду малости или равенства нулю поперечных деформаций, а также из условий симметрии. При этом P можно определить как угодно точно, приближаясь к истинному его значению сверху за счет рассмотрения как можно большего количества возможных форм деформирования. Кроме того, известно, что в случае, когда $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляют собой однородные функции независимых переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, в процессе нагружения тела постоянной по форме нагрузкой перераспределение компонентов деформаций не происходит, и в этом случае обязательно осуществляется процесс простого деформирования в каждой точке тела. К этому случаю относится, в частности, закон степенного упрочнения $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$ и процесс деформирования жесткопластического тела без упрочнения при условии отсутствия объемных деформаций. Для того чтобы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ были однородными функциями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, достаточно, чтобы пластический потенциал Π был однородной функцией переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Применение к расчету плит. Расчет плит на изгиб производится на основе гипотезы Кирхгофа о сохранении перпендикулярности нормалей к срединной поверхности плиты после ее деформации. Из этой гипотезы следует, что

$$\varepsilon_x = \aleph_x z; \ \varepsilon_y = \aleph_y z; \ \gamma_{xy} = 2\aleph_{xy} z, \tag{7.39}$$

где z – расстояние от срединной поверхности плиты, $\aleph_x$ и $\aleph_y$ – кривизны срединной поверхности после деформации плиты в направлении осей Ox и Oy, равные при малых прогибах w:

$$\aleph_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ \aleph_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{7.40}$$

$\aleph_{xy}$ – кручение срединной поверхности плиты:

$$\aleph_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{7.41}$$

Будем исходить из пластического потенциала (7.17). Выражение для интенсивности деформаций (7.28) запишем в произвольных прямоугольных осях Ox, Oy, совместив ось 3 с осью Oz. Тогда, используя выражение

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{4}}, \tag{7.42}$$

получим, что

$$\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4}\varepsilon_{xy}^2}, \tag{7.43}$$

а с учетом (7.40) и (7.41)

$$\varepsilon_u = \frac{2z}{\sqrt{3}}\sqrt{\aleph_x^2 + \aleph_y^2 + \aleph_x\aleph_y + \aleph_{xy}^2}. \tag{7.44}$$

Обозначив

$$\aleph_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\aleph_x^2 + \aleph_y^2 + \aleph_x\aleph_y + \aleph_{xy}^2}, \tag{7.45}$$

получим выражение для работы внутренних сил, приходящихся на элемент поверхности плиты:

$$dT = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_T \varepsilon_u dz dF = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_T z \aleph_u dz dF = -m_T \aleph_u dF, \tag{7.46}$$

где

$$m_T = \frac{\sigma_T h^2}{4} \tag{7.47}$$

предельный момент в цилиндрическом шарнире текучести плиты, h – толщина плиты.

Работа внешней нагрузки q равна:

$$V = \int qwdF, \tag{7.48}$$

где интегрирование производится по всей площади плиты.

Из равенства нулю суммы работ внешних и внутренних сил определяется предельная величина нагрузки $q_{np.}$

Для получения верхней оценки предельной нагрузки q_{np} можно задаваться приближенно функцией прогиба $w(x,y)$, которая должна соответствовать условиям закрепления плиты. Истинной форме прогиба соответствует минимальное значение q_{np} определенное таким образом.

Можно также сформулировать данную задачу определения q_{np} и истинной формы прогиба плиты $w(x,y)$ как изопериметрическую вариационную задачу о минимуме интеграла

$$-T = \int m_T \aleph_u dF = \int m_T \sqrt{w_{xx}^2 + w_{yy}^2 - w_{xx}w_{yy} + w_{xy}^2}\, dF \tag{7.49}$$

при дополнительном условии

$$V = \int qwdF = \text{const}. \tag{7.50}$$

В качестве примера рассмотрим круглую симметрично нагруженную плиту, деформированное состояние которой осесимметрично и прогиб w

является функцией только одной переменной r – расстояния от центра симметрии. В этом случае выражение для $\aleph_u$ (7.45) примет вид:

$$\aleph_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\aleph_r^2 + \aleph_\theta^2 + \aleph_r\aleph_\theta}\,, \tag{7.51}$$

где $\aleph_r$ и $\aleph_\theta$ – кривизны изогнутой поверхности плиты в направлениях радиуса r и линии, перпендикулярной радиусу. Считая прогибы малыми и обозначая через φ угол наклона меридиональной кривой изогнутой поверхности, имеем:

$$\aleph_r = w''; \;\; \aleph_\theta = \frac{\sin\varphi}{r} \approx \frac{\varphi}{r} \approx \frac{w'}{r}. \tag{7.52}$$

При этом

$$\aleph_u = \frac{2}{\sqrt{3}}(w'')^2 + \frac{(w')^2}{r^2} + \frac{w''w'}{r}. \tag{7.53}$$

Работа внешних сил при осесимметричной нагрузке выражается формулой

$$V = 2\pi\int_0^R qwrdr\,, \tag{7.54}$$

а работа внутренних сил согласно (7.46) –

$$T = -2\pi m_T\int_0^R \aleph_u rdr = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}m_T\int_0^R \sqrt{(w'')^2r^2 + w''w'r + (w')^2}\,dr, \tag{7.55}$$

здесь R – радиус плиты.

Рассмотрим изгиб плиты, шарнирно опертой по наружному круглому контуру и загруженной равномерно распределенной нагрузкой q. Зададимся для прогибов функцией

$$w = w_0\left(1 - \frac{r^n}{R^n}\right),\; n \succ 0\,. \tag{7.56}$$

Подставляя (7.56) в выражения для V (7.54) и T (7.55), получим:

$$V = \pi R^2 q w_0\,\frac{n}{n+2};\;\; T = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}m_T\sqrt{n^2 - n + 1.} \tag{7.57}$$

Отсюда, положив $V+T=0$, получим:

$$q = q_{np} = \frac{4m_T}{\sqrt{3}R}\,\frac{(n+2)\sqrt{n^2-n+1}}{n}.$$

Минимальное значение этого выражения достигается при

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{(n^2-n+1)(n+2)^2}{n^2} = 0;\;\; 2n + 3 - \frac{8}{n^3} = 0;\;\; n = 1{,}147$$

и равно

$$q_{пр} = \frac{6{,}85}{R^2} m_T = \frac{1{,}712 h^2 \sigma_T}{R^2}. \qquad (7.58)$$

Точное решение $q_{пр} = 1{,}615 \frac{h^2 \sigma_T}{R^2}$ отличается от (7.58) на 6%.

При загрузке той же плиты сосредоточенной центральной силой P работа внешних сил выразится произведением Pw_0 и при форме прогиба (7.56) получим:

$$P_{пр} = -\frac{T}{w_0} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_T \sqrt{n^2 - n + 1.} \qquad (7.59)$$

Минимальное значение $P_{пр}$ достигается при n = 0,5 и равно:

$$P_{пр} = 2\pi m_T.$$

Форма прогиба плиты вида (7.56) при n = 0,5 приведена на рис. 7.1.

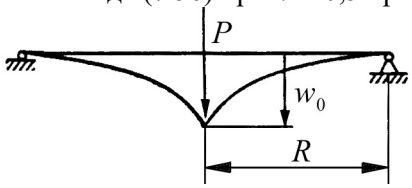


Рис. 7.1. К решению задачи изгиба плиты, шарнирно опертой по наружному круглому контуру, под действием сосредоточенной центральной силой P

При n = 1 получаем $P_{пр} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_T$. Плита при этом должна искривляться по конической поверхности.

Сосредоточенные кривизны. Удобные приближенные решения для различных конфигураций, загружений и опираний плиты можно получить, рассматривая формы изгиба с сосредоточенными кривизнами, являющимися двугранными углами перелома поверхности. Заметим, что сосредоточенное кручение поверхности плиты не может быть осуществлено без нарушения условия неразрывности деформации, поэтому должно быть исключено из рассмотрения. Кроме того, нетрудно доказать, что кривизны, сосредоточенные в точках и образующие не двугранные, а многогранные углы, дают значения работы внутренних сил, бесконечно малые по сравнению с работой внутренних сил на двугранных углах перелома поверхности плиты.

Метод расчета, основанный на рассмотрении форм деформаций с сосредоточенными кривизнами, широко применяется в практических расчетах железобетонных плит.

Работа внутренних сил, приходящаяся на элемент *ds* длины ребра перелома (цилиндрического шарнира текучести), выражается формулой

$$dT = -\frac{2}{\sqrt{3}} m_T \theta ds, \tag{7.60}$$

где θ – двугранный угол перелома, множитель $2/\sqrt{3}$ возникает вследствие предположения об отсутствии удлинений вдоль ребра перелома. Этот множитель можно включить в условную величину предела текучести:

$$\sigma_T^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T .$$

Полная работа внутренних сил равна:

$$T = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sum \int_0^{l_i} m_T \theta_i ds, \tag{7.61}$$

где суммирование распространяется на все ребра перелома.

Для полигональной шарнирно опертой плиты, нагруженной сосредоточенной силой *P*, получена формула, которая с поправкой на коэффициент $2/\sqrt{3}$ имеет вид:

$$P_{np} = \frac{2}{\sqrt{3}} m_T \sum \operatorname{ctg} \alpha_i , \tag{7.62}$$

где α_i – углы, образованные линиями, идущими из точки приложения силы *P* в вершины периметра плиты (рис. 7.2).

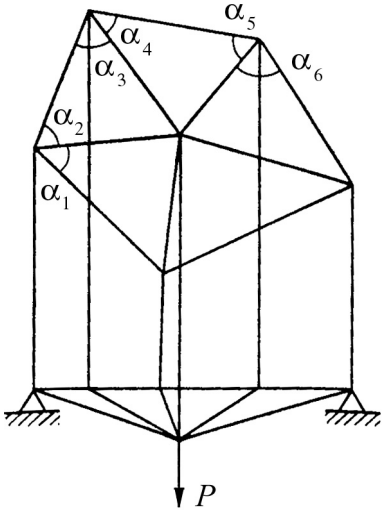


Рис. 7.2. К решению задачи изгиба полигональной шарнирно опертой плиты под действием сосредоточенной силой *P*

Для плиты, шарнирно опертой по криволинейному выпуклому контуру, уравнение которого в полярных координатах с центром в точке приложения силы *P* будет $\rho = \rho(\varphi),$ применяется формула

$$P_{пр} = \frac{2}{\sqrt{3}} m_T \Phi (1 - \frac{\rho'}{\rho} + 2\frac{(\rho')^2}{\rho^2}) d\varphi, \qquad (7.63)$$

где интегрирование ведется по всему опорному контуру. Здесь форма искривления плиты коническая без сосредоточенных кривизн.

Применяются также формулы для плит с защемленными и опертыми краями, для плит, опертых в точках, и т.д. Все эти формулы обоснованы и связаны с общей теорией малых упругопластических деформаций как приближенные формулы кинематического расчета предельного равновесия.

Предельное равновесие железобетонных плит. Условия текучести для железобетонных плит следует принимать отличными от условия (7.17). С достаточным основанием для плит, одинаково армированных в двух взаимно перпендикулярных направлениях верхней и нижней сетками арматуры, условия текучести можно принять в виде:

$$\left|m\right|_{\max} = m_T, \qquad (7.64)$$

где $\left|m\right|_{\max}$ – максимальный по абсолютной величине изгибающий момент, действующий по любому направлению; m_T – предельное значение этого момента.

Если плита имеет одиночное армирование, т.е. одну нижнюю сетку арматуры, то, считая бетон не воспринимающим растягивающие напряжения, будем иметь два условия текучести:

$$m_{\max} = m_T; \;\; m_{\min} = 0. \qquad (7.65)$$

Условия (7.64) и (7.65) в координатных осях $m_1, m_2,$ где m_1 и m_2 главные изгибающие моменты, изображенные квадратами (рис. 7.3), соответствуют потенциальным функциям

$$\Pi(\aleph_1, \aleph_2) = m_T(\left|\aleph_1\right| + \left|\aleph_2\right|);$$

$$\Pi(\aleph_1, \aleph_2) = m_T(\left|\aleph_1\right| + \left|\aleph_2\right|) \qquad (7.66)$$

при двухстороннем армировании и

$$\Pi(\aleph_1, \aleph_2) = \frac{m_T}{2}(\aleph_1 + \left|\aleph_1\right| + \aleph_2 + \left|\aleph_2\right|) \qquad (7.67)$$

при одностороннем.

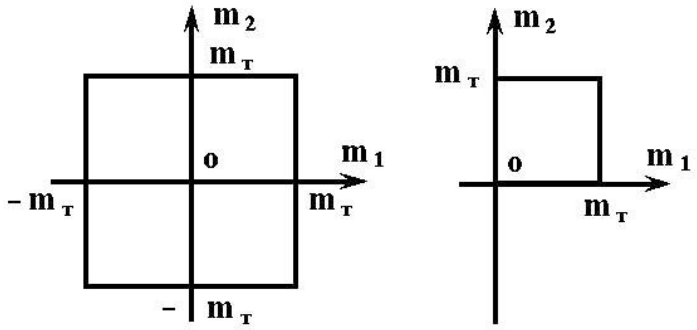


Рис. 7.3. К определению главных изгибающих моментов

В дальнейшем все рассуждения будем вести для плиты с симметричным двухсторонним армированием.

Полная работа внутренних сил для всей пластины равна:

$$T = -\int_F m_T(|\aleph_1| + |\aleph_2|)dF. \tag{7.68}$$

Работа внутренних сил по-прежнему равна:

$$V = \int_F qwdF. \tag{7.69}$$

Для предельного состояния требуется, чтобы при заданном V абсолютное значение T имело минимальное значение или чтобы при заданном T значение V было максимальным.

Допустим вначале, что кривизны $\aleph_1$ и $\aleph_2$ имеют везде одинаковый знак, который без ограничения общности можно считать положительным. Тогда при $m_T = \text{const}$

$$T = -m_T \int_F \nabla^2 wdF = -m_T \Phi \frac{\partial w}{\partial n} ds = -m_T s(\frac{\partial w}{\partial n})_{cp}. \tag{7.70}$$

В равенстве (7.70) поверхностный интеграл преобразован в контурный, s – длина контура опирания плиты, $(\frac{\partial w}{\partial n})_{cp}$ – среднее значение угла наклона деформированной плиты на ее контуре по нормалям к последнему.

Задаваясь величинами $\frac{\partial w}{\partial n}$ на контуре, величину T можно определить однозначно. Для того чтобы при этом получить максимум V при положительной нагрузке q, необходимо прогибам w внутри пластины придать максимальное значение. Это приведет к образованию поверхности отрицательной гауссовой кривизны (рис. 7.4), для выражения которой формула (7.70) для T будет уже несправедлива.

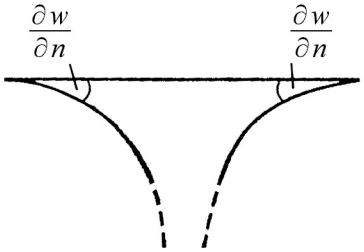


Рис. 7.4. Поверхность отрицательной гауссовой кривизны

Положим теперь, что кривизны $\aleph_1$ и $\aleph_2$ имеют разные знаки. Тогда гауссова кривизна пластины будет отрицательной, а работа внутренних сил выразится формулой

$$T = -\int_F m_T \left|\aleph_1 - \aleph_2\right| dF. \tag{7.71}$$

Замечая, что

$$\aleph_{1,2} = \frac{1}{2}(w_{xx} + w_{yy} + \sqrt{(w_{xx} - w_{yy})^2 + w_{xy}^2}), \tag{7.72}$$

получим:

$$T = -\int_F m_T \sqrt{(w_{xx} - w_{yy})^2 + w_{xy}^2}\, dF. \tag{7.73}$$

Чтобы при заданном V (7.69) величина T имела минимальное значение, следует положить:

$$w_{xx} - w_{yy} = 0;\ \ w_{xy} = 0,$$

при этом

$$w_{xx} = \aleph_1 = w_{yy} = \aleph_2,$$

и мы будем иметь поверхность положительной гауссовой кривизны с уравнением

$$w = f(x) + f(y),$$

где f – произвольная функция аргумента, стоящего в скобках.

Итак, допуская $\aleph_1\aleph_2 \succ 0$, получим, что экстремальное свойство, характеризующее состояние предельного равновесия пластины, достигается за пределами этого допущения точно так же, как и при альтернативном допущении $\aleph_1\aleph_2 \prec 0$. Отсюда следует, что состоянию предельного равновесия должно удовлетворять пограничное значение гауссовой кривизны $\aleph_1\aleph_2 = 0$ во всех точках плиты, т.е. деформированная поверхность плиты должна состоять из участков нулевой гауссовой кривизны.

Рассмотрим полигональную плиту, шарнирно опертую по контуру и нагруженную произвольной положительной нагрузкой. Форма разрушения такой плиты показана на рис. 7.5.

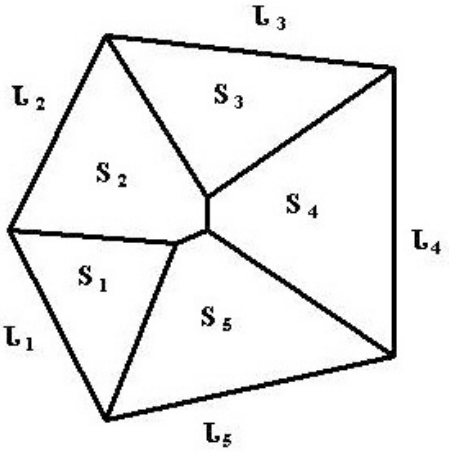


Рис. 7.5. Форма разрушения полигональной плиты, шарнирно опертой по контуру и нагруженной произвольной положительной нагрузкой

Обозначим углы наклона элементов плиты по направлениям, перпендикулярным сторонам одного опорного контура, через ψ. Тогда вместо (7.70) получим:

$$T = -m_T \sum \psi_{il} l_i \,,\ \psi_i = \frac{\partial w}{\partial n_i}, \tag{7.74}$$

где l_i – длина *i*-й стороны опорного контура. С другой стороны, прогибы w поверхности, имеющей вид пологого многогранника, равны:

$$w = w(x, y) = \psi_k z_k \,, \tag{7.75}$$

где z_k – расстояние от рассматриваемой точки (*x,y*) до стороны опорного контура, относящейся к той грани поверхности плиты, где расположена точка (*x,y*), *k* – номер этой грани.

Подставив (7.75) в выражение работы внешних сил (7.69), найдем:

$$V = \sum \psi_i S_i \,, \tag{7.76}$$

где S_i – статический момент нагрузки на *i*-й грани деформированной поверхности, взятый относительно стороны опорного контура.

Условие максимума $V+T$ выразим теперь в виде:

$$\sum \psi_i (S_i - m_T l_i) = \max . \tag{7.77}$$

Для реализации этого условия необходимо приравнять нулю частные производные по ψ_i от левой части выражения (7.77):

$$S_i - m_T l_i + \sum \psi_i \frac{\partial S_i}{\partial \psi_i} = 0. \tag{7.78}$$

Учитывая, что углы ψ_i являются малыми величинами, в начальной стадии разрушения плиты их можно считать стремящимися к нулю, и тогда получим простое условие:

$$\frac{S_i}{l_i} = m_T = \text{const}. \tag{7.79}$$

Таким образом, действительная форма разрушения полигональной плиты должна обладать тем свойством, что отношение статических моментов нагрузки S_i на каждой грани деформированной поверхности, взятых относительно соответствующих сторон опирания, к длине этой стороны l_i должно быть одинаковым для всех граней.

Представим функцию нагрузки в виде:

$$q = q_0 \xi(x, y), \tag{7.80}$$

где q_0 – коэффициент пропорциональности, подлежащий определению, $\xi(x, y)$ – заданная функция, определяющая единичную нагрузку $q_0 = 1$.

Тогда из условия $T+V=0$ с учетом (7.74) и (7.76) получим:

$$-m_T \sum \psi_i l_i + q_0 \sum \psi_i S_i^{(1)} = 0, \tag{7.81}$$

где

$$S_i^{(1)} = \frac{S_i}{q_0} \tag{7.82}$$

статический момент единичной нагрузки. Отсюда

$$q_0 = \frac{m_T \sum \psi_i l_i}{\sum \psi_i S_i^{(1)}}. \tag{7.83}$$

Согласно доказанному минимум q_0 достигается при $l_i / S_i^{(1)} = \text{const}$.

Сравним теперь истинную форму разрушения, удовлетворяющую критерию (7.79), с какой-либо другой, обладающей иным очертанием граней, поверхностью. В этой второй форме площади, поворачивающиеся вокруг каждой из сторон опорного контура, будут иные, причем одни из них больше, а другие меньше соответствующих площадей в истинной форме разрушения. То же можно сказать и о статических моментах нагрузки, расположенной на частях пластины, относящихся к каждой стороне опорного контура. А так как длина сторон l_i в обеих формах разрушения одинакова, то во второй форме

разрушения некоторые из величин $l_i/S_i^{(1)}$ окажутся больше, а некоторые меньше того одинакового для всех сторон значения $l_i/S_i^{(1)} = q_0/m_T$, которое имеет место в истинной форме разрушения.

Отсюда для любой формы разрушения, состоящей из плоских элементов, вращающихся вокруг сторон опорного контура, имеем:

$$\min \frac{l_i}{S_i^{(1)}} \le \frac{q_0}{m_T} \le \max \frac{l_i}{S_i^{(1)}}. \tag{7.84}$$

Таким образом, получаем возможность двухсторонней оценки величины разрушающей нагрузки q_0.

В заключение заметим, что рассмотренные линейчатые формы разрушения могут с успехом применяться и в расчете плит из материала с иными условиями текучести, например с условиями Губера–Генки–Мизеса для верхней оценки несущей способности.

Ортотропно армированные плиты. Часто железобетонные плиты армируются различно в направлениях осей *Ox* и *Oy*. Это проявляется как в различном количестве арматуры, укладываемой в этих направлениях, так и в том, что уровень расположения арматурных стержней ввиду их взаимного пересечения оказывается разным для разных направлений. Такие плиты при их расчете по предельному равновесию должны рассматриваться как ортотропные.

Пусть предельный изгибающий момент в направлении оси *Ox* равен m_x, а в направлении оси $Oy - m_y$. Тогда работа внутренних сил при пластическом изгибе плиты будет равна:

$$T = -\int\limits_F \int (m_x |w_{xx}| + m_y |w_{yy}|) dxdy\,. \tag{7.85}$$

Работа внешних сил равна, как и ранее,

$$V = \int\limits_F \int qwdxdy. \tag{7.86}$$

Введем новые независимые переменные:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{m_x}},\ \ \eta = \frac{y}{\sqrt{m_y}}. \tag{7.87}$$

Тогда выражения (7.85) и (7.86) преобразуются следующим образом:

$$T = -\sqrt{m_x m_y} \int\limits_{F'} \int \left(\left| \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right| \right) d\xi d\eta\,;$$

$$V = \sqrt{m_x m_y} \int\limits_{F'} q \int g w d\xi d\eta. \tag{7.88}$$

Интегрирование здесь производится по площади F', в которую преобразуется площадь F после линейного преобразования координат (7.87).

Приравнивая сумму работ внешних и внутренних сил нулю, получим условие предельного равновесия:

$$\iint_{F'}\left(\left|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right|+\left|\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right|\right)d\xi d\eta=\iint_{F'} qwd\xi d\eta. \qquad (7.89)$$

Таким образом, задача расчета ортотропной плиты сводится к расчету изотропной плиты, контур которой получен из контура заданной плиты при помощи линейного преобразования (7.87), причем предельный изгибающий момент в приведенной изотропной плите принят равным единице. Нагрузка здесь считается отнесенной к единице поверхности заданной плиты.

7.2. Применение линейного программирования к задаче определения несущей способности

Обычно формой разрушения плиты при расчете кинематическим методом приходится задаваться ввиду трудности получения точного решения экстремальной задачи. При этом получается оценка сверху, которую не всегда удается достаточно понизить. С развитием линейного программирования появилась возможность уточненного расчета исходя из некоторой многократно изменяемой системы, включающей в себя большое количество возможных форм разрушения. Методами линейного программирования можно автоматически найти параметры, определяющие форму разрушения, наиболее близкую к истинной, а также достаточно точное значение разрушающей нагрузки [45].

Зададимся формой разрушения плиты в виде пологого многогранника, вершины которого расположены в узлах квадратной сетки с диагоналями (рис. 7.6). При этом работа внутренних сил T оказывается равной:

$$T=\sum m_T\left|\theta_i\right| l_i, \qquad (7.90)$$

где θ_i – двугранный угол перелома в i-м ребре многогранника длиной l_i.

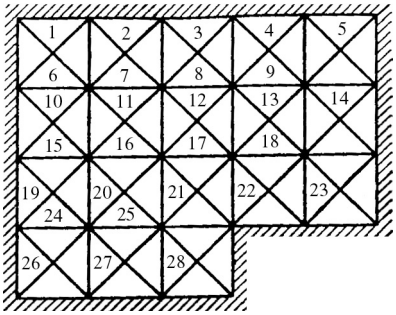


Рис. 7.6. Форма разрушения плиты в виде пологого многогранника, вершины которого расположены в узлах квадратной сетки с диагоналями

Суммирование производится по всем ребрам перелома. В более общем случае, например, в случае армированных железобетонных плит, можно брать различные значения m_T – при положительном угле m_T и при отрицательном – $m_T^{(1)}$.

Углы θ_i полностью определяются значениями прогибов плит в узлах сетки. После построения сетки ребер перелома с пронумерованными узлами сделать это очень легко. Например, угол перелома на участке 15–16 сетки, изображенной на рис. 7.6, равен:

$$\theta_{15\text{–}16} = (w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20})\frac{2}{\lambda},$$

где λ – размер стороны квадрата сетки. Точно так же получим:

$$\theta_{7\text{–}16} = (w_7 + w_{16} - w_{11} - w_{12})\frac{2}{\lambda}.$$

Для диагональных участков сетки угол перелома определяется несколько иначе. Например, для участков 6–11 и 13–17 имеем:

$$\theta_{6\text{–}11} = (2w_{11} - w_7 - w_{15})\frac{\sqrt{2}}{\lambda};\ \theta_{13\text{–}17} = (2w_{13}w_8 - w_{18})\frac{\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Нетрудно доказать, что угол перелома на участках двух полудиагоналей, например 6–11 и 11–16, всегда один и тот же, поэтому в расчете мы можем иметь дело с целыми диагоналями, не расчленяя их на половины. Таким образом, определяем:

$$\theta_{6\text{–}16} = \theta_{6\text{–}11} = \theta_{11\text{–}16} = (2w_{11} - w_7 - w_{15})\frac{\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Работа внутренних сил на прямых участках сетки ребер перелома равна – $m_T\theta\lambda$ или $m_T\theta\lambda$, а на диагоналях (полных) – $m_T\theta\lambda\sqrt{2}$ или $m_T\theta\lambda\sqrt{2}$, причем первые выражения берутся в случае $\theta \succ 0$, а вторые – при $\theta \prec 0$.

Общая работа внутренних сил равна:

$$T = -\sum m_T\varphi, \tag{7.91}$$

где φ – наибольшая из величин $\lambda\theta$ и – $\frac{m_T'}{m_T}\lambda\theta$. Мы имеем, таким образом, неравенства

$$\varphi \geq \theta\lambda;\ \varphi \geq -\frac{m_T'}{m_T}\theta\lambda. \tag{7.92}$$

Здесь, как и в некоторых предыдущих формулах, для простоты записи опущены индексы при φ, θ и m_T, обозначающие участок сетки ребер перелома.

Выражая θ через прогибы w, получим вместо (7.92) ряд неравенств вида

$$\varphi_{15\text{–}18} \geq 2(w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20});$$

$$\varphi_{15\text{–}16} \geq -2\frac{m'_T}{m_T}(w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20}),\ \ \varphi_{6\text{–}16} \geq 2w_{11} - w_7 - w_{15};$$

$$\varphi_{6\text{–}16} \geq -2\frac{m'_T}{m_T}(2w_{11} - w_7 - w_{15}). \qquad (7.93)$$

Работа внешних сил в состоянии разрушения равна:

$$V = \sum w_i P_i. \qquad (7.94)$$

здесь P – часть вертикальной нагрузки, расположенная на участке пластины, тяготеющем к узлу i (рис. 7.7).

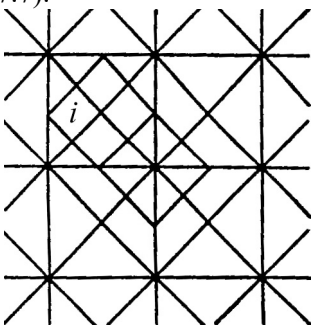


Рис. 7.7. Участок пластины, тяготеющем к узлу i

Потеря потенциальной энергии системы на заданном перемещении равна алгебраической сумме работ внешних и внутренних сил:

$$U = V + T = \sum w_i P_i - \sum m_T \varphi_{i-k}. \qquad (7.95)$$

Во второй сумме суммирование производится по всем участкам сетки возможных ребер перелома.

Для истинной формы разрушения величина U должна быть максимальной. Кроме того, в состоянии предельного равновесия она обращается в нуль. Таким образом, получаем следующую задачу параметрического линейного программирования: требуется найти максимум линейной формы U (7.95) при наличии неравенств (7.93), полагая прогиб одного из узлов равным единице. Далее, надо отыскать такое значение параметра нагрузки, т.е. общего множителя при величинах P_i, при котором максимум формы U обращается в нуль. Попутно в процессе решения задачи

получаются все данные для нахождения формы разрушения пластины. Эта задача решается при помощи симплекс-метода, для которого есть готовые программы вычислений.

В ряде случаев, когда требуемая точность расчета позволяет ограничиваться небольшим числом узлов сетки, вычисления можно производить и вручную.

При переходе от пластины к оболочкам появляются новые качественные особенности расчета по предельному равновесию, которые заключаются в том, что в оболочках необходимо учитывать кроме деформаций изгиба осевые деформации ее срединной поверхности. Трудности, возникающие при этом, долгое время мешали распространению метода предельного равновесия на оболочки. Лишь в отдельных случаях удается расчленить осевые деформации и деформации изгиба по отдельным сечениям, и тогда задача расчета оболочки становится достаточно простой.

Литература к разделу 2

1. *Айнола Л.Я.* К теореме взаимности для динамических задач теории упругости // ПММ.-1967.-Т.31. – Вып. 1. – С.54-56.

2. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1962. – 464 с.

3. *Бондаренко Б.А.* Полигармонические полиномы. – Ташкент: Изд-во «ФАН», 1968. – 171 с.

4. *Бреббиа К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М.: Мир,1987.

5. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965. – 607 с.

6. *Варвак П.М., Варвак Л.П.* Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.

7. *Верюжский Ю.В.* Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. – К.: Вища школа, 1978.

8. *Верюжский Ю.В.* Метод интегральных уравнений в механике деформируемых твердых тел. – К.: КИСИ, 1977.

9. *Верюжский Ю.В.* Об одном способе аппроксимации интегральных уравнений при решении методом потенциала некоторых задач теории упругости // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып.24.

10. *Верюжский Ю.В., Савицкий В.В., Спартак М.С. и др.* Численное решение на основе метода потенциала смешанных статических задач теории упругости и пластичности // Труды Всесоюзной конференции «Смешанные задачи механики деформируемого твердого тела». – Ростов-на-Дону, 1977.

11. *Гвоздев А.А.* Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации // Тр.конф. по пластическим деформациям. – М.: Изд-во АН СССР, 1938.

12. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Смешанная осесимметричная задача теории упругости для цилиндра конечной длины // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1971. – Вып.15.

13. *Гродский Г.Д.* Интегрирование уравнений равновесия упругого тела // Изв. АН СССР. Сер. матем. и естеств. наук. – 1932. – № 46.

14. *Деев В.М.* О формах общего решения пространственной задачи теории упругости, выраженных при помощи гармонических функций // ПММ. – 1959. – Т. 23. – Вып. 6.

15. *Демидович Б.П., Марон А.И.* Численные методы анализа. – М.: – Физматгиз, 1962.

16. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 423 с.

17. *Зенкевич О.* Конечные элементы: эффективные алгоритмы реализации. – М.: Мир, 1981. – 230 с.

18. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: ОНТИ, 1948.

19. *Кампе де Ферье Ж. и др.* Функции математической физики. – М.: Физматгиз, 1963. – 111 с.

20. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Физматгиз,1962.

21. *Кильчевский Н.А.* Основы аналитической механики оболочек. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – 359 с.

22. *Коллатц Л.* Численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ,1953.

23. *Ковнеристов Г.Б.* Осесимметричная контактная задача для цилиндрической оболочки // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1975. – Вып. 27.

24. *Ковнеристов Г.Б.* Интегральные уравнения контактной задачи теории упругости для заглубленных штампов. – Сб. науч. тр. КИСИ. – 1962. – Вып. 20.

25. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

26. *Корнишин М.С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – М.: Наука, 1964.

27. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М., Мир, 1987.

28. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высш. шк., 1965. –272 с.

29. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963.

30. *Купрадзе В.Д., Бурчуладзе Т.В.* Динамические задачи теории упругости и термоупругости // Совр. пробл. математики. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1975. – Т.7.

31. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976.

32. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1973.

33. Линейные уравнения математической физики / Под. ред. С.Г. Михлина. – М.: Наука, 1964. – 368 с.

34. *Лисицин Б.М.* Проекционные и проекционно-сеточные методы. – К. : Вища школа, 1991. – 171 с.

35. *Лисицин Б.М.* Об одном методе решения задач теории упругости // Прикладная механика. – 1967.-Т.3. – Вып.4.-С. 85-92.

36. *Марков А.А.* О вариационных принципах в теории пластичности // ПММ. – Х1. – Вып. 3. 1947.

37. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

38. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

39. Метод конечных элементов / Под ред. П.М.Варвака. – К.: Вища школа, 1981. – 175 с.

40. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С. Сахарова, И.Альтенбаха. – К.: Вища школа, 1982. – 479 с.

41. *Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 339 с.

42. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Гостехиздат, 1968. – 579 с.

43. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975.

44. *Овчинников П.Ф., Лисицин Б.М., Михайленко В.М.* Высшая математика. – К.: Вища школа, 1989. – 679 с.

45. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 685 с.

46. *Папкович П.Ф.* Выражение общего интеграла уравнений теории упругости через гармонические функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. и естеств. наук. – 1932. – № 10.

47. *Партон В.З., Перлин П.П.* Интегральные уравнения основных пространственных и плоских задач упругого равновесия // Механика твердых деформируемых тел. – М.: ВИНИТИ, 1975. – Вып.8.

48. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 324 с.

49. *Рвачев В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техника, 1967.

50. *Рвачев В.Л., Шкляров Л.И.* О применении метода Бубнова – Галеркина к решению краевых задач для областей сложной формы // Диф. уравнения. – № 11. – 1965.

51. *Рвачев В.Л.* К вопросу построения координатных последовательностей // Диф. уравнения. – 1970. – № 6.

52. *Ржаницын А.Р.* Расчет пластин и оболочек кинематическим методом предельного равновесия // Материалы летней школы по теории пластин и оболочек. – Тарту, 1966.

53. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики: В 5-ти т. – М.: Физматгиз, 1973.-Т.2. – 479 с.

54. *Снеддон И.Н.* Преобразование Фурье. – М.: ИЛ, 1955.

55. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 443 с.

56. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976.

57. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.

58. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.

59. *Greenberg J.* Complementary minimum principles for an elastic-plastic material // Quart. Appl. Math. 1949, 7.

60. *Cruse T.A.* Three-dimensial elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack // Int. J. Fract. Mech.,1971, N 1.

61. *Finlayson B.A.* The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. – New York: Academic Press, 1972.

РАЗДЕЛ 3
ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Глава 1
ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

1.1. Процесс проектирования и пути его реализации

Проектирование (лат. *projectus – брошенный вперед*) – процесс создания проекта-прототипа, прообраза предполагаемого или возможного объекта, состояния.

В строительстве проектированием называют процесс разработки проектной документации, предназначенной для осуществления капитального строительства как отдельных объектов, так и целых комплексов инженерных сооружений гражданского, промышленного, транспортного или специального назначения.

В процессе проектирования выполняются технические и экономические расчеты, схемы, графики, пояснительные записки, макеты, составляются спецификации, сметы, калькуляции и описания.

Проект – комплект указанной документации и материалов определенного состава. Проект какого-либо объекта капитального строительства может быть индивидуальным или типовым. При разработке индивидуальных проектов широко применяются типовые проекты конструкций, архитектурных и монтажных деталей и типовые проектные решения.

Таким образом, можно утверждать, что поскольку цель проектирования состоит в поиске, фиксации и документальном оформлении информации об объекте проектирования, в процессе проектирования исходное описание объекта преобразуется в конечное с формированием при этом необходимого количества промежуточных описаний.

Промежуточное или конечное описание объекта проектирования, необходимое и достаточное для реализации некоторого этапа или всего комплекса проектных или строительных работ, называется проектным решением. Возможности проектирования сложных объектов обусловлены использованием ряда принципов, основными из которых являются декомпозиция и иерархичность описаний объектов, многоэтапность и итерационность проектирования, типизация и унификация проектных решений, методологии и средств проектирования.

Принцип декомпозиции предполагает структуризацию (разбиение) представлений принятого уровня описания объекта на составные части с целью их раздельного проектирования, но при этом необходимым условием является согласование принимаемых решений.

Принцип иерархичности предполагает структуризацию представлений об объектах и их составных частях по степени конкретизации и детализации описания с целью последовательного наращивания сложности описания объекта в сочетании с декомпозицией.

Как правило, процесс проектирования является многоэтапным; по степени конкретизации описаний и готовности проектных решений его разделяют на стадии, этапы, проектные процедуры и операции.

Могут быть выделены, в частности, стадии предпроектных исследований, технического задания, технического предложения, эскизного, технического и рабочего проектов, испытаний и внедрения.

Собственно проектирование – это часть всего процесса, включающая формирование всех предусмотренных описаний объекта, относящихся к одному или нескольким иерархическим уровням или аспектам проектирования (функциональному, конструкторскому или технологическому). Составными частями этапа являются проектные процедуры, каждая из которых представляет собой формализованную совокупность действий, завершающуюся разработкой проектного решения. Проектная процедура, в свою очередь, включает в себя проектные операции, представляющие собой действия или формализованные совокупности действий, алгоритм которых остается неизменным для ряда проектных процедур. Примерами проектных процедур являются расчет параметров, моделирование объекта или функционирования объекта и оформление чертежа объекта. Примерами проектных операций являются вычисление характеристик состояния объекта соответствующим методом, оформление таблицы, вычерчивание типового графического изображения.

Направленность процесса проектирования определяется двумя формами организации: нисходящее и восходящее проектирование. При нисходящем проектировании процесс поиска и выработки решений идет от высших к низшим уровням иерархии (от общего к частному) с увеличением степени конкретизации и детализации. Такая форма основана на выдвижении предположений о свойствах элементов низших уровней. При восходящем проектировании процесс идет от низших к высшим уровням иерархии (от частного к общему) с выполнением синтеза решений при переходе к каждому следующему уровню.

При разработке сложных объектов в условиях многоэтапного иерархического проектирования выработать рациональные проектные решения путем однократной реализации необходимых этапов и уровней

удается далеко не всегда. Поэтому приходится вести проектирование как итерационный процесс с возвратом к предшествующим этапам и уровням.

С целью улучшения технико-экономических показателей объектов, сокращения трудоемкости и сроков проектирования осуществляют типизацию и унификацию проектных решений, методологии и средств проектирования.

Типизация проектных решений целесообразна при их многократном использовании. Для разработки уникальных объектов типовые решения используют в ограниченном объеме при наличии соответствующих возможностей.

Унификация методологии проектирования предполагает выбор и разработку методов и методик, обеспечивающих достаточно эффективное проектирование объектов соответствующего класса или группы. Унификация средств проектирования предполагает разработку проектных процедур и операций, выполняемых непосредственно проектировщиком либо с использованием технических и программных средств и обеспечивающих проектирование объектов соответствующего класса или группы.

Существуют следующие пути повышения эффективности и рационализации процесса проектирования: типизация, оптимизация и автоматизация.

Без достаточно глубокой типизации проектных решений, методологии и средств проектирования рационализация проектирования невозможна из-за больших объемов и сроков разработки, а также ограниченных временных и трудовых ресурсов.

В пределах имеющихся в распоряжении проектировщиков материалов эффективность проектируемых объектов в наибольшей степени определяется оптимальностью принимаемых решений. Оптимизация предполагает принятие таких решений, которые в наибольшей степени соответствуют критериальным требованиям и удовлетворяют соответствующим условиям, формулируемым обычно в форме ограничений.

Типизация и оптимизация не дают существенного эффекта без автоматизации проектных работ, т.е. внедрения автоматического или по крайней мере автоматизированного проектирования на основе взаимодействия в той или иной мере человека с компьютером (в идеале – без участия человека). Автоматизируют процедуры и операции ввода и вывода различных данных, поиска, разработки, принятия, оценки, контроля и хранения проектных решений, компоновки, редактирования и вывода (изготовления) проектной документации, информационно-справочного обслуживания. В настоящее время не может быть эффективно автоматизирована только небольшая часть в основном творческих процессов, в том числе поиск и принятие оригинальных решений, принятие решений в неформализуемых ситуациях, решение наиболее сложных вопросов по

согласованию решений. Но и эти работы могут быть значительно интенсифицированы за счет автоматизации информационно-справочного обслуживания.

С целью получения данных, необходимых для технически правильного и экономически целесообразного решения основных задач проектирования, строительства, реконструкции и эксплуатации строительных объектов, осуществляются инженерные изыскания. Инженерные изыскания предшествуют всем видам строительства, их характер зависит от степени изученности обследуемого района и типа проектируемого объекта. До технических изысканий проводятся, как правило, экономические исследования в целях выбора района или пункта размещения объекта и экономического обоснования намечаемого строительства. Например, для обоснования строительства нового промышленного объекта наряду с вопросами материального снабжения строительства изучается обеспеченность будущего предприятия рабочей силой, сырьем, топливом, энергией, выявляются возможности деловых контактов с другими предприятиями и фирмами, характер и состояние существующих транспортных связей и коммуникаций.

Программа инженерных изысканий должна быть разработана с учетом экологических требований и обеспечивать предотвращение или сведение к минимуму того ущерба, который может быть нанесен окружающей среде как самими инженерными изысканиями, так и последующим строительством.

Комплекс технических изысканий включает изучение топографических, геологических, гидрологических и метеорологических условий района строительства, обследование месторождений местных строительных материалов, сбор исходных данных для составления проекта организации строительства и смет, а также проведение необходимых согласований. Особый характер, ввиду большой протяженности исследуемой зоны, имеют инженерные изыскания для проектирования транспортных объектов, нефте- и газопроводов, линий связи и электропередач (так называемые линейные изыскания).

Инженерные изыскания проводятся, как правило, в один этап и сводятся к формированию исходных данных для разработки технического проекта и рабочих чертежей. Для сложных в инженерном отношении объектов инженерные изыскания проводят в два этапа на основе технических заданий, в которых определяются основной состав, детальность и порядок проведения изысканий. Изыскательские работы обычно выполняются организацией, осуществляющей проектирование объекта с привлечением в необходимых случаях специализированных фирм.

В проведении изыскательских работ различают три периода: подготовительный, полевой и камеральный. В подготовительный период собираются и изучаются необходимые данные по объекту и уточняется

задание, выдаваемое изыскательской партии. В период полевых работ проводятся геодезические, топографические, буровые и другие работы. Камеральная обработка состоит в систематизации полевых материалов, составлении топографических планов, геологических разрезов, гидрологических, климатических и других характеристик района и строительной площадки. Ускорение, повышение качества и снижение стоимости инженерных изысканий достигается при проведении их по единой методологии путем концентрации в специализированных организациях, имеющих в своем составе постоянно действующие экспедиции и партии.

Задание на проектирование, в котором указываются наименование объекта, его основные параметры, место и условия строительства составляется заказчиком с помощью специалистов. Проектирование крупных инженерных объектов чаще всего выполняется в две стадии – технический проект и рабочие чертежи. На стадии технического проекта разрабатываются основные вопросы организации, технологии и экономики производства. Принимаются архитектурные и конструктивные решения по инженерным сооружениям, составляется смета на строительство и определяются технико-экономические показатели.

При разработке рабочих чертежей производятся уточнения и детализация предусмотренных техническим проектом решений в той степени, в которой это необходимо для производства строительных и монтажных работ.

Важным этапом проектирования, решающим образом влияющим на массу, экономичность изготовления и эксплуатационные качества конструкции, является выбор материала.

Материал выбирают с учетом характера эксплуатационных нагрузок (усталостных, ударных, статических), работы конструкций в условиях высоких и низких температур, агрессивных сред, износа и т.п. Весьма весомым показателем качества материала является стабильность его свойств, в том числе разброс значений его механических характеристик.

1.2. Система проектирования, изготовления и монтажа инженерных сооружений

Проектирование является лишь одним из этапов процесса создания сооружения или комплекса сооружений, предназначенных для осуществления предусмотренных технологических процедур в заданный период времени и в определенных условиях эксплуатации. В ряде случаев необходимо реконструировать уже существующий объект для выполнения нового, не предусмотренного первоначальным проектом круга задач; к реконструкции можно отнести, например, и ремонт жилых зданий с учетом

новых повышенных требований к удобству и эстетическим запросам жильцов, архитектурному облику зданий как элементов планируемого в соответствии с определенной творческой идеей микрорайона города. Во всех случаях следует помнить о решающей роли проекта строительной части объекта, ибо «по хорошему проекту плохо построить можно, но невозможно хорошо построить по плохому проекту».

Процесс создания комплекса инженерных сооружений, например завода для выпуска определенной номенклатуры изделий, начинается с момента, когда некая фирма, будем называть ее «генеральный заказчик», сочла целесообразным создание такого завода, изыскала средства для инвестирования соответствующего проекта и, не имея в своем составе необходимых специалистов, готова обратиться за помощью к специализированным организациям.

Процесс проектирования завода начинается с разработки технологии производства намеченной продукции, которую генеральный заказчик поручил выполнить фирме А – головной проектной технологической организации. Данная фирма может также выполнять и роль генерального подрядчика, т.е. организации, несущей полную ответственность за реализацию всего процесса создания объекта вплоть до начала его полноценной эксплуатации, как говорят, «под ключ».

Если объект достаточно сложный, то скорее всего фирма А выполнение проекта строительной его части поручит субподрядчику – общестроительной проектной фирме В, которая от генерального подрядчика должна получить минимально необходимую для проектирования информацию: размеры зданий в плане и по высоте, основные характеристики, в том числе вес технологического оборудования, количество и грузоподъемность мостовых кранов. Фирма В разрабатывает принципиальное решение строительной части объекта и рабочий проект строительной части объекта, которые входят составной самостоятельной частью в полный проект завода. Разработку проектов сложных металлических и железобетонных конструкций фирма В может осуществить самостоятельно или в свою очередь поручить специализированным организациям, располагающим контингентом высококвалифицированных специалистов и имеющим большой опыт проектирования в соответствующей области.

Фирма А оценивает полученный проект в основном с точки зрения его соответствия заданному технологическому решению и конечной стоимости. Для этого ей необходимы только чертежи с планировочными решениями – планы и разрезы всех цехов, а также сметы на выполнение основных видов работ. Завершающими процесс проектирования документами являются рабочий проект объекта и смета на объект, которые и определяют окончательно необходимые для его возведения объемы материальных и финансовых средств и вложений.

Если проект принят, он передается строительной организации, которая также в роли субподрядчика весь цикл подготовительных, строительно-монтажных, отделочных и прочих работ может выполнить самостоятельно или поручить их выполнение другим специализированным организациям – монтажным, транспортным, сантехническим, заводам металлических и железобетонных конструкций.

В государствах с рыночной экономикой проектирование осуществляется главным образом акционерными и частными фирмами, сроки выполнения проекта определяются по соглашению заказчика с исполнителем. На первой стадии проектирования – стадии анализа – определяются общие экономические показатели проектируемого объекта, намечаются технические решения зданий и сооружений. На второй стадии разрабатывается эскизный, или предварительный проект, в котором конкретизируются намеченные решения до степени, позволяющей определить стоимость строительства. Часто выбор исполнителей проекта или его частей производится на конкурсных началах, объявляются торги.

На стадии предварительной оценки объема работ и стоимости проекта важно иметь представление об основных этапах и процедурах проектирования. В качестве примера приведем данные об относительной трудоемкости этапов и процедур проектирования стальных конструкций зданий и сооружений [2] (в скобках приведена относительная трудоемкость отдельных этапов и процедур в процентах).

Этап 1. Поиск проектного решения (8,0)

1. Участие в подготовке технического задания на проектирование (0,6).
2. Анализ технического задания (0,9).
3. Подбор и анализ прототипов, аналогов, типовых решений и конструкций (0,8).
4. Разработка принципиальной схемы (1,3).
5. Разработка конструктивной формы элементов и узлов (1,8).
6. Компоновка конструктивной схемы (2,5).

Этап 2. Расчет основных несущих конструкций (22)

1. Разработка расчетной схемы (0,9).
2. Составление схемы нагрузок и их сочетаний (0,7).
3. Сбор нагрузок (2,7).
4. Приближенный расчет (0,4).
5. Назначение основных геометрических параметров несущих элементов (1,3).
6. Вычисление жесткостей сечений элементов (0,4).
7. Статический расчет (4,9).
8. Определение частот и форм собственных колебаний сооружения (0,2).
9. Расчет на вынужденные колебания, сейсмику и ветровой резонанс (0,6).

10. Построение и загружение линий влияния усилий (0,4).
11. Определение расчетных усилий в элементах (2,4).
12. Проверка прочности и устойчивости элементов (4,2).
13. Проверка элементов при переменных нагрузках (0,7).
14. Проверка деформаций элементов (0,7).
15. Учет длительных процессов в элементах (0,2).
16. Анализ полученных результатов (1,3).

Этап 3. Расчет прочих конструкций (10)
1. Балки перекрытий, площадок и т. д. (5,2).
2. Бункеры и силосы (0,6).
3. Трубопроводы и газоходы (0,1).
4. Монорельсы, пути подвесного транспорта (0,3).
5. Торцевые и продольные фахверки (2,0).
6. Связи (0,3).
7. Кронштейны и подвески (0,1).
8. Шпангоуты и опоры трубопроводов и трубчатых галерей (0,4).
9. Каркасы внутрицеховых помещений (1,0).

Этап 4. Конструктивные расчеты (6,0)
1. Расчет стыков элементов (1,4).
2. Расчет прикреплений (3,0).
3. Расчет вспомогательных элементов и узлов (1,6).

Этап 5. Оформление проектно-сметной документации (54,0)
1. Анализ и оптимизация конструктивных решений (3,2).
2. Унификация элементов и узлов (2,7).
3. Разработка чертежей схем (18,9).
4. Разработка чертежей элементов и узлов (20,0).
5. Составление выборки металла и исчисление веса (3,2).
6. Составление технической спецификации стали (2,7).
7. Составление ведомости монтажных болтов (1,6).
8. Составление сметы (1,7).

Трудоемкость первого этапа невелика, однако он решающим образом влияет на эффективность проектного решения.

Второй, третий и четвертый этапы сводятся к постепенной детализации и обоснованию формируемого проектного решения. Вначале рассчитывается здание или сооружение в целом, затем составляющие его отдельные конструкции и, наконец, относительно мелкие элементы и узлы. Входящие в эту часть процедуры проектирования выполняются специалистами относительно высокой квалификации и от качества полученных ими результатов зависит экономическая эффективность и надежность проектируемого объекта.

Трудоемкость пятого этапа – более 50 процентов, что вызвано необходимостью выпуска большого числа текстовых и графических документов.

1.3. Основы формообразования строительных конструкций

Среди многих требований и условий, которыми необходимо руководствоваться проектировщику, следующие три принципа имеют важнейшее значение [6]:

– наибольшая экономия материала;

– наименьшая трудоемкость изготовления;

– наибольшая скорость строительства (монтажа).

Более или менее успешной реализацией этих принципов и определяется качество выбора конструктивной формы сооружения, взаимного расположения его частей (элементов), их количества, размеров и формы, вида соединений.

Конструктивные формы элементов различных сооружений (общественных и жилых зданий, мостов, промышленных сооружений и т.п.) должны соответствовать своему назначению. Конструкции, предназначенные для восприятия внешних нагрузок, должны обеспечивать нормальное функционирование всего сооружения в целом, наиболее существенно при этом правильно выбрать его объемно-планировочное или объемно-пространственное решение. В объемно-планировочном или объемно-пространственном решении должны найти отражение параметры конструктивной формы, функциональность, последовательность технологического процесса при эксплуатации сооружения, транспортная схема обслуживания оборудования и другие факторы данной структуры производства, условий эксплуатации конструкций, жизнедеятельности персонала и т.п. Такие факторы, как инженерные критерии (индустриальность, масса конструкций, возможность их поточного изготовления и др.), являются вторичными по отношению к объемно-планировочному решению.

Эффективность принятых проектных решений зависит прежде всего от того, насколько они удовлетворяют следующим основным условиям [6]:

– рациональный выбор строительных материалов и их экономия; так, металл следует применять только в тех случаях, когда его замена другими материалами не является целесообразной;

– транспортабельность отправочных элементов; в проекте должна быть предусмотрена перевозка их целыми или по частям с применением соответствующих транспортных средств;

– технологичность конструктивной формы: элементы сооружения должны проектироваться с учетом требований технологии изготовления и монтажа с ориентацией на наиболее современные и производительные технологические приемы, обеспечивающие максимальное снижение трудоемкости;

– долговечность конструкции, определяемая сроками физического и морального износа;

– эстетичность конструкции, определяемая гармоничностью форм.

Основным показателем при выборе конструктивной формы сооружения (за исключением особых случаев) является экономичность предложенного проектного решения, определяемая приведенными затратами [3]. При оценке экономичности предложенной конструктивной формы определяется прежде всего стоимость основных материалов, которая является главной составляющей общей стоимости конструкции. Поэтому основным направлением удешевления конструкций является снижение их массы. Последнее может быть достигнуто уменьшением массы как основных элементов за счет целесообразно выбранной их конструктивной формы, так и элементов конструктивного оформления (фасонок, накладок и др.), определяющих величину строительного коэффициента, выражаемого отношением фактической массы с учетом конструктивного оформления к теоретической массе, подсчитанной по площади поперечного сечения элементов без учета конструктивного оформления. Строительный коэффициент характеризует качество конструктивной формы не только с точки зрения затрат материалов, но и технологичности изготовления и сроков возведения сооружения.

Основным путем снижения значения строительного коэффициента является улучшение конструктивно-планировочного решения на основе принципов концентрации материала и упрощения конструктивной формы, обеспечивающего технологичность изготовления, а также правильного выбора решения узлов и сопряжений.

Принцип концентрации материала, т.е. сокращение общего числа элементов за счет маломощных и увеличения сечения более мощных элементов, способствует снижению общего расхода материала. Примером может служить снижение массы железобетона при увеличении шага рам (естественно, в определенных границах) при достаточно большой высоте колонн или уменьшение общего расхода стали на резервуары большей емкости при заданном общем объеме нефтехранилища по сравнению с вариантом проектирования большего числа резервуаров меньшей емкости.

Снижение расхода материала может быть получено также максимально возможным совмещением функций различных несущих элементов (например, совмещение подкрановой балки с подстропильной фермой или

совмещение ограждающих и несущих конструкций), а также за счет блочного решения покрытий и т.п.

Металлоемкость стальных конструкций в ряде случаев может быть уменьшена применением сталей повышенной и высокой прочности. Однако при этом следует учитывать рациональную область применения той или иной марки стали. Например, при конструировании элементов большой гибкости, работающих на продольный изгиб, применение сталей повышенной и высокой прочности не является оправданным.

1.4. Создание прогрессивных конструктивных форм

Разработка и применение прогрессивных типов конструкций является одним из необходимых условий создания строительных объектов, отвечающих современным требованиям прочности, надежности, долговечности, эксплуатационной целесообразности и экономичности.

В современном строительном проектировании используется целый ряд эффективных возможностей создания прогрессивных конструктивных форм, в том числе [3, 6]:

– применение новых и традиционных материалов с улучшенными физико-механическими и эксплуатационными характеристиками;

– дальнейшее развитие способов монтажа конструкций и соединения их элементов;

– выбор таких типов сооружений и расчетных схем, в которых применяемый материал используется наиболее целесообразно с точки зрения его конструктивных свойств;

– эффективное применение предварительного напряжения в ответственных элементах конструкций, в том числе регулирование напряжений в процессе монтажа и эксплуатации;

– создание и применение новых прогрессивных горячекатанных и гнутосварных тонкостенных профилей в металлических конструкциях;

– автоматизация процессов изготовления конструкций, применение механизации и электронного управления; использование высшего уровня индустриализации, при котором процесс монтажа на месте строительства превращается в процесс сборки из крупных блоков всего сооружения в целом или отдельных его частей;

– автоматизация проектирования, открывающая перед проектировщиком практически неограниченные возможности для сравнительной оценки многих вариантов решения и выбора наилучшего как на основе элементарного «перебора», так и с помощью процедур, основанных на аналитических моделях;

– развитие и внедрение идей, приводящих к минимальным затратам на монтаже, например за счет применения складывающихся конструкций.

Предварительное напряжение в металлических и железобетонных конструкциях расширяет область их упругой работы, уменьшает величину деформаций, расширяет область применения высокопрочных материалов, а в некоторых случаях является единственно возможным способом усиления сооружений. Выбор способа предварительного напряжения зависит, в частности, от конструктивной формы, характера действующих нагрузок и определяется соображениями экономичности сооружения и требованиями, связанными с его прочностью, устойчивостью и деформативностью. В настоящее время создан ряд новых типов металлических предварительно напряженных конструкций, однако следует иметь в виду, что при значительных циклических нагрузках и пластических деформациях такие конструкции должны быть проверены на малоцикловое воздействие.

Преимущество складывающихся конструкций заключается в том, что они поставляются с завода как габаритная отправочная единица – марка в сложенном виде и на монтаже лишь расправляются при установке в проектное положение [7].

В последние десятилетия большое внимание в строительном проектировании уделяется задачам оптимизации конструктивных форм, т.е. выбору из многих варианта проектного решения, наилучшим в соответствующем смысле образом удовлетворяющего определенной системе условий. В качестве синтезирующего критерия часто выбирают приведенную стоимость сооружения, при этом подразумевается, что технологические требования к нему полностью удовлетворяются и требуемый уровень надежности обеспечивается.

Задача оптимизации конструктивной формы является многоплановой (что особенно характерно для задач оптимизации в строительстве), ее решение должно обеспечивать использование прогрессивных типов монтажных соединений, учитывать возможность укрупнительной сборки, степень заводской готовности и т.п. Выбором оптимального варианта по массе и трудоемкости изготовления процесс оптимизации не заканчивается, во внимание должны быть приняты, в частности, факторы, определяющие надежность конструкции во все периоды ее существования, окончательный же выбор расчетной схемы производится с учетом приведенных затрат. Более подробно проблема оптимального проектирования строительных конструкций и сооружений рассматривается в гл. 2.

1.5. Типизация строительных конструкций

В строительстве под типизацией понимают обоснованное сведение всего многообразия применяемых типов зданий, сооружений, конструкций к небольшому их числу, предпочтительно характеризующемуся своими эксплуатационными, экономическими и другими показателями.

Типизация может сводиться к проектированию и возведению зданий и сооружений определенных типов, например жилых и промышленных зданий, из секций; массовых зданий и сооружений в целом – типовых школ, жилых домов, больниц, производственных цехов, башен, резервуаров и т.п. Проекты таких зданий и сооружений называются типовыми, в них предусмотрено применение типовых конструкций и деталей.

Для облегчения и удешевления массового производства целесообразно иметь возможно меньшее число типов стандартных конструкций и деталей, например ферм и балок покрытий и перекрытий, стеновых панелей, оконных переплетов и т.п. Число типовых деталей конструкций и зданий может быть установлено на основе конструктивных, технологических, экономических и других соображений. Типизация осуществляется на основе так называемой модульной системы и унификации элементов зданий и сооружений.

Унификация позволяет рационально сократить число объектов одинакового функционального назначения или привести различные элементы конструкций к наименьшему числу типоразмеров, марок, форм. Однако следует иметь в виду, что вынужденное применение одной из ограниченного числа типовых конструкций необходимого типа может, наряду с выигрышем за счет снижения трудоемкости изготовления и монтажа, привести к существенному увеличению общего расхода материала на строительство объекта, повышенным транспортным расходам и пр. Следовательно, стремление к унификации, применению типовых конструкций и деталей не может быть во всех случаях самоцелью, преобладающей над другими аргументами; определяющим критерием выбора окончательного проектного решения должны оставаться приведенные затраты (кроме особых случаев).

Типизация является важнейшим условием для внедрения в строительстве индустриальных методов возведения зданий и сооружений, снижения стоимости, сокращения сроков и повышения качества строительства. Таким образом, развитие типизации в определенной области строительства перспективно при выполнении следующих условий:

– выбор оптимальных градаций размеров и формы конструктивных элементов (параметры сетки колонн, шаг стропильных ферм и рам, уклон кровли, форма сечения элементов, унификация узлов опирания и т.п.;

– рациональный выбор материалов;

– оптимизация типовых конструкций в зависимости от числа и характера нагрузок;

– формирование оптимальной номенклатуры типовых конструкций, обеспечивающих минимальное превышение расхода материалов по сравнению с индивидуальным проектированием;

– изготовление типовых конструкций на высокомеханизированных поточных линиях;

– соответствие номенклатуры типовых конструкций доступному строителям парку подъемно-транспортных средств и специального монтажного оборудования.

1.6. Технологичность конструкций

Под технологичностью конструкции изделия принято понимать совокупность свойств, которые обеспечивают его изготовление, ремонт и техническое обслуживание по наиболее эффективной по сравнению с однотипными конструкциями того же названия технологии при одинаковых условиях их изготовления и эксплуатации и при одних и тех же показателях качества [7]. Применение эффективной технологии предполагает оптимальные затраты труда, материалов, средств, времени при технологической подготовке производства, в процессе изготовления, эксплуатации и ремонта, включая подготовку изделия к функционированию, контроль его работоспособности, профилактическое обслуживание.

В строительстве понятие технологичности можно обобщить и применительно к зданию или сооружению в целом как полному комплексу составляющих его элементов. Действительно, среди нескольких вариантов зданий, отвечающих в соответствии с заданием на проектирование своему технологическому назначению и условиям надежности в заданный период времени, можно выделить одно, при реализации которого затраты средств, материалов, труда и времени на изготовление, транспортировку, монтаж и эксплуатацию окажутся наименьшими. Именно к данному варианту можно, по-видимому, применить определения «локальный минимум» и «наиболее технологичный» из всех рассматриваемых вариантов. При этом проектировщику следует стремиться к обеспечению условий технологичности для каждого из элементов, составляющих технологичный строительный объект. Задача же отыскания «глобально наиболее технологичного» проектного решения точно так же, как и задача отыскания «глобального оптимума» в строительстве в общей постановке представляется практически неразрешимой.

Отработка конструктивной формы на технологичность – это комплекс мероприятий по обеспечению в рабочих проектах и деталировочных чертежах необходимого уровня технологичности конструкции, достижению оптимальных качественных и количественных характеристик по

изготовлению, транспортированию, монтажу и эксплуатации. В качестве примера приведем основные требования к технологичности металлических конструкций [7]:

– достижение наименьшей стоимости и экономного расхода металла путем применения наиболее экономичных профилей проката, эффективных и надежных категорий поставки сталей, а также применения металлопроката стандартных размеров;

– выработка таких конструктивных решений, при которых сварные швы и болтовые соединения располагались бы в местах, удобных для производства работ и доступных для контроля качества в процессе изготовления и монтажа, а также при эксплуатации сооружения;

– создание условий, обеспечивающих наименьшие остаточные сварочные напряжения и деформации в сварных конструкциях;

– рациональная разбивка сооружения на транспортабельные отправочные элементы;

– обеспечение надежной эксплуатации в течение всего срока службы сооружения, минимальных затрат на ремонт, возможности быстрой и экономичной реконструкции и усиления без демонтажа для зданий и сооружений, условия эксплуатации которых, в том числе и расчетные нагрузки, могут изменяться во времени;

– обеспечение предпосылок для применения такой технологии изготовления и таких способов монтажа, которые не снижают усталостную прочность и несущую способность конструкций и не повышают опасность их хрупкого разрушения.

Обобщая, соображения, которые необходимо принимать во внимание при обработке конструкции на технологичность, можно разделить на следующие группы [7]:

– по изготовлению;

– по транспортировке;

– по монтажу;

– по эксплуатации.

Каждая из групп включает факторы, при учете которых следует стремиться к максимуму, и факторы с желательным минимальным эффектом. Например, в группе «по транспортировке» минимальной должна быть стоимость перевозки сборных конструкций от завода-изготовителя до места монтажа и максимальным – эффект от мероприятий по эффективному использованию грузоподъемности подвижного состава, укрупнению отправочных элементов, предохранению конструкций от повреждений.

Литература к главе 1

1. *БСЭ*. - М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1976. - Т.25. - С.1597.

2. *Геммерлинг Г.А*. Система автоматизированного проектирования стальных строительных конструкций. - М.: Стройиздат, 1987. - 211 с.

3. *Мельников Н.П*. Металлические конструкции. Современное состояние и перспективы. - М.: Стройиздат, 1983. - 541 с.

4. *Новые* направления оптимизации в строительном проектировании / Под. ред. Э. Атрека и др. - М.: Стройиздат, 1989. - 592 с.

5. *Сахновский М.М.* Технологичность строительных сварных стальных конструкций. - К.: Будівельник, 1980. -264 с.

6. *Сварные* строительные конструкции /Под ред. Л.М. Лобанова. - К.: Наук. думка, 1993. - Т.1. - 416 с.

7. *Сварные* строительные конструкции /Под ред. Л.М. Лобанова. - К.: ИЭС им. Е.О. Патона, 1997. - Т.2. - 680 с.

Глава 2
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Оптимизация (лат. *optimum–наилучшее*) – процесс нахождения экстремума (глобального максимума или минимума) определенной функции или выбора наилучшего из множества возможных варианта. Наиболее надежным способом нахождения наилучшего варианта является сравнительная оценка всех возможных вариантов. Если число вариантов велико, то при поиске наилучшего обычно используют методы математического программирования. Однако применять эти методы можно, если есть строгая постановка задачи: задан набор переменных, установлена область их возможного изменения (заданы ограничения) и определен вид целевой функции от переменных.

2.1. Объекты и постановка задач оптимизации в строительстве

Проект практически любого сооружения и конструкции может быть выполнен в достаточно большом числе вариантов, из них желательным для реализации является тот, который обеспечивает наилучшее значение (значения) установленного при проектировании показателя качества решения. Такой показатель обычно называют критерием оптимальности. Если критерий оптимальности один, то процесс оптимизации называется скалярным, если несколько – векторным.

В строительстве процесс оптимизации усложняется тем, что при проектировании необходимо учитывать не только степень соответствия объекта заданным функциям, но и принимать во внимание затраты на его создание и эксплуатацию, причем чрезмерно большие затраты могут поставить под сомнение возможность реализации проекта в целом.

Критерии качества строительных конструкций могут формироваться и служить основой оптимизационного процесса в узком, связанном с расходом материалов смысле, и более широком диапазоне оценочных факторов.

Наиболее просто реализуемым критерием оптимизации, который не подвержен влиянию экономической конъюнктуры, легко вычисляется и поэтому чаще всего применяется в задачах оптимизации отдельных конструкций, является их масса. Масса конструкции, а следовательно, и ее стоимость, зависят от различных параметров сооружения, многообразие которых можно свести к двум основным взаимосвязанным группам – геометрическим и физическим.

Для стержневых конструкций геометрические параметры включают в себя схему сооружения, определяющую очертание осей отдельных элементов и размещение шарниров, типы и размеры поперечных сечений стержней, конструкции и размеры узловых соединений элементов. В тонкостенных конструкциях эти параметры определяют геометрическую схему отдельных пластин или оболочек, типы их сопряжений, толщины листов. К этой же группе следует отнести и конструктивные требования унификации решений, уровень их серийности.

Физические параметры конструктивной формы определяют механические характеристики материала конструкции, а также величины начальных усилий, напряжений или перемещений в элементах и их отдельных сечениях.

Учитывая, что в общем случае решение задач оптимизации по всем варьируемым параметрам затруднено, необходимо аргументированно ограничить их число, выделив лишь те из них, которые наиболее существенно влияют на конечный результат.

Если параметры оптимизируемой конструкции имеют чисто геометрическую природу (габаритные размеры конструкции, размеры сечений элементов и т.д.) и все ее элементы изготовлены из одного и того же материала, то применение этого критерия позволяет достаточно объективно выбрать оптимальный вариант.

Если при изготовлении конструкции могут применяться существенно различные материалы, значительно различающиеся удельной прочностью и стоимостью, то оптимизация конструкции по критерию ее массы уже недопустима. В этом случае в качестве критерия может использоваться стоимость материалов и, поскольку такая стоимость составляет существенную (до 70%) часть полной стоимости конструкции, применение этого критерия часто бывает оправданным.

Если стоимость заводского изготовления, монтажа и транспортировки различных вариантов конструкции различается существенно, то при ее оптимизации необходимо учитывать и эти факторы. В этом случае целесообразно применение обобщающего критерия, называемого «стоимость конструкции в деле». Этот критерий позволяет уже достаточно полно, с точностью до изменения цен, учитывать все затраты на создание конструкции.

Несмотря на большое разнообразие конструктивных форм, распределение показателя стоимости в деле для целых классов конструкций имеет достаточно устойчивый характер. Так, соотношение затрат на создание металлических конструкций, в процентах, может быть выражено следующим образом [15]:

проектирование	2–3
сталь и другие материалы	63–73

изготовление	16–22
транспортировка	3–7
монтаж	5–20

Готовый объект поступает в эксплуатацию, и теперь заказчик вынужден нести затраты на поддержание конструкций объекта в соответствующем состоянии (например, окраска, ремонт), на создание необходимых для нормальной эксплуатации условий (например, отопление и вентиляция промышленного здания), прямо или косвенно возмещать потери и ущерб, возникающие при эксплуатации объекта (например, потери нефтепродуктов в результате их испарения при хранении в резервуарах той или иной конструкции). Очевидно, при значительной их величине оптимальным может оказаться вариант конструкции с существенно большей стоимостью в деле.

Но стоимость в деле – это единовременная затрата, не изменяющаяся в течение всего периода эксплуатации, а затраты на эксплуатацию изменяются линейно во времени, поэтому эти показатели не должны сопоставляться непосредственно. Обычно вводится обобщенный критерий – приведенные затраты $П=кS(D)+S(E)$, где $S(D)$ – показатель стоимости конструкции в деле, $S(E)$ – стоимость эксплуатации объекта в течение года, $к$ – нормативный коэффициент, зависящий от планируемой продолжительности эксплуатации. В строительстве часто принимают значение $к = 0{,}12$. Следует иметь в виду, что чем более общим является критерий, тем труднее вычислить его значение в процессе проектирования объекта и тем сильнее меняется это значение в зависимости от общей экономической конъюнктуры. Поэтому в качестве основы принимают критерий «стоимость конструкции в деле» исходя из следующей совокупности факторов:

– масса конструкции (в том числе масса деталей, стержней и отправочных марок);

– затраты на материалы для изготовления;

– трудоемкость заводского изготовления (определяемая по отдельным операциям и суммарно);

– технологическая себестоимость заводского изготовления (определяемая по отдельным операциям и суммарно);

– заводская себестоимость, включающая помимо затрат, обусловленных процессом изготовления, и все остальные затраты завода, например, стоимость содержания аппарата управления;

– трудоемкость монтажа;

– технологическая себестоимость монтажа;

– стоимость в деле.

Помимо перечисленных при проектировании часто учитываются соображения неформализуемого характера: архитектурный облик сооружения, необходимость ускоренного промышленного развития региона

или фирмы и т.д. Эти соображения могут быть учтены только методом экспертных оценок.

В зависимости от назначения строительных объектов выделяют обычно две существенно различные группы объектов оптимизации:

– здания и сооружения в целом;

– конструктивные элементы зданий и сооружений.

Для объектов металлостроительства в рассмотрение может быть введена также третья группа – сортаменты конструкции.

Оптимизация проектных решений зданий и сооружений в целом проводится на первом этапе проектирования объекта – на стадии разработки принципиальных проектных решений. На этом этапе детальный расчет технико-экономических показателей объекта практически невозможен, однако принимаемые проектные решения являются наиболее важными. Поэтому для оценки объекта в целом обычно используют наиболее общие критерии, в том числе и неформализованные, благодаря чему процедура оптимизации максимально упрощается. Как правило, при составлении нескольких принципиально различных решений используется метод экспертных оценок. Основные решаемые при этом вопросы:

– выбор принципиального решения конструкции;

– выбор конструкционного материала;

– выбор параметров объемно-планировочного решения.

Оптимизация проектных решений конструктивных элементов (рам, ферм, колонн, балок в целом или их сечений) характерна для стадии деталировки ранее принятого принципиального проектного решения – этапа разработки рабочих чертежей.

На этом этапе определяется топология конструкции, ее геометрические размеры, закон распределения материала между различными элементами конструкции, вид и размеры поперечных сечений элементов. Производится также оптимальная унификация элементов конструкции.

Для данного этапа оптимизации характерно применение хорошо формализованных критериев оценки, обычно ее массы, и математически строго поставленных задач оптимизации. В данном случае целесообразно в качестве параметров оптимизации принять геометрические размеры и их числовые признаки, а в качестве ограничений – критериальные зависимости, обеспечивающие несущую способность конструкции, соответствующую нормам проектирования, а также габаритные ограничения, вводимые на основе конструктивных соображений.

В процессе проектирования строительных конструкций обычно используют один из трех путей оптимизации:

– применение строгих процедур оптимизации на основе современных моделей и методов математического программирования, а также других математических методов, в ходе реализации которых осуществляется выбор

объективно наилучшего из бесчисленного множества возможных проектных решений;

– применение эвристических методов. Проектировщик тем или иным путем предварительно назначает параметры проектируемого объекта, производит его расчет, по результатам которого данный вариант может быть принят или осуществлен переход к следующему варианту вплоть до получения желаемого результата. В данном случае проектировщик, пользуясь совершенным компьютером и современными диалоговыми программными комплексами, может сравнить достаточно большое, но все же конечное число вариантов без каких-либо гарантий достижения наилучшего. Приходится довольствоваться лучшим из рассмотренных;

– при проектировании сложных объектов, особенно на первых стадиях разработки, часто оказывается затруднительным сформулировать единственный критерий качества объекта и, тем более, обоснованно оценить его величину для нескольких вариантов проекта. В этом случае с достаточным эффектом может быть применен метод экспертных оценок.

2.2. Математически строгие постановки задач оптимизации строительных конструкций

Оптимизация строительных конструкций методами математического программирования, в том числе линейного, целочисленного, динамического, получила уже достаточно широкое применение. В частности, в работах [1,2,4,5,8–14] описаны результаты успешного применения указанных методов для проектирования физически нелинейных вантово–стержневых систем, ферм наименьшего объема, предварительно напряженных пологих ферм с лучевой решеткой, статически неопределимых систем наименьшего веса, комбинированных систем наименьшей стоимости, решетчатых металлических предварительно напряженных конструкций. Успешно решены задачи оптимального распределения материала в фермах и шарнирно-стержневых системах других типов, совместного использования методов динамического программирования и случайного поиска, расчета ферм методом распределения деформаций. Здесь более подробно рассмотрим наиболее изученный раздел математического программирования – линейное программирование. Соответствующая задача в общей постановке формулируется следующим образом [7].

Определить n значений неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих системе m ограничений:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ &..... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned} \qquad (2.1)$$

и сообщающих минимальное (максимальное) значение целевой функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (2.2)$$

при возможных других дополнительных условиях, например, $b_j \ge 0, j = 1,2,...,n.$

Если неизвестные входят в ограничения (2.1) и (или) в целевую функцию (2.2) в степени выше первой или множество их возможных значений включает только целые числа, то приходится иметь дело с более сложными, как правило, задачами нелинейного программирования.

Аппарат численного решения задач линейного программирования в общей постановке на ЭВМ, в том числе так называемый симплекс–метод, разработан в настоящее время в совершенстве, для проектировщика главной проблемой оптимизации строительных конструкций на основе теории линейного программирования является формирование целевой функции и системы ограничений. Характерно, что при всем разнообразии конструктивных форм модель оптимального проектирования должна подчиняться общим правилам, обеспечивающим инженерный смысл задачи и возможность математической реализации ее решения, кроме того [15]:

– число ограничений должно быть больше числа неизвестных;

– система ограничений должна быть совместной;

– область допустимых решений должна быть ограниченной и выпуклой.

Метод решения задачи оптимального проектирования в большой мере определяется ее постановкой, но конечный результат ее решения должен удовлетворять требованиям строительных норм и правил. Поэтому пренебрежение целым рядом факторов и характеристик, несущественно влияющих на конечный результат, является необходимым условием создания практически реализуемой модели, в то же время чрезмерное упрощение условий задачи может привести к грубому искажению результатов ее решения.

В большинстве случаев существенные и в то же время вполне допустимые упрощения могут быть получены пренебрежением:

– физической нелинейностью за счет идеализации механических свойств основных строительных материалов на определенной стадии расчета;

– геометрической нелинейностью за счет рассмотрения недеформированной схемы под частичным загружением;

– конструктивной нелинейностью за счет ограничений на знак усилий в односторонних связях, например, вантовых конструкций.

Следует, однако, отметить, что в отличие от традиционных разделов строительной механики проблема обоснованности тех или иных упрощений реальной расчетной схемы при оптимальном проектировании строительных конструкций исследована еще недостаточно. Актуальность же этой проблемы несомненна, так как именно идеализация расчетной схемы за счет пренебрежения нелинейностью того или иного типа позволяет применять методы линейного программирования. При этом целевая функция должна отражать выбранный критерий оптимальности, а ограничения – условия, характеризующие математическую модель.

Как показывает проведенный анализ, в подавляющем большинстве случаев до сих пор в оптимальном проектировании в качестве критерия оптимальности вводилась масса или стоимость конструкции в деле, хотя приведенные затраты являются показателем более обобщенным. Могут быть использованы и другие критерии, например требования достижения равнопрочности основных несущих элементов, минимума потенциальной энергии, максимума несущей способности и т.п.

Все многочисленные условия и требования, которые приходится учитывать при проектировании, можно разделить на две основные группы:

Необходимые – без выполнения которых конструкция не может существовать. Например, ограничения, описывающие предельные состояния, которые положены в основу расчета строительных конструкций и регламентированы соответствующими нормами. Выполнение этих условий является обязательным, так как они представляют собой условия прочности, устойчивости, жесткости и др. К необходимым относятся также требования неотрицательности усилий в гибких стержнях-элементах систем с односторонними связями.

Возможные – ограничения, которые отражают компоновочные, конструктивные, технологические и эксплуатационные особенности различных конструкций. Такие ограничения обычно принимаются во внимание не только в процессе оптимизации, но и впоследствии при окончательном подборе сечений и конструировании элементов.

Обычно при составлении системы ограничений руководствуются теми же правилами, что и при традиционном подходе к проектированию; исключение из рассмотрения того или иного фактора приводит к более или менее существенному расхождению между теоретическим, определяемым целевой функцией, и фактическим экономическими показателями.

Наивыгоднейшую по принятому критерию конструкцию можно получить при вводе в решение задачи только необходимых ограничений. Именно такую конструкцию принято называть оптимальной. Ввод возможных ограничений вызывает перераспределение материала между

элементами с учетом конструктивных требований, в результате конструкция соответствует общепринятым правилам проектирования, однако показатели такой новой системы оказываются больше теоретически оптимальных. Таким образом, учет одновременно необходимых и возможных ограничений при решении задачи оптимального проектирования неизбежно приводит к условно-оптимальному проектному решению.

Расчет строительных конструкций должен проводиться с учетом всех этапов их существования – от погрузки в транспортное средство на месте изготовления до эксплуатации в составе здания или сооружения. Теоретически требования, предъявляемые на всех этих этапах, можно включить в общую систему ограничений, однако на практике часть из них (часто весьма существенную) в математическую модель не включают ради упрощения процесса решения. Так, в ограничения включают условия прочности только по нормальным напряжениям; для изгибаемых и сжато (растянуто)–изогнутых элементов при поиске оптимального распределения усилий влияние касательных напряжений не учитывается. Для центрально-сжатых стержней устойчивость обеспечивается снижением расчетного сопротивления материала на величину коэффициента продольного изгиба, определяемую ориентировочно, исходя из опыта проектирования. Вопросы устойчивости конструкции из ее плоскости не рассматриваются в предположении, что она обеспечена для всей системы и отдельных ее элементов.

Возможные ограничения по смыслу могут быть самыми разнообразными и часто оказывают существенное влияние на распределение внутренних усилий. Поэтому к выбору таких ограничений следует относиться дифференцированно, включая в математическую модель лишь те, которые способствуют созданию удобной в конструктивном и технологическом отношениях конструкции. Целесообразно учитывать ограничения, выражающие недопустимость вырождения площади поперечного сечения элементов до значений ниже минимально допустимых по соображениям предельной гибкости или конструктивным. Для сохранения инженерного смысла вычисляемых значений неизвестных необходимо ограничивать знак искомых параметров.

Кроме задач, связанных с оптимальным проектированием строительных конструкций на основе критериев того или иного рода, методы математического программирования широко и эффективно применяются и для решения других классов актуальных проблем в строительстве, в том числе оптимального раскроя металла, формирования оптимального плана выпуска продукции заводами строительных конструкций, оптимальной организации перевозок строительных материалов, рационального использования на строительстве парка подъемно-транспортных машин и оборудования. Однако, что ясно и из рассмотренного выше, построение

математических моделей оптимального проектирования строительных объектов и их реализация могут быть связаны с рядом существенных затруднений, поэтому применение других путей выбора рационального решения может оказаться в ряде случаев предпочтительным.

2.3. Применение эвристических методов

Здесь, как обычно, под эвристическими будем понимать такие пути выбора рациональных вариантов строительных конструкций, которые не опираются на точные математические модели и, как правило, сводятся к целенаправленному перебору нескольких проектных решений. Хотя эвристический подход не позволяет получить оптимальное решение (а лишь лучшее из рассмотренных), в ряде случаев, например, при синтезе конструкций, такой подход оказывается единственно реализуемым для успешного решения задачи.

2.3.1. Синтез конструкций. Задача синтеза сводится к поиску топологии и геометрических размеров конструкции, относительно которой известны только число и координаты точек, в которых она связана с основанием или другой конструкцией, способ опирания, значения внешних сил и координаты точек их приложения, т.е. из всего заранее неизвестного множества узлов конструкции известна лишь часть, в которой внешние силы воздействуют на конструкцию. Требуется определить число и положение остальных узлов системы, связать их между собой некоторым множеством деформируемых элементов, причем таким образом, чтобы некоторый критерий – масса, стоимость и т.п. – при этом принял минимальное значение.

Эта задача в общем случае является весьма сложной, в частности, по следующим причинам:

– в реальной технологии проектирования приходится учитывать многие внешние ограничения (габариты, градации пролетов, высот и других параметров промышленных зданий в соответствии со стандартами, требования унификации однотипных элементов по размерам, сортамент и т.д.), учет которых в математическом алгоритме синтеза оптимальной конструкции практически невозможен;

– процесс оптимизации в данной постановке трудно описать линейным алгоритмом, так как ряд факторов, относящихся к исходным данным задачи, зависит от параметров конструкции (собственный вес, площади частей конструкции, обдуваемых ветром или обтекаемых водой, частоты собственных колебаний).

2.3.2. Оптимизация параметров конструкций. Одной из наиболее важных задач проектирования принято считать параметрическую оптимизацию конструкций, т.е. задачу определения численных значений параметров, однозначно описывающих оптимальную конструкцию. Для задач рассматриваемого типа обязательным является наличие в постановке формализованного критерия качества, перечня изменяющихся параметров конструкции и формализованных ограничений.

Перед началом оптимизационного процесса все элементы, входящие в состав конструкции, разделяются на две группы:

– элементы, параметры которых предстоит оптимизировать в процессе проектирования. К этой группе относят, как правило, основные несущие элементы конструкции;

– элементы, параметры которых могут быть заданы априорно или определены после завершения процесса оптимизации параметров элементов первой группы. Например, сечения элементов второй группы могут назначаться по конструктивным соображениям или их масса определяется с помощью так называемого конструктивного коэффициента в виде определенной части массы элементов первой группы.

Как и в общем случае задач математического программирования, цель процесса оптимизации формулируется следующим образом: подобрать сечения всех элементов конструкции или элементов только первой группы таким образом, чтобы их суммарная площадь была минимальной и при этом удовлетворялись все ограничения, соответствующие нормам проектирования данного типа конструкций при заданных условиях.

Принимая в качестве целевой функции суммарную площадь сечений всех вводимых в расчет элементов, следует в ряде случаев учитывать ее дискретный характер, что вызвано, например, необходимостью проектирования конструкции с использованием реального сортамента проката.

Ограничения задачи могут быть двух видов:

– ограничения на геометрические характеристики сечений, которые часто диктуются заданными габаритами конструкции;

– ограничения, обусловленные требованиями строительных норм и правил, например, ограничения по прочности, деформативности, общей и местной устойчивости и т.п.

Эту задачу часто решают эвристическими методами и простым перебором возможных вариантов. При применении эвристических методов существенно упрощается подготовительный процесс решения, который при применении математического программирования связан с построением соответствующей модели, а число промежуточных этапов приближения к оптимальному решению может быть существенно уменьшено за счет высокой квалификации, опыта и профессиональной интуиции исполнителей.

Понимание закономерностей работы конструкции или отдельных ее элементов может стать удачной основой для построения эффективного алгоритма приближения. Например, в случае нарушения ограничения по общей устойчивости центрально–сжатого стержня двутаврового сечения целесообразно увеличить высоту стенки или ширину полок, поскольку эти параметры в наибольшей мере влияют на изменение момента инерции сечения. При нарушении ограничения по местной устойчивости основным параметром, по которому следует вести приближение, является толщина стенки или полок и т.д.

Основным недостатком эвристических методов является логическая сложность алгоритмов, что может привести к большим затратам труда на разработку программ для каждого конкретного типа конструкций.

Простой перебор особенно эффективен при компоновке сооружений с использованием индустриально выпускаемых типов сборных конструкций или подборе сечений из прокатных профилей, так как в этом случае множество возможных сочетаний искомых параметров конечно. После компоновки всех вариантов и их систематизации в порядке возрастания общей стоимости или суммарной площади сечений осуществляется проверка каждого варианта на его соответствие ограничениям задачи в порядке рассмотрения от вариантов с меньшими показателями к большим. Первый же вариант, который удовлетворяет всем ограничениям задачи, соответствует глобальному минимуму и выражает искомое решение. Реализация этого алгоритма дает точное решение задачи с учетом его дискретности при минимальной трудоемкости подготовительных этапов.

Оптимальное проектирование методом простого перебора на основе современных диалоговых программных комплексов расчета и проектирования строительных конструкций во многих случаях может оказаться весьма эффективным при условии соответствующей квалификации исполнителей.

2.4. Метод экспертных оценок

Метод предназначен для оценки значений критериев качества нескольких вариантов сложного объекта. Рассматриваемый алгоритм легко распространить на многие другие случаи, когда важное для функционирования объекта хозяйственной и технической деятельности решение должно быть принято на основе суждений компетентных специалистов.

Пусть разработано несколько вариантов проекта, сравнительная оценка которых по наиболее весомым критериям должна быть получена на основе

оценок экспертов. В ходе применения метода реализуются следующие этапы процесса экспертных оценок:

1. Формирование группы n экспертов.

2. Составление перечня m показателей, по которым предполагается провести сопоставление вариантов. Каждый эксперт оценивает варианты по каждому из m показателей по 100-балльной системе. Обозначим $a^{(k)}{}_{ij}, 0 \le a^{(k)}{}_{ij} \le 100,$ оценку k-го варианта i-м экспертом по j-му показателю. Для k-го варианта проекта получим прямоугольную матрицу размером $n \times m$ оценок $a^{(k)}{}_{ij}, i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,m.$

3. Обработка результатов экспертных оценок. Производится нормирование матрицы оценок по строкам таким образом, чтобы в каждой из них сумма элементов была равна единице. Результатом нормирования является новая матрица элементов:

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{a_{ij}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(k)}}; i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,m, \qquad (2.3)$$

сумма которых в каждой строке равна 1. Значения $a_{ij}^{(kN)}$, $i = 1,2,...,n$, рассматриваются как n реализаций случайной величины, выражающей оценку каждым экспертом k-го варианта проекта по j-му показателю.

Если сформировать группу экспертов, имеющих одинаковый уровень квалификации и опыта, не удается, то обработку результатов опроса следует осуществлять с учетом их компетентности, оцениваемой по 10-балльной системе на основе их самооценок, оценок других экспертов группы и лиц, ответственных за проведение экспертизы. Пусть весомость ответов i-го эксперта принята равной $\eta_i, 0 \prec \eta_i \le 10.$ Вычисляем математическое ожидание оценки j-го показателя k-го варианта проекта:

$$m_j^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \eta_i}{\sum_{i=1}^{n} \eta_i}, j = 1,2,...,m. \qquad (2.4)$$

В случае одинаковой компетентности экспертов величина $m_j^{(k)}$ вычисляется по формуле

$$m_j^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(kN)}}{n}, \qquad (2.5)$$

которую легко получить из формулы (2.4). Действительно, пусть компетентность каждого из n экспертов одинакова и выражается величиной η.

Тогда в соответствии с (2.4)

$$m_j^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \eta}{\sum_{i=1}^{n} \eta} = \frac{\eta \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(kN)}}{n\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(kN)}}{n},$$

что и требовалось доказать.

При сравнении рассматриваемых вариантов проекта заданного сооружения или конструкции в качестве экспертной оценки каждого из них принимается величина

$$E_k = \sum_{j=1}^{m} m_j^{(k)} \Theta_j, k = 1,2,...,S, \tag{2.6}$$

где Θ_j – коэффициент весомости каждого из m введенных показателей.

При одинаковой весомости показателей

$$E_k = \sum_{j=1}^{m} m_j^{(k)}. \tag{2.7}$$

Значения Θ_j определяют организаторы экспертизы также по 10-балльной системе, при этом может быть учтено мнение экспертов.

По результатам экспертизы в ряде случаев целесообразно провести анализ ее качества, а также профессионального уровня экспертов и уровня новизны и оригинальности проектируемого сооружения.

Очевидно, что мнения опытных специалистов по поводу вариантов проекта хорошо изученных типов сооружений и конструкций скорее всего будут различаться незначительно по большинству показателей. Существенное отличие оценки какого-либо показателя, предложенной одним из экспертов, от среднего значения близких по величине оценок большинства других может, в частности, свидетельствовать о следующем (особенно в случае, если в соответствии с реализуемой методикой проведения экспертизы эксперты предварительно не обменивались мнениями и оценки коллег им заранее неизвестны):

– эксперт, высказавший суждение, резко отличающееся от мнения своих коллег, некомпетентен;

– эксперт, хотя он и в меньшинстве, имеет больший опыт в соответствующей области, ему известны неординарные эффективные решения, он считает возможным применить новейшие достижения науки и техники, неизвестные его коллегам, или отрицательный опыт в

соответствующей области строительства стимулирует экстремальность его оценок;

– компетентность большинства экспертов оценена до начала экспертизы неверно.

В первом случае резко отличающиеся от средних показателей оценки следует из рассмотрения исключить, во втором необходим дополнительный анализ сложившейся ситуации, деловое и объективное обсуждение и открытый обмен мнениями между экспертами и другими специалистами; в конечном счете вся ответственность за принятое к действию решение лежит на организаторах экспертизы.

Количественная характеристика степени отклонения оценки i-го эксперта от математического ожидания оценок, высказанной всей группой экспертов по j-му показателю k-го варианта проекта вычисляется по формуле

$$\sigma_{ij}^{(kN)} = \frac{\left| m_j^{(k)} - a_{ij}^{(kN)} \right|}{m_j^{(k)}},\ i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m. \qquad (2.8)$$

Степень неоднородности мнений данной группы экспертов по j-му показателю k-го варианта проекта характеризуется, в частности, величиной среднего квадратического отклонения оценок от их математического ожидания:

$$\sigma_{ij}^{(kN)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} (m_j^{(k)} - a_{ij}^{(kN)})^2}{n}},\ i = 1,2,...,n;\ k = 1,2,...,S. \qquad (2.9)$$

Необходимо отметить, что вариантное проектирование, в процессе которого проектировщик разрабатывает несколько вариантов проектного решения, а затем выбирает из них лучшее, является предельно упрощенным вариантом метода экспертных оценок.

Литература к главе 2

1. *Агеев А.И., Рейтман М.И.* О некоторых задачах оптимального проектирования стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. - 1971. - № 4.

2. *Бараненко В.А., Почтман Ю.М., Филатов Г.В.* О совместном использовании методов динамического программирования и случайного поиска в задачах оптимального проектирования // Строительная механика и расчет сооружений. - 1973. - № 1.

3. *Будя А.П., Кононюк А.Е. и др*. Справочник по САПР. - К.: Техніка, 1988. - 375 с.

4. *Виноградов А.И.* Об оптимальном распределении усилий в стержневых системах и свойствах оптимальных систем // Прикладная механика. - К.: Наук. думка. - 1965. - Т.1. - Вып. 1.

5. *Геммерлинг А.В.* О методах оптимизации конструкций //Строительная механика и расчет сооружений. - 1971. - № 2.

6. *Геммерлинг Г.А*. Система автоматизированного проектирования стальных строительных конструкций. - М.: Стройиздат, 1987. - 216 с.

7. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. - М.: Наука, 1976. - 387 с.

8. *Ким Т.С.* Расчет ферм наименьшего объема методом целочисленного программирования // Строительная механика и расчет сооружений. - 1969. - № 1.

9. *Ольков Я.И., Антипин А.А.* Об оптимальном распределении материала в статически неопределимых шарнирно-стержневых системах //Изв. вузов. Строительство и архитектура. - 1978. - № 6.

10. *Перельмутер А.В.* О физической реализации оптимальной преднапряженной системы // Прикладная механика. – К.: Наук. думка. - 1970. - Т.4. - Вып. 7.

11. *Радциг Ю.А.* Статически неопределимые фермы наименьшего веса. - Казань: Изд-во Казанского университета. - 1969. - 103 с.

12. *Рейтман М.И., Шапиро Г.С.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М.: Наука, 1976. - 245 с.

13. *Сергеев Н.Д., Богатырев А.И.* Проблемы оптимального проектирования конструкций. - Л.: Стройиздат, 1971. - 247 с.

14. *Соловьев Л.С.* Оптимизация функции стоимости вантовой комбинированной конструкции // Матер. 24-й науч.-техн. конф. ВИСИ. - Воронеж, 1969.

15. *Трофимович В.В., Пермяков В.А.* Оптимальное проектирование металлических конструкций. - К.: Будівельник, 1981. - 136 с.

Глава 3
АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

3.1. Место и значение автоматизации в современном проектировании

Примерно с середины 70-х годов прошлого столетия темпы развития и ускорения научно-технического прогресса в решающей мере определяются широким внедрением автоматизации проектных работ на основе электронной вычислительной техники и разработки систем автоматизированного проектирования. Под автоматизацией проектирования в общем понимают обычно осуществление данного вида человеческой деятельности с применением современной вычислительной техники, общего и специального математического обеспечения, средств автоматики и оргтехники, организованных в систему класса «человек-машина». Такие системы могут быть самого различного уровня сложности, технического оснащения, функциональных возможностей – от самых примитивных (например, микрокалькулятор, используемый проектировщиком для выполнения элементарных вычислительных операций) до автоматизированных систем проектирования (АСП), в которых специалист хотя и принимает непосредственное участие в выполнении основных его этапов, но может эффективно использовать при этом все входящие в систему средства и методы автоматизации, и, наконец, систем автоматизированного проектирования (САПР), в идеале реализующих весь процесс проектирования сложных объектов без участия человека.

В отличие от ручного проектирования, результаты которого во многом определяются инженерной подготовкой проектировщиков, их производственным опытом, профессиональной интуицией и т.п., автоматизация позволяет исключить субъективизм при принятии решений, эффективно выполнять инженерные изыскания, значительно, как правило, повысить точность расчетов, выбрать варианты для реализации на основе строгого математического анализа всех или большинства вариантов с оценкой технических, технологических и экономических характеристик всего процесса возведения и эксплуатации проектируемого объекта, значительно повысить качество конструкторской документации, существенно сократить сроки выполнения проекта и передачи его строителям.

В настоящее время применение АСП и САПР в проектировании сложных строительных объектов часто оказывается единственной реальной возможностью решения возникающих в ходе его многочисленных сложных задач. Для иллюстрации уровня решаемых в процессе современного

проектирования задач приведем данные о классификации объектов проектирования в зависимости от числа их составных частей [1,2]:

простые объекты $<10^2$;
объекты средней сложности 10^2–10^3;
сложные объекты 10^3–10^4;
очень сложные объекты 10^4–10^6;
объекты очень высокой сложности $>10^6$.

Об объеме выполняемых в режиме полной или частичной автоматизации проектных разработок можно судить по широко применяемой классификации САПР в зависимости от количества выпускаемых в год проектных документов в пересчете на формат А4 [1]:

САПР малой производительности $< 10^5$;
САПР средней производительности 10^5–10^6;
САПР высокой производительности $> 10^6$.

Ясно, что даже САПР средней производительности является мощным современным средством качественного и количественного повышения эффективности творческого процесса по созданию новых и реконструкции существующих строительных объектов.

Следует заметить, что в строительстве до настоящего времени еще не удалось создать «идеальную» систему автоматизированного проектирования целого класса сложных объектов, которая могла бы реализовать весь процесс разработки проектной документации от момента ввода в компьютер задания на проектирование полностью без участия человека. По современным представлениям [1] основной функцией САПР является осуществление автоматизированного проектирования на всех или отдельных (подчеркнем – отдельных) стадиях проектирования объектов и их составных частей на основе применения математических и других моделей, автоматизированных проектных процедур и средств вычислительной техники. Таким образом, в соответствии с данным определением в строительстве любая автоматизированная система реализации какого-либо этапа процесса проектирования объекта может быть отнесена к САПР, в связи с чем в дальнейшем термин АСП применяться не будет.

Автоматизированное проектирование в САПР заключается в том, что отдельные преобразования описаний объекта проектирования и представления описаний на различных языках осуществляются путем взаимодействия человека и компьютера. В САПР могут осуществляться процедуры автоматического проектирования, при котором преобразование и представление описаний объекта проектирования выполняются без участия человека.

Функционирование САПР должно обеспечивать получение проектных решений, т.е. промежуточных или конечных описаний объекта проектирования, достаточных для рассмотрения или окончания

проектирования. Результатом проектирования в САПР является совокупность законченных проектных решений, удовлетворяющая заданным требованиям и необходимая для создания объекта проектирования. Функционирование САПР должно обеспечивать получение проектных документов, выполненных в заданной форме и содержащих проектные решения или результаты проектирования.

Разработка и внедрение САПР в проектных, конструкторских, технологических и других организациях и на предприятиях, равно как и приобретение готовых разработок, должны иметь своим обязательным результатом повышение качества и технико-экономического уровня проектируемой и выпускаемой продукции; повышение эффективности объектов проектирования, уменьшение затрат на их создание и эксплуатацию; сокращение сроков, уменьшение трудоемкости проектирования и повышение качества проектной документации.

Достижение указанных целей создания САПР возможно при условиях:

– систематизации и совершенствования процессов проектирования на основе применения математических методов и средств вычислительной техники;

– комплексной автоматизации проектных работ в проектной организации с необходимой перестройкой ее структуры и кадрового состава;

– повышения качества управления проектированием;

– применения эффективных математических моделей проектируемых объектов, комплектующих изделий и материалов;

– использования методов многовариантного проектирования и оптимизации;

– автоматизации трудоемких и рутинных проектных работ;

– замены натурных испытаний и макетирования математическим моделированием;

– создания единых банков данных, содержащих систематизированные сведения справочного характера, необходимые для автоматизированного проектирования объектов;

– унификации и стандартизации методов проектирования.

3.2. Основные термины и определения

В последние десятилетия по мере развития средств и методов автоматизации словарный запас специалистов пополнился обширным набором новых терминов и определений, основные из которых узаконены нормативными документами и государственными стандартами, в частности ГОСТ 22487-77, и обязательны для применения во всех видах документации, научно-технической, учебной и справочной литературе.

Выше уже применялся термин «объект». Объектом проектирования может быть материал, предмет, процесс, система (механическая, электрическая, организационная и др.). Под созданием объекта понимают:

– если объектом является материал или предмет – его изготовление и придание заданных свойств и характеристик, включая заданное взаимодействие его с внешней средой;

– если объектом является процесс – его выполнение в соответствии с заданным алгоритмом процесса;

– если объектом является организационная система – ее размещение во времени и пространстве и придание ей заданных свойств и характеристик, включая заданное функционирование в соответствии с заданным алгоритмом функционирования.

Под описанием объекта понимают:

– если объектом является материал, предмет или система – описание заданных свойств и (или) характеристик объекта, включая описание взаимодействия между его частями и взаимодействия объекта с внешней средой и описание его функционирования;

– если объектом является процесс – описание результата процесса и заданных характеристик его выполнения во времени и пространстве. В промежуточные описания объектов могут быть включены также математические и физические модели, например модели строительных конструкций, рассмотренные в гл. 2 раздела 1.

В преобразование описаний могут быть включены эквивалентные преобразования и преобразования, связанные с вводом новых сведений (параметров, характеристик и т.п.).

Под некорректностью описания понимают противоречие и (или) недостаточно полное описание объекта, алгоритма его функционирования или алгоритма процесса, ведущее к невозможности создания объекта.

Неавтоматизированное проектирование – проектирование, при котором все преобразования описаний объекта и (или) алгоритма его функционирования или алгоритма процесса, а также представление описаний на различных языках осуществляет человек.

Автоматизированное проектирование – проектирование, при котором отдельные преобразования описаний объекта и (или) алгоритма его функционирования или алгоритма процесса, а также представления описаний на различных языках осуществляются взаимодействием человека и ЭВМ.

К техническим устройствам, позволяющим осуществлять автоматизацию проектирования, могут относиться ЭВМ, их периферийные устройства и другие технические устройства. Автоматизированное проектирование обычно осуществляют в режиме диалога человека с машиной на основе применения специальных языков общения человека с машиной.

Автоматическое проектирование – проектирование, при котором все преобразования описаний объекта и (или) алгоритма его функционирования или алгоритма процесса, а также представление описаний на различных языках осуществляются без участия человека.

При автоматическом проектировании пуск оборудования и ввод в ЭВМ первичного описания объекта осуществляет человек.

В зависимости от области проектирования различают следующие виды объектов проектирования: машиностроительные, химические и т.п. В зависимости от видов объектов проектирования различают следующие виды проектирования: машиностроительное, строительное, химическое, энергетическое и т.п. Объект проектирования может быть создан заново и на основе существующих объектов, например, такой объект, как город, создают совершенствованием существующего объекта-города. С точки зрения проектирования заданный город является новым, не существующим в действительности.

Проектное решение – промежуточное или конечное описание объекта проектирования, необходимое и достаточное для рассмотрения и определения дальнейшего направления или окончания проектирования.

Типовое проектное решение – существующее проектное решение, используемое при проектировании.

Результат проектирования – проектное решение (совокупность проектных решений), удовлетворяющее заданным требованиям, необходимое для создания объекта проектирования. В заданные требования должны быть включены требования к форме представления проектного решения.

Алгоритм проектирования – совокупность предписаний, необходимых для выполнения проектирования. Под выполнением проектирования понимается нахождение результата проектирования. Алгоритм проектирования может быть общим (для определенного класса объектов) и специальным (для одного объекта).

Язык проектирования – язык, предназначенный для представления и преобразования описаний при проектировании.

Входной язык проектирования (допускается применение термина «Входной язык») – язык проектирования, предназначенный для представления задания на проектирование.

Базовый язык проектирования (допускается применение термина «Базовый язык») – язык проектирования, предназначенный для представления дополнительных сведений к первичному описанию объекта проектирования, проектных решений, описаний проектных процедур (в том числе процедур информационного обмена) и их последовательности.

Выходной язык проектирования (допускается применение термина «Выходной язык») – язык проектирования, предназначенный для представления какого-либо проектного решения, включая результат

проектирования, в форме, удовлетворяющей требованиям его дальнейшего применения. Выходной язык должен удовлетворять требованиям, установленным в соответствующих стандартах, или требованиям к машинным носителям для автоматизированного изготовления объектов проектирования и т.п.

Проектный документ – документ, выполненный по заданной форме, в котором представлено какое-либо проектное решение, полученное при проектировании.

Проект – совокупность проектных документов в соответствии с установленным перечнем, в которых представлен результат проектирования.

Проектная операция – действие или формализованная совокупность действий, составляющих часть проектной процедуры, алгоритм которых остается неизменным для ряда проектных процедур. Проектными операциями являются, например, вычисление, черчение, составление таблиц с данными, ввод и вывод данных и т.п.

Проектная процедура – формализованная совокупность действий, выполнение которых оканчивается проектным решением. Проектными процедурами являются, например, прогнозирование, оптимизация, проверка реальности реализации, контроль, корректировка, моделирование и т.п.

Унифицированная проектная процедура (допускается применение термина «Унифицированная процедура») – проектная процедура, алгоритм которой остается неизменным для различных объектов проектирования или различных стадий проектирования одного и того же объекта.

Техническое обеспечение автоматизированного (автоматического) проектирования – совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих технических средств, предназначенных для выполнения автоматизированного (автоматического) проектирования.

Математическое обеспечение автоматизированного (автоматического) проектирования – совокупность математических методов, математических моделей и алгоритмов проектирования, необходимых для выполнения автоматизированного (автоматического) проектирования, представленных в заданной форме.

Программное обеспечение автоматизированного (автоматического) проектирования – совокупность машинных программ, необходимых для выполнения автоматизированного (автоматического) проектирования, представленных в заданной форме.

Пакет прикладных программ проектирования (допускается применение термина «Пакет прикладных программ») – совокупность машинных программ, необходимых для выполнения какой-либо проектной процедуры, представленных в заданной форме.

Информационное обеспечение автоматизированного (автоматического) проектирования – совокупность сведений, необходимых для выполнения

автоматизированного (автоматического) проектирования, представленных в заданной форме. В информационное обеспечение автоматизированного проектирования включают, например, нормативно-справочные документы, прогнозы технического развития, типовые проектные решения, системы классификации и кодирования технико-экономической информации, различные системы документации (ЕСКД, ЕСТД). Кроме того, в информационное обеспечение входят различные фонды: нормативный, плановый, прогнозный, фонд типовых решений, фонд алгоритмов и программ.

Лингвистическое обеспечение автоматизированного (автоматического) проектирования – совокупность языков проектирования, включающая термины и определения, правила формализации естественного языка и методы сжатия и развертывания тестов, необходимых для выполнения автоматизированного (автоматического) проектирования, представленных в заданной форме.

Методическое обеспечение автоматизированного (автоматического) проектирования – совокупность документов, устанавливающих состав и правила отбора и эксплуатации средств обеспечения автоматизированного (автоматического) проектирования, необходимых для выполнения автоматизированного проектирования. Под отбором средств обеспечения автоматизированного проектирования понимают выбор необходимой совокупности средств для выполнения проектирования заданного объекта или класса объектов из имеющейся совокупности средств обеспечения.

Организационное обеспечение автоматизированного (автоматического) проектирования – совокупность документов, устанавливающих состав проектной организации и ее подразделений, связи между ними, их функции, а также форму представления результата проектирования и порядок рассмотрения проектных документов, необходимых для выполнения автоматизированного (автоматического) проектирования.

Комплекс средств автоматизации проектирования – совокупность различных видов обеспечения автоматизированного (автоматического) проектирования, необходимых для выполнения автоматизированного (автоматического) проектирования.

Операционная система автоматизированного (автоматического) проектирования (допускается применение термина «Операционная система проектирования») – часть программного обеспечения автоматизированного (автоматического) проектирования, предназначенная для управления проектированием.

Система автоматизированного проектирования (САПР) – комплекс средств автоматизации проектирования, взаимосвязанных с необходимыми подразделениями проектной организации или коллективом специалистов

(пользователем системы), выполняющий автоматизированное проектирование.

Система автоматического проектирования – комплекс средств автоматизации проектирования, взаимосвязанных с необходимыми подразделениями проектной организации или коллективом специалистов (пользователем системы), выполняющий автоматическое проектирование.

Интегрированная система автоматизированного (автоматического) проектирования – система автоматизированного (автоматического) проектирования, имеющая альтернативное программное обеспечение и операционную систему автоматизированного (автоматического) проектирования, позволяющую выбирать совокупность машинных программ применительно к заданному объекту проектирования или классу объектов проектирования.

3.3. «Классическая» модель САПР

Теория и практика систем автоматизированного проектирования строительных объектов начала интенсивно развиваться в 70-х годах прошлого века с появлением мощных по тому времени ЭВМ третьего поколения. В Советском Союзе в этой связи в первую очередь следует упомянуть ЭВМ Единой Серии (ЕС ЭВМ), особенно наиболее мощные ее модификации. В связи с высокой стоимостью компьютеров этого класса (стоимость ЭВМ ЕС-1061 по ценам 1985 года и официальному курсу составляла примерно 2,3 млн. долларов) системы автоматизированного проектирования конструировались в виде иерархической сети, которая могла обслуживать одновременно достаточно большое число пользователей – от всех ведущих подразделений проектного или научно-исследовательского института до специализированного объединения проектных организаций.

Ядром такой сети являлась мощная ЭВМ серии ЕС или IBM, в роли терминалов использовались микроЭВМ с расширенной внешней памятью; с их помощью можно было решать в диалоговом режиме разнородные мелкие инженерно-технические задачи, а при необходимости на основной ЭВМ можно было решить в пакетном режиме любую задачу, входящую в круг функциональных возможностей соответствующей САПР.

В качестве примера приведем описание специализированного комплекса технических средств В/О «Союзметаллостройниипроект» по данным на 1985 год:

ЭВМ ЕС-1061.13 – 1 шт.;
ЭВМ «Искра-226-1» – 40 шт.;
ЭВМ «Искра-226-3» – 12 шт.;
графопостроитель ЕС-7051 – 2 шт.;

модем-1200 кн. – 45 шт.

Общая стоимость такого комплекта по официальному курсу составляла порядка 2,7 млн. долларов.

С развитием персональных компьютеров и сервиса, в реальность которого еще два десятилетия назад трудно было поверить, вся сложная иерархическая структура «классической» САПР как бы сжалась, избавившись от целого ряда ненужных теперь периферийных устройств и средств связи, и разместилась внутри одного компьютера. Вместо разветвленной сети комплекса технических средств вычислительного центра коллективного пользования проектная организация теперь может быть оснащена необходимым или по крайней мере доступным по стоимости комплексом персональных компьютеров, каждый из которых после ввода в него соответствующего программного комплекса может играть роль автономно функционирующей САПР. Необходимые периферийные устройства (принтеры, сканнеры и т.п.) могут быть приданы каждому из компьютеров или находиться в коллективном пользовании.

Но если техническое оснащение САПР за последние годы претерпело кардинальные изменения, то разработанная для «классической» модели структура, основные условия и требования, относящиеся к программному обеспечению системы, и до настоящего времени в основном сохранили свою актуальность.

Составные структурные части САПР создаются как самостоятельные системы и обладают всеми их свойствами. По назначению подсистемы САПР разделяют на два вида: проектирующие и обслуживающие. Проектирующие подсистемы выполняют проектные процедуры и операции, обслуживающие предназначены для поддержания работоспособности проектирующих подсистем.

В зависимости от отношения к объекту проектирования различают два вида проектирующих подсистем: объектно ориентированные (объектные) и объектно независимые (инвариантные). Объектные подсистемы выполняют одну или несколько проектных процедур или операций, непосредственно зависящих от конкретного объекта проектирования. Инвариантные подсистемы выполняют унифицированные проектные процедуры и операции.

Подсистема состоит из компонентов САПР, объединенных общей для данной подсистемы целевой функцией и обеспечивающих функционирование этой подсистемы. Компонент представляет собой элемент обеспечения, выполняющий определенную функцию в подсистеме:

– методическое обеспечение – документы, в которых отражены состав, правила отбора и эксплуатации средств автоматизации проектирования;

– лингвистическое обеспечение – языки проектирования, терминология;

– математическое обеспечение – методы, математические модели, алгоритмы;

– программное обеспечение – документы с текстами программ, программы на машинных носителях и эксплуатационные документы;

– информационное обеспечение – документы, содержащие описания стандартных проектных процедур, типовых решений, типовых элементов, материалов и другие данные, а также файлы и блоки данных на машинных носителях с записью указанных документов;

– организационное обеспечение – положения, инструкции, приказы, штатные расписания, квалификационные требования и другие документы, регламентирующие организационную структуру подразделений и их взаимодействие.

Как правило, рассматриваются следующие стадии создания САПР:

– предпроектное обследование;

– разработка;

– согласование и утверждение технического задания на САПР;

– разработка и утверждение технического предложения на САПР;

– эскизный проект;

– технический проект;

– рабочий проект;

– разработка;

– отладка и испытания;

– ввод в действие.

Предпроектное обследование включает анализ существующей системы проектирования, определение готовности предприятия к созданию САПР и разработку предложения о целесообразности создания САПР (адаптации или разработки). В результате составляется технический отчет, утверждаемый заказчиком.

Техническое задание включает основные требования к САПР, разрабатываемые по согласованию с заказчиком.

Техническое предложение не является обязательной стадией процесса разработки САПР и формируется в случае, если оно предусмотрено техническим заданием. Техническое предложение включает выбор рационального варианта САПР, обосновывает решение об адаптации типовой системы автоматизированного проектирования или разработке индивидуального проекта.

Главным итогом эскизного проекта является принятие принципиальных решений по структуре САПР, ее подсистем и по всем видам обеспечений, а также предварительный расчет экономической эффективности и технических показателей системы.

В техническом проекте разрабатывается собственно процесс автоматизированного проектирования. Принимаются окончательные решения

по всем подсистемам и обеспечениям САПР, разрабатываются компоненты системы. Уточняются технико-экономические показатели САПР. Разрабатываются также мероприятия по подготовке предприятия к вводу в действие САПР, включая техническое оснащение и подготовку пользователей.

В рабочем проекте формируется система в целом. Разрабатываются мероприятия по подготовке предприятия ко вводу в действие САПР.

На стадии «Разработка, отладка и испытание» проводится подготовка ко вводу в действие системы; составляются или приобретаются и отлаживаются компоненты САПР; монтируется, налаживается (или отлаживается) и испытывается комплекс средств САПР в целом и ее подсистем.

Наконец, в процессе ввода в действие осуществляется опытное функционирование САПР, определяются реальные технико-экономические показатели, корректируется документация. В результате должен быть оформлен протокол опытного функционирования САПР и акт приемки системы.

Технологический процесс проектирования САПР, в том числе разработка систем автоматизированного проектирования, их внедрение и эксплуатация, представляет собой весьма сложный комплекс задач, при решении которых приходится учитывать большое число порой противоречивых, но взаимосвязанных фактов, условий и исходных данных, многие из которых определяются со спорной достоверностью, т.е. приходится решать задачи и принимать различные решения в условиях неопределенности.

Общей методической базой при проектировании САПР является так называемый системный подход, или системный анализ, позволяющий решать сложные задачи создания САПР и ее элементов на современной научно-технической основе. Обычно выделяют две характерные особенности системного анализа.

Первая особенность состоит в том, что она предусматривает рассмотрение всех элементов и составляющих процесса проектирования в их взаимосвязи, взаимообусловленности, взаимозависимости и взаимовлиянии в интересах оптимального достижения как частных, так и общих целей создания САПР.

Вторая особенность системного анализа состоит в том, что она, являясь методической основой, исходит из обязательной предпосылки о необходимости анализа процессов проектирования в их взаимосвязи на базе широкого применения современных качественных методов исследования, в том числе различных аналитических методов, математического, физического, натурного или полунатурного моделирования, методов исследования операций, неформальных эвристических методов, экспертных оценок, и

позволяет в процессе проектирования вырабатывать и принимать количественно обоснованные решения в условиях неопределенности и неполной информации.

В одном из возможных вариантов системного подхода процесс проектирования САПР рассматривается как сложный итерационный процесс, состоящий из ряда последовательных циклов, каждый из которых состоит из ряда последовательных и функционально взаимосвязанных элементов системного анализа.

3.3.1. Подсистема комплексной автоматизации проектирования конструкций зданий и сооружений. Рассмотренные выше процедуры расчета и оптимизации параметров конструкций и сооружений определяют показатели надежности и экономичности проектируемого объекта, но сравнительно мало влияют на экономические показатели самого процесса проектирования: его трудоемкость, стоимость, длительность, качество итоговой документации. Проблема повышения качества процесса проектирования в целом неразрывно связана с проблемой его комплексной автоматизации, решение которой позволит резко уменьшить затраты труда проектировщиков на выполнение рутинных операций, перейти к формированию и выпуску итоговых документов проекта средствами САПР, увязать проблематику систем автоматизированного проектирования и автоматизированных систем управления производством и технологическими процессами.

Технологическая линия проектирования конструкций строительного объекта. Рассмотрим принципы формирования и структуру технологической линии проектирования объекта исходя из известного определения, что проектирование сводится к процессу переработки информации, во время которого исходная информация в виде задания на проектирование и постоянная справочно-нормативная информация преобразуются в проект объекта. К основным элементам задания на проектирование относится информация о технологическом назначении и оборудовании объекта и географическом районе строительства, определяющих нагрузки на сооружение, затраты на транспортировку, монтаж и т.д.

В процессе проектирования должны быть определены параметры всех элементов объекта, достаточные для его изготовления и возведения. Если основные конструктивные элементы объекта изготовляются на заводах металлоконструкций или заводах железобетонных изделий, то с целью повышения производительности труда и уменьшения стоимости может оказаться целесообразным их изготовление в виде унифицированных секций, структура, габаритные размеры и топология которых заранее определены. Это позволит изготовлять такие элементы на высокопроизводительных поточных линиях.

В практике проектирования часто конструктивные элементы, разработанные до уровня рабочих чертежей, определяются с точностью до некоторых параметров (такие конструктивные элементы обычно называют параметрическими). Описания параметрических конструктивных элементов являются составной частью справочно-нормативной информации, а их применение значительно снижает трудоемкость и упрощает как автоматизированное, так и традиционное проектирование. При этом отпадает, в частности, необходимость разрабатывать в составе проекта каждого конкретного сооружения рабочие чертежи его отдельных элементов, достаточно включить в состав проекта в качестве чертежей повторного применения ранее разработанные чертежи, на которых неизвестные ранее параметры обозначены символами, и добавить к ним таблицу численных значений этих символьных обозначений – таблицу исполнения.

Если для всех конструктивных элементов, примененных в объекте, имеются ранее разработанные параметрические решения, то в составе чертежей проекта нового объекта достаточно вновь разработать только монтажные схемы и набор таблиц исполнений к чертежам параметрических элементов. За счет этого резко сокращается объем вновь разрабатываемой чертежной документации.

Значения параметров должны быть выбраны так, чтобы усилия, напряжения или перемещения в элементах сооружения в процессе эксплуатации не превысили некоторых допустимых значений, определяемых свойствами материала конструкций, эксплуатационными требованиями и т.д.

Таким образом, в подобных случаях в процессе проектирования конкретного объекта необходимо выбрать из каталога параметрических решений соответствующее множество конструктивных элементов, доопределить параметры этих элементов, установить их пространственное взаимное положение и принять другие необходимые решения. На этом содержательная часть процесса проектирования заканчивается и начинается этап оформления итоговой проектно-сметной документации.

Перейдем теперь к описанию последовательности определения параметров объекта в процессе проектирования.

Компоновка конструктивной схемы объекта. Процесс постановки данной задачи включает:

– формирование перечня конструктивных элементов, образующих более сложную конструкцию, и их взаимосвязей;

– задание положения каждого из простейших элементов друг относительно друга и в пространстве в целом;

– задание значений параметров, характеризующих основные свойства каждого из простейших элементов.

Формирование перечня элементов начинается с установления номенклатуры элементов, образующих объект проектирования. При этом

каждый элемент рассматривается как объект произвольной структуры, состоящей из более простых элементов. Таким образом, конструктивная схема объекта строится на основе некоторой иерархии элементов, в которой каждый элемент делится на более простые части, но одновременно в качестве некоторого целого входит составной частью в более сложный объект.

При описании топологической структуры объекта необходимо задать номенклатуру элементов, образующих объект, их взаимные связи. В общей задаче компоновки должны заполняться описывающие деформируемые элементы таблицы, которые впоследствии найдут отражение в расчетной схеме объекта в виде стержней, суперэлементов и т.п., и описывающие узлы, которые будут обработаны впоследствии на этапе конструктивных расчетов.

Положение элементов в пространстве в целом задается с помощью таблиц, увязывающих координаты всех элементов в глобальной системе отсчета, и атрибутов таблиц, содержащих физические размеры, например, координаты узлов, и характеризующих способы их соединения.

Значения параметров, характеризующих некоторые свойства каждого из простейших элементов, иллюстрируются атрибутами внутренней геометрии, конструктивных особенностей, характеристик жесткости. С помощью этих же атрибутов задаются ссылки на другие таблицы, характеризующие объект с различных точек зрения.

В рамках современной САПР необходимо обеспечить обмен информацией между описаниями различных элементов, особенно для элементов, стоящих на нижних уровнях иерархии в структуре объекта, поскольку число таких элементов в сложном объекте весьма велико. Если описание всех элементов организовано в виде таблиц, то связь между параметрами описаний двух элементов, один из которых непосредственно подчиняется другому, может быть организована стандартным образом в виде списков соответствия атрибутов, входящих в те или иные таблицы описания этих двух элементов.

В настоящее время полная формализация процесса компоновки конструктивной схемы строительного объекта может быть выполнена только для объектов достаточно простой структуры со сравнительно небольшим количеством возможных элементов на каждом уровне иерархии компоновочной схемы. Поэтому решение задачи компоновки должно строиться на основе стандартного сценария диалога, в котором проектировщик последовательно проходит все названные выше этапы описания для каждого уровня детализации описания объекта, частично корректируя, в случае необходимости, ранее сформированную информацию после завершения каждого этапа детализации. Такая методология предполагает интенсивный графический диалог проектировщика с ЭВМ и использование справочно-нормативной информации, хранящейся в базе данных САПР.

Задача сбора нагрузок на сооружение. Задача сбора нагрузок на сооружение также трудно поддается формализации при создании САПР. Кроме того, нагрузка на конструкцию должна уточняться в процессе проектирования, так что данная задача относится к типу итерационных.

Так как в задачах механики твердого тела сила рассматривается как количественная мера взаимодействия двух тел, то для правильного задания нагрузки нужно четко описать границы проектируемой конструкции, а также внешние тела и среды, взаимодействующие с ней. В данном круге задач, как правило, на конструкцию действуют силы, источниками которых являются тела, находящиеся за физическими границами проектируемого объекта (сила тяжести, воздействие ветра или снега, эксплуатационная нагрузка от оборудования и т.д.), и тела, являющиеся частью этого объекта и контактирующие с его элементами. Собственный вес относится к категории внутренних сил и для статически неопределимых систем определяется, как правило, в результате расчета объекта в целом. При возникновении трудно-преодолимых осложнений, вызванных чрезмерно большими размерами объекта, необходимо представить его в виде системы более простых конструкций, определив взаимодействие между ними методами статики. Физические элементы, входящие в состав конструкций, следует при необходимости моделировать с помощью более простых расчетных схем – стержнями, тонкими пластинками, а истинные связи между ними – идеализированными схемами типа шарниров, жесткого защемления, шарнирно-подвижных опор и т.п. В современных системах автоматизированного проектирования подобные операции расчленения и упрощения, перехода от реальной конструкции к ее расчетной схеме полностью автоматизировать достаточно трудно.

При определении снеговой нагрузки на объект в целом последовательно реализуются следующие операции:

– по нормам проектирования определяется интенсивность снеговой нагрузки на покрытие объекта;

– нагрузка на покрытие в целом распределяется между элементами, непосредственно поддерживающими кровлю;

– после определения реакций в опорах этих элементов переходят к расчету основных несущих конструкций и их проектированию.

Если в процессе проектирования конфигурация или геометрические характеристики объекта изменились, описанный процесс необходимо повторить заново. Аналогично производится определение и других видов нагрузки, в том числе собственного веса, ветровой и т.п. Во всех случаях логическая последовательность чередования этапов расчета зависит от иерархической структуры конструктивной схемы. Полная формализация процесса определения нагрузок на элементы объекта может быть выполнена

только параллельно с формализацией процесса его компоновки и при использовании иерархически упорядоченных расчетных схем.

Формирование проектно-сметной документации. Конечной целью САПР является автоматизированный выпуск полного комплекта проектно-сметной документации, состав которого определяется соответствующими строительными нормами.

Например, полный комплект проектно-сметной документации применительно к стальным каркасам производственных зданий состоит из следующих документов: «Пояснительная записка», «Техническая спецификация стали», «Монтажные схемы», «Чертежи элементов», «Чертежи узлов», «Смета». Кроме того, в состав комплекта входят «Листы нагрузок» и «Альбомы расчетов», содержащие характеристики напряженно-деформированного состояния каркаса в целом и результаты расчета сечений его элементов, узлов и соединений (заказчику проекта эти материалы обычно не передаются).

Все итоговые документы должны быть разделены на текстовые (пояснительная записка, техническая спецификация стали, смета), содержащие только алфавитно-цифровые символы, и графические (монтажные схемы, чертежи элементов и узлов), содержащие кроме текстовой информации и графические изображения.

Формирование графической части проектной документации. В настоящее время технические возможности автоматизации формирования графической части проектной документации практически неограничены и основная трудность, возникающая при создании полного комплекса графической части проекта, заключается в том, чтобы сформировать совокупность взаимосвязанных документов, обеспечить соответствие между ними и распределить информацию. При этом некоторые элементы чертежа не всегда могут быть созданы на основе чисто формальных соображений. В связи с этим процесс формирования комплекта графических документов в САПР носит диалоговый характер: общая организация информации в документах предопределена иерархической компоновочной схемой объекта, а объем и способ размещения информации на отдельных листах определяет проектировщик с учетом требований норм на оформление документации, удобства работы с чертежами и т.д. Проектировщик может разместить на чертеже необходимую дополнительную информацию, в том числе примечания, решить вопрос о целесообразности использования тех или иных средств при формировании отдельных листов чертежей.

При формировании графической части проектной документации должны быть решены методические проблемы, связанные со способами представления графической информации, сценарием диалога, который предполагается использовать при формировании комплекса и отдельных чертежей, библиотекой параметрических элементов изображения и т.п. На

этапе методических проработок особое внимание должно быть уделено возможности включения в состав итоговых документов проекта листов повторно применяемых чертежей параметрически описанных элементов и узлов, дополняемых таблицами исполнений (в которых фиксируются окончательные значения параметров), формируемыми средствами САПР.

На основе этих решений с использованием специального общесистемного обеспечения САПР разрабатывается информационное обеспечение задачи в виде архива параметрических элементов и программное обеспечение формирования фрагментов изображений, листов и проекта в целом.

Формирование смет. Задача автоматизации выпуска смет в составе САПР должна решаться как проблемно ориентированная, что вызвано тем фактом, что смета, являясь чисто текстовым документом, который определяет стоимость строительства, входит в качестве обязательной части в состав итоговой документации по каждому проектируемому объекту.

В качестве входной информации эта задача в своем исходном виде использует перечень кодов расценок и объемы отдельных видов работ. На основании справочно-нормативной информации компьютер восстанавливает и печатает текстовую информацию по отдельным позициям сметы, осуществляет необходимые арифметические операции с исходными и справочно-нормативными данными. В обязанность же проектировщика входит подготовка исходных данных с записью их на входном языке задачи. Программные средства должны обеспечивать размещение в архиве фрагментов сметы, содержащих параметры, и использовать их в процессе формирования конкретных документов, обращаясь к ним по имени и задавая необходимые значения параметров. При этом должны быть обеспечены возможности постепенного накопления исходной информации в режиме диалога.Таким образом, задача автоматизации формирования смет в составе САПР должна иметь в своем составе средства формирования выходного документа, развитую информационную базу и средства накопления и работы с текущей проектной информацией. Особое значение имеет снижение трудоемкости операций подготовки исходных данных, выполняемых вручную.

3.3.2. Общесистемное обеспечение САПР. Как отмечалось выше, при проектировании САПР должен быть предусмотрен ряд средств ее общесистемного обеспечения. Рассмотрим некоторые из них.

Общесистемное программное обеспечение САПР. Программное обеспечение САПР делится на базовое программное обеспечение, входящее в операционную систему компьютера и поступающее вместе с ним с завода, проблемное программное обеспечение, образующее основу отдельных проектирующих подсистем и являющееся главным предметом разработки в

процессе создания САПР, и специальное программное обеспечение, которое, являясь своеобразной надстройкой над операционной системой, разрабатывается тем не менее в процессе создания САПР и является частью того его программного обеспечения, которая используется в процессе выполнения всех задач или параллельно с ними. Именно эта часть и называется общесистемным программным обеспечением САПР.

Общесистемное программное обеспечение САПР состоит из следующих элементов:

– средств работы с базой данных САПР;

– программ, необходимых для обеспечения нормального функционирования отдельных технических устройств;

– универсальных программных средств типа пакетов программ линейной алгебры, средств обеспечения принятой в САПР технологии обработки информации.

Представляется целесообразным рассмотреть каждый из этих элементов более подробно.

Средства работы с базой данных САПР должны обеспечить все режимы ввода информации в базы данных задач, вывода информации из базы данных для получения твердой копии, просмотра информации с дисплея или передачи ее другим проектирующим задачам САПР. Эти же средства обеспечивают включение базы данных задач в интегрированную базу данных САПР и независимый доступ к информационной базе данных нескольких параллельно обрабатываемых заданий. Кроме того, создание базы данных задачи на основе единой структуры модели информационного объекта позволяет разработать унифицированную для всех задач САПР систему формальной диагностики информации и единые программы на языке описания данных.

Вторая группа компонентов общесистемного программного обеспечения САПР предназначена для поддержания работы технических устройств, расширяющих базовый комплект компьютера, например сканнера. К ним относятся управляющие программы, программное обеспечение для выполнения графических работ и т.п.

Универсальные программные средства типа пакетов прикладных программ для решения задач линейной алгебры, оптимизации, математической статистики и т.д. широко применяются при создании проектирующих подсистем САПР, в данном случае такие средства являются готовыми составными частями мощных диалоговых комплексов расчета строительных конструкций, например SCAD. Помимо них к универсальным программным средствам относят также средства обработки таблиц решений и постфиксных записей. Соответствующие пакеты программ служат хорошей основой для построения общесистемных средств формализации нормативных документов, которые в своем исходном виде часто лишь с большим трудом

могут быть использованы в САПР при создании эффективных интерпретаторов для применения в диалоговых режимах.

Особое место занимают общесистемные программные компоненты, обеспечивающие принятые в САПР технологические режимы обработки информации. К ним относятся программы для построения контрольных сумм, используемых при приемке в эксплуатацию и для текущего контроля разработанных программных и информационных компонентов САПР, программы текущего обслуживания информации, хранящейся в информационном банке данных, программы сверки информации и т.д.

Следует отметить, что со временем относительный объем и трудоемкость разработки общесистемного программного обеспечения уменьшается по мере совершенствования сервисных возможностей вычислительной техники на основе современных операционных систем, таких, как системы Windows.

Общесистемное организационное обеспечение САПР. Этот тип обеспечения включает, в частности, документы, создаваемые в процессе разработки САПР. К документам этой группы относятся инструкции по использованию отдельных компонентов САПР, документы, регламентирующие сроки выполнения и распределение работ между подразделениями проектной организации, состав и форму представления информации, предназначенной для передачи в другие подразделения, а также документы, конкретизирующие отдельные разделы или требования общегосударственных или ведомственных документов.

В состав общесистемного организационного обеспечения конкретной САПР входят также документы, регламентирующие деятельность фонда программ и информации производственной структуры или объединения, включающих данную проектную организацию, если таковые имеются; документы, определяющие порядок эксплуатации САПР и устанавливающие порядок и методику испытаний ее компонентов, порядок выполнения работ по заказам проектных отделов (в том числе в случаях, когда персональными компьютерами оснащены не все проектные подразделения и их обслуживание централизовано).

Особое место в организационном обеспечении занимают директивные документы различного иерархического уровня, регламентирующие ответственность за создание и сопровождение отдельных задач-разделов справочно-нормативной информации, в том числе разделов информации по сортаментам проката и сталей, по расчету смет, ведению общегосударственного классификатора по металлическим конструкциям. По мере развития САПР число и значимость задач-разделов справочно-нормативной информации будет, по-видимому, возрастать, что, естественно, должно найти отражение в организационном обеспечении САПР.

Общесистемное методическое обеспечение САПР. В процессе разработки САПР должна быть, в частности, решена проблема формирования общего подхода к технологии использования средств САПР, к которой могут быть отнесены разработка способов членения процесса проектирования на отдельные этапы, распределение этих этапов между исполнителями, регламентация способа выполнения работ и формы представления информации на входе и выходе каждого этапа.

В одном из вариантов организации технологического процесса проектирования на основе САПР средства этой системы непосредственно используются сотрудниками проектных подразделений, оснащенных персональными компьютерами, при этом, естественно, такие сотрудники могут самостоятельно пользоваться современной вычислительной техникой, создавать собственные версии разделов справочно-нормативной информации, управлять выдачей результатов решения задачи или промежуточных данных, обеспечивать или принимать во внимание соответствие между формами представления входной-выходной информации последовательно функционирующих подсистем, например, диалоговой подсистемы расчета несущих металлоконструкций, и подсистемой автоматизированного проектирования. Такая технология требует создания средств представления справочно-нормативной, исходной и результирующей информации в наглядной и привычной для проектировщика форме, требует стандартизации технологических средств, используемых в САПР.

Во втором варианте организации технологического процесса средства САПР используются только работниками специального подразделения, в задачу же проектировщиков входит лишь подготовка задания на выполнение тех или иных проектных процедур. Преимущества данного варианта, когда средства САПР эксплуатируются высококвалифицированными специалистами, хорошо знающими внутреннюю организацию программного, информационного и технического обеспечений, особенности новейших высокоэффективных операционных систем, очевидны. Однако при окончательном выборе одного из вариантов решающими могут оказаться соображения экономического характера.

Кадровое обеспечение САПР зависит от выбора одного из двух описанных вариантов технологии применения САПР. В первом варианте кадровым обеспечением является весь основной персонал проектных подразделений, во втором кадровое обеспечение составляют только работники подразделения, основным назначением которого является эксплуатация средств САПР. В обоих случаях в проекте САПР должна быть предусмотрена подготовка специалистов, готовых эффективно использовать средства автоматизированного проектирования.

3.3.3. Базовая операционная система. В последние годы все чаще в качестве базовой операционной системы при разработке САПР используют операционную систему Windows, в частности Windows 98 и ее модификации. Благодаря архитектуре Windows 98 освоение этой операционной системы является достаточно простой задачей. Любому компьютеру для работы необходима операционная система – минимальный набор программ, предназначенных для создания и обслуживания файловой системы, а также запуска приложений. Со времени появления в 1981 году первых персональных компьютеров основной операционной системой была система ДОС (дисковая операционная система). Поначалу она отлично соответствовала существовавшим в то время аппаратным средствам и, хотя ДОС могла использовать только весьма ограниченный объем памяти, тогда это не имело значения, поскольку объем памяти компьютеров был невелик.

В ДОС одновременно может выполняться только одна программа или процесс. Если же для документа нужны были данные из программы для работы с электронными таблицами, приходилось закрывать текстовый процессор, открывать программу электронных таблиц, брать нужную информацию, закрывать программу, открывать редактор и лишь затем можно было получать результат. В Windows же надо только указать на нужный элемент указателем мыши, что делает графический интерфейс этой операционной системы значительно эффективнее по сравнению с ДОС.

Пользовательский интерфейс Windows 95 и, наконец, Windows 98, становился все более и более простым в пользовании и доступным для освоения. Кроме того, в последней версии операционной системы Windows были добавлены новые средства, значительно расширяющие круг задач, которые можно выполнять с помощью этой системы. Например, пользуясь Windows 98, можно не тратить время на поиск программного обеспечения для резервного копирования своих файлов – достаточно воспользоваться удобным и простым в использовании стандартным приложением.

Рассматриваемая операционная система обладает не только расширенной поддержкой аппаратных средств и средств управления памятью, но и целым рядом новых возможностей, одни из которых носят чисто косметический характер, а другие действительно в значительной мере способствуют повышению степени функциональности системы и упрощают ее использование. Решение относительно того, какие из новых средств и возможностей Windows 98 являются лишь внешними, а какие – принципиальными, в определенной мере зависит от пользователя. Новых возможностей в Windows 98 достаточно много для того, чтобы каждый мог найти для себя что-то удобное или существенное.

3.4. Современные диалоговые программные комплексы расчета и конструирования

В качестве примеров рассмотрим несколько диалоговых систем расчета и конструирования, получивших эффективное применение для проектирования строительных конструкций.

3.4.1. Программный комплекс «ПАКЕТ». Программный комплекс «ПАКЕТ», разработанный в ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского», состоит из программы статического расчета плоских стержневых систем «РАМА» и программы «ДИНАМИКА» динамического расчета таких систем.

Программа «РАМА» может быть применена для расчета плоских стержневых систем произвольной структуры при действии нескольких вариантов загружений, а также для определения расчетных сочетаний усилий в сечениях стержней.

Статический расчет производится с учетом следующих типов силовых воздействий:

– сосредоточенные силовые нагрузки;

– внеузловые сосредоточенные и распределенные нагрузки;

– изменение температуры элементов конструкции.

Реализация программы предусмотрена на ЭВМ типа IBM PC и машинах других современных типов. Исходная информация подготавливается в виде таблиц на экране дисплея, результаты решения также могут быть размещены на экране или выведены на печать.

Режим программы «ДИНАМИКА» включает два подрежима:

– расчет на свободные колебания;

– расчет на действие сейсмических нагрузок и ветра.

Программа расчета на свободные колебания предназначена для определения периодов и форм собственных колебаний.

При расчете на воздействие сейсмических нагрузок и ветра какие-либо ограничения на расчетную схему конструкции по сравнению со статическим расчетом с помощью программы «РАМА» не накладываются.

В качестве основного конечного элемента расчетной схемы принят прямолинейный стержень, загруженный в концевых узлах сосредоточенными силами и изгибающими моментами; стержневая система может находиться под воздействием:

– узловых сосредоточенных нагрузок;

– внеузловых сосредоточенных нагрузок;

– нагрузок, равномерно или по закону трапеции распределенных на всей длине стержня или его части;

– изменения температуры в элементах конструкции.

В результате реализации программы «РАМА» определяются перемещения узлов стержневой системы и внутренние усилия в ее элементах.

Исходные данные вводятся с пульта дисплея в форме следующих таблиц:

1) параметры задачи;
2) элементы;
3) жесткости;
4) жесткие вставки в концевых частях;
5) координаты узлов;
6) связи;
7) узловые нагрузки;
8) внеузловые нагрузки;
9) граф комбинаций нагрузок.

При расчете на свободные колебания кроме табл. 1-7 заполняются также таблицы:

10) параметры;
11) инерционные характеристики;
12) динамические загружения.

В результате работы программы «СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ» определяются периоды и формы колебаний.

При реализации расчетов на сейсмические нагрузки и ветер кроме табл. 1-7, 10-12 исходных данных вводятся также таблицы:

13) параметры;
14) коэффициенты для сейсмики.

В результате реализации программы расчета на воздействие сейсмических нагрузок определяются перемещения узлов, внутренние усилия в элементах стержневой конструкции и среднеквадратичные значения усилий в заданном сечении.

При расчете конструкции на воздействие ветровой нагрузки в качестве исходных данных в компьютер кроме табл. 1-7, 10-12 вводятся таблицы:

15) параметры;
16) коэффициенты для ветра;
17) величины сил средней составляющей ветровой нагрузки.

В результате реализации программы определяются перемещения узлов и внутренние усилия в элементах стержневой конструкции от пульсационной составляющей ветровой нагрузки по полученным в расчете формам колебаний и среднеквадратичные значения усилий в заданном сечении.

Здесь более подробно рассмотрена структура и способы ввода исходной информации как один из показателей соответствия программной разработки современным требованиям.

Программный комплекс «ПАКЕТ» является типичным примером автоматизированной системы расчета плоских стержневых конструкций.

3.4.2. Программный комплекс «ПРОМЕТ». Комплекс разработан в ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им.В.Н.Шимановского» и предназначен для применения при проектировании строительства, реконструкции и обследованиях стальных конструкций зданий и сооружений, в том числе с крановым оборудованием; схемы конструкций, нагрузок и огибающая эпюра усилий выводятся в виде таблиц и рисунков. Комплекс может быть реализован в следующих режимах.

Режим «Сортамент профилей» включает таблицы отечественных и зарубежных фасонных прокатных профилей, программы вычисления их геометрических характеристик, выбора сортамента для проектирования конструкций.

Режим «Сталь» позволяет проектировщику пользоваться информацией (в форме таблиц) о прочностных характеристиках сталей, применяемых в строительстве.

В *режиме «Статический расчет балок»* реализуются однопролетные и многопролетные неразрезные расчетные схемы балок с неравными пролетами, произвольным распределением участков постоянной жесткости и упругоподатливыми опорами. Допускаются постоянные и временные воздействия в виде участков равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных сил и перемещений опор. Крановая нагрузка может состоять из одного или двух кранов. Расчет выполняется методом сил с формированием пятичленных уравнений. Критические установки кранов определяются комбинированием осциллограмм усилий. При этом благодаря специальной целевой сортировке позиций кранов затраты процессорного времени пропорциональны лишь первой степени длины балки и числу колес кранов. Решается также задача комбинирования вертикальных и горизонтальных усилий от кранов в двух пролетах здания для балок среднего ряда колонн. Для заданного участка расчетной схемы автоматически выбирается минимальное количество комбинаций расчетных усилий, находящихся на выпуклой границе множества Парето.

Режим «Балки общего назначения» предназначен для проектирования балок из сортаментов листовой стали или широкополочных двутавров.

Режим «Колонна» включает программы определения коэффициентов расчетной длины для колонн одно-, двухступенчатых и постоянного сечения в одноэтажных производственных зданиях, их экспертизы по СНиП и проектирования сечений сквозной и сплошностенчатой частей с подбором из сортамента двутавров (широкополочных или сварных) или с оптимизацией на основе сортамента листов. В программах выполняются проверки прочности, общей и местной устойчивости.

В режиме «Стержневые конструкции» выполняется экспертиза или проектирование сечений стержней пространственных конструкций из парных или одиночных уголков, воспринимающих продольную силу, или из

двутавров, нагруженных продольной силой, а также изгибом в двух плоскостях.

Режим «Соединения» включает программы проектирования соединений сварными угловыми швами, стыка листов или двутаврового стержня на высокопрочных болтах. Для программы проектирования соединения угловыми швами в исходных данных задаются вид сварки, вид защиты (под слоем флюса, в среде углекислого газа), положение шва в пространстве, характеристики стали соединяемых элементов, геометрические характеристики контура шва при единичном значении катета. В результатах расчета: минимальный катет, необходимые сварочные материалы, напряжения в проверяемых точках контура шва при проверках по металлу шва, по границе сплавления и по металлу основного элемента в точках возможного отрыва. По программе проектирования стыка на высокопрочных болтах учитывается передача осевой силы, поперечные силы и моменты в плоскостях листов. Определяются габариты, толщина накладок и схемы расстановки болтов, напряжения в накладках и стыкуемых листах.

Программная разработка «ПРОМЕТ» является примером современной системы проектирования, в которой сделана попытка комплексно решить проблему расчета и конструирования одного определенного класса конструкций.

3.4.3. Проектно-вычислительный комплекс SCAD. Проектно-вычислительный комплекс SCAD предназначен для численного исследования на ЭВМ напряженно-деформированного состояния и устойчивости конструкций, а также для автоматизированного выполнения ряда процессов конструирования. ПВК SCAD обеспечивает исследование широкого класса конструкций, в том числе пространственных стержневых систем, произвольных пластинчатых и оболочечных систем, мембран, массивных тел, комбинированных систем – рамносвязных конструкций высотных зданий, плит на грунтовом основании, ребристых пластинчатых систем и многослойных конструкций с учетом действия статических и динамических нагрузок. Рассмотрим основные параметры и характеристики ПВК SCAD (при этом следует иметь в виду, что авторский коллектив постоянно развивает и совершенствует этот программный комплекс).

В комплексе силовые воздействия от сосредоточенных или распределенных сил и моментов, изменения температуры и перемещений отдельных частей конструкций моделируются статическими нагрузками. Динамические нагрузки моделируют силовые воздействия, вызванные землетрясениями и пульсирующим потоком ветра, вибрационные воздействия от технологического оборудования, ударные воздействия.

Исследуемые объекты с различными условиями опирания могут иметь произвольные очертания, локальные ослабления в виде отверстий и полостей различной формы.

ПВК SCAD реализует численный метод дискретизации сплошной среды методом конечных элементов; по единой методике ведется расчет стержневых, пластинчатых и комбинированных систем; удобно моделируются разнообразные граничные условия и нагрузки.

В ПВК SCAD автоматизированы все этапы решения задач, в том числе и процесс генерации сетки конечных элементов. Основными этапами решения задач методом конечных элементов являются: расчленение исследуемой системы на конечные элементы и назначение узловых точек, в которых определяются узловые перемещения, построение матриц жесткости, формирование системы канонических уравнений, отражающих условия равновесия в узлах расчетной системы; решение системы уравнений и вычисление значений узловых перемещений; определение компонентов напряженно-деформированного состояния исследуемой системы по найденным значениям узловых перемещений.

В комплексе используется большое число типов конечных элементов: стержни, четырехугольные и треугольные элементы плит и оболочки (изотропный и ортотропный материалы, многослойные конструкции), четырехугольные и треугольные элементы плиты на упругом основании, пространственные элементы в форме тетраэдра, параллелепипеда, восьмигранника общего вида; одномерный и двухмерные (треугольный и четырехугольный) элементы для решения осесимметричной задачи теории упругости; специальные элементы, моделирующие связь конечной жесткости и упругую податливость между узлами; элементы, задаваемые численной матрицей жесткости.

Развитая библиотека конечных элементов, современные быстродействующие алгоритмы решения систем уравнений и задач на собственные значения практически не накладывают ограничения на тип и свойства рассматриваемого объекта и дают возможность решать задачи с большим числом неизвестных.

ПВК SCAD включает модули, автоматизирующие ряд процессов проектирования, в том числе выбор невыгодных комбинаций нагрузок и унификацию элементов по прочности.

ПВК SCAD может быть эффективно примененен в широком диапазоне классов задач, определяемых физическими свойствами материалов, из которых изготовлены конструкции. Могут быть эффективно решены сложные задачи не только для линейно деформированных материалов, но физически и геометрически нелинейные задачи.

Применяются конечные элементы сложного вида, для которых во многих комплексах программ не выполняются условия совместности на

границе, что может привести к серьезным и даже катастрофическим ошибкам. В ПВК SCAD все конечные элементы являются совместными либо для них гарантируется выполнение дополнительных условий компенсации несовместности. Уделяется также внимание проблеме устойчивости решения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов, которая может существенно влиять на качество и, более того, пригодность результатов применения того или иного вычислительного комплекса.

Разработанные версии ПВК SCAD для Windows 95/98/ NT обеспечивают наивысший в настоящее время уровень удобств как для опытных профессионалов, так и для начинающих специалистов в области расчета и проектирования строительных конструкций.

В настоящее время реализуются три конфигурации комплекса с различной максимальной размерностью решаемых задач: SCAD 392, позволяющий рассматривать расчетные схемы с 392 000 степеней свободы, SCAD 32-327 000 степеней свободы и SCAD 750-4500 степеней свободы (максимальное число узлов и элементов – 750).

Специалистам предлагается большой набор программных продуктов семейства SCAD, в том числе:

– линейный процессор (статика, динамика, библиотека конечных элементов);

– графический синтез расчетной схемы и анализ результатов счета;

– расчетные сочетания усилий;

– комбинация загружений;

– анализ устойчивости;

– проверка по различным теориям прочности;

– расчет нагрузок от фрагмента схемы;

– вычисление спектров ответа;

– документирование результатов расчета;

– интерфейс с системой Auto CAD (чтение DXF-файлов);

– проверка и подбор элементов стальных конструкций;

– нелинейный процессор (решение геометрически нелинейных задач).

Кроме того, разработан ряд автономных программных документов для решения частных задач проектирования строительных конструкций, в том числе:

МОНОЛИТ – проектирование железобетонных монолитных ребристых перекрытий;

КОМЕТА – проектирование узлов металлоконструкций;

КРИСТАЛЛ – экспертиза и расчет элементов стальных конструкций по СНиП II-23-81 и Eurocode 3;

КОНСТРУКТОР СЕЧЕНИЙ – формирование и расчет характеристик произвольных сечений.

Для иллюстрации сервисных возможностей комплекса SCAD приведем лишь некоторые данные о характере и особенностях формирования результатов его реализации:

– результаты расчета отображаются на дисплее как в графической, так и в табличной форме;

– в графической форме результаты расчета перемещений выводятся в виде деформированной схемы с цифровой индикацией величин перемещений в узлах, а также в виде изополей и изолиний перемещений для пластинчатых и объемных элементов;

– для стержневых элементов могут быть получены деформированные схемы с учетом прогибов, а также эпюры прогибов для отдельных элементов;

– усилия в стержневых элементах представляются в виде эпюр для всей схемы или отдельного элемента, а также цветовой индикацией максимальных значений выбранного силового фактора;

– усилия и напряжения в пластинчатых и объемных элементах выводятся в виде полей или изолиний в указанном диапазоне цветовой шкалы с возможностью одновременного отображения числовых значений в центрах и узлах элементов;

– табличное представление результатов может быть дополнено графическими материалами, отобранными в процессе создания расчетной схемы и анализа результатов.

О перспективах применения ПВК SCAD можно судить, исходя из опыта применения разработанного ранее на базе ЭВМ Единой Серии программного комплекса ЛИРА, предназначенного для численного исследования на ЭВМ прочности и устойчивости конструкций, а также автоматизированного выполнения ряда процессов конструирования. Автоматизированная система ЛИРА разработана в Киевском научно-исследовательском институте автоматизированных систем в строительстве и постоянно совершенствовалась с учетом опыта ее использования, развития технических и сервисных возможностей ЭВМ, растущих запросов пользователей.

Следует отметить, что многие характеристики и функциональные возможности комплексов ЛИРА и SCAD весьма близки, в том числе круг решаемых задач, используемое математическое обеспечение, библиотека конечных элементов, развитая сервисная часть, мощная система автоматической диагностики ошибок. В течение ряда лет система ЛИРА нашла применение в нескольких тысячах проектных и научно-исследовательских организаций, фирм и конструкторских бюро. Во многих высших учебных заведениях АС ЛИРА положена в основу учебных программ по современным методам строительной механики и автоматизированного проектирования.

Имеются многочисленные примеры использования АС ЛИРА как для массовых инженерных расчетов, так и для сложных численных исследований конструкций различного назначения, в том числе:

– проведены массовые расчеты более чем 1500 рамных конструкций с целью создания типовой серии промышленных зданий;

– выполнены расчеты ряда высотных зданий, при этом впервые учтена совместная работа каркаса здания с фундаментной плитой и грунтовым основанием, что позволило получить значительную экономию материала;

– проведено исследование различных типов оболочек (в том числе висячих) с учетом податливости контура, что позволило уточнить их рациональную геометрию, определить оптимальные размеры сечений элементов контурных конструкций и других несущих элементов оболочек;

– при проектировании большепролетных вантовых мостов выполнены расчеты сложных пространственных узлов крепления вант в балке жесткости и пилоне, подобраны сечения элементов пролетного строения и пилона;

– проведены расчеты металлоконструкций башенных кранов с грузовым моментом до 1200 тсм и т.п.

Успешная эксплуатация уже в течение ряда лет сооружений, проектирование которых велось с применением системы ЛИРА, результаты многих натурных испытаний конструкций подтверждают высокую степень достоверности результатов и надежность применения программных разработок данного класса для проектирования строительных конструкций.

ПВК SCAD включает модули, автоматизирующие ряд процессов конструирования: выбор невыгодных комбинаций нагрузок, унификация элементов по прочности, оптимальное армирование сечений железобетонных конструкций. Подключение новых модулей такого типа и адаптация к специальным нормам строительного и машиностроительного проектирования расширяют возможности ПВК SCAD в области автоматизации процессов проектирования. Универсальность и легкая адаптация к проблеме позволяют применять ПВК SCAD при автоматизации проектирования многих сложных инженерных объектов, в том числе:

– строительства – покрытия и перекрытия больших пролетов; конструкции высотных зданий, подпорные стены, фундаментные массивы, каркасные конструкции промышленных цехов, отдельные элементы (колонны, ригели, фермы, панели);

– мостостроения и транспортного строительства – коробчатые конструкции больших пролетов, пилоны и вантовые системы висячих мостов, мостовые опоры, тоннели; дорожные и аэродромные покрытия; насыпи, подпорные стены;

– специальных сооружений – конструкции высотных башен и мачт, телескопов, магистральных трубопроводов, гидротехнических сооружений, тяжелые конструкции атомной энергетики;

– машиностроения – конструкции транспортных машин, башенных и портальных кранов, дорожно-строительных и горнодобывающих механизмов, турбин; котлов, корпусов и отдельных фрагментов судов, летательных аппаратов.

В программно-вычислительном комплексе SCAD реализованы строительные нормы и правила, действовавшие в момент издания сопроводительной литературы.

3.4.4. Структура ПВК SCAD. Программный комплекс состоит из различных подсистем, которые могут работать в автономном режиме и в различных сочетаниях. Основу программного комплекса составляют три процессора, реализующих расчет конструкции:

– линейный процессор. Реализованы высокоэффективные алгоритмы составления и решения систем линейных уравнений и собственной проблемы, что обусловливает высокое быстродействие системы и возможность решения задач большой размерности;

– итерационный нелинейный процессор для расчета физически нелинейных систем методом секущих. Реализованы различные законы деформирования материала, включая экспоненциальный, степенной, кусочно-линейный. Допускается биматериальность сечений элементов. Моделируется односторонняя работа материала;

– процессор для расчета геометрически и физически нелинейных систем шаговым методом. Реализованы различные законы деформирования. Возможно задание разных последовательностей (истории) нагружений. Допускается биматериальность сечений элементов.

Исходные данные для процессоров задаются в виде текстового файла с данными на входном языке. Результаты счета можно получить в табличной форме с помощью постпроцессора печати результатов.

Группа препроцессоров ввода информации состоит из:

1) графического препроцессора, который в режиме графического диалога синтезирует расчетные схемы плоских и пространственных стержневых и плоскостных конструкций типа ортогональных каркасов, оболочек произвольной формы и т.д. На его основе задают:

– нагрузочные состояния;

– топологию системы (расчленение конструкции на конечные элементы);

– сечения элементов;

– условия опирания;

– виды присоединения элементов к узлам;

2) табличного препроцессора, соответствующего структуре входного языка. Он позволяет в режиме текстового диалога задавать исходные данные

в удобной для инженера табличной форме с постоянным сопровождением необходимыми указаниями и подсказками.

Обработка результатов расчета выполняется целой серией постпроцессоров.

3.4.5. Специализированные автономные дополнения ПВК SCAD. *Программа «Монолит»* предназначена для проектирования железобетонных монолитных ребристых перекрытий, образованных системой плит и балок, опирающихся на колонны и (или) стены.

Общая схема перекрытия компонуется на ортогональной сетке узлов, имеющих последовательную нумерацию. Узлы располагаются в местах пересечения конструктивных элементов перекрытия – балок, стен, колонн. Плиты перекрытия постоянной толщины приняты расположенными в уровне верхней грани балок. Балки прямоугольного сечения (таврового с полкой у верхней грани) подразделяются на второстепенные, воспринимающие равномерно распределенную нагрузку от плит перекрытия, и главные, несущие нагрузку от второстепенных балок перпендикулярного направления. Опорами перекрытия служат несущие стены здания и (или) колонны монолитного каркаса. При этом условия опирания перекрытия на стены определяются материалом стен: кирпичных, предусматривающих свободное безмоментное опирание балок и плит, и бетонных, монолитно связанных с перекрытием и обеспечивающих жесткое, моментное сопряжение балок и плит с опорной конструкцией. Все несущие элементы сооружения (стены, колонны, балки) могут быть размещены эксцентрично относительно осей, соединяющих узлы разбивочной сетки.

Сетки и каркасы. Эта версия программы предусматривает армирование конструкций сварными каркасами и сетками, изготовляемыми с помощью точечной сварки соединений стержней.

Результатом работы программы является необходимый комплект рабочих чертежей перекрытия: опалубочный план с характерными сечениями, планы верхней и нижней арматуры плиты (раскладка арматурных сеток), арматурные чертежи балок, чертежи сварных каркасов и сеток, ведомость деталей, ведомости расхода стали по балкам, плитам и сводная, а также спецификации по балкам, плитам и сводная, приводятся необходимые примечания. В подсистеме предусмотрена полная унификация арматурных изделий.

Все выходные документы готовятся в стандартном формате большинства используемых печатающих устройств А4, но можно выводить их и на устройства другого формата.

Для доработки выходных документов предусмотрена возможность импорта результатов в форматы файлов системы AutoCad.

Программа «Монолит» работает в современной операционной среде. Организация пользовательского диалога и элементы управления полностью соответствуют этой среде.

Программа снабжена подробной справочной информацией, которая включает описание пользовательского интерфейса и правил работы с программой.

Программа «Конструктор сечений» предназначена для формирования произвольных составных сечений из стальных прокатных профилей и листов, а также расчета их геометрических характеристик, необходимых для выполнения расчета конструкций.

Для сконструированного сечения определяются:

– площадь поперечного сечения;

– значения моментов инерции относительно центральных осей, параллельных координатным осям сечения правой декартовой системы координат;

– радиусы инерции относительно тех же осей;

– момент инерции при свободном кручении;

– координаты центра тяжести;

– значение угла наклона главных центральных осей инерции;

– максимальный и минимальный моменты инерции;

– максимальный и минимальный радиусы инерции;

– максимальный и минимальный моменты сопротивления относительно главных центральных осей инерции;

– ядровые расстояния вдоль положительного и отрицательного направления главных центральных осей.

Вычисления выполняются по обычным правилам сопротивления материалов, при этом момент инерции при свободном кручении приближенно определен как сумма моментов инерции свободного кручения профилей, составляющих сечение.

В программе «Конструктор сечений» реализованы следующие способы сборки:

– присоединение элемента одним из опорных узлов к опорному узлу одного из элементов сечения;

– присоединение элемента одним из опорных узлов к точке сечения с заданными координатами;

– присоединение элемента путем совмещения линий, соединяющих две опорные точки устанавливаемого элемента и активного элемента сечения.

При использовании первых двух способов сборки элемент включается в сечение с заданной ориентацией. При соединении по линии ориентация элемента в сечении определяется ориентацией линий, по которым стыкуются элементы.

Осуществляется постоянный контроль габаритов собираемого сечения.

По результатам расчета геометрических характеристик сечения формируется отчет. Отчет представляет собой файл в формате RTF (Rich Text Format). После завершения формирования автоматически вызывается приложение, с которым ассоциирован формат RTF (например, MS Word или WordPad).

Результаты расчета геометрических характеристик могут экспортироваться в ПВК SCAD, а также в систему для расчета и экспертизы элементов стальных конструкций *КРИСТАЛЛ.*

Для прокатных профилей, используемых при формировании сечения, может быть получена информация о размерах.

«Конструктор сечений» работает в операционной среде Windows 95, /98/NT. Организация пользовательского диалога и элементы управления полностью соответствуют этой среде.

«Конструктор сечений» снабжен подробной справочной информацией, которая включает описание пользовательского интерфейса и правила работы с программой.

Программный комплекс проектирования узлов стальных конструкций КОМЕТА предназначен для расчета и проектирования узлов стальных конструкций зданий и сооружений в промышленном и гражданском строительстве. В комплексе реализован подход, в котором при проектировании используется набор параметризованных конструктивных решений узлов (прототипов). В процессе проектирования параметры прототипов изменяются в зависимости от заданных условий применения (усилий, материала и т.п.) и установленных норм проектирования.

При работе с комплексом имеется возможность выбора:

– норм проектирования (СНиП, Eurocode или др.), которым должна соответствовать конструкция;

– сортамента металлопроката (СНГ, Euronorm и др.), из которого проектируются элементы узла;

– единиц измерения (сантиметр или дюйм, килограмм-сила или ньютон), которые используются для задания исходной информации и описания результатов;

– языка (русский, английский, французский), на котором ведется работа и оформляются результаты.

Комплекс реализован как широкая гамма прикладных программ для проектирования самых разнообразных узлов стальных конструкций.

Основной задачей, решаемой комплексом *КОМЕТА*, является получение технического решения узла, соответствующего выбранному варианту норм проектирования, которое удовлетворяет заданным условиям применения. Результатом работы является чертеж узла и данные о прочности его отдельных элементов (деталей конструкции, сварных швов, болтов и т.д.). Последние дают возможность пользователю оценить качество полученного

технического решения и при желании изменить некоторые из параметров конструкции. Именно с целью реализации такой возможности по доработке полученного технического решения, а также для возможных изменений формы представления чертежей (размеры, некоторые условные обозначения, форматы чертежей и др.) предусмотрена возможность экспорта графических результатов работы комплекса *КОМЕТА* в формат DXF-файлов системы AutoCAD. Разумеется, пользователь может отказаться от таких доработок и применять техническое решение *КОМЕТА* в качестве окончательного.

В предлагаемую версию комплекса вошли различные типы узлов:

– жесткие, шарнирные и полужесткие примыкания балок к колонне;

– шарнирные базы колонн;

– жесткие базы колонн без ребер, с ребрами и с траверсами;

– стыки балок на болтах и фланцевые соединения.

Примыкания двутавровых балок к колонне реализованы в виде сварных и фланцевых соединений на обычных и высокопрочных болтах.

Примыкания могут быть горизонтальные и наклонные, с вутами и без них, с учетом усиления колонны и без усиления.

Широкий выбор баз для центрально-сжатых и внецентренно-сжатых сплошностенчатых колонн позволяет не только быстро запроектировать необходимый узел, но и получить рациональное техническое решение проекта.

Включенные в комплекс прототипы стыков балок позволяют выполнить расчет и проектирование стыка на высокопрочных болтах с использованием накладок или фланцев, с учетом усиления или без усиления, как в одной плоскости, так и под углом.

Программа АРБАТ предназначена для подбора и проверки арматуры в элементах железобетонных конструкций (неразрезные балки и колонны), а также для вычисления прогибов в железобетонных балках согласно требованиям СНиП 2.03.01-84* «Бетонные и железобетонные конструкции». Расчет выполняется по предельным состояниям первой и второй группы для расчетных сочетаний усилий (РСУ), выбираемых автоматически в зависимости от заданных нагрузок в соответствии с требованиями СНиП 2.01.07-85 «Нагрузки и воздействия».

Подбор и проверки выполняются для железобетонных конструкций из тяжелого, мелкозернистого и легкого бетонов с применением арматурной стали классов А-I, А-II, А-III, А-IV, А-V и А-VI, а также арматурной проволоки класса ВР-1.

Кроме указанных функций *АРБАТ* выполняет в определенной степени и роль справочника, с помощью которого можно уточнить некоторые данные относительно сортамента и характеристик арматуры, нормативного и расчетного сопротивления, а также коэффициентов условий работы бетона.

В режиме «Подбор арматуры в балке» выполняется подбор арматуры в многопролетных балках постоянного сечения (прямоугольного, таврового или двутаврового) по предельным состояниям первой и второй группы (прочность и трещиностойкость). Рассматривается плоская работа балки. При этом в сечениях действуют следующие силовые факторы:

– изгибающий момент;

– поперечная сила.

В результате реализации программы вычисляются площади верхней и нижней продольной арматуры, а также площадь и шаг расположения стержней поперечной арматуры. Для прямоугольного и двутаврового сечений можно потребовать, чтобы армирование было симметричным.

В режиме «Подбор арматуры в колонне» выполняется подбор арматуры в колонне постоянного сечения (прямоугольного, двутаврового или кольцевого) по предельным состояниям первой и второй группы (прочность и трещиностойкость). Рассматривается плоская работа колонны. При этом в сечениях действуют следующие силовые факторы:

– нормальная сила;

– моменты в узлах;

– поперечная сила.

В результате вычисляются площади симметричной и (или) несимметричной продольной арматуры, а также площадь и шаг поперечной арматуры (для кольцевого сечения – только продольная симметричная арматура).

Программа расчета элементов стальных конструкций по СНиП КРИСТАЛЛ предназначена для выполнения проверок элементов и соединений стальных конструкций на соответствие требованиям СНиП II-23-81 «Стальные конструкции. Нормы проектирования».

Кроме того, при создании программы использовались связанные со СНиП II-23-81 государственные стандарты, «Пособие по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81) ЦНИИПСК им. Кучеренко» и некоторые методологические положения норм СНиП 53-1-96 «Стальные конструкции. Нормы проектирования» и «Общие правила проектирования элементов стальных конструкций и соединений (СП 53-101-96)».

В программе реализованы следующие режимы работы:

– **стали** основной задачей является реализация рекомендаций СНиП по выбору марок стали. При этом учитывается подход, заложенный в проект нового СНиП. Кроме того, выдаются справки о соответствии классов стали по ГОСТ 27771-88 маркам стали по ГОСТ или ТУ, а также справочные данные о механических характеристиках;

– **сортамент металлопроката** обеспечивает просмотр сортаментов металлопроката с выдачей всех характеристик профилей;

– **болты** используется для просмотра сортамента болтов с указанием их класса;

– **предельные гибкости** используется для просмотра рекомендаций СНиП II-23-81 по назначению предельных гибкостей;

– **коэффициенты условий работы** используется для просмотра и выбора значений коэффициентов условий работы элементов по рекомендациям СНиП II-23-81;

– **огибающие** определяет невыгодные сочетания многих нагрузок, которые действуют на изгибаемые элементы, строит огибающие эпюры моментов и поперечных сил;

– **геометрические характеристики** вычисляет все геометрические характеристики поперечного сечения (включая секториальные моменты инерции);

– **расчетные длины** реализует рекомендации СНиП II23 81 и Еврокода 3. В результате работы можно получить значения коэффициента длины;

– **сопротивление сечений** определяет коэффициенты использования ограничений для любого из предусмотренных программой типов поперечных сечений при действии произвольных усилий. Кроме того, строит кривые взаимодействия для любых допустимых комбинаций пар усилий;

– **болтовые соединения для различных конструктивных решений болтовых соединений** определяет коэффициенты использования ограничений и строит кривые взаимодействия допустимых комбинаций пар усилий;

– **фрикционные соединения** аналогичен предыдущему режиму, но с другим набором конструктивных решений на основе использования высокопрочных болтов с контролируемым натяжением;

– **сварные соединения для различных конструктивных решений сварных соединений** определяет коэффициенты использования ограничений и строит кривые взаимодействия допустимых комбинаций пар усилий;

– **местная устойчивость** проверяет местную устойчивость стенок и поясных листов изгибаемых и сжатых элементов; при этом не рассматриваются подкрановые балки, а также балки со стенкой, подкрепленной продольными ребрами;

– **элементы ферм** реализует все необходимые проверки элементов ферм на прочность, устойчивость и предельную гибкость для схем конструкций, наиболее часто используемых на практике. Определяет расчетные значения усилий и их сочетаний от задаваемых вертикальных внешних нагрузок. Предусмотрен подбор сечений;

– **балки** режим аналогичен предыдущему, но ориентирован на анализ и проектирование двутавровых (сварных и прокатных) однопролетных балок с различными условиями опирания;

– **стойки** режим аналогичен предыдущему, но ориентирован на анализ и проектирование колонн и стоек различного поперечного сечения;

– **опорные плиты** рассматриваются пластины, составляющие базу колонны, при различных вариантах их окаймления ребрами;

– **неразрезные балки** режим аналогичен режиму балки.

В заключение отметим, что программные комплексы типа ПВК SCAD являются прообразом и базой для создания тех «идеальных» систем автоматизированного проектирования, о которых шла речь выше.

Следует отметить, что в недолгой истории развития теории и практического осуществления систем автоматизированного проектирования строительных объектов в качестве основополагающих рассматривались задачи различного уровня сложности вплоть до создания комплексов программ, позволяющих проектировщику в полностью автоматизированном режиме без его участия осуществить наиболее рациональный по основным критериям проект сложного объекта, вплоть до рабочих чертежей, смет и проекта организации работ по его возведению на основе минимального объема вводимых в компьютер исходных данных и условий. Однако со временем, по мере накопления опыта у части специалистов сформировалась другая точка зрения, заключающаяся в том, что разработка полностью автоматизированной системы проектирования сложных строительных объектов из-за огромного многообразия вариантов конструктивного и архитектурного решений, методов расчета, материалов, нагрузок, способов организации работ технически неосуществима несмотря на фантастически возросшие возможности вычислительной техники. По-видимому, наиболее реалистичной и, быть может, рациональной является точка зрения тех специалистов, которые считают, что САПР должна быть управляемой системой и включать в себя не только средства проектирования и способы их использования, но и людей, эксплуатирующих эти средства. Возможность обоснованного вмешательства специалиста в работу автоматизированной системы на всех основных этапах ее реализации следует считать не только вынужденно допустимой, но и целесообразной.

Литература к главе 3

1. *Будя Ф.П., Кононюк А.Е. и др.* Справочник по САПР. - К.: Техніка, 1988. - 375 с.

2. *Геммерлинг Г.А.* Система автоматизированного проектирования стальных строительных конструкций. - М.: Стройиздат, 1987. - 211 с.

3. *Кроуфорд Ш., Солкинд Н*. Операционная система Windows 98. - М.: Энтроп, 1999. - 348 с.

4. *Программный* комплекс Structure CAD. - К.: Топаз-информ, 1996. - 323 с.