

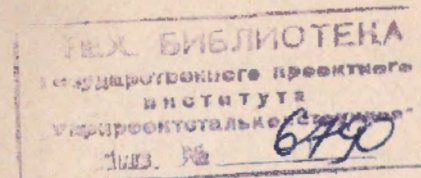
198
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГОССТРОЯ СССР

В. Н. ШИМАНОВСКИЙ, Ю. В. СМЕРНОВ, Р. Б. ХАРЧЕНКО

РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ КОНСТРУКЦИЙ (нитей конечной жесткости)

Под редакцией канд. техн. наук В. Н. Шимановского

92



ИЗДАТЕЛЬСТВО «БУДІВЕЛЬНИК»
КИЕВ—1973

Шимановский В. Н., Смирнов Ю. В., Харченко Р. Б. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости). К., «Будівельник», 1973, стр. 198.

В книге изложена методика статического и динамического расчета пологих нитей конечной жесткости. Определено влияние различных факторов на напряжения и прогибы нитей. Приведена оценка гипотез, положенных в основу разработанных методов расчета. Даны рекомендации по выбору оптимальных параметров нити. Показана возможность приведения расчетных формул к виду, удобному для практического использования.

Изложение материала иллюстрировано примерами расчета.

Книга рассчитана на инженеров-строителей, проектировщиков, научных работников, а также может быть полезна студентам строительных вузов.

Рисунков 66, таблиц 8, библиография из 64 позиций.

ВВЕДЕНИЕ

Нитями конечной жесткости являются нити, в которых под действием произвольной поперечной нагрузки возникают напряжения растяжения и изгиба.

Нить конечной жесткости служит расчетной моделью следующих конструкций: висячих мостов, висячих газо-, нефте- и продуктопроводов, висячих покрытий и перекрытий промышленных и гражданских зданий, канатных дорог, различных элементов строительных конструкций (связи, затяжки и т. п.).

Все увеличивающееся в последнее время строительство больщепролетных зданий и инженерных сооружений стало способствовать более интенсивному внедрению в строительство висячих конструкций, имеющих, как правило, высокие технико-экономические показатели, особенно при средних и больших пролетах. Приведем данные о стоимости трубопроводного перехода через р. Ию, построенного в 1963 г.

Двухпролетный переход с пролетами 90 и 340 м выполнен в виде провисающей нити из трубы диаметром 720 мм с толщиной стенки 10 мм. Стоимость 1 м перехода составила около 70 руб. вместо 158 при прокладке по типу дюкера.

Существенное снижение стоимости и расхода материалов дает применение висячих конструкций и при строительстве других сооружений.

Висячие конструкции позволяют при незначительном увеличении расхода материала резко увеличить пролеты. Поэтому уже сейчас в СССР, а также в ряде стран Европы, Азии и Америки разрабатываются висячие покрытия, трубопроводные переходы и мосты с пролетами до 1000 и более метров.

Естественно, что проектирование и возведение висячих конструкций должно строиться на основе четких данных об их работе, особенностях поведения под нагрузкой, о влиянии на их напряженно-деформированное состояние различных факторов (изменение температуры, смещение опор, динамические перегрузки и т. п.). Все эти вопросы и рассматриваются в настоящей книге.

Изучаемые системы нелинейны. Принцип независимости действия сил для них неприменим. Поэтому полученные расчетные зависимости оказались несколько громоздкими. Для упрощения расчета в книге дано решение с использованием таблиц с заранее

вычисленными значениями функций, при пользовании которыми расчет нитей конечной жесткости становится равноценным по трудоемкости расчету гибкой упругой нити.

Теоретические решения в книге иллюстрируются примерами расчета, а результаты расчета используются для иллюстрации особенностей работы нитей конечной жесткости. Некоторые из этих особенностей (уменьшение стрелы провисания нити при загрузке нити ее равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой определенной интенсивности, увеличение изгибающих моментов в середине пролета нити при жестком закреплении ее концов в сравнении с шарнирным закреплением и др.) не вытекают ни с позиции теории гибких нитей, ни с позиции теории изгиба балок.

Висячие конструкции обладают повышенной чувствительностью к динамическим воздействиям. Поэтому в книге большое внимание уделяется вопросам динамического расчета. Рассматриваются как плоские, так и пространственные колебания нитей с учетом и без учета сил сопротивления. Решение задач производится в основном по работе А. П. Ван-дер-Флита [7], в которой рассмотрено напряжение в нелинейной постановке. При этом используются традиционные методы исследования, применяемые в теории нелинейных колебаний. Выводы всех формул даны в предположении упругой работы материала нити.

Раздел первый. СТАТИКА

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТА

§ 1.1. Краткий обзор теоретических и экспериментальных исследований

Одной из первых работ, посвященных расчету стержней, подверженных действию поперечной нагрузки и осевой силы, является работа А. П. Ван-дер-Флита [7], в которой рассмотрено напряжение в стержне под действием равномерно распределенной нагрузки. При выводе расчетных формул автор исходил из предпосылки, что продольные и поперечные силовые воздействия независимы друг от друга.

Большой вклад в развитие теории расчета стержней, подверженных действию поперечной нагрузки и осевой силы, внесли К. С. Завриев, И. Г. Бубнов и С. П. Тимошенко.

К. С. Завриевым была разработана методика расчета стержней, в которых продольное усилие связывалось с поперечной нагрузкой линейной зависимостью [15].

И. Г. Бубнов впервые рассмотрел задачу о расчете стержней, подверженных совместному действию поперечной нагрузки и осевой силы, зависящей от прогиба стержня [6].

С. П. Тимошенко выполнил большую работу по обобщению задач, рассмотренных А. П. Ван-дер-Флитом, К. С. Завриевым и И. Г. Бубновым. Кроме того, он развил расчет таких стержней энергетическим методом, дал предложения по приближенному вычислению величины распора, по расчету стержней, имеющих малую начальную цилиндрическую кривизну, и ряд других [49].

С ростом применения висячих конструкций в различных областях строительства появляются работы В. К. Качурина [19, 20] по расчету нитей конечной жесткости, Н. М. Кирсанова [22] по расчету однопролетных висячих мостов с учетом прогибов, Г. А. Тартаковского [47], Х. И. Папаценко [33] и В. К. Юдина [60] по расчету трубопроводных переходов в виде провисающей нити и ряд других. Наиболее подробно и полно расчет нитей конечной жесткости изложен в работах В. К. Качурина.

При решении дифференциального уравнения изгиба нити конечной жесткости вследствие нелинейности задачи не удается получить искомую функцию (распор) в явном виде. Приходится прибегать к методу последовательных приближений, задавая вначале каким-то значением распора. В. К. Качурин рекомендует следующую последовательность расчета:

приближенно по формулам для гибкой нити определяют приращение распора от дополнительной нагрузки * (ΔH);

вычисляют удлинение нити от приращения распора (ΔL);

выражая приближенно полученную длину нити ($L + \Delta L$) через длину ее провисания, вычисляют приращение последней и ее длину ($f + \Delta f$) в первом приближении;

определяют распор в первом приближении (H).

Затем вычисляют распор во втором приближении и т. д., пока результаты последующего этапа будут незначительно отличаться от предыдущего. Однако далеко не всегда найденный таким образом результат будет достаточно точным. Это объясняется тем, что при определении приращения величины стрелы провисания от дополнительной нагрузки не учитывается изменение формы равно

Исследования показывают, что в нитях со стрелами провисания 1/10—1/25 пролета, наиболее часто встречающихся на практике, перемещения за счет изменения формы равновесия составляют от 40 до 90% суммарной величины прогиба. Поэтому если действие равномерно распределенной по всему пролету нагрузки не вызывает изменения формы равновесия, удастся достаточно точно вычислить приращение стрелы провисания, то при действии несимметричной, особенно сосредоточенной нагрузки, вычисленное приращение стрелы провисания может отличаться от истинного на несколько раз.

Для уточнения величины стрелы провисания от дополнительной несимметричной нагрузки В. К. Качуриным разработано специальное решение. Оно основано на том условии, что интеграл от квадрата первой производной уравнения изогнутой оси нити по ее длине пропорционален квадрату стрелы провисания.

В этом решении приходится, как правило, делать по 3—4 попытки, вычисляя каждый раз новые значения постоянных интегрирования. Кроме того, выполненные исследования показывают, что вследствие определения интегралов

$$\int_0^l y'^2 dx \text{ и } \int_0^l y''^2 dx$$

по приближенным формулам найденные значения искомых величин могут заметно отличаться от фактических.

Расчету нитей конечной жесткости посвящены также работы Н. М. Кирсанова [23], Б. К. Немчинова [29] и работы авторов [21, 56, 57, 58, 59].

Экспериментальные исследования нитей конечной жесткости проводились в НИИСКе [53, 54], НИИЖБе [26] и ВНИИСТе [35].

Вследствие отсутствия достаточного количества экспериментальных исследований до сих пор по отдельным вопросам теории существуют противоречивые мнения. Дальнейшее накопление экспериментального материала позволит установить истину.

§ 1.2. Классификация нитей

Все нити конечной жесткости условно могут быть разделены, с одной стороны, на гибкие и жесткие и, с другой — на пологие и непологие. Абсолютно гибких нитей, не считая цепи, не существует, так как всякий материальный стержень обладает той или иной жесткостью. Тем не менее во многих случаях можно рассчитывать нити как абсолютно гибкие.

Мерой жесткости может служить отношение напряжений изгиба к напряжениям растяжения. Если напряжения от изгиба не превышают 5% напряжений от растяжения, то нить рассчитывают обычно как абсолютно гибкую. В противном случае следует учитывать ее жесткость EI .

Точной границы между пологими и непологими нитями нет, так как она зависит от характера и величины нагрузки, от материала, условий работы нити и других факторов.

Нити могут находиться под действием разнообразных нагрузок. Среди них обязательной является нагрузка от собственного веса, распределенная по длине нити. От этой нагрузки абсолютно гибкая нить провисает по цепной линии

$$y = \frac{H}{q} \left(\operatorname{ch} \frac{q}{H} x - 1 \right).$$

Нагрузка на единицу горизонтальной проекции нити меняется по длине пролета (рис. 1.1) и на произвольном расстоянии x будет равна $\frac{q}{\cos \alpha}$, где α — угол между касательной к оси нити и горизонтом.

Если отношение стрелы провисания к пролету нити мало, то углы α также небольшие и значения $\cos \alpha$ мало отличаются от единицы. В этом случае нагрузку можно считать распределенной равномерно по пролету, а уравнение цепной линии можно заменить уравнением квадратной параболы.

По этому признаку и различают пологие и непологие нити. Если действующую на нить нагрузку считать равномерно распределенной по пролету, то нить можно отнести к разряду пологих, в противном случае — к разряду непологих.

Граница между пологими и непологими нитями в различных источниках приводится неодинаковая. Так, в работе [20] сказано, что она колеблется в пределах $l/f = 10 \div 20$, в справочнике [45] нить считается полой, если $l/f \geq 8$. При этом, если точки подвеса нити расположены на разных уровнях (рис. 1.2), то угол наклона к горизонту линии, соединяющей опоры, не должен превышать 20° .

Более общим критерием пологости нити с опорами на разных уровнях может служить величина максимального угла между касательной к оси нити и горизонтом. Если этот угол не превышает 40° , то максимальная погрешность в определении ординат (случай, когда нить нагружена одной сосредоточенной силой, расположенной вблизи опоры) составляет не более 5,5%.

* О видах нагрузок будет сказано в § 1.2.

В отличие от гибких нитей очертание нитей конечной жесткости определяется не только нагрузкой, но и жесткостью на изгиб. Однако в сопоставимых условиях (при одинаковых нагрузках, отношениях стрелы провисания к пролету) ординаты нити конечной жесткости будут меньше ординат гибкой нити. Следовательно и углы наклона касательных к горизонту будут меньше, чем для

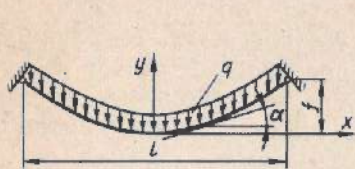


Рис. 1.1. Схема провисания нити по цепной линии.

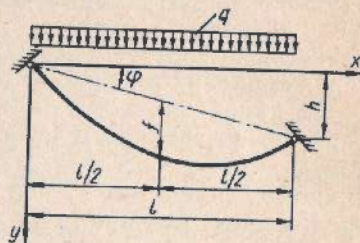


Рис. 1.2. Схема провисания нити с опорами на разных уровнях.

гибкой нити. Поэтому перечисленные выше признаки пологости гибких нитей в равной степени могут быть отнесены и к нитям конечной жесткости.

Различают две группы нитей конечной жесткости: нити, работающие с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок*, и нити, работающие без изгиба от начальной нагрузки.

Примером сооружений с несущим элементом в виде нити, работающей с изгибом от начальной и дополнительной (временной) нагрузок являются газо- или нефтепроводные переходы со свободно провисающей трубой. При подъеме на опоры сваренных в прямую плетей труб в последних уже от собственного веса возникают значительные изгибающие моменты.

Примером второй группы нитей могут быть сборно-монолитные железобетонные висячие цилиндрические оболочки. После навески и замоноличивания плит покрытия такие оболочки работают без изгиба от собственного веса и с изгибом от дополнительной (временной) нагрузки. Расчет тех и других нитей имеет много общего, однако есть и отличия, о которых будет сказано в гл. 2 и 3.

§ 1.3. Основные предпосылки расчета

В предлагаемой методике расчета нитей конечной жесткости использованы следующие предпосылки:

1. Материал нитей считается однородным, изотропным и абсолютно упругим.

* Под начальной нагрузкой подразумевается нагрузка, при которой нить провисает с заданной стрелой; под дополнительной — любая другая нагрузка, прикладываемая к нити после приложения начальной нагрузки. Одним из примеров начальной нагрузки может быть собственный вес нити.

2. Вследствие пологости рассматриваемых нитей принимаются: техническая теория изгиба

$$M = -EI \frac{d^2y}{dx^2}; \quad (1.1)$$

вместо точного выражения длины нити

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

приближенное значение, полученное разложением в ряд Маклорена подынтегральной функции с удержанием двух первых членов этого ряда

$$L = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx; \quad (1.2)$$

провисание нитей второй группы от начальной нагрузки по дуге квадратной параболы (в соответствии с теорией гибких нитей).

3. Расчет ведется по деформированной схеме.

4. Статическая неопределенность раскрывается связью длин нити до и после приложения дополнительной нагрузки с упругим удлинением ее, вызванным этой нагрузкой.

Для большинства расчетов замена точного значения

$$M = -EI \frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}$$

приближенным по (1.1) вполне допустима: при отношении стрелы провисания к пролету $\frac{f}{l} = \frac{1}{20}$ погрешность составляет 4%, при $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$ — увеличивается до 16%.

Замена точного выражения для определения длины нити приближенным по (1.2) вносит в расчет погрешность, не превышающую нескольких процентов. Такого же порядка вносится погрешность при определении упругого удлинения нити ΔL , когда принимается, что величина распора H постоянна по ее длине.

В целом использование принятых при выводе расчетных предпосылок вносит в расчет погрешность, величина которой не выходит из пределов точности наших сведений о реальных нагрузках.

§ 1.4. Вывод общих уравнений

Нить, работающая с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок. Рассмотрим нить конечной жесткости с опорами на разных уровнях, загруженную равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.3, а).

Запишем уравнения равновесия вырезанного участка нити (рис. 1.3, б). Так как горизонтальные составляющие усилий S и $S + dS$ равны распору H , то

$$\Sigma M_B = H \operatorname{tg} \eta dx - H dy - q dx \frac{dx}{2} + M - M - dM = 0; \quad (1.3)$$

$$\Sigma y = -H \operatorname{tg} \eta + q dx + H \operatorname{tg} (\eta + d\eta) = 0. \quad (1.4)$$

Из уравнения (1.3), пренебрегая бесконечно малой величиной второго порядка малости, получим:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{dy}{dx} + \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{H}.$$

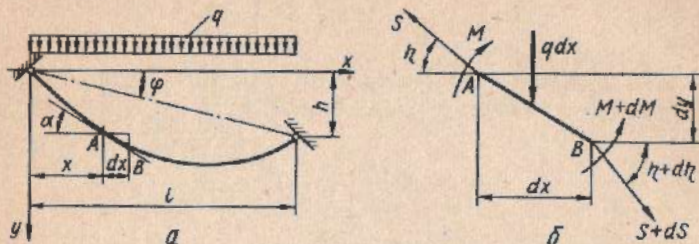


Рис. 1.3. К выводу уравнения оси нити, работающей с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок:
а — расчетная схема; б — элемент нити.

Отсюда

$$\frac{d \operatorname{tg} \eta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 M}{dx^2} \cdot \frac{1}{H}. \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.4), имея в виду, что $\operatorname{tg}(\eta + d\eta) - \operatorname{tg} \eta = d \operatorname{tg} \eta$, находим

$$\frac{d \operatorname{tg} \eta}{dx} = -\frac{q}{H}. \quad (1.6)$$

Приравняв правые части выражений (1.5) и (1.6), получим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 M}{dx^2} \cdot \frac{1}{H} = -\frac{q}{H}. \quad (1.6')$$

Учитывая (1.1), запишем:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -EI \frac{d^4 y}{dx^4}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (1.6'), находим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{EI}{H} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{q}{H},$$

или

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{l^2 H}{4EI} \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{l^2 H}{4EI} \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \frac{q}{H} = 0. \quad (1.7)$$

Заменяя в этом уравнении

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = z; \quad \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}} = u, \quad \text{получаем}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{4u^2}{l^2} z - \frac{4u^2}{l^2} \cdot \frac{q}{H} = 0. \quad (1.8)$$

Общий интеграл этого уравнения

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} = A \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + B \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{q}{H}.$$

Интегрируя дважды это уравнение, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l}{2u} A \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + \frac{l}{2u} B \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} - \frac{q}{H} x + C_3;$$

$$y = \frac{l^2}{4u^2} A \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + \frac{l^2}{4u^2} B \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{qx^2}{2H} + C_3 x + C_4.$$

Изменяя

$$A \frac{l^2}{4u^2} = C_1; \quad B \frac{l^2}{4u^2} = C_2; \quad H = \frac{4u^2 EI}{l^2},$$

получаем:

$$y = C_1 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_2 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_3 x + C_4 - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 EI}; \quad (1.9)$$

$$y' = C_1 \frac{2u}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_2 \frac{2u}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_3 - \frac{ql^2 x}{4u^2 EI} = \operatorname{tg} \alpha; \quad (1.10)$$

$$y'' = C_1 \left(\frac{2u}{l} \right)^2 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{2u}{l} \right)^2 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{ql^2}{4u^2 EI} = -\frac{M}{EI}; \quad (1.11)$$

$$y''' = C_1 \left(\frac{2u}{l} \right)^3 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{2u}{l} \right)^3 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} = -\frac{Q}{EI}. \quad (1.12)$$

Уравнения (1.9) — (1.12) являются общими для всех последующих задач. Постоянные интегрирования C_1 — C_4 в каждом конкретном случае определяются из соответствующих граничных условий.

Дифференциальное уравнение оси нити может быть получено другим путем. Поскольку введено допущение о применимости к нитям конечной жесткости технической теории изгиба балок $M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$, то в статическом отношении нить отождествляется с растянуто-изогнутым стержнем.

При принятой системе координат (см. рис. 1.3) изгибающий момент в произвольном сечении растянуто-изогнутого стержня равен

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} - Hy = M^B - Hy,$$

и дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь вид:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M^B + Hy,$$

где M^B — балочный момент.

Дифференцируя это уравнение дважды, после преобразований получаем (1.7).

Нить, работающая без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузок. Для вывода расчетных зависимостей выре-

жем бесконечно малый отрезок и напишем уравнения равновесия (рис. 1.4)

$$\Sigma M_B = H \operatorname{tg} \eta dx - H(d\bar{y} + dy) - qdx \frac{dx}{2} + M - M - dM = 0; \quad (1.13)$$

$$\Sigma y = -H \operatorname{tg} \eta + qdx + H \operatorname{tg}(\eta + d\eta) = 0. \quad (1.14)$$

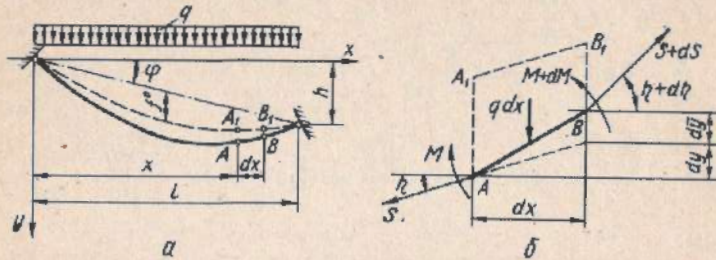


Рис. 1.4. К выводу уравнения оси нити, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузки:
а — расчетная схема; б — элемент нити.

Уравнения (1.14) и (1.4) тождественны, а уравнение (1.13) отличается от уравнения (1.3) на величину $-Hdy$.

При принятых на рис. 1.4 обозначениях ординаты нити при действии равномерно распределенной по всему пролету нагрузки q

$$y = \frac{4f^0 x(l-x)}{l^2} + x \frac{h}{l} = \frac{4f^0 x(l-x)}{l^2} + x \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.15)$$

Выполняя затем операции, подобные изложенным в начале этого параграфа, и учитывая при этом (1.15), получаем дифференциальное уравнение прогибов нити

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} - \frac{l^2 H}{4EI} \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{l^2 H}{4EI} \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \frac{q}{H} + \frac{l^2 H}{4EI} \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \frac{8f^0}{l^2} = 0. \quad (1.16)$$

Заменяя $\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = z$; $\frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}} = u$, получаем

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{4u^2}{l^2} z - \frac{4u^2}{l^2} \cdot \frac{q}{H} + \frac{4u^2}{l^2} \cdot \frac{8f^0}{l^2} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} = A \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + B \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{q}{H} + \frac{8f^0}{l^2}.$$

Интегрируя дважды это выражение и заменяя

$$A \frac{l^2}{4u^2} = C_1; \quad B \frac{l^2}{4u^2} = C_2; \quad H = \frac{4u^2 EI}{l^2}, \text{ находим}$$

$$\bar{y} = C_1 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_2 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_3 x + C_4 - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 EI} - \left[\frac{4f^0 x(l-x)}{l^2} + \frac{x}{l} h \right]; \quad (1.17)$$

$$y' = C_1 \frac{2u}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_2 \frac{2u}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_3 - \frac{ql^2 x}{4u^2 EI} - \left[\frac{4f^0}{l} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) + \frac{h}{l} \right] = \operatorname{tg} \alpha; \quad (1.18)$$

$$y'' = C_1 \left(\frac{2u}{l} \right)^2 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{2u}{l} \right)^2 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} - \frac{ql^2}{4u^2 EI} + \frac{8f^0}{l^2} = -\frac{M}{EI}; \quad (1.19)$$

$$y''' = C_1 \left(\frac{2u}{l} \right)^3 \operatorname{sh} 2u \frac{x}{l} + C_2 \left(\frac{2u}{l} \right)^3 \operatorname{ch} 2u \frac{x}{l} = -\frac{Q}{EI}. \quad (1.20)$$

§ 1.5. Приближенное решение

Из технической теории изгиба балок известно, что величина изгибающего момента в балке пропорциональна ее прогибу. Поэтому если нить конечной жесткости при всех прочих равных с балочной условиях будет иметь прогиб f , то величина изгибающего момента в нити

$$M = M^B \frac{f}{y^B}, \quad (a)$$

где M^B — балочный момент;
 y^B — прогиб балки.

Как известно, при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q в середине пролета шарнирно опертой балки возникает изгибающий момент

$$M^B = \frac{ql^2}{8} \quad (b)$$

и прогиб

$$y^B = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI}. \quad (b)$$

Подставляя (б) и (в) в (а), получим выражение для определения изгибающего момента в середине пролета нити конечной жесткости при действии равномерно распределенной нагрузки

$$M = \frac{48}{5} \cdot \frac{EI f}{l^2}. \quad (г)$$

При этом величина распора будет равна

$$H = \frac{M^B - M}{f}, \quad (д)$$

т. е. будет меньше, чем в гибкой нити, на величину $\frac{M}{f}$.

Подставляя (б) и (г) в (д), получим

$$H = \frac{ql^2}{8f} - \frac{48}{5} \cdot \frac{EI}{l^2}. \quad (e)$$

При действии равномерно распределенной нагрузки q , расположенной по всему пролету, и сосредоточенной силы P , приложенной в середине пролета, выражения (б), (в), (г) и (е) принимают вид:

$$M^B = \frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4}; \quad (б')$$

$$y^B = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} + \frac{Pl^3}{48EI}; \quad (в')$$

$$M = \frac{48}{5} \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{1 + \frac{2P}{ql}}{1 + \frac{8}{5} \cdot \frac{P}{ql}}; \quad (г')$$

$$H = \frac{\frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4}}{f} - \frac{48}{5} \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{1 + \frac{2P}{ql}}{1 + \frac{8}{5} \cdot \frac{P}{ql}}. \quad (е')$$

Аналогично можно получить расчетные формулы и для других схем загрузки.

Отметим, что точность результатов расчета при действии дополнительной нагрузки будет пропорциональна разности между принятой в первом приближении и действительной стрелами провисания нити.

ГЛАВА 2. НИТЬ, РАБОТАЮЩАЯ С ИЗГИБОМ ОТ НАЧАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

§ 2.1. Действие начальной нагрузки

Шарнирное закрепление концов нити. В соответствии с рис. 2.1 запишем условия для определения постоянных интегрирования, входящих в общие уравнения (1.9) — (1.12).

При $x=0$ $y=0$; $M=0$;

$$C_1 + C_4 = 0; \quad (а)$$

$$C_1 - \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^0} = 0. \quad (б)$$

При $x=l$ $y=h$; $M=0$;

$$C_1 \operatorname{ch} 2u^0 + C_2 \operatorname{sh} 2u^0 + C_3 l + C_4 - \frac{ql^4}{8EI} \cdot \frac{1}{u^0} = h; \quad (в)$$

$$C_1 \operatorname{ch} 2u^0 + C_2 \operatorname{sh} 2u^0 - \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^0} = 0. \quad (г)$$

Решая совместно уравнения (а) — (г), находим:

$$C_1 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^0}; \quad (2.1)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0}; \quad (2.2)$$

$$C_3 = \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^0} + \frac{h}{l}; \quad (2.3)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.1) — (2.4) в общие уравнения, получаем следующие расчетные формулы:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^0} \left[u^0 \xi (1 - \xi) - \frac{\operatorname{sh} u^0 \xi \operatorname{sh} u^0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u^0} \right]; \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^0} \left[u^0 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{2} - \frac{\operatorname{sh} u^0 \xi \operatorname{ch} u^0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u^0} \right) \right]; \quad (2.6)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^0} \cdot \frac{\operatorname{sh} u^0 \xi \operatorname{sh} u^0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u^0}; \quad (2.7)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u^0} \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{2} - \frac{\operatorname{sh} u^0 \xi \operatorname{ch} u^0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u^0} \right). \quad (2.8)$$

Здесь и далее $\xi = \frac{x}{l}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{l}$.

В формулы (2.5) — (2.8) входит неизвестный параметр u^0 . Для определения его запишем изгибающий момент в середине пролета из условия равновесия и из выражения (2.7).

Разложим опорные реакции на вертикальные составляющие и составляющие, направленные вдоль линии, соединяющей опоры (см. рис. 2.1). Первые из них будут равны реакциям простой балки с опорами на одном уровне

$$R_A^B = R_B^B = \frac{ql}{2}.$$

Изгибающий момент в середине пролета нити

$$M_{\xi=0.5} = \frac{ql^2}{8} - H^0 f^0,$$

или

$$M_{\xi=0.5} = \frac{ql^2}{8} - \frac{4u^0 EI}{l^2} f^0. \quad (2.9)$$

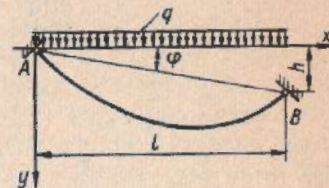


Рис. 2.1. К расчету нити на начальную нагрузку при шарнирном закреплении концов.

Из формулы (2.7) этот же момент будет:

$$M_{\xi=0.5} = \frac{ql^2}{4u^0} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u^0} \right). \quad (2.9')$$

Приравнивая правые части выражений (2.9) и (2.9') и умножая все члены на $\frac{96}{5ql^2u^0}$, получаем:

$$\frac{384EIf^0}{5ql^4} = \frac{24}{5} \left[\frac{1}{2u^0} - \frac{1}{u^0} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u^0} \right) \right]$$

или

$$\Phi = \frac{384EIf^0}{5ql^4} = \frac{\frac{u^0}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u^0}}{\frac{5}{24} u^0}. \quad (2.10)$$

Левая часть этого выражения представляет собой отношение стрелы провисания нити f^0 к прогибу балки такого же пролета, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q . Если этот прогиб равен принятой стреле провисания, то распор H^0 будет равен нулю, а правая часть уравнения (2.10) — единице.

Действительно, учитывая, что

$$u^0 = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H^0}{EI}},$$

получаем:

$$\lim_{u^0 \rightarrow 0} \frac{\frac{u^0}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u^0}}{\frac{5}{24} u^0} = 1.$$

Анализ формулы (2.10) позволяет сделать следующие выводы: если $\Phi < 1$, то рассматриваемая конструкция представляет собой нить;

если $\Phi = 1$, то это — балка, прогиб которой от заданной распределенной нагрузки равен f^0 ;

если $\Phi > 1$, то это — перевернутая арка.

В этом случае для получения стрелы f^0 к стержню необходимо приложить продольное сжимающее усилие.

График зависимости u^0 от левой части уравнения (2.10) приведен на рис. 2.2.

Таким образом, расчет нити конечной жесткости, находящейся под начальной нагрузкой, сводится к вычислению левой части урав-

нения (2.10), куда входят все известные величины, и отысканию параметра u^0 , соответствующего этому значению.

Следует отметить, что уравнение (2.10) совпадает с полученным ранее уравнением для расчета растянуто-изогнутых стержней [7, 49]. Поэтому для определения параметра u^0 можно воспользоваться готовыми таблицами и графиками, приведенными в этих работах.

Напряженно-деформированное состояние нити в произвольном сечении может быть получено подстановкой u^0 в формулы (2.5) — (2.8).

Опорные реакции вычисляются по формулам

$$R_A = \frac{ql}{2} + H^0 \operatorname{tg} \varphi;$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - H^0 \operatorname{tg} \varphi,$$

$$H^0 = \frac{4u^0 EI}{l^2}.$$

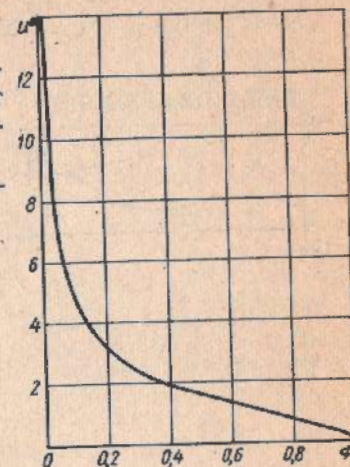


Рис. 2.2. График зависимости $u^0 = f(\Phi)$.

Максимальное осевое усилие в нити на опоре A равно:

$$S^0 = \sqrt{H^0 + R_A^2}.$$

В рассматриваемой задаче возможны два частных случая: когда опоры расположены на одном уровне и когда угол между касательной к оси нити и горизонтом на опоре B равен нулю.

Первый случай отличается от общего лишь тем, что в расчетных формулах следует положить h и $\operatorname{tg} \varphi$ равными нулю.

Второй случай характерен тем, что при заданном превышении одной опоры над другой стрела провисания нити остается неизвестной. В этом случае определить параметр u^0 из уравнения (2.10) не представляется возможным.

Для определения параметра u^0 обратимся к выражению (2.6). Учитывая, что при $\xi = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = 0$, получим уравнение

$$\Phi_1 = \frac{24BI}{ql^4} h = \frac{3}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right). \quad (2.10')$$

Из уравнения (2.10') определяем параметр u^0 . Дальнейший расчет нити ничем не отличается от уже изложенного.

При $u^0 \rightarrow 0$

$$\lim_{u^0 \rightarrow 0} \frac{3}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) = 1.$$

Жесткое закрепление концов нити. В случае жесткого закрепления концов нити (рис. 2.3) условия для определения постоянных интегрирования следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad y^0=0, \quad y^{0'}=0; \\ \text{при } x=l \quad y^0=h, \quad y^{0'}=0. \end{aligned}$$

Подставляя в эти условия значения y и y' из (1.9) — (1.10), получаем следующие выражения постоянных интегрирования:

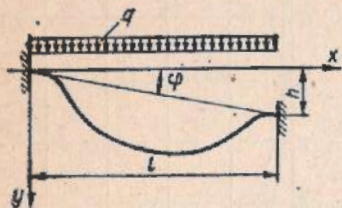


Рис. 2.3. К расчету нити на начальную нагрузку при жестком закреплении концов.

$$C_1 = \frac{h}{2} \cdot \frac{\text{sh } u^0}{u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0} + \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^{0^3} \text{th } u^0}; \quad (2.11)$$

$$C_2 = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\text{ch } u^0}{u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0} - \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^{0^3}}; \quad (2.12)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} \cdot \frac{u^0 \text{ch } u^0}{u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0} + \frac{ql^2}{8EI} \cdot \frac{1}{u^{0^2}}; \quad (2.13)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (2.14)$$

Расчетные формулы имеют вид:

$$y = \frac{ql^4}{384EI} \cdot \frac{48}{u^{0^4}} \left\{ u^{0^2} \xi (1 - \xi) - u^0 \frac{\text{sh } u^{0^2} \xi \text{sh } u^0 (1 - \xi)}{\text{sh } u^0} + \frac{8hEI}{ql^4} u^{0^4} \frac{u^{0^2} \xi \text{ch } u^0 - \text{sh } u^{0^2} \xi \text{ch } u^0 (1 - \xi)}{u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0} \right\}; \quad (2.15)$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{ql^3}{128EI} \cdot \frac{32}{u^{0^3}} \left\{ u^{0^2} \xi - u^0 \frac{\text{sh } u^{0^2} \xi \text{ch } u^0 (1 - \xi)}{\text{ch } u^0} - \frac{8hEI}{ql^4} u^{0^4} \frac{\text{sh } u^{0^2} \xi \text{sh } u^0 (1 - \xi)}{u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0} \right\}; \quad (2.16)$$

$$M = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{6}{u^{0^2}} \left\{ \frac{1}{2} - u^0 \left[\frac{1}{2 \text{th } u^0} - \frac{\text{sh } u^{0^2} \xi \text{sh } u^0 (1 - \xi)}{\text{sh } u^0} \right] - \frac{4hEI}{ql^4} u^{0^4} \frac{\text{sh } u^0 - 2 \text{sh } u^{0^2} \xi \text{ch } u^0 (1 - \xi)}{u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0} \right\}; \quad (2.17)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot 2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u^{0^2} \xi \text{ch } u^0 (1 - \xi)}{\text{sh } u^0} + \frac{4hEI}{ql^4} u^{0^4} \frac{\text{ch } u^0 - 2 \text{sh } u^{0^2} \xi \text{ch } u^0 (1 - \xi)}{u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0} \right\}. \quad (2.18)$$

Входящий в эти формулы параметр u^0 может быть определен из условия, что в середине пролета

$$y = \frac{h}{2} + f^0.$$

Подставляя в это условие значение y из (2.15), после преобразований находим

$$\frac{384f^0 EI}{ql^4} = 24 \left(\frac{1}{2u^{0^2}} - \frac{\text{ch } u^0 - 1}{u^{0^3} \text{sh } u^0} \right). \quad (2.19)$$

В предельном случае

$$\lim_{u^0 \rightarrow 0} 24 \left(\frac{1}{2u^{0^2}} - \frac{\text{ch } u^0 - 1}{u^{0^3} \text{sh } u^0} \right) = 1.$$

2.2. Действие дополнительной нагрузки

Приведенные в предыдущем параграфе формулы могут быть использованы для расчета нити при действии начальной нагрузки. Если же к нити, несущей начальную нагрузку, приложить дополнительную, то одновременно с изменением величины нагрузки изменится и стрела провисания. При этом для определения параметра u потребуется дополнительное условие.

Вспользуемся условием неразрывности деформаций

$$L = L^0 + \Delta L, \quad (2.20)$$

где L — длина нити после приложения дополнительной нагрузки;
 L^0 — длина нити при начальной нагрузке;

ΔL — упругое приращение длины нити, вызванное дополнительной нагрузкой.

С достаточной точностью упругое приращение длины нити может быть вычислено по формуле

$$\Delta L = \int_l \frac{H - H^0}{EF \cos^2 \varphi} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx,$$

где H и H^0 — распор в нити соответственно при суммарной и начальной нагрузках;

EF — жесткость нити на растяжение;

φ — угол наклона линии, соединяющей опоры, к горизонту.

Пренебрегая величиной $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ ввиду ее малости по сравнению с единицей, получаем

$$\Delta L = \frac{(H - H^0) l}{EF \cos^2 \varphi}. \quad (2.21)$$

Выражая H и H^0 через параметры u и u^0 , получаем

$$\Delta L = \frac{4l}{1F \cos^2 \varphi} (u^2 - u^{0^2})$$

или

$$\Delta L = \frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u^{0^2}), \quad (2.22)$$

где r — радиус инерции сечения нити.

Длина нити до и после приложения дополнительной нагрузки определяется по формуле (1.2).

Интеграл, входящий в эту формулу, берется по участкам. Количество участков определяется характером дополнительной нагрузки. Так, при одной сосредоточенной силе будет два участка — слева и справа от точки приложения силы; для равномерной нагрузки, распределенной на части пролета, — три участка: один — в пределах дополнительной нагрузки и два — слева и справа от нее.

На каждом участке определяются четыре постоянных интегрирования, условия для получения которых принимаются в зависимости от типа закрепления концов нити на опорах и характера дополнительной нагрузки.

Подставляя значения длин нити в уравнение (2.20), после преобразований получаем уравнение для вычисления параметра u . Определение ординат и усилий в произвольных сечениях нити производится по формулам (1.9—1.12), в которые подставляются соответствующие значения постоянных интегрирования.

Для наиболее часто встречающихся на практике схем нагружения ниже приведены формулы для расчета нитей при шарнирном жестком закреплении концов на опорах. При этом для второго случая граничных условий рассмотрены два решения: когда жесткое закрепление вводится после и перед приложением начальной нагрузки.

1. Нагрузка, равномерно распределенная по всему пролету

А. Шарнирное закрепление концов нити (рис. 2.4).

Условия для определения постоянных интегрирования:

при $x=0$ $y=0$, $M=0$;

при $x=l$ $y=h$, $M=0$.

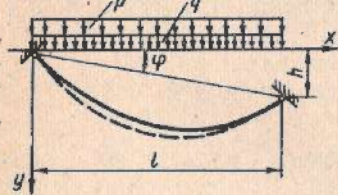


Рис. 2.4. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную по всему пролету, при шарнирном закреплении концов.

Постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{(q+p)^2 l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4}; \quad (2.2)$$

$$C_2 = -\frac{(q+p) l^4}{16EI} \cdot \frac{\text{th } u}{u^4}; \quad (2.2)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{(q+p) l^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (2.2)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (2.2)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 =$$

$$= \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{02}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{02}, \quad (2.27)$$

$$\text{где } \lambda = \frac{r}{f^0}.$$

Расчетные формулы:

$$y = h l + \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p) l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{ch } u} \right]; \quad (2.28)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p) l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\text{th } u}{2} + \frac{\text{sh } u \xi \text{ ch } u (1-\xi)}{\text{ch } u} \right]; \quad (2.29)$$

$$M = \frac{(q+p) l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{ch } u}; \quad (2.30)$$

$$Q = -\frac{(q+p) l}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u \xi \text{ ch } u (1-\xi)}{\text{ch } u} \right]. \quad (2.31)$$

Б. Жесткое закрепление концов нити перед приложением дополнительной нагрузки (рис. 2.5).

Условия для определения постоянных интегрирования:

при $x=0$ $y=0$, $y' = y^{0'}$;

при $x=l$ $y=h$, $y' = y^{0'}$.

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{(q+p) l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{ th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{1}{u^{02}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right]; \quad (2.32)$$

$$C_2 = -\frac{(q+p) l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{1}{u^{02}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right]; \quad (2.33)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{(q+p) l^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (2.34)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (2.35)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] -$$

$$- 2 \frac{q+p}{q} \left[\frac{1}{u^{02}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{u^{02}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 =$$

$$= \frac{1}{u^{04}} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{02}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] -$$

$$- \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{02}. \quad (2.36)$$

Расчетные формулы:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p)l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2\xi(1-\xi) - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right\}; \quad (2.39)$$

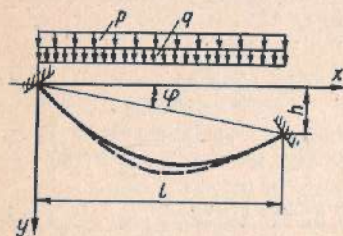


Рис. 2.5. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную по всему пролету, при жестком закреплении концов перед приложением дополнительной нагрузки.

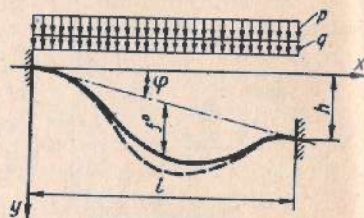


Рис. 2.6. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную по всему пролету, при жестком закреплении концов перед приложением начальной нагрузки.

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p)l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^2}{u^0} \times \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right) \right\}; \quad (2.3)$$

$$M = \frac{(q+p)l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \times \left(\frac{1}{2\text{th } u} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right) \right\}; \quad (2.39)$$

$$Q = \frac{(q+p)l}{2} \cdot \frac{2}{u} \left\{ u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \times \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right] \right\}. \quad (2.40)$$

В. Жесткое закрепление концов нити перед приложением начальной нагрузки (рис. 2.6).

Условия для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad y=0, \quad y'=0; \\ \text{при } x=l \quad y=h, \quad y'=0. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3 \text{th } u} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\text{sh } u}{u \text{ch } u - \text{sh } u}; \quad (2.41)$$

$$C_2 = -\frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\text{ch } u}{u \text{ch } u - \text{sh } u}; \quad (2.42)$$

$$C_3 = \frac{(q+p)l^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{h}{l} \cdot \frac{u \text{ch } u}{u \text{ch } u - \text{sh } u}; \quad (2.43)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (2.44)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h}{24} \Phi n \right)^2 \left[1 + \frac{3u \text{ch } u (u \text{ch } u - \text{sh } u) - u^2 \text{sh }^2 u}{4(u \text{ch } u - \text{sh } u)^2} \text{tg}^2 \varphi \right] + \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \times \\ & \times \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \cdot \left(1 + 4 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\ & = \left(\frac{5}{24} \Phi n \right)^2 \left[1 + \frac{3u^0 \text{ch } u^0 (u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0) - u^0 \text{sh}^2 u^0}{4(u^0 \text{ch } u^0 - \text{sh } u^0)^2} \text{tg}^2 \varphi \right] + \\ & + \frac{1}{u^0} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \left(1 + 4 \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^0. \quad (2.45) \end{aligned}$$

Расчетные формулы:

$$y = h \frac{u\xi \text{ch } u - \text{sh } u\xi \text{ch } u(1-\xi)}{u \text{ch } u - \text{sh } u} + \frac{1}{384} \cdot \frac{(q+p)l^4}{EI} \times \times \frac{48}{u^4} \left[u^2\xi(1-\xi) - u \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right]; \quad (2.46)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi \cdot 2u \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{u \text{ch } u - \text{sh } u} - \frac{(q+p)l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right) \right]; \quad (2.47)$$

$$M = \frac{2hEI}{l^2} \cdot \frac{2 \text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi) - \text{sh } u}{u \text{ch } u - \text{sh } u} u^2 + + \frac{(q+p)l^2}{12} \cdot \frac{6}{u^2} \left[\frac{1}{2} - u \left(\frac{1}{2\text{th } u} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right) \right]; \quad (2.48)$$

$$Q = \frac{4hEI}{l^3} u^3 \frac{\text{ch } u - 2 \text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{u \text{ch } u - \text{sh } u} + + \frac{(q+p)l}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right]. \quad (2.49)$$

2. Сосредоточенная нагрузка

А. Шарнирное закрепление концов нити (рис. 2.7).

Условия для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad y=0, \quad M=0; \\ \text{при } x=a \quad y_a=y_n, \quad y'_a=y'_n, \quad M_a=M_n, \quad Q_a-Q_n=P \cos \alpha; \\ \text{при } x=l \quad y=h, \quad M=0. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования:
на участке $[0-a]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4};$$

$$C_2 = -\frac{ql^3}{16EI} \cdot \frac{\text{th } u}{u^4} - \frac{Pl^3}{8EI} \cdot \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{b}{l}}{u^3 \text{sh } 2u};$$

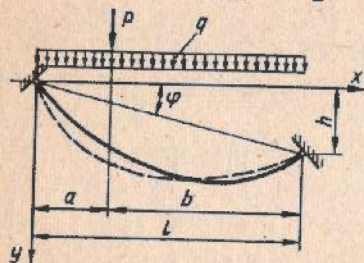


Рис. 2.7. К расчету нити на начальную и дополнительную сосредоточенную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при шарнирном закреплении концов.

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{Pl^3}{4EI} \cdot \frac{\frac{b}{l}}{u^2};$$

$$C_4 = -C_1;$$

на участке $[a-l]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} - \frac{Pl^3}{8EI} \cdot \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{a}{l}}{u^3};$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{\text{th } u}{u^4} + \frac{Pl^3}{8EI} \cdot \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{a}{l}}{u^3 \text{th } 2u};$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{Pl^3}{4EI} \cdot \frac{\frac{a}{l}}{u^2};$$

$$C_4 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} + \frac{Pl^3}{4EI} \cdot \frac{\frac{a}{l}}{u^2}.$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \cdot \frac{4}{u^4} \left[2 \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \right. \\ & \left. + \frac{\text{th } u}{u} \cdot \frac{\frac{a}{l} \text{sh } 2u \cdot \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh } 2u \cdot \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} - \frac{2}{u^2} \left(1 - \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{a}{l} + \text{sh } 2u \cdot \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$(2.51) \quad + \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \frac{2}{u^4} \left[2 \left(2 \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \frac{\frac{a}{l} \text{sh}^2 2u \cdot \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh}^2 2u \cdot \frac{a}{l}}{\text{sh}^2 2u} \right) - \right.$$

$$(2.51) \quad \left. \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{a}{l} \text{sh } 2u \cdot \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{1}{u^0} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{u^{02}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{02}. \quad (2.58)$$

Расчетные формулы:
на участке $[0-a]$:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] +$$

$$+ \frac{Pl^3}{48EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left(2u \cdot \frac{b}{l} \xi - \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u\xi \right); \quad (2.59)$$

$$(2.52) \quad u = \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left(\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right) \right] +$$

$$(2.53) \quad + \frac{Pl^3}{16EI} \cdot \frac{4}{u^2} \left(\frac{b}{l} - \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u\xi \right); \quad (2.60)$$

$$M = \frac{ql^3}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} + \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{u} \cdot \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u\xi; \quad (2.61)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left(\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right) + P \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u\xi; \quad (2.62)$$

на участке $[a-l]$:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] +$$

$$+ \frac{Pl^3}{48EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[2u \cdot \frac{a}{l} (1-\xi) - \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u(1-\xi) \right]; \quad (2.63)$$

$$u = \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left(\frac{\frac{5}{2} \text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right) \right] -$$

$$- \frac{Pl^3}{16EI} \cdot \frac{4}{u^2} \left[\frac{a}{l} - \frac{\text{sh } 2u \cdot \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u(1-\xi) \right]; \quad (2.64)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} + \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{u} \cdot \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{sh } 2u(1-\xi); \quad (2.6)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \cdot \left(\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right) - P \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ch } 2u(1-\xi). \quad (2.6)$$

Б. Жесткое закрепление концов нити перед приложением дополнительной нагрузки (рис. 2.8).

Условия для определения постоянных интегрирования:
при $x=0$ $y=0$, $y'=y^0$;
при $x=a$ $y_n=y_n$, $y_n'=y_n'$, $M_n=M_n$, $Q_n-Q_n=P \cos \alpha$;
при $x=l$ $y=h$, $y'=y^0$.

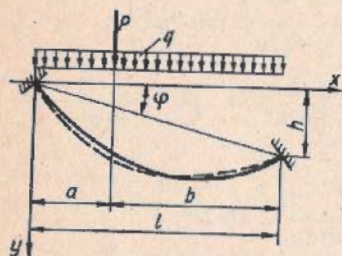


Рис. 2.8. К расчету нити на начальную и дополнительную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при жестком закреплении концов перед приложением дополнительной нагрузки.

Постоянные интегрирования:
на участке $[0-a]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{ th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] + \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\text{sh } u \frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l}}{u^3 \text{ sh } u} - \frac{\frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{ sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u^2 (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \right]; \quad (2.67)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\text{sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l}}{u^3 \text{ sh } u} - \frac{\frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{ sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u^2 \text{ th } u (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \right]; \quad (2.68)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{Pl^2}{4EI} \left[\frac{\text{sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l}}{u^2 \text{ sh } u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{ sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u \text{ th } u (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \right]; \quad (2.69)$$

$$C_4 = -C_1; \quad (2.70)$$

на участке $[a-l]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{ th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{u^3} - \frac{\text{sh } u \frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l}}{u^2 \text{ sh } u} + \frac{\frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{ sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u^2 (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \right]; \quad (2.71)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] + \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\text{ch } 2u \frac{a}{l}}{u^3} - \frac{\text{sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l}}{u^2 \text{ sh } u} + \frac{\frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{ sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u^2 \text{ th } u (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \right]; \quad (2.72)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{Pl^2}{4EI} \left[\frac{\text{sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u^2 \text{ sh } u} + \frac{\frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{ sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u \text{ th } u (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \right]; \quad (2.73)$$

$$C_4 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{ th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] + \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{2 \frac{a}{l}}{u^2} - \frac{\text{sh } u \frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l}}{u^3 \text{ sh } u} + \frac{\frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{ sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u^2 (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \right]. \quad (2.74)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - 2 \left[\frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \times \\ \times \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \left[\frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right]^2 \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \left\{ \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \right) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \frac{3}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \left. \right] - \\
& - 2 \left[\frac{1}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \cdot \frac{2}{u^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{sh} u} \right] + \\
& + \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \frac{4}{u^2} \left\{ - \left(\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right)^2 \times \right. \\
& \times \left(1 + \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{1}{u} \cdot \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times \\
& \times \left[\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{\operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} - 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} \right] + \\
& + \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} + 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} + \right. \\
& + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2 u} + 2 \left(\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right)^2 \left. \right] - \\
& - \frac{3}{u^3} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \left. \right\} - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\
& = \frac{1}{u^0} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^0. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

Расчетные формулы:
на участке $[0-a]$:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2 \xi (1 - \xi) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right\} + \frac{Pl^3}{192EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left\{ u \xi \frac{\frac{b}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \right. \\
& - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \\
& \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left. \right\}; \quad (2.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\
\times \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) + \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{8}{u^2} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right. \\
\left. \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (2.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\
\times \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \left. \right\} + \\
+ \frac{Pl}{8} \cdot \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right. \\
- \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \\
\times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left. \right\}; \quad (2.78)
\end{aligned}$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] +$$

$$+ P \cdot 2 \left\{ - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{2 \operatorname{sh} u} - \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (2.79)$$

на участке $[a-l]$:

$$y = h \xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5 u^3} \left\{ u^2 \xi (1 - \xi) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right\} + \frac{P l^3}{192 EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left\{ u \frac{a}{l} - u \xi \frac{u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (2.80)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{q l^3}{24 EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right\} + \frac{P l^3}{16 EI} \cdot \frac{8}{u^2} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (2.81)$$

$$M = \frac{q l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{P l}{8} \cdot \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (2.82)$$

$$Q = \frac{q l}{2} \cdot \frac{2}{u} \left\{ 1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right\} \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \\ - P \cdot 2 \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}. \quad (2.83)$$

В. Жесткое закрепление концов нити перед приложением начальной нагрузки (рис. 2.9).

Условия для определения постоянных интегрирования:
при $x=0$ $y=0$, $y'=0$;
при $x=a$ $y_a=y_n$, $y'_a=y'_n$, $M_a=M_n$; $Q_a-Q_n=P \cos \alpha$;
при $x=l$ $y=h$, $y'=0$.

Постоянные интегрирования:
на участке $[0-a]$:

$$C_1 = \frac{h}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} + \frac{q l^4}{16 EI} \cdot \frac{1}{u^3 \operatorname{th} u} + \frac{P l^3}{8 EI} \times \\ \times \left[\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} - \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right]; \quad (2.84)$$

$$C_2 = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3} - \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} - \frac{1}{u^2 \operatorname{th} u} \cdot \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (2.8)$$

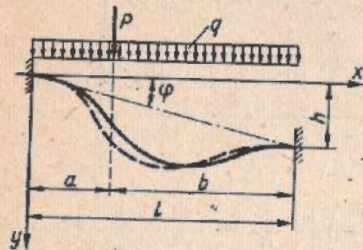


Рис. 2.9. К расчету нити на начальную и дополнительную сосредоточенную нагрузку, расположенную в произвольном месте пролета, при жестком закреплении концов перед приложением начальной нагрузки.

$$C_3 = \frac{h}{l} \cdot \frac{u \operatorname{ch} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{Pl^3}{4EI} \left[\frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u^2 \operatorname{sh} u} - \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right]; \quad (2.8)$$

$$C_4 = -C_1 \quad (2.8)$$

на участке $[a-l]$:

$$C_1 = \frac{h}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} + \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3 \operatorname{th} u} - \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{u^3} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right]; \quad (2.8)$$

$$C_2 = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3} - \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{u^3} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 \operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right]; \quad (2.8)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} \cdot \frac{u \operatorname{ch} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{Pl^3}{4EI} \left[\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 \operatorname{sh} u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right]; \quad (2.9)$$

$$C_4 = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3 \operatorname{th} u} + \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{2 \frac{a}{l}}{u^2} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right]. \quad (2.91)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\left(\frac{5}{24} \Phi n \right)^2 \left[1 + \frac{3u \operatorname{ch} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u) - u^3 \operatorname{sh}^2 u}{4 (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right] + \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \left\{ \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \frac{3}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right] + \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ - \left(\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right)^2 \times \right. \right. \\ \times \left(1 + \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{1}{u} \cdot \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times \\ \left. \left[\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{\operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} - 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{u^3} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} + 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2 u} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \left(\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right)^2 \right] - \frac{3}{u^3} \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right\} - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\ = \left(\frac{5}{24} \Phi n \right)^2 \left[1 + \frac{3u^0 \operatorname{ch} u^0 (u^0 \operatorname{ch} u^0 - \operatorname{sh} u^0) - u^{0^3} \operatorname{sh}^2 u^0}{4 (u^0 \operatorname{ch} u^0 - \operatorname{sh} u^0)^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right] + \\ + \frac{1}{u^{0^4}} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^3}. \quad (2.92)$$

Расчетные формулы:
на участке [0— a]:

$$y = h \frac{u \xi \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} + \frac{1}{384} \cdot \frac{q l^4}{EI} \cdot \frac{48}{u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \right] + \frac{P l^3}{192 EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left[u \xi \frac{u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (2.94)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} 2u + \frac{q l^3}{24 EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right] + \frac{P l^3}{16 EI} \cdot \frac{8}{u^2} \left[\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (2.95)$$

$$M = \frac{2 h E I}{l^2} \cdot \frac{2 \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi) - \operatorname{sh} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} u^2 + \frac{q l^2}{12} \cdot \frac{6}{u^2} \left[\frac{1}{2} - u \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right] + \frac{P l}{8} \cdot \frac{8}{u} \left[\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (2.96)$$

$$Q = \frac{4 h E I}{l^3} \cdot \frac{\operatorname{ch} u - 2 \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} u^3 + \frac{q l}{2} \cdot \frac{2}{u} u \left[\frac{1}{2} - \right.$$

$$\left. \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + P \cdot 2 \left\{ - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{2 \operatorname{sh} u} - \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (2.96)$$

на участке [a — l]:

$$y = h \frac{u \xi \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} + \frac{1}{384} \cdot \frac{q l^4}{EI} \cdot \frac{48}{u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \right] + \frac{P l^3}{192 EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left\{ u \frac{a}{l} - \frac{u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (2.97)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} 2u + \frac{q l^3}{24 EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right] + \frac{P l^3}{16 EI} \cdot \frac{8}{u^2} \left[\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (2.98)$$

$$M = \frac{2 h E I}{l^2} \cdot \frac{2 \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi) - \operatorname{sh} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} u^2 + \frac{q l^2}{12} \cdot \frac{6}{u^2} \left[\frac{1}{2} - u \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right] + \frac{P l}{8} \cdot \frac{8}{u} \left[\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \\ & \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \end{aligned} \right\}; \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} Q = & \frac{4hEI}{l^3} \cdot \frac{\operatorname{ch} u - 2 \operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} u^3 + \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{1}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - P \cdot 2 \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ & \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

3. Нагрузка, равномерно распределенная на участке пролета.

А. Шарнирное закрепление концов нити (рис. 2.10).

Условия для определения постоянных интегрирования:

при $x=0$ $y=0$, $M=0$;

при $x=a-c$ $y_n=y_n$, $y_n'=y_n'$, $M_n=M_n$, $Q_n=Q_n$;

при $x=a+c$ $y_n=y_n$, $y_n'=y_n'$, $M_n=M_n$, $Q_n=Q_n$;

при $x=l$ $y=h$, $M=0$.

Постоянные интегрирования:
на участке $[0-(a-c)]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4}; \quad (2.10)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{\operatorname{th} u}{u^4} - \frac{pl^4}{8EI} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l}}{u^4 \operatorname{sh} 2u}; \quad (2.10)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{pl^3}{2EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (2.10)$$

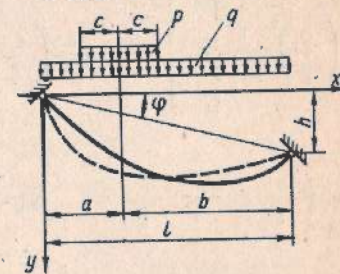
$$C_4 = -C_1; \quad (2.10)$$

на участке $[(a-c)-(a+c)]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} + \frac{pl^4}{16EI} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2u \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right)}{u^4}; \quad (2.105)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{\operatorname{th} u}{u^4} - \frac{pl^4}{16EI} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2u \operatorname{ch} 2u \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) - \operatorname{ch} 2u \left(\frac{b}{l} - \frac{c}{l} \right)}{u^4 \operatorname{sh} 2u}; \quad (2.106)$$

Рис. 2.10. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную на участке пролета, при шарнирном закреплении концов.



$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \left(\frac{a}{l} - 2 \frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l} + \frac{c}{l} \right) \frac{pl^3}{4EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (2.107)$$

$$C_4 = -\frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right)^2 \frac{pl^4}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (2.108)$$

на участке $[(a+c)-l]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} - \frac{pl^4}{8EI} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l}}{u^4}; \quad (2.109)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{\operatorname{th} u}{u^4} + \frac{pl^4}{8EI} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l}}{u^4 \operatorname{th} 2u}; \quad (2.110)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{pl^3}{2EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (2.111)$$

$$C_4 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} + \frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{pl^4}{2EI} \cdot \frac{1}{u^2}. \quad (2.112)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{u^4} \left\{ 16 \left(\frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\left(\frac{c}{l} \right)^3}{3} \right) + \frac{4}{u^2} \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{th} u}{\operatorname{sh} 2u} \left(\frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{u^2} \cdot \frac{c}{l} \left[4 + \operatorname{ch} 2u \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{th} u}{\operatorname{sh} 2u} \left(\operatorname{ch} 2u \cdot \frac{a}{l} + \operatorname{ch} 2u \cdot \frac{b}{l} \right) \right] + \\
& + \frac{5}{u^3} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{c}{l} \left(\frac{\operatorname{sh} 2u \cdot \frac{a}{l} + \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} + \operatorname{ch} 2u \cdot \frac{a}{l} - \operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{a}{l} \right) \Bigg] + \\
& + \left(\frac{p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[32 \left[\frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} \left(\frac{c}{l} \right)^2 - \frac{\left(\frac{c}{l} \right)^3}{3} \right] + \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh}^2 2u} \times \right. \\
& \times \left(\frac{a}{l} \operatorname{sh}^2 2u \cdot \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh}^2 2u \cdot \frac{a}{l} \right) - \frac{2}{u^2} \cdot \frac{c}{l} \left[\frac{\operatorname{sh}^2 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh}^2 2u} \times \right. \\
& \times \left(2 \operatorname{ch} 2u \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{b}{l} + \operatorname{sh}^2 2u \cdot \frac{a}{l} + \operatorname{sh}^2 2u \cdot \frac{b}{l} \right) + \\
& + \frac{\operatorname{ch}^2 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh}^2 2u} \left(2 \operatorname{ch} 2u \operatorname{ch} 2u \cdot \frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \cdot \frac{b}{l} - \operatorname{ch}^2 2u \cdot \frac{a}{l} - \operatorname{ch}^2 2u \cdot \frac{b}{l} \right) - \\
& - 4 \left(\frac{\operatorname{sh} 2u \cdot \frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{c}{l} \operatorname{ch} 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh} 2u} - 1 \right) \Bigg] + \frac{5}{u^3} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{c}{l} \times \\
& \times \left(\operatorname{ch} 2u \cdot \frac{c}{l} - 2 \frac{\operatorname{sh} 2u \cdot \frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \right) \Bigg] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\
& = \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^4} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2. \quad (2.113)
\end{aligned}$$

Расчетные формулы:
на участке $[0-(a-c)]$:

$$\begin{aligned}
y &= h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] + \\
& + \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[4u^2 \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \xi - \frac{\operatorname{sh} 2u \cdot \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{sh} 2u \xi \right]; \quad (2.114) \\
\operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\operatorname{th} u}{2} + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{pl^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[2u \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} - \frac{\operatorname{sh} 2u \cdot \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{ch} 2u \xi \right]; \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{ch} u} + \\
& + \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \cdot \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{sh} 2u \xi; \quad (2.116)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] + \\
& + \frac{pl}{2} \cdot \frac{2}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \cdot \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \cdot \frac{c}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{ch} 2u \xi; \quad (2.117)
\end{aligned}$$

на участке $[(a-c)-(a+c)]$:

$$\begin{aligned}
y &= h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] + \\
& + \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EI} \cdot \frac{24}{5u^4} \left\{ 2u^2 \left[2 \left(\frac{a}{l} + \frac{c}{l} - 2 \frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l} \right) \xi - \xi^2 - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right)^2 \right] - \right. \\
& \left. \left[1 - \frac{\operatorname{ch} 2u \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \operatorname{sh} 2u (1-\xi) + \operatorname{ch} 2u \left(\frac{b}{l} - \frac{c}{l} \right) \operatorname{sh} 2u \xi}{\operatorname{sh} 2u} \right] \right\}; \quad (2.118)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\operatorname{th} u}{2} + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] + \\
& + \frac{pl^3}{24EI} \cdot \frac{3}{u^3} \left\{ 2u \left[\left(\frac{a}{l} + \frac{c}{l} - 2 \frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l} \right) \xi - \right. \right. \\
& \left. \left. \operatorname{ch} 2u \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \operatorname{ch} 2u (1-\xi) - \operatorname{ch} 2u \left(\frac{b}{l} - \frac{c}{l} \right) \operatorname{ch} 2u \xi \right] \right\}; \quad (2.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{ch} u} + \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{2}{u^2} \times \\
& \times \left[1 - \frac{\operatorname{ch} 2u \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \operatorname{sh} 2u (1-\xi) + \operatorname{ch} 2u \left(\frac{b}{l} - \frac{c}{l} \right) \operatorname{sh} 2u \xi}{\operatorname{sh} 2u} \right]; \quad (2.120)
\end{aligned}$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u \xi \text{ ch } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] +$$

$$+ \frac{pl}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{\text{ch } 2u \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \text{ch } 2u (1 - \xi) - \text{ch } 2u \left(\frac{b}{l} - \frac{c}{l} \right) \text{ch } 2u \xi}{\text{sh } 2u}; \quad (2.12)$$

на участке $[(a+c) - l]$:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + \frac{5}{384} \times$$

$$\times \frac{pl^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[4u^2 \frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l} (1 - \xi) - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} \text{ sh } 2u \frac{c}{l}}{\text{sh } 2u} - \text{sh } 2u (1 - \xi) \right]; \quad (2.122)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\text{th } u}{2} + \frac{\text{sh } u \xi \text{ ch } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] -$$

$$- \frac{pl^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[2u \frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l} - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} \text{ sh } 2u \frac{c}{l}}{\text{sh } 2u} - \text{ch } 2u (1 - \xi) \right]; \quad (2.123)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} +$$

$$+ \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} \text{ sh } 2u \frac{c}{l}}{\text{sh } 2u} - \text{sh } 2u (1 - \xi); \quad (2.124)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u \xi \text{ ch } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] -$$

$$- \frac{pl}{2} \cdot \frac{2}{u} \cdot \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} \text{ sh } 2u \frac{c}{l}}{\text{sh } 2u} - \text{ch } 2u (1 - \xi). \quad (2.125)$$

Б. Жесткое закрепление концов нити перед приложением дополнительной нагрузки (рис. 2.11).

Условия для определения постоянных интегрирования:

при $x=0$ $y=0, y'=y_0';$
 при $x=a-c$ $y_a=y_n, y'_a=y'_n, M_a=M_n, Q_a=Q_n;$
 при $x=a+c$ $y_a=y_n, y'_a=y'_n, M_a=M_n, Q_a=Q_n;$
 при $x=l$ $y=h, y'=y_0';$

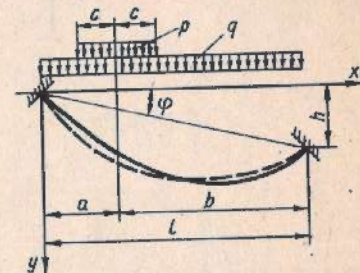
Постоянные интегрирования:
 на участке $[0 - (a-c)]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{ th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] + \frac{pl^4}{16EI} \times$$

$$\times \frac{1}{u^2 (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \left[\frac{1}{\text{sh } u} \left(2 \frac{c}{l} - \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } 2u \frac{b}{l}}{u} \right) + 4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{ sh } u - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right]; \quad (2.126)$$

Рис. 2.11. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную на участке пролета, при жестком закреплении концов перед приложением дополнительной нагрузки.



$$C_2 = - \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \frac{pl^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^2 (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \times$$

$$\times \left[4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{ ch } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right]; \quad (2.127)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{pl^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \times$$

$$\times \left[4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{ ch } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right]; \quad (2.128)$$

$$C_4 = -C_1; \quad (2.129)$$

на участке $[(a-c) - (a+c)]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{ th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] + \frac{pl^4}{16EI} \left\{ \frac{\text{ch } 2u \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right)}{u^4} + \right.$$

$$+ \frac{1}{u^2 (u \text{ ch } u - \text{sh } u)} \left[\frac{1}{\text{sh } u} \left(2 \frac{c}{l} - \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } 2u \frac{b}{l}}{u} \right) + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{ sh } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right] \}; \quad (2.130)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \frac{pl^4}{16EI} \left[\frac{\text{sh } 2u \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right)}{u^4} + \frac{1}{u^2 (u \text{ch } u - \text{sh } u)} \left[4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{ch } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right] \right]; \quad (2.131)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{pl^3}{8EI} \left[2 \frac{\frac{a}{l} - \frac{c}{l}}{u^2} + \frac{1}{u (u \text{ch } u - \text{sh } u)} \times \left[4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{ch } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right] \right]; \quad (2.132)$$

$$C_4 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \frac{pl^4}{16EI} \left[2 \frac{\left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right)^2}{u^2} + \frac{1}{u^4} + \frac{1}{u^2 (u \text{ch } u - \text{sh } u)} \left[\frac{1}{\text{sh } u} \left(2 \frac{c}{l} - \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } 2u \frac{b}{l}}{u} \right) + 4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{sh } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right] \right]; \quad (2.133)$$

на участке $[(a+c)-l]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \frac{pl^4}{16EI} \left[2 \frac{\text{sh } 2u \frac{c}{l} \text{sh } 2u \frac{a}{l}}{u^4} - \right.$$

$$- \frac{1}{u^2 (u \text{ch } u - \text{sh } u)} \left[\frac{1}{\text{sh } u} \left(2 \frac{c}{l} - \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } 2u \frac{b}{l}}{u} \right) + 4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{sh } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right] \right]; \quad (2.134)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] + \frac{pl^4}{16EI} \left[2 \frac{\text{sh } 2u \frac{c}{l} \text{ch } 2u \frac{a}{l}}{u^4} - \frac{1}{u^2 (u \text{ch } u - \text{sh } u)} \left[4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{ch } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right] \right]; \quad (2.135)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{pl^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u (u \text{ch } u - \text{sh } u)} \times \left[4 \frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{ch } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u}{u} - \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{sh } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right]; \quad (2.136)$$

$$C_4 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \text{th } u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] + \frac{pl^4}{16EI} \left[8 \frac{\frac{a}{l} \cdot \frac{c}{l}}{u^2} - \frac{1}{u^2 (u \text{ch } u - \text{sh } u)} \left[\frac{1}{\text{sh } u} \left(2 \frac{c}{l} - \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } 2u \frac{b}{l}}{u} \right) + 4 \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} \text{sh } u - 2 \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u}{u} + \text{sh } 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch } u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{u^2} \right] \right]; \quad (2.137)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\frac{1}{u^4} \left[1 \frac{2}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 + 4 \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - 2 \left[\frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \times \times \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 + 2 \frac{\text{th } u}{u} \right) \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \left[\frac{1}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right]^2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] + \frac{p}{q} \left[\frac{1}{u^4} \left\{ 16 \left(\frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l} - \frac{\left(\frac{c}{l} \right)^3}{3} \right) \right. \right. \\
& + \frac{4}{u^2} \text{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{th} u}{\text{sh} 2u} \left(\frac{a}{l} \text{sh} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh} 2u \frac{a}{l} \right) - \frac{4}{u^2} \cdot \frac{c}{l} \times \\
& \times \left[4 + \text{ch} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{th} u}{\text{sh} 2u} \left(\text{ch} 2u \frac{a}{l} + \text{ch} 2u \frac{b}{l} \right) \right] + \frac{5}{u^3} \text{sh} 2u \frac{c}{l} \times \\
& \times \left(\frac{\text{sh} 2u \frac{a}{l} + \text{sh} 2u \frac{b}{l}}{\text{sh} 2u} + \text{ch} 2u \frac{a}{l} - \text{th} u \text{sh} 2u \frac{a}{l} \right) \left. \right\} + \frac{2}{u^4 \text{th} u} \times \\
& \times \left[2u \frac{c}{l} - \text{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \right] \left[\left(\frac{\text{th} u}{u} \right)^3 - \frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] - \\
& - \frac{2}{u^6 \text{th} u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \left[2u \frac{c}{l} \left[2 + \text{ch} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \right] - \right. \\
& - \text{sh} 2u \frac{c}{l} \left[\frac{2u \frac{a}{l} \text{ch} 2u \frac{b}{l} + 2u \frac{b}{l} \text{ch} 2u \frac{a}{l}}{\text{sh} 2u} + \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \right] \times \\
& \times \left(3 - \frac{2u}{\text{sh} 2u} \right) \left. \right\} + \frac{2}{u^3 \text{th}^3 u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \left[2u \frac{c}{l} - \right. \\
& - \text{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \left. \right] \left[\left(\frac{\text{th} u}{u} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] + \\
& + 2 \left[\frac{1}{u^0 \text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] \left(\frac{1}{u^4 \text{th} u} \left[2u \frac{c}{l} \left[2 + \text{ch} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \right] - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \text{sh} 2u \frac{c}{l} \left[\frac{2u \frac{a}{l} \text{ch} 2u \frac{b}{l} + 2u \frac{b}{l} \text{ch} 2u \frac{a}{l}}{\text{sh} 2u} + \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \right] \times \\
& \times \left(3 - \frac{2u}{\text{sh} 2u} \right) \left. \right\} - \frac{1}{u \text{th}^2 u} \left[2u \frac{c}{l} - \text{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \right] \times \\
& \times \left[\left(\frac{\text{th} u}{u} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] + \left(\frac{p}{q} \right)^2 \left[\frac{1}{u^4} \left\{ 32 \left[\frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} \left(\frac{c}{l} \right)^2 - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{c}{l} \right)^3 \right] + \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh}^2 2u \frac{c}{l}}{\text{sh}^2 2u} \left(\frac{a}{l} \text{sh}^2 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh}^2 2u \frac{a}{l} \right) - \right. \right. \\
& - \frac{2}{u^2} \cdot \frac{c}{l} \left[\frac{\text{sh}^2 2u \frac{c}{l}}{\text{sh}^2 2u} \left(2 \text{ch} 2u \text{sh} 2u \frac{a}{l} \text{sh} 2u \frac{b}{l} + \text{sh}^2 2u \frac{a}{l} + \text{sh}^2 2u \frac{b}{l} \right) + \right. \\
& + \frac{\text{ch}^2 2u \frac{c}{l}}{\text{sh}^2 2u} \left(2 \text{ch} 2u \text{ch} 2u \frac{a}{l} \text{ch} 2u \frac{b}{l} - \text{ch}^2 2u \frac{a}{l} - \text{ch}^2 2u \frac{b}{l} \right) - \\
& - 4 \left(\frac{\text{sh} 2u \frac{a}{l} \text{sh} 2u \frac{b}{l} \text{sh} 2u \frac{c}{l} \text{ch} 2u \frac{c}{l}}{\text{sh} 2u} - 1 \right) \left. \right\} + \\
& + \frac{5}{u^3} \text{sh} 2u \frac{c}{l} \left(\text{ch} 2u \frac{c}{l} - 2 \frac{\text{sh} 2u \frac{a}{l} \text{sh} 2u \frac{b}{l} \text{sh} 2u \frac{c}{l}}{\text{sh} 2u} \right) \left. \right\} - \\
& - \frac{1}{u^2 \text{th} u} \left(\left[2u \frac{c}{l} - \text{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \right] \left[2u \frac{c}{l} \left[2 + \right. \right. \right. \\
& + \text{ch} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\text{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\text{ch} u} \left. \right] - \text{sh} 2u \frac{c}{l} \left[\frac{2u \frac{a}{l} \text{ch} 2u \frac{b}{l} + 2u \frac{b}{l} \text{ch} 2u \frac{a}{l}}{\text{sh} 2u} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{ch} u} \left(3 - \frac{2u}{\operatorname{sh} 2u} \right) \left] \right\} + \frac{u \operatorname{th}^2 u}{u - \operatorname{th} u} \left[2u \frac{c}{l} \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) - \right. \\
& - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \left] \left\{ 2u \frac{c}{l} \left[2 \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) + \operatorname{ch} 2u \frac{c}{l} \times \right. \right. \\
& \times \frac{\operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \left] + \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \left[\frac{2u \frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} - 2u \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \right. \right. \\
& - 3 \frac{\operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \left] \right\} + \frac{1}{u^6} \left\{ \left(\frac{u}{\operatorname{th} u} \right)^2 \left[2u \frac{c}{l} - \right. \right. \\
& - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{ch} u} \left] \right\}^2 \left[\left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\
& - \frac{\operatorname{th} u}{u^3} \left[\frac{u^3}{u - \operatorname{th} u} \left(2u \frac{c}{l} \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \right) \right]^2 \times \\
& \times \left[\frac{\operatorname{th} u}{u} + \frac{\operatorname{th} u}{u^3} - \frac{1}{u \operatorname{th} u} - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] \left] \right\} - \\
& - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{1}{u^0} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \right. \\
& - \frac{5}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \left] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^0. \quad (2.138)
\end{aligned}$$

Расчетные формулы:
на участке $[0 - (a - c)]$:

$$\begin{aligned}
y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2 \xi (1 - \xi) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\
\left. \times \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right\} + \frac{1}{384} \cdot \frac{p l^4}{EI} \cdot \frac{48}{u^4} \left\{ 2u \frac{c}{l} \left[u \xi - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \left] - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh}^2 u \xi + \right. \\
& + \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi) - u \xi \operatorname{ch} u) + \right. \\
& + \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (u \xi + u \operatorname{sh}^2 u \xi - \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi) \left] \right\}; \quad (2.139) \\
& u = \operatorname{tg} \varphi + \frac{q l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\
& \left. \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \frac{p l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} - \right. \\
& - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi - \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times \\
& \times \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi) - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \times \right. \\
& \times \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (u \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi - \operatorname{sh}^2 u \xi) \left] \right\}; \quad (2.140)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M = \frac{q l^3}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right. \right. \\
\left. \left. \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} - \frac{p l^2}{12} \cdot \frac{6}{u^2} \left\{ 2u \frac{c}{l} \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \right. \\
- \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \cdot \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sh}^2 u \xi \right) - \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times \\
\times \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) - \right. \\
\left. \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \left(\frac{1}{2} u + u \operatorname{sh}^2 u \xi - \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi \right) \right] \right\}; \quad (2.141)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \frac{q l}{2} \cdot \frac{2}{u} u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\
+ \frac{p l}{2} \cdot \frac{2}{u} \left\{ 2u \frac{c}{l} \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi - \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right) - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sh}^2 u \xi - u \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi \right) \right] ; \quad (2.141)$$

на участке $[(a-c)-(a+c)]$:

$$y = h \xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5 u^4} \left\{ u^2 \xi (1-\xi) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right\} + \frac{1}{384} \cdot \frac{p l^4}{EI} \cdot \frac{48}{u^4} \left\{ -u^2 \left[\xi - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \operatorname{sh}^2 u \left[\xi - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \right] + 2u \frac{c}{l} \left[u \xi - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \cdot \operatorname{sh}^2 u \xi + \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi) - u \xi \operatorname{ch} u) + \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (u \xi + u \operatorname{sh}^2 u \xi - \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi) \right] \right\} ; \quad (2.143)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{q l^3}{24 EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \frac{p l^3}{24 EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ -u \left[\xi - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} u \left[\xi - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \right] \operatorname{ch} u \left[\xi - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \right] + 2u \frac{c}{l} \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi - \right. \\ \left. - \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (u \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi - \operatorname{sh}^2 u \xi) \right] \right\} ; \quad (2.144)$$

$$M = \frac{q l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} - \frac{p l^2}{24} \cdot \frac{12}{u^2} \left\{ \operatorname{sh}^2 u \left[\xi - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2u \frac{c}{l} \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sh}^2 u \xi \right) - \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right) - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{2} u + u \operatorname{sh}^2 u \xi - \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi \right) \right] \right\} ; \quad (2.145)$$

$$Q = \frac{q l}{2} \cdot \frac{2}{u} u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + \frac{p l}{2} \cdot \frac{2}{u} \left\{ -\operatorname{sh} u \left[\xi - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \right] \operatorname{ch} u \left[\xi - \left(\frac{a}{l} - \frac{c}{l} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2u \frac{c}{l} \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi - \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right) - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sh}^2 u \xi - u \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi \right) \right] \right\} ; \quad (2.146)$$

на участке $[(a+c)-l]$:

$$y = h \xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5 u^4} \left\{ u^2 \xi (1-\xi) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right\} + \frac{1}{384} \cdot \frac{p l^4}{EI} \cdot \frac{48}{u^4} \left\{ 2u \frac{c}{l} \left[u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + u (1-\xi) - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \left[2 \operatorname{sh} u \left(\xi - \frac{a}{l} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} ;$$

$$\times \left[\operatorname{ch} u \left(\xi - \frac{a}{l} \right) - \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh}^2 u \xi \right] + \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times$$

$$\times \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi) - u \xi \operatorname{ch} u) + \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (u \xi + u \operatorname{sh}^2 u \xi - \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi) \right] \}; \quad (2.147)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \left. - \frac{pl^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ 2u \frac{c}{l} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right. \right.$$

$$- \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \left[1 + 2 \operatorname{sh}^2 u \left(\xi - \frac{a}{l} \right) - \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi \right] +$$

$$+ \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) (u \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi - \operatorname{sh}^2 u \xi) \right] \}; \quad (2.148)$$

$$M = \frac{ql^3}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \left. - \frac{pl^2}{12} \cdot \frac{6}{u^2} \left\{ 2u \frac{c}{l} \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right. \right.$$

$$+ \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \left[2 \operatorname{sh} u \left(\xi - \frac{a}{l} \right) \operatorname{ch} u \left(\xi - \frac{a}{l} \right) - \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sh}^2 u \xi \right) \left. - \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \times \right. \right.$$

$$\times \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} u + u \operatorname{sh}^2 u \xi - \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi \right) \left. \right] \}; \quad (2.149)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} u \left[1 - \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] +$$

$$+ \frac{pl}{2} \cdot \frac{2}{u} \left\{ 2u \frac{c}{l} \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \operatorname{sh} 2u \left[1 + 2 \times \right. \right.$$

$$\times \left[\operatorname{ch} u \left(\xi - \frac{a}{l} \right) - \frac{\operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right)}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi \right] - \frac{1}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times$$

$$\times \left[2u \frac{c}{l} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \operatorname{sh} u \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh} 2u \frac{c}{l} \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \frac{b}{l} \right) \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sh}^2 u \xi - u \operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \xi \right) \right] \}. \quad (2.150)$$

Результаты теоретических и экспериментальных исследований показывают, что при жестком закреплении концов нити перед приложением начальной нагрузки внешние воздействия вызывают в некоторых сечениях большие напряжения изгиба. Последние очень быстро затухают по длине нити. Жестких закреплений до приложения начальной нагрузки рекомендуется избегать.

Уравнения (2.27), (2.36), (2.45), (2.58), (2.75), (2.92), (2.113) и (2.149) трансцендентные. Их правые части и значения коэффициентов, зависящих от геометрических и физических характеристик в этих частях, легко вычисляются, и удовлетворяющие данным уравнениям значения параметров u находятся методом пробных значений.

§ 2.3. Расчет нити с упруго закрепленными концами

Предположим, что при действии на нить дополнительной нагрузки p (рис. 2.12) концы ее поворачиваются на угол, пропорциональный значению изгибающего момента на этих концах. В этом случае действующие на нить нагрузки будут того же типа, что и при жестком закреплении. Однако условия на концах нити, в которых определяются постоянные интегрирования, здесь другие, а именно:

$$\text{при } x=0 \quad y=0,$$

$$y' = \alpha' M_A;$$

$$\text{при } x=l \quad y=h,$$

$$y' = \beta' M_B.$$

Подставив в эти условия значения y и y' из (1.9) и (1.10), получим следующие значения постоянных интегрирования:

$$\alpha' = \frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u \operatorname{th} u} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{1}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] +$$

$$+ \frac{l}{2u} \left[\alpha' M_A \frac{1}{\operatorname{th} u} + \frac{\alpha' M_A - \beta' M_B}{2} \left(\frac{\operatorname{th}^2 u}{u - \operatorname{th} u} - \frac{1}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \right) \right]; \quad (2.151)$$

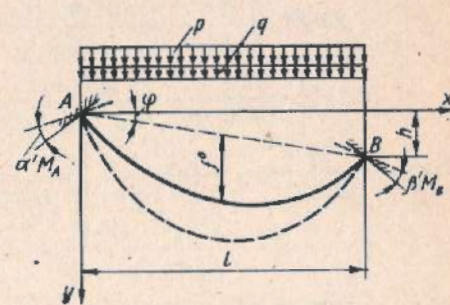


Рис. 2.12. К расчету нити на начальную и дополнительную равномерно распределенную нагрузку, расположенную по всему пролету, с упруго закрепленными концами.

$$C_2 = -\frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u^3} - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] -$$

$$-\frac{l}{2u} \left[\alpha' M_A + \frac{\alpha' M_A - \beta' M_B}{2} \cdot \frac{\text{th } u}{u - \text{th } u} \right]; \quad (2.1)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{(q+p)l^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{\alpha' M_A - \beta' M_B}{2} \cdot \frac{\text{th } u}{u - \text{th } u}; \quad (2.1)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (2.1)$$

Здесь M_A и M_B — изгибающие моменты на концах деформированной нити;

α' и β' — коэффициенты, зависящие от жесткости закрепления нити соответственно на опоре А и В.

Расчетные формулы для произвольного сечения нити имеют вид

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p)l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2 \xi (1 - \xi) - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^3}{u^0} \right] \right.$$

$$\times \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \left. \right\} \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} - \frac{l}{2u} \left\{ 2\alpha' M_A \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right.$$

$$- (\alpha' M_A - \beta' M_B) \left[\frac{\text{th } u}{u - \text{th } u} \left(u\xi - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right) - \frac{\text{sh}^2 u\xi}{\text{sh } u \text{ ch } u} \right]; \quad (2.1)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p)l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^3}{u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \right\} \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right) -$$

$$-\frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^3}{u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right) -$$

$$- 2\alpha' M_A \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right] - (\alpha' M_A - \beta' M_B) \times$$

$$\times \left[\frac{\text{th } u}{u - \text{th } u} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u\xi}{\text{sh } u \text{ ch } u} \right]; \quad (2.1)$$

$$M = \frac{(q+p)l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^3}{u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \right\} \left(\frac{1}{2 \text{ th } u} \right.$$

$$- \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \left. \right\} - \frac{2uE}{l} \left\{ 2\alpha' M_A \left(\frac{1}{2 \text{ th } u} \right. \right.$$

$$- \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \left. \right\} + (\alpha' M_A - \beta' M_B) \left[\frac{\text{th } u}{u - \text{th } u} \left(\frac{\text{th } u}{2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right) - \left(\frac{\text{sh}^2 u\xi}{\text{sh } u \text{ ch } u} + \frac{1}{2 \text{ sh } u \text{ ch } u} \right) \left. \right\}; \quad (2.1)$$

$$Q = \frac{(q+p)l}{2} \cdot \frac{2}{u} \left\{ u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^3}{u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] \right\} \left[\frac{1}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \right] + \frac{4u^2 EI}{l^2} \left\{ 2\alpha' M_A \left[\frac{1}{2} - \right. \right.$$

$$- \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{sh } u} \left. \right\} + (\alpha' M_A - \beta' M_B) \left[\frac{\text{th } u}{u - \text{th } u} \left(\frac{1}{2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right) + \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u\xi}{\text{sh } u \text{ ch } u} \left. \right\}. \quad (2.158)$$

В эти формулы входят неизвестные значения опорных моментов M_A и M_B . Для определения их подставим в (2.157) $\xi=0$ и $\xi=1$. Решая совместно полученные уравнения, найдем:

$$M_A = -\gamma'_A \frac{(q+p)l^2}{12} 3 \frac{u}{\text{th } u} \left(\frac{u - \text{th } u}{u^3} - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^0 - \text{th } u^0}{u^0} \right) =$$

$$= \gamma'_A M_A^*; \quad (2.159)$$

$$M_B = -\gamma'_B \frac{(q+p)l^2}{12} 3 \frac{u}{\text{th } u} \left(\frac{u - \text{th } u}{u^3} - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^0 - \text{th } u^0}{u^0} \right) =$$

$$= \gamma'_B M_B^* \quad (2.160)$$

где M_A^* и M_B^* — моменты в опорных сечениях при абсолютно жестком закреплении концов нити;

γ'_A и γ'_B — численные коэффициенты, определяемые из формул

$$\gamma'_A = \frac{2 \left(1 + \beta' \frac{2EI}{l} \cdot \frac{u^2 \text{ th } u}{u - \text{th } u} \right)}{\left(1 + \alpha' \frac{2EI}{l} \cdot \frac{u}{\text{th } u} \right) \left(1 + \beta' \frac{2EI}{l} \cdot \frac{u^2 \text{ th } u}{u - \text{th } u} \right) + \left(1 + \beta' \frac{2EI}{l} \times \right.}$$

$$\left. \times \frac{u}{\text{th } u} \right) \left(1 + \alpha' \frac{2EI}{l} \cdot \frac{u^2 \text{ th } u}{u - \text{th } u} \right)}$$

$$2 \left(1 + \alpha' \frac{2EI}{l} \cdot \frac{u^2 \text{ th } u}{u - \text{th } u} \right)}{\left(1 + \alpha' \frac{2EI}{l} \cdot \frac{u}{\text{th } u} \right) \left(1 + \beta' \frac{2EI}{l} \cdot \frac{u^2 \text{ th } u}{u - \text{th } u} \right) + \left(1 + \beta' \frac{2EI}{l} \times \right.}$$

$$\left. \times \frac{u}{\text{th } u} \right) \left(1 + \alpha' \frac{2EI}{l} \cdot \frac{u^2 \text{ th } u}{u - \text{th } u} \right)} \quad (2.162)$$

Из формул (2.159) — (2.162) видно, что моменты M_A и M_B на концах нити зависят от величины коэффициентов α' и β' , характеризующих степень жесткости закрепления.

Если α' и β' весьма малы, то коэффициенты γ'_A и γ'_B приближаются к единице и моменты M_A и M_B близки к моментам для абсолютно жесткого закрепления. Если α' и β' очень велики, то коэффициенты γ'_A и γ'_B и моменты M_A и M_B малы и условия на концах нити приближаются к условиям шарнирного закрепления.

Для вычисления параметра u приравняем упругое удлинение нити разности длин до и после приложения дополнительной нагрузки

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l y^{0'2} dx.$$

Подставив в это уравнение значение y' из (2.156) и $y^{0'}$ из (2) и выполнив интегрирование, после преобразований найдем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - 2 \frac{q+p}{q} \times \\ & \times \left[\frac{1}{u^{0'2}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{1}{u^{0'2}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \frac{q+p}{l} \cdot \frac{5}{24} \Phi n \frac{\alpha' M_A + \beta' M_B}{2} \left[\frac{1}{u^3} \left(\operatorname{th} u - 3 \frac{u - \operatorname{th} u}{u \operatorname{th} u} \right) + \right. \\ & + \left. \left(\frac{u - \operatorname{th} u}{u^3} - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^0 - \operatorname{th} u^0}{u^{0'2}} \right) \left(1 - \frac{u - \operatorname{th} u}{u \operatorname{th}^2 u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{5}{48} \Phi n \right)^2 \left\{ \alpha' M_A \beta' M_B \left(1 - \frac{u - \operatorname{th} u}{u \operatorname{th}^2 u} \right) - \left(\frac{\alpha' M_A - \beta' M_B}{2} \right)^2 \times \right. \\ & \times \left[\left(\frac{u \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} - \frac{1}{\operatorname{th} u} \right)^2 - \frac{1}{u} \left(\frac{u \operatorname{th} u}{u - \operatorname{th} u} + \frac{1}{\operatorname{th} u} \right) \right] - \right. \\ & - \left. \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{1}{u^{0'2}} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \right. \right. \\ & - \left. \frac{5}{u^{0'2}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left. \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0'2} \right. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Последовательность расчета нити с упруго закрепленными концами следующая. При заданных исходных данных вычисляется правая часть уравнения (2.163). Затем из уравнений (2.27) и (2.36) определяются значения параметра u при шарнирном и жестком закреплении концов нити. Нить с упруго закрепленными концами должна иметь значение параметра u , промежуточное между этими двумя. Приняв для u некоторое такое промежуточное значение определяют коэффициенты γ_A и γ_B и моменты M_A и M_B . Подставляя их значения в уравнение (2.163), вычисляют его левую часть. В общем случае она будет несколько отличаться от ранее вычисленного значения правой части уравнения (2.163), и поэтому следует произвести повторный пробный подсчет с новым значением u . Обычно двух-трех пробных подсчетов и применения интерполяции бывает достаточно для вычисления параметра u , удовлетворяющего уравнению (2.163).

§ 2.4. Расчет нити с промежуточными шарнирами

Если в нити от начальной нагрузки возникают значительные напряжения от изгиба, то одним из способов, позволяющим их уменьшить, является постановка в отдельных сечениях нити временных (на период монтажа) шарниров. Решение такой задачи рассмотрим на примере расчета нити с одним промежуточным шарниром в середине пролета (рис. 2.13).

Наличие шарнира позволяет определить распор аналогично тому, как это делается при расчете гибких нитей, а именно:

$$\begin{aligned} \Sigma M_C &= 0; \quad R_A^B \frac{l}{2} - \\ & - \frac{ql^2}{8} - Hf^0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$R_A^B = R_B^B = \frac{ql}{2},$$

получаем

$$H = \frac{ql^2}{8f^0}.$$

Зная распор, можно определить параметр u :

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{ql^2}{8f^0 EI}}.$$

В точке C нить разбивается шарниром на два участка AC и CB . Запишем для каждого участка расчетные формулы. Для этого вычислим значения постоянных интегрирования. Условия для их определения следующие:

на участке AC :

$$\text{при } x=0 \quad y=0, \quad M=0;$$

$$\text{при } x = \frac{l}{2} \quad y=f^0 + \frac{h}{2}, \quad M=0;$$

на участке BC :

$$\text{при } x = \frac{l}{2} \quad y=f^0 + \frac{h}{2}, \quad M=0;$$

$$\text{при } x=l \quad y=h, \quad M=0.$$

Постоянные интегрирования будут иметь вид:

на участке AC :

$$C_1 = 2f^0 \frac{1}{u^2}; \quad (2.164)$$

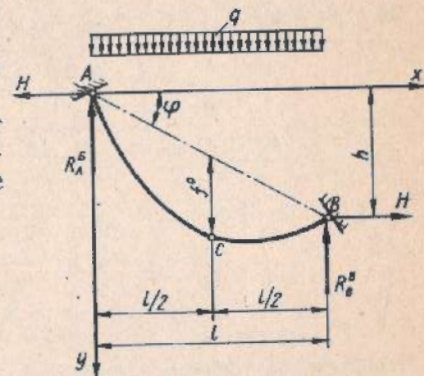


Рис. 2.13. К расчету нити с промежуточным шарниром в середине пролета.

$$C_2 = -2f^0 \frac{\operatorname{ch} u - 1}{u^2 \operatorname{sh} u}; \quad (2.165)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + 4 \frac{f^0}{l}; \quad (2.166)$$

$$C_4 = -C_1; \quad (2.167)$$

$$C_1 = 2f^0 \frac{2 \operatorname{ch} u - 1}{u^2}; \quad (2.168)$$

$$C_2 = -2f^0 \frac{\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{ch} u}{u^2 \operatorname{sh} u}; \quad (2.169)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + 4 \frac{f^0}{l}; \quad (2.170)$$

$$C_4 = -2f^0 \frac{1}{u^2}. \quad (2.171)$$

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в общие уравнения (1.9)–(1.12), получаем следующие расчетные формулы:

на участке AC:

$$y = h\xi + 4f^0 \frac{1}{u^2} \left\{ u\xi u (1 - \xi) - \left[\frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\xi}{\operatorname{sh} u} \right] \right\}; \quad (2.172)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + 8 \frac{f^0}{l} \cdot \frac{1}{u} \left\{ \frac{1}{2} [u(1 - \xi) - u\xi] - \left[\frac{\operatorname{ch} u - 1}{2 \operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh}^2 u\xi}{\operatorname{sh} u} \right] \right\}; \quad (2.173)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left[\frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\xi}{\operatorname{sh} u} \right]; \quad (2.174)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\operatorname{ch} u - 1}{2 \operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh}^2 u\xi}{\operatorname{sh} u} \right]; \quad (2.175)$$

на участке BC:

$$y = h\xi + 4f^0 \frac{1}{u^2} \left\{ u\xi u (1 - \xi) - \left[\frac{\operatorname{ch} u\xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\}; \quad (2.176)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + 8 \frac{f^0}{l} \cdot \frac{1}{u} \left\{ \frac{1}{2} [u(1 - \xi) - u\xi] - \left[\frac{\operatorname{ch} u - 1}{2 \operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{ch} u\xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{ch}^2 u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\}; \quad (2.177)$$

$$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left[\frac{\operatorname{ch} u\xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right]; \quad (2.178)$$

$$= \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\operatorname{ch} u - 1}{2 \operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{ch} u\xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{ch}^2 u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right]. \quad (2.179)$$

Отношение максимального момента в нити с шарниром в середине пролета при $\xi=0,25$ или $\xi=0,75$ в формулах (2.174) или (2.178) максимальному моменту в нити без шарнира при $\xi=0,5$ в формуле (2.7)

$$\frac{M_{\text{ш}}}{M} = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{4} u \left(\operatorname{ch} \frac{3}{4} u - \operatorname{ch} \frac{1}{4} u \right)}{\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} u} = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{4} u}{\operatorname{th} u}. \quad (2.180)$$

На рис. 2.14 изображен график зависимости $\frac{M_{\text{ш}}}{M}$ от параметра u , позволяющий в каждом конкретном случае оценить эффективность постановки дополнительного шарнира.

Если $u \geq 6$, то уменьшение момента не превышает 10% и постановка дополнительного шарнира нецелесообразна.

При значениях $u < 6$ дополнительный шарнир значительно (до 75% при $u=0$) уменьшает изгибающие моменты в нити и может быть рекомендован как один из способов снижения напряжений от изгиба, которые при малых значениях u , как правило, очень высокие.

Если постановка одного шарнира не дает желаемого эффекта, то можно поставить дополнительно еще несколько шарниров (обычно в четвертях пролета). При этом нить разбивается на четыре участка, для каждого из которых нужно записать расчетные формулы аналогично тому, как это сделано для нити с одним шарниром.

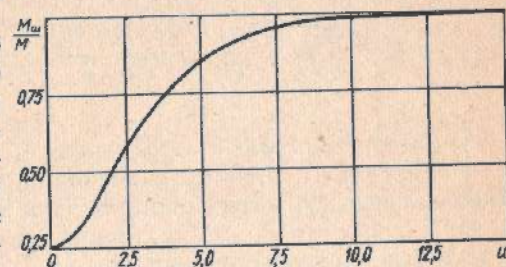


Рис. 2.14. График зависимости $\frac{M_{\text{ш}}}{M}$ от параметра u .

2.5. Определение оптимальной стрелы провисания

Допустим, что заданы пролет, нагрузка и сечение нити. Требуется определить, можно ли перекрыть такой нитью данный пролет и какую при этом принять стрелу провисания.

Если стрелу провисания принять очень малую, то в нити возникнут большие осевые усилия; при очень большой стреле прови-

сания возможны значительные напряжения от изгиба. Очевидно, для заданной нагрузки можно подобрать такую стрелу провисания, при которой суммарные напряжения от растяжения и изгиба будут минимальными. Определяют ее следующим образом.

Наибольшие суммарные напряжения от растяжения и изгиба при шарнирном закреплении концов нити вычисляют по формуле

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{H}{F \cos \varphi} + \frac{M_{\xi=0,5}}{W},$$

где $M_{\xi=0,5}$ — момент в середине пролета;
 W — момент сопротивления сечения нити.
 Учитывая, что

$$H = \frac{4u^2 EI}{l^2},$$

$$M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u},$$

получаем

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{4u^2 EI}{Fl^2 \cos \varphi} + \frac{ql^2}{8W} \cdot \frac{2}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u}. \quad (2.18)$$

Отсюда после дифференцирования по u имеем

$$\frac{d\sigma_{\Sigma}}{du} = \frac{8uEI}{El^2 \cos \varphi} - \frac{ql^2}{2W} \cdot \frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{2 + u \operatorname{th} u}{2 \operatorname{ch} u} \right).$$

Приравняв правую часть этого выражения нулю, после преобразований находим

$$\frac{384}{5} \cdot \frac{EI}{ql^4} \cdot \frac{W}{F \cos \varphi} = \frac{1 - \frac{2 + u \operatorname{th} u}{2 \operatorname{ch} u}}{\frac{5}{24} u^4}. \quad (2.18)$$

Из этого выражения определяем параметр u .

Подставляя найденное значение параметра u в (2.181), находим минимальные суммарные напряжения в нити. Если эти напряжения меньше допустимых для материала данной нити, то переходим к определению стрелы провисания.

Стрелу провисания, соответствующую минимальным суммарным напряжениям, можно определить, если подставить в (2.10) значение параметра u , найденного из (2.182).

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{\frac{u^2}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u}}{\frac{5}{24} u^4}. \quad (2.183)$$

В частном случае, когда угол наклона касательной к оси нити на опоре B равен нулю, подлежит определению не стрела провисания, а превышение одной опоры над другой. В этом случае выра-

жения (2.182) недостаточно для определения параметра u , так как угол φ , входящий в него, сам является величиной неизвестной. Запишем (2.10') в виде

$$\frac{24EI}{ql^3} \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right). \quad (2.184)$$

Решая совместно уравнения (2.182) и (2.184), находим значения u и φ , соответствующие минимальным суммарным напряжениям.

Превышение одной опоры над другой определяем по формуле

$$h = l \operatorname{tg} \varphi.$$

Оптимальные значения f и h при жестком закреплении концов нити определяем аналогично тому, как это было сделано для случая шарнирного закрепления.

Вычисленные по приведенным формулам оптимальные значения f и h не всегда могут удовлетворить всем требованиям, предъявляемым к сооружению. Поэтому окончательные значения f и h следует принимать после всестороннего технико-экономического анализа нескольких вариантов.

ГЛАВА 3. НИТЬ, РАБОТАЮЩАЯ БЕЗ ИЗГИБА ОТ НАЧАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

§ 3.1. Действие начальной нагрузки

Если начальная нагрузка не вызывает в сечениях нити изгибающих моментов, то это свидетельствует о том, что нить работает как абсолютно гибкая. При этом уравнение кривой провисания нити с опорами, расположенными на разных уровнях (см. рис. 1.2), имеет вид:

$$y = \frac{4f^0 x(l-x)}{l^2} + \frac{x}{l} h = 4f^0 \xi(1-\xi) + h\xi.$$

В соответствии с теорией гибких нитей величина распора

$$H^0 = \frac{M^B}{y} = \frac{ql^2}{8f^0}.$$

Длину нити определяют по формуле

$$L = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^0}{l} \cos^3 \varphi.$$

Если после приложения начальной нагрузки заглушить установленные по длине нити шарниры или обетонировать ее, а затем приложить к ней дополнительную нагрузку, то в ее сечениях возникнут изгибающие моменты. Кроме того, под действием дополнительной нагрузки в нити изменятся ординаты кривой провисания и величина распора. Методика их определения дана в следующем параграфе.

§ 3.2. Действие дополнительной нагрузки

Методика получения расчетных зависимостей для данной группы нитей, находящихся под действием дополнительной нагрузки, ничем не отличается от методики, изложенной в § 2.2 для нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки. Поэтому отметим лишь некоторые особенности.

Во-первых, при выводе уравнения для определения параметра u начальную длину нити необходимо принимать в соответствии с теорией гибких нитей.

Во-вторых, при определении длины нити после приложения дополнительной нагрузки значение производной уравнения оси нити (1.18) необходимо записывать без члена в квадратных скобках. Это связано с тем, что выражение (1.17) представляет собой уравнение прогибов, а не оси нити, как это имеет место для нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки.

При определении величины упругого приращения длины нити, вызванного дополнительной нагрузкой, в формулу (2.21) следует подставить значение $H^0 = \frac{ql^2}{8f^0}$.

Ниже приведены формулы для расчета нитей при шарнирном и жестком закреплении концов после приложения начальной нагрузки.

При пользовании формулами следует иметь в виду, что до приложения дополнительной нагрузки кривая провисания нити описывалась уравнением квадратной параболы.

1. Нагрузка, равномерно распределенная по всему пролету

А. Шарнирное закрепление концов нити (см. рис. 2.4).

Условия для определения постоянных интегрирования:

при $x=0$ $\bar{y}=0$, $M=0$;

при $x=l$ $\bar{y}=0$, $M=0$.

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} - 2f^0 \frac{1}{u^2}; \quad (3.1)$$

$$C_2 = -\frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{\text{th } u}{u^4} + 2f^0 \frac{\text{th } u}{u^2}; \quad (3.2)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{(q+p)l^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (3.3)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (3.4)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \\ & + \frac{5}{6} \left(\frac{q+p}{q} \right) \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) - \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 \right] + \\ & + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[\left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\ & = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Расчетные формулы:

$$\begin{aligned} y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p)l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2\xi(1-\xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] + \\ + 4f^0 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p)l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\text{th } u}{2} + \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] + \\ + \frac{8f^0}{l} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right]; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} M = \frac{(q+p)l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u} - \\ - \frac{16f^0 EI}{l^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1-\xi)}{\text{ch } u}; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} Q = \frac{(q+p)l}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right] - \\ - \frac{32f^0 EI}{l^3} u \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1-\xi)}{\text{ch } u} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Б. Жесткое закрепление концов нити (см. рис. 2.5).

Условия для определения постоянных интегрирования:

при $x=0$ $\bar{y}=0$, $\bar{y}'=0$;

при $x=l$ $\bar{y}=0$, $\bar{y}'=0$.

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3 \text{th } u} - 2f^0 \frac{1}{u \text{th } u}; \quad (3.10)$$

$$C_2 = -\frac{(q+p)l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3} + 2f^0 \frac{1}{u}; \quad (3.11)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{(q+p)l^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (3.12)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (3.13)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \cdot \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\ & - \frac{5}{6} \left(\frac{q+p}{q} \right) \Phi \cdot \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\ & = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0a}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Расчетные формулы:

$$\begin{aligned} y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p) l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - u \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + 4f^0 \frac{1}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u}; \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{(q+p) l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right] + \\ + \frac{8f^0}{l} \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right); \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} M = \frac{(q+p) l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left[\frac{1}{2} - u \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right] + \\ + \frac{16f^0 EI}{l^2} u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{1}{2u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right]; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} Q = \frac{(q+p) l}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \\ - \frac{32f^0 EI}{l^3} u^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

2. Сосредоточенная нагрузка

А. Шарнирное закрепление концов нити (см. рис. 2.7).

Условия для определения постоянных интегрирования:

при $x=0$ $\bar{y}=0$, $M=0$;

при $x=a$ $\bar{y}_n=\bar{y}_n$, $\bar{y}'_n=\bar{y}'_n$, $M_n=M_n$, $Q_n-Q_n=P \cos \alpha$;

при $x=l$ $y=0$, $M=0$.

Постоянные интегрирования:

на участке $[0-a]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} - 2f^0 \frac{1}{u^2}; \quad (3.19)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{\operatorname{th} u}{u^4} - \frac{Pl^3}{8EI} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{u^3 \operatorname{sh} 2u} + 2f^0 \frac{\operatorname{th} u}{u^2}; \quad (3.20)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{Pl^2}{4EI} \cdot \frac{\frac{b}{l}}{u^2}; \quad (3.21)$$

$$C_4 = -C_1; \quad (3.22)$$

на участке $[a-l]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} - \frac{Pl^3}{8EI} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{u^3} - 2f^0 \frac{1}{u^2}; \quad (3.23)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{\operatorname{th} u}{u^4} + \frac{Pl^3}{8EI} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{u^3 \operatorname{th} 2u} + 2f^0 \frac{\operatorname{th} u}{u^2}; \quad (3.24)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{Pl^2}{4EI} \cdot \frac{\frac{a}{l}}{u^2}; \quad (3.25)$$

$$C_4 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^4} + \frac{Pl^3}{4EI} \cdot \frac{\frac{a}{l}}{u^2} + 2f^0 \frac{1}{u^2}. \quad (3.26)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \cdot \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \right. \\ & \left. \frac{\operatorname{th} u}{u} \cdot \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh} 2u} - \frac{2}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l} + \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \cdot \frac{2}{u^4} \left[2 \left(2 \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh}^2 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh}^2 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2 2u} \right) - \right. \\ & \left. \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \right] + \frac{5}{6} \Phi \cdot \frac{1}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) - \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{3} \left(\frac{P}{ql} \right) \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l} + \text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\text{th } u}{u} \cdot \frac{\frac{a}{l} \text{sh } 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \right] + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[\left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\
& = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Расчетные формулы:
на участке [0— a]:

$$\begin{aligned}
y &= h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + \\
& + 4f^0 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} + \\
& + \frac{Pl^3}{48EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left(2u \frac{b}{l} \xi - \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ sh } 2u\xi \right); \quad (3.2) \\
\text{tg } \alpha &= \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left(\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right) \right] + \\
& + \frac{8f^0}{l} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + \\
& + \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{4}{u^2} \left(\frac{b}{l} - \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ ch } 2u\xi \right); \quad (3.3) \\
M &= \frac{ql^3}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} - \frac{16f^0 EI}{l^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} + \\
& + \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{u} \cdot \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ sh } 2u\xi; \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] - \frac{32f^0 EI}{l^3} u \times \\
& \times \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + P \frac{\text{sh } 2u \frac{b}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ ch } 2u\xi; \quad (3.5)
\end{aligned}$$

на участке [a — l]:

$$\begin{aligned}
y &= h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] + \\
& + 4f^0 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} + \\
& + \frac{Pl^3}{48EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[2u \frac{a}{l} (1 - \xi) - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ sh } 2u(1 - \xi) \right]; \quad (3.32) \\
\alpha &= \text{tg } \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left(\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right) \right] + \\
& + \frac{8f^0}{l} \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right] - \\
& - \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{4}{u^2} \left[\frac{a}{l} - \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ ch } 2u(1 - \xi) \right]; \quad (3.33) \\
M &= \frac{ql^3}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} - \frac{16f^0 EI}{l^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} + \\
& + \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{u} \cdot \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ sh } 2u(1 - \xi); \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left(\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right) - \frac{32f^0 EI}{l^3} u \times \\
& \times \left(\frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right) - P \frac{\text{sh } 2u \frac{a}{l}}{\text{sh } 2u} \text{ ch } 2u(1 - \xi). \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Б. Жесткое закрепление концов нити (см. рис. 2.8).

Условия для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned}
&\text{при } x=0 \quad \bar{y}=0, \quad \bar{y}'=0; \\
&\text{при } x=a \quad \bar{y}_a=\bar{y}_n, \quad \bar{y}'_a=\bar{y}'_n, \quad M_a=M_n, \quad Q_a-Q_n=P \cos \alpha; \\
&\text{при } x=l \quad \bar{y}=0, \quad \bar{y}'=0.
\end{aligned}$$

Постоянные интегрирования:
на участке [0— a]:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3 \text{th } u} + \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\text{sh } u \frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l}}{u^3 \text{sh } u} - \right. \\
& - \frac{\frac{a}{l} \text{ sh } u \frac{b}{l} \text{ ch } u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \text{ sh } u \frac{a}{l} \text{ ch } u \frac{b}{l}}{u^2 (u \text{ch } u - \text{sh } u)} \left. \right] - 2f^0 \frac{1}{u \text{th } u}; \quad (3.36)
\end{aligned}$$

$$C_2 = -\frac{ql^3}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3} - \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} - \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 \operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right] + 2f^0 \frac{1}{u}; \quad (3.37)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{Pl^2}{4EI} \left[\frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u^2 \operatorname{sh} u} - \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right]; \quad (3.38)$$

$$C_4 = -C_1; \quad (3.39)$$

на участке $[a-l]$:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3 \operatorname{th} u} - \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{u^3} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right] - 2f^0 \frac{1}{u \operatorname{th} u}; \quad (3.40)$$

$$C_2 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3} + \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{\operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{u^3} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 \operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right] + 2f^0 \frac{1}{u}; \quad (3.41)$$

$$C_3 = \frac{h}{l} + \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{Pl^2}{4EI} \left[\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 \operatorname{sh} u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right]; \quad (3.42)$$

$$C_4 = -\frac{ql^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3 \operatorname{th} u} + \frac{Pl^3}{8EI} \left[\frac{2 \frac{a}{l}}{u^2} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u^3 \operatorname{sh} u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u^2 (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} \right] + 2f^0 \frac{1}{u \operatorname{th} u}; \quad (3.43)$$

Уравнение для определения параметра u :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \frac{P}{ql} \cdot \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \right. \\ & \left. \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \frac{3}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ & \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ - \left(\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right)^2 \times \right. \\ & \times \left(1 + \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{1}{u} \cdot \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \times \\ & \left. \left[\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{\operatorname{th} u (u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)} - 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} \right] + \right. \\ & \left. \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} + 2 \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh}^2 u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2 u} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right)^2 \right] - \frac{3}{u^3} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right\} - \\ & - \left(\frac{5}{6} \Phi \right) \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\ & - \frac{P}{ql} \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \right. \\ & \left. \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{sh} u} \right] + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\ & - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^3. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Расчетные формулы:

на участке $[0-a]$:

$$\begin{aligned} y = h \left[+ \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - u \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \right. \\ \left. + 4f^0 \frac{1}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{Pl^3}{192EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left[u^2 \frac{\frac{b}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (3.47)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} \\ + \frac{8f^0}{l} \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{8}{u^2} \times \\ \times \left[\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (3.48)$$

$$M = \frac{ql^3}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \\ + \frac{16f^0 EI}{l^2} u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{1}{2u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + \frac{Pl}{8} \cdot \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}; \quad (3.49)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \frac{32f^0 EI}{l^3} u^2 \left[\frac{1}{2} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + P \cdot 2 \left\{ - \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right.$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l}}{2 \operatorname{sh} u} - \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \\ \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \Bigg\}; \quad (3.48)$$

на участке $[a-l]$:

$$u = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - u \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + 4f^0 \frac{1}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} + \frac{Pl^3}{192EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left[u \frac{a}{l} - \right. \\ \left. u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \cdot u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (3.49)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right\} + \\ + \frac{8f^0}{l} \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{8}{u^2} \times \\ \times \left[\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right]; \quad (3.50)$$

$$M = \frac{ql^3}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \\ + \frac{16f^0 EI}{l^2} u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{1}{2u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \\ + \frac{Pl}{8} \cdot \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1 - \xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$-\frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \\ \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \Bigg\}; \quad (3.5)$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - \frac{32 f^0 EI}{l^3} u^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - P \cdot 2 \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right. \\ \left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}. \quad (3.6)$$

§ 3.3. Другое решение задачи

При определении величины распора мы исходили из условия, что упругое удлинение нити, вызванное дополнительной нагрузкой, равно разности ее длин до и после приложения дополнительной нагрузки, т. е.

$$\frac{4r^2(u^2 - u^0)^2}{l \cos^2 \varphi} = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l y^{0'2} dx.$$

Начальную кривую провисания нити можно представить тригонометрическим рядом:

при шарнирном закреплении концов нити

$$y^0 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots; \quad (4)$$

при жестком закреплении концов нити

$$y^0 = c_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) + c_2 \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{l} \right) + \\ + c_3 \left(1 - \cos \frac{6\pi x}{l} \right) + \dots \quad (5)$$

При этом прогибы нити от дополнительной нагрузки составят: при шарнирном закреплении концов

$$y^1 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + b_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots; \quad (6)$$

при жестком закреплении концов

$$y^1 = d_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) + d_2 \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{l} \right) + \\ + d_3 \left(1 - \cos \frac{6\pi x}{l} \right) + \dots \quad (7)$$

Ряды (а) и (в) представляют собой семейство синусоид с одной, двумя, тремя и т. д. полуволнами, ряды (б) и (г) — семейство косинусоид, смещенных относительно оси абсцисс.

Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots$ дают максимальные ординаты этих кривых. Конечные ординаты кривой провисания нити равны

$$y = y^0 + y^1.$$

Значения коэффициентов вычисляются из уравнения, левая часть которого представляет собой работу, совершенную внешними силами на бесконечно малом перемещении из положения равновесия, а правая — приращение потенциальной энергии деформации. При этом следует иметь в виду, что квадрат первой производной уравнения оси нити, представленного тригонометрическим рядом, будет состоять из членов двух типов:

для ряда (а)

$$a_n^2 \frac{n^2 \pi^4}{l^2} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \text{ и } 2a_n a_m \frac{n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l};$$

для ряда (б)

$$c_n^2 \frac{4n^2 \pi^2}{l^2} \sin^2 \frac{2n\pi x}{l} \text{ и } 2c_n c_m \frac{4nm\pi^2}{l^2} \sin \frac{2n\pi x}{l} \sin \frac{2m\pi x}{l}$$

и т. д.

Интегрированием можно показать, что

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \sin^2 \frac{2n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2};$$

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \text{ при } n \neq m \text{ и}$$

$$\int_0^l \sin \frac{2n\pi x}{l} \sin \frac{2m\pi x}{l} dx = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Преимущество данного решения заключается в том, что оно позволяет описать кривую провисания нити одним выражением. Однако это решение дает еще более громоздкие формулы и затрудняет приведение их к табличному виду.

ГЛАВА 4. ДРУГИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

§ 4.1. Влияние изменения температуры

При изменении температуры на Δt° длина нити изменится на величину

$$\Delta l_t = \frac{l}{\cos \varphi} \alpha_t (t^\circ - t_0^\circ),$$

где t° — расчетная температура;

t_0° — температура замыкания нити;

α_t — коэффициент линейного удлинения материала нити.

Изменение длины нити вызовет изменение стрелы провисания и, следовательно, внутренних усилий, в частности, — распора.

В свою очередь, приращение распора вызовет изменение длины нити на величину

$$\Delta l_H = \frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2).$$

Таким образом, суммарное приращение длины нити, вызванное изменением температуры, составит:

$$\Delta L = \frac{l}{\cos \varphi} \alpha_t (t^\circ - t_0^\circ) + \frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2).$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.20) и решая его, находим параметр u , соответствующий изменившейся температуре.

Заметим, что температура не меняет условий для определения постоянных интегрирования. Поэтому влияние ее может быть учтено совместно с силовыми факторами, рассмотренными выше. С этой целью для определения параметра u в правые части уравнений следует ввести дополнительный член

$$\left(\frac{5}{24} \Phi n \right)^2 \frac{\alpha_t (t^\circ - t_0^\circ)}{\cos \varphi}, \quad (4.1)$$

где

$$n = \frac{l}{f^0}.$$

Напряженно-деформированное состояние нити определяется по формулам для силовых воздействий.

§ 4.2. Влияние смещения опор

Предположим, что опоры нити под действием распора H смещаются на величину Δ по направлению друг к другу. При этом пролет нити уменьшится на величину этого смещения, и уравнение для вычисления параметра u примет вид

$$\frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{2} \int_l y'^2 dx - \frac{1}{2} \int_l y_0'^2 dx - \Delta. \quad (4.2)$$

Несмотря на изменение распора выражения для определения $y' = tg \alpha$, M и Q останутся в силе. Изменяются лишь выражения для определения параметра u , в их левых частях появится дополнительный член $-\frac{256\Delta(EI)^2}{q^2 l^3}$.

Если жесткость опор равна k , то

$$\Delta = \frac{H}{k}, \quad (4.3)$$

тогда после подстановки $H = \frac{4u^2 EI}{l^3}$, получим

$$\Delta = \frac{4u^2 EI}{kl^3}. \quad (4.4)$$

При этом вычисление параметра u производится так же, как и в случае нити с неподвижными опорами.

Влияние смещения опор сказывается на напряженно-деформированном состоянии нити тем больше, чем меньше стрела провисания.

§ 4.3. Примеры расчета

Использование теоретических решений иллюстрируется примерами расчета. В ряде примеров получены очень высокие напряжения в нити. При соответствующем выборе исходных данных пролет, стрела провисания, жесткость нити на растяжение и изгиб (и др.) их можно уменьшить. Однако это не сделано для того, чтобы рельефно показать особенности работы рассматриваемых конструкций.

Пример 1. Нить представляет собой круглую стальную трубу наружным диаметром 720 мм с толщиной стенки 10 мм. Труба равномерно подвешена к двум опорам, расположенным на разных уровнях (рис. 4.1). Разница h между отметками крепления трубы опорам равна 15 м. Расчетный пролет трубы $l = 150$ м. Начальная нагрузка (собственный вес трубы) $q = 0,175$ т/м, дополнительная нагрузка $p = 0,2$ т/м расположена на всем пролете. Стрела провисания при начальной нагрузке $f^0 = 6$ м. Модуль упругости материала

ла трубы $E=2,1 \cdot 10^7$ т/м². Максимальная расчетная температура воздуха +30° С, минимальная —20° С. Монтаж трубы производят при температуре +5° С.

Требуется определить напряжения в трубе в середине и в четверти пролета при действии начальной и дополнительной нагрузок с учетом и без учета влияния температуры, а также приращение стрелы провисания, вызванное дополнительной нагрузкой.

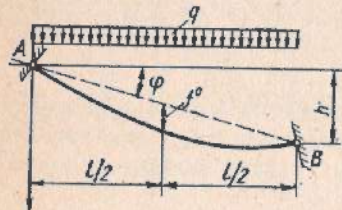


Рис. 4.1. К примеру расчета.

Определяем необходимые для расчета геометрические и физические характеристики трубы:

$$F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,142}{4} (0,72^2 - 0,70^2) = 0,02231 \text{ м}^2$$

момент сопротивления

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D} = \frac{3,142}{32} \cdot \frac{0,72^4 - 0,70^4}{0,72} = 0,003905 \text{ м}^3;$$

момент инерции

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{3,142}{64} (0,72^4 - 0,70^4) = 0,001406 \text{ м}^4;$$

радиус инерции

$$r = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{0,001406}{0,02231}} = 0,2510 \text{ м};$$

жесткость нити на изгиб

$$EI = 2,1 \cdot 10^7 \cdot 0,001406 = 29530 \text{ тм}^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{l} = \frac{15}{150} = 0,1000; \varphi = 5^\circ 43'; \cos \varphi = 0,9950.$$

Расчет нити на начальную нагрузку

При действии начальной нагрузки параметр u^0 определяем из уравнения (2.10)

$$\frac{384EI f^0}{5ql^4} = \frac{\frac{u^{0^2}}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u^0}}{\frac{5}{24} u^{0^4}}.$$

Вычисляем левую часть этого уравнения

$$\frac{384 \cdot 29530 \cdot 6}{5 \cdot 0,175 \cdot 150^4} = 0,1536.$$

Удовлетворяющий это уравнение параметр $u^0 = 3,663$. Распор нити

$$H^0 = \frac{4u^{0^2}EI}{l^2} = \frac{4 \cdot 3,663^2 \cdot 29530}{150^2} = 70,4 \text{ т}.$$

Изгибающие моменты в нити определяем по формуле (2.7)

$$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^{0^2}} \cdot \frac{\operatorname{sh} u^0 \xi \operatorname{sh} u^0 (1 - \xi)}{\operatorname{ch} u^0}.$$

В четверти пролета

$$M_{\xi=0,25} = \frac{0,175 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{3,663^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}(3,663 \cdot 0,25) \operatorname{sh} 3,663 (1 - 0,25)}{\operatorname{ch} 3,663} = 61,3 \text{ тм}.$$

В середине пролета

$$M_{\xi=0,5} = \frac{0,175 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{3,663^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2(3,663 \cdot 0,5)}{\operatorname{ch} 3,663} = 69,6 \text{ тм}.$$

Напряжения в нити определяем по формуле

$$\sigma^* = \frac{H}{F \cos \varphi} \pm \frac{M}{W}.$$

В четверти пролета

$$\sigma_{\xi=0,25} = \frac{70,4}{0,02231 \cdot 0,9950 \cdot 10} \pm \frac{61,3}{0,003905 \cdot 10} = 317 \pm 1570 = \begin{cases} +1887 \text{ кг/см}^2; \\ -1253 \text{ кг/см}^2; \end{cases}$$

В середине пролета

$$\sigma_{\xi=0,5} = \frac{70,4}{0,02231 \cdot 0,9950 \cdot 10} \pm \frac{69,6}{0,003905 \cdot 10} = 317 \pm 1782 = \begin{cases} +2099 \text{ кг/см}^2 \\ -1465 \text{ кг/см}^2. \end{cases}$$

Расчет нити на дополнительную нагрузку

При действии дополнительной нагрузки параметр u определяем из уравнения (2.27)

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{1}{u^{0^4}} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^2}.$$

Вычисляем правую часть этого уравнения

$$\left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 = \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{0,1536 \cdot \frac{0,2510}{6}}{0,9950} \right)^2 = 0,7240 \cdot 10^{-5};$$

$$\left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^2} = 0,7240 \cdot 10^{-5} \cdot 3,663^2 = 0,00009714;$$

* Ввиду пологости наклона нити относительно линии, соединяющей опоры, пренебрегаем.

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] = \frac{1}{3,663^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{0,99868}{3,663} \right)^2 - \frac{5}{3,663^2} \left(1 - \frac{0,99868}{3,663} \right) \right] = 0,002610.$$

Таким образом

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^2} = 0,002610 - 0,00009714 = 0,002513.$$

Вычисляем коэффициент в левой части уравнения

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 = \left(\frac{0,175+0,2}{0,175} \right)^2 = 4,59.$$

Таким образом,

$$\frac{4,59}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - 0,7240 \cdot 10^{-5} u^2 = 0,002513.$$

Удовлетворяющий это уравнение параметр $u=5,551$.

Стрелу провисания нити при суммарной нагрузке определяем по формуле (2.28), положив в ней $h=0$ и $\xi=0,5$,

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p) l^4}{EI} \cdot \frac{24}{5u^4} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{\text{ch } u - 1}{\text{ch } u} \right] = \frac{5(0,175+0,2) 150^4}{384 \cdot 29530} \cdot \frac{24}{5 \cdot 5,551^4} \left[\frac{5,551^2}{2} - \frac{128,749-1}{128,749} \right] = 6,10 \text{ м.}$$

Приращение стрелы провисания

$$\Delta f = f - f^0 = 6,10 - 6,0 = 0,1 \text{ м.}$$

Распор в нити

$$H = \frac{4 \cdot 5,551^2 \cdot 29530}{150^3} = 161,8 \text{ т.}$$

Изгибающие моменты в нити определяем по формуле (2.30)

$$M = \frac{(q+p) l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1-\xi)}{\text{ch } u}.$$

$$M_{\xi=0,25} = \frac{(0,175+0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,551^2} \times$$

$$\times \frac{\text{sh}(5,551 \cdot 0,25) \text{ sh } 5,551 (1-0,25)}{\text{ch } 5,551} = 64,2 \text{ тм;}$$

$$M_{\xi=0,5} = \frac{(0,175+0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,551^2} \cdot \frac{\text{sh}^2(5,551 \cdot 0,5)}{\text{ch } 5,551} = 67,9 \text{ тм.}$$

Напряжения в нити

$$\sigma_{\xi=0,25} = \frac{161,8}{0,02231 \cdot 0,9950 \cdot 10} \pm \frac{64,2}{0,003905 \cdot 10} = 729 \pm 1644 = \begin{cases} +2373 \text{ кг/см}^2 \\ -915 \text{ кг/см}^2; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi=0,5} = \frac{161,8}{0,02231 \cdot 0,9950 \cdot 10} \pm \frac{67,9}{0,003905 \cdot 10} = 729 \pm 1739 = \begin{cases} +2468 \text{ кг/см}^2 \\ -1010 \text{ кг/см}^2. \end{cases}$$

Анализ результатов расчета показывает, что при приложении дополнительной нагрузки (увеличении ее с 0,175 до 0,375 т/м) напряжения растяжения увеличились в четверти пролета на 26, в середине — на 18%. При этом напряжения сжатия уменьшились соответственно на 27 и 31%. Следовательно, напряжения в нити непропорциональны нагрузке.

Существенно то, что при увеличении нагрузки изгибающий момент в середине пролета уменьшается. Это объясняется тем, что с ростом нагрузки меняется и форма равновесия нити.

Расчет нити на температурные воздействия

При температурных воздействиях в правую часть уравнения для определения параметра u следует ввести дополнительный член

$$\left(\frac{5}{24} \Phi n \right)^2 \frac{\alpha_t (t^0 - t_0^0)}{\cos \varphi}.$$

При положительной расчетной температуре $t^0=30^\circ \text{С}$ этот член равен

$$\left(\frac{5}{24} \cdot 0,1536 \cdot \frac{150}{6} \right)^2 \frac{1,2 \cdot 10^{-5} (30 - 5)}{0,9950} = 0,000193.$$

Подставляя его в правую часть уравнения (2.27), получаем

$$\frac{4,59}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - 0,7240 \cdot 10^{-5} u^2 = 0,001513 + 0,000193 = 0,002706.$$

Удовлетворяющий это уравнение параметр $u=5,454$.

Стрела провисания нити при температуре $t^0=30^\circ \text{С}$ будет

$$f_t = \frac{5}{384} \cdot \frac{(0,175+0,2) \cdot 150^4}{29530} \cdot \frac{24}{5 \cdot 5,454^4} \left[\frac{5,454^2}{2} - \frac{116,848-1}{116,848} \right] = 6,304 \text{ м.}$$

Приращение стрелы провисания от температуры

$$\Delta f_t = f_t - f = 6,304 - 6,10 = 0,204 \text{ м.}$$

Распор в нити

$$H = \frac{4 \cdot 5,454^2 \cdot 29\,530}{150^2} = 156,2 \text{ т.}$$

Изгибающие моменты в нити

$$M_{\xi=0,25} = \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,454^2} \times$$

$$\times \frac{\text{sh}(5,454 \cdot 0,25) \text{sh} 5,454 (1 - 0,25)}{\text{ch} 5,454} = 66,2 \text{ тм};$$

$$M_{\xi=0,5} = \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,454^2} \cdot \frac{\text{sh}^2(5,454 \cdot 0,5)}{\text{ch} 5,454} = 70,3 \text{ тм.}$$

Напряжения в нити

$$\sigma_{\xi=0,25} = \frac{156,2}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{66,2}{0,003905 \cdot 10} = 704 \pm 1695 =$$

$$= \begin{cases} +2399 \text{ кг/см}^2 \\ -991 \text{ кг/см}^2; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi=0,5} = \frac{156,2}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{70,3}{0,003905 \cdot 10} = 704 \pm 1800 =$$

$$= \begin{cases} +2504 \text{ кг/см}^2 \\ -1096 \text{ кг/см}^2. \end{cases}$$

При отрицательной расчетной температуре $t^0 = -20^\circ \text{C}$ дополнительный член будет равен

$$\left(\frac{5}{24} \cdot 0,1536 \cdot \frac{150}{6} \right)^2 \frac{1,2 \cdot 10^{-5} (-20^\circ - 5^\circ)}{0,995} = -0,000193.$$

Уравнение для определения параметра u

$$\frac{4,59}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] - 0,7240 \cdot 10^{-5} u^2 =$$

$$= 0,002513 - 0,000193 = 0,002320.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 5,657$.

Стрела провисания нити при температуре $t^0 = -20^\circ \text{C}$

$$f_t = \frac{5}{384} \cdot \frac{(0,175 + 0,2) 150^4}{29\,530} \cdot \frac{24}{5 \cdot 5,657^4} \left(\frac{5,657^2}{2} - \frac{143,146 - 1}{143,146} \right) =$$

$$= 5,888 \text{ м.}$$

Приращение стрелы провисания от температуры

$$\Delta f_t = 5,888 - 6,1 = -0,212 \text{ м.}$$

Распор в нити

$$H = \frac{4 \cdot 5,657^2 \cdot 29\,530}{150^2} = 168,0 \text{ т.}$$

Нагибающие моменты в нити

$$M_{\xi=0,25} = \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,657^2} \times$$

$$\times \frac{\text{sh}(5,657 \cdot 0,25) \text{sh} 5,657 (1 - 0,25)}{\text{ch} 5,657} = 62,0 \text{ тм};$$

$$M_{\xi=0,5} = \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,657^2} \cdot \frac{\text{sh}^2(5,657 \cdot 0,5)}{\text{ch} 5,657} = 65,4 \text{ тм.}$$

Напряжения в нити

$$\sigma_{\xi=0,25} = \frac{168}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{62}{0,003905 \cdot 10} = 757 \pm 1588 =$$

$$= \begin{cases} +2345 \text{ кг/см}^2 \\ -831 \text{ кг/см}^2; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi=0,5} = \frac{168}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{65,4}{0,003905 \cdot 10} = 757 \pm 1675 =$$

$$= \begin{cases} +2432 \text{ кг/см}^2 \\ -918 \text{ кг/см}^2. \end{cases}$$

Таким образом, при изменении температуры на $\pm 25^\circ$ напряжения в нити изменяются всего на несколько процентов. В то же время прогиб нити от температуры в сравнении с ее прогибом от дополнительной нагрузки изменяется в обе стороны более чем в два раза.

Пример 2. По данным примера 1 требуется определить напряжения в трубе в середине пролета при действии начальной нагрузки оптимальной стреле провисания.

Прежде всего из уравнения (2.182) определяем параметр u , соответствующий оптимальной стреле провисания

$$\frac{384}{5} \cdot \frac{EI}{ql^4} \cdot \frac{W}{F \cos \varphi} = \frac{1 - \frac{2 + u \text{th} u}{2 \text{ch} u}}{\frac{5}{24} u^4}.$$

Вычисляем левую часть этого уравнения

$$\frac{384 \cdot 29\,530 \cdot 0,003905}{5 \cdot 0,175 \cdot 150^4 \cdot 0,02231 \cdot 0,995} = 0,004503.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 5,676$.

Теперь по формуле (2.183) определяем стрелу провисания нити

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{\frac{u^2}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch} u}}{\frac{5}{24} u^4} =$$

$$= \frac{5 \cdot 0,175 \cdot 150^4}{384 \cdot 29\,530} \cdot \frac{\frac{5,676^2}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch} 5,676}}{\frac{5}{25} \cdot 5,676^4} = 2,732 \text{ м.}$$

При данной стреле провисания напряжения в нити в середине пролета будут (2.181)

$$\sigma_2 = \frac{4u^2 EI}{Fl^2 \cos \varphi} \pm \frac{ql^2}{8W} \cdot \frac{2}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u} = \frac{4 \cdot 5,676^2 \cdot 29530}{0,02231 \cdot 150^2 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{0,175 \cdot 150^2}{8 \cdot 0,003905 \cdot 10} \cdot \frac{2}{5,676^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 5,676 - 1}{\operatorname{ch} 5,676} = 762 \pm 777 = \begin{cases} +1539 \text{ кг/см}^2 \\ -15 \text{ кг/см}^2 \end{cases}$$

Теоретически при оптимальной стреле провисания напряжения от распора должны быть равны напряжениям от изгибающего момента. В нашем случае напряжения от распора получались на 2% меньше напряжений от изгибающего момента. Погрешность возникла в результате неточности вычислений.

Результаты расчета показывают, что напряжения растяжения в нити, нагруженной начальной нагрузкой, при стреле провисания 6,0 м на 36% больше соответствующих напряжений в нити при оптимальной стреле провисания.

Пример 3. По данным примера 1 требуется определить стрелу провисания и напряжения в трубе в середине пролета и на опорах в случае жесткого закрепления ее концов после приложения начальной нагрузки.

При заданных граничных условиях параметр u определяется из уравнения (2.36)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\ & - 2 \frac{q+p}{q} \left[\frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\ & = \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^3} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2. \end{aligned}$$

Вычисляем коэффициенты в левой части этого уравнения:

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 = 4,590;$$

$$2 \frac{q+p}{q} \left[\frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] = 2 \cdot \frac{0,175 + 0,2}{0,175} \left[\frac{1}{3,663^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} 3,663}{3,663} \right) \right] = 0,2323;$$

$$\left[\frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right]^2 = \left[\frac{1}{3,663^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} 3,663}{3,663} \right) \right]^2 = 0,002939.$$

Из предыдущего (см. пример 1)

$$\left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 = 0,7240 \cdot 10^{-5};$$

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^3} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = 0,002513.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{4,59}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\ & - \frac{0,2323}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + 0,002939 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - 0,7240 \cdot 10^{-5} u^2 = 0,002513. \end{aligned}$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 5,469$.

Стрелу провисания нити определяем по формуле (2.37), положив в ней $h=0$ и $\xi = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} f &= \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p) l^4}{EI} \cdot \frac{24}{5u^4} \left\{ \frac{u^2}{2} - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^2}{u^3} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \right\} \times \\ & \times \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u} = \frac{5 \cdot (0,175 + 0,2) 150^4 \cdot 24}{384 \cdot 29530 \cdot 5 \cdot 5,469^4} \left\{ \frac{5,469^2}{2} - 5,469 \left[1 - \frac{0,175}{0,175 + 0,2} \cdot \frac{5,469^2}{3,663^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} 3,663}{3,663} \right) \right] \right\} \frac{\operatorname{ch} 5,469 - 1}{\operatorname{sh} 5,469} = 6,129 \text{ м.} \end{aligned}$$

Приращение стрелы провисания

$$\Delta f = 6,129 - 6,0 = 0,129 \text{ м.}$$

Распор в нити

$$H = \frac{4 \cdot 5,469^2 \cdot 29530}{150^2} = 157,0 \text{ т.}$$

Изгибающие моменты в нити определяем по формуле (2.39)

$$\begin{aligned} M &= \frac{(q+p) l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^2}{u^3} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \right\} \times \\ & \times \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u \xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right). \end{aligned}$$

На опорах

$$\begin{aligned} M_{\xi=0} = M_{\xi=1} &= \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{2}{5,469^2} \left\{ 1 - 5,469 \left[1 - \frac{0,175}{0,175 + 0,2} \cdot \frac{5,469^2}{3,663^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} 3,663}{3,663} \right) \right] \right\} \frac{1}{\operatorname{th} 5,469} = -23,3 \text{ т.м.} \end{aligned}$$

В середине пролета

$$M_{\xi=0,5} = \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{2}{5,469^2} \left\{ 1 - 5,469 \left[1 - \frac{0,175}{0,175 + 0,2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{5,469^2}{3,663^2} \left(1 - \frac{\text{th } 3,663}{3,663} \right) \right] \left(\frac{1}{\text{th } 5,469} - \frac{\text{ch } 5,469 - 1}{\text{sh } 5,469} \right) \right\} = 69,7 \text{ т.м.}$$

Напряжения в нити

$$\sigma_{\xi=0} = \sigma_{\xi=1} = \frac{157,0}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{23,3}{0,003905 \cdot 10} = 707 \pm 597 = \\ = \begin{cases} +1304 \text{ кг/см}^2 \\ +110 \text{ кг/см}^2; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi=0,5} = \frac{157,0}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{69,7}{0,003905 \cdot 10} = 707 \pm 1785 = \\ = \begin{cases} +2492 \text{ кг/см}^2 \\ -1078 \text{ кг/см}^2. \end{cases}$$

Обратим внимание на следующие два факта:

во-первых, при жестком закреплении прогиб нити в середине пролета от дополнительной нагрузки может быть больше прогиба нити при шарнирном закреплении ее концов. Это заметно при определенных значениях пролета, стрелы провисания, величины характера нагрузки, жесткости нити на растяжение и изгиб. В рассматриваемом примере дополнительная нагрузка при шарнирном закреплении концов нити вызывает интенсивное изменение очертания ее оси в четвертях пролета, а при жестком закреплении — в середине пролета;

во-вторых, опорный момент от дополнительной нагрузки практически может не сказываться на величине напряжений в нити в середине пролета. Так, в данном примере напряжения в нити в середине пролета при жестком закреплении концов оказались бо́льшими напряжений в нити при шарнирном закреплении ее концов.

Пример 4. По данным примера 1 требуется определить напряжения в трубе в середине пролета и на опорах в случае жесткого закреплении ее концов перед приложением начальной нагрузки.

При заданных граничных условиях параметр u определяем по уравнению (2.19)

$$\frac{384 f^0 EI}{ql^4} = 24 \left[\frac{1}{2u^0} - \frac{\text{ch } u^0 - 1}{u^0 \text{sh } u^0} \right].$$

Вычисляем левую часть этого уравнения

$$\frac{384 \cdot 6 \cdot 29530}{0,175 \cdot 150^4} = 0,7680.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u^0 = 1,741$.
Распор в нити

$$H^0 = \frac{4 \cdot 1,741^2 \cdot 29530}{150^2} = 15,9 \text{ т.}$$

Изгибающие моменты определяем по формуле (2.17).
В середине пролета

$$M_{\xi=0,5} = \frac{ql^2}{12} \cdot 3 \frac{\text{sh } u^0 - u^0}{u^0 \text{sh } u^0} = \frac{0,175 \cdot 150^2}{12} \cdot 3 \times \\ \times \frac{\text{sh } 1,741 - 1,741}{1,741^2 \text{sh } 1,741} = 120,2 \text{ т.м.}$$

На опоре А

$$M_{\xi=0} = -\frac{ql^2}{12} \left[3 \frac{u^0 - \text{th } u^0}{u^0 \text{th } u^0} + \frac{24hEI}{ql^4} \cdot \frac{u^0 \text{th } u^0}{u^0 - \text{th } u^0} \right] = \\ = -\frac{0,175 \cdot 150^2}{12} \left[3 \cdot \frac{1,741 - \text{th } 1,741}{1,741^2 \text{th } 1,741} + \frac{24 \cdot 15 \cdot 29530}{0,175 \cdot 150^4} \times \right. \\ \left. \times \frac{1,741^2 \text{th } 1,741}{1,741 - \text{th } 1,741} \right] = -415,5 \text{ т.м.}$$

На опоре В

$$M_{\xi=1} = -\frac{ql^2}{12} \left[3 \frac{u^0 - \text{th } u^0}{u^0 \text{th } u^0} - \frac{24hEI}{ql^4} \cdot \frac{u^0 \text{th } u^0}{u^0 - \text{th } u^0} \right] = \\ = -\frac{0,175 \cdot 150^2}{12} \left[3 \cdot \frac{1,741 - \text{th } 1,741}{1,741^2 \text{th } 1,741} - \frac{24 \cdot 15 \cdot 29530}{0,175 \cdot 150^4} \times \right. \\ \left. \times \frac{1,741^2 \text{th } 1,741}{1,741 - \text{th } 1,741} \right] = -137,6 \text{ т.м.}$$

Напряжения в нити

$$\sigma_{\xi=0,5} = \frac{15,9}{0,02231 \cdot 10 \cdot 0,995} \pm \frac{120,2}{0,003905 \cdot 10} = 72 \pm 3078 = \\ = \begin{cases} +3150 \text{ кг/см}^2 \\ -3006 \text{ кг/см}^2; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi=0} = \frac{15,9}{0,02231 \cdot 10 \cdot 0,995} \pm \frac{-415,5}{0,003905 \cdot 10} = 72 \mp 10640 = \\ = \begin{cases} -10568 \text{ кг/см}^2 \\ +10712 \text{ кг/см}^2; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi=1} = \frac{15,9}{0,02231 \cdot 10 \cdot 0,995} \pm \frac{-137,6}{0,003905 \cdot 10} = 72 \mp 3524 = \\ = \begin{cases} -3452 \text{ кг/см}^2 \\ +3596 \text{ кг/см}^2. \end{cases}$$

Полученные напряжения очень высоки, особенно в местах крепления нити к опорам. Поэтому жесткое закрепление концов нити до приложения начальной нагрузки не рекомендуется. Если же по тем или иным причинам их избежать нельзя, то для уменьшения напряжений от изгиба следует уменьшать стрелу провисания.

Считают, что если нить сплошного сечения заменить отдельными проволоками, имеющими суммарное сечение, равное сечению нити, то можно достичь более существенного снижения изгибных напряжений. Проведенные авторами исследования на частном примере показали, что при замене нити сплошного сечения четырьмя проволоками, имеющими то же сечение, что и нить, напряжения от изгиба уменьшаются в них на 9%, а при замене нити 100 проволоками — на 14%. Это объясняется тем, что при замене нити сплошного сечения проволоками меньшего диаметра кривизна и моменты сопротивления проволок меняются таким образом, что изгибные напряжения уменьшаются весьма незначительно.

Здесь следует указать на одно ошибочное решение, приведенное В. К. Качуриным [20]. При исследовании вопроса об изменении изгибных напряжений в нити сплошного сечения при замене ее проволоками, имеющими то же суммарное сечение, что и нить, В. К. Качурин пришел к выводу, что изгибные напряжения при этом не меняются. Такой результат был получен вследствие неверной предпосылки о том, что

$$H_n = \frac{H}{n},$$

где H и H_n — распор соответственно в нити и в проволоке;
 n — число проволок.

Для доказательства этого утверждения подставим в уравнение (2.19) значения

$$q = \frac{\pi d^4}{4} \gamma \text{ и } I = \frac{\pi d^4}{64} \text{ и получим } \frac{E f d^2}{\gamma I^4} = \left(\frac{1}{2u^0} - \frac{\text{ch } u^0 - 1}{u^0 \text{sh } u^0} \right),$$

где γ — объемный вес материала нити.

Левая часть этого уравнения связана с диаметром стержня квадратичной зависимостью, в то время как правая связана с распором (параметром u) более сложной зависимостью. Следовательно,

$$H_n \neq \frac{H}{n}.$$

Пример 5. По данным примера 1 требуется определить стрелу провисания и напряжения в трубе в середине и в четвертях пролета, когда дополнительная нагрузка располагается на половине пролета.

Прежде всего определяем параметр u из уравнения (2.113), которое после подстановки в него значений $\frac{a}{l} = \frac{1}{4}$; $\frac{b}{l} = \frac{3}{4}$ и $\xi = \frac{1}{4}$ (см. рис. 2.9) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{q+p}{q} \cdot \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{p}{2q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{6} - \frac{1}{u^2} \left(10 - \text{th}^2 u - \text{th}^2 \frac{u}{2} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{5}{u^3} \left(\text{th } u + 2 \text{th } \frac{u}{2} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\ & = \frac{1}{u^0} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^0} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^0. \end{aligned}$$

Вычисляем коэффициенты в левой части этого уравнения:

$$\frac{q+p}{q} = \frac{0,175 + 0,2}{0,175} = 2,143;$$

$$\left(\frac{p}{2q} \right)^2 = \left(\frac{0,2}{2 \cdot 0,175} \right)^2 = 0,3265.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{2,143}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \\ & + \frac{0,3265}{u^4} \left[\frac{5}{6} - \frac{1}{u^2} \left(10 - \text{th}^2 u - \text{th}^2 \frac{u}{2} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{5}{u^3} \left(\text{th } u + 2 \text{th } \frac{u}{2} \right) \right] - 0,7240 \cdot 10^{-5} u^2 = 0,002513. \end{aligned}$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 4,738$.

Для определения стрелы провисания воспользуемся формулой (2.118), которая после подстановки в нее значений $\frac{a}{l} = \frac{1}{4}$; $\frac{b}{l} = \frac{3}{4}$; $\frac{c}{l} = \frac{1}{4}$ и $\xi = \frac{1}{2}$, принимает следующий вид:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{\left(q + \frac{p}{2} \right) l^4}{EI} \cdot \frac{24}{5u^4} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{\text{ch } u - 1}{\text{ch } u} \right].$$

Подставляя в нее соответствующие данные, получаем:

$$f = \frac{5 \cdot \left(0,175 + \frac{0,2}{2} \right) 150^4 \cdot 24}{384 \cdot 29530 \cdot 5 \cdot 4,738^4} \left[\frac{4,738^2}{2} - \frac{\text{ch } 4,738 - 1}{\text{ch } 4,738} \right] = 5,988 \text{ м.}$$

Приращение стрелы провисания

$$\Delta f = 5,988 - 6,0 = -0,012 \text{ м.}$$

Распор в нити

$$H = \frac{4 \cdot 4,738^2 \cdot 29\,530}{150^2} = 117,8 \text{ т.}$$

Изгибающий момент в нагруженной четверти пролета определим по формуле (2.120)

$$\begin{aligned} M_{\xi=0,25} &= \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{u}{4} \operatorname{sh} \frac{3}{4} u}{\operatorname{ch} u} + \\ &+ \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{2}{u^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{3}{2} u + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} \frac{u}{2}}{\operatorname{sh} 2u} \right] = \\ &= \frac{0,175 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{4,738^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{4} \cdot 4,738 \operatorname{sh} \frac{3}{4} \cdot 4,738}{\operatorname{ch} 4,738} + \\ &+ \frac{0,2 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{2}{4,738^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{3}{2} \cdot 4,738 + \operatorname{ch} 4,738 \operatorname{sh} \frac{1}{2} \cdot 4,738}{\operatorname{sh} 2 \cdot 4,738} \right] = \\ &= 39,7 + 43,1 = 82,8 \text{ тм.} \end{aligned}$$

Момент в середине пролета вычисляем по той же формуле. После подстановки значения $\xi=0,5$ она принимает вид

$$M_{\xi=0,5} = \frac{\left(q + \frac{p}{2}\right) l^2}{8} \cdot \frac{2}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u}.$$

Подставляя в нее соответствующие данные, получаем:

$$M_{\xi=0,5} = \frac{\left(0,175 + \frac{0,2}{2}\right) 150^2}{8} \cdot \frac{2}{4,738^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 4,738 - 1}{\operatorname{ch} 4,738} = 67,7 \text{ тм.}$$

Изгибающий момент в ненагруженной четверти пролета определим по формуле (2.124).

$$\begin{aligned} M_{\xi=0,75} &= \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{3}{4} u \operatorname{sh} \frac{u}{4}}{\operatorname{ch} u} + \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}^3 \frac{u}{2}}{\operatorname{sh} 2u} = \\ &= \frac{0,175 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{4,738^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{3}{4} \cdot 4,738 \operatorname{sh} \frac{1}{4} \cdot 4,738}{\operatorname{ch} 4,738} + \\ &+ \frac{0,2 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{4}{4,738^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}^3 \frac{1}{2} \cdot 4,738}{\operatorname{sh} 2 \cdot 4,738} = 39,7 + 2,2 = 41,9 \text{ тм.} \end{aligned}$$

Напряжения в нити

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi=0,25} &= \frac{117,8}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{82,8}{0,003905 \cdot 10} = 531 \pm 2120 = \begin{cases} +2651 \text{ кг/см}^2 \\ -1589 \text{ кг/см}^2 \end{cases} \\ \sigma_{\xi=0,50} &= \frac{117,8}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{67,7}{0,003905 \cdot 10} = 531 \pm 1734 = \begin{cases} +2265 \text{ кг/см}^2 \\ -1203 \text{ кг/см}^2 \end{cases} \\ \sigma_{\xi=0,75} &= \frac{117,8}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{41,9}{0,003905 \cdot 10} = 531 \pm 1073 = \begin{cases} +1604 \text{ кг/см}^2 \\ -542 \text{ кг/см}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, при расположении дополнительной равномерно распределенной нагрузки на половине пролета напряжения в нити оказываются большими, чем в случае, когда дополнительная нагрузка той же интенсивности располагается по всему пролету.

Пример 6. По данным примера 1 требуется определить напряжения в трубе в четверти пролета при действии начальной нагрузки в случае устройства в середине пролета шарнира.

Распор в нити

$$H = \frac{ql^2}{8f^0} = \frac{0,175 \cdot 150^2}{8 \cdot 6} = 82,0 \text{ т.}$$

Соответствующий этому распору параметр

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H}{EI}} = \frac{150}{2} \sqrt{\frac{82}{29\,530}} = 3,953.$$

Изгибающий момент в четверти пролета определяем по формуле (2.174), которая после подстановки в нее значения $\xi = \frac{1}{4}$ принимает вид

$$M_{\xi=0,25} = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{u}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{u}{2}}.$$

Подставляя в нее соответствующие данные, получаем

$$M_{\xi=0,25} = \frac{0,175 \cdot 150^2}{8} \cdot \frac{2}{3,953^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{3,953}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{3,953}{2}} = 45,9 \text{ тм.}$$

Напряжение в нити в четверти пролета

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi=0,25} &= \frac{82}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{45,9}{0,003905 \cdot 10} = 369 \pm 1175 = \\ &= \begin{cases} +1544 \text{ кг/см}^2 \\ -806 \text{ кг/см}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, при постановке шарнира в середине пролета напряжения от начальной нагрузки в растянутых волокнах нити уменьшаются на 26%, а в сжатых — на 36%.

Пример 7. По данным примера 1 требуется определить стрелу провисания и напряжения в трубе в четверти и в середине пролета при условии, что начальная нагрузка не вызывает в нити изгибных напряжений.

Определяем распор в нити при действии начальной нагрузки

$$H^0 = \frac{q l^2}{8 f^0} = \frac{0,175 \cdot 150^2}{8 \cdot 6} = 82 \text{ т.}$$

При этом параметр u^0 будет

$$u^0 = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{H^0}{EI}} = \frac{150}{2} \sqrt{\frac{82}{29530}} = 3,953.$$

При действии дополнительной нагрузки параметр u определяем из уравнения (3.5)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \\ & + \frac{5}{6} \left(\frac{q+p}{q} \right) \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) - \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 \right] + \\ & + \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 \left[\left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \\ & = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^2}. \end{aligned}$$

Вычисляем правую часть этого уравнения

$$\frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \cdot 0,1536 \right)^2 = 0,002731;$$

$$\left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 = \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{0,1536 \cdot 0,2510}{0,9950} \right)^2 = 0,7240 \cdot 10^{-5};$$

$$\left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^2} = 0,7240 \cdot 10^{-5} \cdot 3,953^2 = 0,0001131.$$

Таким образом,

$$\frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^2} = 0,002731 - 0,0001131 = 0,0026179.$$

Вычисляем коэффициенты в левой части уравнения (3.5)

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 = \left(\frac{0,175 + 0,2}{0,175} \right)^2 = 4,59;$$

$$\frac{5}{6} \left(\frac{q+p}{q} \right) \Phi = \frac{5}{6} \left(\frac{0,175 + 0,2}{0,175} \right) 0,1536 = 0,2743;$$

$$\left(\frac{5}{12} \Phi \right)^2 = \left(\frac{5}{12} \cdot 0,1536 \right)^2 = 0,04096.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} & \frac{4,59}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \frac{0,2743}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 \right] + 0,04096 \left[\left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] - \\ & - 0,7240 \cdot 10^{-5} u^2 = 0,0026179. \end{aligned}$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 5,725$.

Стрелу провисания нити при действии начальной и дополнительной нагрузок определяем по формуле (3.6), положив в ней $h=0$ и $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} f &= \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p) l^4}{EI} \cdot \frac{24}{5 u^4} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{\text{ch } u - 1}{\text{ch } u} \right) + \frac{2 f^0}{u^2} \cdot \frac{\text{ch } u - 1}{\text{ch } u} = \\ &= \frac{5}{384} \cdot \frac{(0,175 + 0,2) 150^4}{29530} \cdot \frac{24}{5 \cdot 5,725^4} \left(\frac{5,725^2}{2} - \frac{153,218 - 1}{153,218} \right) + \\ &+ \frac{2 \cdot 6}{5,725^2} \cdot \frac{153,218 - 1}{153,218} = 6,12 \text{ м.} \end{aligned}$$

Приращение стрелы провисания

$$\Delta f = f - f^0 = 6,12 - 6,0 = 0,12 \text{ м.}$$

Распор в нити

$$H = \frac{4 \cdot 5,725^2 \cdot 29530}{150^2} = 172,1 \text{ т.}$$

Изгибающие моменты в нити определяем по формуле (3.8)

$$M = \frac{(q+p) l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1 - \xi)}{\text{ch } u} - \frac{16 f^0 EI}{l^2} \cdot \frac{\text{sh } u \xi \text{ sh } u (1 - \xi)}{\text{ch } u}.$$

$$\begin{aligned} M_{\xi=0,25} &= \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,725^2} \cdot \frac{\text{sh } (5,725 \cdot 0,25) \text{ sh } 5,725 (1 - 0,25)}{\text{ch } 5,725} - \\ &- \frac{16 \cdot 6 \cdot 29530}{150^2} \cdot \frac{\text{sh } (5,725 \cdot 0,25) \text{ sh } 5,725 (1 - 0,25)}{\text{ch } 5,725} = 0,76 \text{ тм.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\xi=0,5} &= \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,725^2} \cdot \frac{\text{sh}^2 (5,725 \cdot 0,5)}{\text{ch } 5,725} - \\ &- \frac{16 \cdot 6 \cdot 29530}{150^2} \cdot \frac{\text{sh}^2 (5,725 \cdot 0,5)}{\text{ch } 5,725} = 0,8 \text{ тм.} \end{aligned}$$

Напряжения в нити

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi=0,25} &= \frac{172,1}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{0,76}{0,003905 \cdot 10} = 775 \pm 19 = \\ &= \begin{cases} +794 \text{ кг/см}^2 \\ +756 \text{ кг/см}^2; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi=0,5} &= \frac{172,1}{0,02231 \cdot 0,9950 \cdot 10} \pm \frac{0,8}{0,003905 \cdot 10} = 775 \pm 20 = \\ &= \begin{cases} 795 \text{ кг/см}^2 \\ 755 \text{ кг/см}^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, существенное (до 4 и более раз) снижение напряжений в нитях конечной жесткости может быть достигнуто путем соединения (сварки) отдельных звеньев нити по параболической кривой.

§ 4.4. Замечания по расчету нитей

Замечание 1. Приведенные выше расчетные зависимости могут быть существенно упрощены при использовании таблиц с заранее вычисленными значениями функций, зависящих от параметра u , абсциссы ξ и коэффициентов, характеризующих положение нагрузок $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{l}$ и $\frac{c}{l}$.

Покажем это на примере нити, работающей с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок, распределенных по всему пролету при шарнирном закреплении концов.

С этой целью для определения параметра u перепишем выражение (2.27) следующим образом:

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^2 \psi - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi}\right)^2 u^2 = \psi^0 - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi}\right)^2 u^{02}, \quad (4.5)$$

$$\text{где } \psi = \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right];$$

$$\psi^0 = \frac{1}{u^{04}} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{02}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right].$$

Расчетные формулы (2.28)–(2.31) примут следующий вид:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p) l^4}{EI} \psi_y; \quad (4.6)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi + \frac{(q+p) l^3}{24EI} \psi_{\text{tg } \alpha}; \quad (4.7)$$

$$M = \frac{(q+p) l^2}{8} \psi_M; \quad (4.8)$$

$$Q = \frac{(q+p) l}{2} \psi_Q, \quad (4.9)$$

$$\text{где } \psi_y = \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right];$$

$$\psi_{\text{tg } \alpha} = \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \frac{\text{th } u}{2} + \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u} \right];$$

$$\psi_M = \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh } u\xi \text{ sh } u(1 - \xi)}{\text{ch } u};$$

$$\psi_Q = \frac{\text{th } u}{2} - \frac{\text{sh } u\xi \text{ ch } u(1 - \xi)}{\text{ch } u}.$$

Таблица 4.1

Числовые значения функций ψ , ψ_y , $\psi_{\text{tg } \alpha}$, ψ_M и ψ_Q для расчета шарнирно закрепленных нитей, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, расположенной по всему пролету

u	$\psi \cdot 10^3$	$\xi = 0,25$				$\xi = 0,5$	
		$\psi_y \cdot 10^5$	$\psi_{\text{tg } \alpha} \cdot 10^5$	$\psi_M \cdot 10^5$	$\psi_Q \cdot 10^5$	$\psi_y \cdot 10^5$	$\psi_M \cdot 10^5$
0,1	10756,00	70963,7	68469,1	74704,3	2488,59	99595,3	99585,0
0,2	10450,00	70117,2	67639,9	73831,4	4909,81	98399,4	98360,0
0,3	10048,60	68750,8	66301,1	72421,8	7201,64	96468,9	96382,4
0,4	9519,10	66925,3	64512,6	70538,3	9311,87	93889,7	93740,7
0,5	8899,25	64716,4	62348,7	68258,7	11201,10	90769,0	90544,9
0,6	8220,38	62207,5	59891,2	65668,9	12843,90	87224,8	86916,3
0,7	7513,68	59482,9	57223,0	62855,6	14228,80	83376,2	82977,4
0,8	6805,92	56622,3	54422,2	59900,7	15356,00	79335,8	78843,8
0,9	6118,32	53696,7	51558,4	56877,4	16235,70	75204,1	74618,6
1,0	5466,31	50766,2	48690,6	53847,4	16884,90	71066,1	70389,1
1,1	4859,970	47879,2	45866,4	50860,9	17325,3	66990,2	66225,8
1,2	4304,810	45073,2	43122,4	47956,1	17580,7	63029,2	62182,5
1,3	3802,790	42375,0	40485,0	45161,0	17675,7	59221,2	58298,4
1,4	3353,250	39802,9	47972,1	42494,3	17634,1	55592,1	54599,8
1,5	2953,780	37367,9	35594,3	39967,6	17478,2	52157,3	51102,6
1,6	2600,870	35075,4	33357,0	37586,3	17228,3	48924,2	47814,2
1,7	2290,450	32926,1	31260,9	35351,5	16902,6	45894,1	44735,8
1,8	2018,270	30917,9	29303,6	33260,9	15516,9	43063,8	41863,9
1,9	1780,120	29046,1	27480,7	31309,8	16085,0	40426,6	39191,6
2,0	1572,010	27304,6	25786,1	29492,3	15618,6	37974,1	36709,9
2,1	1390,270	25686,5	24212,9	27801,1	15127,4	35696,1	34408,4
2,2	1231,560	24184,2	22753,6	26228,5	14619,9	33582,1	32276,1
2,3	1092,910	22790,1	21400,8	24766,9	14102,8	31621,2	30301,6
2,4	971,695	21496,5	20146,8	23408,5	13581,8	29802,6	28473,8
2,5	865,609	20296,1	18984,4	22145,7	13061,3	28115,8	26781,7
2,6	772,643	19181,80	17906,70	20971,4	12545,30	26550,9	25215,0
2,7	691,057	18146,90	16907,00	19878,8	12036,50	25098,3	23763,9
2,8	619,340	17185,30	15979,20	18861,5	11537,40	23749,3	22419,1
2,9	556,192	16291,00	15117,50	17913,7	11049,70	22495,5	21172,1
3,0	500,488	15458,70	14316,70	17029,8	10574,80	21329,4	20014,9
3,1	451,260	14683,50	13571,80	16204,8	10113,80	20243,8	18940,4
3,2	407,673	13960,80	12878,30	15434,0	9667,28	19232,4	17941,6
3,3	369,007	13286,30	12232,10	14713,3	9235,76	18289,2	17012,6
3,4	334,640	12656,40	11629,40	14038,6	8819,52	17408,8	16147,5
3,5	304,036	12067,30	11066,70	13406,4	8418,64	16586,2	15341,4
3,6	276,731	11516,00	10541,00	12813,4	8033,12	15816,8	14589,4
3,7	252,323	10999,50	10049,20	12256,7	7662,80	15096,6	13887,3
3,8	230,465	10515,20	9588,77	11733,5	7307,48	14421,4	13231,0
3,9	210,853	10060,50	9157,25	11241,4	6966,85	13788,2	12617,1
4,0	193,225	9633,31	8752,44	10777,9	6640,60	13193,7	12042,3
4,1	177,3520	9231,49	8372,34	10341,10	6328,33	12634,80	11503,40
4,2	163,0350	8853,20	8015,09	9928,97	6029,65	12109,10	10997,90
4,3	150,0990	8496,72	7679,01	9539,83	5744,12	11614,10	10523,20
4,4	138,3910	8160,49	7362,56	9172,04	5471,31	11147,50	10077,00
4,5	127,7770	7843,07	7064,31	8824,13	5210,77	10707,30	9657,13
4,6	118,1410	7543,13	6782,98	8494,74	4962,05	10291,70	9261,80
4,7	109,3770	7259,47	6517,36	8182,63	4724,70	9898,87	8889,18
4,8	101,3950	6990,97	6266,37	7886,65	4498,26	9527,32	8537,69
4,9	94,1151	6736,62	6029,00	7605,74	4282,31	9175,60	8205,81
5,0	87,4649	6495,46	5804,33	7338,93	4076,41	8842,35	7892,20

Продолжение табл. 4.1

u	$\psi \cdot 10^5$	$\xi=0,25$				$\xi=0,5$	
		$\psi_y \cdot 10^5$	$\psi_{tg \alpha} \cdot 10^5$	$\psi_M \cdot 10^5$	$\psi_Q \cdot 10^5$	$\psi_y \cdot 10^5$	$\psi_M \cdot 10^5$
5,1	81,3818	6266,64	5591,51	7085,31	3880,14	8526,36	7595,50
5,2	75,8096	6049,34	5389,75	6844,08	3693,08	8226,49	7314,80
5,3	70,6987	5842,84	5198,32	6614,44	3514,84	7941,71	7048,80
5,4	66,0047	5646,44	5016,57	6395,69	3345,03	7671,05	6796,70
5,5	61,6881	5459,53	4848,88	6187,19	3183,28	7413,62	6557,50
5,6	57,7136	5281,51	4679,67	5988,30	3029,22	7168,59	6330,30
5,7	54,0497	5111,84	4523,42	5798,48	2882,51	6935,21	6114,50
5,8	50,6681	4950,02	4374,63	5617,19	2742,81	6712,77	5909,30
5,9	47,5435	4795,59	4232,86	5443,94	2609,80	6500,61	5714,00
6,0	44,6530	4648,11	4097,69	5278,28	2483,17	6298,13	5528,01
6,1	41,9762	4507,19	3968,72	5119,78	2362,62	6104,76	5350,79
6,2	39,4947	4372,44	3845,59	4968,05	2247,88	5919,97	5181,80
6,3	37,1918	4243,52	3727,97	4822,72	2138,66	5743,28	5020,50
6,4	35,0525	4120,11	3615,54	4683,45	2034,72	5574,22	4866,50
6,5	33,0632	4001,90	3508,00	4549,91	1935,79	5412,38	4719,49
6,6	31,2115	3888,61	3405,09	4421,79	1841,65	5257,36	4578,80
6,7	29,4864	3779,97	3306,55	4298,83	1752,06	5108,79	4444,37
6,8	27,8777	3675,74	3212,14	4180,75	1666,80	4966,32	4315,62
6,9	26,3761	3575,69	3121,64	4067,31	1585,68	4829,62	4192,33
7,0	24,9734	3479,60	3034,84	3958,27	1508,49	4698,41	4074,19
7,1	23,6618	3387,26	2951,54	3853,41	1435,050	4572,38	3960,92
7,2	22,4345	3298,49	2871,57	3752,53	1365,170	4451,28	3852,26
7,3	21,2851	3213,12	2794,76	3655,44	1298,680	4334,86	3747,98
7,4	20,2077	3130,96	2720,93	3561,95	1235,420	4222,88	3647,84
7,5	19,1971	3051,87	2649,95	3471,89	1175,240	4115,13	3551,62
7,6	18,2484	2975,69	2581,67	3385,10	1117,980	4011,39	3459,14
7,7	17,3571	2902,29	2515,96	3301,44	1063,500	3911,48	3370,20
7,8	16,5191	2831,53	2452,69	3220,74	1011,680	3815,20	3284,62
7,9	15,7308	2763,29	2391,75	3142,89	962,378	3722,39	3202,21
8,0	14,9886	2697,46	2333,02	3067,74	915,475	3632,89	3122,90
8,1	14,2893	2633,92	2276,40	2995,19	870,854	3546,54	3046,47
8,2	13,6301	2572,57	2221,80	2925,11	828,406	3463,20	2972,79
8,3	13,0082	2513,31	2169,12	2857,40	788,025	3382,72	2901,74
8,4	12,4211	2456,06	2118,26	2791,95	749,610	3304,99	2833,19
8,5	11,8666	2400,71	2069,16	2728,67	713,067	3229,88	2767,04
8,6	11,3425	2347,19	2021,72	2667,47	678,303	3157,28	2703,17
8,7	10,8468	2295,42	1975,89	2608,25	645,233	3087,07	2641,48
8,8	10,3778	2245,32	1931,58	2550,93	613,774	3019,16	2581,87
8,9	9,93367	2196,83	1888,73	2495,44	583,849	2953,44	2524,24
9,0	9,51292	2149,88	1847,28	2441,70	555,381	2889,82	2468,53
9,1	9,11409	2104,39	1807,17	2389,64	528,301	2828,22	2414,63
9,2	8,73583	2060,33	1768,34	2339,19	502,541	2768,55	2362,47
9,3	8,37689	2017,61	1730,74	2290,29	478,036	2710,73	2311,98
9,4	8,03609	1976,20	1694,32	2242,88	454,726	2654,69	2263,09
9,5	7,71237	1936,04	1659,02	2196,89	432,552	2600,36	2215,73
9,6	7,40469	1897,08	1624,81	2152,28	411,459	2547,66	2169,84
9,7	7,11214	1859,27	1591,65	2108,98	391,395	2496,60	2125,36
9,8	6,83382	1822,57	1559,48	2066,96	372,309	2446,92	2082,23
9,9	6,56892	1786,93	1528,27	2026,15	354,153	2398,77	2040,40
10,0	6,31667	1752,32	1497,98	1986,52	336,882	2352,00	1999,82
10,1	6,07635	1718,70	1468,58	1948,03	320,453	2306,59	1960,43
10,2	5,84731	1686,03	1440,03	1910,62	304,826	2262,46	1922,19
10,3	5,62891	1654,27	1412,30	1874,26	289,961	2219,59	1885,06
10,4	5,42056	1623,40	1385,36	1838,91	275,820	2177,91	1849,00

Продолжение табл. 4.1

u	$\psi \cdot 10^5$	$\xi=0,25$				$\xi=0,5$	
		$\psi_y \cdot 10^5$	$\psi_{tg \alpha} \cdot 10^5$	$\psi_M \cdot 10^5$	$\psi_Q \cdot 10^5$	$\psi_y \cdot 10^5$	$\psi_M \cdot 10^5$
10,5	5,22173	1593,37	1359,18	1804,54	262,369	2137,38	1813,96
10,6	5,03189	1564,16	1333,74	1771,11	249,573	2097,97	1779,90
10,7	4,85057	1535,74	1309,00	1738,58	237,402	2059,64	1746,80
10,8	4,67731	1508,09	1284,93	1706,93	225,824	2022,33	1714,61
10,9	4,51168	1481,17	1261,52	1676,13	214,811	1986,03	1683,30
11,0	4,35329	1454,95	1238,75	1646,14	204,335	1950,69	1652,84
11,1	4,20177	1429,42	1216,58	1616,93	194,370	1916,28	1623,20
11,2	4,05675	1404,56	1195,00	1588,49	184,891	1882,76	1594,34
11,3	3,91792	1380,33	1173,99	1560,78	175,874	1850,11	1566,25
11,4	3,78495	1356,72	1153,52	1533,79	167,296	1818,30	1538,90
11,5	3,65755	1333,70	1133,59	1507,47	159,137	1787,30	1512,26
11,6	3,53546	1311,26	1114,16	1481,83	151,376	1757,08	1486,30
11,7	3,41839	1289,38	1095,29	1456,82	143,994	1727,62	1461,00
11,8	3,30612	1268,04	1076,78	1432,43	136,971	1698,89	1436,35
11,9	3,19840	1247,22	1058,78	1408,65	130,291	1670,86	1412,31
12,0	3,09502	1226,91	1041,24	1385,45	123,937	1643,52	1388,87

Примечание. При $\xi=0,5$ функции $\psi_{tg \alpha}$ и ψ_Q равны 0.

Отсюда видно, что значения y , $y = tg \alpha$, M и Q получаются умножением соответствующих выражений, полученных для балки, находящейся под действием поперечной нагрузки $(q+p)$, на функции ψ_y , $\psi_{tg \alpha}$, ψ_M и ψ_Q , зависящие от параметра u и абсциссы ξ .

Функции $\psi_y, \dots, \psi_Q$ равны единице при $u=0$, т. е., когда распор $H=0$. С ростом распора каждая из этих функций уменьшается. Таким образом, функции $\psi_y, \dots, \psi_Q$ показывают, насколько уменьшаются в нити прогибы, углы поворота и расчетные усилия в сравнении с балкой без осевой силы при прочих равных условиях.

Числовые значения функций ψ , ψ_y , $\psi_{tg \alpha}$, ψ_M и ψ_Q при $\xi=0,25$ и $\xi=0,5$ приведены в табл. 4.1.

Замечание 2. При выводе уравнений для определения параметра u использовано условие неразрывности деформаций в виде

$$L = L_0 + \Delta L.$$

Если пренебречь упругими деформациями ΔL и принять условие неразрывности в виде $L = L_0$, то в уравнениях для определения параметра u члены $\left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi}\right)^2 u^2$ и $\left(\frac{5}{12} \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi}\right)^2 u^2$ будут равны нулю. При этом погрешность в вычислении распора не будет превышать 1% для нитей со стрелой провисания 1/10 пролета и 3% для нитей со стрелой провисания 1/20 пролета*. При значениях стрел провисания, меньших 1/20 пролета, влияние упругих деформаций будет более существенным.

* При дополнительной равномерно распределенной нагрузке $p=10 q$.

§ 5.1. Пространственный изгиб нити

В общем случае на свободно провисающую нить могут действовать вертикальная и горизонтальная (ветровая) нагрузки. Любая другая нагрузка, приложенная к нити под углом к вертикальной плоскости, не равным 90° , может быть разложена на вертикальную и горизонтальную составляющие.

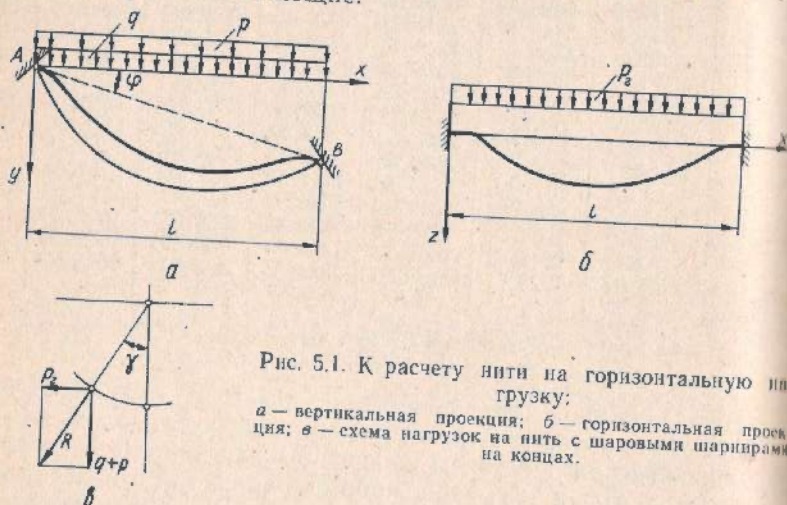


Рис. 5.1. К расчету нити на горизонтальную нагрузку:
а — вертикальная проекция; б — горизонтальная проекция; в — схема нагрузок на нить с шаровыми шарнирами на концах.

В зависимости от конструкции креплений концов нити к опорам рассмотрим работу нити при трех характерных граничных условиях:

при свободном повороте концов нити от начальной и дополнительной вертикальной и горизонтальной нагрузок (при шаровых шарнирах);

при свободном повороте концов нити от начальной и дополнительной вертикальной нагрузок и жестком закреплении от дополнительной горизонтальной нагрузки (при цилиндрических шарнирах);

при свободном повороте от начальной и жестком закреплении концов нити от дополнительной вертикальной и горизонтальной нагрузок.

Если нить будет закреплена на опорах А и В (рис. 5.1, а) при помощи шаровых шарниров (первый случай граничных условий), то определение усилий в ней будет производиться достаточно просто. Так, при одновременном действии начальной q и дополнительных вертикальной p и горизонтальной p_r нагрузок она повернется относительно прямой АВ на угол γ (рис. 5.1, в), который может быть определен по формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{p_r}{q + p}. \quad (5.1)$$

При этом равнодействующая нагрузок

$$R = \sqrt{(q + p)^2 + p_r^2}. \quad (5.2)$$

Хотя нагрузка R прилагается не в вертикальной плоскости, она по-прежнему действует в плоскости провисания нити. Поэтому определение усилий в нити с шаровыми шарнирами на концах проводим аналогично случаю, когда начальная (в данном случае $q + p$) и дополнительная $R - (q + p)$ нагрузки действуют в одной и той же плоскости.

Если же нить будет закреплена на опорах при помощи цилиндрических шарниров, допускающих свободный поворот ее концов от начальной q и дополнительной вертикальной p нагрузок и исключающих поворот от горизонтальной нагрузки p_r (второй случай граничных условий), то кривая провисания нити уже не будет плоской, и задача усложнится.

Рассмотрим нить, имеющую одинаковые моменты инерции сечений относительно всех центральных осей.

Решение задачи осуществим в такой последовательности.

Определим длину нити при действии начальной нагрузки q

$$L^0 = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \int_0^l y^{0^2} dx. \quad (5.3)$$

После приложения дополнительной вертикальной нагрузки p длина нити составит

$$L = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx. \quad (5.4)$$

При действии вертикальной $q + p$ и горизонтальной p_r нагрузок

$$L' = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \left[\int_0^l y'^2 dx + \int_0^l z'^2 dx \right]. \quad (5.5)$$

С другой стороны,

$$L = L^0 + \frac{(H + H^0) l}{EF \cos^2 \varphi}; \quad (5.6)$$

$$L' = L + \frac{(H' - H) l}{EF \cos^2 \varphi} = L^0 + \frac{(H' - H^0) l}{EF \cos^2 \varphi}. \quad (5.7)$$

Подставляя выражения (5.3) и (5.5) в (5.7), после преобразований получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l z'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l y^{0^2} dx + \frac{4r^2}{l \cos^2 \varphi} (u^2 - u^{0^2}). \quad (5.8)$$

При заданном расположении координатных осей (рис. 5.1, а) значения постоянных интегрирования при действии начальной q и

дополнительной вертикальной p нагрузок будут равны (2.1) — (2.4) и (2.23) — (2.26).

Для определения постоянных интегрирования при действии дополнительной горизонтальной p_r нагрузки (рис. 5.1, б) воспользуемся следующими условиями:

при $x=0$ $z=0$, $z'=0$;

при $x=l$ $z=0$, $z'=0$.

Подставляя в эти условия значения

$$z = C_1 \operatorname{ch} 2u\xi + C_2 \operatorname{sh} 2u\xi + C_3 x + C_4 - \frac{p_r l^2 x^2}{8u^2 EI}$$

$$\text{и } z' = C_1 \frac{2u}{l} \operatorname{sh} 2u\xi + C_2 \frac{2u}{l} \operatorname{ch} 2u\xi + C_3 - \frac{p_r l^2 x}{4u^2 EI}$$

и решая совместно полученные уравнения, находим:

$$C_1 = \frac{p_r l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3 \operatorname{th} u}; \quad (5.9)$$

$$C_2 = -\frac{p_r l^4}{16EI} \cdot \frac{1}{u^3}; \quad (5.10)$$

$$C_3 = \frac{p_r l^3}{8EI} \cdot \frac{1}{u^2}; \quad (5.11)$$

$$C_4 = -C_1. \quad (5.12)$$

Подставляя в (5.8) соответствующие значения постоянных интегрирования для y'' , y' и z' , получим уравнение для определения параметра u :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{p_r}{q} \right)^2 \frac{4}{u^4} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4 \operatorname{th}^2 u} - \frac{3}{4u \operatorname{th} u} \right) - \\ & - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{1}{u^{0^4}} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{5}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^4}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ординаты и расчетные усилия в произвольных сечениях нити в вертикальной плоскости определяем по формулам (2.28) — (2.31).

Для определения ординат и расчетных усилий в произвольных сечениях нити в горизонтальной плоскости подставим в уравнения (1.9) — (1.12) значения постоянных интегрирования из (5.9) — (5.12). После преобразований получим:

$$z = \frac{p_r l^4}{384EI} \cdot \frac{48}{u^4} \left[u^2 \xi (1 - \xi) - u \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right]; \quad (5.14)$$

$$z' = \operatorname{tg} \beta = -\frac{p_r l^3}{128EI} \cdot \frac{32}{u^3} \left[u\xi - u \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right]; \quad (5.15)$$

$$M_r = \frac{p_r l^3}{12} \cdot \frac{6}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\}; \quad (5.16)$$

$$Q_r = \frac{p_r l}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1 - \xi)}{\operatorname{sh} u} \right]. \quad (5.17)$$

Если концы нити будут закреплены таким образом, что они не смогут свободно поворачиваться от дополнительных вертикальной и горизонтальной p_r нагрузок (третий случай граничных условий), то значения постоянных интегрирования для начальной q и дополнительной горизонтальной p_r нагрузок останутся такими же, а для дополнительной вертикальной нагрузки p будут равны (2.32) — (2.35). При этом уравнение для определения параметра u примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] - \\ & - 2 \frac{q+p}{q} \left[\frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \left[\frac{1}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{p_r}{q} \right)^2 \left[\frac{4}{u^4} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{u^2} - \frac{3}{4u \operatorname{th} u} - \frac{1}{4 \operatorname{th}^2 u} \right) \right] - \\ & - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{1}{u^{0^4}} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \\ & - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^4}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ординаты и расчетные усилия в произвольных сечениях нити в вертикальной плоскости определяем из выражений (2.37) — (2.40), а в горизонтальной плоскости вычисляем по тем же формулам, что и в случае крепления концов нити к опорам с помощью цилиндрических шарниров, т. е. по (5.14) — (5.17).

Полученные расчетные формулы следует считать приближенными в том смысле, что при их выводе не учитывались деформации кручения, предполагающиеся малыми и не влияющими на изгиб. Для практических расчетов эти формулы достаточно точны.

§ 5.2. Кручение при пространственной деформации нити

Крутящие моменты возникают в нити в тех случаях, когда ее опорные сечения закреплены от поворота в горизонтальной плоскости (второй и третий случаи граничных условий). При этом отклоненная от вертикальной плоскости кривая провисания нити не будет плоской и в общем случае ее напряженно-деформированное состояние можно описать системой трех уравнений: два уравнения типа (1.7) относительно функций вертикального и горизонтального

перемещений, но с дополнительными членами, характеризующими пространственную искривленность нити, и уравнение кручения, в котором крутящий момент связан с другими неизвестными сложной зависимостью.

Так как эти уравнения нелинейны и нахождение их точных решений представляет собой довольно сложную задачу, то приводить

их здесь не будем. Сделаем только одно замечание. В связи с тем, что крутящие моменты при действии боковой нагрузки определяются степенью кривизны и кручения нити, то из-за ее пологости следует ожидать, что величины крутящих моментов будут невелики. Для получения возможности оценки величины и характера распределения по длине нити крутящих моментов ограничимся изложением приближенного решения, рассматривая равновесие полупролета нити (рис. 5.2), загруженной внешней равномерно распределенной нагрузкой и внутренними усилиями в месте разреза [20]. При этом внутренние усилия и геометрия нити определяются в ходе решения предыдущей задачи, без учета влияния кручения, в чем и заключается приближенность данного решения.

Определим величину крутящего момента от горизонтальной нагрузки в сечении m с абсциссой x . В сечении n с абсциссой x_1 , расположенном на расстоянии $ds \approx dx$ от сечения m , будет действовать сила $p dx$. Плечо этой силы

$$h_y = [(x_1 - x) \operatorname{tg} \alpha_x - (y_1 - y)] \cos \alpha_x = (x_1 - x) \sin \alpha_x - (y_1 - y) \cos \alpha_x.$$

Элементарный момент в сечении m от горизонтальной нагрузки

$$dM_{p_r} = -p_r [(x_1 - x) \sin \alpha_x - (y_1 - y) \cos \alpha_x] dx.$$

Интегрируя по длине нити от x до $\frac{l}{2}$, получим момент в сечении m от нагрузки p_r относительно касательной к нити в точке m

$$M_p = -p_r \sin \alpha_x \left(\frac{l^2}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{lx}{2} \right) + p_r \cos \alpha_x \left[\int_x^{\frac{l}{2}} y_1 dx_1 - y \left(\frac{l}{2} - x \right) \right].$$

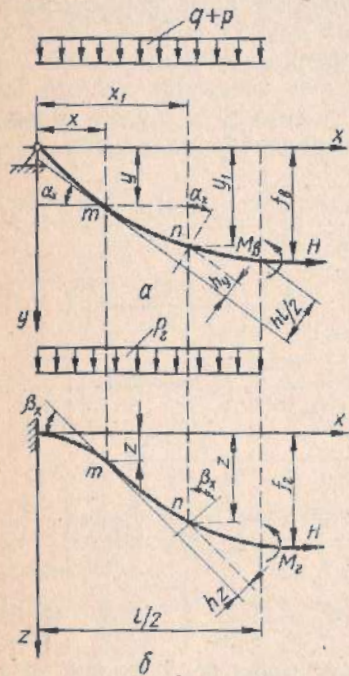


Рис. 5.2. К определению крутящих моментов:

a — вертикальная проекция; b — горизонтальная проекция.

Крутящий момент от горизонтальной нагрузки

$$M_{p_r}^k = -p_r \sin \alpha_x \cos \beta_x \left(\frac{l^2}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{lx}{2} \right) + p_r \cos \alpha_x \cos \beta_x \left[\int_x^{\frac{l}{2}} y_1 dx_1 - y \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]. \quad (5.19)$$

Аналогично получим крутящий момент от вертикальной нагрузки

$$M_q^k = (q + p) \sin \beta_x \cos \alpha_x \left(\frac{l^2}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{lx}{2} \right) - (q + p) \cos \alpha_x \cos \beta_x \left[\int_x^{\frac{l}{2}} z_1 dx_1 - z \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]. \quad (5.20)$$

Интегралы в правых частях равенств (5.19) и (5.20) могут быть определены аналитически. После подстановки выражений (2.28), (3.7) и (5.14) вместо y_1 и z_1 и интегрирования для нити с опорами на одном уровне получим:

$$N_{II} = \int_x^{\frac{l}{2}} y_1 dx_1 = \frac{(q + p) l^3}{4EI} \left(\frac{l}{2u} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{6} - \xi^2 + \frac{2}{3} \xi^3 \right) + \frac{1}{2u^3 \operatorname{ch} u} [\operatorname{sh} u (1 - 2\xi) - u \operatorname{ch} u (1 - 2\xi)] \right\}; \quad (5.21)$$

$$R_{II} = \int_x^{\frac{l}{2}} z_1 dx_1 = \frac{p_r l^3}{4EI} \left(\frac{l}{2u} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{6} - \xi^2 + \frac{2}{3} \xi^3 \right) + \frac{1}{2u^2 \operatorname{sh} u} [\operatorname{sh} u (1 - 2\xi) - u \operatorname{ch} u (1 - 2\xi)] \right\}; \quad (5.22)$$

при третьем случае граничных условий

$$N_{III} = \frac{(q + p) l^3}{4EI} \left(\frac{l}{2u} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{6} - \xi^2 + \frac{2}{3} \xi^3 \right) + \frac{1}{2u^2 \operatorname{sh} u} \left[1 - \frac{q}{q + p} \cdot \frac{u^2}{u^0} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] [\operatorname{sh} u (1 - 2\xi) - u \operatorname{ch} u (1 - 2\xi)] \right\}; \quad (5.23)$$

$$R_{III} = R_{II}.$$

От действия изгибающих моментов M_r и M_s и распора в сечении x возникнут также крутящие моменты. Они будут равны:

$$M_r^k = M_r \sin \alpha_x \cos \beta_x; \quad (5.25)$$

$$M_s^k = -M_s \sin \beta_x \cos \alpha_x; \quad (5.26)$$

$$M_n^k = \frac{4u^2 EI}{l^2} [(f_s - y) \sin \beta_x \cos \alpha_x - (f_r - z) \sin \alpha_x \cos \beta_x]. \quad (5.27)$$

Суммарный крутящий момент в сечении x будет равен сумме крутящих моментов от всех воздействий

$$M^k = \frac{l^2}{2} \left(\frac{1}{4} - \xi + \xi^2 \right) [p_r \sin \alpha_x \cos \beta_x - (q + p) \sin \beta_x \cos \alpha_x] + \\ + \cos \alpha_x \cos \beta_x \{ (q + p) R - p_r N + l (0,5 - \xi) [p_r y - (q + p) z] \} + \\ + M_b \sin \beta_x \cos \alpha_x - M_r \sin \alpha_x \cos \beta_x + \left(\frac{2u}{l} \right)^2 EI [(f_b - y) \times \\ \times \sin \beta_x \cos \alpha_x - (f_r - z) \sin \alpha_x \cos \beta_x]. \quad (5.28)$$

Легко убедиться, что для середины пролета $M^k = 0$. Крутящий момент на опоре

$$M^k = [p_r N - (q + p) R] \cos \alpha_0 - \left(\frac{p_r l^2}{8} - M_r - \frac{4u^2 EI}{l^2} f_r \right) \sin \alpha_0. \quad (5.29)$$

Вычисленные по формуле (5.28) значения крутящих моментов для обоих случаев граничных условий представляют собой пренебрежимо малые величины. Например, если для нити в виде трубы диаметром 3 дюйма при стреле провисания $1/20$ пролета горизонтальной нагрузке, равной $7,0 \text{ кг/м}$, наибольшее напряжение от изгиба в опорном сечении (в горизонтальной плоскости) равно 1900 кг/см^2 , то наибольшее касательное напряжение кручения в этом же сечении равно 45 кг/см^2 . Таким образом, при практических расчетах кручением пологих нитей конечной жесткости можно пренебречь.

§ 5.3. Примеры расчета

Пример 8. По данным примера 1 требуется определить проекции стрелы провисания на вертикальную и горизонтальную плоскости и напряжения на опорах и в середине пролета нити при свободном повороте ее концов от начальной и дополнительной вертикальной нагрузок и жестком закреплении от дополнительной горизонтальной нагрузки (при втором случае граничных условий, см. § 5.1).

Горизонтальная равномерно распределенная по пролету нагрузка $p_r = 0,08 \text{ т/м}$. Модуль упругости материала нити при сдвиге $G = 8,08 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$.

Полярный момент инерции

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{3,142}{32} (0,72^4 - 0,70^4) = 0,002812 \text{ м}^4.$$

Жесткость нити при кручении

$$GI_p = 8,08 \cdot 10^6 \cdot 0,002812 = 22720,96 \text{ т/м}^2.$$

При действии дополнительной горизонтальной нагрузки параметр u определяем из уравнения (5.13)

$$\left(\frac{q + p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \\ + \left(\frac{p_r}{q} \right)^2 \frac{4}{u^4} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4 \text{ th}^2 u} - \frac{3}{4u \text{ th } u} \right) -$$

$$- \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^2}.$$

Из предыдущего (см. пример 1)

$$\left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{0^2}} \left(1 - \frac{\text{th } u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0^2} = 0,002513; \\ \left(\frac{q + p}{q} \right)^2 = 4,59; \quad \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 = 0,7240 \cdot 10^{-5}.$$

Коэффициент

$$\left(\frac{p_r}{q} \right)^2 = \left(\frac{0,08}{0,175} \right)^2 = 0,20897.$$

Подставив значения найденных выше выражений в уравнение (5.13), получим

$$4,59 \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\text{th } u}{u} \right) \right] + \frac{0,83591}{u^4} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4 \text{ th}^2 u} - \frac{3}{4u \text{ th } u} \right) - 0,7240 \cdot 10^{-5} u^2 = 0,002513.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u = 5,580$.

Проекцию стрелы провисания нити на вертикальную плоскость при суммарной нагрузке определяем по формуле (2.28), положив в ней $h = 0$ и $\xi = \frac{1}{2}$.

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{(q + p) l^4}{EI} \cdot \frac{24}{5u^4} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{\text{ch } u - 1}{\text{ch } u} \right] = \frac{5}{384} \times \\ \times \frac{(0,175 + 0,2) 150^4}{29530} \cdot \frac{24}{5 \cdot 5,580^4} \left(\frac{5,580^2}{2} - \frac{132,538 - 1}{132,538} \right) = 6,04 \text{ м}.$$

Проекцию стрелы провисания нити на горизонтальную плоскость определяем по формуле (5.14), положив в ней $\xi = \frac{1}{2}$.

$$z = \frac{p_r l^4}{384 EI} \cdot \frac{24}{u^4} \left[\frac{u^2}{2} - u \frac{\text{ch } u - 1}{\text{sh } u} \right] = \\ = \frac{0,08 \cdot 150^4}{384 \cdot 29530} \cdot \frac{24}{5,580^4} \left[\frac{5,580^2}{2} - 5,580 \cdot \frac{132,538 - 1}{132,534} \right] = 0,88 \text{ м}.$$

Распор в нити

$$H = \frac{4 \cdot 5,580^2 \cdot 29530}{150^2} = 163,5 \text{ т}.$$

Изгибающий момент в середине пролета нити определяем по формуле (2.30), положив в ней $\xi = \frac{1}{2}$.

$$M_{\xi=0,5} = \frac{(q+p)l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\text{sh}^2 \frac{u}{2}}{\text{ch} u} = \\ = \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,580^2} \cdot \frac{8,1098^2}{132,538} = 67,2 \text{ тм.}$$

Изгибающий момент на опоре определяем по формуле (5.16) положив в ней $\xi=0$ или $\xi=1$.

$$M_{\xi=0} = \frac{p_r l^2}{12} \cdot \frac{6}{u^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2 \text{th} u} \right) = \frac{0,08 \cdot 150^2}{12} \cdot \frac{6}{5,580^2} \times \\ \times \left(\frac{1}{2} - \frac{5,580}{2 \cdot 0,99997} \right) = -66,2 \text{ тм.}$$

Напряжения в нити

$$\sigma_{\xi=0,5} = \frac{163,5}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{67,2}{0,003905 \cdot 10} = 736 \pm 1721 = \\ = \begin{cases} +2457 \text{ кг/см}^2 \\ -985 \text{ кг/см}^2 \end{cases}; \\ \sigma_{\xi=0} = \frac{163,5}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \mp \frac{66,2}{0,003905 \cdot 10} = 736 \mp 1695 = \\ = \begin{cases} -959 \text{ кг/см}^2 \\ +2431 \text{ кг/см}^2 \end{cases}.$$

Пример 9. По данным примера 8 требуется определить проекции стрелы провисания на вертикальную и горизонтальную плоскости и напряжения на опорах и в середине пролета нити при свободном повороте ее концов от начальной и жестком закреплении от дополнительных вертикальной и горизонтальной нагрузок (при третьем случае граничных условий, см. § 5.1).

При заданных граничных условиях параметр u определяем по уравнению (5.18)

$$\left(\frac{q+p}{q} \right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] - \\ - 2 \frac{q+p}{q} \left[\frac{1}{u^{0,5}} \left(1 - \frac{\text{th} u^0}{u^0} \right) \right] \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \left(1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] + \left[\frac{1}{u^{0,5}} \left(1 - \frac{\text{th} u^0}{u^0} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] + \\ + \left(\frac{p_r}{q} \right)^2 \left[\frac{4}{u^4} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4 \text{th}^2 u} - \frac{3}{4u \text{th} u} \right) \right] -$$

$$- \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^2 = \frac{1}{u^{0,5}} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{5}{u^{0,5}} \left(1 - \frac{\text{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0,5}.$$

Из предыдущего (см. примеры 1, 3 и 8)

$$\frac{1}{u^{0,5}} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th} u^0}{u^0} \right)^2 - \frac{5}{u^{0,5}} \left(1 - \frac{\text{th} u^0}{u^0} \right) \right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 u^{0,5} = 0,002513; \\ \left(\frac{q+p}{q} \right)^2 = 4,59; \quad 2 \frac{q+p}{q} \left[\frac{1}{u^{0,5}} \left(1 - \frac{\text{th} u^0}{u^0} \right) \right] = 0,2323; \\ \left[\frac{1}{u^{0,5}} \left(1 - \frac{\text{th} u^0}{u^0} \right) \right]^2 = 0,002939; \quad \left(\frac{p_r}{q} \right)^2 = 0,20897; \\ \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 = 0,7240 \cdot 10^{-5}.$$

Подставив значения найденных выше выражений в уравнение (5.18), получим

$$\frac{4,59}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] - \frac{0,2323}{u^2} \left[1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{th}^2 u} \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] + 0,002939 \left[1 - \frac{1}{\text{th}^2 u} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{\text{th} u}{u} \right) \right] + 0,20897 \left[\frac{4}{u^4} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4 \text{th}^2 u} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{4u \text{th} u} \right) \right] - 0,7240 \cdot 10^{-5} u^2 = 0,002513.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u=5,502$.

Проекцию стрелы провисания нити на вертикальную плоскость при суммарной нагрузке определяем по формуле (2.37), положив в ней $h=0$ и $\xi = \frac{1}{2}$.

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p)l^4}{EI} \cdot \frac{24}{5u^4} \left\{ \frac{u^2}{2} - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^2}{u^{0,5}} \left(1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\text{th} u^0}{u^0} \right) \right] \frac{\text{ch} u - 1}{\text{sh} u} \right\} = \frac{5}{384} \cdot \frac{(0,175 + 0,2) 150^4}{29 530} \cdot \frac{24}{5 \cdot 5,502^4} \times \\ \times \left\{ \frac{5,502^2}{2} - 5,502 \left[1 - \frac{0,175}{0,175 + 0,2} \cdot \frac{5,502^2}{3,663^2} \left(1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{0,99868}{3,663} \right) \right] \frac{122,593 - 1}{122,589} \right\} = 5,99 \text{ м.}$$

Проекцию стрелы провисания нити на горизонтальную плоскость определяем по формуле (5.14), положив в ней $\xi = \frac{1}{2}$.

$$z = \frac{\rho_r l^4}{384EI} \cdot \frac{24}{u^4} \left[\frac{u^2}{2} - u \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u} \right] = \frac{0,08 \cdot 150^4}{384 \cdot 29 \cdot 530} \cdot \frac{24}{5,502^4} \times \\ \times \left[\frac{5,502^2}{2} - 5,502 \cdot \frac{122,593 - 1}{122,589} \right] = 0,90 \text{ м.}$$

Распор в нити

$$H = \frac{4 \cdot 5,502^2 \cdot 29 \cdot 530}{150^2} = 158,9 \text{ т.}$$

Изгибающий момент в середине пролета нити определяем по формуле (2.39), положив в ней $\xi = \frac{1}{2}$.

$$M_{\xi=0,5} = \frac{(q+p) l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{q}{q+p} \cdot \frac{u^2}{u^{0a}} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u^0}{u^0} \right) \right] \right\} \times \\ \times \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{ch} u - 1}{2 \operatorname{sh} u} \right) = \frac{(0,175 + 0,2) 150^2}{8} \cdot \frac{4}{5,502^2} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} - 5,502 \left[1 - \frac{0,175}{0,175 + 0,2} \cdot \frac{5,502^2}{3,663^2} \left(1 - \frac{0,99868}{3,663} \right) \right] \right\} \times \\ \times \left(\frac{1}{2 \cdot 0,99997} - \frac{122,348 - 1}{2 \cdot 122,589} \right) = 68,6 \text{ тм.}$$

Изгибающий момент на опоре определяем по формуле (5.16), положив в ней $\xi = 0$ или $\xi = 1$.

$$M_{\xi=0} = \frac{\rho_r l^2}{12} \cdot \frac{6}{u^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2 \operatorname{th} u} \right) = \frac{0,08 \cdot 150^2}{12} \cdot \frac{6}{5,502^2} \times \\ \times \left(\frac{1}{2} - \frac{5,502}{2 \cdot 0,99997} \right) = -66,9 \text{ тм.}$$

Напряжения в нити

$$\sigma_{\xi=0,5} = \frac{158,9}{0,02231 \cdot 0,99950 \cdot 10} \pm \frac{68,6}{0,003905 \cdot 10} = 713 \pm 1757 = \\ = \begin{cases} +2470 \text{ кг/см}^2 \\ -1044 \text{ кг/см}^2; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi=0} = \frac{158,9}{0,02231 \cdot 0,995 \cdot 10} \pm \frac{-66,9}{0,003905 \cdot 10} = 713 \pm 1713 = \begin{cases} -1000 \text{ кг/см}^2 \\ +2426 \text{ кг/см}^2. \end{cases}$$

ГЛАВА 6. МНОГОПРОЛЕТНАЯ НИТЬ

§ 6.1. Нить, работающая с изгибом от начальной нагрузки

Уравновешивание натяжений. При расчете многопролетной нити в первую очередь приходится решать вопрос об уравновешивании натяжений.

Рассмотрим многопролетную нить, имеющую произвольные пролеты, стрелы провисания, моменты инерции сечений и жесткости на растяжение и изгиб при действии начальной нагрузки различной интенсивности.

Из условия равенства распоров в смежных пролетах можно написать

$$H_1^0 = H_2^0 = \dots = H_n^0 = \frac{4u_1^{0a} E_1 I_1}{l_1^2} = \frac{4u_2^{0a} E_2 I_2}{l_2^2} = \dots = \frac{4u_n^{0a} E_n I_n}{l_n^2}.$$

Откуда, при известном параметре u^0 , например в первом пролете, получим:

$$\left. \begin{aligned} u_2^{0a} &= \frac{u_1^{0a} E_1 I_1 l_2^2}{E_2 I_2 l_1^2}; \\ &\dots \dots \dots \\ u_n^{0a} &= \frac{u_1^{0a} E_1 I_1 l_n^2}{E_n I_n l_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

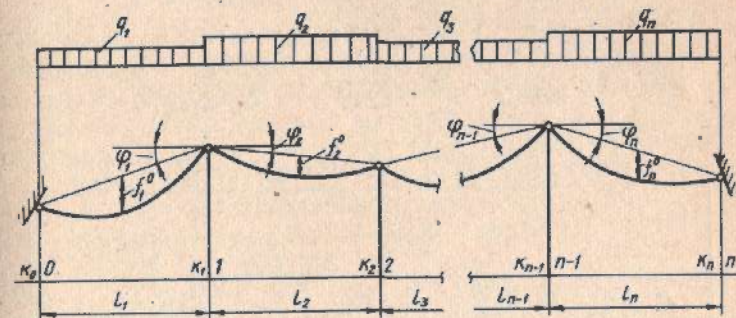


Рис. 6.1. К уравновешиванию натяжений при шарнирном закреплении концов нити к крайним неподвижным и промежуточным упруго податливым опорам.

При шарнирном прикреплении концов нити к крайним неподвижным и промежуточным упруго податливым опорам (рис. 6.1) параметр u_1^0 определим из уравнения

$$\frac{384 E_1 I_1 l_1^3}{5 q_1 l_1^4} = \frac{\frac{u_1^{0a}}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_1^0}}{\frac{5}{24} u_1^{0a}}, \quad (6.2)$$

для чего требуется предварительно задаться стрелой провисания нити f_1^0 в первом пролете.

Вычислив затем по формулам (6.1) значения параметров $u_2^0 - u_n^0$, определяем стрелы провисания в остальных пролетах:

$$\left. \begin{aligned} f_2^0 &= \frac{5q_2 l_2^4}{384 E_2 I_2} \left(\frac{u_2^{0a}}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_2^0} \right); \\ &\dots \dots \dots \\ f_n^0 &= \frac{5q_n l_n^4}{384 E_n I_n} \left(\frac{u_n^{0a}}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_n^0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

При жестком прикреплении концов нити к опорам, когда угол между касательной к нити в месте заделки и горизонтом равен нулю, параметр u_1^0 определим из уравнения

$$\frac{384 E_1 I_1 f_1^0}{q_1 l_1^4} = 24 \left(\frac{1}{2u_1^{0a}} - \frac{\operatorname{ch} u_1^0 - 1}{u_1^{0a} \operatorname{sh} u_1^0} \right), \quad (6.4)$$

а стрелы провисания $f_2^0 - f_n^0$ — по формулам:

$$\left. \begin{aligned} f_2^0 &= \frac{q_2 l_2^4}{384 E_2 I_2} \cdot 24 \left(\frac{1}{2u_2^{0a}} - \frac{\operatorname{ch} u_2^0 - 1}{u_2^{0a} \operatorname{sh} u_2^0} \right); \\ &\dots \dots \dots \\ f_n^0 &= \frac{q_n l_n^4}{384 E_n I_n} \cdot 24 \left(\frac{1}{2u_n^{0a}} - \frac{\operatorname{ch} u_n^0 - 1}{u_n^{0a} \operatorname{sh} u_n^0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

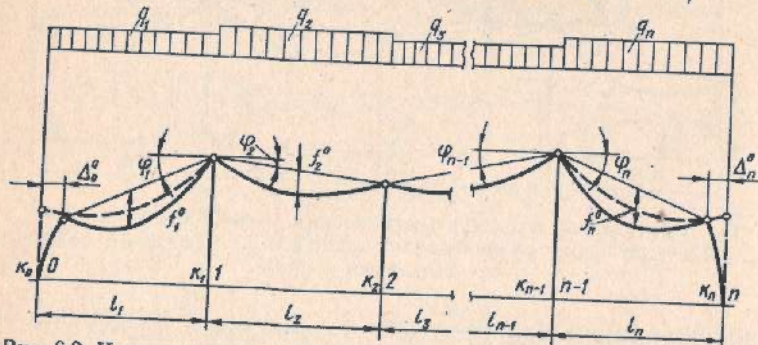


Рис. 6.2. К уравновешиванию натяжений при шарнирном закреплении концов нити к упруго податливым опорам.

Если крайние опоры будут упруго податливыми (рис. 6.2), то расчет следует начинать не с первого, а с какого-либо промежуточного пролета, например пролета i . При определении параметров u^0 и стрел провисания f^0 в i -м и n -м пролетах в формулы (6.1) — (6.5)

следует подставлять вместо l_1 и l_n $l_1 - \Delta_0^0$ и $l_n - \Delta_n^0$. Величины перемещений верхушек 0-й и n -й опор определяем по формулам

$$\Delta_0^0 = \frac{4u_1^{0a} E_1 I_1}{k_0 l_1^2}; \quad (6.6)$$

$$\Delta_n^0 = \frac{4u_n^{0a} E_n I_n}{k_n l_n^2}, \quad (6.7)$$

где $k_0, \dots, k_n$ — коэффициенты жесткости опор.

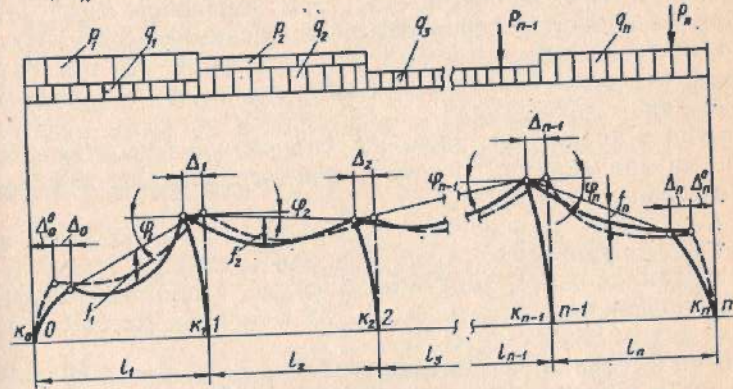


Рис. 6.3. К расчету нити с упруго податливыми опорами на дополнительную нагрузку.

Действие дополнительной нагрузки. Если к многопролетной нити, подвешенной к упруго податливым опорам с коэффициентами жесткости $k_0, k_1, \dots, k_n$ и несущей начальную нагрузку $q_1, q_2, \dots, q_n$, приложить дополнительную нагрузку $p_1, p_2, \dots, p_n$ (рис. 6.3), то все опоры получают некоторые перемещения. Последние хотя и будут небольшими, но могут оказать существенное влияние на перераспределение усилий в смежных пролетах.

Перемещения от дополнительной нагрузки: крайних опор

$$\Delta_0 = \frac{4E_1 I_1 (u_1^2 - u_1^{0a})}{k_0 (l_1 - \Delta_0^0)^2}; \quad (6.8)$$

$$\Delta_n = \frac{4E_n I_n (u_n^2 - u_n^{0a})}{k_n (l_n - \Delta_n^0)^2}; \quad (6.9)$$

промежуточных —

$$\pm \Delta_i = \frac{4}{k_i} \left(\frac{u_{i-1}^2 E_{i-1} I_{i-1}}{l_{i-1}^2} - \frac{u_i^2 E_i I_i}{l_i^2} \right). \quad (6.10)$$

В деформированном состоянии многопролетную нить можно рассматривать как систему, состоящую из однопролетных нитей с пролетами

$$l'_i = l_i \pm \Delta_{i-1} \pm \Delta_i. \quad (6.11)$$

Для пролета i можно написать следующее равенство:

$$\frac{4r^2(u_i^2 - u_i^{02})}{l_i \cos^2 \varphi_i} = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} y_i'^2 dx \pm \Delta_{i-1} \pm \Delta_i - \frac{1}{2} \int_0^{l_i} y_i^{0'2} dx, \quad (6.12)$$

где $y_i^{0'}$ и y_i' — первые производные уравнения оси нити до и после приложения дополнительной нагрузки.

Записав выражения (6.12) для каждого пролета, получим систему нелинейных трансцендентных уравнений, решив которую, найдем неизвестные параметры $u_1, \dots, u_n$ и распоры $H_1, \dots, H_n$ при действии начальной и дополнительной нагрузок. Подставляя найденные значения параметров $u_1, \dots, u_n$ в формулы (6.8) — (6.10), получаем величины перемещений опор $\Delta_0, \dots, \Delta_n$ от дополнительной нагрузки.

Условия закрепления нити на опорах учитываются соответствующими значениями постоянных интегрирования дифференциального уравнения (1.7).

По аналогии с уравнением трех моментов выражение (6.12) можно назвать уравнением трех распоров.

Если крайние опоры упруго податливые, а промежуточные свободно смещающиеся (подвижные), то величины распора во всех пролетах равны между собой.

Для определения неизвестных параметров $u_1, \dots, u_n$ в этом случае следует поступать как в предыдущем, т. е. записать для каждого пролета уравнение (6.12) и решить систему нелинейных трансцендентных уравнений. При этом нужно иметь в виду, что перемещения крайних опор от дополнительной нагрузки следует определять по формулам (6.8) и (6.9), а перемещения промежуточных опор — по формуле

$$\Delta_i = \frac{4r^2(u_i^2 - u_i^{02})}{l_i \cos^2 \varphi_i}.$$

Формула (6.10) вследствие равенства распоров в смежных пролетах здесь не применима.

Если по тем или иным соображениям требуется учесть влияние температуры, то левую часть уравнения (6.12) следует заменить выражением

$$\frac{l_i}{\cos \varphi_i} \alpha_i (t^\circ - t_0^\circ) + \frac{4r^2}{l_i \cos^2 \varphi_i} (u_i^2 - u_i^{02}).$$

§ 6.2. Нить, работающая без изгиба от начальной нагрузки

Уравновешивание натяжений. Под действием начальной равномерно распределенной нагрузки очертание нити во всех пролетах будет описываться уравнением квадратной параболы.

Из условия равенства распоров в смежных пролетах в соответствии с теорией гибких нитей можно написать

$$H_1^0 = H_2^0 = \dots = H_n^0 = \frac{M_1^B}{y_1^0} = \frac{M_2^B}{y_2^0} = \dots = \frac{M_n^B}{y_n^0}.$$

Или при принятых на рис. 6.1 обозначениях

$$\frac{q_1 l_1^2}{8 f_1^0} = \frac{q_2 l_2^2}{8 f_2^0} = \dots = \frac{q_n l_n^2}{8 f_n^0}.$$

Задавшись стрелой провисания, например в первом пролете, найдем стрелы провисания в остальных пролетах:

$$\left. \begin{aligned} f_2^0 &= \frac{q_2 l_2^2 f_1^0}{q_1 l_1^2}; \\ &\dots \dots \dots \\ f_n^0 &= \frac{q_n l_n^2 f_1^0}{q_1 l_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Если крайние опоры упруго податливые, то стрелой провисания следует задаваться не в первом, а в каком-либо промежуточном пролете, например в пролете i . При этом величины перемещений верхушек 0-й и n -й опор будут равны:

$$\Delta_0^0 = \frac{H_i^0}{k_0}; \quad (6.14)$$

$$\Delta_n^0 = \frac{H_i^0}{k_n}. \quad (6.15)$$

Действие дополнительной нагрузки. Расчет данной группы нитей на дополнительную нагрузку ничем не отличается от изложенного в § 6.1 расчета нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки. При этом следует иметь в виду лишь некоторые особенности их работы (см. § 3.2).

§ 6.3. Примеры расчета

Пример 10. Дана нить с пролетами $l_1 = 120$ м; $l_2 = 100$; $l_3 = 80$ и $l_4 = 60$ м, шарнирно подвешенная к упруго податливым опорам, расположенным на одном уровне (рис. 6.4). Начальная нагрузка

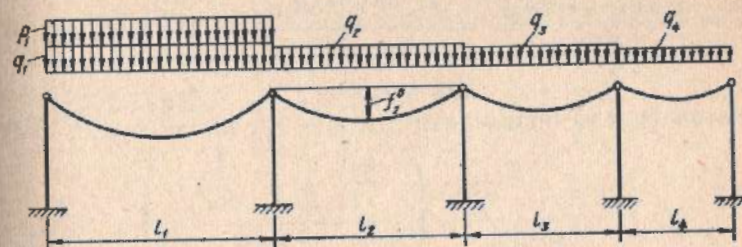


Рис. 6.4. К примеру расчета.

$q_1 = 0,3$ т/м; $q_2 = 0,275$; $q_3 = 0,25$ и $q_4 = 0,225$ т/м. Дополнительная нагрузка $p = 0,3$ т/м прикладывается в пролете l_1 . Модуль упругости материала нити $E_1 = \dots = E_4 = 2 \cdot 10^7$ т/м², площадь сечения $F_1 = 0,0382$ м²; $F_2 = 0,035$; $F_3 = 0,0319$ и $F_4 = 0,0287$ м², момент инерции

$I_1=0,0015 \text{ м}^4$; $I_2=0,001375$; $I_3=0,00125$ и $I_4=0,00115 \text{ м}^4$. Коэффициент жесткости опор $k_0=k_4=1400 \text{ т/м}$ и $k_1=k_2=k_3=500 \text{ т/м}$.

Требуется определить перемещения верхушек опор и распор во всех пролетах нити после приложения дополнительной нагрузки. Определяем жесткости нити на изгиб, тм^2 : $E_1 I_1 = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,0015 = 30\,000$; $E_2 I_2 = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,001375 = 27\,500$; $E_3 I_3 = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,00125 = 25\,000$; $E_4 I_4 = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,00115 = 23\,000$.

По конструктивным или иным соображениям принимаем в пролете l_2 при начальной нагрузке q_2 стрелу провисания $f_2^0 = 5 \text{ м}$.

Параметр u_2^0 определяем из уравнения

$$\frac{384 E_2 I_2 f_2^0}{5 q_2 l_2^4} = \frac{\frac{u_2^0}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch } u_2^0}}{\frac{5}{24} u_2^0}.$$

Вычисляем левую часть этого уравнения

$$\frac{384 \cdot 27\,500 \cdot 5}{5 \cdot 0,275 \cdot 100^4} = 0,384.$$

Удовлетворяет это уравнение параметр $u_2^0 = 1,98$.

Перемещения крайних опор от начальной нагрузки определяем по формулам (6.6) и (6.7)

$$\Delta_0^0 = \Delta_4^0 = \frac{4 u_2^{02} E_2 I_2}{k_0 l_2^2} = \frac{4 \cdot 1,98^2 \cdot 27\,500}{1400 \cdot 100^2} = 0,031 \text{ м}.$$

В соответствии с (6.1) находим параметры u_1^0 , u_3^0 и u_4^0 из условия равенства натяжений в смежных пролетах

$$u_1^0 = \frac{u_2^{02} E_2 I_2 (l_1 - \Delta_0^0)^2}{l_2^2 E_1 I_1} = \frac{1,98^2 \cdot 27\,500 (120 - 0,031)^2}{100^2 \cdot 30\,000} = 5,17; \quad u_1^0 = 2,275;$$

$$u_3^0 = \frac{u_2^{02} E_2 I_2 l_3^2}{l_2^2 E_3 I_3} = \frac{1,98^2 \cdot 27\,500 \cdot 80^2}{100^2 \cdot 25\,000} = 2,760, \quad u_3^0 = 1,662;$$

$$u_4^0 = \frac{u_2^{02} E_2 I_2 (l_4 - \Delta_4^0)^2}{l_2^2 E_4 I_4} = \frac{1,98^2 \cdot 27\,500 (60 - 0,031)^2}{100^2 \cdot 23\,000} = 1,687;$$

$$u_4^0 = 1,298.$$

При этом стрелы провисания в 1, 3 и 4 пролетах будут (6.3):

$$f_1^0 = \frac{5 q_1 (l_1 - \Delta_0^0)^4}{384 E_1 I_1} \left(\frac{\frac{u_1^0}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch } u_1^0}}{\frac{5}{24} u_1^0} \right) = \frac{5 \cdot 0,3 (120 - 0,031)^4}{384 \cdot 30\,000} \left(\frac{\frac{2,275}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch } 2,275}}{\frac{5}{24} \cdot 2,275} \right) = 8,65 \text{ м};$$

$$f_3^0 = \frac{5 q_3 l_3^4}{384 E_3 I_3} \left(\frac{\frac{u_3^0}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch } u_3^0}}{\frac{5}{24} u_3^0} \right) = \frac{5 \cdot 0,25 \cdot 80^4}{384 \cdot 25\,000} \left(\frac{\frac{1,662}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch } 1,662}}{\frac{5}{24} \cdot 1,662} \right) = 2,51 \text{ м};$$

$$f_4^0 = \frac{5 q_4 (l_4 - \Delta_4^0)^4}{384 E_4 I_4} \left(\frac{\frac{u_4^0}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch } u_4^0}}{\frac{5}{24} u_4^0} \right) =$$

$$= \frac{5 \cdot 0,225 (60 - 0,031)^4}{384 \cdot 23\,000} \left(\frac{\frac{1,298}{2} - 1 + \frac{1}{\text{ch } 1,298}}{\frac{5}{24} \cdot 1,298} \right) = 0,98 \text{ м}.$$

Распор в нити

$$H_1^0 = \dots = H_4^0 = \frac{4 u_1^{02} E_1 I_1}{(l_1 - \Delta_0^0)^2} = \frac{4 \cdot 2,275^2 \cdot 30\,000}{(120 - 0,031)^2} = 43,12 \text{ т}.$$

Для определения величины распора при действии начальной и дополнительной нагрузок запишем для каждого пролета уравнение неразрывности (6.12):

$$\frac{4 r_1^2 (u_1^2 - u_1^{02})}{l_1 - \Delta_0^0} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1 - \Delta_0^0} y_1'^2 dx - \Delta_0 - \Delta_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1 - \Delta_0^0} y_1^{0'2} dx;$$

$$\frac{4 r_2^2 (u_2^2 - u_2^{02})}{l_2} = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} y_2'^2 dx + \Delta_1 - \Delta_2 - \frac{1}{2} \int_0^{l_2} y_2^{0'2} dx;$$

$$\frac{4 r_3^2 (u_3^2 - u_3^{02})}{l_3} = \frac{1}{2} \int_0^{l_3} y_3'^2 dx + \Delta_2 - \Delta_3 - \frac{1}{2} \int_0^{l_3} y_3^{0'2} dx;$$

$$\frac{4 r_4^2 (u_4^2 - u_4^{02})}{l_4 - \Delta_4^0} = \frac{1}{2} \int_0^{l_4 - \Delta_4^0} y_4'^2 dx + \Delta_3 - \Delta_4 - \frac{1}{2} \int_0^{l_4 - \Delta_4^0} y_4^{0'2} dx,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{4 E_1 I_1 (u_1^2 - u_1^{02})}{k_0 (l_1 - \Delta_0^0)^2};$$

$$\Delta_1 = \frac{4}{k_1} \left[\frac{u_1^2 E_1 I_1}{(l_1 - \Delta_0^0)^2} - \frac{u_2^2 E_2 I_2}{l_2^2} \right];$$

$$\Delta_2 = \frac{4}{k_2} \left[\frac{u_2^2 E_2 I_2}{l_2^2} - \frac{u_3^2 E_3 I_3}{l_3^2} \right];$$

$$\Delta_3 = \frac{4}{k_3} \left[\frac{u_3^2 E_3 I_3}{l_3^2} - \frac{u_4^2 E_4 I_4}{(l_4 - \Delta_4^0)^2} \right];$$

$$\Delta_4 = \frac{4 E_4 I_4 (u_4^2 - u_4^{0a})}{k_4 (l_4 - \Delta_4^0)^2}.$$

Подставляя в эти выражения значения интегралов и числовые данные, после преобразований получаем следующую систему нелинейных трансцендентных уравнений:

$$u_1 = \frac{23\,398}{u_1^5} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u_1}{u_1} \right)^2 - \frac{5}{u_1^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_1}{u_1} \right) \right] + \frac{0,91941 u_2^2}{u_1} - \frac{64,247}{u_1};$$

$$u_2 = \frac{850}{u_2^5} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u_2}{u_2} \right)^2 - \frac{5}{u_2^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_2}{u_2} \right) \right] + \frac{0,3657 u_1^2}{u_2} + \frac{0,68567 u_3^2}{u_2} - \frac{13,556}{u_2};$$

$$u_3 = \frac{127,1}{u_3^5} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u_3}{u_3} \right)^2 - \frac{5}{u_3^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_3}{u_3} \right) \right] + \frac{0,3413 u_2^2}{u_3} + \frac{0,7881 u_4^2}{u_3} - \frac{2,9624}{u_3};$$

$$u_4 = \frac{15,029}{u_4^5} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\text{th } u_4}{u_4} \right)^2 - \frac{5}{u_4^2} \left(1 - \frac{\text{th } u_4}{u_4} \right) \right] + \frac{0,4488 u_3^2}{u_4} - \frac{0,13056}{u_4}.$$

Решая полученную систему уравнений методом последовательных приближений [12], находим $u_1 = 3,4835$; $u_2 = 2,1120$; $u_3 = 1,690$; $u_4 = 1,310$.

Перемещения верхушек опор

$$\Delta_0 = \frac{4 E_1 I_1 (u_1^2 - u_1^{0a})}{k_0 (l_1 - \Delta_0^0)^2} = \frac{4 \cdot 30\,000 (3,4835^2 - 2,275^2)}{1400 (120 - 0,031)^2} = 0,0414 \text{ м};$$

$$\Delta_1 = \frac{4}{k_1} \left[\frac{u_1^2 E_1 I_1}{(l_1 - \Delta_0^0)^2} - \frac{u_2^2 E_2 I_2}{l_2^2} \right] = \frac{4}{500} \left(\frac{3,4835^2 \cdot 30\,000}{(120 - 0,031)^2} - \frac{2,1120^2 \cdot 27\,500}{100^2} \right) = 0,1041 \text{ м};$$

$$\Delta_2 = \frac{4}{k_2} \left[\frac{u_2^2 E_2 I_2}{l_2^2} - \frac{u_3^2 E_3 I_3}{l_3^2} \right] =$$

$$= \frac{4}{500} \left(\frac{2,1120^2 \cdot 27\,500}{100^2} - \frac{1,690^2 \cdot 25\,000}{80^2} \right) = 0,0089 \text{ м};$$

$$\Delta_3 = \frac{4}{k_3} \left[\frac{u_3^2 E_3 I_3}{l_3^2} - \frac{u_4^2 E_4 I_4}{(l_4 - \Delta_4^0)^2} \right] =$$

$$= \frac{4}{500} \left(\frac{1,690^2 \cdot 25\,000}{80^2} - \frac{1,310^2 \cdot 23\,000}{(60 - 0,031)^2} \right) = 0,00154 \text{ м};$$

$$\Delta_4 = \frac{4 E_4 I_4 (u_4^2 - u_4^{0a})}{k_4 (l_4 - \Delta_4^0)^2} = \frac{4 \cdot 23\,000 (1,310^2 - 1,298^2)}{1400 (60 - 0,031)^2} = 0,00057 \text{ м}.$$

Распор в пролетах нити

$$H_1 = \frac{4 u_1^2 E_1 I_1}{[l_1 - (\Delta_0^0 + \Delta_0 + \Delta_1)]^2} = \frac{4 \cdot 3,4835^2 \cdot 30\,000}{[120 - (0,031 + 0,0414 + 0,1041)]^2} = 101,123 \text{ т};$$

$$H_2 = \frac{4 u_2^2 E_2 I_2}{[l_2 - (\Delta_2 - \Delta_1)]^2} = \frac{4 \cdot 2,1120^2 \cdot 27\,500}{[100 - (0,0089 - 0,1041)]^2} = 49,066 \text{ т};$$

$$H_3 = \frac{4 u_3^2 E_3 I_3}{[l_3 - (\Delta_3 - \Delta_2)]^2} = \frac{4 \cdot 1,690^2 \cdot 25\,000}{[80 - (0,00154 - 0,0089)]^2} = 44,626 \text{ т};$$

$$H_4 = \frac{4 u_4^2 E_4 I_4}{[l_4 - (\Delta_4^0 + \Delta_4 - \Delta_3)]^2} = \frac{4 \cdot 1,310^2 \cdot 23\,000}{[60 - (0,031 + 0,00057 - 0,00154)]^2} = 43,856 \text{ т}.$$

Зная распоры в пролетах нити при действии начальной и дополнительной нагрузок, можно найти значения y , $y' = \text{tg } \alpha$, M и Q в произвольных сечениях нити.

Пример 11. По данным примера 10 требуется рассчитать нить, работающую без изгиба от начальной нагрузки.

Прежде всего определим распор в нити при действии начальной нагрузки

$$H_1^0 = \dots = H_4^0 = \frac{q_2 l_2^2}{8 f_2^0} = \frac{0,275 \cdot 100^2}{8 \cdot 5} = 68,75 \text{ т}.$$

Перемещения крайних опор вычисляем по формулам (6.14) и (6.15)

$$\Delta_0^0 = \Delta_4^0 = \frac{H_l}{k_0} = \frac{68,75}{1400} = 0,0435 \text{ м}.$$

Стрелы провисания в 1, 3 и 4-м пролетах при действии начальной нагрузки будут:

$$f_1^0 = \frac{q_1 (l_1 - \Delta_1^0)^2 f_2^0}{q_2 l_2^2} = \frac{0,3 (120 - 0,0435)^2 \cdot 5}{0,275 \cdot 100^2} = 7,85 \text{ м};$$

$$f_3^0 = \frac{q_3 l_3^2 f_2^0}{q_2 l_2^2} = \frac{0,25 \cdot 80^2 \cdot 5}{0,275 \cdot 100^2} = 2,91 \text{ м};$$

$$f_4^0 = \frac{q_4 (l_4 - \Delta_4)^2 f_2^0}{q_2 l_2^2} = \frac{0,225 (60 - 0,0435)^2 \cdot 5}{0,275 \cdot 100^2} = 1,47 \text{ м}.$$

Дальнейший ход расчета нити на дополнительную нагрузку ничем не отличается от изложенного в примере 10 и поэтому здесь не приводится. Отметим лишь, что в уравнение неразрывности (6.12) нужно подставлять значение u_i^0 , вычисленное по формуле

$$u_i^0 = \frac{l_i}{2} \sqrt{\frac{H_i^0}{E_l H_i}},$$

где $H_i^0 = 68,75 \text{ т}$.

ГЛАВА 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 7.1. Цель исследований

Нить конечной жесткости можно рассматривать как промежуточное звено между гибкой нитью и балкой. Так как в предельных случаях нить конечной жесткости должна удовлетворять ряд противоречивых требований, то, естественно, ее напряженно-деформированное состояние должно описываться более сложными зависимостями. Вследствие громоздкости расчетных формул не всегда представляется возможным выявить влияние тех или иных факторов на напряженно-деформированное состояние нити. Последнее является причиной недооценки некоторыми исследователями одних факторов и переоценки других. По ряду вопросов (расчет нити на горизонтальную нагрузку и др.) имеются противоречивые мнения [20]. На напряженно-деформированном состоянии нитей конечной жесткости сказывается значительно большее число факторов, чем на гибких нитях или балках. Кроме того, влияние их на нить при определенных условиях может быть различным. Причем ряд зависимостей не удается объяснить ни с позиции теории гибких нитей, ни с позиции технической теории изгиба балок.

В качестве примера укажем на следующие две особенности работы нитей конечной жесткости.

Так, при приложении к нити дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету, нить в простом интенсивности нагрузки будет вначале получать в середине пролета отрицательные прогибы (выгибаться вверх) и лишь по достижении нагрузки определенной интенсивности начнет прогибаться вниз.

Известно, что жесткое закрепление концов балки способствует уменьшению изгибающих моментов и прогибов в середине пролета. В нити же при определенных соотношениях геометрических и физи-

ческих характеристик уменьшение изгибающего момента и прогиба при жестком закреплении концов может наблюдаться только на участке пролета; в середине пролета они могут быть даже больше, чем при шарнирном закреплении концов. Поэтому с целью проверки полученных авторами расчетных зависимостей, изложенных в настоящей книге, в НИИСКе Госстроя СССР (г. Киев) были проведены экспериментальные исследования нитей конечной жесткости. Программой экспериментальных исследований предусматривалось также опытное выявление влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние нитей. К числу таких факторов отнесено влияние граничных условий, стрелы провисания, жесткости нити на растяжение и изгиб, температуры, характера и величины дополнительной нагрузки.

В связи с тем, что рассматриваемый вопрос недостаточно изучен, а в литературе почти полностью отсутствуют экспериментальные данные, в настоящей книге помещена небольшая, но специфическая для таких нитей часть фактического материала, который может стать полезным всем, кто занимается исследованием нитей конечной жесткости.

§ 7.2. Методика испытаний

Для испытаний нитей конечной жесткости был изготовлен стенд (рис. 7.1), состоящий из двух жестких анкерных опор треугольного очертания. Расстояние между опорами принято равным 30 м.

На верхушках опор устанавливали специальные анкерные устройства для закрепления опытных образцов нитей.

Испытания состояли из двух этапов. На первом этапе отрабатывали методику испытаний и выявляли общие закономерности работы нитей конечной жесткости. В качестве образцов были приняты стальные газовые трубы диаметром 1/2; 3/4 и 1 дюйм по ГОСТ 3262—62. Трубы испытывали на вертикальные и горизонтальные нагрузки при различных граничных условиях. Каждую трубу испытывали при двух стрелах провисания: 1/20 и 1/40 пролета.

Испытание нитей на вертикальную нагрузку производили при шарнирном и жестком закреплении концов. При этом концы нити жестко закрепляли после приложения начальной нагрузки (собственного веса трубы).

Принимались следующие схемы загрузки нити в вертикальной плоскости: равномерно распределенной нагрузкой, расположенной по всему пролету, а также расположенной на половине пролета, и сосредоточенной нагрузкой.

Распределенную нагрузку имитировали сосредоточенными грузами, подвешенными к трубе через 0,5 м.

Сосредоточенная нагрузка передавалась на трубу в двух близко расположенных точках через кольца, соединенные планкой. Между кольцами размещались проволоочные преобразователи (датчики).

Сосредоточенная нагрузка последовательно прикладывалась к трубе в точках 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 и 0,5 пролета.

Загружение нити в горизонтальной плоскости производилось равномерно распределенной нагрузкой при трех схемах закрепления:

при свободном повороте концов нити от начальной и дополнительной вертикальной и горизонтальной нагрузок;

при свободном повороте концов нити от начальной и дополнительной вертикальной нагрузок и жестком закреплении от дополнительной горизонтальной нагрузки;

допускался поворот опорных сечений в вертикальной плоскости;

при жестком закреплении концов нити после приложения начальной нагрузки; исключался поворот опорных сечений в вертикальной и горизонтальной плоскостях от дополнительных вертикальных и горизонтальных нагрузок.

Горизонтальная нагрузка на нить передавалась при помощи оттяжек, перекинутых через блок на стойках, установленных параллельно трубе с шагом 0,1 пролета.

Горизонтальность оттяжек обеспечивалась передвижением блоков по вертикали и контролировалась гидравлическим уровнем.

Во всех случаях нагрузка передавалась ступенями — по 3—6 ступеней для каждой схемы загрузки.

При испытании на вертикальные нагрузки определяли прогибы, углы поворота на опорах, относительные деформации, горизонтальные смещения точек в плоскости провисания трубы и горизонтальные смещения опор.

Прогибы определяли в девяти точках через 0,1 пролета при помощи двух нивелиров. Отсчеты снимали по линейкам с миллиметровыми делениями.

Углы поворота на опорах измеряли угломерами, которые устанавливали на верхнюю планку поворотной рамки анкерных устройств. Цена деления угломеров 1'.

Относительные деформации определяли при помощи проволочных преобразователей (датчиков). Датчики размещали на верхних и нижних волокнах в тех же сечениях, в которых определяли прогибы, а также у опор.

Горизонтальные смещения в плоскости провисания трубы опре-

деляли в точках приложения сосредоточенной силы и в середине пролета (при загрузке трубы распределенной нагрузкой, расположенной на половине пролета). Величину смещения измеряли при помощи теодолита и линеек, горизонтально закрепленных на трубе.

Смещения опор определяли индикаторами часового типа на уровне горизонтальной оси анкерных устройств. Цена деления индикаторов 0,01 мм.

При испытании на горизонтальную нагрузку определяли перемещения трубы в плоскости действия нагрузки, вертикальные перемещения, углы поворота на опорах и относительные деформации по горизонтальному и вертикальному диаметрам.

Перемещения трубы в плоскости действия нагрузки определяли с помощью двух теодолитов, установленных у опор, и металлической линейки, прикладываемой к трубе в точках через 0,1 пролета.

Вертикальные перемещения и углы поворота относительно горизонтальной оси определяли так же, как и при испытании на вертикальную нагрузку.

Углы поворота относительно вертикальной оси и оси, направленной вдоль трубы, определяли при помощи специально изготовленных лимбов и нониусов.

Анализ результатов первого этапа испытаний показал, что принятая методика имела некоторые недостатки.

Во-первых, конструкция анкерного устройства не обеспечивала равенства пролетов при шарнирном и жестком закреплении концов трубы (разность в величинах пролетов составляла 20 см), что несколько искажало результаты испытаний и не позволяло с уверенностью оценить влияние жесткого защемления на напряженно-деформированное состояние нити.

Во-вторых, малый диаметр труб не давал возможности произвести исследование и дать ответ на один из спорных вопросов о величине и характере распределения по длине нити крутящих моментов, вызываемых горизонтальной нагрузкой, и оценить их влияние на работу нити.

И, в-третьих, отношение величины дополнительной нагрузки к собственному весу каждой трубы на первом этапе испытаний было различным (дополнительная нагрузка была одинаковой для всех труб) и поэтому результаты испытаний не позволили непосредственно оценить влияние изгибной жесткости на напряженно-деформированное состояние нити.

На втором этапе испытаний все эти недостатки были устранены. Анкерные устройства были реконструированы так, чтобы горизонтальная ось вращения была компланарна плоскости защемления трубы. Это обеспечивало постоянство пролета при шарнирной и жесткой схемах закрепления.

В качестве образцов были приняты газовые трубы диаметром 2 и 3 дюйма по ГОСТ 3262—62, что позволило, во-первых, исследовать вопросы кручения (появилась возможность наклеивать датчиков по наклонным сечениям), и, во-вторых, максимально приблизить

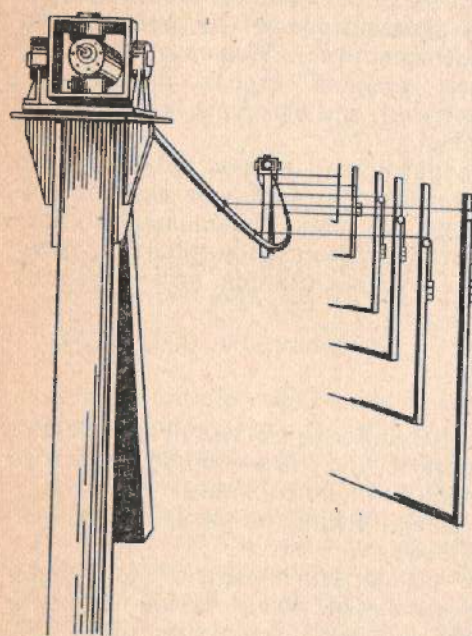


Рис. 7.1. Стенд для испытаний нитей конечной жесткости.

расчетную схему к фактической передаче сосредоточенной силы на нить (сосредоточенная сила передавалась через отверстие, просверленное в трубе по горизонтальному диаметру).

На втором этапе испытаний отношение каждого вида дополнительной нагрузки к собственному весу трубы было принято постоянным. Таким образом, две трубы, испытанные при одинаковых стрелах провисания, отличались лишь одним параметром — изгибной жесткостью, а трубы с одинаковыми геометрическими характеристиками — только стрелами провисания. Напряженно-деформированное состояние каждой пары труб было соответственно функцией жесткости или функцией стрелы провисания.

На вертикальные нагрузки нити испытывались при тех же схемах загрузок, что и на первом этапе, и дополнительно еще рассматривалось влияние распределенной нагрузки, расположенной на участке 0,2 пролета с точкой приложения, равнодействующей на расстоянии 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 и 0,5 пролета. При этом измерялись те же параметры, что и на первом этапе.

При испытании на горизонтальную нагрузку относительные деформации вследствие симметрии измерялись на половине пролета трубы. Датчики размещались в точках передачи горизонтальной нагрузки и в промежутках между ними (через 1,5 м). На отрезке 0,1 пролета от опоры датчики размещались в сечениях через 0,25 и 0,5 м. В поперечных сечениях трубы датчики располагались в виде двух прямоугольных розеток, наклеенных по концам горизонтального диаметра. Каждая розетка состояла из четырех датчиков, расположенных под углами 0, 45, 90 и 135° к продольной оси трубы.

§ 7.3. Результаты испытаний

Испытания нитей конечной жесткости начинали с определения ординат кривой провисания и напряжений в подвешенной трубе от действия собственного веса. Установлено, что жесткость трубы не оказывает существенного влияния на величину распора. Так, для самой жесткой из испытанных на первом этапе труб (диаметр 1 дюйм, стрела провисания $1/20$ пролета) уменьшение распора составило не более 4%. Напряженное состояние труб в значительной степени зависит от стрелы провисания. Например, для трубы диаметром $1/2$ дюйма при стреле провисания $1/20$ пролета полные напряжения в верхнем и нижнем волокнах соответственно равны —300 и +420 кг/см². Уменьшение стрелы провисания вдвое привело к уменьшению напряжений в нижнем волокне на 29%, а в верхнем — в 5 раз.

Дополнительная равномерно распределенная нагрузка вызывает в основном увеличение распора. Прогибы нитей от дополнительной равномерно распределенной нагрузки определяются главным образом упругими деформациями. При воздействии же на нить сосредоточенной силы или нагрузки большой интенсивности, распределенной на части пролета, в нити возникают существенные

напряжения изгиба, а прогибы определяются в основном изменением формы кривой провисания нити.

Испытания труб на сосредоточенную нагрузку начинали при распределенной нагрузке, равной собственному весу трубы. Затем к трубе подвешивали пригрузку, равную 3 кг/м, и испытания по-

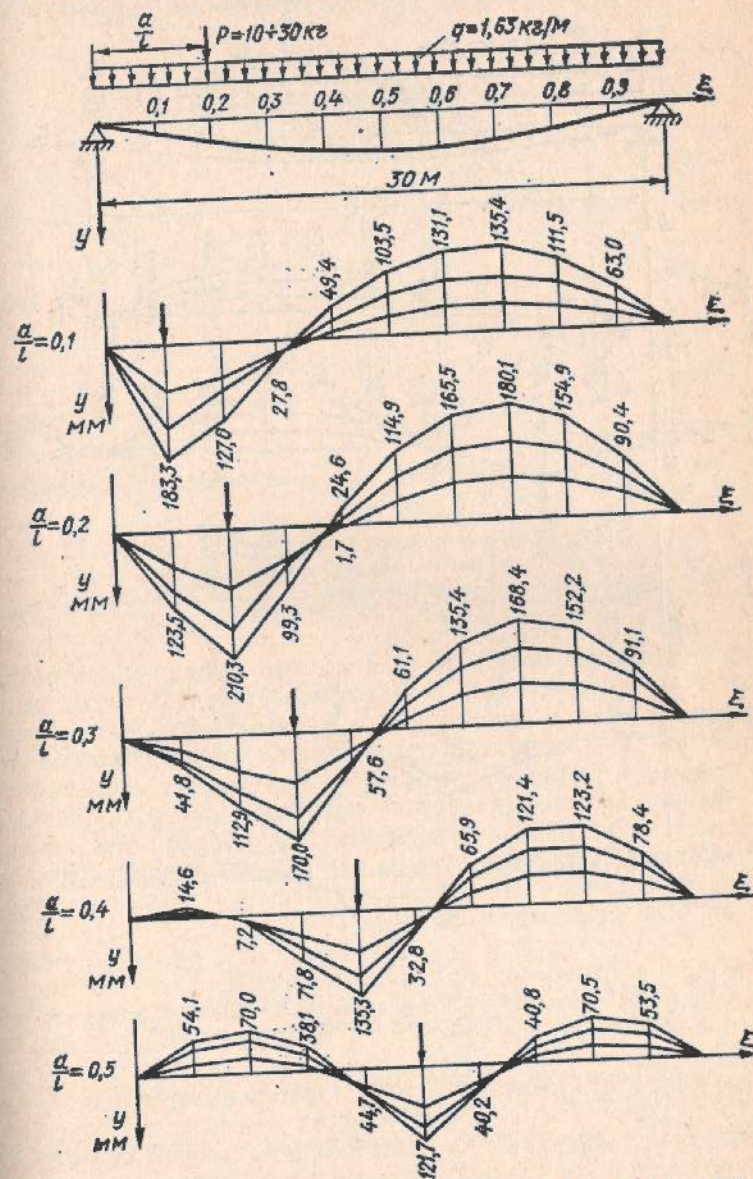


Рис. 7.2. Эпюры прогибов трубы диаметром 3/4 дюйма при стреле провисания $1/20$ пролета от сосредоточенной силы.

вторяли. И, наконец, пригрузку увеличивали до 6 кг/м, и испытания повторяли еще раз. Сосредоточенная сила прикладывалась на левой половине трубы через 0,1 пролета, начиная от середины.

На рис. 7.2 и 7.3 приведены эпюры прогибов трубы диаметром 3/4 дюйма при стрелах провисания $1/20$ и $1/40$ пролета. Они построены от трех ступеней сосредоточенной силы по 10 кг на ступени при

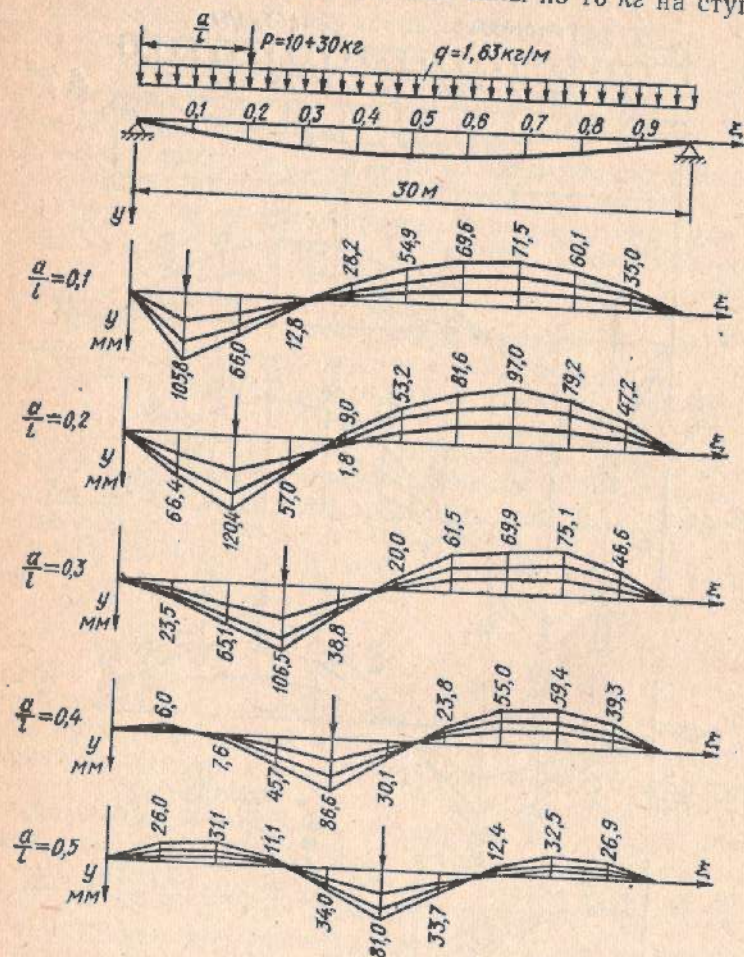


Рис. 7.3. Эпюры прогибов трубы диаметром 3/4 дюйма при стреле провисания $1/40$ пролета от сосредоточенной силы.

распределенной нагрузке, равной собственному весу трубы. Анализ эпюр позволяет сделать следующие выводы:
прогибы трубы на ступени уменьшаются с увеличением нагрузки;
с увеличением стрелы провисания точки максимальных прогибов смещаются в сторону опор;

изменение формы кривой провисания нити является определяющим фактором ее деформативности. Этот вывод вытекает из сопоставления эпюр, представленных на рис. 7.2 и 7.3. Несмотря на то, что упругие деформации нити увеличиваются с уменьшением стрелы провисания, полные прогибы оказались большими при стреле провисания, равной $1/20$ пролета.

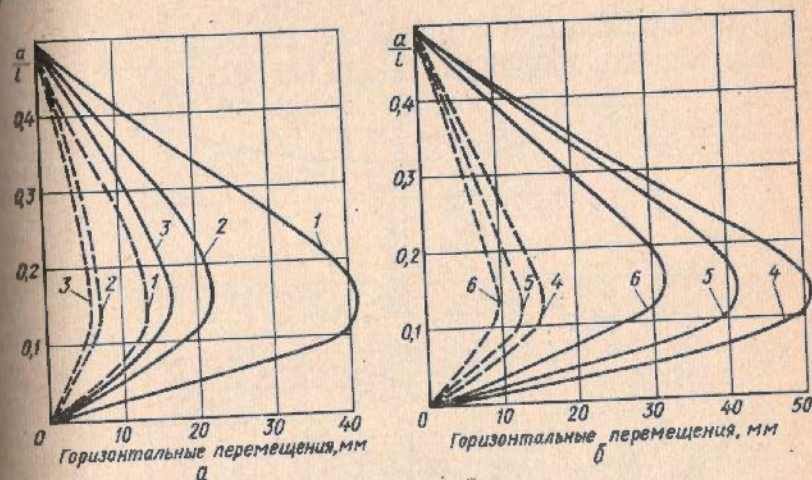


Рис. 7.4. Горизонтальные перемещения труб в плоскости провисания:
а — диаметром 3/4 дюйма при $q=1,63$ (1), $q+p=4,63$ (2), $q+p=7,63$ кг/м (3); б — диаметром 1/2 (4), 3/4 (5) и 1 дюйм (6) при собственном весе; сплошная линия — при стреле провисания $1/20$ пролета; пунктирная — при стреле провисания $1/40$ пролета.

Экспериментально установлено, что несимметричная нагрузка вызывает значительные горизонтальные перемещения трубы в плоскости ее провисания. На рис. 7.4, а приведен график горизонтальных перемещений трубы диаметром 3/4 дюйма в точках приложения сосредоточенной силы ($P=30$ кг) при различных значениях распределенной нагрузки. При этом максимальные перемещения приходятся на интервал 0,1—0,2 пролета от опоры, причем величина перемещений уменьшается с увеличением распределенной нагрузки и с уменьшением стрелы провисания. Аналогичный график для труб диаметром $1/2$, $3/4$ и 1 дюйм при распределенной нагрузке, равной собственному весу, приведен на рис. 7.4, б.

На рис. 7.5 показаны огибающие эпюры прогибов трубы диаметром 3/4 дюйма от действия сосредоточенной силы ($P=30$ кг) при различной интенсивности распределенной нагрузки. Слева от оси симметрии приведены эпюры при шарнирном опирании трубы, справа — при жестком закреплении. Максимальные положительные прогибы оказались в сечении на расстоянии 0,2 пролета от опоры, отрицательные — 0,3 пролета. С увеличением распределенной нагрузки прогибы уменьшаются. Так, при пригрузке 3 кг/м максимальный положительный прогиб составляет только 57% от соответствующего прогиба при собственном весе, а при пригрузке

6 кг/м — всего 43%. Жесткое защемление несущественно влияет на величину прогиба. Так, при стреле провисания $1/20$ пролета прогиб трубы диаметром $3/4$ дюйма в сечении 0,2 пролета уменьшается на 12,5%, а в сечении 0,5 пролета — на 9%. Резкое уменьшение прогибов наблюдается непосредственно вблизи опор. На рис. 7.6 приведены огибающие эпюры прогибов труб диаметром $1/2$; $3/4$ и 1

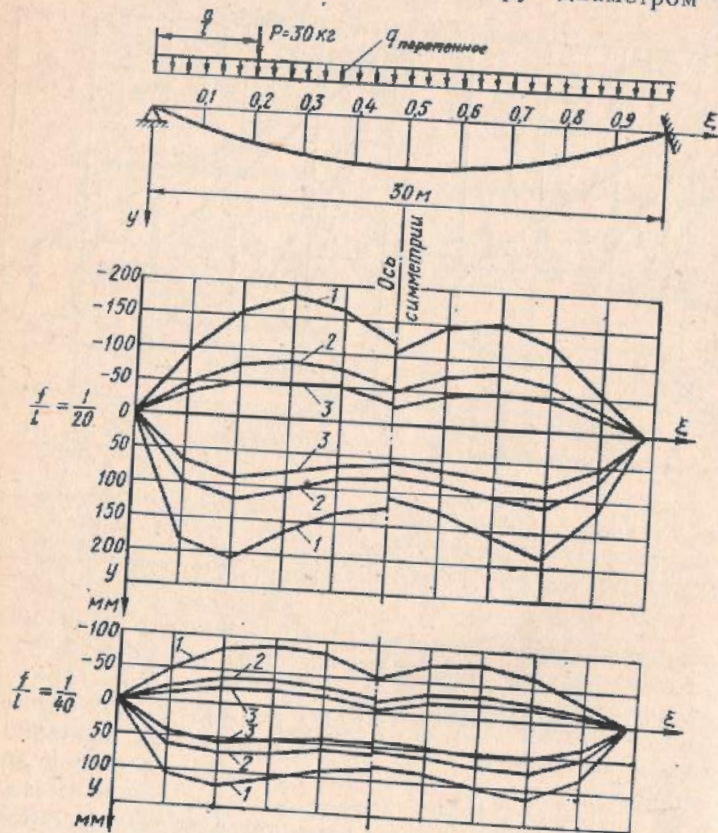


Рис. 7.5. Огибающие эпюры прогибов трубы диаметром $3/4$ дюйма от сосредоточенной силы:
1 — при $q=1,63$; 2 — при $q+p=4,63$; 3 — при $q+p=7,63$ кг/м.

дюйм от действия сосредоточенной силы ($P=30$ кг) при распределенной нагрузке, равной собственному весу каждой из труб. С увеличением диаметра трубы прогибы ее значительно уменьшаются. Так, прогиб трубы диаметром 1 дюйм в сечении 0,2 пролета при стреле провисания $1/20$ пролета составляет 65% от прогиба трубы диаметром $1/2$ дюйма. Однако следует учесть, что прогиб нити, кроме других факторов, зависит еще от величины отношения $\frac{P}{ql}$, а при постоянных P и l — является функцией распределенной на-

грузки. Если принять во внимание, что собственный вес трубы диаметром $1/2$ дюйма составляет 55% собственного веса трубы диаметром 1 дюйм, то станет очевидным, что изгибная жесткость нити очень заметно влияет на ее прогибы. Этот вывод относится и к горизонтальным перемещениям в плоскости провисания нити.

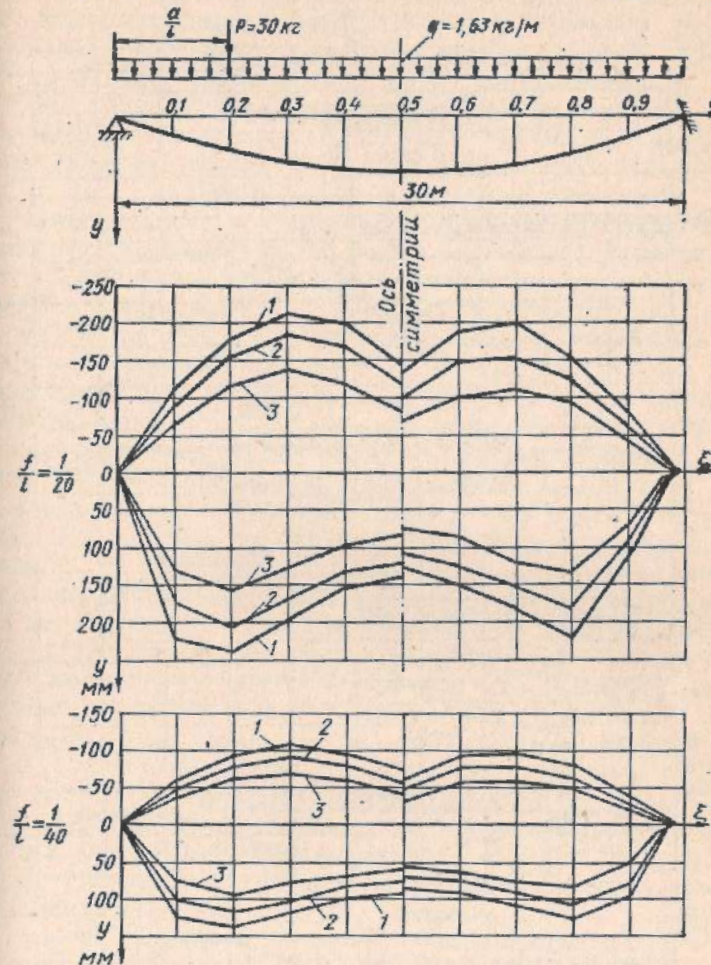


Рис. 7.6. Огибающие эпюры прогибов труб от сосредоточенной силы при распределенной нагрузке, равной собственному весу каждой из труб диаметром $1/2$ (1), $3/4$ (2) и 1 (3) дюйм.

Правая часть эпюр (см. рис. 7.6) дает представление о влиянии жесткого закрепления на характер огибающих эпюр прогибов труб различных диаметров. Оно аналогично описанному для трубы диаметром $3/4$ дюйма.

На рис. 7.7 показаны эпюры прогибов труб диаметром $1/2$, $3/4$ и 1 дюйм от нагрузки 6 кг/м, равномерно распределенной на полови-

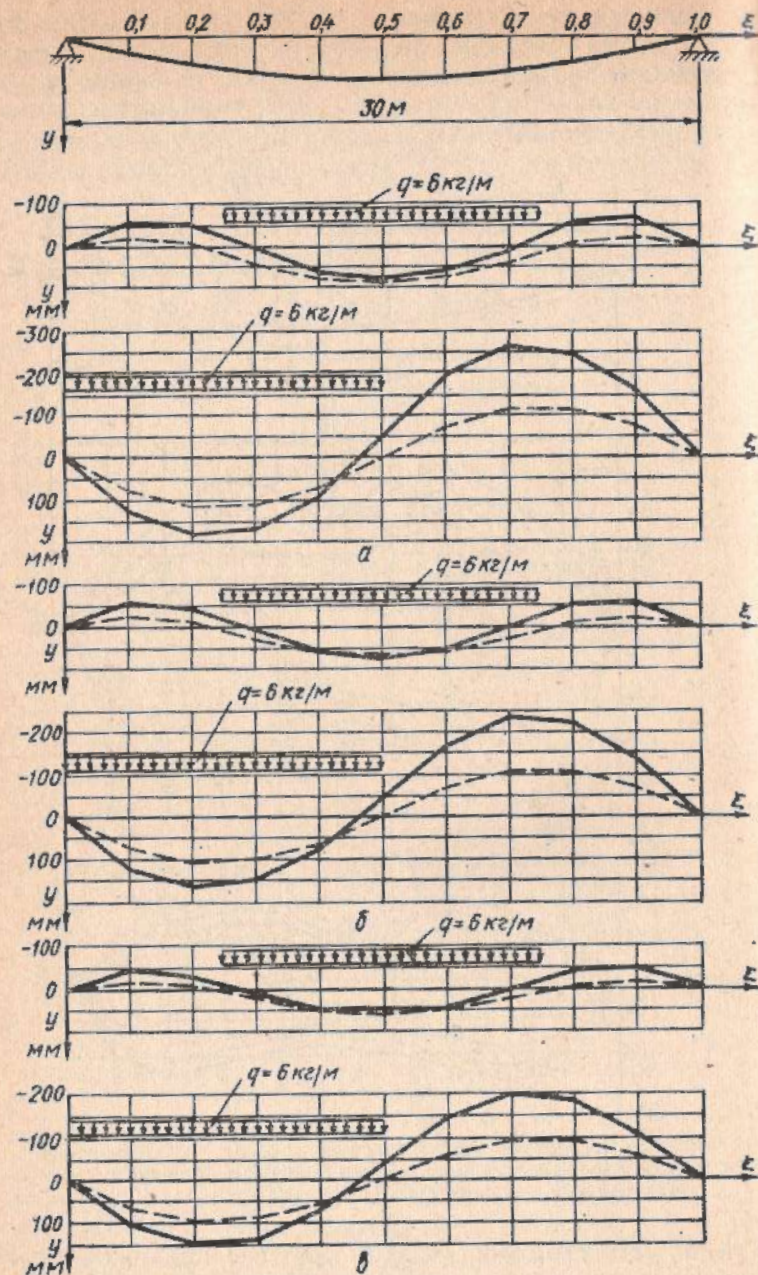


Рис. 7.7. Эпюры прогибов труб от нагрузки, распределенной на половине пролета, при диаметре труб 1/2 (а), 3/4 (б) и 1 (в) дюйм: сплошная линия — при стреле провисания 1/20 пролета; пунктирная — при стреле провисания 1/40 пролета.

но пролета. Эти прогибы оказались в 4—5 раз больше прогибов от нагрузки, расположенной в середине пролета. С увеличением диаметра труб, а следовательно, и их веса, прогибы уменьшаются. Уменьшение стрелы провисания приводит к уменьшению отрицательных прогибов к положительным. Жесткое закрепление нити и уменьшает деформативность, однако вызывает появление значительных изгибных напряжений в опорных сечениях труб. Прогибы нити в середине пролета от нагрузки, расположенной на половине пролета, не равен нулю. Так, для труб, испытанных при стреле провисания 1/20 пролета, он составил 20—25% максимального прогиба.

Анализ данных тензометрии позволяет сделать следующие выводы: сосредоточенные силы вызывают в сечениях нити, расположенных непосредственно под силой, значительные изгибные напряжения, быстро уменьшающиеся при удалении от места нагружения; изгибные напряжения при постоянной сосредоточенной силе уменьшаются с увеличением распределенной нагрузки или с уменьшением стрелы провисания; напряжения под сосредоточенной силой почти не зависят от схемы закрепления нити.

Несимметричная нагрузка вызывает значительные напряжения в опорных сечениях при жестком закреплении концов нити. Испытания первой серии опытных образцов нитей завершались разрушением воздействия на них горизонтальной нагрузки, которая передавалась на трубу через 0,1 пролета. Количество ступеней горизонтальной нагрузки принималось в зависимости от граничных условий и величины вертикальной равномерно распределенной нагрузки. При шарнирном закреплении концов труб на опорах и без пригрузки количество ступеней составляло 4 по 0,5 кг/м; с пригрузкой, равной 6 кг/м, — 7 ступеней, причем три последних по 1 кг/м. При жестком закреплении концов труб на опорах в опорных сечениях появились значительные напряжения. Количество ступеней при этом было не более 4 по 0,5 кг/м. Максимальный угол поворота нити относительно плоскости начального провисания достигал 35°.

На рис. 7.8 показаны графики вертикальных и горизонтальных составляющих перемещений труб диаметром 1/2, 3/4 и 1 дюйм в середине пролета в зависимости от величины горизонтальной нагрузки. Из графиков видно, что при уменьшении стрелы провисания в два раза величины вертикальных и горизонтальных составляющих перемещений труб уменьшаются на 58—61%.

Если принять перемещение трубы диаметром 1/2 дюйма за 100%, то соответствующие перемещения труб диаметром 3/4 и 1 дюйм составят соответственно 88 и 78%. На величине перемещений здесь сказывается как изменение величины жесткости, так и изменение собственного веса труб. Существенное влияние на величину горизонтальных перемещений оказывает увеличение вертикальной распределенной нагрузки. Так, дополнительная равномерно распределенная нагрузка 6 кг/м при одной и той же горизонтальной на-

грузке уменьшает перемещение труб из плоскости провисания почти в три раза.

Жесткое закрепление труб на опорах оказывает незначительное влияние на величины перемещений в середине пролета. Для труб

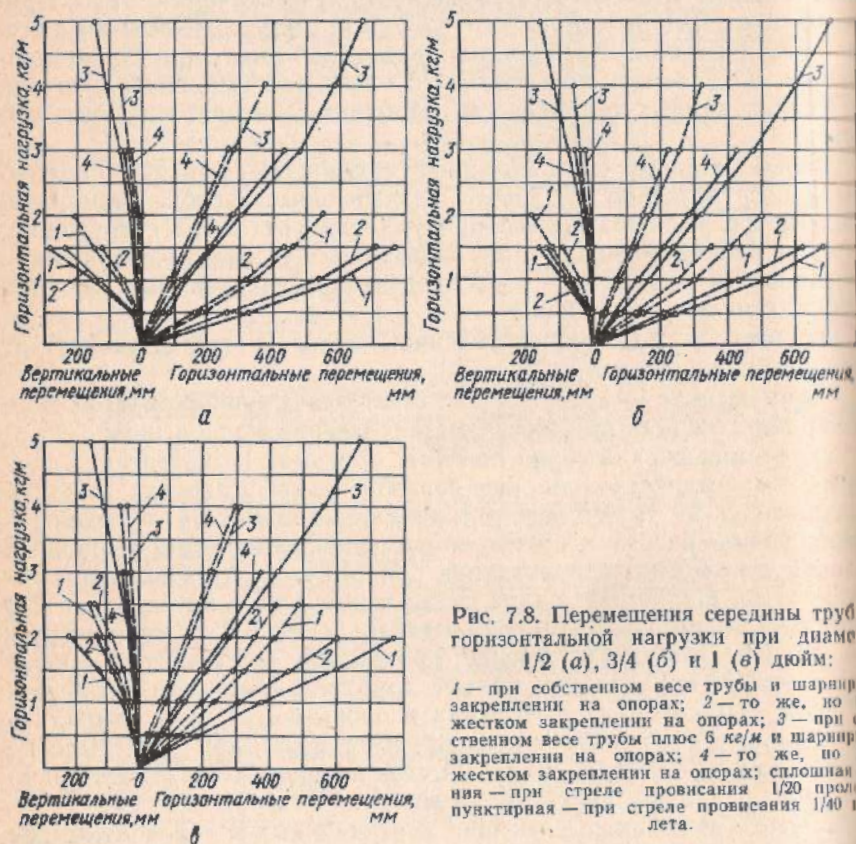


Рис. 7.8. Перемещения середины труб при горизонтальной нагрузке при диаметре 1/2 (а), 3/4 (б) и 1 (в) дюйма:

1 — при собственном весе трубы и шарнирном закреплении на опорах; 2 — то же, но при жестком закреплении на опорах; 3 — при собственном весе трубы плюс 6 кг/м и шарнирном закреплении на опорах; 4 — то же, но при жестком закреплении на опорах; сплошная линия — при стреле провисания 1/20 пролета; пунктирная — при стреле провисания 1/40 пролета.

диаметром 1/2 дюйма разница в перемещениях при шарнирном и жестком закреплении концов нити составила примерно 5%; с увеличением диаметра до 1 дюйма она увеличилась до 10%. Только сечения, находящиеся в непосредственной близости от опор (0,03—0,05 пролета), претерпевают значительные ограничения в перемещениях.

В табл. 7.1 приведены суммарные значения углов поворота концов нитей на опорах при шарнирном закреплении. Такие факторы, как уменьшение стрелы провисания, увеличение диаметра трубы и наличие дополнительной вертикальной равномерно распределенной нагрузки значительно уменьшают поворот опорных сечений. Характерно, что поворот опорного сечения вокруг соб-

ственной оси трубы представляет собой очень малую величину по сравнению с поворотом вокруг горизонтальной и особенно вокруг вертикальной оси.

На втором этапе испытаний в качестве опытных образцов применяли трубы диаметром 2 и 3 дюйма. Помимо частичного повторения схем загрузки, применявшихся на первом этапе, здесь более подробно рассматривали работу труб при загрузении их вертикальной распределенной нагрузкой, расположенной на части пролета, а также изучали величину и характер распределения по длине труб крутящих моментов при загрузении их горизонтальной нагрузкой.

На рис. 7.9—7.11 показаны эпюры прогибов и изгибающих моментов от действия сосредоточенной силы, приложенной соответственно на расстоянии 0,1; 0,3 и 0,5 пролета, построенные для труб диаметром 2 и 3 дюйма. Эпюры прогибов построены по ступеням нагружения, эпюры моментов — от суммарной дополнительной нагрузки.

Полученные данные позволяют сделать следующие выводы: жесткость труб не очень заметно влияет на величину прогибов и изгибающих моментов. Так, прогибы трубы диаметром 3 дюйма (ее жесткость в 3,8 раза больше жесткости трубы диаметром 2 дюйма) составляют при всех прочих равных условиях только 60% от прогибов трубы диаметром 2 дюйма. А изгибающие моменты под силой, наоборот, увеличиваются в 1,8—2,2 раза;

при уменьшении стрелы провисания с 1/20 до 1/40 пролета изменение прогибов в различных сечениях трубы происходит по-разному. Если в сечении 0,1—0,3 пролета они уменьшаются на 25%, то в сечении 0,4 пролета они остаются примерно такими же, а в середине пролета — даже увеличиваются;

с уменьшением стрелы провисания уменьшается отношение отрицательных прогибов (выгибов) к положительным;

при уменьшении стрелы провисания вдвое изгибающие моменты уменьшаются примерно на 20% во всех сечениях;

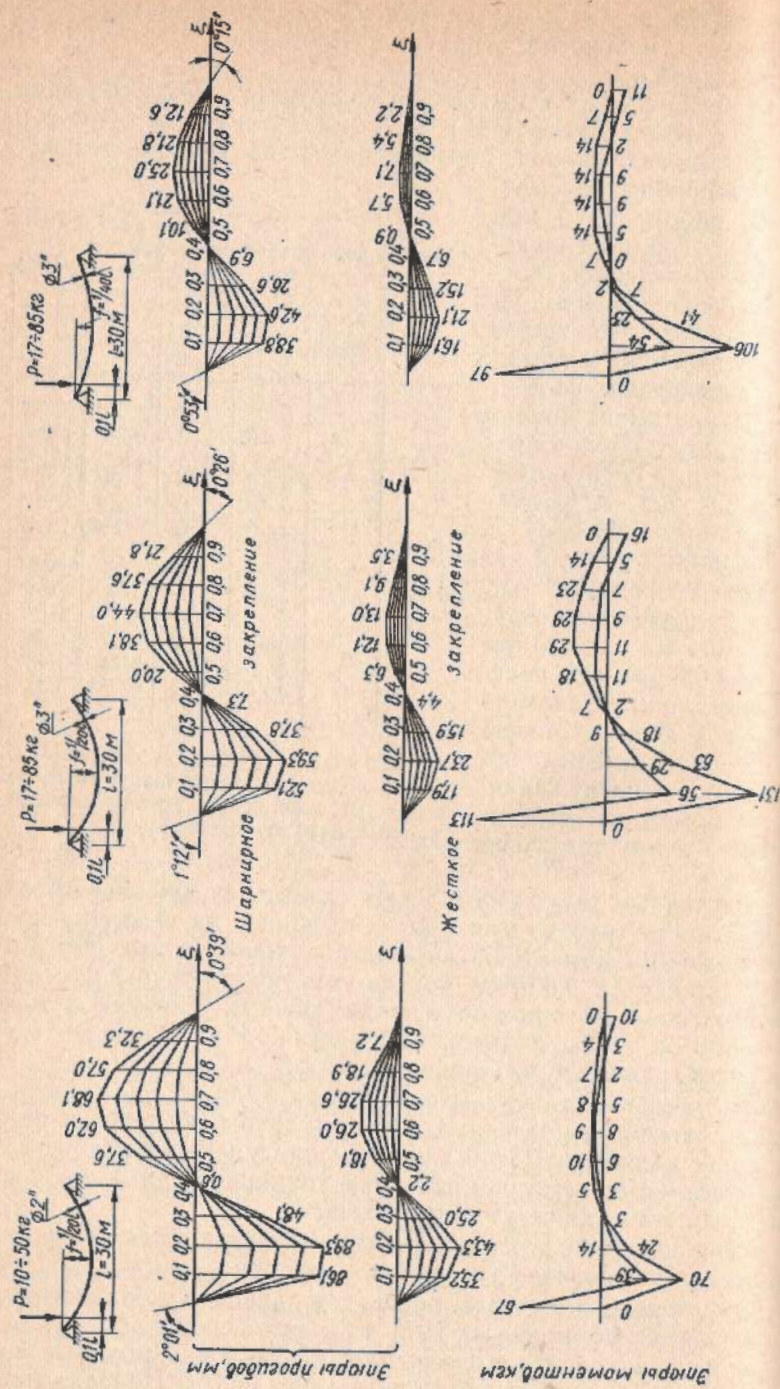
жесткое закрепление уменьшает прогибы и моменты в пролете, но вызывает значительные моменты на опорах. Правда, при опре-

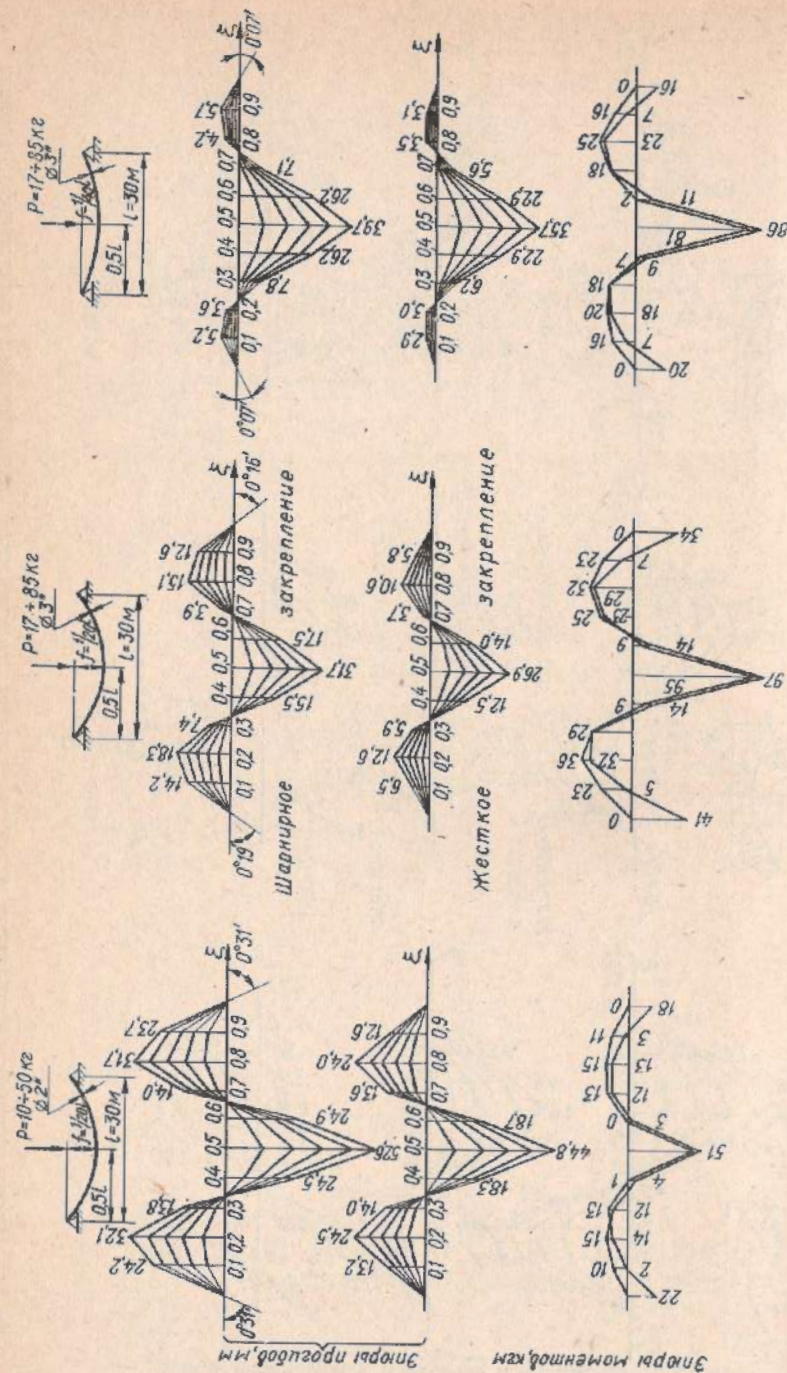
Таблица 7.1

Углы поворота труб на опорах

$\frac{f}{l}$	Диаметр трубы, дюймы	Нагрузка, кг/м		φ_r	φ_v	φ_c
		вертикальная	горизонтальная			
1/20	1/2	q	1,5	2°03'	5°48'	0°01'
		q+6	2,0	0°35'	3°20'	0°02'
		q	1,5	1°08'	4°38'	0°13'
	3/4	q+6	2,0	0°14'	2°07'	0°05'
		q	2,0	1°22'	5°02'	0°08'
		q+6	2,0	0°11'	1°54'	0°04'
1/40	1/2	q	2,0	1°28'	3°29'	0°02'
		q+6	2,0	0°08'	1°09'	0°02'
		q	2,0	1°11'	3°17'	0°05'
	3/4	q+6	2,0	0°07'	1°06'	0°05'
		q	2,0	0°44'	2°48'	0°03'
		q+6	2,0	0°08'	0°59'	0°01'

Примечание. q — собственный вес трубы; φ_r — угол поворота вокруг горизонтальной оси; φ_v — то же, вокруг вертикальной оси; φ_c — то же, вокруг собственной оси.





деленных соотношениях нагрузки и жесткости нити на изгиб прогибы и изгибающие моменты в сечении, расположенном в середине пролета, могут быть даже больше, чем при шарнирном закреплении. Влияние жесткого закрепления на напряженно-деформированное состояние нити тем больше, чем больше изгибная жесткость трубы, стрела ее провисания и чем ближе к опоре находится точка приложения нагрузки (табл. 7.2 и 7.3);

Таблица 7.2

Прогибы при шарнирном и жестком закреплении концов труб

Точки приложения нагрузки $\frac{a}{l}$	$f=1/20l$						$f=1/40l$		
	$\varnothing 2''$			$\varnothing 3''$			$\varnothing 3''$		
	$\frac{y_{ш}}{мм}$	$\frac{y_{ж}}{мм}$	$\frac{y_{ж}}{y_{ш}} \cdot 100$	$\frac{y_{ш}}{мм}$	$\frac{y_{ж}}{мм}$	$\frac{y_{ж}}{y_{ш}} \cdot 100$	$\frac{y_{ш}}{мм}$	$\frac{y_{ж}}{мм}$	$\frac{y_{ж}}{y_{ш}} \cdot 100$
0,1	86,1	35,2	41	52,1	17,9	34	38,8	16,1	41
0,2	127,4	87,1	68	86,1	50,5	59	63,2	43,9	70
0,3	102,0	83,0	81	70,7	52,0	74	54,5	48,5	89
0,4	67,2	57,7	86	43,0	34,0	79	42,0	37,9	90
0,5	52,6	44,8	85	31,7	26,9	85	39,7	35,7	90

Таблица 7.3

Изгибающие моменты при шарнирном и жестком закреплении концов труб

Точки приложения нагрузки $\frac{a}{l}$	$f=1/20l$						$f=1/40l$		
	$\varnothing 2''$			$\varnothing 3''$			$\varnothing 3''$		
	$\frac{M_{ш}}{кг\cdot м}$	$\frac{M_{ж}}{кг\cdot м}$	$\frac{M_{ж}}{M_{ш}} \cdot 100$	$\frac{M_{ш}}{кг\cdot м}$	$\frac{M_{ж}}{кг\cdot м}$	$\frac{M_{ж}}{M_{ш}} \cdot 100$	$\frac{M_{ш}}{кг\cdot м}$	$\frac{M_{ж}}{кг\cdot м}$	$\frac{M_{ж}}{M_{ш}} \cdot 100$
0,1	70	39	56	131	56	43	106	54	51
0,2	68	60	88	149	112	75	110	92	84
0,3	59	58	98	122	115	94	97	92	95
0,4	52	54	104	104	104	100	86	83	96
0,5	51	51	100	97	95	98	81	86	106

характер эпюр прогибов и изгибающих моментов от нагрузки, распределенной на участке 0,2 пролета (рис. 7.12—7.14), не отличается от эпюр прогибов и изгибающих моментов, обусловленных сосредоточенной нагрузкой. Поэтому выводы, касающиеся действия сосредоточенной нагрузки, можно отнести и к данной нагрузке с некоторой поправкой количественных соотношений.

Эпюры прогибов и изгибающих моментов от нагрузки, распределенной по всему пролету и на его части ($c/l=1,0-0,2$), показаны на рис. 7.15. Наиболее интересным является случай работы трубы под действием равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету и на участке 0,8 пролета. При этом в середине пролета зафиксированы отрицательные прогибы (выгибы). Это подтверждается эпюрой изгибающих моментов: кривизна на участках, примыкающих к середине пролета, уменьшается. Такая осо-

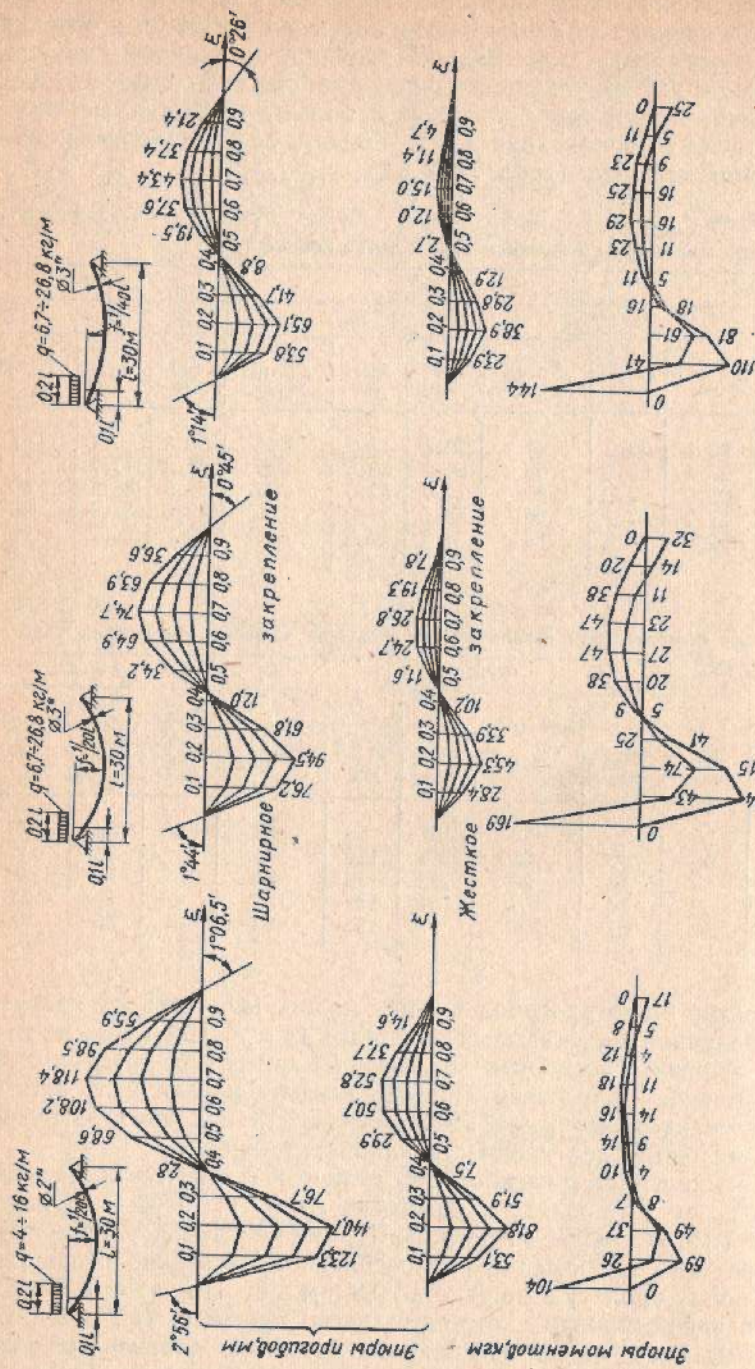


Рис. 7.12. Эпюры прогибов и изгибающих моментов от равномерно распределенной нагрузки, действующей на участке с длиной l и жесткостью EI

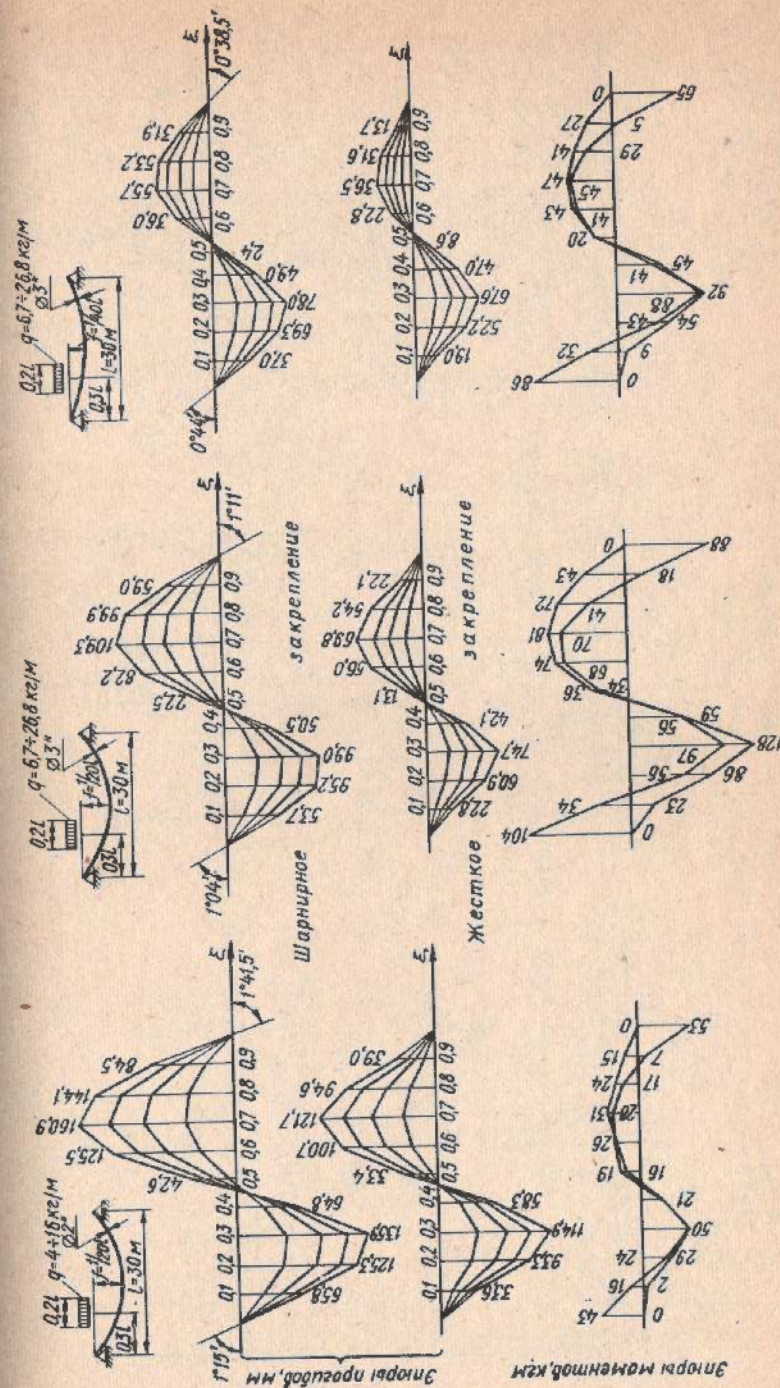


Рис. 7.13. Эпюры прогибов и изгибающих моментов от равномерно распределенной нагрузки, расположенной на участке пролета с точкой приложения равнодействующей на расстоянии 0,3 пролета.



Рис. 7.14. Эпюры прогибов и изгибающих моментов от равномерно распределенной нагрузки, расположенной на участке пролета с точкой приложения равнодействующей в центре

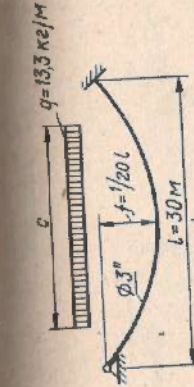


рис. 7.15. Эпюры прогибов и изгибающих моментов от распределенной нагрузки, расположенной на участке переменной длины с точкой приложения равнодействующей в середине пролета.

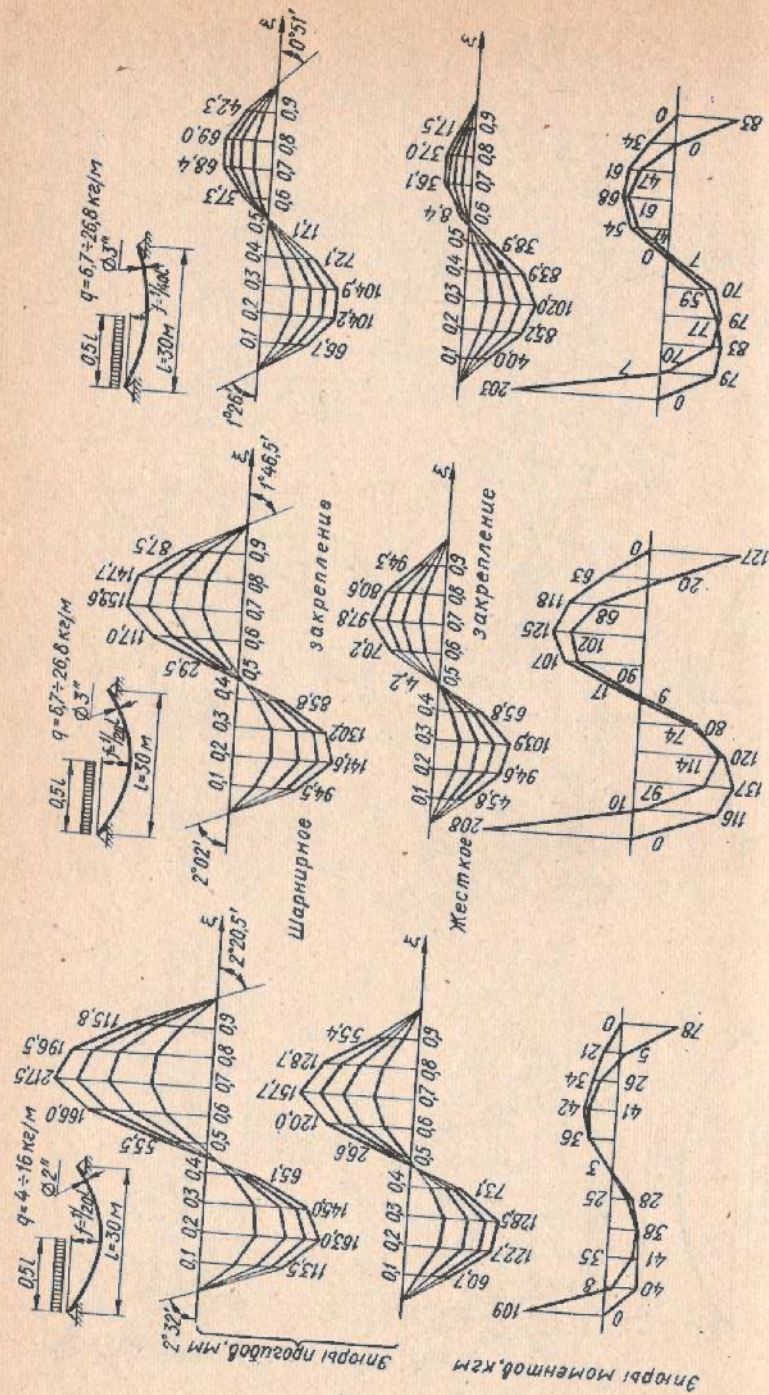


Рис. 7.16. Эпюры прогибов и изгибающих моментов от распределенной нагрузки.

ность объясняется тем, что с увеличением жесткости нити кривая ее провисания все больше отличается от квадратной параболы. Дополнительная равномерно распределенная нагрузка небольшой интенсивности вызывает небольшие упругие удлинения нити, но существенно меняет ее форму, приближая кривую провисания к параболе. Вследствие этого нить значительно перемещается вниз

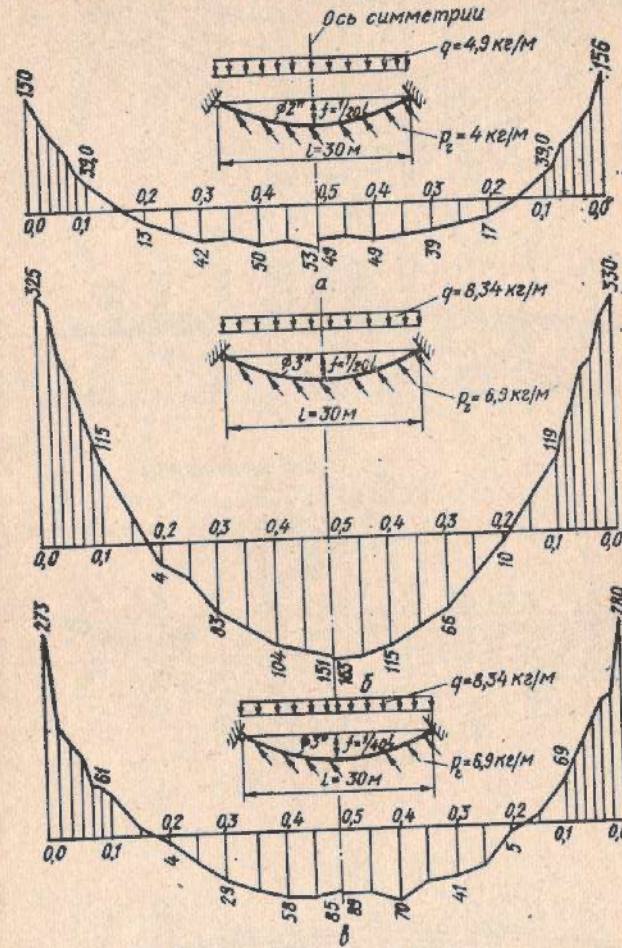


Рис. 7.17. Эпюры изгибающих моментов от горизонтальной нагрузки для труб диаметром 2 (а) и 3 (б, в) дюйма.

в четвертях пролета и несколько поднимается вверх в середине пролета;

при уменьшении длины загружаемого участка до 0,6 и менее пролета характер эпюр прогибов и изгибающих моментов становится таким же, как и при сосредоточенной нагрузке в середине пролета;

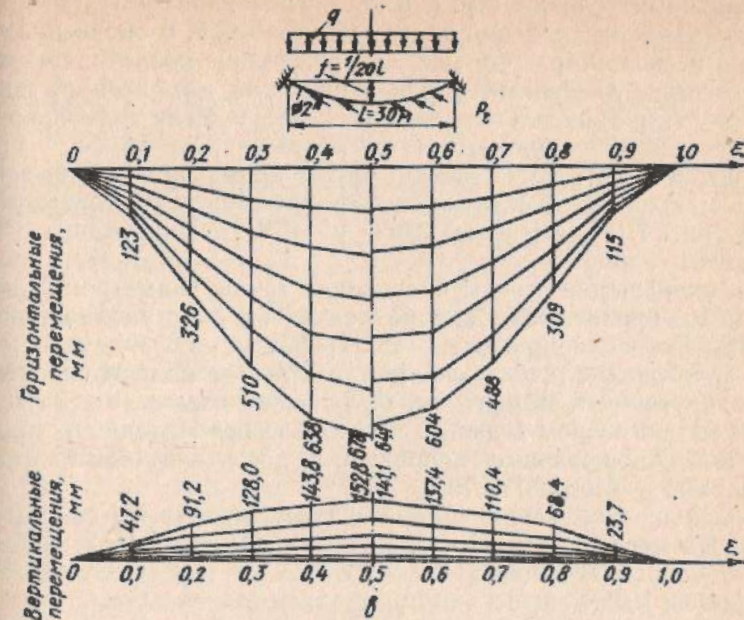
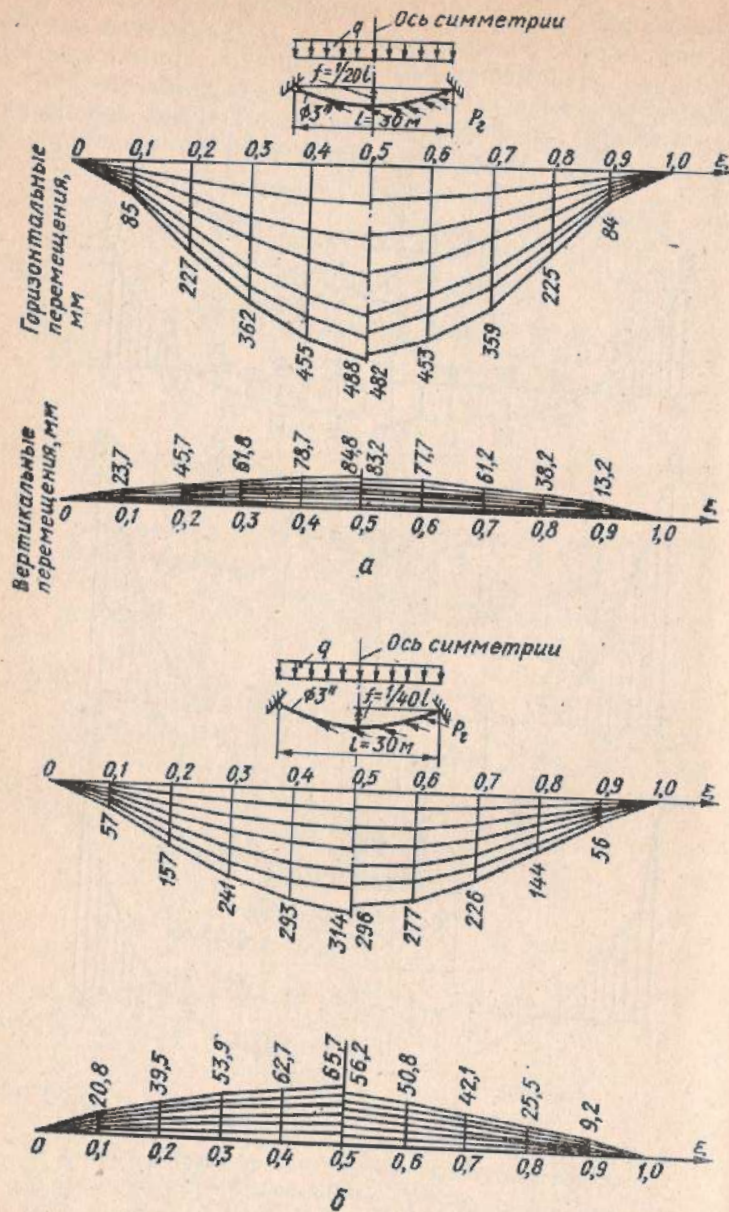


Рис. 7.18. Перемещения труб от горизонтальной нагрузки:
а — трубы диаметром 3 дюйма при стреле провисания $1/20$ пролета; б — то же, $1/40$ пролета; в — трубы диаметром 2 дюйма при стреле провисания $1/20$ пролета.

Таблица 7.4
Результаты сопоставления экспериментальных и теоретических данных

Ординаты, мм	Ординаты, мм						Изгибающие моменты, кгм					
	$f = 1/20l$			$f = 1/40l$			$f = 1/20l$			$f = 1/40l$		
	$\varnothing 2"$		$\varnothing 3"$	$\varnothing 3"$		$\varnothing 3"$	$\varnothing 2"$		$\varnothing 3"$	$\varnothing 3"$		$\varnothing 3"$
	опытные	вычисленные	опытные	вычисленные	опытные	вычисленные	опытные	вычисленные	опытные	вычисленные	опытные	вычисленные
0,0	1500	1500	1500	1500	746	750	0	0	0	0	0	0
0,1	1009	1006	1024	1018	500	504	40	42	126	135	71	78
0,2	582	581	597	596	286	292	60	62	213	220	116	118
0,3	260	262	270	272	127	132	71	72	249	271	136	137
0,4	64	66	68	69	30	33	75	76	280	298	142	145
0,5	0	0	0	0	0	0	71	77	300	307	135	148

для труб диаметром 2 и 3 дюйма при свободном их провисании. При действии дополнительной, особенно несимметричной нагрузки разница между теоретическими и экспериментальными данными возрастает.

На рис. 7.17 показаны эпюры изгибающих моментов от горизонтальной нагрузки: слева — при втором, справа — при третьем слу-

из всех схем равномерно распределенной нагрузки наиболее опасной следует считать нагрузку, расположенную на одной половине пролета (рис. 7.16), так как она вызывает большие изгибающие моменты и прогибы.

В табл. 7.4 приведены значения ординат и изгибающих моментов, полученных экспериментально и вычисленных теоретически

чае граничных условий (см. § 5.1). Изгибающие моменты в обоих случаях граничных условий близки между собой. В опорных сечениях они в несколько раз больше, чем в середине пролета. Некоторое несоответствие экспериментальных значений моментов на опорах теоретическим объясняется тем, что датчики были несколько смещены (на толщину диафрагмы) от места заделки трубы.

Горизонтальные перемещения трубы диаметром 3 дюйма были на 33% меньше соответствующих перемещений трубы диаметром 2 дюйма (рис. 7.18), вертикальные — на 45%, а напряжения в сечениях трубы — на 14%.

При уменьшении стрелы провисания трубы диаметром 3 дюйма с $1/20$ до $1/40$ пролета изгибающие моменты у опор уменьшились на 15—28%, в середине пролета — на 47—57%.

По сравнению с нормальными касательные напряжения, вызываемые крутящими моментами, были незначительными. Так, если для трубы диаметром 2 дюйма при стреле провисания $1/20$ пролета наибольшие нормальные напряжения достигали 1850 кг/см^2 , то касательные — всего 90 кг/см^2 .

Наибольшие крутящие моменты зафиксированы в опорных сечениях. По мере удаления от опор крутящие моменты уменьшаются. При втором случае граничных условий крутящие моменты были примерно на 10% меньше, чем при третьем.

Раздел второй. ДИНАМИКА

ГЛАВА 8. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТА. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

§ 8.1. Общие сведения

Висячие конструкции, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости, весьма чувствительны к различного рода динамическим воздействиям. Расчет таких конструкций в предположении только статического действия нагрузок недостаточен, так как при этом не учитываются динамические свойства как самой конструкции, так и нагрузок. Результаты исследований показывают, что динамические перегрузки могут оказывать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние висячих конструкций. Колебания, как правило, или мешают нормальной эксплуатации сооружения, или непосредственно угрожают его прочности, постепенно подготавливая усталостное разрушение. Поэтому проблема упругих колебаний нитей конечной жесткости является очень актуальной.

Вследствие геометрической нелинейности динамический расчет, сложный для стержневых конструкций, становится очень сложным для нитей конечной жесткости. Учет больших перемещений приводит к бесконечной системе нелинейных дифференциальных уравнений, исследование которой связано с большими трудностями. Задача решается приближенными методами. При этом оказывается, что амплитуда связывается с частотой колебаний нелинейной зависимостью. Это объясняется тем, что восстанавливающая сила нелинейно зависит от прогибов при колебаниях. Разумеется, принцип независимости колебательных движений при этом неприменим.

Характерной особенностью рассматриваемых нитей является возможность возникновения параметрических колебаний, поддерживаемых внешними силами косвенно, через изменение параметров. Для нитей конечной жесткости роль параметрической силы может играть периодически изменяющийся распор.

Резонанс в таких конструкциях может возникать не только при частотах, равных частотам свободных колебаний конструкции ω , но и при частотах, располагающихся вблизи отношений

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}; \dots$$

где Ω — частота возмущающей силы.

Возможность существования нескольких резонансных режимов значительно усложняет динамический расчет.

В общем случае колебания нити конечной жесткости являются пространственными. При решении задачи необходимо учитывать

энергию изгиба, кручения и осевого растяжения. Для простоты обычно рассматриваются только вертикальные плоские колебания как наиболее существенные. При этом систему с распределенными параметрами сводят к системе с конечным числом степеней свободы, ограничиваясь одной-тремя степенями.

При малых амплитудах колебаний возможна линеаризация уравнений колебаний путем отбрасывания нелинейных членов. Тогда колебания рассматриваются как гармонические и изохронные. Принцип суперпозиции колебаний становится применим и задача решается просто. Правда, такой подход возможен для решения узкого круга практических задач.

Для рассматриваемых нитей характерны следующие различные по своей природе колебательные процессы:

свободные колебания, совершаемые конструкцией без притока внешней энергии, т. е. когда конструкция, выведенная из состояния равновесия, предоставляется затем сама себе;

вынужденные колебания, совершаемые при действии на конструкцию внешних возмущающих сил;

параметрические колебания, вызываемые периодическими изменениями параметров конструкции;

автоколебания, поддерживаемые постоянным источником энергии, не имеющим колебательных свойств.

§ 8.2. Краткий обзор исследований

По своим динамическим свойствам нити конечной жесткости занимают промежуточное положение между гибкими нитями, прямолинейными стержнями и гибкими пологими арками. Динамика гибких нерастяжимых нитей посвящены работы Д. Сексона и А. Кана [61], Г. Д. Нехаева [30]. Вопросы динамики упругих гибких нитей и систем из них рассматривались в работах А. П. Синицына [44], А. Р. Ржаницына [41], Л. Ф. Лилеева и Е. Н. Селезневой [24], Н. Н. Попова и Б. С. Росторгуева [39], В. А. Ивовича [16, 17], Л. Г. Дмитриева и А. В. Касилова [14] и др.

Исследования вопросов устойчивости и нелинейных колебаний стержней и пологих арок изложены в работах Э. И. Григолюка [11], В. В. Болотина [5] и др. По теории колебаний висячих мостов наиболее значительными являются работы И. И. Гольденבלата [8], И. Рокара [42], Е. Рейснера [62] и С. П. Тимошенко [63].

Вопросы динамики нитей конечной жесткости освещены и сравнительно небольшом количестве работ, среди которых работы Г. А. Тартаковского [47] и Л. Н. Покровского [36, 37, 38] посвящены исследованию трубопроводных переходов в виде провисающей нити. Г. А. Тартаковский при выводе формулы для определения круговой частоты изгибных колебаний трубопровода исходил из дифференциального уравнения колебания прямолинейного стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0,$$

где m — масса единицы длины стержня.

При этом он рассматривал только первую форму колебаний и не учитывал изменение натяжения в процессе колебаний. При таких допущениях упускаются из вида многие специфические особенности работы нитей конечной жесткости.

В более строгой постановке Л. Н. Покровским дан анализ малых колебаний провисающего трубопровода; для определения частоты собственных колебаний им предложены трансцендентные уравнения.

Таким образом, теория колебаний нити конечной жесткости изучена недостаточно. Однако в области изучения колебаний конструкций, близких по своим динамическим свойствам к рассматриваемым нитям (гибкие нити, стержни и пологие арки, испытывающие действие осевой силы, а также другие гибкие конструкции, колеблющиеся в ветровом потоке, — дымовые трубы, мачты и т. п.), имеются определенные успехи. Многие положения и методы, применяемые при исследовании этих конструкций, могут быть использованы при разработке теории колебаний нитей конечной жесткости.

В этом разделе книги рассмотрены в основном вопросы, связанные с нелинейными колебаниями нитей, и приведены методы расчета, удобные для практического пользования.

§ 8.3. Нагрузки

На конструкции, работающие по схеме нити конечной жесткости, могут действовать динамические нагрузки различного характера изменения во времени. Это могут быть периодические нагрузки (действие вибрационного оборудования, транспортные нагрузки и т. д.) и непериодические, к которым относятся различного рода кратковременные и длительно действующие нагрузки (ветровые, сейсмические, аварийные). Графики изменения некоторых из перечисленных нагрузок носят систематический, а многие из них — случайный характер (когда величина нагрузок, место приложения и направление их действия являются случайными функциями времени); такова, например, ветровая нагрузка — одна из наиболее характерных для рассматриваемых конструкций.

Современное представление о воздействии на сооружение турбулентного ветрового потока состоит в том, что на некоторое в среднем установившееся давление накладывается пульсация давления порывов ветра, носящая случайный характер, который обуславливается неоднородностью атмосферы, изменчивостью рельефа местности и т. д. На графике рис. 8.1, заимствованном из работы [31], представлен характер пульсации скоростного напора, которая состоит из постоянной q_0 и случайной составляющих.

В принципе ветровое воздействие — это случайное поле давлений, неоднородное по длине и высоте сооружения. Во времени пульсация его принимается стационарной.

В современной строительной механике принято теоретические исследования и разработку методов расчета на ветровые нагрузки

основывать на вероятностных методах расчета [2], [31], в основе которых лежит теория случайных процессов. Последняя оперирует случайными величинами, зависящими от изменяющегося параметра, например от времени. Методы теории вероятности дают возможность предсказать средний суммарный результат большого количества однородных случайных явлений, зная который, можно

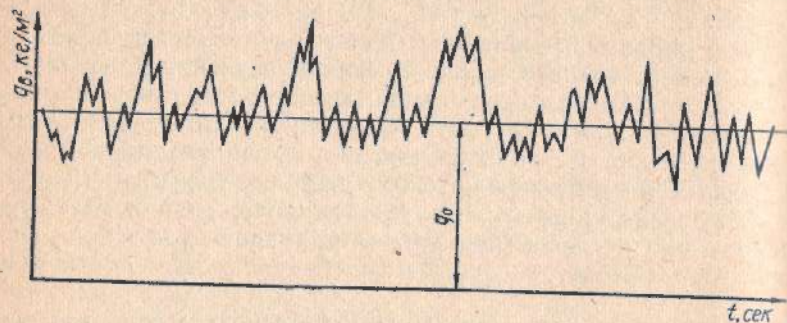


Рис. 8.1. Пульсация скоростного напора ветра.

определить максимальный результат. Конкретный результат какого-то явления при этом не может быть определен.

При практических расчетах пульсацию ветровой нагрузки принимают стационарной, обладающей эргодическим свойством, когда для анализа характеристик случайной нагрузки достаточно одной реализации (экспериментального измерения). Полную ветровую нагрузку рассматривают как сумму статической средней составляющей и случайной составляющей от пульсации скоростного напора.

Характеристики случайного процесса выражаются через детерминированные функции: среднее значение, корреляционную функцию и спектральную плотность, к которым применима теория интегралов Фурье. Так, изображение по Фурье корреляционной функции $K_x(\tau)$ определяется равенством

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (8.1)$$

где $G_x(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса, или энергетический спектр стационарного случайного процесса, дающий картину распределения энергии процесса по частотам гармонических составляющих ω .

Корреляционная функция выражается через обратное преобразование Фурье

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.2)$$

Для ветровой нагрузки как случайного процесса корреляционную функцию можно аппроксимировать формулой

$$K_n(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad (8.3)$$

где $K_n(\tau)$ — нормированная корреляционная функция.

Параметры α и β , определяющие корреляционную функцию возмущения, подбирают так, чтобы экспериментальная кривая совпала с теоретической, построенной по этой формуле. При этом выражение для определения спектральной плотности будет иметь вид

$$G_n(\omega) = 2\alpha \frac{\omega^2 + m^2}{\omega^4 + 2\alpha\omega^2 + m^4}, \quad (8.4)$$

где ω — частота колебаний непрерывного спектра;

$$m^2 = \alpha^2 + \beta^2; \quad \alpha = \alpha^2 - \beta^2.$$

В результате статистической обработки записей пульсаций скоростного напора оказалось, что они близки к нормальному закону распределения, вероятность которого равна 1, и что нормированные корреляционные функции и спектральные плотности для записей в разных местах земного шара близки между собой.

На рис. 8.2 показан усредненный график нормированной спектральной плотности пульсации ветрового давления, положенный в основу практических расчетов, а на рис. 8.3 — график коэффициента динамичности ξ в зависимости от периода колебаний сооружения при следующих коэффициентах затухания: для стальных конструкций $\gamma = 0,05$; для железобетонных и каменных конструкций $\gamma = 0,1$.

Величина $B(0)$ на рис. 8.2 означает дисперсию случайного процесса, если его среднее значение равно нулю.

При построении обоих графиков М. Ф. Барштейн [2] использовал усредненные значения параметров $\alpha = 0,42$ 1/сек и $\beta = 0,367$ 1/сек.

Отметим одну особенность ветровой нагрузки, играющую важную роль при практических расчетах сооружений. При исследовании колебаний упругих систем с определенными параметрами весьма существенное значение имеет взаимная корреляция обобщенных координат, необходимость учета которой может значительно усложнить динамический расчет. Пренебречь этим обстоятельством возможно в некоторых случаях, когда возмущающая нагрузка и колеблющаяся система обладают определенными свойствами, а именно:

спектральная плотность возмущения не должна иметь резких максимумов и минимумов. Ветровая нагрузка как раз и обладает этим свойством;

колеблющаяся система должна обладать высокими фильтрующими свойствами — затухание должно быть мало, а собственные

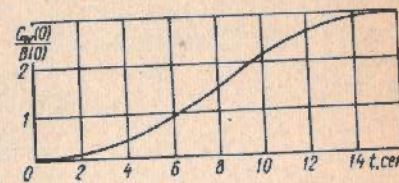


Рис. 8.2. Усредненный график нормированной спектральной плотности пульсации скоростного напора ветра.

частоты не должны быть близки между собой. Такая система пропускает в основном составляющие спектра внешнего воздействия с частотами, близкими к одной из собственных частот колебаний (резонансной).

Тогда взаимной корреляцией обобщенных координат можно пренебречь и вместо системы с распределенными параметрами

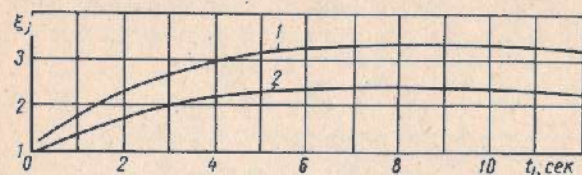


Рис. 8.3. График коэффициента динамичности ξ_d для стальных (1) и железобетонных (2) конструкций.

можно рассматривать значительно более простую систему с одной степенью свободы. Конструкции в виде нитей конечной жесткости как раз и предстоит в этом направлении исследовать.

Кратко остановимся на особенностях динамического расчета гибких висячих конструкций на действие ветра. Такой расчет сводится к учету порывистости ветра и проверке на ветровой резонанс. Учет порывистости ветра заключается в определении коэффициента динамичности, зависящего от собственных характеристик горизонтальных колебаний сооружения (коэффициента затухания и частоты колебаний), для действующей на сооружение ветровой нагрузки.

Проверку на ветровой резонанс производят с учетом особенностей воздействия ветра на сооружения цилиндрической формы. При ламинарном движении (скорости ветра 8—10 м/сек) параллельный поток воздуха, обтекая цилиндрическое тело, образует с заветренной стороны вихри Бенара — Кармана. Срываясь поочередно то с верхней, то с нижней стороны цилиндра, эти вихри создают периодические силовые импульсы, направленные соответственно то вверх, то вниз. Частота импульсов является функцией скорости ветра v и диаметра цилиндра d

$$\lambda_0 \approx 0,2 \frac{v}{d}. \quad (8.5)$$

Экспериментальными исследованиями [1, 3] установлено, что цилиндрическое тело колеблется в ветровом потоке с частотой, равной собственной частоте конструкции. В свою очередь, колебания конструкции влияют на образование вихрей, их частоту и интенсивность. Эта обратная связь осуществляется с помощью вихрей другого типа, отходящих от конструкции при ее крайних положениях и поддерживающих таким образом автоколебательный процесс. При совпадении частоты срыва этих вихрей с частотой собственных колебаний конструкции она может попасть в резонанс, приводящий к опасным динамическим перегрузкам.

ГЛАВА 9. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ НИТИ

§ 9.1. Пространственная деформация нити

Рассмотрим деформацию элемента оси нити, нагруженной статической $q(x)$ и динамической $q(x, t)$ и $p(x, t)$ нагрузками соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 9.1). Предположим, что в момент начала движения ($t=0$) форма провисания нити определяется уравнением $y=y_{ст}(x)$. Перемещение точки A оси нити разложим вдоль координатных осей x, y, z на составляющие $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $w(x, t)$; точка B , имеющая начальные координаты $x+dx, y_{ст}+dy_{ст}$, получит перемещение $u+du, v+dv$ и $w+dw$. Тогда деформированное состояние элемента нити определится координатами: для точки $A_1(x+u, y_{ст}+v, w)$ и для точки $B_1(x+dx+u+du, y_{ст}+dy_{ст}+v+dv, w+dw)$.

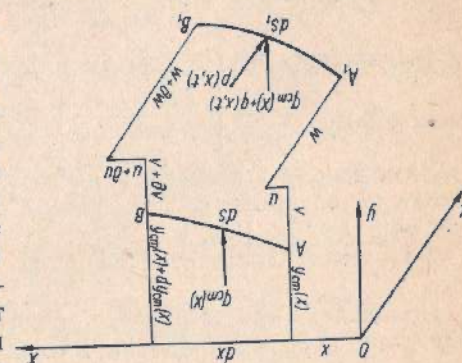


Рис. 9.1. Пространственная деформация нити и схема нагрузок.

Начальная длина элемента оси нити

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy_{ст}^2}.$$

Длину деформированного элемента оси нити определяем из выражения

$$ds_1 = \sqrt{(dx + du)^2 + (dy_{ст} + dv)^2 + dw^2}.$$

Это выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{dx^2 + 2dxdu + du^2 + dy_{ст}^2 + 2dy_{ст}dv + dv^2 + dw^2} = \\ &= \sqrt{dx^2 + dy_{ст}^2} \sqrt{1 + \frac{2dxdu}{dx^2 + dy_{ст}^2} + \frac{du^2}{dx^2 + dy_{ст}^2} + \frac{2dy_{ст}dv}{dx^2 + dy_{ст}^2} + \frac{dv^2}{dx^2 + dy_{ст}^2} + \frac{dw^2}{dx^2 + dy_{ст}^2}} \rightarrow \\ &= ds \sqrt{1 + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2 \frac{dx}{ds} \cdot \frac{du}{ds} + 2 \frac{dy_{ст}}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dw}{ds}\right)^2}. \end{aligned}$$

Разложим подкоренное выражение в степенной ряд и сохраним два первых члена этого ряда. Учитывая, что для пологих нитей $ds \approx dx$, и пренебрегая членом высшего порядка малости $\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2$, получим

$$ds_1 = dx \left[1 + \frac{du}{dx} + \frac{dy_{ст}}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right].$$

Определим относительное удлинение нити, обусловленное действием осевой растягивающей силы,

$$\varepsilon_x = \frac{ds_1 - dx}{dx},$$

или с учетом выражения для ds_1

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (9.1)$$

Выражение (9.1) может быть переписано в виде

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (y_{\text{сг}} + v)}{\partial x} \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (9.2)$$

Заметим, что ошибка в вычислении удлинения пологой нити, исходя из ее пролета, а не длины по кривой провисания, составляет не более 5% [14].

Определим долю относительного удлинения, вызванную изгибом.

Пользуясь, как и ранее, технической теорией изгиба прямых стержней, выразим кривизны в плоскостях xoy и xoz соответственно через вторые производные $\frac{\partial^2(y_{\text{сг}} + v)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Тогда для волокон нити, расположенных на расстоянии y и z от центра тяжести сечения, доля удлинения, обусловленная изгибом в двух плоскостях, составит $-y \frac{\partial^2(y_{\text{сг}} + v)}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Полное удлинение рассматриваемого волокна нити

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{сг}} + \varepsilon_{\text{д}} = \varepsilon_{\text{сг}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (y_{\text{сг}} + v)}{\partial x} \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - y \frac{\partial^2(y_{\text{сг}} + v)}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (9.3)$$

§ 9.2. Вывод уравнений движения нити

Для практических расчетов различных висячих конструкций пользуются одним из приближенных методов — вариационным. При этом исходят из наиболее общего закона движения механических систем — принципа Гамильтона, согласно которому система движется в промежутке времени от t_1 до t_2 таким образом, что интеграл

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (U - T + W) dt \quad (9.4)$$

принимает стационарное значение.

Здесь U — потенциальная энергия (работа деформации);

T — кинетическая энергия;

W — потенциал внешней нагрузки.

Решая далее вариационную задачу

$$\delta J = 0, \quad (9.5)$$

с помощью уравнений Эйлера получают систему уравнений в частных производных относительно функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $w(x, t)$.

Перемещения системы ищут в виде:

$$v(x, t) = \sum_{i=1, 2, \dots}^{\infty} a_i(t) X_i(x); \quad (9.6)$$

$$w(x, t) = \sum_{k=1, 2, \dots}^{\infty} b_k(t) Z_k(x), \quad (9.7)$$

где $X_i(x)$, $Z_k(x)$ — известные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи;

$a_i(t)$, $b_k(t)$ — искомые функции, зависящие от времени (обобщенные координаты).

Будем рассматривать консервативную задачу и не учитывать потерь энергии в системе.

Определим выражения для кинетической и потенциальной энергий через линейные перемещения нити.

Кинетическую энергию без учета инерции вращения элементов нити определяем из следующего выражения:

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \quad (9.8)$$

где m — погонная масса нити.

Потенциальную энергию вычисляем как сумму энергии деформации и энергии веса нити. При этом в соответствии с изложенными выше результатами исследований, влиянием кручения пологой нити конечной жесткости можно пренебречь, и деформация ее будет определяться действием растяжения и изгиба.

Работа деформации, отнесенная к единице длины нити, будет равна

$$\bar{U} = E \iint_F \left(\varepsilon_{\text{сг}} + \frac{\varepsilon_{\partial}}{2} \right) \varepsilon_{\partial} dy dz. \quad (9.9)$$

После подстановки (9.3) и интегрирования по поперечному сечению полная работа деформации выразится интегралом по длине нити

$$U_{\text{д}} = EF \varepsilon_{\text{сг}} \int_0^l \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{EF}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{сг}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (9.10)$$

где $v_1 = v(x, t) + y_{\text{сг}}(x)$.

Для определения потенциальной энергии веса при вращении нити относительно хорды, соединяющей точки опорных закреплений, рассмотрим маятниковую схему нити без учета упругого деформирования (рис. 9.2)

$$U_m = \int_0^l mg v_0 dx,$$

$$\text{где } v_0 = y_{\text{ст}} - \sqrt{y_{\text{ст}}^2 - w^2} \cong y_{\text{ст}} - y_{\text{ст}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{w^2}{y_{\text{ст}}^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{w^2}{y_{\text{ст}}};$$

g — ускорение силы тяжести.
Тогда

$$U_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg}{y_{\text{ст}}} \int_0^l w^2 dx. \quad (9.11)$$

Определим потенциал внешней нагрузки

$$W(t) = - \int_0^l \{ [q_{\text{ст}}(x) + q(x, t)] v + p(x, t) w \} dx, \quad (9.12)$$

где $q(x, t)$ и $p(x, t)$ — составляющие внешней динамической нагрузки в направлении осей y и z .

Ниже воспользуемся некоторыми рассуждениями Г. Каудерера [18]. Интеграл Гамильтона будет иметь вид:

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l \left\{ 2EF \varepsilon_{\text{ст}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ & + EF \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \\ & + EI \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{mg}{y_{\text{ст}}} w^2 - m \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] - 2 [q_{\text{ст}} + q(x, t)] v - 2p(x, t) w \right\} dx dt. \quad (9.13) \end{aligned}$$

Перепишем его следующим образом:

$$J = \int_0^t \int_0^l f \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t}, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial w}{\partial t} \right) \times dx dt. \quad (9.14)$$

Тогда уравнения Эйлера для вариационной задачи (9.5) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} = 0; \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)} = 0; \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)} = 0. \quad (9.17)$$

Продифференцировав, получим систему из трех уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_{\text{ст}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = 0; \quad (9.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left[\varepsilon_{\text{ст}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + EI \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} = q_{\text{ст}} + q(x, t); \quad (9.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\varepsilon_{\text{ст}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{mg}{y_{\text{ст}}} w = p(x, t). \quad (9.20) \end{aligned}$$

Эту систему можно существенно упростить, если воспользоваться интерпретацией гипотезы Кирхгофа для пространственной задачи, заключающейся в следующем: составляющая вектора скорости в направлении оси x , т. е. производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ настолько мала, что абсолютное значение этого вектора с достаточной точностью определяется абсолютным значением его составляющих в направлении осей y и z , т. е. производными $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial w}{\partial t}$. Следовательно, в равенстве для кинетической энергии (9.8) можно пренебречь членом $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$.

Тогда вместо уравнения (9.18) получим следующее:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_{\text{ст}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (9.21)$$

Проинтегрируем это уравнение по x при постоянном t

$$\varepsilon_{\text{ст}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_{x_0}(t). \quad (9.22)$$

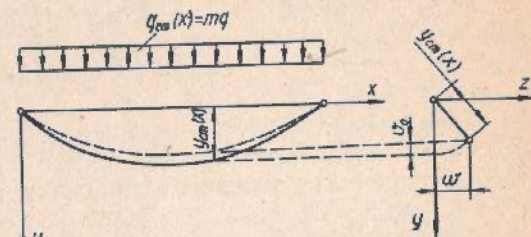


Рис. 9.2. К определению потенциальной энергии веса нити.

Проинтегрировав еще раз это уравнение по длине нити и разделив результат на l , получим

$$\varepsilon_{\text{ст}}(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \left[\varepsilon_{\text{ст}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{l} \left[\varepsilon_{\text{ст}} l + u(l, t) - u(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right]. \quad (9.23)$$

С помощью соотношений (9.22) и (9.23) из уравнений (9.19) и (9.20) получим следующие интегро-дифференциальные уравнения для функций $v(x, t)$ и $w(x, t)$:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{EF}{l} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left[\varepsilon_{\text{ст}} l + u(l, t) - u(0, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] = \\ = q_{\text{ст}} + q(x, t); \quad (9.24)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EF}{l} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\varepsilon_{\text{ст}} l + u(l, t) - u(0, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \\ + mg \frac{w}{y_{\text{ст}}} = p(x, t). \quad (9.25)$$

Приведенная система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений представляет собой общие и точные (в пределах принятых допущений) уравнения динамики нитей конечной жесткости.

§ 9.3. Анализ уравнений движения

Уравнения (9.24) и (9.25) можно упростить, если ввести обозначения статического и динамического распоров:

$$H_{\text{ст}} = \varepsilon_{\text{ст}} EF; \quad (9.26)$$

$$H_{\text{д}} = \frac{EF}{2l} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_{\text{ст}}}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right]. \quad (9.27)$$

Ограничимся рассмотрением нити с неподвижными в продольном направлении концами

$$u(l, t) - u(0, t) = 0.$$

В этом случае уравнение (9.24) может быть записано в виде

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + EI \frac{d^4 y_{\text{ст}}}{dx^4} - H_{\text{ст}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_{\text{д}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\ - H_{\text{ст}} \frac{d^2 y_{\text{ст}}}{dx^2} - H_{\text{д}} \frac{d^2 y_{\text{ст}}}{dx^2} = q_{\text{ст}} + q(x, t). \quad (9.28)$$

Сумма подчеркнутых членов, принадлежащих уравнению статического равновесия, равна нулю. Тогда систему уравнений (9.24) — (9.25) можно представить следующим образом:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - (H_{\text{ст}} + H_{\text{д}}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_{\text{д}} \frac{d^2 y_{\text{ст}}}{dx^2} = q(x, t); \quad (9.29)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (H_{\text{ст}} + H_{\text{д}}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{mg}{y_{\text{ст}}} w = p(x, t). \quad (9.30)$$

Полученная система уравнений (9.29) — (9.30) наиболее удобна для исследования нелинейных колебаний нити конечной жесткости под действием произвольной динамической нагрузки. В этой системе три неизвестных v , w и $H_{\text{д}}$; последнее из них определяется выражением (9.27).

Точные методы интегрирования таких уравнений неизвестны, поэтому будем или рассматривать частные случаи, или пользоваться приближенными методами, представляя перемещения в виде (9.6) и (9.7).

Например, положив $w=0$, получим уравнение, описывающее плоские (вертикальные) колебания нити. При $q(x, t) = p(x, t) = 0$ эти колебания будут свободными.

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

Положив $y = \frac{dy_{\text{ст}}}{dx} = \frac{d^2 y_{\text{ст}}}{dx^2} = 0$, из уравнений (9.27) и (9.29) получим хорошо известное нелинейное уравнение колебаний прямолинейного стержня на неподвижных опорах

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left[H_{\text{ст}} + \frac{EF}{4l} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] = 0. \quad (9.31)$$

Далее, положив $EI=0$, из уравнения (9.31) получим нелинейное уравнение струны, выведенное Кирхгофом [64]. Из уравнения (9.29), при условии $EI=0$ и $w=0$, можно получить также нелинейное уравнение колебаний гибкой нити [39]. При $H_{\text{ст}}=0$ можно легко осуществить переход к колебаниям пологих арок [11], для которых распор в ненагруженном состоянии равен нулю.

Таким образом, уравнения (9.29) — (9.30) согласуются с теорией колебаний струн, гибких нитей, прямолинейных стержней и арок и применимы для достаточно широкого класса задач, связанных с колебаниями различных конструкций в виде нитей конечной жесткости.

§ 9.4. Малые вертикальные колебания *

Антисимметричные формы колебаний. Малые свободные колебания в вертикальной плоскости рассмотрим с помощью линеаризованного уравнения (9.29) без правой части. Отбросив член второго порядка малости $H_g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ и введя вместо H_{ct} параметр u_{ct} , получим линейное уравнение

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{4u_{ct}^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_d \frac{d^3 y_{ct}}{dx^3} = 0. \quad (9.32)$$

Исследуем отдельно антисимметричные и симметричные (относительно середины пролета) формы колебаний нити. При антисимметричных колебаниях увеличение натяжения, вызываемое изгибом полуволны нити вниз, полностью компенсируется уменьшением натяжения от изгиба такой же полуволны вверх, т. е. при этом $H_g = 0$, и уравнение (9.32) превращается в известное уравнение прямолинейного стержня, растягиваемого постоянной силой [50].

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{4u_{ct}^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (9.33)$$

Для решения этого уравнения полагаем

$$v = v(x) v(t). \quad (9.34)$$

Тогда уравнение (9.33) распадается на два уравнения:

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0; \quad (9.35)$$

$$v''''(x) - \frac{4u_{ct}^2}{l^2} v''(x) - \frac{m\omega^2}{EI} v(x) = 0, \quad (9.36)$$

где ω — круговая частота свободных колебаний.

Здесь и ниже точки обозначают дифференцирование по времени t , а штрихи — по координате x .

Уравнение (9.35) представляет собой уравнение гармонического колебательного движения, а уравнение (9.36) позволяет определить форму колебаний и найти частоты.

Общее решение уравнения (9.36) имеет вид

$$v(x) = C_1 \operatorname{sh} s_1 x + C_2 \operatorname{ch} s_1 x + C_3 \sin s_2 x + C_4 \cos s_2 x, \quad (9.37)$$

где

$$s_1 = l \sqrt{\frac{2u_{ct}^2}{l^2} + \sqrt{\frac{4u_{ct}^4}{l^4} + \frac{m\omega^2}{EI}}}; \quad (9.38)$$

$$s_2 = l \sqrt{-\frac{2u_{ct}^2}{l^2} + \sqrt{\frac{4u_{ct}^4}{l^4} + \frac{m\omega^2}{EI}}}. \quad (9.39)$$

Из уравнения (9.39) получаем формулу для определения круговой частоты антисимметричных колебаний

$$\omega^2 = EI \frac{s_2^2}{ml^4} (s_2^2 + 4u_{ct}^2). \quad (9.40)$$

* При рассмотрении малых колебаний использованы некоторые положения работ [36+38].

Рассмотрим случай шарнирного закрепления концов нити. Для определения постоянных интегрирования воспользуемся следующими условиями:

$$\text{при } x=0 \quad v=0, v''=0;$$

$$\text{при } x=l \quad v=0, v''=0.$$

Условия на левой опоре дают

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Удовлетворяя те же условия на правой опоре, получим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} s_1 + C_3 \sin s_2 &= 0; \\ C_1 \frac{s_1^2}{l^2} \operatorname{sh} s_1 - C_3 \frac{s_2^2}{l^2} \sin s_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

Из условия равенства нулю определителя этой системы находим

$$(s_1^2 + s_2^2) \operatorname{sh} s_1 \sin s_2 = 0. \quad (9.42)$$

Так как $(s_1^2 + s_2^2) \operatorname{sh} s_1 \neq 0$, то $\sin s_2 = 0$. Следовательно, $s_2 = i\pi (i=2, 4, \dots)$.

Подставляя значения s_2 в уравнение (9.40), получаем

$$\omega^2 = EI \frac{l^2 \pi^2}{ml^4} (i^2 \pi^2 + 4u_{ct}^2). \quad (9.43)$$

Таким образом, при антисимметричных колебаниях форма колеблющейся шарнирно закрепленной нити (динамический прогиб) представляет собой синусоиду, т. е.

$$v(x) = C_3 \sin \frac{i\pi}{l} x. \quad (9.44)$$

В случае жесткого закрепления концов нити условия для определения постоянных интегрирования следующие:

$$\text{при } x=0 \quad v=0, v'=0;$$

$$\text{при } x=l \quad v=0, v'=0.$$

Подставляя в эти условия значения v и v' , получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0; \\ C_1 \frac{s_1}{l} + C_3 \frac{s_2}{l} &= 0; \\ C_1 \operatorname{sh} s_1 + C_2 \operatorname{ch} s_1 + C_3 \sin s_2 + C_4 \cos s_2 &= 0; \\ C_1 \frac{s_1}{l} \operatorname{ch} s_1 + C_2 \frac{s_1}{l} \operatorname{sh} s_1 + C_3 \frac{s_2}{l} \cos s_2 - C_4 \frac{s_2}{l} \sin s_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.45)$$

После преобразований получим систему из двух однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \left(\operatorname{sh} s_1 - \frac{s_1}{s_2} \sin s_2 \right) + C_2 (\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2) &= 0; \\ C_1 s_1 (\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2) + C_2 (s_1 \operatorname{sh} s_1 - s_2 \sin s_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.46)$$

Из условия совместности этой системы находим

$$\left(\operatorname{sh} s_1 - \frac{s_1}{s_2} \sin s_2 \right) (s_1 \operatorname{sh} s_1 - s_2 \sin s_2) - s_1 (\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2)^2 = 0. \quad (9.47)$$

Чтобы получить уравнение относительно s_2 , необходимо s_1 выразить через s_2 . Для этого следует подставить (9.40) в (9.38). В результате получим

$$s_1 = \sqrt{4u_{\text{ст}}^2 + s_2^2}. \quad (9.48)$$

Подставив (9.48) в (9.47), получим частотное трансцендентное уравнение относительно s_2 для антисимметричных форм колебаний. Корни этого уравнения соответствуют значениям частот и определяются обычным приемом с помощью нахождения перемен знака.

Симметричные формы колебаний. Наибольший интерес представляют симметричные колебания, сопровождающиеся изгибом и изменением распора одновременно. Такие колебания описываются более сложным уравнением (9.32).

Рассматривая режим установившихся колебаний и решая уравнение (9.32) методом Фурье, после подстановки значения второй производной уравнения кривой провисания нити при действии статической нагрузки получим

$$v'''' - \frac{4u_{\text{ст}}^2}{l^2} v'' - \frac{m\omega^2}{EI} v = -\frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A}{2(EI)^2} \cdot \frac{\text{sh } u_{\text{ст}} \xi \text{ sh } u_{\text{ст}} (1 - \xi)}{u_{\text{ст}}^2 \text{ ch } u_{\text{ст}}}. \quad (9.49)$$

Здесь H_A — некоторая неизвестная постоянная, равная динамическому распору.

Общее решение этого уравнения состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Оно имеет вид

$$v(x) = C_1 \text{sh } s_1 \xi + C_2 \text{ch } s_1 \xi + C_3 \sin s_2 \xi + C_4 \cos s_2 \xi + \frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A}{2EI m \omega^2} \cdot \frac{\text{sh } u_{\text{ст}} \xi \text{ sh } u_{\text{ст}} (1 - \xi)}{u_{\text{ст}}^2 \text{ ch } u_{\text{ст}}}, \quad (9.50)$$

где s_1 и s_2 определяют из выражений (9.38) и (9.39).

Для нити с шарнирно закрепленными концами условия для определения постоянных интегрирования следующие:

при $x=0$ $v=0$, $v''=0$;

при $x=l$ $v=0$, $v''=0$;

при $x=l/2$ $v'=0$.

Подставляя в эти условия значения v , v' и v'' , получим систему из пяти уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0; \\ C_2 s_1^2 - C_4 s_2^2 &= \frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A}{EI m \omega^2}; \\ C_1 \text{sh } s_1 + C_2 \text{ch } s_1 + C_3 \sin s_2 + C_4 \cos s_2 &= 0; \\ C_1 s_1^2 \text{sh } s_1 + C_2 s_1^2 \text{ch } s_1 - C_3 s_2^2 \sin s_2 - C_4 s_2^2 \cos s_2 &= \frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A}{EI m \omega^2}; \\ C_1 s_1 \text{ch } \frac{s_1}{2} + C_2 s_1 \text{sh } \frac{s_1}{2} + C_3 s_2 \cos \frac{s_2}{2} - C_4 s_2 \sin \frac{s_2}{2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

откуда находим

$$C_1 = -\frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A (1 - \text{ch } s_1)}{EI m \omega^2 (s_1^2 + s_2^2) \text{sh } s_1}; \quad (9.52)$$

$$C_2 = -\frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A}{EI m \omega^2 (s_1^2 + s_2^2)}; \quad (9.53)$$

$$C_3 = -\frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A (1 - \cos s_2)}{EI m \omega^2 (s_1^2 + s_2^2) \sin s_2}; \quad (9.54)$$

$$C_4 = -C_2. \quad (9.55)$$

Подставив значения постоянных интегрирования (9.52) — (9.55) в уравнение (9.50), получим выражение для определения динамического прогиба

$$v(x) = -\frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A}{EI m \omega^2 (s_1^2 + s_2^2)} \left[\frac{1 - \text{ch } s_1}{\text{sh } s_1} \text{sh } s_1 \xi + \text{ch } s_1 \xi - \frac{1 - \cos s_2}{\sin s_2} \times \right. \\ \left. \times \sin s_2 \xi - \cos s_2 \xi + \frac{(s_1^2 + s_2^2)}{2} \cdot \frac{\text{sh } u_{\text{ст}} \xi \text{ sh } u_{\text{ст}} (1 - \xi)}{u_{\text{ст}}^2 \text{ ch } u_{\text{ст}}} \right]. \quad (9.56)$$

Для получения частотного уравнения преобразуем систему (9.51). Вычитая из четвертого уравнения второе, получим систему из четырех однородных уравнений, условие совместности которой приводит к частотному трансцендентному уравнению

$$\text{sh } s_1 (s_1^2 + s_2^2) \left\{ s_1 \text{sh } \frac{s_1}{2} + s_2 \left[\sin \frac{s_2}{2} - \frac{(\text{ch } s_1 - \cos s_2)}{\sin s_2} \cos \frac{s_2}{2} \right] \right\} - \\ - \left(s_1 \text{ch } \frac{s_1}{2} - s_2 \frac{\text{sh } s_1}{\sin s_2} \cos \frac{s_2}{2} \right) [s_1^2 (\text{ch } s_1 - 1) + s_2^2 (\text{ch } s_1 + 1)] = 0. \quad (9.57)$$

Чтобы получить уравнение относительно s_2 , необходимо вместо s_1 подставить его значение по формуле (9.48).

Решая уравнение (9.56), найдем его корни s_2 , s_2' , s_2'' , ... После этого из уравнения (9.40) определим соответствующие им значения частот симметричных колебаний.

При жестком закреплении концов нити граничные условия следующие:

при $x=0$ $v=0$, $v'=0$;

при $x=l$ $v=0$, $v'=0$;

при $x=l/2$ $v'=0$.

Подставив в эти условия значения v и v' , получим систему из пяти уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0; \\ C_1 s_1 + C_3 s_2 &= -\frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A \text{th } u_{\text{ст}}}{2EI m \omega^2 u_{\text{ст}}}; \\ C_1 \text{sh } s_1 + C_2 \text{ch } s_1 + C_3 \sin s_2 + C_4 \cos s_2 &= 0; \\ C_1 s_1 \text{ch } s_1 + C_2 s_1 \text{sh } s_1 + C_3 s_2 \cos s_2 - C_4 s_2 \sin s_2 &= \\ &= -\frac{q_{\text{ст}} l^2 H_A \text{th } u_{\text{ст}}}{2EI m \omega^2 u_{\text{ст}}}; \\ C_1 s_1 \text{ch } \frac{s_1}{2} + C_2 s_1 \text{sh } \frac{s_1}{2} + C_3 s_2 \cos \frac{s_2}{2} - C_4 s_2 \sin \frac{s_2}{2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.58)$$

Значения постоянных интегрирования

$$C_1 = -\frac{q_{\text{CT}} l^2 H_d \operatorname{th} u_{\text{CT}}}{2EI\omega^2 u_{\text{CT}} (s_1 - as_2)}; \quad (9.59)$$

$$C_2 = \frac{q_{\text{CT}} l^2 H_d \operatorname{th} u_{\text{CT}} (\operatorname{sh} s_1 - a \sin s_2)}{2EI\omega^2 u_{\text{CT}} (s_1 - as_2) (\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2)}; \quad (9.60)$$

$$C_3 = \frac{q_{\text{CT}} l^2 H_d \operatorname{th} u_{\text{CT}}}{2EI\omega^2 u_{\text{CT}} (s_1 - as_2)} a; \quad (9.61)$$

$$C_4 = -C_2, \quad (9.62)$$

$$\text{где } a = \frac{s_1 (\operatorname{ch} s_1 - 1) (\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2) - \operatorname{sh} s_1 (s_1 \operatorname{sh} s_1 + s_2 \sin s_2)}{s_2 (\cos s_2 - 1) (\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2) - \sin s_2 (s_1 \operatorname{sh} s_1 + s_2 \sin s_2)}.$$

С учетом (9.58)–(9.61) уравнение для определения динамического прогиба будет иметь вид:

$$v(x) = \frac{q_{\text{CT}} l^2 H_d \operatorname{th} u_{\text{CT}}}{2EI\omega^2 u_{\text{CT}} (s_1 - as_2)} \left[-\operatorname{sh} s_1 \xi + \frac{(\operatorname{sh} s_1 - a \sin s_2)}{(\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2)} \operatorname{ch} s_1 \xi + a \sin s_2 \xi - \frac{(\operatorname{sh} s_1 - a \sin s_2)}{(\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2)} \cos s_2 \xi + \frac{s_1 - as_2}{\operatorname{th} u_{\text{CT}}} \cdot \frac{\operatorname{sh} u_{\text{CT}} \xi \operatorname{sh} u_{\text{CT}} (1 - \xi)}{u_{\text{CT}} \operatorname{ch} u_{\text{CT}}} \right]. \quad (9.63)$$

Параметр s_2 определяем из частотного уравнения

$$\left[s_1 \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} - \frac{\operatorname{sh} s_1 \left(s_1 \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} + s_2 \sin \frac{s_2}{2} \right)}{\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2} \right] \left[s_2 (\cos s_2 - 1) - \frac{\sin s_2 (s_1 \operatorname{sh} s_1 + s_2 \sin s_2)}{\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2} \right] - \left[s_1 (\operatorname{ch} s_1 - 1) - \frac{\operatorname{sh} s_1 (s_1 \operatorname{sh} s_1 + s_2 \sin s_2)}{\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2} \right] \times \\ \times \left[s_2 \cos \frac{s_2}{2} - \frac{\sin s_2 \left(s_1 \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} + s_2 \sin \frac{s_2}{2} \right)}{\operatorname{ch} s_1 - \cos s_2} \right] = 0. \quad (9.64)$$

Уравнения для определения динамического прогиба и частотные уравнения получаются весьма громоздкими. С помощью приближенных методов могут быть получены более простые формулы (см. гл. 10).

§ 9.5. Динамический распор и динамический изгибающий момент

В уравнениях (9.56) и (9.63) неизвестным остается динамический распор. Для определения его воспользуемся выражением (9.27). При $\omega = 0$ получим

$$H_d = \frac{EF}{2l} \left[\int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dy_{\text{CT}}}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right]. \quad (9.65)$$

Первый член этого выражения может быть преобразован путем интегрирования по частям

$$\int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dy_{\text{CT}}}{dx} dx = \int_0^l \frac{dy_{\text{CT}}}{dx} dv = v \frac{dy_{\text{CT}}}{dx} \Big|_0^l - \int_0^l v \frac{d^2 y_{\text{CT}}}{dx^2} dx. \quad (9.66)$$

Для неподвижных концов нити $v(0, l) = 0$, первый член соотношения (9.66) обращается в нуль и выражение (9.65) принимает вид

$$H_d = \frac{EF}{2l} \left[- \int_0^l v \frac{d^2 y_{\text{CT}}}{dx^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right]. \quad (9.67)$$

Для рассматриваемого случая малых колебаний

$$H_d = - \frac{EF}{2l} \int_0^l v \frac{d^2 y_{\text{CT}}}{dx^2} dx. \quad (9.68)$$

Для определения динамического распора необходимо знать амплитуду колебаний, например, в середине пролета (при $\xi = 0.5$). Она может быть определена из решения задачи о вынужденных колебаниях, после чего с помощью уравнений (9.56) и (9.63) или равенства (9.68) может быть найден динамический распор. В свою очередь, форму колебаний $v(x)$ определяем из уравнений (9.36) и (9.63) с подстановкой в них известного динамического распора.

Последним определяем динамический изгибающий момент в сечениях нити по формуле

$$M_d = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (9.69)$$

§ 9.6. Малые горизонтальные колебания

Горизонтальные (маятниковые) колебания возникают при воздействии на нить поперечных динамических нагрузок. Рассмотрим колебания нити с шаровыми шарнирами на концах (простейший случай). Предположим, что при колебаниях нить находится в плоскости, проходящей через точки подвеса, и в ее сечениях отсутствуют напряжения изгиба и кручения (рис. 9.3). При таких предположках можно использовать теорию хорошо изученных колебаний математического маятника [25].

Уравнение движения запишем в виде

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{L_m} \sin \beta = 0, \quad (9.70)$$

где β — угол отклонения плоскости нити;

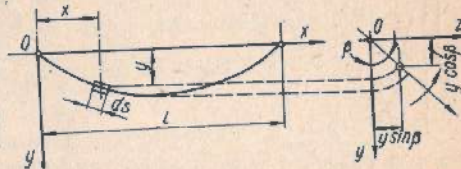


Рис. 9.3. Схема маятниковых колебаний нити.

L_m — длина эквивалентного маятника, определяемая из выражения

$$L_m = \frac{\int_0^l y^2 ds}{\int_0^l y ds}. \quad (9.71)$$

Для пологих нитей

$$L_m \approx 0,5l. \quad (9.72)$$

Для малых углов отклонения β уравнение (9.70) приводится к виду

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \beta = 0, \quad (9.73)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L_m}}. \quad (9.74)$$

При начальных условиях $t=0$, $\beta=\beta_0$ и $\dot{\beta}=\dot{\beta}_0$ решение уравнения (9.73) следующее:

$$\beta = \beta_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\beta}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (9.75)$$

При отклонениях нити на угол $\beta \geq 20^\circ$ следует пользоваться уравнением (9.70), приближенное решение которого можно получить, если заменить $\sin \beta$ его разложением в ряд. При двух членах ряда $(\beta - \frac{\beta^3}{6})$ и начальных условиях $t=0$, $\beta=\beta_0$ и $\dot{\beta}=0$ находим

$$\beta = \beta_0 \cos \omega t + \frac{1}{192} \beta_0^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t). \quad (9.76)$$

Колебания, описываемые уравнением (9.76), являются квазигармоническими, а частота при этом получается несколько больше величин, вычисленных по формуле (9.74), в зависимости от амплитуды.

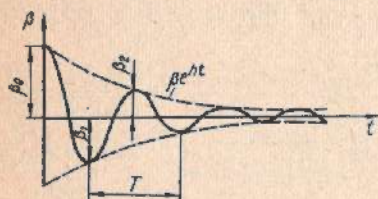


Рис. 9.4. График затухающих свободных маятниковых колебаний нити.

Рассмотрим влияние сил сопротивления на малые горизонтальные колебания нити.

Затуханию горизонтальных колебаний способствуют силы лобового сопротивления воздуха, силы, зависящие от вязкости материала, трения, возникающие в местах опорных креплений, и др. С некоторым

приближением можно принять, что затухание пропорционально первой степени скорости движения нити. При этом дифференциальное уравнение малых горизонтальных колебаний нити

$$\ddot{\beta} + 2h\dot{\beta} + \omega^2 \beta = 0, \quad (9.77)$$

где h — коэффициент, характеризующий затухание.

Так как затухание горизонтальных колебаний нити мало, т. е. $h \ll 1$, то решение уравнения (9.77) следующее:

$$\beta = e^{-ht} \left(B_1 \cos \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega^2}} t + B_2 \sin \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega^2}} t \right), \quad (9.78)$$

или

$$\beta = B_3 e^{-ht} \sin \left(\omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega^2}} t + \vartheta \right). \quad (9.79)$$

При начальных условиях $t=0$, $\beta=\beta_0$, $\dot{\beta}=\dot{\beta}_0$ амплитуду B_3 и начальную ϑ фазу определяют по формулам:

$$B_3 = \sqrt{\beta_0^2 + \frac{(\dot{\beta}_0 + h\beta_0)^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{h^2}{\omega^2}\right)}}; \quad \operatorname{tg} \vartheta = - \frac{\beta_0 \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega^2}}}{\dot{\beta}_0 + h\beta_0}.$$

Из уравнения (9.79) видно, что амплитуда колебаний убывает при $t \rightarrow \infty$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega^2}}}. \quad (9.80)$$

Из теории колебаний [50] известно, что небольшое сопротивление очень мало влияет на период, а следовательно, и на частоту колебаний, но существенно сказывается на амплитуде, которая уменьшается в течение периода в отношении e^{ht} (рис. 9.4).

ГЛАВА 10. ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ НИТИ

§ 10.1. Вертикальные колебания при действии динамической нагрузки неперiodического характера

При достаточно больших колебаниях, характерных для висячих конструкций, членом $H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ в уравнении (9.29) пренебрегать уже нельзя. Тогда уравнение колебаний нити становится нелинейным и, как уже отмечалось, должно решаться приближенными методами. Для вертикальных колебаний запишем это уравнение в виде

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{4u_{ct}^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_{ct} \frac{\partial^2 (y_{ct} + v)}{\partial x^2} = q(x, t). \quad (10.1)$$

Уравнение (10.1) может быть приведено к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, если воспользоваться представлением функций v и y_{ct} , а также нагрузки $q(x, t)$ в виде рядов по формам собственных линейных колебаний прямолинейного стержня, удовлетворяющих граничным условиям.

Ограничимся рассмотрением случая с шарнирным закреплением концов нити на опорах; при этом уравнение (10.1) допускает решение методом Фурье. Учитывая граничные условия (при $x=0$ и $x=l$ $v=0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$), напомним выражение для v в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \sin \frac{i\pi}{l} x. \quad (10.2)$$

Представим далее в виде ряда функцию провисания от статической нагрузки и функцию динамической нагрузки

$$y_{\text{ст}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin \frac{i\pi}{l} x; \quad (10.3)$$

$$q(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sin \frac{i\pi}{l} x. \quad (10.4)$$

Подставив (10.2) — (10.4) в (10.1), получим

$$m \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{a}_i \sin \frac{i\pi}{l} x + EI \frac{\pi^4}{l^4} \sum_{i=1}^{\infty} i^4 a_i \sin \frac{i\pi}{l} x + \frac{4u_{\text{ст}}^2}{l^2} EI \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 a_i \times \\ \times \sin \frac{i\pi}{l} x + H_{\text{д}} \frac{\pi^2}{l^2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} i^2 (a_i + f_i) \sin \frac{i\pi}{l} x \right] = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad (10.5)$$

откуда

$$m \ddot{a}_i + EI \frac{i^4 \pi^4}{l^4} a_i + \frac{4u_{\text{ст}}^2 EI}{l^2} \cdot \frac{l^2 \pi^2}{l^2} a_i + \\ + H_{\text{д}} \frac{l^2 \pi^2}{l^2} (a_i + f_i) = q_i \quad (i=1, 2, 3, \dots). \quad (10.6)$$

Динамический распор при этом выразится формулой

$$H_{\text{д}} = EF \frac{\pi^2}{4l^2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} j^2 (a_j + f_j)^2 - \sum_{j=1}^{\infty} j^2 f_j^2 \right]. \quad (10.7)$$

Выражение (10.6) с учетом (10.7) представляет собой бесконечную систему нелинейно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $a_i(t)$, определяющих вертикальные колебания нити конечной жесткости, закрепленной на опорах от продольных смещений, под воздействием динамической нагрузки $q(t)$.

Удерживая в рядах (10.2) — (10.4) конечное число членов $a_i(t)$ ($i=1, 2, 3, \dots$), т. е. рассматривая вместо системы с распределенными параметрами систему с конечным числом степеней свободы, будем получать приближенные решения задачи в виде частных решений системы (10.6) относительно функции $a_i(t)$. Ясно, что из-за нелинейности дифференциальных уравнений (10.6) новые решения уравнений (10.1) нельзя получить путем суперпозиции нескольких решений a_i для различных значений i .

Таким образом, суммарное перемещение нити от динамической нагрузки представляет собой сложную комбинацию различных элементарных форм движения, аппроксимируемых рядом (10.2). Точность решения задачи зависит от количества удерживаемых членов ряда; при этом необходимо выделить наиболее существенные формы, определяющие перемещения и усилия. Как правило, эти формы имеют наименьшие частоты, хотя элементы висячих конструкций имеют в этом смысле свои особенности [39, 41].

Для изучения влияния различных членов ряда (10.2) на напряженно-деформированное состояние нити конечной жесткости рассмотрим действие на нее равномерно распределенной внезапно приложенной постоянной во времени динамической нагрузки, для которой движение нити может быть представлено несколькими главными формами.

Будем учитывать три первых члена ряда для симметричных колебаний

$$v(x, t) = a_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + a_2(t) \sin \frac{3\pi}{l} x + a_3(t) \sin \frac{5\pi}{l} x. \quad (10.8)$$

Функцию начального провисания от статической нагрузки удобно принять не в виде ряда (10.3), а приближенно в виде квадратной параболы, являющейся формой провисания гибкой нити, равномерно нагруженной вдоль пролета

$$y_{\text{ст}}(x) = \frac{4f_0 x(l-x)}{l^2}. \quad (10.9)$$

Коэффициенты разложения внешней нагрузки в ряд (10.4) равны

$$q_i = \frac{4q_0}{i\pi}, \quad (10.10)$$

где q_0 — интенсивность внешней нагрузки.

Уравнение (10.1) будем решать приближенно с помощью метода Рунге — Галеркина. Для этого, подставив (10.8) и (10.9) в уравнение (10.1), потребуем, чтобы результат подстановки был ортогонален каждой фундаментальной функции

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \Phi[a_1(t), a_2(t), a_3(t), t] \sin \frac{\pi}{l} x dx &= 0; \\ \int_0^l \Phi[a_1(t), a_2(t), a_3(t), t] \sin \frac{3\pi}{l} x dx &= 0; \\ \int_0^l \Phi[a_1(t), a_2(t), a_3(t), t] \sin \frac{5\pi}{l} x dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Здесь $\Phi[a_1(t), a_2(t), a_3(t), t]$ — выражение, получающееся в результате подстановки в уравнение (10.1) вместо $v(x, t)$ его разло-

жения (10.8). После интегрирования получим связанную систему из трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{a}_1 + \alpha_1 a_1 + \left(a_1 + \frac{32f^0}{\pi^3} \right) R_1 &= \frac{4q_0}{\pi m}; \\ \ddot{a}_2 + \alpha_2 a_2 + \left(9a_2 + \frac{32f^0}{3\pi^3} \right) R_1 &= \frac{4q_0}{3\pi m}; \\ \ddot{a}_3 + \alpha_3 a_3 + \left(25a_3 + \frac{32f^0}{5\pi^3} \right) R_1 &= \frac{4q_0}{5\pi m}, \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

где

$$\alpha_1 = EI \frac{\pi^2}{m l^4} (\pi^2 + 4u_{ст}^2);$$

$$\alpha_2 = 9EI \frac{\pi^2}{m l^4} (9\pi^2 + 4u_{ст}^2);$$

$$\alpha_3 = 25EI \frac{\pi^2}{m l^4} (25\pi^2 + 4u_{ст}^2);$$

$$R_1 = \frac{EF}{4} \cdot \frac{\pi^4}{m l^4} \left[a_1^2 + 9a_2^2 + 25a_3^2 + \frac{64f^0}{\pi^3} \left(a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} \right) \right]$$

Выразим через функции a_i приближенно динамический распор и динамический изгибающий момент в сечении посередине пролета нити:

$$H_d = \frac{EF}{4} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \left[a_1^2 + 9a_2^2 + 25a_3^2 + \frac{64f^0}{\pi^3} \left(a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} \right) \right]; \quad (10.13)$$

$$M_d = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = EI \frac{\pi^2}{l^2} (a_1 + 9a_2 + 25a_3). \quad (10.14)$$

Тогда напряжение посередине пролета нити от динамической нагрузки равно

$$\sigma_d = EI \frac{\pi^2}{l^2} \left\{ \frac{1}{4l} \left[a_1^2 + 9a_2^2 + 25a_3^2 + \frac{64f^0}{\pi^3} \left(a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} \right) \right] + \frac{1}{W} (a_1 + 9a_2 + 25a_3) \right\}, \quad (10.15)$$

где W — момент сопротивления сечения нити.

Для определения неизвестных функций времени $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $a_3(t)$ систему (10.12) можно решать приближенно аналитическими или численными методами. С целью проведения конкретного исследования влияния различных элементарных форм колебаний на напряженно-деформированное состояние нити при принятом достаточно широком диапазоне стрел провисания целесообразно применить численный метод решения дифференциальных уравнений на ЭВМ. В данном случае задачу решали на машине БЭСМ-3м с применением алгоритма метода Рунге — Кутты. Шаг интегрирования 0,001. Рассматривали нить пролетом 30 м в виде трубы диаметром

3 дюйма с различными стрелами провисания — от 1/10 до 1/120 пролета. Для выяснения вопроса о влиянии связанности уравнений на величину функций a_i , кроме системы (10.12), интегрировали также уравнения первого приближения (с учетом одной функции a_1) и систему уравнений второго приближения, построенную с учетом только двух первых гармоник a_1 и a_2 .

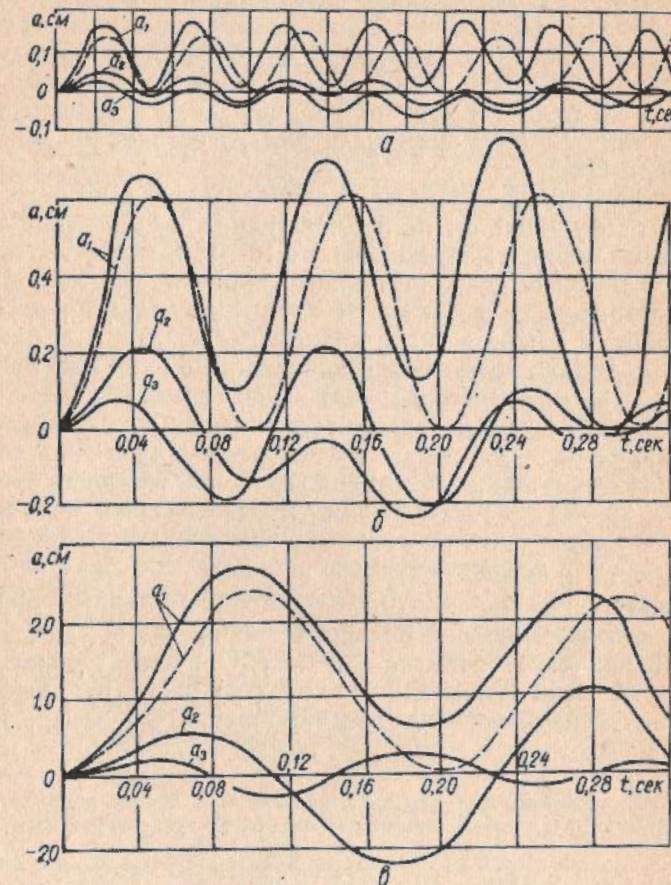


Рис. 10.1. Графики функций $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ для нити диаметром 3 дюйма, пролетом 30 м и стрелами провисания, равными 1/10 (а), 1/20 (б) и 1/40 (в) пролета. (Численное решение. Нагрузка $q(t) = 10 \text{ кг/м}$).

После определения амплитуд колебаний вычисляли динамические напряжения σ_d . Кроме того, каждый раз решали соответствующую статическую задачу, т. е. определяли перемещения и напряжения в середине пролета от статической нагрузки той же интенсивности.

На рис. 10.1 приведены результаты вычислений для наиболее характерных случаев в двух приближениях — первом и третьем.

Графики дают четкое представление о соотношении порядков ординат всех трех функций. Во всех случаях доминируют первая гармоника, однако влияние высших гармоник в зависимости от степени пологости нити может быть различным. При $f^0/l \leq 1/50$ влияние высших гармоник незначительно и перемещение нити определяется в основном первой гармоникой, имеющей низкочастотный характер. При этом большое влияние на работу упругой нити оказывает ее растяжимость. При $f^0/l \geq 1/40$ оказывает уже значительное влияние вторая гармоника, составляющая 15—40% суммарного перемещения; при $f^0/l \geq 1/20$ начинает оказывать влияние третья и другие, более высокие гармоники. Из приведенной оценки видно, в каких случаях следует принимать для расчета один, два и более членов ряда (10.2).

Из графиков рис. 10.1 можно также судить о взаимном влиянии связности функций a_1 , a_2 и a_3 . Функции a_2 и a_3 , как правило, увеличивают ординаты функции a_1 на 10—15% и заметно понижают ее период. Влияние функции a_1 на функции a_2 и a_3 более существенно и выражается в заметном смещении и деформированности их графиков, а также в значительном расхождении величин на больших ординат. Кроме того, главная гармоника как бы навязывает второстепенным свой период, и об истинном периоде этих гармоник можно судить лишь по записи их на достаточно большом отрезке времени.

Для оценки влияния динамичности действия рассматриваемой нагрузки проведены вычисления динамического коэффициента. Как известно, для линейно деформируемых конструкций этот коэффициент равен 2 как для перемещений (k_d^n), так и для напряжений (k_d^σ). Из табл. 10.1 видно, что в нашем случае динамический коэффициент для перемещений больше 2 (порядка 2,4—2,6), а для напряжений меньше 2 (порядка 1,3—1,6). При этом влияние высших гармоник заметно сказывается только на части напряжения, вызванной изгибом и составляющей не более 40% суммарных напря-

Таблица 10.1

Динамические коэффициенты для нити диаметром 3 дюйма пролетом 30 м при различных стрелах провисания от равномерно распределенной нагрузки $q = 10 \text{ кг/м}$

f^0/l	Статическая нагрузка		Динамическая нагрузка		Динамический коэффициент	
	Перемещение $u_{ст}$	Напряжение $\sigma_{ст}$	Перемещение u	Напряжение σ_d	k_d^n	k_d^σ
1/10	—1,37	144,2	—	—	—	—
1/20	—0,59	138,0	0,138	80,3	—	—
1/25	—0,31	141,9	0,54	137,5	—	—
1/30	0,76	145,7	0,79	219,0	2,5	1,25
1/40	1,04	160,1	1,98	273,0	2,62	1,55
1/60	2,77	298,3	2,15	259,0	2,06	1,88
1/120	7,22	307,7	6,73	359,0	2,42	1,62
			14,5	480,0	2,0	1,46
						1,56

жений, т. е. это влияние существеннее для менее пологих и более жестких нитей. Различие в динамических коэффициентах для перемещений и напряжений является вообще характерным для нелинейно деформированных конструкций. В данном случае существенным является значительное увеличение деформативности, сопровождающееся меньшим ростом напряжений.

§ 10.2. Свободные вертикальные колебания нити

При отсутствии внешней динамической нагрузки, т. е. при $q(x, t) = 0$, вместо уравнений (10.6)—(10.7) получим систему, описывающую свободные вертикальные колебания нити

$$m\ddot{a}_i + EI \frac{i^2\pi^2}{l^2} \left(\frac{i^2\pi^2}{l^2} + \frac{4u_{ст}^2}{l^2} \right) a_i + EF \frac{i^4\pi^4}{4l^4} (a_i + f_i) \left[\sum_{j=1}^{\infty} j^2 (a_j + f_j)^2 - \sum_{j=1}^{\infty} j^2 f_j^2 \right] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots). \quad (10.16)$$

Система (10.16) имеет множество решений, зависящих от начальных условий. Так как каждое решение определяет спектр частот свободных колебаний нити, то очевидно, что каждой форме начального отклонения соответствует свой спектр частот. Как известно, частота колебаний является важнейшей характеристикой для динамического расчета сооружения. Знать весь спектр частот весьма затруднительно, но в этом и нет особой необходимости. Как правило, важнейшую роль для суммарного движения играют формы, обладающие наименьшими частотами. Для получения соотношений, позволяющих определить эти частоты, рассмотрим нить как систему с одной степенью свободы. Для этого в рядах (10.2) и (10.3) удержим по одному члену и вместо системы (10.16) получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение, решения которого будут частными решениями (10.16),

$$m\ddot{a}_i + EI \frac{i^2\pi^2}{l^2} \left(\frac{i^2\pi^2}{l^2} + \frac{4u_{ст}^2}{l^2} \right) a_i + EF \frac{i^4\pi^4}{4l^4} (a_i + f_i) [(a_i + f_i)^2 - f_i^2] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (10.17)$$

При этом предполагается, что i -я форма колебаний нити приблизительно совпадает с кривой ее провисания при действии статической нагрузки. Известно, что колебания по i -й форме могут возникнуть только в результате действия нагрузки такого же вида. Обычно реальные нагрузки, как было показано в предыдущем параграфе, вызывают более сложное движение, однако в данном случае такое идеализированное рассмотрение является оправданным. Во-первых, это дает нам возможность определить частоту свободных колебаний для любой элементарной формы, и, во-вторых, как будет показано в § 10.4, именно такого типа нагрузки возникают при автоколебаниях сооружений в виде нитей конечной жесткости в ветровом потоке.

Уравнение (10.17) перепишем в виде

$$\ddot{a}_i + \alpha_i a_i + \beta_i a_i^2 + \gamma_i a_i^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (10.18)$$

где $\alpha_i = \frac{i^2 \pi^2}{m l^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2) + \frac{EF i^2 \pi^2 f_i^2}{2} \right];$

$$\beta_i = \frac{3}{4} \cdot \frac{EF i^4 \pi^4 f_i}{m l^4}; \quad \gamma_i = \frac{EF i^4 \pi^4}{4 m l^4}.$$

Уравнение (10.18) можно трактовать как дифференциальное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы и несимметричной упругой характеристикой. Последняя представляет собой нелинейную зависимость между смещением и восстанавливающей силой, заданной в виде ряда по возрастающим степеням функции a_i . Нелинейность эта имеет геометрическое происхождение. Уравнения такого типа встречаются при исследовании нелинейных колебаний гибких нитей и стержней, арок, пластин и др. [11, 16]. В данном случае это уравнение применимо для исследования колебаний нити конечной жесткости по форме с одной полуволной ($i=1$).

Для нахождения приближенного аналитического решения уравнения (10.18) можно воспользоваться известными методами, применяемыми для исследования колебаний систем с малой нелинейностью, например, методом гармонической линеаризации или методом Бубнова — Галеркина. Применяя первый из них, представим решение этого уравнения в первом приближении в виде

$$a_i = A_{i0} + A_{i1} \sin \omega_i t, \quad (10.19)$$

где A_{i0} — постоянная величина, характеризующая начальное положение точки нити, смещенное относительно состояния равновесия (при несимметричной упругой характеристике);

A_{i1} — амплитуда функции a_i ;

ω_i — круговая частота свободных нелинейных колебаний.

После выполнения процедуры принятого метода получим соотношения для определения амплитуды и квадрата круговой частоты в зависимости от постоянной A_{i0} :

$$A_{i1} = \pm \sqrt{\frac{-2(\alpha_i A_{i0} + \beta_i A_{i0}^2 + \gamma_i A_{i0}^3)}{\beta_i + 3\gamma_i A_{i0}}}; \quad (10.20)$$

$$\omega_i^2 = \alpha_i + 2\beta_i A_{i0} + 3\gamma_i A_{i0}^2 + \frac{3}{4} \gamma_i A_{i1}^2. \quad (10.21)$$

С помощью соотношения (10.21) строятся так называемые скелетные линии, устанавливающие зависимость между частотой и амплитудой свободных колебаний. Задаваясь значениями A_{i0} , из (10.20) определяют A_{i1} , после чего из (10.21) находят значения ω_i . Из формулы (10.21) видно, что все члены правой части, кроме первого, представляют собой нелинейные добавки к основной линейной частоте, зависящие от начальных условий и амплитуды. В этом, как известно, проявляется свойство неизохронности нелинейных колебаний. В данном случае учет нелинейности приводит

к увеличению частоты с ростом амплитуды; этот учет имеет смысл при достаточно больших амплитудах, сопоставимых с начальной стрелой провисания. Для большинства практических случаев, когда $A_{i0} \ll l^0$, достаточно учитывать только основной член правой части формулы (10.21), и частота колебаний не будет зависеть от начальных условий (в этих случаях она может быть названа собственной, т. е. зависящей только от собственных параметров системы). Тогда для формы колебаний с одной полуволной ($i=1$) можно записать

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^2}{m l^4} \left[EI (\pi^2 + 4u_{ст}^2) + \frac{EF \pi^2 f_1^2}{2} \right], \quad (10.22)$$

откуда видно, что частота собственных колебаний нити зависит от ее изгибной жесткости, растягивающего усилия от статической нагрузки и от стрелы провисания.

В § 10.1 указывалось, что форму начального провисания нити удобнее представлять в виде квадратной параболы (10.9). При этом динамическое перемещение по-прежнему может быть представлено в виде отдельных членов ряда (10.2). Подставляя указанные функции в основное уравнение (10.1) (при этом $q(x, t) = 0$) и пользуясь методом Бубнова — Галеркина, получим следующие обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения:

$$\ddot{a}_i + \alpha_i a_i + \beta_i a_i^2 + \gamma_i a_i^3 = 0 \quad (i = 1, 3, 5, \dots); \quad (10.23)$$

$$\ddot{a}_i + \alpha_i a_i + \gamma_i a_i^3 = 0 \quad (i = 2, 4, \dots), \quad (10.24)$$

где

$$\alpha_i = \frac{i^2 \pi^2}{m l^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2) + \frac{512 E F f_0^2}{i^4 \pi^4} \right];$$

$$\alpha_6 = EI \frac{i^2 \pi^2}{m l^4} (i^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2); \quad \beta_i = \frac{24 E F i \pi f_0}{m l^4}.$$

Уравнение (10.23) описывает симметричные колебания нити, т. е. колебания с нечетным числом полуволи гармоник ряда (10.2), уравнение (10.24) — антисимметричные.

Прежде чем перейти к приближенному интегрированию, кратко остановимся на исследовании качественного характера решений этих уравнений, представление о котором, как известно, можно получить с помощью метода фазовой плоскости [18].

Представим уравнение (10.23) в виде двух уравнений первого порядка

$$\dot{a} = v; \quad \dot{v} = -f(a), \quad (10.25)$$

где

$$f(a) = \alpha_i a + \beta_i a^2 + \gamma_i a^3.$$

Эта система уравнений должна удовлетворять начальным условиям: $a = a_0, v = v_0$ при $t = 0$. Индексы i условно опускаем. Исключая время, из системы (10.25) получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dv}{da} = - \frac{\alpha_i a + \beta_i a^2 + \gamma_i a^3}{v}.$$

После интегрирования получим

$$v^2 = -2 \int (\alpha_5 a + \beta_2 a^2 + \gamma_1 a^3) da + C = -\alpha_5 a^2 - \frac{2}{3} \beta_2 a^3 - \frac{1}{2} \gamma_1 a^4 + C. \quad (10.26)$$

Значение постоянной интегрирования определяем после подстановки в (10.26) начальных условий:

$$C = \alpha_5 a_0^2 + \frac{2}{3} \beta_2 a_0^3 + \frac{1}{2} \gamma_1 a_0^4 + v_0^2.$$

Уравнение (10.26) можно переписать в виде

$$v^2 = \alpha_5 (a_0^2 - a^2) + \frac{2}{3} \beta_2 (a_0^3 - a^3) + \frac{\gamma_1}{2} (a_0^4 - a^4) + v_0^2,$$

откуда

$$v = \pm \sqrt{\alpha_5 (a_0^2 - a^2) + \frac{2}{3} \beta_2 (a_0^3 - a^3) + \frac{\gamma_1}{2} (a_0^4 - a^4) + v_0^2}. \quad (10.27)$$

Смещение $a_{\max}$ можно определить из (10.26), положив $v=0$.

Аналогично получим для (10.24)

$$v = \pm \sqrt{\alpha_5 (a_0^2 - a^2) + \frac{\gamma_1}{2} (a_0^4 - a^4) + v_0^2}. \quad (10.28)$$

Величина наибольшего смещения

$$a_{\max}^2 = \frac{\alpha_5 + \sqrt{\alpha_5^2 + 2\gamma_1 C}}{\gamma_1}. \quad (10.29)$$

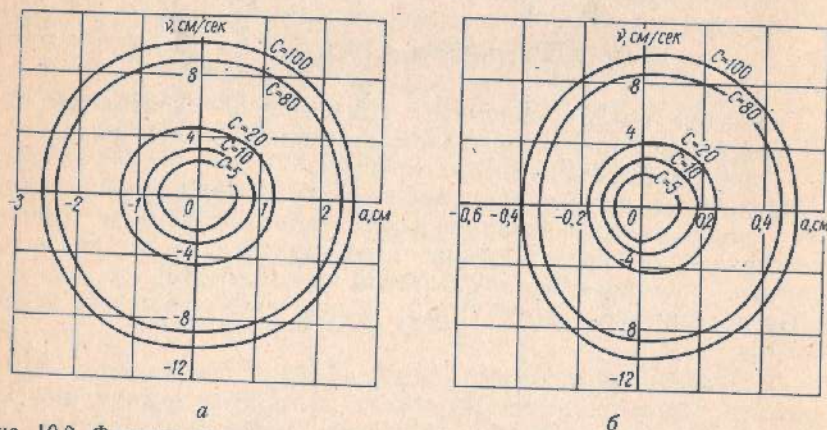


Рис. 10.2. Фазовые траектории движения нити диаметром 3 дюйма, пролетом 30 м и стрелой провисания 1/20 пролета для форм колебаний $i=2(a)$ и $i=3(b)$.

Зависимости (10.27) и (10.28) в плоскости (v, a) , называемой фазовой, дают кривые постоянной энергии, параметрически зависящие от времени (интегральные кривые). На рис. 10.2 представлены интегральные кривые, построенные по обем указанным за-

висимостям для частного случая нити (труба диаметром 3 дюйма, пролет — 30 м; отношение $f^0/l=1/20$; значения коэффициентов $\alpha_5=466,1$; $\beta_2=109,7$; $\gamma_1=0,64$; $\alpha_6=45,9$). Из рис. 10.2 видно, что чем больше энергии сообщается системе в начальный момент времени, тем шире интегральная кривая; кривые, соответствующие большей начальной энергии, охватывают кривые, соответствующие меньшей начальной энергии. Замкнутость интегральных кривых, имеющих вид подобных между собой несколько искаженных эллипсов, свидетельствует о характерной особенности движения рассматриваемой системы — квазигармонических колебаниях вокруг устойчивого положения статического равновесия, которому соответствует изолированная особая точка типа «центр». Интегральные кривые, соответствующие уравнению (10.23), отличаются от интегральных кривых уравнения (10.24) только эксцентричным положением особой точки, что свидетельствует о несимметричности нелинейной упругой характеристики в случае симметричных колебаний.

Для получения соотношений, выражающих нелинейную зависимость между частотой и амплитудой свободных колебаний, решим уравнение (10.23) с помощью метода Бубнова — Галеркина. При этом удобно положить $A_{i0}=0$, так как эта постоянная мало влияет на частоту. Тогда указанная зависимость будет иметь вид

$$\omega_i^2 = \alpha_5 + \frac{3}{4} A_i^2 \quad (i=1, 3, 5, \dots). \quad (10.30)$$

При этом нужно задаваться произвольными значениями амплитуд A_i .

Кривые зависимости частоты колебаний нити от амплитуд, т. е. скелетные линии, для формы колебаний с тремя полуволнами представлены на рис. 10.3. Из рисунка видно, что с увеличением амплитуд, т. е. начального отклонения A_i , частота растет. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая колебательная система обладает так называемой жесткой нелинейной характеристикой. Изменение частоты с увеличением амплитуды колебаний необходимо учитывать в практических расчетах, если амплитуды достаточно велики.

При относительно небольших амплитудах квадрат круговой частоты можно определять по формуле

$$\omega_i^2 = \frac{i^2 \pi^2}{ml^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2) + \frac{512EFf^0}{i^4 \pi^4} \right]. \quad (10.31)$$

Из структуры этой формулы видно, что зависимость квадрата частоты от начальной стрелы провисания неодинакова для разных форм симметричных колебаний. Для низших форм (первой и третьей) частота сильно увеличивается с увеличением стрелы провисания; для более высоких форм (начиная с пятой) — уменьшается.

На рис. 10.4 построены кривые зависимости квадрата угловой частоты от величины стрел провисания для нити трубы диаметром 3 дюйма, пролетом 30 м. Из рисунка видно, что форма колебаний с одной полуволной имеет наименьшую частоту только при очень малых стрелах провисания ($f^0/l \leq 1/50$).

При $f^0/l > 1/50$ наименьшую частоту имеет форма симметричных колебаний с тремя полуволнами.

Уравнение (10.24) для антисимметричных форм колебаний, т. е. колебаний с четным числом полуволн, имеет симметричную нелинейную упругую характеристику. Существует точное решение этого

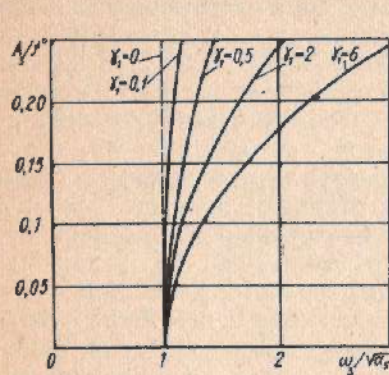


Рис. 10.3. Зависимость частоты колебаний нити от амплитуды (скелетные кривые).

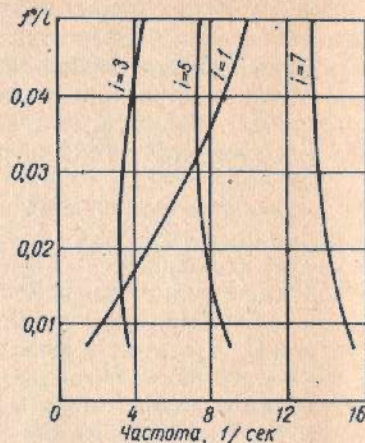


Рис. 10.4. Зависимость частоты малых вертикальных колебаний нити от стрелы провисания.

уравнения в эллиптических интегралах [18]. В нашем случае оно имеет вид

$$a_i = A_i \sqrt{\frac{2 + \nu A_i^2}{2(1 + \nu A_i^2)}} \cdot \frac{\text{sn}(x^2, \sqrt{1 + \nu A_i^2}) \alpha_0 t}{\text{dn}(x^2, \sqrt{1 + \nu A_i^2}) \alpha_0 t}, \quad (10.32)$$

где

$$\nu = \frac{EF}{EI} \cdot \frac{i^2 \pi^2}{4(P^2 + 4u_{cr}^2)}; \quad x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu A_i^2}{1 + \nu A_i^2};$$

A_i — амплитуда колебаний;

sn и dn — эллиптические функции Якоби.

Круговую частоту свободных колебаний определяют при этом по формуле

$$\omega_i = \frac{2\pi \sqrt{\alpha_0 \left(1 + \frac{1}{2} \nu A_i^2\right)}}{4K(\theta)}, \quad (10.33)$$

где

$$\text{tg } \theta = A_i \sqrt{\frac{\nu}{2 + \nu A_i^2}}.$$

Функция $K(\theta)$ означает полный эллиптический интеграл первого рода.

Более простое, приближенное решение можно получить методом Бубнова — Галеркина, приняв аппроксимирующую функцию в виде

$$a_i = A_i \sin \omega_i t. \quad (10.34)$$

Тогда зависимость между квадратом частоты и произвольной амплитудой в первом приближении для антисимметричных форм колебаний следующая:

$$\omega_i^2 = \alpha_0 + \frac{3}{4} \gamma_i A_i^2. \quad (10.35)$$

В табл. 10.2 приведено сравнение линейных частот $\lambda_0 = \frac{\omega_i}{2\pi}$ при вычисленных круговых частотах ω_i соответственно по точной формуле (10.33) и приближенной (10.35).

Таблица 10.2

Сравнение линейных частот свободных колебаний, вычисленных по точной (10.33) и приближенной (10.35) формулам для нити пролетом 30 м и стрелой провисания 1,5 м (при $i=2$)

Амплитуда A , см	Независимо от амплитуды						
		2	4	6	8	10	
Частота, 1/сек	по точной формуле (10.33)	1,31	1,32	1,36	1,44	1,53	1,66
	по приближенной формуле (10.35)	1,31	1,35	1,45	1,66	1,82	2,03

При сравнительно небольших амплитудах полученные результаты незначительно (до 5%) отличаются друг от друга; при значительных же амплитудах ($A_i/f^0 > 0,05$) приближенная формула дает очень завышенные значения частот.

При малых амплитудах квадрат угловой частоты антисимметричных колебаний можно определять по формуле, совпадающей с формулой (9.43),

$$\omega_i^2 = EI \frac{i^2 \pi^2}{ml^4} (i^2 \pi^2 + 4u_{cr}^2). \quad (10.36)$$

На рис. 10.5 приведены спектры частот малых вертикальных колебаний, вычисленных по формулам (10.31) и (10.36), для нити пролетом 30 м, диаметром 3 дюйма и различными стрелами провисания. Из рисунка видно, что плотность спектра невелика, за исключением тех участков, где частота первой или третьей формы близка к одной из частот, как правило, антисимметричных колебаний. При рассмотрении, например, только симметричных колебаний эта особенность спектра отпадает и фильтрующая способность нити как колебательной системы может считаться достаточной. По-

этому допустимо для практических расчетов рассматривать ее как систему с одной или вообще конечным числом степеней свободы.

Рассмотрим колебания нити при жестком закреплении ее концов перед приложением динамической нагрузки. Функцию $y_{ст}$, как и ранее, примем в виде квадратной параболы (10.9), а функцию

$v(x, t)$ (формы колебаний) — в виде, удовлетворяющем соответствующие граничные условия.

$$v(x, t) = a_i(t) \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{l} x \right). \quad (10.37)$$

Подставив (10.9) и (10.37) в основное интегро-дифференциальное уравнение (10.1), методом Бубнова—Галеркина получим уравнение

$$\ddot{a}_i + \alpha_i a_i + \beta_i a_i^2 + \gamma_i a_i^3 = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (10.38)$$

где

$$\alpha_i = \frac{16}{3} \left[EI (i^2 \pi^2 + u_{ст}^2) + \frac{8EFf^0}{i^2 \pi^2} \right] \frac{i^2 \pi^2}{ml^4};$$

$$\beta_i = \frac{16EFf^0 i^2 \pi^2}{ml^4};$$

$$\gamma_i = \frac{4}{3} \cdot \frac{EFf^0 i^4 \pi^4}{ml^4}.$$

С помощью того же метода получим соотношение для круговой частоты свободных колебаний

$$\omega_i^2 = \alpha_i + \frac{3}{4} \gamma_i A_i^2 \quad (i=1, 2, 3, \dots). \quad (10.39)$$

При малых амплитудах колебаний

$$\omega_i^2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{i^2 \pi^2}{ml^4} \left[EI (i^2 \pi^2 + u_{ст}^2) + \frac{8EFf^0}{i^2 \pi^2} \right]. \quad (10.40)$$

Эта формула дает завышенные значения частот по сравнению с предыдущим случаем шарнирного закрепления; в то же время, как показывают экспериментальные исследования [57], большая разница в частотах при различных случаях опорных закреплений не является характерной для нитей конечной жесткости. Поэтому пользоваться формулой (10.40), основанной на приближенной балочной аппроксимации (10.37), следует только при расчете достаточно жестких конструкций.

§ 10.3. Совместные вертикальные и горизонтальные колебания

В общем случае действия произвольной нагрузки (чаще всего при порывах ветра) возникают пространственные изгибные колебания нити. При этом каждая ее точка, кроме поперечных колебаний в своей плоскости, совершает маятниковые вращательные колебания относительно хорды, соединяющей точки опорных закреплений, перемещаясь одновременно в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Такие колебания при действии внешней нагрузки описываются системой уравнений (9.29) — (9.30).

Для выявления особенностей пространственных колебаний, связанных с учетом нелинейности, рассмотрим случай свободных колебаний:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{4u_{ст}^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_A \frac{\partial^2 (v + y_{ст})}{\partial x^2} = 0; \quad (10.41)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{4u_{ст}^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - H_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{mg}{y_{ст}} w = 0. \quad (10.42)$$

Зададимся следующими приближенными функциями форм динамических перемещений

$$v(x, t) = a_i(t) \sin \frac{i\pi}{l} x; \quad (10.43)$$

$$w(x, t) = b_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (10.44)$$

Примем функцию начального провисания в виде (10.9).

После интегрирования получим приближенную формулу для определения динамического распада

$$H_A = \frac{EF}{4} \cdot \frac{\pi^2}{l^3} \left(i^2 a_i^2 + \frac{64f^0}{i\pi^3} a_i + k^2 b_k^2 \right) \quad (10.45)$$

$$(i=1, 3, 5, \dots; k=1, 2, 3, \dots).$$

Подставляя (10.9), (10.43) — (10.45) в систему уравнений (10.41) — (10.42) и используя метод Бубнова — Галеркина, получаем следующую систему связанных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{a}_i + \alpha_i a_i + \beta_i a_i^2 + \gamma_i a_i^3 + \gamma_i a_i b_k^2 + \beta_i b_k^2 = 0; \quad (10.46)$$

$$\ddot{b}_k + \alpha_k b_k + \gamma_k b_k^3 + 2\beta_k a_i b_k + \gamma_k a_i^2 b_k = 0, \quad (10.47)$$

где

$$\gamma_1' = \frac{EF}{4} \cdot \frac{l^2 k^2 \pi^4}{m l^4}; \quad \beta_4 = 8EF \frac{l^2 \pi f_0}{m l^4};$$

$$\alpha_6' = EI \frac{k^2 \pi^2}{m l^4} (k^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2) + \frac{mg}{4f_0}.$$

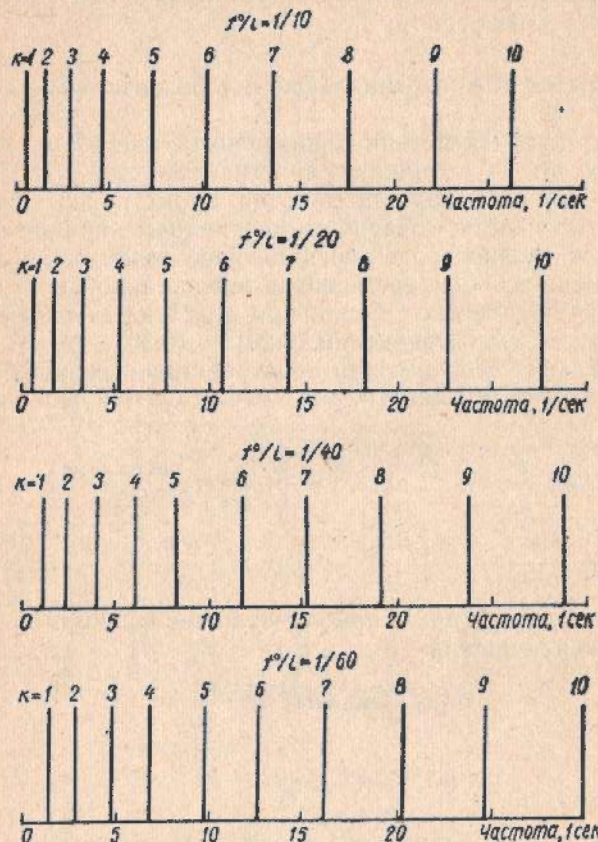


Рис. 10.6. Спектры частот малых горизонтальных колебаний нити диаметром 3 дюйма, пролетом 30 м при различных стрелах провисания.

Приближенное интегрирование уравнений (10.46) — (10.47) приводит к следующим соотношениям:

$$\omega_{верт}^2 = \alpha_5 + \frac{3}{4} \gamma_1' A_i^2 + \frac{1}{2} \gamma_1' B_k^2; \quad (10.48)$$

$$\omega_{гор}^2 = \alpha_6' + \frac{3}{4} \gamma_1' B_k^2 + \frac{1}{2} \gamma_1' A_i^2, \quad (10.49)$$

где $A_i, B_k = \text{const}$ — амплитуды вертикальных и горизонтальных колебаний.

Как видно из выражений (10.48) и (10.49), частоты вертикальных и горизонтальных колебаний нити зависят не только от своих амплитуд, но и от амплитуд колебаний поперечного направления.

При малых амплитудах колебаний нелинейные члены выражений (10.48) и (10.49) можно не учитывать. Тогда формула для квадрата круговой частоты горизонтальных колебаний будет иметь вид

$$\omega_{гор}^2 = EI \frac{k^2 \pi^2}{m l^4} (k^2 \pi^2 + 4u_{ст}^2) + \frac{mg}{4f_0}. \quad (10.50)$$

Примеры спектров частот горизонтальных колебаний, вычисленных по формуле (10.50), приведены на рис. 10.6.

§ 10.4. Параметрический резонанс. Явление перекачки энергии при пространственных колебаниях нити

При определенных соотношениях параметров нити колебания одного направления могут оказывать существенное влияние на колебания другого направления, возбуждая последние параметрически, при отсутствии внешних возбуждающих сил. Для гибкой нити такая задача рассмотрена в работе [17].

С помощью методов теории динамической устойчивости исследуем вначале влияние горизонтальных колебаний нити конечной жесткости на вертикальные.

Пусть в начальный момент времени нить получила малое горизонтальное перемещение B_1 . Представляя горизонтальные колебания в виде

$$b = B_1 \cos \omega_{гор} t, \quad (10.51)$$

после подстановки (10.51) в уравнение (10.46) найдем

$$\ddot{a} + \left[\alpha_5 + \frac{1}{2} \gamma_1' B_1^2 (1 + \cos 2\omega_{гор} t) \right] a + \beta_2 a^2 + \gamma_1 a^3 = \frac{1}{2} B_1^2 (1 + \cos 2\omega_{гор} t). \quad (10.52)$$

Индексы i и k опускаем.

Из (10.52) видно, что горизонтальные колебания одновременно могут играть роль как внешней, так и параметрически возбуждающей вертикальные колебания силы. При частоте вертикальных колебаний, равной удвоенной частоте горизонтальных колебаний, в системе могут возникнуть нарастающие вертикальные колебания (обычный резонанс); при равенстве же этих частот может возникнуть главный параметрический резонанс. Оба этих процесса достаточно изучены в теории колебаний [4, 5, 28]. Рассмотрим их здесь лишь применительно к особенностям нашей колебательной системы. При рассмотрении движения введем малое затухание, пропорциональное первой степени скорости движения.

Уравнение вынужденных колебаний запишем в виде

$$\ddot{a} + 2h\dot{a} + \alpha_5 a + \beta_2 a^2 + \gamma_1 a^3 = \frac{P_0}{m} \cos \Omega t, \quad (10.53)$$

где $h = \frac{\delta_0}{T}$ — коэффициент, зависящий от вязких свойств системы;

δ_0 — логарифмический декремент колебаний;

P_0 — амплитуда возмущающей силы;

$\Omega = 2\omega_{\text{гор}}$ — частота возмущающей силы.

Без нарушения общности задачи постоянная составляющая возмущающей силы может быть отброшена.

Уравнение (10.53) представляет собой нелинейное уравнение типа Дуффинга с диссипативным членом. Приближенное решение его можно получить с помощью асимптотического метода [4], полагая в первом приближении

$$a = A \cos(\Omega t + \vartheta), \quad (10.54)$$

где ϑ — угол сдвига фаз.

Система уравнений для определения A и ϑ имеет вид:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{hA\Omega}{\omega_{\text{верт}}} - \frac{P_0}{m(\omega_{\text{верт}} + \Omega)} \cos \vartheta; \quad (10.55)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{\text{верт}} - \Omega - \frac{\omega_{\text{верт}}^2 - \alpha_5 - \frac{3}{4}\gamma_1 A^2}{2\omega_{\text{верт}}} + \frac{P_0}{m(\omega_{\text{верт}} + \Omega)A} \sin \vartheta. \quad (10.56)$$

Приравнявая правые части этих уравнений нулю, получим систему уравнений для определения постоянной амплитуды и фазы стационарного режима колебаний:

$$-\frac{hA\Omega}{\omega_{\text{верт}}} - \frac{P_0}{m(\omega_{\text{верт}} + \Omega)} \cos \vartheta = 0; \quad (10.57)$$

$$\omega_{\text{верт}} - \Omega - \frac{\omega_{\text{верт}}^2 - \alpha_5 - \frac{3}{4}\gamma_1 A^2}{2\omega_{\text{верт}}} + \frac{P_0}{m(\omega_{\text{верт}} + \Omega)A} \sin \vartheta = 0. \quad (10.58)$$

Исключая из выражений (10.57) и (10.58) фазу ϑ , получим зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы

$$\Omega = \sqrt{(\omega_{\text{верт}}^2 - 2h^2) \pm \sqrt{4h^2(h^2 - \omega_{\text{верт}}^2) + \left(\frac{P_0}{mA}\right)^2}}, \quad (10.59)$$

где

$$\omega_{\text{верт}}^2 = \alpha_5 + \frac{3}{4} A^2. \quad (10.60)$$

С помощью зависимости (10.59) строятся «резонансные» кривые, представляющие при заданном P_0 ход изменения амплитуды A в зависимости от частоты Ω (рис. 10.7). При этом выражение (10.60) определяет скелетную линию, соответствующую свободным колебаниям и являющуюся границей между колебаниями, синфаз-

ными с возмущением, и колебаниями, антифазными по отношению к нему. Наклон «резонансной» кривой вправо свидетельствует о наличии в данной системе жесткой восстанавливающей силы.

Если требуется по заданной величине Ω найти амплитуду A , то для этого необходимо решить кубическое уравнение, которое

может иметь один (при малых значениях частоты) или три (при достаточно больших значениях) вещественных корней. В последнем случае возможны три периодических решения, однако не все они в действительности осуществляются, т. е. обладают устойчивостью. Вопрос исследования устойчивости периодических решений уравнения достаточно освещен в специальной литературе [4, 28]. Приведем следующие основные условия устойчивости: на ветви кривой (см. рис. 10.7), лежащей левее скелетной линии, соответствующими устойчивым амплитудам будут те участки, на которых амплитуда возрастает вместе с частотой, а не ветви кривой, лежащей правее скелетной линии, наоборот, — те участки, на которых амплитуда убывает с возрастанием Ω . При этом неустойчивость выражается в сбросе амплитуд — скачкообразном переходе одной резонансной кривой на другую и соответственно с одного колебательного режима на другой.

Нас интересуют те наибольшие устойчивые амплитуды колебаний, которые могут возникнуть в случае резонанса, т. е. при $\omega_{\text{верт}} = \Omega$, вокруг положения равновесия $a=0$. В том, что это положение равновесия единственное, легко убедиться, рассмотрев случай статического нагружения нити, для которой из (10.53) получим при $t=0$

$$\alpha_5 a + \beta_2 a^2 + \gamma_1 a^3 = 0. \quad (10.61)$$

Число действительных решений зависит от знака дискриминанта квадратного уравнения; дискриминант будет положительным при $\beta_2 < 2\sqrt{\alpha_5 \gamma_1}$ (что имеет место для большинства нитей конечной жесткости), и единственным корнем уравнения (10.61) будет $a=0$. Из (10.59), положив $\omega_{\text{верт}}^2 = \Omega^2$, получим значение максимальной стационарной амплитуды колебаний

$$A_{\text{макс}} = \frac{P_0}{2hm\omega_{\text{верт}}}. \quad (10.62)$$

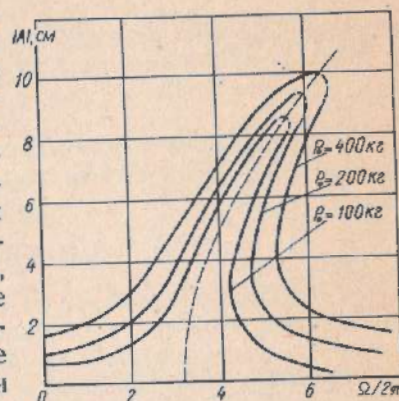


Рис. 10.7. Амплитудно-частотные зависимости при резонансе ($i=3$) нити диаметром 3 дюйма, пролетом 30 м и стрелой провисания 1/20 пролета при различных значениях амплитуды внешней нагрузки.

Рассмотрим режим параметрических колебаний. Уравнение (10.52) без правой части может быть записано в стандартной форме уравнения Матье с нелинейными членами

$$\ddot{a} + 2\dot{h}a + \omega_{\text{верт}}^2 a (1 + 2\mu_0 \cos 2\omega_{\text{гор}} t) + \beta_2 a^2 + \gamma_1 a^3 = 0, \quad (10.63)$$

где

$$\omega_{\text{верт}}^2 = \alpha_5 + \frac{\gamma_1 B_1^2}{2}; \quad 2\mu_0 = \frac{\gamma_1 B_1^2}{2 \left(\alpha_5 + \frac{1}{2} \gamma_1 B_1^2 \right)}.$$

Для определения амплитуд параметрических колебаний и исследования их устойчивости решение уравнения (10.63) ищем в виде [6]

$$a(t) = A_0(t) \sin \omega_{\text{гор}} t - B_0(t) \cos \omega_{\text{гор}} t. \quad (10.64)$$

При этом величины A_0 и B_0 считаются медленно изменяющимися функциями времени, т. е. приращение этих функций за период будет мало по сравнению с их средним значением.

Следуя данным [6], получим следующие решения для амплитуд установившихся колебаний:

$$A_0 = B_0 = 0;$$

$$B_0 = 0; \quad A_0^2 = \frac{4}{3\gamma_1} \left[\left(\frac{\omega_{\text{гор}}^2}{4} - \omega_{\text{верт}}^2 \right) + \sqrt{\omega_{\text{верт}}^4 \mu_0^2 - h^2 \omega_{\text{гор}}^2} \right]; \quad (10.65)$$

$$A_0 = 0; \quad B_0^2 = \frac{4}{3\gamma_1} \left[\left(\frac{\omega_{\text{гор}}^2}{4} - \omega_{\text{верт}}^2 \right) - \sqrt{\omega_{\text{верт}}^4 \mu_0^2 - h^2 \omega_{\text{гор}}^2} \right]. \quad (10.66)$$

Полученные решения требуют исследования их устойчивости. Рассматривая поведение системы при малых возмущениях, приходим к выводу, что решение (10.65) устойчиво при

$$\omega_{\text{гор}}^2 > \omega_{\text{верт}}^2 (1 - \sqrt{\mu_0^2 \omega_{\text{верт}}^2 - 4h^2}), \quad (10.67)$$

а решение (10.66) оказывается неустойчивым.

На рис. 10.8 представлен характер резонансной кривой. Из рисунка видно, что амплитуды устойчивых вертикальных колебаний, начавшихся при некоторой частоте $\left(\frac{\omega_{\text{гор}}}{\omega_{\text{верт}}}\right)^2$, с увеличением последней изменяются вдоль верхней ветви резонансной кривой MM' .

При этом для каждого значения $\left(\frac{\omega_{\text{гор}}}{\omega_{\text{верт}}}\right)^2$ существует действительное положительное число A_0 . Неустойчивые колебания характеризует нижняя ветвь резонансной кривой.

Благодаря наличию в рассматриваемой колебательной системе нелинейностей и затухания неограниченного нарастания колебаний не происходит; наблюдаются стационарные колебания, возрастающие с увеличением частоты возбуждения.

Границы и ширина первой резонансной зоны при наличии затухания представляются выражениями:

$$\omega_{\text{верт}}^2 - \omega_{\text{верт}} \sqrt{\mu_0^2 \omega_{\text{верт}}^2 - 4h^2} < \omega_{\text{гор}}^2 < \omega_{\text{верт}}^2 + \omega_{\text{верт}} \sqrt{\mu_0^2 \omega_{\text{верт}}^2 - 4h^2}; \quad (10.68)$$

$$\Delta = \sqrt{\mu_0^2 \omega_{\text{верт}}^2 - 4h^2}. \quad (10.69)$$

При наличии затухания несколько сужаются границы зоны, внутри которой происходят параметрические колебания. Однако сужение это незначительно из-за малости затухания, характерной для рассматриваемых конструкций.

Характерно, что величина резонансной зоны при параметрических колебаниях зависит как от параметров нити, так и в значительной мере от амплитуды возбуждающих (в данном случае горизонтальных) колебаний.

Приведем выражения для кривых, ограничивающих первую, вторую и третью резонансные зоны с точностью до малых второго порядка [40]:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1^{\pm} &= 2\omega_{\text{верт}} \sqrt{1 \pm \mu_0 + \frac{1}{8} \mu_0^2}; \\ \Omega_2^{\pm} &= \omega_{\text{верт}} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu_0^2}; \quad \Omega_2^- = \omega_{\text{верт}} \sqrt{1 - \frac{5}{3} \mu_0^2}; \\ \Omega_3^{\pm} &= \frac{2}{3} \omega_{\text{верт}} \sqrt{1 - \frac{9}{16} \mu_0^2 \pm \frac{81}{64} \mu_0^3}. \end{aligned} \right\} \quad (10.70)$$

Здесь $\Omega = 2\omega_{\text{гор}}$.

По этим формулам с помощью ЭВМ вычислены границы зон неустойчивости (заштрихованные участки) для диаграммы Айнса—Стретта, представленной на рис. 10.9. При вычислении были приняты следующие исходные данные: труба диаметром 3 дюйма, пролетом 30 м, стрелой провисания 1/20 пролета. Из рисунка видно, что только при весьма больших амплитудах горизонтальных колебаний зоны неустойчивости оказываются значительными.

Таким образом, при определенных условиях горизонтальные колебания могут возбуждать колебания в вертикальной плоскости. Весьма существенным является также то, что из-за наличия в рассматриваемой системе упругой нелинейности и затухания беспредельное нарастание амплитуд невозможно — величина их строго ограничена.

Рассматривая возбуждение горизонтальных колебаний вертикальными, представим последние в виде

$$a = A_1 \cos \omega_{\text{верт}} t. \quad (10.71)$$

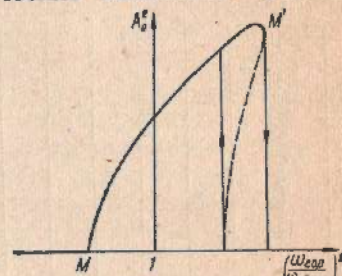


Рис. 10.8. Амплитудно-частотная зависимость при главном параметрическом резонансе нити как нелинейной системы.

После подстановки этого выражения в уравнение (10.47) и при учете затухания получим

$$\ddot{b} + 2h\dot{b} + \left(\alpha_0' + 2\beta_1 A_1 \cos \omega_{\text{верт}} t + \frac{1}{2} \gamma_1' A_1^2 + \frac{1}{2} \gamma_1' A_1^2 \cos 2\omega_{\text{верт}} t \right) b + \gamma_1' b^3 = 0. \quad (10.72)$$

Пренебрегая второй гармоникой параметрической силы в уравнении (10.72), после приведения его к стандартному виду получим уравнение Матье с кубической нелинейностью

$$\ddot{b} + 2h\dot{b} + \omega_{0\text{гор}}^2 b (1 + 2\mu_1 \cos \omega_{\text{верт}} t) + \gamma_1' b^3 = 0, \quad (10.73)$$

где

$$\omega_{0\text{гор}}^2 = \alpha_3' + \frac{1}{2} \gamma_1' A_1^2;$$

$$2\mu_1 = \frac{2\beta_1 A_1}{\alpha_3' + \frac{1}{2} \gamma_1' A_1^2}.$$

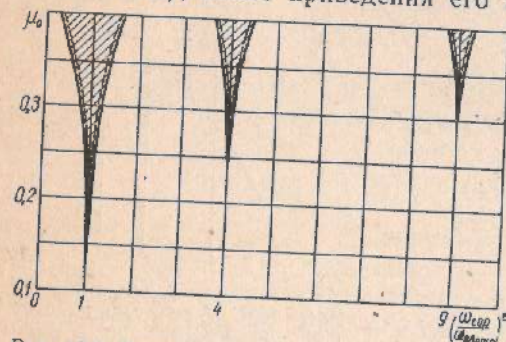


Рис. 10.9. Распределение областей неустойчивости параметрических колебаний нити диаметром 3 дюйма, пролетом 30 м и стрелой провисания 1/20 пролета.

При условии $\omega_{\text{верт}}^2 \approx 4\omega_{0\text{гор}}^2$, т. е. при частоте горизонтальных колебаний, приблизительно равной половине частоты вертикальных, могут возбуждаться значительные горизонтальные (маятниковые) колебания. По аналогии с предыдущим, зона основного резонанса определяется выражением:

$$\omega_{0\text{гор}}^2 - \omega_{0\text{гор}}^2 \sqrt{\mu_1^2 \omega_{0\text{гор}}^2 - 4h^2} < \left(\frac{\omega_{\text{верт}}}{2} \right)^2 < \omega_{0\text{гор}}^2 + \omega_{0\text{гор}}^2 \sqrt{\mu_1^2 \omega_{0\text{гор}}^2 - 4h^2}. \quad (10.74)$$

Ширина резонансной зоны

$$\Delta = \sqrt{\mu_1^2 \omega_{0\text{гор}}^2 - 4h^2}. \quad (10.75)$$

При этом соотношение между амплитудой стационарных параметрических горизонтальных колебаний и частотой возбуждения (частотой вертикальных колебаний) следующее:

$$A_{01}^2, B_{01}^2 = \frac{4}{3\gamma_1'} \left[\left(\frac{\omega_{\text{верт}}}{2} \right)^2 - \omega_{0\text{гор}}^2 \pm \sqrt{\mu_1^2 \omega_{0\text{гор}}^4 - \omega_{\text{верт}}^2 h^2} \right]. \quad (10.76)$$

Таким образом, при частоте вертикальных колебаний, равной удвоенной частоте горизонтальных колебаний, может происходить взаимное возбуждение колебаний как горизонтальными вертикальными, так и наоборот, сопровождающееся известным в теории колебаний явлением «перекачки энергии». Для всяких мостов это явление описано в работе [10]. Для учета влияния возбуждаемых колебаний на возбуждающие требуется более строгое рассмотрение

задачи, как это, например, выполнено для гибкой нити с помощью теории возмущений В. А. Ивовичем [17].

По данным численного решения системы уравнений (10.46) и (10.47) для нитей с различными стрелами провисания можно сделать следующие выводы, согласующиеся с работой [17]:

амплитуды горизонтальных и вертикальных колебаний нити связаны между собой такой зависимостью, что при увеличении горизонтальных колебаний уменьшается амплитуда вертикальных колебаний, и наоборот;

между обобщенными координатами происходит взаимный энергообмен. В начальный момент времени амплитуды горизонтальных колебаний нити уменьшаются, а амплитуды вертикальных — возрастают. Для более поздних моментов времени «перекачка энергии» происходит в обратном направлении: амплитуды вертикальных колебаний начинают убывать, а горизонтальных — возрастать.

На рис. 10.10 показаны графики функций $a_i(t)$ и $b_k(t)$ для одного из частных случаев численного решения системы уравнений (10.46) и (10.47) при следующих данных: пролет нити 30 м, диаметр трубы 3 дюйма, $f^0/l = 1/40$, $i=1$, $k=4$.

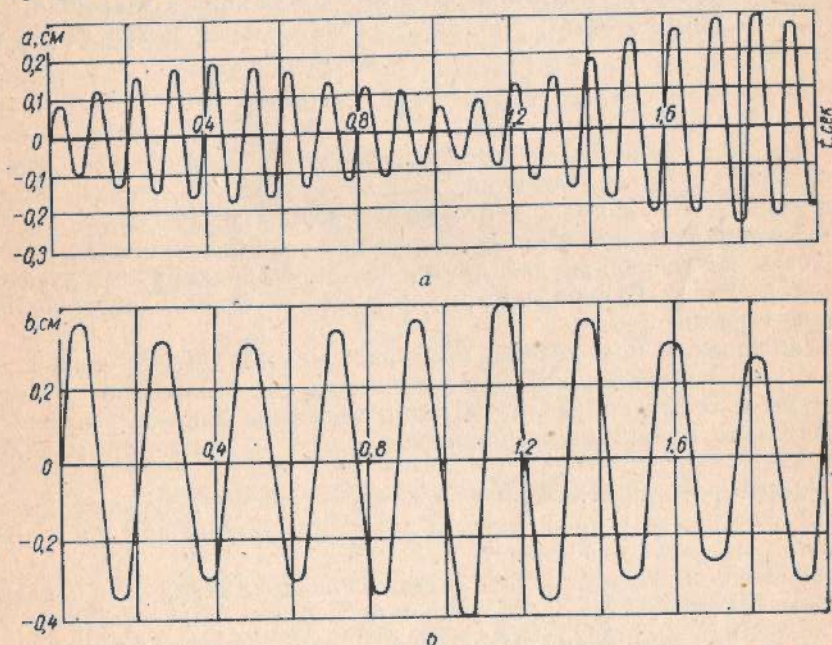


Рис. 10.10. График функций $a_i(t)$, $b_k(t)$ для нити диаметром 3 дюйма, пролетом 30 м и стрелой провисания 1/40 пролета при вертикальных ($i=1$) (а) и горизонтальных ($k=4$) (б) колебаниях.

В заключение отметим, что при проектировании сооружений для исключения параметрического резонанса необходимо подбирать параметры нити таким образом, чтобы соотношения между ними не находились в пределах зон неустойчивости.

§ 10.5. Аэродинамические колебания нити

Выше рассматривались колебания нити вне зависимости от действующих на них внешних сил. Основным источником таких сил как для конструкций в виде нитей конечной жесткости, так и для других гибких конструкций является ветровой поток. Как известно, вертикальные колебания нити конечной жесткости цилиндрического сечения могут возникнуть под действием поперечных импульсов, связанных с отрывом вихрей Бенара — Кармана. Частоту отрыва этих вихрей определяют по формуле (8.5).

По Ден-Гартогу силовые воздействия вихревой дорожки Бенара — Кармана для неупругого цилиндра могут быть представлены выражением

$$F_k = C_k \frac{1}{2} \rho v^2 d \sin \omega_i t = F_{0k} \sin \omega_i t, \quad (10.77)$$

где C_k — безразмерный коэффициент аэродинамической силы, равный, по мнению Ден-Гартога, единице;

ρ — массовая плотность воздуха;

ω_i — круговая частота отрыва вихрей Бенара — Кармана.

Для деформируемого цилиндра, согласно СНиП, эта формула имеет вид

$$F(x, t) = \frac{4}{\pi} F_0 \alpha(x) \sin \omega_i t, \quad (10.78)$$

где $\alpha(x) \leq 1$ — так называемый коэффициент формы колебаний, зависящий от распределения вихрей Бенара — Кармана вдоль сооружения. Из-за полного отсутствия аэродинамических исследований нитей конечной жесткости, а также недостаточного количества таких исследований для других конструкций характер распределения вихрей Бенара — Кармана по фазе вдоль сооружения в точности неизвестен.

Наблюдения над колебаниями висячих мостов [42] показали, что в условиях резонанса они в основном колеблются по формам с двумя и тремя полуволнами. На эти формы накладываются со значительно меньшими амплитудами более высокие формы колебаний.

Рассмотрим приближенно колебания нити конечной жесткости в ветровом потоке с целью получения выражений для определения амплитуд колебаний.

Экспериментальные исследования гибких цилиндров в аэродинамических трубах [1, 3] указывают на несостоятельность трактовки колебаний цилиндров как вынужденных под воздействием импульсов, сопровождающих образование вихрей Бенара — Кармана.

Опыты показали, что во всех случаях цилиндры колеблются только с собственной частотой, причем основной причиной колебаний являются не вихри Бенара — Кармана, а вихри, срывающиеся с поверхности колеблющегося тела в его крайних положениях с частотой, равной частоте собственных колебаний. Поперечная сила, действующая на цилиндр и приводящая его в движение, имеет

наибольшую величину при совпадении частоты этих вихрей с частотой вихрей Бенара — Кармана, удовлетворяющей выражению (8.5).

По мнению М. Ф. Барштейна [1], с помощью вихрей, срывающихся в крайних положениях колеблющегося цилиндрического тела, осуществляется так называемая обратная связь, т. е. колеблющееся тело само влияет на колебательный процесс, навязывая ему свою частоту. Очевидно, что без привлечения понятий и методов теории автоколебаний невозможно объяснение механизма колебаний цилиндра в ветровом потоке. Задача об автоколебаниях рассмотрена М. Ф. Барштейном [1] для высотных сооружений цилиндрической формы и Г. А. Савицким [43] применительно к вибрации проводов и радиомачт. Изложенная в этих работах методика решения задачи, основанная на применении метода гармонического баланса [18], применима и для исследования аэродинамических колебаний нити конечной жесткости.

При составлении уравнения движения нити примем вначале во внимание составляющие по направлению движения нити всех появляющихся при этом аэродинамических сил сопротивления (лобового сопротивления, пропорционального первой степени скорости, и лобового сопротивления, пропорционального квадрату скорости движения), а также подъемной силы. Тогда уравнение движения после разложения силы лобового сопротивления, пропорционального квадрату скорости, и подъемной силы в степенной ряд и удержания двух первых членов примет следующий вид:

$$\ddot{a} + (\Delta_1 + \Delta_2 v) \dot{a} + \alpha_0 a + \beta_2 a^2 + \gamma_1 a^3 + \Delta_3 \frac{\dot{a}^2}{v} \pm \Delta_4 v^2 \pm \Delta_5 \dot{a}^2 = 0, \quad (10.79)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{C_x}{m} \rho d; \quad \Delta_2 = \frac{C_x}{2m} \rho d; \quad \Delta_3 = \frac{C_x}{4m} \rho d;$$

$$\Delta_4 = \frac{C_y}{2m} \rho d; \quad \Delta_5 = \frac{C_y}{4m} \rho d.$$

Здесь C_x — коэффициент лобового сопротивления;
 C_y — коэффициент подъемной силы, причем $C_y = 0,4 C_x$;
 v — скорость движения;
 μ — коэффициент вязкости.

Знак подъемной силы совпадает со знаком скорости движения. Подъемную силу разложим в ряд Фурье и оставим члены с основной частотой, после чего уравнение колебания примет вид:

$$\ddot{a} + (\Delta_1 + \Delta_2 v) \dot{a} + \alpha_0 a + \beta_2 a^2 + \gamma_1 a^3 + \Delta_3 \frac{\dot{a}^2}{v} + \frac{4}{\pi} (\Delta_4 v^2 + \Delta_5 \dot{a}^2) \sin \omega t = 0. \quad (10.80)$$

Здесь ω — частота автоколебаний.

Уравнение (10.80) представляет собой уравнение самовозбуждающейся системы. Для получения стационарных решений в первом приближении примем

$$a = -A \cos \omega t. \quad (10.81)$$

Тогда

$$\dot{a} = A \omega \sin \omega t, \quad (10.82)$$

и, согласно [1], последний член левой части уравнения (10.80) можно трактовать как квазиупругую силу, запаздывающую относительно смещения a на $\frac{\pi}{2}$.

Для нахождения A и ω представим (10.80) в виде

$$\ddot{a} + \omega^2 a = (\omega^2 - \alpha_5) a - (\Delta_1 + \Delta_2 v) \dot{a} - \Delta_3 \frac{\dot{a}^3}{v} - \frac{4}{\pi} (\Delta_4 v^2 + \Delta_5 \dot{a}^2) \sin \omega t - \beta_2 a^2 - \gamma_1 a^3. \quad (10.83)$$

После подстановки (10.81) и (10.82) в правую часть (10.83) и некоторых преобразований получим

$$\ddot{a} + \omega^2 a = - \left(\omega^2 - \alpha_5 - \frac{3}{4} \gamma_1 A^2 \right) A \cos \omega t - \left[(\Delta_1 + \Delta_2 v) A \omega + \frac{3}{4} \Delta_3 \frac{1}{v} A^3 \omega^3 + \frac{4}{\pi} \Delta_4 v^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\pi} \Delta_5 A^2 \omega^2 \right] \sin \omega t + \dots \quad (10.84)$$

Отсюда находим закон установления автоколебаний

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2\omega} \left[(\Delta_1 + \Delta_2 v) A \omega + \frac{3}{4} \Delta_3 \frac{1}{v} A^3 \omega^3 + \frac{4}{\pi} \Delta_4 v^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\pi} \Delta_5 A^2 \omega^2 \right], \quad (10.85)$$

а для стационарного режима — систему уравнений, определяющих амплитуду и частоту:

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \alpha_5 - \frac{3}{4} \gamma_1 A^2 \right) A &= 0; \\ \left(\frac{3}{4} \Delta_3 \frac{1}{v} \omega^3 \right) A^3 + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\pi} \Delta_5 \omega^2 \right) A^2 + \\ + (\Delta_1 \omega + \Delta_2 v \omega) A + \frac{4}{\pi} \Delta_4 v^2 &= 0. \end{aligned} \quad (10.86) \quad (10.87)$$

Из уравнения (10.86) найдем

$$\omega^2 = \alpha_5 + \frac{3}{4} \gamma_1 A^2, \quad (10.88)$$

т. е. в первом приближении частота автоколебаний совпадает с частотой свободных колебаний системы и увеличивается с ростом амплитуд. Вопрос о существовании стационарных динамических режимов связан с вопросом о наличии вещественных корней у

уравнения стационарных амплитуд (10.87), которых в общем случае три. Упростим задачу, положив равным нулю коэффициенты, зависящие от величин второго порядка малости, т. е. $\Delta_3 = \Delta_5 = 0$, после чего из (10.87) получим значение стационарной амплитуды автоколебаний

$$A = -\frac{4\Delta_4 v^2}{\pi (\Delta_1 + \Delta_2 v) \omega} \quad (10.89)$$

и после подстановки значений

$$A = -\frac{2C_{yp} d v^2}{\pi \left(C_{xp} d + \frac{1}{2} C_{xp} d v \right) \omega}. \quad (10.90)$$

Легко убедиться в устойчивости периодического движения. Обозначим правую часть уравнения (10.85) через $\Phi(A)$. Как известно [4], устойчивость и неустойчивость рассматриваемого значения амплитуды зависит от знака производной $\Phi'(A)$. В нашем случае

$$\frac{d\Phi(A)}{dA} < 0 \text{ при } \Delta_1 + \Delta_2 v > 0.$$

Полученное значение стационарной амплитуды устойчиво. Таким образом, в рассматриваемой системе всякое как угодно начинающееся под влиянием неколебательного источника энергии — ветрового потока — движение приводится к периодическому движению со стационарной амплитудой, являющемуся автоколебанием.

ГЛАВА 11. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 11.1. Цель исследований

В конструкциях, расчетной моделью которых является нить конечной жесткости, чаще всего возникают следующие два основных вида колебаний:

горизонтальные изгибно-крутильные, заключающиеся в раскачивании нити относительно ее плоскости провисания, при которых в защемленных опорных сечениях появляются напряжения изгиба и кручения;

вертикальные изгибные, сопровождающиеся появлением волнообразной кривой в плоскости провисания нити. В реальных конструкциях причиной таких колебаний чаще всего бывает аэродинамическое действие ветра.

Для получения достоверных результатов динамического расчета необходимо знать характеристики свободных колебаний сооружения (частот, форм колебаний и логарифмических декрементов).

В НИИСКе (г. Киев) проведены экспериментальные исследования свободных колебаний нитей конечной жесткости. Основной

щественным является выделение тех гармоник, которые имеют определяющее влияние на форму колебаний нити.

Упругая линия стержня распадается на бесконечный ряд «нормальных» составляющих — кривых синусоидального типа (гармоник), каждая из которых имеет свою частоту. Совокупность таких частот представляет собой спектр частот свободных колебаний кон-

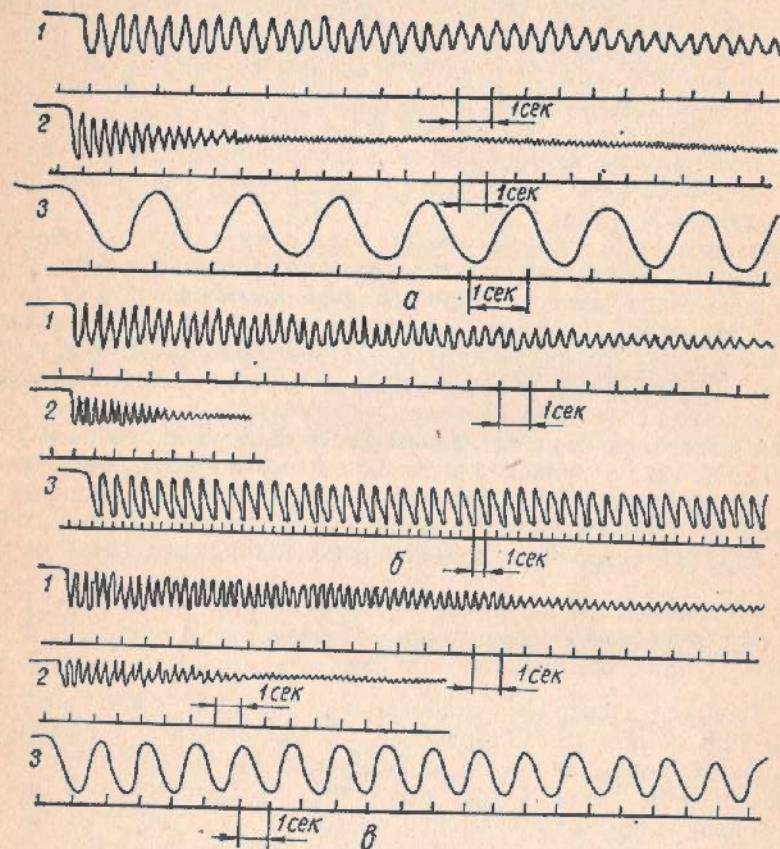


Рис. 11.1. Виброграммы свободных колебаний труб:

а — диаметром 2 дюйма при стреле провисания 1/20 пролета; б — то же, при стреле провисания 1/40 пролета; в — диаметром 3 дюйма при стреле провисания 1/20 пролета; 1 — вертикальные колебания, записанные одним прибором; 2 — то же, пятью приборами; 3 — горизонтальные колебания.

струкции, являющийся важной динамической характеристикой. Располагая им, можно ответить на вопрос, при каких значениях частоты динамической нагрузки возможно возникновение резонанса. Для прямого стержня наибольшие перемещения происходят при форме колебаний с наименьшей частотой — первой, т. е. при форме с одной полуволной. В нашем случае принятая методика ис-

Таблица 11.1
Некоторые экспериментальные характеристики свободных колебаний нити

Стрела провисания f/l	Диаметр нити, дюймы	Тип колебаний	Характеристики свободных колебаний			
			Логарифмический декремент	Частота, гц, гармоники		
				первой	второй	третьей
1/20	2	Вертикальные	0,02 0,012	—	1,5 1,6	2,9 2,95
		Горизонтальные	0,01 0,008	0,65 0,64	—	—
	3	Вертикальные	0,018 0,01	—	1,4 1,6	3,6 3,55
		Горизонтальные	0,008 0,008	0,75 0,76	—	—
	2	Вертикальные	0,019 0,011	4,3 4,5	1,7 1,8	3,1 3,1
		Горизонтальные	0,01 0,01	0,76 0,79	—	—
1/40	3	Вертикальные	0,023 0,015	4,2 4,1	1,7 1,85	3,2 3,3
		Горизонтальные	0,01 0,01	0,9 0,9	—	—

Примечание. В числителе приведены характеристики колебаний при шарнирном закреплении концов труб; в знаменателе — при жестком закреплении.

следований позволяла выявить только несколько первых (не более пяти) основных гармоник и получить приближенные характеристики. Получение спектра частот возможно лишь с применением более совершенной измерительной аппаратуры, чем механические приборы.

Так как начальное возбуждение колебаний производилось со средоточенной силой, то, естественно, форма колебаний ее должна быть сходной с кривой упругих перемещений от статической нагрузки такого же вида.

На рис. 11.2 показаны перемещения трубы диаметром 3 дюйма со стрелой провисания 1/20 пролета в различные моменты времени. Из рисунка видно, что формой симметричных колебаний является кривая с тремя неравными полуволнами, причем в одних случаях средняя полуволна оказывается большей и по длине, и по амплитуде (для образцов со стрелой провисания 1/20 пролета), а в других случаях — меньшей (для образцов со стрелой провисания 1/40 пролета).

Анализ виброграмм, представляющих собой, как правило, запись биения 2—3 гармоник, показывает, что при симметричном воз-

буждении колебаний наиболее существенную роль играет третья гармоника (с тремя полуволнами), а при несимметричном возбуждении — вторая (с двумя полуволнами). При этом в первом случае суммарная кривая представляет собой комбинацию первых трех нечетных гармоник (рис. 11.3, а), а во втором — второй, третьей и четвертой гармоник (рис. 11.3, б). Об этом свидетельствует изме-

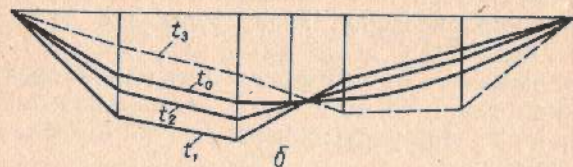
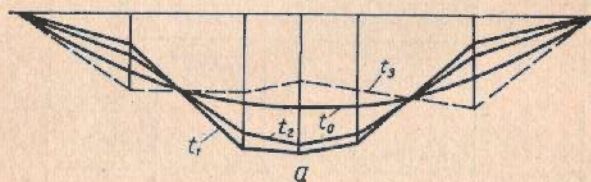
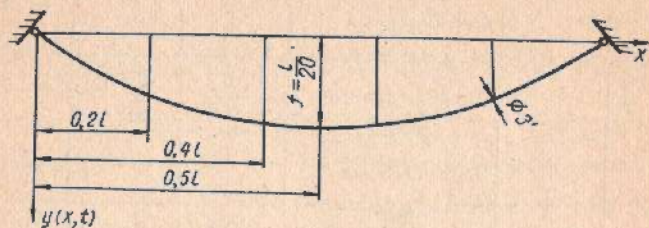


Рис. 11.2. Динамические перемещения трубы в различные моменты времени при симметричном (а) и несимметричном (б) возбуждении колебаний.

нение частоты колебаний по длине нити. В точках, более близких к середине, частота была выше, чем в точках, расположенных ближе к опорам. Роль второй гармоники при этом наиболее существенна в четвертях, а третьей — в середине пролета. При симметричных колебаниях основной является третья гармоника; дополни-

тельные пики, наложенные на колебания основной гармоники, свидетельствуют о присутствии гармоники с высокой частотой (первой или лятой) и с пренебрежимо малой амплитудой. С уменьшением стрелы провисания роль этой второстепенной гармоники несколько увеличивается, а частота ее понижается.

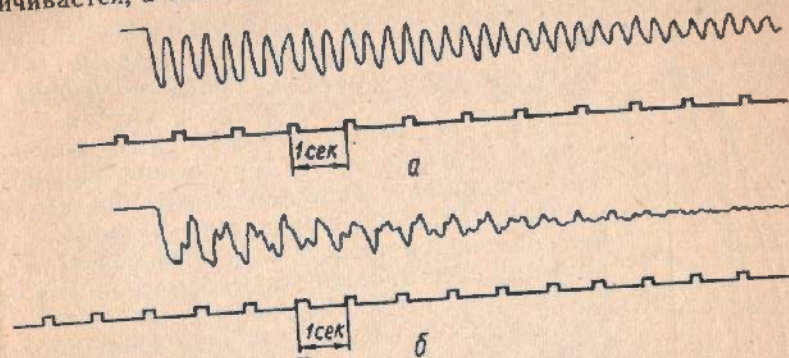


Рис. 11.3. Вертикальные колебания трубы диаметром 2 дюйма со стрелой провисания 1/40 пролета, записанные через 0,2 пролета, при симметричном (а) и несимметричном (б) возбуждении колебаний.

Таким образом, при испытании было установлено, что гармоникой с наиболее низкой частотой является форма с двумя полуволнами; при симметричных колебаниях основной является гармоника с тремя, при несимметричных — с двумя полуволнами; при несимметричном начальном возбуждении появляются как четные, так и нечетные гармоники.

Влияние геометрической нелинейности иллюстрируется графиком зависимости частоты свободных колебаний от начальной амплитуды (рис. 11.4). Из рисунка видно, что при очень малых амплитудах частота остается почти неизменной. При амплитуде, равной примерно 0,05 стрелы провисания, частота начинает увеличиваться и при амплитуде, равной 0,07 стрелы провисания, составляет примерно 1,15 от частоты колебаний при амплитуде, равной 0,02 стрелы провисания.

Частота горизонтальных колебаний в принятом диапазоне амплитуд почти не изменялась.

Из-за недостаточного количества образцов здесь представляется возможным дать лишь приближенную оценку влияния параметров нити на частоту свободных колебаний.

Так, при испытании было установлено, что жесткость нити несколько увеличивает частоту ее колебаний. Неоднозначным было влияние стрелы провисания. С уменьшением стрелы провисания с 1/20 до 1/40 пролета частоты нечетных гармоник в некоторых случаях понижались, а частоты четных гармоник, наоборот, повышались.

Жесткое закрепление концов нити по сравнению с шарнирным вызывает увеличение частоты свободных колебаний примерно на

10%. Изменение характера опорных закреплений практически не сказывалось на частоте горизонтальных колебаний. То же можно сказать и об изменении величины дополнительной равномерно распределенной нагрузки.

Логарифмические декременты затухания свободных колебаний вычислялись по виброграммам, на которых были записаны колебания, наиболее близкие к синусоидальным. Больше всего для этого подходили записи в середине пролета.

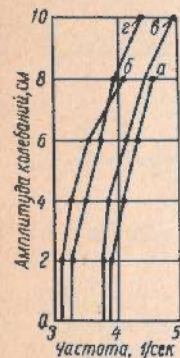


Рис. 11.4. Зависимость частоты свободных колебаний от величины начального отклонения трубы при шарнирном закреплении концов:

а — диаметром 2 дюйма при стреле провисания 1/20 пролета; б — то же, при стреле провисания 1/40 пролета; в — диаметром 3 дюйма при стреле провисания 1/20 пролета; г — то же, при стреле провисания 1/40 пролета.

Характер затухания свободных колебаний труб приведен на рис. 11.5, из которого видно, что наибольшим затуханием обладают образцы нитей с цилиндрическими шарнирами на концах в случае установки в пролете пяти приборов. При этом пружины динамических прогибометров из тонкой стальной проволоки, имеющие пренебрежимо малую жесткость, служат для нити дополнительными связями, увеличивающими ее демпфирующую способность. По сравнению со случаем установки одного прибора декремент колебаний образцов с пятью приборами возрастает в 9—10 раз.

Из приведенных графиков также видно, что при шарнирном закреплении на опорах колебания затухают несколько быстрее, чем при жестком. Это происходит из-за наличия трения в опорных креплениях.

Внутреннее поглощение энергии колебаний нити очень невелико: полученные значения декрементов затухания лежат в пределах 0,01—0,05. Наименьшим затуханием обладают горизонтальные колебания. Здесь $\delta_0 \approx 0,01$.

На рис. 11.6 приведены графики зависимости логарифмического декремента затухания от амплитуды. Здесь можно отметить следующее:

при вертикальных колебаниях, записанных с помощью пяти приборов, в интервале малых амплитуд (до 1 мм) величина логарифмического декремента резко возрастает, а затем падает до примерно постоянных значений. Это объясняется демпфирующим действием пружин;

при вертикальных колебаниях, записанных с помощью одного прибора, когда демпфирующее действие одной пружины незначительно, логарифмический декремент мало изменяется с увеличением амплитуд. То же наблюдается и при горизонтальных колебаниях.

Полученные экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с теоретическими, вычисленными по формулам, приведенным в гл. 9.

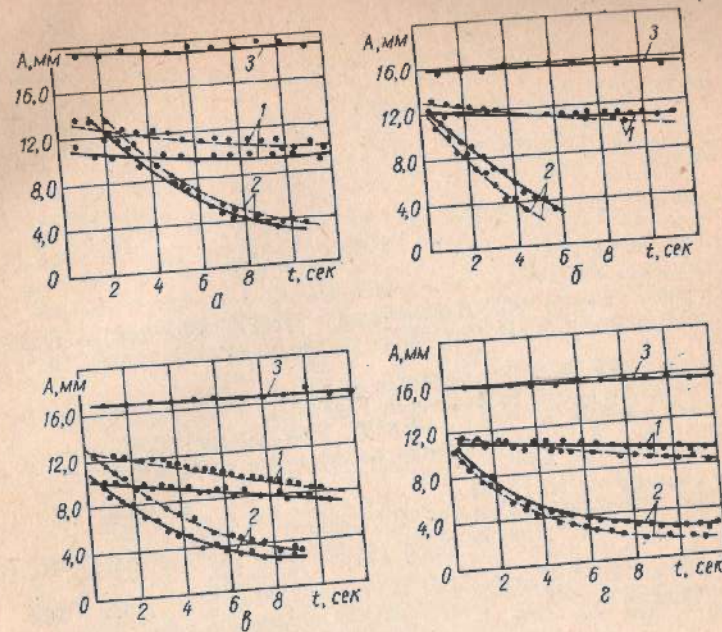


Рис. 11.5. Зависимость амплитуды свободных колебаний от периода:

а — для трубы диаметром 2 дюйма при стреле провисания 1/20 пролета; б — то же, 1/40 пролета; в — для трубы диаметром 3 дюйма при стреле провисания 1/20 пролета; г — то же, 1/40 пролета; 1 — вертикальные колебания, записанные одним прибором; 2 — то же, пятью приборами; 3 — горизонтальные колебания; сплошная линия — шарнирное закрепление концов трубы; пунктирная — жесткое.

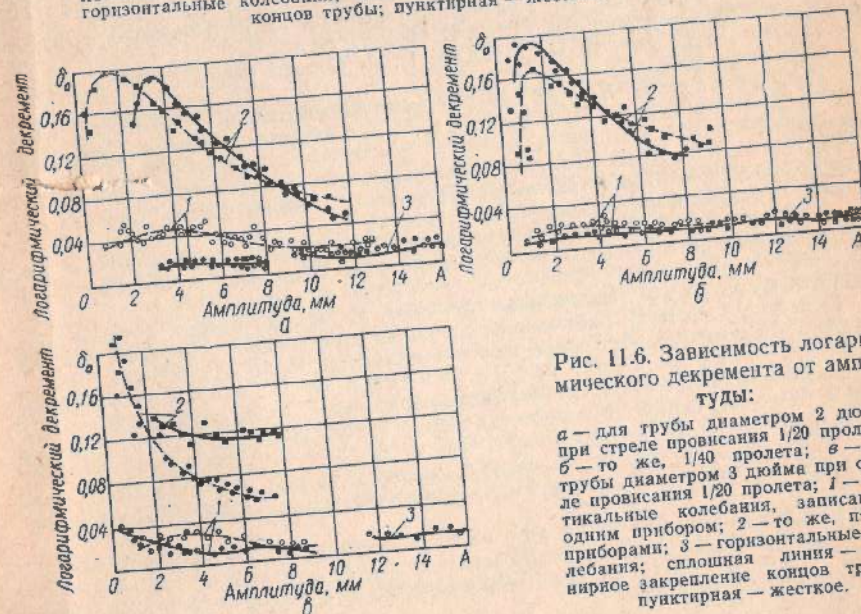


Рис. 11.6. Зависимость логарифмического декремента от амплитуды:

а — для трубы диаметром 2 дюйма при стреле провисания 1/20 пролета; б — то же, 1/40 пролета; в — для трубы диаметром 3 дюйма при стреле провисания 1/20 пролета; 1 — вертикальные колебания, записанные одним прибором; 2 — то же, пятью приборами; 3 — горизонтальные колебания; сплошная линия — шарнирное закрепление концов трубы; пунктирная — жесткое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барштейн М. Ф. Динамический расчет высотных сооружений цилиндрической формы. Сб. «Исследования по динамике сооружений». М., Гостройиздат, 1957.
2. Барштейн М. Ф. Воздействие ветра на высотные сооружения. «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 1.
3. Блюмина Л. Х., Захаров Ю. Т. Колебания цилиндрических тел в воздушном потоке. Сб. «Исследования по динамике сооружений». М., Гостройиздат, 1957.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
6. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Т. 2. Спб., 1914.
7. Вандер-Флит А. П. Изв. Собрания инженеров путей сообщения. Спб., 1900—1903.
8. Гольденблат И. И. К расчету висячих мостов и газопроводов на ветровые и сейсмические нагрузки. Труды ЦНИИСК «Сейсмостойкость промышленных зданий и инженерных сооружений». Вып. 18. М., Гостройиздат, 1962.
9. Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1948.
10. Гольденблат И. И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. М., Стройиздат, 1947.
11. Григолюк Э. И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек. Изв. АН СССР. ОТИ, 1955, № 3.
12. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной техники. М., Физматгиз, 1963.
13. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. М., Физматгиз, 1960.
14. Дмитриев Л. Г., Касилов А. В. Вантовые покрытия. Киев, «Будівельник», 1968.
15. Завриев К. С. Изв. Института инженеров путей сообщения. Спб., 1914.
16. Ивович В. А. Нелинейные колебания гибкой пологой нити. Строительная механика и расчет сооружений, 1966, № 5.
17. Ивович В. А. О параметрической взаимосвязи маятниковых и поперечных колебаний пологой нити. Сб. «Динамика сооружений». М., Гостройиздат, 1968.
18. Каудерер Г. Нелинейная механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
19. Качурин В. К. Гибкие нити с малыми стрелками. М., Гостехиздат, 1956.
20. Качурин В. К. Теория висячих систем. Л.-М., Гостройиздат, 1962.
21. Киреевко В. И., Шимановский В. Н., Коршунов Д. А., Смирнов Ю. В. Висячие трубопроводные переходы. Киев, «Будівельник», 1968.
22. Кирсанов Н. М. Расчет однопролетных мостов с учетом прогибов. Сб. трудов МИСИ. М., Гостройиздат, 1956, № 10.
23. Кирсанов Н. М. К расчету «жестких» нитей по деформированной схеме. Сб. тр. ВИСИ, Воронеж, Центрально-Черноземное книжное изд-во, 1968, № 15.
24. Лилеев Л. Ф., Селезнева Е. Н. Методы расчета пространственных вантовых систем. М., Стройиздат, 1964.
25. Лойцянский Л. Т., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. II. М., Гостехиздат, 1948.
26. Людковский И. Г., Федоров А. Д. Конструкция висячей цилиндрической оболочки. «Бетон и железобетон», 1968, № 2.
27. Менли Р. Анализ и обработка записей колебаний. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
28. Мишенков Г. В. О вынужденных нелинейных колебаниях упругих панелей. Изв. АН СССР. ОТИ, 1961, № 4.
29. Немчинов Б. К. Расчет системы перекрестных «жестких» нитей с учетом геометрической нелинейности. Сб. тр. ВИСИ. Воронеж, Центрально-Черноземное книжное изд-во, 1968, № 15.
30. Нехаев Г. Д. Некоторые вопросы колебаний и устойчивости гибкой нерастяжимой нити на жестких и упругих опорах. Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. М., МИСИ, 1961.
31. Николаенко Н. А. Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций. М., «Машиностроение», 1967.
32. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
33. Папаценко Х. И. Проектирование, строительство и эксплуатация самонесущих провисающих трубопроводов. М., Гостоптехиздат, 1963.
34. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М., «Машиностроение», 1967.
35. Петров И. П., Спиридонов В. В. Надземная прокладка трубопроводов. М., «Недра», 1965.
36. Покровский Л. Н. Определение частот собственных изгибных колебаний провисающего трубопровода. «Строительство трубопроводов», 1964, № 7.
37. Покровский Л. Н. Нелинейные колебания пологой упругой нити. Изв. вузов. Сер. «Строительство и архитектура». Новосибирск, 1967, № 4.
38. Покровский Л. Н., Штернлихт Д. В. Определение динамического распора и динамического изгибающего момента при колебаниях висячего трубопровода. «Строительство трубопроводов», 1967, № 6.
39. Попов Н. Н., Росторгуев Б. С. Динамический расчет висячих конструкций. М., Стройиздат, 1966.
40. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. Справочник (под общ. ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко). М., «Машиностроение», 1968.
41. Ржаницын А. Р. Статика и динамика пологой упругой нити. Сб. «Висячие покрытия». М., Гостройиздат, 1962.
42. Рокар И. Неустойчивость в механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
43. Савицкий Г. А. Основы расчета радиомачт. М., Связьиздат, 1952.
44. Сеницын А. П. Динамика гибких покрытий с большими прогибами. Сб. «Висячие покрытия». М., Гостройиздат, 1962.
45. Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический. М., Гостройиздат, 1960.
46. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
47. Тартаковский Г. А. Строительная механика трубопровода. М., «Недра», 1967.
48. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М., Гостехиздат, 1952.
49. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
50. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
51. Филиппов А. П. Колебания механических систем. Киев, «Наукова думка», 1965.
52. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., Физматгиз, 1968.
53. Шимановский В. Н. Исследование моделей сборно-монолитных висячих цилиндрических оболочек. Сб. «Строительные конструкции». Вып. V. Киев, «Будівельник», 1967.
54. Шимановский В. Н. и др. Экспериментальное исследование нитей конечной жесткости. Сб. «Строительные конструкции». Вып. VI. Киев, «Будівельник», 1967.
55. Шимановский В. Н., Смирнов Ю. В. Инженерный метод расчета сборно-монолитных висячих цилиндрических оболочек. Сб. «Строительные конструкции». Вып. VII, Киев, «Будівельник», 1968.

56. Шимановский В. Н. Об одном решении, уточняющем методику расчета железобетонных висячих цилиндрических оболочек. Сб. «Строительные конструкции». Вып. IX. Киев, «Будівельник», 1968.
57. Шимановский В. Н., Смирнов Ю. В., Харченко Р. Б. Статические и динамические испытания моделей трубопроводных переходов в виде провисающей нити. Сб. «Экспериментальные исследования инженерных сооружений». Вып. 5. Киев, «Будівельник», 1968.
58. Шимановский В. Н., Харченко Р. Б. Экспериментально-теоретическое исследование пространственной работы нити конечной жесткости. Сб. «Строительные конструкции». Вып. XIII. Киев, «Будівельник», 1969.
59. Шимановский В. Н., Смирнов Ю. В. К расчету многопролетных нитей конечной жесткости. Сб. «Строительные конструкции». Вып. XV. Киев, «Будівельник», 1971.
60. Юдин В. К. Надземная прокладка трубопроводов. Киев, Госстройиздат, 1963.
61. Saxon D. S., Cahn A. S. Modes of vibration of suspended chain. Quarterly J. mechanics and applied mathematics, vol. 6, pt. 3, Sept., 1953.
62. Reissner E. Rigidity and Aerodynamic stability of suspension Bridges. Proceedings Am. soc. of civil Eng., IX, 1944.
63. Timoshenko S. P. Journ. of Franklin Institute, 235, 1943.
64. Kirchhoff G. Vorl. über Mechanik, 4. Aufl., 29. Vorl. 7. Leipzig, 1897.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Раздел первый. Статика	3
Глава 1. Общие положения расчета	5
§ 1.1. Краткий обзор теоретических и экспериментальных исследований	5
§ 1.2. Классификация нитей	7
§ 1.3. Основные предпосылки расчета	8
§ 1.4. Вывод общих уравнений	9
§ 1.5. Приближенное решение	13
Глава 2. Нить, работающая с изгибом от начальной нагрузки	14
§ 2.1. Действие начальной нагрузки	14
§ 2.2. Действие дополнительной нагрузки	19
§ 2.3. Расчет нити с упруго закрепленными концами	51
§ 2.4. Расчет нити с промежуточными шарнирами	55
§ 2.5. Определение оптимальной стрелы провисания	57
Глава 3. Нить, работающая без изгиба от начальной нагрузки	59
§ 3.1. Действие начальной нагрузки	59
§ 3.2. Действие дополнительной нагрузки	60
§ 3.3. Другое решение задачи	70
Глава 4. Другие воздействия и примеры расчета	72
§ 4.1. Влияние изменения температуры	72
§ 4.2. Влияние смещения опор	73
§ 4.3. Примеры расчета	73
§ 4.4. Замечания по расчету нитей	90
Глава 5. Расчет нити на горизонтальную нагрузку	94
§ 5.1. Пространственный изгиб нити	94
§ 5.2. Кручение при пространственной деформации нити	97
§ 5.3. Примеры расчета	100
Глава 6. Многопролетная нить	105
§ 6.1. Нить, работающая с изгибом от начальной нагрузки	105
§ 6.2. Нить, работающая без изгиба от начальной нагрузки	108
§ 6.3. Примеры расчета	109
Глава 7. Экспериментальные исследования нитей конечной жесткости	114
§ 7.1. Цель исследований	114
§ 7.2. Методика испытаний	115
§ 7.3. Результаты испытаний	118
Раздел второй. Динамика	141
Глава 8. Основные положения расчета. Динамические нагрузки	141

§ 8.1. Общие сведения	141
§ 8.2. Краткий обзор исследований	142
§ 8.3. Нагрузки	143
Глава 9. Основные уравнения движения. Малые колебания нити	147
§ 9.1. Пространственная деформация нити	147
§ 9.2. Вывод уравнений движения нити	148
§ 9.3. Анализ уравнений движения	152
§ 9.4. Малые вертикальные колебания	154
§ 9.5. Динамический распор и динамический изгибающий момент	158
§ 9.6. Малые горизонтальные колебания	159
Глава 10. Приближенный анализ нелинейных колебаний нити	161
§ 10.1. Вертикальные колебания при действии динамической нагрузки непериодического характера	161
§ 10.2. Свободные вертикальные колебания нити	167
§ 10.3. Совместные вертикальные и горизонтальные колебания	175
§ 10.4. Параметрический резонанс. Явление перекачки энергии при пространственных колебаниях нити	177
§ 10.5. Аэродинамические колебания нити	184
Глава 11. Экспериментальные исследования свободных колебаний	187
§ 11.1. Цель исследований	187
§ 11.2. Методика испытаний	188
§ 11.3. Результаты испытаний	189
Литература	196

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГОССТРОЯ СССР

Виталий Николаевич Шимановский,
Юрий Васильевич Смирнов,
Ростислав Борисович Харченко

Расчет висячих конструкций
(нитей конечной жесткости)

Под редакцией канд. техн. наук В. Н. Шимановского.

Редактор Т. П. Хоменко
Обложка художника Ф. А. Левковского
Художественный редактор Я. М. Яковенко
Технический редактор Т. М. Зубрицкая
Корректор Г. И. Сабося

БФ 09453. Сдано в набор 6. X. 1973 г. Подписано к печати 1. III. 1973 г. Бумага типографская № 3. Формат 60×90¹/₁₆—6,25 бум., 12,5 физ., 12,5 усл., 12,72 уч.-изд. л. Зак. 1936. Тираж 1500 экз. Цена 64 коп.

Издательство «Будівельник», Киев, Владимирская, 24.
Киевская фабрика печатной рекламы республиканского производственного объединения «Полиграфкинг» Госкомиздата УССР, Киев, Выборгская, 84.