624.04
Ц-61

Цимбаловский В.Н.

РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ КОНСТРУКЦИЙ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ГОССТРОЯ СССР

В. Н. ШИМАНОВСКИЙ, А. А. СОКОЛОВ

РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ КОНСТРУКЦИЙ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

92

Научно-техническая библиотека
10319

ИЗДАТЕЛЬСТВО «БУДІВЕЛЬНИК»
КИЕВ — 1975

6С4.05
Ш61

УДК 624. 044

Научно-исследовательский институт строительных конструкций Госстроя СССР. Шимановский В. Н., Соколов А. А. Расчет висячих конструкций за пределом упругости. Киев, «Будівельник», 1975 г., стр. 104.

В книге приведены основные уравнения упруго-пластического состояния нитей конечной жесткости. Дана оценка гипотез, положенных в основу разработанных методов расчета. На основе результатов численных исследований показано влияние прочностных характеристик материала, нагрузки, стрелы провисания, жесткости на изгиб и граничных условий на напряженно-деформированное состояние и несущую способность нитей. Даны рекомендации по выбору оптимальных параметров конструкции.

Книга предназначена для инженеров-строителей, проектировщиков, научных работников, а также может быть полезна студентам строительных вузов. Рисунков 45, таблиц 6, библиография из 104 позиций.

©Научно-исследовательский институт строительных конструкций Госстроя СССР (НИИСК Госстроя СССР), 1975.

Р 30205—015
М203(04)—75

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в различных отраслях народного хозяйства находят все более широкое применение висячие конструкции. Их используют для покрытий промышленных и гражданских зданий, висячих мостов, газо- и нефтепроводов, канатных дорог и других объектов.

Основными несущими элементами висячих конструкций являются нити, которые могут быть подразделены на гибкие и конечной жесткости. Теория нитей конечной жесткости — один из быстро развивающихся разделов строительной механики. Расчет нитей с учетом жесткости на изгиб представляет довольно сложную задачу. Длительное время этой задаче не уделялось должного внимания и лишь в настоящее время она стала актуальной в связи с интенсивным внедрением висячих конструкций в практику строительства.

Нить конечной жесткости может служить расчетной моделью висячих мостов, газо-, нефте- и продуктопроводов, покрытий и перекрытий зданий и др.

Существующие методы расчета нитей конечной жесткости разработаны, в основном, для упругой стадии работы материала.

Известно, что такие методы расчета в большинстве случаев не дают возможности выявить истинные запасы прочности конструкции. Как правило, пластические деформации, вызывая перераспределение усилий в конструкции, ведут к существенному повышению ее несущей способности.

Исследование действительной работы сооружений важно для совершенствования методики расчета строительных конструкций по предельным состояниям. Одной из назревших проблем является уточнение критериев предельных состояний при развитии пластических деформаций.

Учет физической нелинейности становится все более актуальным также вследствие появления новых материалов, имеющих нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями.

Класс задач по расчету упруго-пластических нелинейно деформируемых стержневых систем в конечных перемещениях является наиболее сложным. Трудности в сложности математических расчетов, с которыми приходится сталкиваться при учете физической и геометрической нелинейностей нитей конечной жесткости, слишком серьезны. Преодолеть эти трудности можно лишь благодаря применению ЭВМ.

Широкое оснащение научно-исследовательских институтов и проектных организаций современными вычислительными средствами создает благоприятные возможности для учета действительных условий работы конструкций.

ГЛАВА 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ОБЗОР РАБОТ

§ 1.1. Основные положения расчета висячих конструкций в упругой стадии

Условно все нити могут быть разделены, с одной стороны, на гибкие и жесткие и, с другой — на пологие и непологие.

Гибкой нитью принято называть стержень с исчезающе малой жесткостью на изгиб. Мерой жесткости может служить отношение напряжений изгиба к напряжениям растяжения. Если напряжения от изгиба не превышают 5% напряжений от растяжения, то нить рассчитывают обычно как абсолютно гибкую. В противном случае учитывают ее изгибную жесткость.

Точной границы между пологими и непологими нитями указать нельзя, так как она зависит от характера и величины нагрузки, от материала и условий работы нити и других факторов. Если угол между касательной к оси нити и горизонтом мал и нагрузку можно считать равномерно распределенной по пролету, то нить относят к разряду пологих. При этом очертание кривой провисания гибкой нити описывается уравнением квадратной параболы.

В различных источниках граница между пологими и непологими нитями колеблется в довольно значительных пределах (от $l/f = 8$ до $l/f = 20$, где l — пролет, а f — стрела провисания нити). В некоторых источниках при этом оговаривается, что если точки подвеса нити расположены на разных уровнях, то этими данными можно руководствоваться в том случае, когда угол наклона к горизонту линии, соединяющей опоры, не превышает 20°. По-видимому, более общим критерием пологости нити с опорами на разных уровнях может служить величина угла между касательной к оси нити и горизонтом. Если этот угол не превышает 40°, то максимальная погрешность в определении ординат (случай, когда нить нагружена одной сосредоточенной силой, расположенной вблизи опоры) составляет не более 5,5%, и нить можно относить к пологим.

Нити конечной жесткости делятся на две группы: работающие с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок *, и работающие без изгиба от начальной нагрузки.

Примером первой группы нитей могут быть газо- и нефтепроводные переходы со свободно провисающей трубой. При подъеме на опоры сваренных в прямую плеть труб в последних уже от собственного веса возникают значительные изгибные напряжения.

* Под начальной подразумевается такая нагрузка, при которой нить повисает с заданной (известной) стрелой; под дополнительной — любая другая нагрузка, прикладываемая к нити после приложения начальной нагрузки. Одним из примеров начальной нагрузки может быть собственный вес нити.

Вторая группа нитей — сборно-монолитные железобетонные висячие цилиндрические оболочки. После навески на ванты и замоноличивания плит покрытия такие оболочки работают без изгиба от собственного веса и с изгибом от дополнительной (временной) нагрузки.

При расчете свободно провисающих пологих нитей используются следующие предпосылки и допущения:

1. В пределах упругих деформаций материал нити подчиняется закону Гука.

2. Вследствие пологости нитей принимаются:

вместо точного выражения длины нити

$$L = \int_l \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{1.1}$$

приближенное значение, полученное разложением в ряд Маклорена подынтегральной функции с удержанием двух первых членов этого ряда,

$$L = l + \frac{1}{2} \int_l y'^2 dx; \tag{1.2}$$

очертание кривых провисания гибких нитей при действии начальной и дополнительной равномерно распределенной нагрузки и второй группы нитей конечной жесткости при действии начальной равномерно распределенной нагрузки по дуге квадратной параболы;

техническая теория изгиба (для нитей конечной жесткости)

$$M = -EIy''. \tag{1.3}$$

3. Расчет ведется по деформированной схеме.

4. Статическая неопределимость относительно распора раскрывается связью длины нити до и после приложения дополнительной нагрузки с упругим удлинением ее, вызванным этой нагрузкой.

При расчете нити в упругой стадии замена точного выражения

$$M = -EI \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \tag{1.4}$$

приближенным по (1.3) вполне допустима: при $f/l = 1/20$ погрешность составляет 4%, при $f/l = 1/10$ — увеличивается до 16%.

Замена точного выражения длины нити приближенным по (1.2) вносит в расчет погрешность, не превышающую нескольких процентов. Такого же порядка вносится погрешность при определении упругого удлинения нити ΔL, когда принимается, что величина натяжения H постоянна по ее длине.

В целом использование принятых при выводе расчетных зависимостей предпосылок вносит в расчет погрешность, величина которой не выходит за пределы точности наших сведений о реальных нагрузках.

Дифференциальное уравнение, полученное из рассмотрения условий равновесия бесконечно малого элемента нити, имеет вид:

для гибкой нити

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{H}; \qquad (1.5)$$

для нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной и дополнительной нагрузок

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{EI}{H}\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q}{H}, \qquad (1.6)$$

для нити, работающей без изгиба от начальной и с изгибом от дополнительной нагрузок

$$\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} - \frac{EI}{H}\frac{d^4\bar{y}}{dx^4} - \frac{8f_0}{l^2} = -\frac{q}{H}, \qquad (1.7)$$

где f_0 — стрела провисания нити при действии начальной нагрузки.

В уравнении (1.7) $\bar{y}$ представляет собой разность ординат кривых провисания нити до и после приложения дополнительной нагрузки.

При действии начальной нагрузки величина натяжения гибкой нити определяется по формуле

$$H_0 = \frac{M_б}{f_0}, \qquad (1.8)$$

где $M_б$ — балочный момент.

При приложении дополнительной нагрузки задача резко усложняется, так как приходится определять величину натяжения, не зная ни одной ординаты оси нити. В этом случае используют условие неразрывной деформации

$$\Delta L = L - L_0, \qquad (1.9)$$

где ΔL — упругое удлинение нити, вызванное дополнительной нагрузкой;

L — длина нити после приложения дополнительной нагрузки;

L_0 — длина нити при начальной нагрузке.

Подставляя в (1.9) значения длин нити до и после приложения дополнительной нагрузки, получают уравнения для определения величины натяжения. Так, для нити с опорами на разных уровнях это уравнение будет иметь вид [36]

$$H^3 + \left(\frac{EF\cos^5\varphi}{2lH_0}\int_l Q_0^2dx - H_0\right)H^2 - \frac{EF\cos^5\varphi}{2l}\int_l Q^2dx = 0, \qquad (1.10)$$

где $\int_l Q_0^2dx$, $\int_l Q^2dx$ — характеристика начальной и суммарной нагрузок;

H_0, H — натяжение в нити соответственно при начальной и суммарной нагрузках;

EF — жесткость нити на растяжение;

φ — угол наклона линии, соединяющей опоры, к горизонту.

Интегралы типа $\int_l Q^2dx$ вычисляются по методу Верещагина или непосредственно интегрированием. Их значения для наиболее распространенных схем загружения приведены в приложении 1.

Если одновременно с изменением нагрузки на нить изменяется ее температура на Δt и происходит смещение опор на величину σ *,

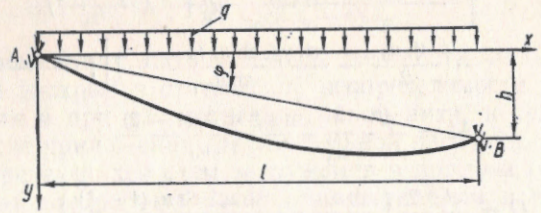


Рис. 1. К расчету нити на начальную нагрузку при шарнирном закреплении концов.

то, пренебрегая изменением пролета и угла наклона к горизонту линии, соединяющей опоры, получим $H^3 + \left|\frac{EF\cos^5\varphi}{2lH}\int_l Q_0^2dx - H_0 - \right.$

$$\left. - \frac{(\delta - l\alpha t\Delta t)\,EF\cos\varphi}{l}\right|H^2 - \frac{EF\cos^5\varphi}{2l}\int_l Q^2dx = 0, \qquad (1.11)$$

где α_t — коэффициент линейного расширения материала нити.

Напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости описывается более сложными зависимостями [32, 92]. Приведем здесь лишь те из них, которые будут использованы в работе.

Зависимость для определения величины натяжения при действии начальной равномерно распределенной нагрузки и шарнирном закреплении концов нити с опорами, расположенными на разных уровнях (рис. 1), имеет вид

$$\frac{384EIf_0}{5ql^4} = \frac{\frac{u_0^2}{2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} u_0}}{\frac{5}{24}u_0^4}, \qquad (1.12)$$

где EI — жесткость нити на изгиб;

$$u = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{H_0}{EI}}.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой отношение стрелы провисания нити к прогибу балки такого же пролета, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q. Если этот прогиб будет равен принятой стреле провисания, то натяжение H_0 будет равно нулю, а правая часть уравнения (1.12) — единице.

Значения ординат кривой провисания нити, углов наклона касательных к нити, изгибающих моментов и поперечных сил опре-

* Перемещение σ принято положительным, когда опоры смещаются внутрь пролета.

деляются по формулам [92]

$$y = h\xi + \frac{5ql^4}{384EI} \cdot \frac{48}{5u_0^4}\left[u_0^2\xi(1-\xi) - \frac{\operatorname{sh} u_0\xi \cdot \operatorname{sh} u_0(1-\xi)}{\operatorname{ch} u_0}\right]; \quad (1.13)$$

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u_0^3}\left|u_0\left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\operatorname{th} u_0}{2} - \frac{\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{ch} u_0(1-\xi)}{\operatorname{ch} u_0}\right)\right]; \quad (1.14)$$

$$M = \frac{ql^2}{8}\,\frac{4}{u_0^2}\,\frac{\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{sh} u_0(1-\xi)}{\operatorname{ch} u_0}; \quad (1.15)$$

$$Q = \frac{ql}{2}\,\frac{2}{u_0}\left(\frac{\operatorname{th} u_0}{2} - \frac{\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{ch} u_0(1-\xi)}{\operatorname{ch} u_0}\right), \quad (1.16)$$

где

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l}.$$

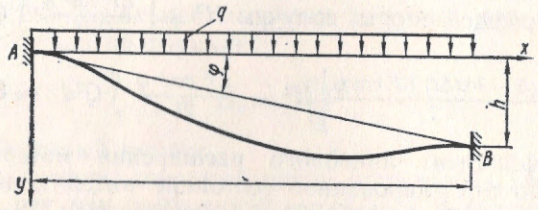


Рис. 2. К расчету нити на начальную нагрузку при жестком закреплении концов.

При жестком закреплении концов нити (рис. 2) величина натяжения находится из уравнения

$$\frac{384EIf_0}{ql^4} = 24\left(\frac{1}{2u_0^2} - \frac{\operatorname{ch} u_0 - 1}{u_0^3 \operatorname{sh} u_0}\right), \quad (1.17)$$

а формулы для определения y, y', M и Q приобретают следующий вид

$$y = \frac{ql^4}{384EI}\,\frac{48}{u_0^4}\left\{u_0^2\xi(1-\xi) - u_0\,\frac{\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{sh} u_0(1-\xi)}{\operatorname{sh} u_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{8hEI}{ql^4}\,u_0^4\,\frac{u_0\xi \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{ch} u_0(1-\xi)}{u_0 \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0}\right\}; \quad (1.18)$$

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{ql^3}{128EI}\,\frac{32}{u_0^3}\left\{u_0\xi - u_0\,\frac{\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{ch} u_0(1-\xi)}{\operatorname{ch} u_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{8hEI}{ql^4}\,u_0^4\,\frac{\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{sh} u_0(1-\xi)}{u_0 \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0}\right\}; \quad (1.19)$$

$$M = \frac{ql}{12} \cdot \frac{6}{u_0^2}\left\{\frac{1}{2} - u_0\left[\frac{1}{2\operatorname{th} u_0} - \frac{\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{sh} u_0(1-\xi)}{\operatorname{sh} u_0}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{4hEI}{ql^4}\,u_0^4\,\frac{\operatorname{sh} u_0 - 2\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{ch} u_0(1-\xi)}{u_0 \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0}\right\}; \quad (1.20)$$

$$Q = \frac{ql}{2}\,2\left\{\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u_0\xi \operatorname{ch} u_0(1-\xi)}{\operatorname{sh} u_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{4hEI}{ql^4}\,u_0^3\,\frac{\operatorname{ch} u_0 - 2\operatorname{sh} u_0\xi \cdot \operatorname{ch} u_0(1-\xi)}{u_0 \operatorname{ch} u_0 - \operatorname{sh} u_0}\right\}. \quad (1.21)$$

При приложении к нити конечной жесткости дополнительной нагрузки для раскрытия статической неопределимости приходится прибегать, как и при рассмотрении гибкой нити, к сравнению ее длин до и после приложения дополнительной нагрузки. Для наиболее часто встречающихся схем загружения в приложении 2 приведены формулы для расчета нитей при шарнирном и жестком закреплении концов на опорах.

§ 1.2. Некоторые сведения из теории пластичности

Целый ряд материалов при воздействии значительных нагрузок испытывает пластические деформации. Процесс развития пластических деформаций сложен и необратим.

На поведение конструкций из упруго-пластического материала существенное влияние оказывают физико-механические свойства материалов, из которых изготовлены конструкции, условия их эксплуатации и др.

Механические свойства материалов определяют из диаграммы растяжения или сжатия (рис. 3).

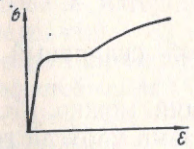


Рис. 3. Кривая одноосного растяжения.

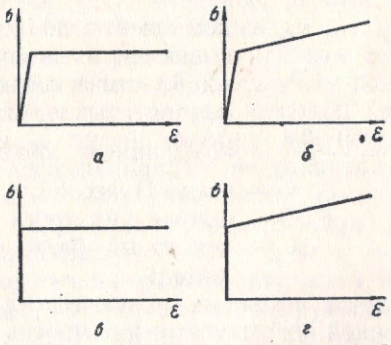


Рис. 4. Модели кривых деформаций:
а — идеального упруго-пластического материала; *б* — упруго-пластического материала с упрочнением; *в* — жестко-пластического материала; *г* — жестко-упрочняющегося материала.

В теории пластичности действительные кривые деформации идеализируют. Наиболее часто зависимость между напряжениями и деформациями аппроксимируют ломаной линией с горизонтальным участком. Получили применение полигональная и степенная аппроксимации [3, 97]. При полигональной аппроксимации кривая деформации заменяется вписанной ломаной линией, а при степенной — степенной функцией. Так как учет особенностей работы

некоторых материалов вызывает существенные математические трудности в описании процесса развития пластических деформаций, то на идеализированных кривых деформаций могут отсутствовать те или иные участки.

В теории пластичности широко используются модели идеального упруго-пластического материала, упруго-пластического материала с упрочнением, жестко-пластического материала и, наконец, жестко-упрочняющегося материала, диаграммы работы которых приведены на рис. 4.

В настоящее время предложен ряд теорий пластичности. Наибольшее применение получили теория пластического течения, теория пластичности Сен-Венана — Мизеса и теория упруго-пластических деформаций.

Основные зависимости теории пластического течения могут быть получены из постулатов Д. Друккера [24], А. А. Ильюшина [31] и Г. А. Геммерлинга [16]. Из предпосылок теории пластического течения выводятся известные уравнения Прандтля — Рейса [63]

$$d\varepsilon = 3k d\sigma;$$

$$d\left(\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon\right) = \frac{1}{2G} ds_x + d\lambda s_x \ \ldots;$$

$$d\gamma_{xz} = \frac{1}{G} d\tau_{xz} + 2d\lambda\tau_{xz}, \qquad (1.22)$$

где $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{xz}$ — компоненты полной деформации, которые складываются из компонентов упругой и компонентов пластической деформации;

$s_x, \ldots, \tau_{xz}$ — компоненты девиатора напряжений;

$k = \frac{1-2\nu}{E}$ — коэффициент объемного сжатия;

ν — число Пуассона;

E, G — модули упругости и сдвига;

$d\lambda$ — некоторый бесконечно малый скалярный множитель.

В случае развитых пластических деформаций можно, без существенной погрешности, пренебречь компонентами упругой деформации, т. е. исходить из схемы жестко-пластического тела. При этом придем к теории пластичности Сен-Венана — Мизеса. В отличие от уравнений Прандтля — Рейса, которые не сводятся к конечным соотношениям, уравнения Сен-Венана — Мизеса представляют собой уже конечные зависимости между компонентами напряжений и скорости деформации.

Уравнения теории упруго-пластических деформаций представляют также конечные зависимости, но только между компонентами напряжений и деформации. По своей структуре зависимости теории упруго-пластических деформаций обобщают закон Гука и при рассмотрении упругого материала переходят в него. Они нашли широкое применение в инженерной практике при простом нагружении. Под последним принято подразумевать такое нагружение, когда напряжения в данной точке возрастают пропорционально некоторому параметру, причем площадки главных напряжений сохраняют свое положение в пространстве. Отсюда вытекает, что дифференциальные уравнения равновесия и условия совместности деформаций в пластической области выполняются тождественно.

При сложном нагружении, когда нагрузки растут не пропорционально, а направления главных осей и взаимоотношения главных напряжений изменяются, пользоваться уравнениями теории упруго-пластических деформаций для изучения процесса развития пластических деформаций не рекомендуется, так как можно прийти к ошибочным результатам. В этом случае приходится пользоваться более сложной теорией. Достаточно надежной и универсальной теории пластичности, описывающей процесс деформации при сложном нагружении, пока нет.

В данной работе используются основные положения теории упруго-пластических деформаций.

§ 1.3. Краткий обзор теоретических и экспериментальных исследований

В настоящем обзоре приводятся лишь основные работы, посвященные исследованию нитей конечной жесткости.

Нить конечной жесткости можно рассматривать как промежуточное звено между гибкой нитью и балкой. Поскольку напряженно-деформированное состояние балок, опоры которых не могут беспрепятственно сближаться, и нитей конечной жесткости описывается одними и теми же дифференциальными уравнениями, то изложение материала и начнем с описания работ, посвященных исследованию таких балок. Последние предшествовали работам по теории нитей конечной жесткости.

Большой вклад в развитие теории расчета стержней в упругой стадии, подверженных действию поперечной нагрузки и осевой силы, внесли К. С. Завриев, И. Г. Бубнов и С. П. Тимошенко.

И. Г. Бубнов впервые рассмотрел задачу о расчете стержней, подверженных совместному действию поперечной нагрузки и осевой силы, являющейся функцией прогиба стержня [12].

С ростом применения висячих конструкций в различных областях строительства появляются работы В. К. Качурина [32].

В последние годы теории расчета нитей конечной жесткости посвятили работы Н. М. Кирсанов [36], Б. К. Немчинов [56, 57], В. Н. Шимановский, Ю. В. Смирнов и Р. Б. Харченко [91, 92].

Наиболее подробно и полно расчет нитей конечной жесткости изложен в работах [32, 92], где рассматривалось влияние на нить характера нагрузок, граничных условий, температуры, податливости опор и других факторов.

Теория упруго-пластического изгиба балок с распором (или теория сложного изгиба балок за пределом упругости) начала развиваться вместе с теорией упруго-пластического изгиба длинных прямоугольных пластинок с закрепленными кромками. Обычно при расчете эти пластинки разбиваются на ряд балок-полосок параллельно короткой стороне. Так как при действии нагрузки опорные кромки балки-полоски не могут свободно сближаться, то в ней появляются реактивные продольные усилия, вызывающие цепные напряжения.

Первые экспериментальные исследования, проведенные И. Г. Бубновым [12], позволили установить, что появление пластических деформаций в балке-полоске не исчерпывает ее несущей способности. Оказалось, что балка-полоска в состоянии воспринять нагрузку в несколько раз превышающую ту, при которой обнаруживаются первые признаки текучести.

И. Г. Бубновым изучался и характер изгиба балки-полоски при жестком закреплении кромок. Влияние жесткого закрепления заметно сказывалось лишь в упругой стадии. За пределом упругости вблизи кромок наблюдался «надлом», который не сопровождался никаким видимым разрушением пластинки. С ростом нагрузки балка-полоска изгибалась почти также, как при шарнирном закреплении кромок.

На основе результатов эксперимента И. Г. Бубнов установил следующие важные особенности:

а) в упруго-пластической стадии прогибы балки-полоски растут быстрее, а напряжения медленнее, чем в упругой;

б) разрушение балки-полоски происходит при нагрузках, значительно больших, чем это следует из формул, описывающих упругое поведение конструкции.

Экспериментальные и теоретические работы, положившие начало теории расчета за пределом упругости, появились лишь в 40-х годах [5, 58].

Первые работы по исследованию упруго-пластического изгиба балок с распором * появились еще позднее и базировались на очень упрощенных предпосылках. Одна из таких предпосылок — гипотеза пластического шарнира [66]. Эту гипотезу широко использовали Н. Ф. Ершов [25], Л. М. Беленький [6, 7, 8], И. Л. Дикович [22], Я. Ф. Шаров [89], R. M. Haythornthwaite [100], Wah Thein [102], A. G. Young [104] и др.

В работах [25, 102, 104] полагается, что при действии равномерно распределенной нагрузки балка полностью работает упруго до образования пластических шарниров. Текучесть же возникает лишь в местах их появления и не распространяется на остальные участки балки, которые по-прежнему считаются упругими. Предельная нагрузка определяется из условия образования пластических шарниров в середине пролета и жестких опорных закреплениях. Во всех случаях оценка теоретических решений производится на основании эксперимента.

* В дальнейшем при обзоре разграничения между балками-полосками и балками в виде отдельного бруса делать не будем, так как методы решения задач в обоих случаях одинаковы.

В работах [6, 7, 22, 100] рассматривается изгиб жестко-пластических балок. При этом не принимается во внимание образование упруго-пластических зон и не учитываются упругие деформации. Такой метод решения может быть удовлетворительным лишь для нахождения прогибов балки в области больших пластических деформаций при действии сосредоточенных нагрузок.

Исходя из гипотезы пластического шарнира и модели жесткопластического тела, можно только весьма приближенно оценить перемещения балки и невозможно получить ясное представление о характере и величине ее пластических деформаций.

Исследованиями, в основу которых положены дифференциальные уравнения упруго-пластического равновесия сложного изгиба балок, занимались И. Л. Дикович [22], Н. Ф. Ершов [27, 28], С. Д. Лейтес [47, 48, 49], В. Н. Серов [70], В. В. Сорокин [75], В. Е. Спиро [76], Сюй Бин-хань [79], Н. В. Ширко [96] и др.

При решении задачи в такой постановке балка разделяется на следующие участки: упругие, упруго-пластические с односторонней текучестью и упруго-пластические с двусторонней текучестью. Для каждого из этих участков записывается отдельное дифференциальное уравнение. Границы упруго-пластических зон определяются из условий равенства внутренних и внешних усилий в тех сечениях, где наступает текучесть в крайних волокнах.

И. Л. Дикович [22] и С. Д. Лейтес [47, 48, 49] решали поставленную задачу в замкнутом виде для прямоугольной балки из идеального упруго-пластического материала при действии равномерно распределенной нагрузки.

Принимались следующие предпосылки:

деформации по высоте сечения балки распределяются по линейному закону;

нормальные напряжения являются функцией относительного удлинения волокон;

влияние касательных напряжений на условие текучести не учитывается;

нагружение является однократным, без разгрузки.

Определение всех неизвестных параметров задачи производится из довольно сложной системы трансцендентных уравнений. Как замечает один из авторов [48], для получения численного результата задачи приходится преодолевать серьезные трудности математического характера.

В работе [22] для ряда конкретных примеров приведены графики зависимости между поперечной нагрузкой и прогибом балки. В предельном состоянии, когда пластические деформации охватывают всю балку, она работает подобно нити.

Та же задача, но для балки из линейного упрочняющегося материала, рассматривалась в работах [22, 28]. Получены зависимости,

связывающие момент, растягивающее усилие и деформации для случаев односторонней и двусторонней текучести.

Автор работы [22] предлагает такой же путь решения, как и для балки из идеального упруго-пластического материала.

В работе [28] для упрощения интегрирования системы уравнений задается функция прогиба. На основе приведенного примера показан характер распространения зон пластичности по высоте и длине балки.

В. В. Сорокин избрал иной путь приближенного решения задачи изгиба балки с распором при действии равномерно распределенной нагрузки.

В первом приближении все параметры задачи определяются по упругому решению. Затем по графикам, построенным автором, отыскиваются для намеченных поперечных сечений функции, учитывающие уменьшение изгибной жесткости и увеличение податливости упруго-пластической балки на растяжение.На остальной части пролета изменение этих функций аппроксимируется приближенными выражениями. Полученные значения функций используются для последующего приближения. Процесс продолжается до тех пор, пока результаты двух последних приближений не будут достаточно близки между собой.

Однако не всегда, как отмечено в работе [79], может быть обеспечена сходимость решения системы дифференциальных уравнений методом последовательных приближений. Особенно это справедливо для балок с небольшой жесткостью на изгиб и при значительном влиянии продольных сил.

В работе [79] для решения задачи используется метод Бубнова — Галеркина. Расчетные предпосылки те же, что и в предыдущих работах.

Прогиб балки отыскивается в виде ряда

$$W = \sum_{i=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \qquad (1.23)$$

где n — число удерживаемых членов ряда, зависящее от требуемой точности;

a_k — неизвестные коэффициенты ряда (обобщенные координаты);

$\varphi_k(x)$ — фундаментальные функции.

Определение коэффициентов a_k производится из очень сложной системы нелинейных алгебраических уравнений, которые решаются методом последовательных приближений.

В работах [75, 79] уже не накладываются ограничения на зависимость «напряжения-деформация», так как интегралы, входящие в уравнения, могут быть вычислены численно.

В более общей форме дифференциальные уравнения упруго-пластического равновесия гибкого стержня составлены И. В. Ширко [96]. При этом подчеркивается, что решение их возможно только численным методом.

В качестве примера решена задача упруго-пластического изгиба прямоугольной балки с шарнирно неподвижными опорами при действии равномерно распределенной нагрузки. Численное интегрирование дифференциальных уравнений производится методом Рунге — Кутта. Способом пристрелки по двум параметрам в задаче отыскивается ряд приближений. В это же время приходится определять также границы упруго-пластических зон, что представляет большие трудности. В целом задача сводится к решению системы нелинейных уравнений.

Исследование сложного изгиба балки с неподвижными опорами при действии равномерно распределенной нагрузки Н. Ф. Ершов [26] проводил энергетическим методом, основанным на использовании обобщенной теоремы Кастильяно. При выводе зависимостей между обобщенными координатами и обобщенными силами для продольно-поперечного изгиба балка делилась на три зоны: упругую, с односторонней и двусторонней текучестью. Обобщенные величины получались путем суммирования составляющих во всех трех зонах. Главная трудность задачи состояла в нахождении границ между этими зонами, которые по положению и очертанию не остаются неизменными в процессе деформации.

В. Н. Серов [70] решение задачи осуществляет вариационным методом Лагранжа-Ритца, дополняя соответствующие уравнения «уравнениями связи». Функция прогиба балки представлялась в виде ряда (1.23).

Применение даже для равномерно распределенной нагрузки метода Лагранжа-Ритца приводит к очень громоздкой и сложной системе трансцендентных уравнений. Поэтому в работе количество членов ряда ограничивается до двух.

В рассмотренных работах вывод основных зависимостей производится на основе очень важной гипотезы плоских сечений, которая достаточно хорошо подтверждается экспериментами [68, 83, 85, 99]. Введение этой гипотезы позволяет перейти от соотношения между напряжениями и деформациями к интегральным соотношениям между внутренними усилиями и соответствующими перемещениями.

Исследованию нитей конечной жесткости за пределом упругости посвящено сравнительно небольшое количество работ [45, 51, 55].

Б. К. Немчинов при расчете нитей конечной жесткости с учетом пластических свойств использует диаграмму «напряжения — деформация» для жестко-пластического материала. При этом считается, что изменение кривизны нити после приложения дополнительной нагрузки происходит только на тех участках, где значения изгибающего момента и продольной силы соответствуют точке, расположенной на кривой предельного состояния сечения [66]. Такой метод расчета может использоваться для определения перемещений, если возможно пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими.

В статье И. Г. Людковского и А. Д. Федорова [51] экспериментально исследуется работа опорных участков вант. Отмечается, что разрушение конструкции происходит вследствие образования от изгиба и растяжения больших пластических деформаций вблизи опорных закреплений.

Большие пластические деформации в нитях возникают не только на опорных участках, но и в местах приложения сосредоточенных нагрузок. Примером может служить образование пластических деформаций в местах перегиба предварительно напряженной сети из лент [45].

В приведенных выше работах полагалось, что процесс развития пластических деформаций не сопровождается разгрузкой.

Как известно, вопросом разгрузки приходится заниматься только за пределом упругости. Это обусловлено тем, что поведение упругого и пластического материала в случае увеличения и уменьшения нагрузки происходит по различным законам.

Для решения конкретных упруго-пластических задач следует знать не только величину действующей нагрузки, но и закон, по которому она изменяется, т. е. необходимо учитывать историю нагружения конструкции.

При разгрузке упруго-пластический материал ведет себя подобно упругому [4]. Это продолжается до тех пор, пока напряжения в материале не достигнут предела текучести противоположного знака. Потом вновь начинается пластическое течение.

Вследствие разных законов нагружения и разгрузки балка после прекращения действия внешних сил не возвращается в исходное положение. В ней появляются остаточные деформации.

Исследованию напряженно-деформированного состояния балок с распором при разгрузке посвящено небольшое количество работ [22, 28, 65].

И. Л. Дикович [22] решение задачи получил, предполагая, что при разгрузке не возникают вторичные пластические деформации, т. е. разгрузка происходит по упругому закону.

Выведенные уравнения используются для определения остаточных прогибов упруго-пластической балки идеального профиля при действии равномерно распределенной нагрузки. Отмечается, что при другой форме поперечного сечения решение задачи связано со значительными трудностями.

Н. Ф. Ершов [28] решает задачу в той же постановке для балки прямоугольного поперечного сечения.

Остаточные прогибы при действии равномерно распределенной нагрузки вычисляются как разность между прогибами балки с учетом пластических деформаций и в предположении упругой работы материала.

В работе [65] задача определения остаточных прогибов при упругой разгрузке сводится к решению системы линейных уравнений.

При расчете конструкций за пределом упругости различают случаи одно- и многократного нагружения. Обычно неизвестна

величина нагрузки в каждый конкретный момент времени, а известны только пределы ее изменения. Очередность каждого из воздействий может быть какой угодно. Это значительно осложняет расчет, так как приходится рассматривать задачи о приспособляемости конструкции, которые с учетом деформированной схемы являются весьма сложными и требуют создания специфических методов расчета [28, 41].

В настоящее время методами теории приспособляемости решаются лишь задачи при некоторых упрощениях для отдельных сечений и стержней [5, 18].

Из приведенного обзора литературы следует, что напряженно-деформированное состояние балок с распором и нитей конечной жесткости за пределом упругости изучено совершенно недостаточно. Усилия исследователей в основном были направлены на разработку методов расчета для некоторых частных задач. Объясняется это прежде всего математическими трудностями задачи, преодолеть которые во многих случаях до внедрения в практику расчетов на ЭВМ было невозможно [5, 73]. И поэтому наибольшее количество работ посвящено изучению поведения конструкции в упруго-пластической стадии при действии равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузок.

Однако и на основе имеющихся теоретических и экспериментальных исследований можно сделать важный вывод о том, что развитие пластических деформаций в наиболее напряженных поперечных сечениях конструкций существенно повышает их несущую способность. После наступления текучести в локальной зоне конструкция может сопротивляться увеличению внешних сил до тех пор, пока пластические деформации не охватят ее значительного объема.

Из литературы видно, что в подавляющем большинстве случаев эксперименты и теория хорошо согласуются друг с другом. Поэтому при изучении напряженно-деформированного состояния конструкций значительное место отводится теоретическим исследованиям.

В связи с появлением ЭВМ и широким внедрением их в расчетную практику настал новый этап развития строительной механики — изменились круг, объем и методы решения ее задач. Если раньше стремились, используя многочисленные допущения, сократить количество вычислений, то после внедрения ЭВМ трудности вычислительного характера перестали быть главными и открылась возможность учета реальных условий работы конструкции [5, 17, 73, 87].

Однако и при реализации на ЭВМ методов расчета статически неопределимых систем с учетом физической и геометрической нелинейности возникают свои трудности, основные из которых заключаются в способах линеаризации задачи и обеспечении сходимости итерационных решений.

Научно-техническая библиотека
[illegible]
ЦНИИС
Инв. № 10514

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 2.1. Предпосылки расчета

Для расчета нитей конечной жесткости используются следующие предпосылки и допущения:

продольные относительные деформации ε по высоте сечения нити (рис. 5) распределяются по линейному закону (гипотеза плоских сечений)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + kz, \tag{2.1}$$

где ε_0 — относительная деформация оси нити;

z — координата, характеризующая положение волокон по высоте нити относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения;

нормальные напряжения σ являются функцией относительного удлинения ε

$$\sigma = \sigma(\varepsilon); \tag{2.2}$$

влияние касательных напряжений τ на условие текучести не учитывается;

изгиб нити принимается плоским;

нагружение принимается простым или близким к простому.

В принципе гипотеза плоских сечений соблюдается только тогда, когда все сечения стержня работают в одинаковых условиях, например, в случае чистого изгиба или центрального растяжения (сжатия). Если в поперечных сечениях возникает перерезывающая сила, то, как показали эксперименты, справедливость указанной гипотезы сохраняется только для балок или стержней, у которых отношение высоты к пролету менее 1/5. Для нитей конечной жесткости такое соотношение размеров гораздо меньше, а поэтому гипотеза плоских сечений для них вполне применима.

Допущение о том, что продольные волокна нити не давят одно на другое, т. е. находятся в одноосном напряженном состоянии, позволяет считать нормальные напряжения в поперечных сечениях функцией только относительных удлинений волокон. Теоретические и экспериментальные исследования, проведенные для упруго-пластических стержней, дают полное основание использовать это допущение и для нитей конечной жесткости.

Как известно, в этих нитях основное влияние на работу поперечного сечения оказывают нормальные напряжения. Более того, с ростом нагрузки перерезывающие силы по сравнению с нормальными возрастают незначительно, а в упруго-пластической стадии

они могут быть даже меньше, чем в упругой (форма равновесия нити конечной жесткости приближается к гибкой нити). Совершенно иное положение в балках, где перерезывающие силы возрастают пропорционально действующей нагрузке. Так как для балок с отношением высоты к пролету менее 1/5 погрешность от рассматриваемой предпосылки незначительна, то для нитей конечной жесткости она еще менее существенна.

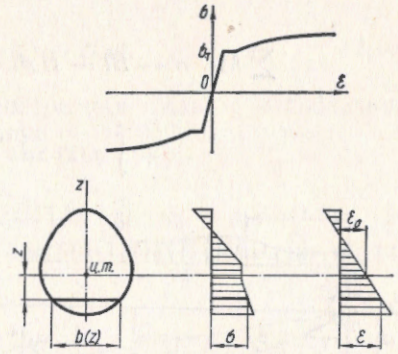


Рис. 5. Работа поперечного сечения нити.

Из принятых предпосылок вытекает, что зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций для каждой точки нити совпадает с зависимостью $\sigma - \varepsilon$ при простом растяжении или сжатии.

Учитывая, что приближенное выражение кривизны при изгибе нитей конечной жесткости за пределом упругости может внести в расчет более существенные погрешности, чем в упругой стадии, принимается точная зависимость

$$k = y''(1 + y'^2)^{-3/2}. \tag{2.3}$$

В дальнейшем нагрузка и прочностные характеристики материала считаются известными.

§ 2.2. Условия равновесия

Рассмотрим нить конечной жесткости при действии произвольной нагрузки (рис. 6 *а*). Для определения усилий, возникающих в нити, найдем горизонтальные и вертикальные составляющие опорных реакций.

Из условий равновесия следует

$$\sum x = -H_A + H_B + \sum_{s=1}^{m} T_s = 0.$$

Откуда

$$H_A = H_B + \sum_{s=1}^{m} T_s. \tag{2.4}$$

Опорные реакции A и B получим, определяя сумму моментов всех сил, действующих на нить, вначале относительно опоры B, а затем опоры A

$$\sum M_B = Al - H_A h + M_A M_B - \sum_{j=1}^{m} P_j (l - a_j) -$$

$$-\int_0^l q(x)(l-x)\,dx+\sum_{s=1}^{m}T_s(h-c_s)=0; \qquad (2.5)$$

$$\sum M_A=-Bl-H_Ah+M_A-M_B+\sum_{j=1}^{n}P_ja_j+$$

$$+\int_0^l q(x)\,x\,dx-\sum_{s=1}^{m}T_sc_s=0. \qquad (2.6)$$

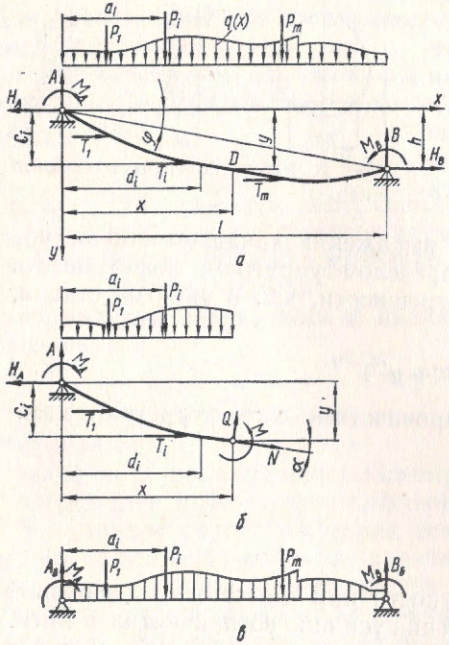


Рис. 6. К выводу расчетных зависимостей.

Следовательно,

$$A=A_Б+H_A\operatorname{tg}\varphi-$$

$$-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{h-c_s}{l}; \qquad (2.7)$$

$$B=B_Б-H_B\operatorname{tg}\varphi-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{c_s}{l}, \qquad (2.8)$$

где $A_Б$ и $B_Б$ — опорные реакции в простой балке (рис.6, *в*).

Момент M и равнодействующая N внутренних сил, возникающих в поперечном сечении нити, симметричном относительно вертикальной оси (см. рис. 5), записываются в виде

$$N=\int_F\sigma dF; \qquad (2.9)$$

$$M=\int_F\sigma z dF, \qquad (2.10)$$

где F — площадь поперечного сечения нити.

Эти же силовые факторы найдем, выражая их через внешние силы (рис. 6, *б*)

$$N=\left(Q_Б+H_A\operatorname{tg}\varphi-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{h-c_s}{l}\right)\sin\alpha+$$

$$+\left(H_A-\sum_{s=1}^{i}T_s\right)\cos\alpha \qquad (2.11)$$

или

$$N=\frac{H_A-\sum_{s=1}^{i}T_s+\left(Q_Б+H_A\operatorname{tg}\varphi-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{h-c_s}{l}\right)y'}{(1+y'^2)^{1/2}}; \qquad (2.12)$$

$$M=M_Б+x\left(H_A\operatorname{tg}\varphi-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{h-c_s}{l}\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{i}T_s(y-c_s)-H_Ay, \qquad (2.13)$$

где $Q_Б$ и $M_Б$ — соответственно поперечная сила и изгибающий момент в простой балке.

Таким образом,

$$\frac{H_A-\sum_{s=1}^{i}T_s+\left(Q_Б+H_A\operatorname{tg}\varphi-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{h-c_s}{l}\right)y'}{(1+y'^2)^{1/2}}-\int_F\sigma dF=0; \qquad (2.14)$$

$$M_Б+x\left(H_A\operatorname{tg}\varphi-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{h-c_s}{l}\right)+\sum_{s=1}^{i}T_s(y-c_s)-$$

$$-H_Ay-\int_F\sigma z dF=0. \qquad (2.15)$$

При действии только одной вертикальной нагрузки система уравнений равновесия принимает вид

$$\frac{H+(Q_Б+H\operatorname{tg}\varphi)y'}{(1+y'^2)^{1/2}}-\int_F\sigma dF=0; \qquad (2.16)$$

$$M_Б+xH\operatorname{tg}\varphi-Hy-\int_F\sigma z dF=0, \qquad (2.17)$$

где $H_A=H_B=H$.

Если опоры нити расположены на одном уровне, то вместо уравнений (2.16) и (2.17) получим:

$$\frac{H+Q_Бy'}{(1+y'^2)^{1/2}}-\int_F\sigma dF=0; \qquad (2.18)$$

$$M_Б-Hy-\int_F\sigma z dF=0. \qquad (2.19)$$

Перерезывающая сила Q в поперечном сечении нити (рис. 6, *б*) определяется из выражения

$$Q=\left(Q_Б+H_A\operatorname{tg}\varphi-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{h-c_s}{l}\right)\cos\alpha-$$

$$-\left(H_A-\sum_{s=1}^{i}T_s\right)\sin\alpha, \qquad (2.20)$$

или

$$Q=\frac{Q_Б+H_A\operatorname{tg}\varphi-\sum_{s=1}^{m}T_s\frac{h-c_s}{l}-\left(H_A-\sum_{s=1}^{i}T_s\right)y'}{(1+y'^2)^{1/2}}. \qquad (2.21)$$

Уравнения для определения перерезывающей силы при отсутствии горизонтальной нагрузки имеют следующий вид:

для нити с опорами на разных уровнях

$$Q = \frac{Q_Б + H \operatorname{tg} \varphi - Hy'}{(1 + y'^2)^{1/2}}; \tag{2.22}$$

для нити с опорами на одном уровне

$$Q = \frac{Q_Б - Hy'}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \tag{2.23}$$

Выведенные зависимости в одинаковой мере относятся к нитям, работающим соответственно с изгибом и без изгиба от начальной нагрузки. Для последней группы нитей при начальной нагрузке изгибающие моменты и перерезывающие силы в поперечных сечениях равны нулю.

В полученные уравнения входит величина кривизны кривой провисания, которая для нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки, находится из формулы (2.3). Для нитей, работающих без изгиба от начальной нагрузки, при определении силовых факторов следует учитывать разность кривизны Δk при начальной и дополнительной нагрузках:

$$\Delta k = k - k_0, \tag{2.24}$$

где k_0 — кривизна оси нити при начальной нагрузке.

§ 2.3. Уравнение неразрывности деформаций

Расчет нити делится на два этапа. Вначале определяется напряженно-деформированное состояние нити при начальной нагрузке, а затем — при совместном действии начальной и дополнительной нагрузок.

На первом этапе расчета распор отыскивается из условия, что стрела провисания в середине пролета равна f_0.

При приложении дополнительной нагрузки очертание нити становится неизвестным. Для раскрытия статической неопределимости относительно распора установим связь между длиной нити до и после приложения дополнительной нагрузки.

Используя известную из дифференциальной геометрии формулу для определения длины линии по ее уравнению, найдем начальную длину нити

$$L_0 = \int_l (1 + y_0'^2)^{1/2} dx, \tag{2.25}$$

где y_0' — первая производная кривой провисания $y_0 = y_0(x)$ при начальной нагрузке.

Аналогично выражается длина нити при приложении дополнительной нагрузки:

$$L = \int_l (1 + y'^2)^{1/2} dx. \tag{2.26}$$

Приращение длины нити

$$\Delta L = L - L_0 \tag{2.27}$$

или

$$\Delta L = \int_l (1 + y'^2)^{1/2} dx - \int_l (1 + y_0'^2)^{1/2} dx. \tag{2.28}$$

Удлинение нити происходит за счет растяжения ее оси и может быть вычислено следующим образом

$$\Delta L = \int_l \varepsilon_0^{q+p} dx - \int_l \varepsilon_0^q dx, \tag{2.29}$$

где $\int_l \varepsilon_0^q dx$ и $\int_l \varepsilon_0^{q+p} dx$ — удлинения оси нити от начальной и дополнительной нагрузок.

Следовательно,

$$\int_l (1 + y'^2)^{1/2} dx - \int_l (1 + y_0'^2)^{1/2} dx = \int_l \varepsilon_0^{q+p} dx - \int_l \varepsilon_0^q dx. \tag{2.30}$$

Последнее равенство и представляет искомое уравнение для определения неизвестной величины распора при загружении нити дополнительной нагрузкой. Эта зависимость получена из чисто геометрических соображений и поэтому справедлива при любой диаграмме $\sigma - \varepsilon$.

§ 2.4. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений

Уравнения (2.1), (2,2), (2.3), (2,14), (2.15), (2.21), (2.30) описывают напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости в упругой и упруго-пластической стадиях.

Для решения поставленной задачи поступим следующим образом. Будем рассматривать уравнение кривой провисания нити как функцию дискретного аргумента

$$x_k = k\Delta l_k, \tag{2.31}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

Δl_k — разность между двумя соседними значениями аргумента x_{k-1} и x_k (рис. 7).

Производные, входящие в уравнение равновесия и уравнение неразрывности деформаций, аппроксимируем разностными отношениями, т. е. линейной комбинацией значений функции при соответствующих значениях дискретного аргумента.

Тогда при заданной нагрузке и фиксированном значении распора зависимости (2.1), (2.2), (2.3), (2.14), (2.15), (2.21) могут быть представлены в более общем виде как система нелинейных алгебраических уравнений вида [10, 21]

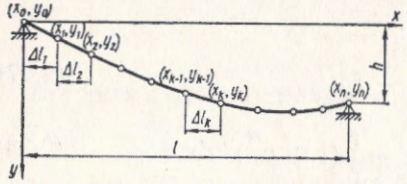


Рис. 7. Дискретная модель нити.

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi_0(y_0, y_1, \ldots, y_n);\\ y_1 &= \varphi_1(y_0, y_1, \ldots, y_n);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= \varphi_n(y_0, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

где функции φ_0, φ_1, ..., φ_n — действительны, определены и непрерывны в области G n-мерного пространства E_n.

Введя векторы

$$\vec{y} = \{y_0 y_1 \ \ldots \ y_n\} \tag{2.33}$$

и

$$\vec{\varphi} = \{\varphi_0 \varphi_1 \ \ldots \ \varphi_n\}, \tag{2.34}$$

запишем систему (2.32) следующим образом:

$$\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{y}). \tag{2.35}$$

Для нахождения вектора-корня этого уравнения удобно использовать метод итерации

$$\vec{y}^{(i+1)} = \vec{\varphi}(\vec{y}^{(i)}), \tag{2.36}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Определяя в пространстве E_n каноническую норму вектора $\vec{y}$ равенством

$$\|\vec{y}\|_m = \max_k |y_k|, \tag{2.37}$$

будем называть отображение (2.32) или (2.35) сжимающим в области G, если существует такое меньшее единицы положительное число t, что для любых двух элементов (точек) $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2 \in G$ соблюдается условие

$$\|\vec{\varphi}(\vec{y}_1) - \vec{\varphi}(\vec{y}_2)\| \leqslant t\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|. \tag{2.38}$$

Теорема 1. Предположим, что область G замкнута и отображение (2.32) является сжимающим в G, т. е. выполнено условие (2.38). Если для итерационного процесса (2.36) все последовательные приближения $\vec{y}^{(i)} \in G$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, тогда независимо от выбора начального приближения $\vec{y}^{(0)}$ процесс сходится, а следовательно существует

$$\vec{y}^* = \lim_{i\to\infty} \vec{y}^{(i)}; \tag{2.39}$$

предельный вектор $\vec{y}^*$ является единственным решением уравнения (2.35) в области G и

справедлива оценка

$$\|\vec{y}^* - \vec{y}^{(i)}\| \leqslant \frac{t^i}{1-t}\|\vec{y}^{(1)} - \vec{y}^{(0)}\|. \tag{2.40}$$

Доказательство этой теоремы следует из принципа сжатых отображений [10, 21].

Допустим, что и производная

$$\vec{\varphi}'(\vec{y}) = \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

определена и непрерывна в выпуклой ограниченной замкнутой области $G \in E_n$.

Для области G введем нормы

$$\|\vec{\varphi}'(\vec{y})\|_I = \max_{y\in G}\|\vec{\varphi}'(\vec{y})\|_m \tag{2.42}$$

и

$$\|\vec{\varphi}'(\vec{y})\|_{II} = \max_{y\in G}\|\vec{\varphi}'(\vec{y})\|_l, \tag{2.43}$$

где

$$\|\vec{\varphi}'(\vec{y})\|_m = \max_k \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_k(\vec{y})}{\partial y_j}\right| \tag{2.44}$$

и

$$\|\vec{\varphi}'(\vec{y})\|_l = \max_j \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_k(\vec{y})}{\partial y_j}\right|. \tag{2.45}$$

Достаточные условия сходимости процесса итерации формулируются следующей теоремой [10, 21].

Теорема 2. Пусть функции $\vec{\varphi}(\vec{y})$ и $\vec{\varphi}'(\vec{y})$ непрерывны в области G и выполнено неравенство

$$\|\vec{\varphi}'(\vec{y})\|_I \leqslant t < 1 \tag{2.46}$$

или

$$\|\vec{\varphi}'(\vec{y})\|_{II} \leqslant t < 1. \tag{2.47}$$

Если последовательные приближения (2.36) не выходят из области G, то процесс итерации сходится и предельный вектор (2.39) является единственным решением системы (2.32).

Доказательство приведенной теоремы сводится к тому, что отображение (2.35) при наличии условий (2.46) или (2.47) является сжимающим в области G в смысле m- и l-нормы.

Из этой теоремы следует:

процесс итераций сходится, если

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_k(\vec{y})}{\partial y_j}\right|\leqslant t_k<1 \qquad (2.48)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(\vec{y})}{\partial y_k}\right|\leqslant t_k<1; \qquad (2.49)$$

при $y\in G$. $\qquad k=1, 2, \ldots, n.$

В обоих случаях для приближения $\vec{y}^{(i)}$ получаем следующие оценки:

$$\|\vec{y}^{*}-\vec{y}^{(i)}\|_m\leqslant\frac{t^i}{1-t}\|\vec{y}^{(1)}-\vec{y}^{(0)}\|_m; \qquad (2.50)$$

$$\|\vec{y}^{*}-\vec{y}^{(i)}\|_l\leqslant\frac{t^i}{1-t}\|\vec{y}^{(1)}-\vec{y}^{(0)}\|_l, \qquad (2.51)$$

где $\vec{y}^{(1)}=\vec{\varphi}(\vec{y}^{(0)})$.

Таким образом, для решения нелинейной системы уравнений методом итераций необходимо, чтобы отображение (2.35) было сжимающим в области G, т. е., чтобы выполнялось одно из условий (2.38), (2.46) или (2.47).

На основе проведенных исследований для поставленной задачи найдена функция $\varphi(\vec{y})$, которая может удовлетворить этому требованию.

Реккурентная зависимость выбирается в виде

$$\vec{y}^{(i+1)}=\vec{\varphi}(\vec{y}^{(i)})=\vec{y}^{(k)}-\beta[\vec{y}^{(i)}-\vec{f}(\vec{y}^{(i)})], \qquad (2.52)$$

где $\vec{f}(\vec{y}^{(i)})$ — вектор-функция, получаемая в результате применения к вектору $\vec{y}^{(i)}$ совокупности определенных операций, устанавливаемых системой уравнений (2.1), (2.2.), (2.3), (2.14), (2.15), (2.21);

β — коэффициент сходимости ($0<\beta\leqslant 0{,}5$).

Исходя из зависимости (2.52), определим разности между рядом последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
&\vec{y}^{(i+1)}-\vec{y}^{(i)}=\beta[\vec{f}(\vec{y}^{(i)})-\vec{y}^{(i)}];\\
&\vec{y}^{(i)}-\vec{y}^{(i-1)}=\beta[\vec{f}(\vec{y}^{(i-1)})-\vec{y}^{(i-1)}];\\
&\vec{y}^{(i-1)}-\vec{y}^{(i-2)}=\beta[\vec{f}(\vec{y}^{(i-2)})-\vec{y}^{(i-1)}]; \qquad (2.53)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\vec{y}^{(1)}-\vec{y}^{(0)}=\beta[\vec{f}(\vec{y}^{(0)})-\vec{y}^{(0)}].
\end{aligned}$$

Процесс итераций будет сходиться, если

$$\|\vec{y}^{(i+1)}-\vec{y}^{(i)}\|\leqslant t\|\vec{y}^{(i)}-\vec{y}^{(i-1)}\|; \qquad (2.54)$$

или

$$\begin{aligned}
&\|\vec{f}(\vec{y}^{(i)})-\vec{y}^{(i)}\|t\|\vec{f}(\vec{y}^{(i-1)})-\vec{y}^{(i-1)}\|;\\
&\|\vec{f}(\vec{y}^{(i-1)})-\vec{y}^{(i-1)}\|\leqslant t\|f(\vec{y}^{(i-2)})-\vec{y}^{i-2}\|;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\|\vec{f}(\vec{y}^{(1)})-\vec{y}^{(1)}\|\leqslant t\|\vec{f}(\vec{y}^{(0)})-\vec{y}^{(0)}\|. \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

Условие (2.55) в сущности означает, что область между $\vec{f}(\vec{y}^{(i)})=\vec{f}^{(i)}(\vec{x}_k)$ и $\vec{y}^{(i)}=\vec{y}^{(i}(x_k)$ с ростом числа приближений (рис. 8), т. е. при $i\to\infty$, должна превращаться в линию.

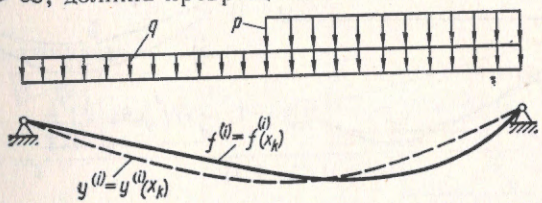


Рис. 8. К вопросу сходимости решения задачи.

По теореме 2 неравенства (2.55) будут выполняться при

$$\|\vec{\varphi}'(\vec{y}^{(i)})\|_{\text{I}}=\|\vec{e}-\beta\vec{e}+\beta\vec{f}'(\vec{y}^{(i)})\|_{\text{I}}\leqslant t<1 \qquad (2.56)$$

или

$$\|\vec{\varphi}'(\vec{y}^{(i)})\|_{\text{II}}=\|\vec{e}-\beta\vec{e}+\beta\vec{f}'(\vec{y}^{(i)})\|_{\text{II}}\leqslant t<1, \qquad (2.57)$$

где $0<\beta\leqslant 0{,}5$; $\vec{e}=\{111\ldots1\}$.

Из неравенства (2.56) или (2.57) вытекает, что соответствующие нормы вектора $\vec{\varphi}'(\vec{y}^{(i)})$ зависят от коэффициента β. Изменяя величину этого коэффициента, можно добиться выполнения условия (2.56) или (2.57), т. е. добиться сходимости процесса итераций при некотором начальном приближении $\vec{y}^{(0)}$.

В дальнейшем в качестве первого приближения принимается кривая равновесия нити при действии начальной нагрузки.

Напряженно-деформированное состояние упругой нити конечной жесткости, работающей с изгибом от начальной нагрузки, описывается приближенно уравнениями (1.12—1.16) и (1.17—1.21)

§ 2.5. Определение перемещений

При воздействии на нить дополнительной нагрузки точки ее оси получают перемещения. Определим вертикальные и горизонтальные составляющие этих перемещений.

Допустим, что известны все начальные параметры нити. Требуется определить вертикальные и горизонтальные перемещения точки D_0 при заданной дополнительной нагрузке. Обозначим новое положение точки D_0 через D.

Горизонтальное перемещение v точки D_0 разложим на две составляющие (рис. 9, *б*)

$$v = v_1 + v_2, \tag{2.58}$$

где v_1 — перемещение, равное горизонтальному перемещению точки D_0 из положения D_1 в положение D_2 при условии, что длина участка $\overset{\smile}{AD}_2 = \overset{\smile}{AD}_0$;

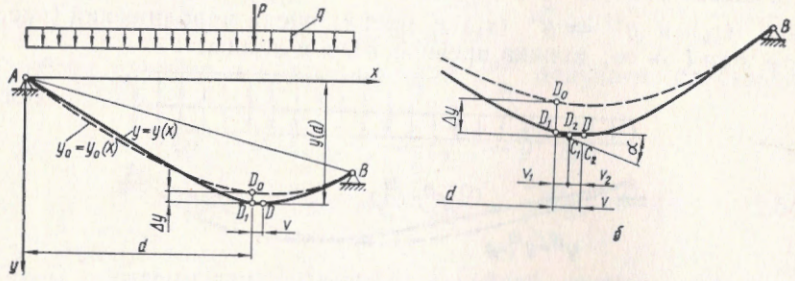


Рис. 9. К определению горизонтальных и вертикальных перемещений нити.

v_2 — горизонтальное перемещение точки D_0 из положения D_2 в положение D за счет удлинения участка нити $\overset{\smile}{AD}_0$.

При действии начальной нагрузки длина участка нити $\overset{\smile}{AD}_0$ может быть найдена из уравнения

$$L_{\overset{\smile}{AD}_0} = \int_0^d (1 + y_0'^2)^{1/2} dx. \tag{2.59}$$

Длину участка $\overset{\smile}{AD}_1$ определим по формуле

$$L_{\overset{\smile}{AD}_1} = \int_0^d (1 + y'^2)^{1/2} dx. \tag{2.60}$$

Учитывая, что горизонтальная проекция дуги $\overset{\smile}{D_1D_2}$ отличается на величину малого порядка от горизонтальной проекции отрезка $\overline{D_1C_1}$, равного длине этой дуги и являющегося частью касательной, проведенной из точки D_1, получим

$$v_1 = \frac{\int_0^d (1 + y_0'^2)^{1/2} dx - \int_0^d (1 + y'^2)^{1/2} dx}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \tag{2.61}$$

Приращение длины участка $\overset{\smile}{AD}_0$ за счет его растяжения отыскивается из выражения

$$D_2\overset{\smile}{D} = \int_0^a \varepsilon_0^{q+p} dx - \int_0^a \varepsilon_0^q dx. \tag{2.62}$$

Так же, как и при определении v_1, не будем учитывать разницу между горизонтальной проекцией дуги $D_2\overset{\smile}{D}$ и горизонтальной проекцией отрезка C_1C_2, длина которого равна дуге $D_2\overset{\smile}{D}$.

Тогда

$$v_2 = \frac{\int_0^d \varepsilon_0^{q+p} dx - \int_0^d \varepsilon_0^q dx}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \tag{2.63}$$

Окончательно запишем

$$v = \frac{\int_0^d [(1 + y_0'^2)^{1/2} - (1 + y'^2)^{1/2} + \varepsilon_0^{q+p} - \varepsilon_0^q] dx}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \tag{2.64}$$

Вертикальное (рис. 9, *а*) перемещение точки D_0 находится из уравнения

$$\Delta y = y(d + v) - y_0(d). \tag{2.65}$$

Обычно при практических расчетах принимают

$$y(d + v) \approx y(d). \tag{2.66}$$

Погрешность от этого допущения очень мала, так как горизонтальные перемещения для пологих нитей невелики по сравнению с расстоянием d. И если нет необходимости специально вычислять горизонтальные перемещения, то приближенное равенство (2.66) значительно упрощает расчет.

§ 2.6. Разгрузка. Остаточные деформации

Выведенные условия равновесия и уравнение неразрывности деформаций могут описывать напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости не только при активных, но и при пассивных деформациях, если нормальные напряжения σ и продольные деформации ε вычисляются в зависимости от истории нагружения.

При упругой разгрузке рассматриваемые уравнения удобно представить в более простом виде.

Как уже отмечалось, при уменьшении интенсивности напряжений для упруго-пластического материала зависимость $\sigma - \varepsilon$ описывается таким же линейным законом, что и при упругих деформациях.

Составим уравнение, связывающее изгибающий момент и кривизну нити при разгрузке.

Допустим, что все параметры нити при нагрузке $q + p$ (рис. 10) известны. Тогда изменение изгибающего момента в поперечном сечении нити при снятии нагрузки Δp будет равно

$$\Delta M_r = M - M_r, \tag{2.67}$$

а изменение кривизны примет вид

$$\Delta k_r = k - k_r, \tag{2.68}$$

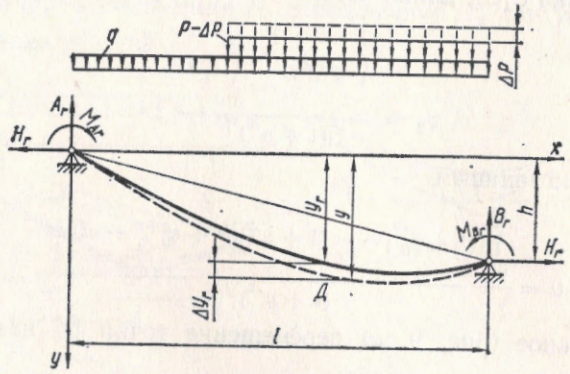


Рис. 10. К расчету нити при разгрузке.

где M_r и k_r — соответственно изгибающий момент и кривизна нити при разгрузке.

Зависимость между ΔM_r и Δk_r аналогична зависимости между изгибающим моментом и кривизной при упругом изгибе нити

$$EI(\Delta k_r) = \Delta M_r. \tag{2.69}$$

Откуда

$$EI(k - k_r) = M - M_r. \tag{2.70}$$

Изменение изгибающего момента в поперечном сечении нити может быть также найдено из условия равновесия (2.17) и условия равновесия, составленного с учетом разгрузки

$$M - M_r = M_Б + xH \operatorname{tg}\varphi - Hy - \\ - M_{Бr} - xH_r \operatorname{tg}\varphi + H_r y_r, \tag{2.71}$$

где y_r, $M_{Бr}$, H_r — соответственно ординаты кривой провисания, балочные изгибающие моменты и распор при разгрузке.

Приравняв зависимости (2.70) и (2.71), получим следующее равенство:

$$M_Б + xH \operatorname{tg}\varphi - Hy - EIk = \\ = M_{Бr} + x \operatorname{tg}\varphi H_r - H_r y_r - EIk_r. \tag{2.72}$$

Левая часть равенства (2.72) совершенно не зависит от изменения нагрузки Δp и представляет собой функцию напряженно-деформированного состояния нити при нагрузке $q + p$. Обозначая эту часть уравнения через $C(x)$, запишем

$$C(x) = M_{Бr} + xH_r \operatorname{tg}\varphi - H_r y_r - EIk_r. \tag{2.73}$$

Зависимость (2.73) следует рассматривать как уравнение сложного изгиба при упругой разгрузке нити.

Для раскрытия статической неопределимости относительно распора H_r используется следующее уравнение неразрывности деформаций

$$\int_l (1 + y'^2)^{1/2} dx - \int_l (1 + y_r'^2)^{1/2} dx = \int_l \frac{N - N_r}{EF} dx, \tag{2.74}$$

где N_r — нормальное усилие в поперечном сечении нити при разгрузке.

Относительные деформации в поперечном сечении нити при разгрузке вычисляются по формуле

$$\varepsilon_r = \varepsilon - \frac{N - N_r}{EF} - \frac{(M - M_r)z}{EI}, \tag{2.75}$$

а эпюра остаточных напряжений находится из выражения

$$\sigma_r = \sigma - \frac{N - N_r}{F} - \frac{(M - M_r)z}{I}. \tag{2.76}$$

Система уравнений (2.73) и (2.74) достаточна для определения напряженно-деформированного состояния нити при упругой разгрузке.

Решение этой системы уравнений осуществляется одним и тем же разработанным итерационным методом.

РАСЧЕТ НИТЕЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

§ 3.1. Конечно-разностная аппроксимация производных

При численном дифференцировании функция $y = y(x)$ заменяется интерполирующей функцией $Y = Y(x)$, а затем полагается

$$\begin{aligned} y'(x) &= Y'(x); \\ y''(x) &= Y''(x); \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y^{[n]}(x) &= Y^{[n]}(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Погрешность этих производных выражается в виде

$$\begin{aligned} R'(x) &= y'(x) - Y'(x); \\ R''(x) &= y''(x) - Y''(x); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R^{[n]}(x) &= y^{[n]}(x) - Y^{[n]}(x), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $R(x)$ — погрешность интерполирующей функции.

В книге в качестве интерполирующей функции используется полином Y_n степени n, значения которого в узловых точках (точки деления нити) совпадают с достаточной точностью со значениями функции $y = y(x)$.

По соображениям, связанным с программированием задачи на ЭВМ, производные функции (рис. 11) удобно аппроксимировать однотипными разностными выражениями симметричной структуры [10], например

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{2\Delta l}; \tag{3.3}$$

$$y''_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta l^2}, \tag{3.4}$$

или

$$y'_k = \frac{y_{k-2} - 8y_{k-1} + 8y_{k+1} - y_{k+2}}{12\Delta l}; \tag{3.5}$$

$$y''_k \frac{-y_{k-2} + 16y_{k-1} - 30y_k + 16y_{k+1} - y_{k+2}}{12\Delta l^2}, \tag{3.6}$$

где Δl — интервал деления пролета нити на равные части.

Выражения (3.3) и (3.4) менее точны, чем выражения (3.5) и (3.6), поэтому пользоваться ими рекомендуется только при действии распределенных нагрузок.

Для определения производных в краевых точках и вблизи них вводятся одна или две законтурные точки. Если применяются формулы (3.3) и (3.4), то достаточно одной законтурной точки.

При трехточечной аппроксимации производных ординаты законтурных точек определяются по следующим формулам:

при шарнирном закреплении концов нити

$$y_{(n+1)} = 2y_n - y_{n-1}; \tag{3.7}$$

при жестком закреплении концов нити

$$y_{(n+1)} = -3/2y_n + 3y_{n-1} - 1/2y_{n-2} + 3\Delta l y'_n. \tag{3.8}$$

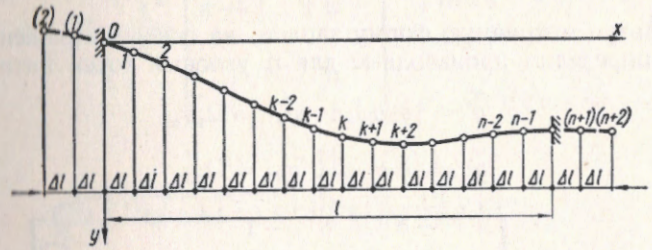


Рис. 11. К определению производных.

При пятиточечной аппроксимации производных вводятся две законтурные точки.

В случае шарнирного закрепления

$$y''_n = 0. \tag{3.9}$$

Исходя из этого условия, можно записать систему уравнений для определения ординат законтурных точек [10]

$$-y_{n-2} + 16y_{n-1} - 30y_n + 16y_{n+1} - y_{n+2} = \frac{12}{90}\Delta l^6 y^{[VI]}(\zeta_1); \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} -y_{n-3} + 4y_{(n-2)} + 6y_{n-1} - 20y_n + 11y_{n+1} = \\ = \Delta l^5 y^{[V]}(\xi_1) + \frac{\Delta l^6}{5} y^{[VI]}(\xi_2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Откуда, отбрасывая элементы, стоящие в правых частях уравнений, получим

$$y_{(n+1)} = \frac{1}{11}(y_{n-3} - 4y_{n-2} - 6y_{n-1} + 20y_n); \tag{3.12}$$

$$y_{(n+2)} = \frac{1}{11}(16y_{n-3} - 75y_{n-2} + 80y_{n-1} - 10y_n). \tag{3.13}$$

Для жесткого закрепления

$$y_n = \operatorname{tg}\alpha_n, \tag{3.14}$$

где α_n — заданная величина.

Условие (3.14) можно представить в виде двух соотношений [10]

$$-12\Delta l y'_n + y_{n-2} - 8y_{n-1} + 8y_{n+1} - y_{n+2} = \frac{12}{30}\Delta l^5 y^{[V]}(\xi_1); \tag{3.15}$$

$$-12\Delta l y'_n - y_{n-3} + 6y_{n-2} - 18y_{n-1} + 10y_n + 3y_{n+1} = \frac{12}{20}\Delta l^5 y^{[V]}(\xi_2). \quad (3.16)$$

Пренебрегая правыми частями этих равенств, найдем ординаты законтурных точек

$$y_{(n+1)} = \frac{1}{3}y_{n-3} - 2y_{n-2} + 6y_{n-1} - \frac{10}{3}y_n + 4\Delta l y'_n; \quad (3.17)$$

$$y_{(n+2)} = \frac{8}{3}y_{n-3} - 15y_{n-2} + 40y_{n-1} - \frac{80}{3}y_n + 20\Delta l y_n \quad (3.18)$$

Используя матричную форму записи, на основе выражений (3.5) и (3.6) определим производные для n узловых точек нити

$$\vec{y}' = \{y_0 y_1 \ \dots \ y'_n\} = \Omega_1 \vec{y}_n; \quad (3.19)$$

$$\vec{y}'' = \{y_0 y''_1 \ \dots \ y''_n\} = \Omega_2 \vec{y}_n, \quad (3.20)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{12\Delta l}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 8 & -1 & & \\ & 1 & -8 & 8 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & -8 & 8 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{12\Delta l^2}\begin{bmatrix} -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & & \\ & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\vec{y}_n = \{y_{(2)} y_{(1)} y_0 \ \dots \ y_{(n+1)} y_{(n+2)}\}. \quad (3.23)$$

Вектор кривизны нити находится из уравнения

$$\vec{k} = \{k_0 k_1 \ \dots \ k_n\} = \Lambda_1^3 \Omega_2 \vec{y}_n, \quad (3.24)$$

где

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} (1+y_0'^2)^{-1/2} & & & \\ & (1+y_1'^2)^{-1/2} & & \\ & & \dots & \\ & & & (1+y_n'^2)^{-1/2} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

§ 3.2. Определение усилий

Допустим, что на нить конечной жесткости (рис. 12) действует как распределенная, так и сосредоточенная вертикальная нагрузка.

Усилия, возникающие в нити, будем определять для узловых точек. Полагая, что внешняя нагрузка может быть перераспределена на соответствующие узлы, запишем следующее векторное равенство:

$$\vec{M}_Б = \begin{bmatrix} M_{Б_0} \\ M_{Б_1} \\ \dots \\ M_{Б_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{01} & m_{02} & \dots & m_{0n} \\ m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \\ P_n \end{bmatrix} + \frac{1}{n+1}\begin{bmatrix} n+1 & 0 \\ n & 1 \\ n-1 & 2 \\ \dots & \dots \\ 1 & n \\ 0 & n+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

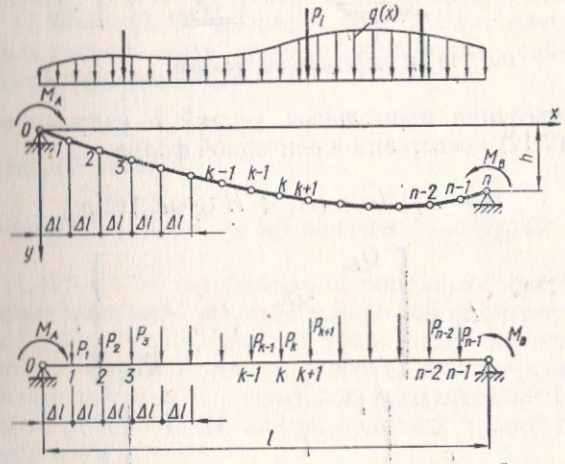


Рис. 12. Математическая модель нити конечной жесткости.

Краткая запись этого уравнения может быть представлена в виде

$$\vec{M}_Б = \Lambda_m \vec{P} + \Lambda_{AB}\vec{M}_{AB}, \quad (3.27)$$

где Λ_m — матрица влияния моментов для балки [74];

$\vec{P}$ — вектор внешних сил;

Λ_{AB} — матрица влияния опорных моментов для балки;

$\vec{M}_{AB}$ — вектор опорных моментов.

Вектор поперечных сил $\vec{Q}_Б$ найдем из выражения

$$\vec{Q}_Б = \Omega_3(\Lambda_m \vec{P} + \Lambda_{AB}\vec{M}_{AB}), \quad (3.28)$$

где

$$\vec{Q}_Б = \{Q_{Б_0} Q_{Б_1} \ldots Q_{Б_n}\}; \tag{3.29}$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2\Delta l} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

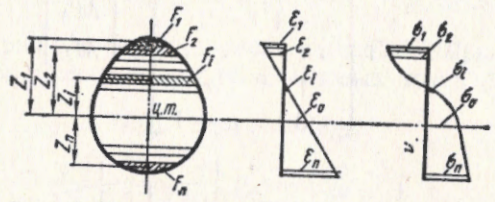


Рис. 13. К определению усилий.

Для определения нормальных усилий в узловых точках нити уравнение (2.12) представим в векторной форме:

$$\vec{N} = \Lambda_1 [H\vec{e} + (\Lambda_Q + H \operatorname{tg} \varphi E_1) \Omega_1 \vec{y}_n], \tag{3.31}$$

где

$$\Lambda_Q = \begin{bmatrix} Q_{Б_0} & & & \\ & Q_{Б_1} & & \\ & & \ldots & \\ & & & Q_{Б_n} \end{bmatrix}; \tag{3.32}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ldots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}; \tag{3.33}$$

$$\vec{e} = \{1\ 1 \ldots 1\}. \tag{3.34}$$

Вектор поперечных сил для узловых точек нити находится из уравнения (2.22):

$$\vec{Q} = \Lambda_1 (\vec{Q}_Б + H \operatorname{tg} \varphi \vec{e} - H\Omega_1 \vec{y}_n), \tag{3.35}$$

где

$$\vec{Q} = \{Q_0 Q_1 \ldots Q_n\}. \tag{3.36}$$

Внутренние силовые факторы M_k и N_k, возникающие в k-ом сечении нити, определяются следующим образом:

сечение нити разбивается по высоте (рис. 13) на 30—40 площадок (площадь каждой из них — F_i);

находится положение центров тяжести этих площадок (т. е. устанавливаются координаты z_i относительно центра тяжести сечения);

вычисляются относительные деформации ε_1 для волокон, имеющих координаты z_1

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{0k} + k_k z_i; \tag{3.37}$$

полагается

$$N_k = \sum_{i=1}^{n} F_i \sigma_i; \tag{3.38}$$

$$M_k = \sum_{i=1}^{n} F_i \sigma_i z_i. \tag{3.39}$$

Здесь во всех случаях индекс k обозначает, что соответствующие параметры относятся к k-ому поперечному сечению нити.

Формулы (3.38) и (3.39) выведены для общего случая зависимости σ — ε и сечения нити произвольной формы, симметричного относительно вертикальной оси.

§ 3.3. Алгоритмы расчета

Нить, работающая с изгибом от начальной нагрузки

Уравнения (1.12)—(1.21) приближенно описывают очертание кривой провисания нити при действии начальной равномерно распределенной нагрузки. Используем эти уравнения в качестве первого приближения для определения напряженно-деформированного состояния нити при действии произвольной дополнительной нагрузки.

Из уравнений (2.17) и (3.39) найдем ординату кривой провисания для k-ой точки нити

$$y_k = \frac{1}{H} (M_{Б_k} + x_k H \operatorname{tg} \varphi - M_k). \tag{3.40}$$

Откуда вектор $\vec{y}$ для узловых точек нити выразится в виде

$$\vec{y} = \frac{1}{H} (\vec{M}_Б + H \operatorname{tg} \varphi \vec{x} - \vec{M}) \tag{3.41}$$

или, учитывая (3.27),

$$\vec{y} = \frac{1}{H} (\Lambda_m \vec{P} + \Lambda_{AB} \vec{M}_{AB} + H \operatorname{tg} \varphi \vec{x} - \vec{M}), \tag{3.42}$$

где

$$\vec{x} = \{x_0 x_1 \ldots x_n\}; \tag{3.43}$$

$$\vec{M} = \{M_0 M_1 \ldots M_n\}. \tag{3.44}$$

Если вектор M вычислить, исходя из i-го приближения, то из уравнения (3.42) получим

$$\vec{f}(\vec{y}^{(i)}) = \frac{1}{H}[\Lambda_m \vec{P} + \Lambda_{AB}\vec{M}_{AB} + H \operatorname{tg}\varphi\vec{x} - \vec{M}(\vec{y}^{(i)})], \quad (3.45$$

где $\vec{f}(\vec{y}^{(i)})$ и $\vec{M}(\vec{y}^{(i)})$ — векторы, определяемые по параметрам i-го приближения.

В предлагаемом методе расчета все вычисления разбиваются на два основных итерационных процесса. Один из них служит для определения ординат кривой провисания при фиксированном значении распора. При этом на i-ом шаге последовательных приближений выполняются следующие операции:

по приближенному вектору кривой провисания $\vec{y}^{(i)} = \vec{y}^{(i)}(\vec{x}_k)$, найденному на предыдущем $(i-1)$-ом шаге, из уравнений (3.24) и (3.31) определяются векторы $\vec{k}^{(i)}$ и $\vec{N}^{(i)}$;

находится эпюра относительных удлинений ε_0, для чего ε_0 даются соответствующие приращения до тех пор, пока не станет соблюдаться (с заданной величиной погрешности) условие

$$|N_k^{(i)} - U_k^{(i)}| \leqslant \psi_1, \quad (3.46$$

где

$$U_k^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sigma_i^{(i)}; \quad (3.47$$

ψ_1 — допустимая величина погрешности;

из выражения (3.45) определяется вектор $\vec{f}(\vec{y}^{(i)})$;

отыскивается последующее $(i+1)$-ое приближение в виде

$$\vec{y}^{(i+1)} = \vec{y}^{(i)} - \beta[\vec{y}^{(i)} - \vec{f}(\vec{y}^{(i)})], \quad (3.48$$

где $0 < \beta \leqslant 0{,}5$.

Процесс итерации оканчивается, если будет выполняться условие

$$\left|\frac{y_k^{(i)} - f_k^{(i)}}{y_k^{(i)}}\right| \leqslant \psi_2, \quad (3.49$$

где ψ_2 — заданная точность вычислений.

Одновременно на каждом шаге приближений вследствие монотонности итерационных процессов реализуются и граничные условия. Осуществляется это таким образом:

при опорных моментах, полученных на $(i-1)$-ом шаге, т. е. при векторе $\vec{M}_{AB}^{(i-1)}$ определяются ординаты кривой провисания для i-го приближения;

по найденным ординатам и зависимостям (3.12) и (3.13) или (3.17) и (3.18) отыскиваются ординаты законтурных точек;

полученные данные используются для вычисления вектора $\vec{M}_A$ i-го приближения;

производится переход к $(i+1)$-му приближению.

Уравнение (3.48) позволяет изменять геометрию нити таким образом, что происходит постепенное изменение ее кривизны по всей длине. С ростом числа приближений расстояние между векторами $\vec{y}^{(i)}$ и $\vec{f}(\vec{y}^{(i)})$ уменьшается и становится величиной малого порядка.

Рассмотрим раскрытие статической неопределимости относительно распора H.

Допустим, что при действии начальной нагрузки известно некоторое приближенное значение распора $H_0^{(1)}$. Используя метод последовательных приближений, найдем соответствующую кривую провисания для этого фиксированного значения распора. Если окажется, что

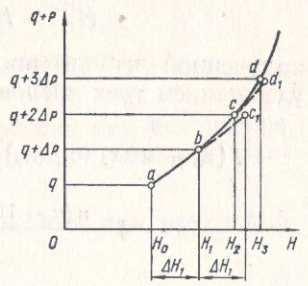


Рис. 14. К раскрытию статической неопределимости относительно распора.

$$\left|\frac{f_0 - f}{f_0}\right| > \psi_3, \quad (3.50$$

где ψ_3 — принятая точность вычислений;

f — ордината провисания нити в середине пролета, то вносится поправка в значение $H_0^{(1)}$, т. е. определяется $H_0^{(2)}$. Уточнение распора производится до тех пор, пока не станет соблюдаться условие (3.50).

Отметим на графике зависимости распора от нагрузки (рис.14) точку $a(q, H_0)$.

Прикладывая дополнительную нагрузку небольшими ступенями Δp, отыщем для каждой из этих ступеней соответствующие значения $H_j (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Точку $b(q + \Delta p, H_1)$ определим, давая ряд последовательных приращений распору H_0 и учитывая равенство (2.30), которое представим в виде

$$\frac{\Delta l}{3}\sum_{k=0}^{n} e_k (1 + y_k'^2)^{1/2} - \frac{\Delta l}{3}\sum_{k=0}^{n} e_k (1 + y_{0k}'^2)^{1/2} = \frac{\Delta l}{3}\sum_{k=0}^{n} e_k \varepsilon_{0_k}^{q+p} - \frac{\Delta l}{3}\sum_{k=0}^{n} e_k \varepsilon_{0_k}^{q}, \quad (3.51)$$

где $l_k = 1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 2, 4, 1$.

Для нахождения точки $c(q + 2\Delta p, H_2)$ в первом приближении распор $H_2^{(1)}$ полагаем равным

$$H_2^{(1)} + \Delta H_1, \quad (3.52)$$

что соответствует точке c_1. Здесь $\Delta H_1 = H_1 - H_0$ —приращение распора от дополнительной нагрузки Δp.

Внося определенные коррективы, а также исходя из условия (3.51), получим следующее приближение и т. д. Процесс оканчивается, когда равенство (3.51) выполняется с требуемой точностью.

В дальнейшем все начальные приближения для распора H_j на j-ом этапе расчета вычисляются по формуле

$$H_j^{(1)} = H_{j-3} - 3H_{j-2} + 3H_{j-1}, \tag{3.53}$$

полученной из интерполяционной формулы Грегори-Ньютона с удержанием трех членов ряда [91]:

$$f(x_0 + u\Delta x) = f(x_0) + \frac{u}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0), \tag{3.54}$$

где $\Delta x = x_1 - x_0$; $u = \dfrac{x - x_0}{\Delta x}$;

$f(x_0)$ — начальное значение функции в точке x_0;
$\Delta^n f(x_0)$ — разности n-го порядка, выраженные через значения функции.

Формула (3.53) дает значения распора $H_j^{(1)}$, которые обычно уточняются за 2—3 раза.

Таким образом, раскрытие статической неопределимости относительно распора осуществляется способом прогноза и коррекции. Как видно, отмеченный способ является эффективным, когда известны хотя бы две точки зависимости распора от нагрузки. Отыскание же этих двух точек не вызывает существенных трудностей.

На основе приведенного алгоритма расчета можно уточнить распределение усилий и деформаций в местах приложения сосредоточенных нагрузок, если последние значительно удалены от узловых точек нити. В этом случае возможны два пути. Первый путь — увеличение числа узловых точек — оправдан при большом количестве сосредоточенных нагрузок. При небольшом их числе целесообразно выделять небольшой участок нити, где расположена сосредоточенная нагрузка, который затем рассматривается как нить конечной жесткости. Учитывая, что действие сосредоточенных нагрузок связано с локальными деформациями и практически не влияет на напряженно-деформированное состояние сечений, значительно удаленных от точек приложения этих нагрузок, для выделенного участка можно считать известными распор H и концевые моменты. При необходимости принимаемые параметры могут быть скорректированы в дополнительном расчете с учетом уже полученных деформаций и усилий в зоне сосредоточенной нагрузки.

Горизонтальное перемещение k-ой узловой точки нити определяется из уравнения (2.64)

$$v_k \frac{\frac{\Delta l}{3}\sum_{k=0}^{k} l_k\left[(1+y_{0_k}'^2)^{1/2} - (1+y_k'^2)^{1/2} + \varepsilon_{0_k}^{q+p} - \varepsilon_{0_k}^{q}\right]}{(1+y'^2)^{1/2}}. \tag{3.55}$$

Вектор вертикальных перемещений имеет вид

$$\Delta\vec{y} = \vec{y} - \vec{y}_0. \tag{3.56}$$

Нить, работающая без изгиба от начальной нагрузки

При расчете нитей конечной жесткости, работающих без изгиба от начальной нагрузки, имеется ряд особенностей, которые рассматриваются ниже.

Для таких нитей вектор $\vec{y}_0$ кривой провисания при начальной нагрузке выражается в виде

$$\vec{y}_0 = \frac{1}{H_0}\Lambda_m\vec{P}. \tag{3.57}$$

Распор H_0 находят из уравнения

$$H_0 = \frac{M_{Бc}}{f_0}, \tag{3.58}$$

где $M_{Бc}$ — момент в середине пролета простой балки.

Так как при начальной нагрузке изгибные напряжения в поперечных сечениях отсутствуют, то изгибающие моменты в нити равны нулю.

При действии дополнительной нагрузки относительные деформации ε_i для соответствующих волокон k-го сечения нити определяются по формуле

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{0_k} + \Delta k_k z_i, \tag{3.59}$$

где

$$\Delta k_k = k_k - k_{0_k}. \tag{3.60}$$

Здесь k_{0_k} — начальная кривизна в k-ом сечении нити.

За исключением отмеченных особенностей, алгоритм расчета нитей, работающих без изгиба от начальной нагрузки, строится так же, как и для нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки.

Разгрузка

В данном разделе затрагиваются вопросы упругой разгрузки, о которой шла речь в § 2.6.

Исходя из уравнения (2.73), найдем вектор ординат кривой провисания нити при разгрузке

$$\vec{y}_r = \frac{1}{H}(\vec{M}_{Б_r} + H_r \operatorname{tg}\varphi\vec{x} - EI\vec{k}_r - \vec{c}). \tag{3.61}$$

Или, учитывая (3.27) и (3.24), запишем

$$\vec{y}_r = \frac{1}{H_r}(\Lambda_m \vec{P}_r + \Lambda_{AB}\vec{M}_{AB_r} + H_r \operatorname{tg}\varphi \vec{x} - $$

$$- EI\Lambda_1^3\Omega_2\vec{y}_{n_r} - \vec{c}), \qquad (3.62)$$

где $\vec{P}_r$, $\vec{M}_{AB_r}$, $\vec{y}_{n_r}$ — соответственно векторы внешних сил, опорных моментов и ординат кривой провисания, включающие ординаты законтурных точек при разгрузке;

$\vec{c}$ — вектор констант c_k, определяемых из следующего выражения при $x_k = x_0, x_1, \ldots, x_n$.

$$c_k = M_{Б_k} + x_k \operatorname{tg}\varphi H - Hy_k - EIk_k, \qquad (3.63)$$

Здесь следует иметь в виду, что матрица Λ_1 формируется из элементов вектора $\vec{y}_r$.

Допустим, что в уравнение (3.62) подставлено значение вектора $\vec{y}_{n_r}^{(i)}$. Тогда получим

$$\vec{f}_r(\vec{y}_r^{(i)}) = \frac{1}{H_r}(\Lambda_m \vec{P}_r + \Lambda_{AB}\vec{M}_{AB_r} + H_r \operatorname{tg}\varphi \vec{x} - $$

$$- EI\Lambda_1^3\Omega_2\vec{y}_{n_r}^{(i)} - \vec{c}). \qquad (3.64)$$

Для решения рассматриваемой задачи используется изложенный выше итерационный метод.

Организация процесса вычислений на i-ом шаге последовательных приближений при фиксированном значении распора H_r сводится к следующей последовательности операций:

по i-му вектору ординат кривой провисания, найденному из предыдущего $(i-1)$-го шага, из уравнений (3.24) и (3.31) определяются векторы $\vec{K}_r^{(i)}$ и $\vec{N}_r^{(i)}$;

из выражения (3.64) находится вектор $\vec{f}_r(\vec{y}_r^{(i)})$;

отыскивается последующее $(i+1)$-ое приближение в виде

$$\vec{y}_r^{(i+1)} = \vec{y}_r^{(i)} - \beta[\vec{y}_r^{(i)} + \vec{f}_r(\vec{y}_r^{(i)})], \qquad (3.65)$$

где $0 < \beta \leqslant 0{,}5$.

Процесс итерации продолжается до тех пор, пока не будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{y_{r_k}^{(i)} - f_{r_k}^{(i)}}{y_{r_k}^{(i)}} \right| \leqslant \psi_2. \qquad (3.66)$$

Раскрытие статической неопределимости относительно распора $H_{ri}^{(i)}$ осуществляется способом прогноза и коррекции. При этом

используется условие (2.74), которое при численном интегрировании записывается в виде

$$\frac{\Delta l}{3}\sum_{k=0}^{n} e_k (1 + y_k'^2)^{1/2} - \frac{\Delta l}{3}\sum_{k=0}^{n} e_k (1 + y_{r_k}'^2)^{1/2} =$$

$$= \frac{\Delta l}{3}\sum_{k=0}^{n} e_k (N_k - N_{r_k}). \qquad (3.67)$$

Здесь индекс k означает, что соответствующие параметры вычисляются для k-го сечения нити.

Приведенный алгоритм расчета в одинаковой мере относится как к нитям, работающим с изгибом, так и без изгиба от начальной нагрузки.

§ 3.4. Программы расчета

Широкое применение ЭВМ вызвало изменение подхода к методам расчета. Объем вычислений уже перестал быть главным критерием для их оценки. На первый план выдвигаются вопросы упрощения алгоритма и соответствующей ему программы, уменьшение объема информации, экономии памяти ЭВМ и др. Поэтому теряют смысл некоторые приемы строительной механики, усложняющие алгоритм с единственной целью — уменьшить количество вычислений.

Указанные выше вопросы имеют чрезвычайно важное значение при решении задач с учетом геометрической и физической нелинейности конструкции, так как при реализации этих задач на ЭВМ приходится оперировать большими массивами чисел.

Если учесть, что на разработку и отладку программ приходятся большие затраты труда программиста и машинного времени, то становится еще более ясной актуальность рассматриваемого вопроса.

Процесс составления программ в кодах ЭВМ является сложным и трудоемким. В настоящее время разработано ряд алгоритмических языков, очень близких к обычному математическому, которые дают возможность гораздо быстрее программировать сложные задачи.

При программировании данной задачи применялся наиболее простой из этих языков — язык «ап» (автоматическое программирование) ЭВМ «Наири». Если информацию вводить в режиме «ап», то ЭВМ автоматически составляет рабочую программу во внутреннем коде машины и записывает ее в ОЗУ (оперативное запоминающее устройство).

При разработке программ расчета для исследования работы нитей конечной жесткости использовался ряд приемов экономии памяти машины, а именно:

алгоритм расчета выражался через минимальное количество команд;

производилось рациональное размещение числового материала в оперативной памяти машины путем многократной засылки в одни и те же ячейки разных чисел;

осуществлялся ввод краткой информации о структуре матриц.

Как известно, матричный язык является идеальным для ЭВМ, но это вовсе не означает, что следует ограничиваться существующими матричными операциями [23]. Нередко более целесообразно производить вычисления, имея только информацию о строении матриц.

Циклические программы, кроме экономии памяти ЭВМ, позволяют получить необходимую точность расчета, обладают свойством самоисправления ошибок (что делает их менее чувствительными к сбоям машины), имеют простую логическую схему.

Укрупненная блок-схема программы расчета для нитей конечной жесткости, работающих с изгибом от начальной нагрузки, показана на стр. 45. Каждый блок этой программы состоит из одной или нескольких команд и осуществляет какую-либо логически законченную функцию, например, счет по формуле, проверку логического условия и т. д.

При расчете в качестве исходных данных принимаются следующие параметры: $q + \eta_p \Delta p$, $H_j^{(0)}$, $\varepsilon_{0_k}^{(0)}$, $y_k^{(0)}$, F_i, z_i, $\sigma_т$, $\sigma_в$, $\varepsilon_{макс}$, E, Δl, l, $M_{б_k}^{(0)}$. Здесь η_p — номер ступени нагрузки; $\sigma_т$, $\sigma_в$ — пределы текучести и прочности материала; $\varepsilon_{макс}$ — допустимая величина относительных деформаций. Верхние индексы обозначают, что соответствующие данные используются только в качестве начального приближения. Впоследующем они заменяются более точными значениями, которые вычисляются ЭВМ.

При исследовании работы нитей конечной жесткости за пределом упругости нагрузка прикладывалась небольшими ступенями пропорционально одному параметру. Это позволило не вводить матрицу Λ_m в память машины. Что касается остальных матриц, то гораздо удобнее и проще во всех случаях при программировании ограничиваться только информацией об их структуре, от чего эффективность программ существенно возрастает.

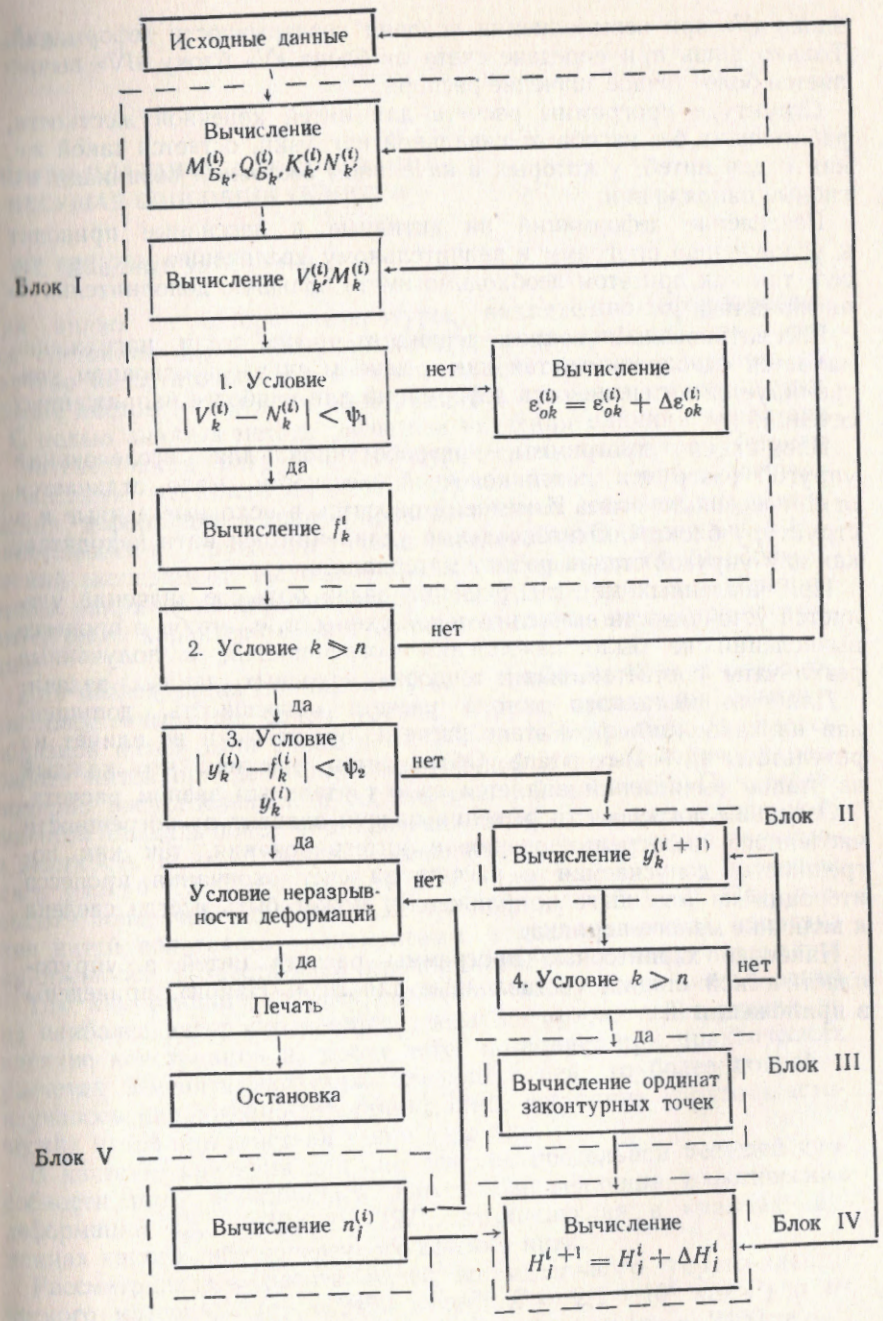
Из приведенной блок-схемы видно, что программа расчета включает несколько сложных итерационных циклов.

Вычисление силовых факторов и относительных деформаций оси нити для узловых точек производится в блоке «I», который оканчивается условием $k \geqslant n$ («k» принимает последовательно значения 0, 1, 2, ..., n).

В блоке «II» при фиксированном значении распора $H_j^{(i)}$ вычисляются ординаты кривой провисания для последующего приближения.

Для реализации граничных условий в блоке «III» определяются ординаты законтурных точек.

Если счет передается от блока III блоку IV, то распор $H_j^{(i)}$ не получает приращения. Корректировка распора осуществляется в



блоке «V» при невыполнении условия неразрывности деформаций. Только лишь при передаче счета от блока «V» блоку «IV» вычисляется более точное значение распора.

Структура программы расчета для нитей конечной жесткости, работающих без изгиба от начальной нагрузки, остается такой же, как и для нитей, у которых в начальном состоянии возникают изгибные напряжения.

Разделение деформаций на активные и пассивные приводит к усложнению программ и значительному увеличению массива чисел, так как при этом необходимо иметь большую дополнительную информацию.

Рассматриваемый вопрос решается проще, если нагружение является однократным, так как в данном случае в основном контролируется интенсивность деформаций для наиболее напряженных сечений.

Блок-схема программы, разработанной для исследования упругой разгрузки нитей конечной жесткости, мало отличается от приведенных выше. Изменения вносятся в исходные данные и в структуру блока I. Относительные удлинения оси нити находятся, как для упругой стадии работы материала.

При численных методах решения задач большое значение уделяется устойчивости вычислительной схемы, т. е., чтобы в процессе вычислений не было накопления погрешностей, а полученные результаты соответствовали точности исходных данных задачи.

Для разработанного метода расчета погрешность, допущенная на каком-либо j-ом этапе расчета, практически не влияет на результаты $(j + 1)$-го этапа. Объясняется это тем, что каждый из этапов вычислений является самостоятельным звеном расчета.

Основная погрешность решения задачи зависит от погрешности численного дифференцирования и интегрирования, так как погрешность, допускаемая в расчете за счет окончания процесса итерации на i-ом шаге приближений, может быть всегда сведена к величине малого порядка.

Наиболее характерные программы расчета нитей в упруго-пластической стадии, составленные для ЭВМ «Наири», приведены в приложении 3.

ГЛАВА 4

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ НИТЕЙ

§ 4.1. Вводные замечания

Как видно из обзора литературы, напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости за пределом упругости изучено недостаточно. Это в значительной степени сказалось на объеме внедрения висячих конструкций в практику строительства.

С целью анализа метода расчета и изучения влияния характера и интенсивности нагрузки, геометрических параметров (стрелы провисания, жесткости на изгиб) и граничных условий на перемещения, деформации и запасы прочности нитей конечной жесткости, работающих в упруго-пластической стадии, был проведен математический эксперимент. Исходные данные выбирались таким образом, чтобы напряженно-деформированное состояние опытных образцов нитей было характерным для широкого класса висячих конструкций.

Для исследования принимались нити пролетом 48 *м*, с опорами, расположенными на одном уровне. Стрелы провисания опытных образцов нитей были равны 1/10, 1/25 и 1/50 пролета. Изучалась работа нитей при действии симметричной и несимметричной равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузок. При исследовании площадь поперечного сечения нитей оставалась постоянной, а жесткость на изгиб за счет изменения размеров сечения принималась равной EJ $0{,}5EJ$, $0{,}25EJ$ (EJ — жесткость нити, имеющей высоту поперечного сечения 0,12 *м* и ширину — 0,06 *м*). Нагружение нитей полагалось однократным, а дополнительная нагрузка принималась возрастающей пропорционально одному параметру.

Так как равномерно распределенная нагрузка является одной из наиболее распространенных среди нагрузок, действующих на висячие конструкции и, кроме того, позволяет при практических расчетах заменять нагрузки, близкие к ней, то более подробно изучалось напряженно-деформированное состояние упруго-пластических нитей при действии такой нагрузки.

В качестве критерия для определения предельной несущей способности нити принималась допустимая величина пластических деформаций $\varepsilon_{макс} = 10\sigma_т / E$ [97], возникающая в крайних волокнах какого-либо поперечного сечения нити.

Рассматривалась работа нитей из идеального упруго-пластического материала ($\sigma_T = 2400$ *кг/см²*; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см²*) и из материала с площадкой текучести и упрочнением ($\sigma_T = 2400$ *кг/см²*; $\sigma_B = 4500$ *кг/см²*; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см²*). Это позволило оценить

допустимость аппроксимации реальной зависимости между на пряжениями и деформациями в виде диаграммы Прандтля.

В связи с тем, что разница в характере работы за предело упругости двух групп нитей (нитей, работающих соответственно изгибом и без изгиба от начальной нагрузки) вообще не исследова лась, указанному вопросу в книге уделено большое внимание

При расчете нить делилась по длине на 30—40 участков, а по перечные сечения по высоте — на 30 площадок. Использовалась трехточечная и пятиточечная аппроксимация производных крив провисания. Погрешность аппроксимации производных устанав ливалась для конкретных примеров путем сравнения аналитиче ских и численных результатов. Обширный математический эк перимент, который проводился на основе программ, составленны по описанному алгоритму расчета для ЭВМ «Наири», дал возмож ность исследовать сходимость итерационных процессов в зависи мости от величины и характера нагрузки, граничных условий геометрических параметров нитей.

Для более четкого представления о работе нитей конечной же сткости за пределом упругости часть результатов численных ис следований представлена ниже в виде графиков и таблиц.

§ 4.2. Нити из идеального упруго-пластического материала при действии симметричной равномерно распределенной нагрузки

Рассмотрим сначала напряженно-деформированное состояние ни тей, работающих с изгибом от собственного веса.

По формуле (1.12) вычислим значения параметра Φ для начальн ного состояния нитей. По величине этого параметра можно су дить, в какой мере нить конечной жесткости отличается от балки или гибкой нити (для балки параметр Φ равен 1, для гибкой нити — 0).

Нить с жесткостью EI и стрелой провисания $1/10l$ имеет параметр $\Phi = 0{,}2$. Следовательно, она воспринимает часть начальной нагрузки за счет изгиба и из всех рассматриваемых нитей наиболее близко примыкает к балкам. Для нити с жесткостью $0{,}25EI$ и стрелой провисания $1/50l$ в начальном состоянии почти вся нагрузка воспринимается за счет цепных усилий. В данном случае форма равновесия нити конечной жесткости подобна кривой провисания гибкой нити. Однако в поперечных сечениях нити конечной жесткости возникают весьма существенные напряжения от изгиба (в середине пролета напряжения от изгиба составляют около 30% от цепных напряжений).

Рассмотрим вначале перемещения нитей в упругой и упруго-пластической стадиях.

Прогибы (рис. 15, 16, 17) нитей конечной жесткости, работающих с изгибом от собственного веса могут быть не только поло-

жительны, но и отрицательны. Отрицательные прогибы возникают не во всех нитях. При малых стрелах провисания ($f_0/l < 1/25$) такие прогибы могут быть лишь в нитях со значительной жесткостью на изгиб.

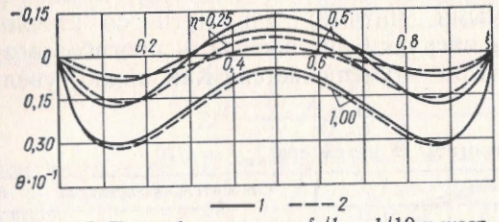


Рис. 15. Прогибы нити при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI:

θ — отношение прогибов нити к начальной стреле провисания; ξ — относительная абсцисса; η — отношение интенсивности дополнительной нагрузки p к ее предельному значению $P_{макс}$, при котором исчерпывается несущая способность нити; *1* — нити с шарнирным закреплением концов; *2* — нити с жестким закреплением концов.

Стрела провисания оказывает более существенное влияние на величину и характер прогибов нити, чем ее жесткость на изгиб. Это видно из следующего. Нить с жесткостью EI и стрелой прови-

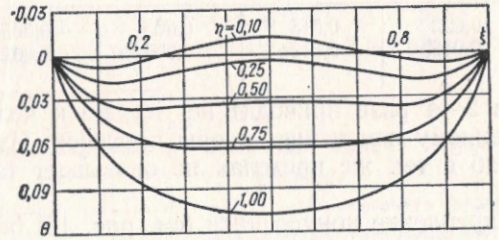


Рис. 16. Прогибы нити при $f_0/l = 1/25$ и жесткости EI. Условные обозначения те же, что и на рис. 15.

сания $1/10l$ имеет максимальные прогибы (см. рис. 15) вблизи опор. В середине же пролета даже в предельном состоянии ($\eta = 1$), когда пластические деформации охватывают почти всю нить, про-

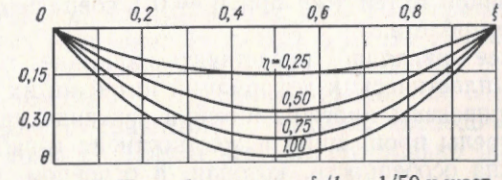


Рис. 17. Прогибы нити при $f_0/l = 1/50$ и жесткости EI. Условные обозначения те же, что и на рис. 15.

гибы нити незначительны. Совершенно по-иному деформируются нити со стрелой провисания $1/25l$ и $1/50l$. Прогибы их достигают максимальной величины уже в середине пролета. Однако для нити со стрелой провисания $1/25l$ это наступает при больших нагрузках ($\eta = 0{,}50$ и выше). Имеется еще одна существенная разница между рассматриваемыми нитями: для нити со стрелой провисания $1/25l$ с ростом нагрузки интенсивность прогибов возрастает, а для нити с $f_0/l = 1/50$ — уменьшается. Как видно, увеличение стрелы

Таблица 1

Относительные прогибы Θ нитей при $f_0/l = 1/10$

Жесткость нити на изгиб	Относительная абсцисса				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\eta = 0{,}05$					
EI	0,0083	0,0069	—0,00085	—0,00625	—0,0083
0,25 EI	0,0010	0,0035	—0,00125	—0,00415	—0,00625
$\eta = 0{,}25$					
EI	0,018	0,014	0	—0,01	—0,0125
0,25 EI	0,0123	0,0088	0,0075	0	—0,001
$\eta = 0{,}50$					
EI	0,022	0,018	0,005	—0,0054	—0,0083
0,25 EI	0,0135	0,0104	0,0054	0,0021	0,0062

провисания в 2—4 раза приводит не только к количественному, но и качественному изменению эпюры прогибов. Изменение жесткости на изгиб в тех же пределах не оказывает такого влияния (табл. 1).

Жесткое закрепление концов нити (см. рис. 15) оказывает влияние на ее прогибы лишь в начальный период нагружения (при небольшой интенсивности дополнительной нагрузки) и то лишь когда у нити значительная жесткость на изгиб и большая стрела провисания ($f_0/l > 1/15$). С ростом дополнительной нагрузки кривая провисания нити при жестком закреплении концов приближается к кривой провисания нити с шарнирным закреплением концов. При $f_0/l = 1/25$ и $1/50$ прогибы при шарнирном и жестком закреплении концов нитей уже при $\eta = 0{,}1$ совпадают практически по всей длине пролета.

Чтобы более наглядно представить влияние геометрических параметров и пластических деформаций нитей на их перемещения, на рис. 18 приведены прогибы нитей в середине пролета в зависимости от стрелы провисания и жесткости на изгиб. Из графика видна еще одна особенность, которая, в основном, связана с характером пластических деформаций, а именно: нити с жесткостью EI, $0{,}5EI$ более деформативны, чем нити с жесткостью $0{,}25EI$.

Горизонтальные перемещения при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки невелики и для свободно-провисающих нитей не представляют существенного интереса.

Для более наглядного представления о работе нитей конечной жесткости в упруго-пластической стадии рассмотрены характер

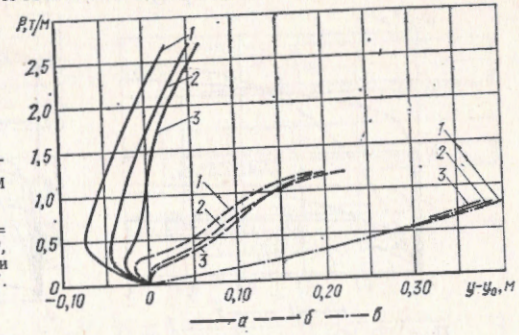


Рис. 18. Прогибы нитей в середине пролета с шарнирным закреплением концов:
а — при $f_0/l = 1/10$; *б* — при $f_0/l = 1/25$; *в* — при $f_0/l = 1/50$; *1, 2, 3* — прогибы нитей при жесткости соответственно EI, $0{,}5\,EI$, $0{,}25\,EI$.

изменения силовых факторов и кривизны нитей при действии дополнительной нагрузки.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной нагрузки представлена на рис. 19. Нелинейный характер приведенной зависимости проявляется сильнее в нитях с малыми стрелами провисания.

Изменение жесткости на изгиб от EI до $0{,}25EI$ сказывается на величине распора при действии начальной нагрузки (при начальной

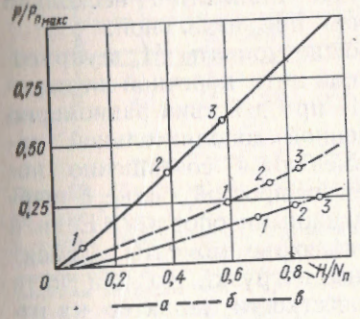


Рис. 19. График зависимости $H/N_n = f\,(p/p_{n_{макс}})$:
$p_{n_{макс}}$ — максимальная предельная дополнительная нагрузка; N_n — предельное значение нормального усилия; *а* — нить со стрелой провисания $1/10\,l$ и жесткостью EI; *б*, *в* — соответственно нити, имеющие стрелы провисания $1/25\,l$ и $1/50\,l$ и жесткости EI; *1, 2, 3* — моменты появления пластических деформаций соответственно для нитей с жесткостью EI, $0{,}5\,EI$, $0{,}25\,EI$.

нагрузке максимальная разница в распоре между нитями с одной и той же стрелой провисания доходит до 17%) и при малом значении дополнительной нагрузки ($\eta < 0{,}2$). При средних и больших дополнительных нагрузках ($\eta > 0{,}3$) влияние жесткости на изгиб на величине распора практически не сказывается.

В нитях с жестким закреплением концов на опорах величина распора меньше в сравнении с нитями, имеющими шарнирное закрепление концов. Однако это заметно только при малых нагрузках.

Характер изменения кривизны нити по длине пролета в зависимости от стрелы провисания показан на рис. 20 (на графике

приведены нити с жесткостью EI). Наиболее существенно кривизна нитей изменяется в четвертях пролета. Это характерно для всех рассмотренных случаев.

В средней части пролета разница между кривизнами нитей при действии начальной и предельной нагрузок значительно зависит

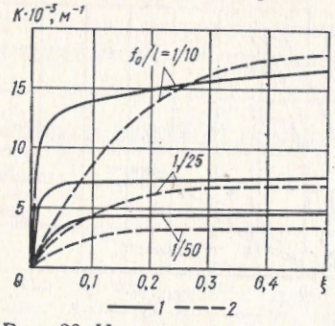


Рис. 20. Изменение кривизны нити по длине пролета:

1 — начальная нагрузка; *2* — предельная нагрузка.

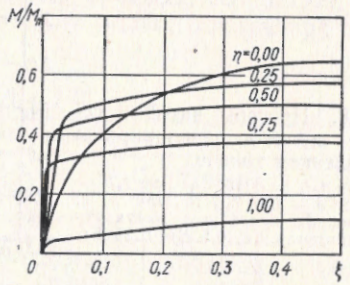


Рис. 21. Эпюры изгибающих моментов в нити при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI.

от стрелы провисания. Так, например, для нитей со стрелой провисания 1/10 пролета даже при предельной нагрузке кривизна в средней части пролета меньше, чем при начальной нагрузке. В нитях со стрелами провисания 1/25 и 1/50 пролета кривизна при предельной нагрузке становится несколько больше, чем при начальной.

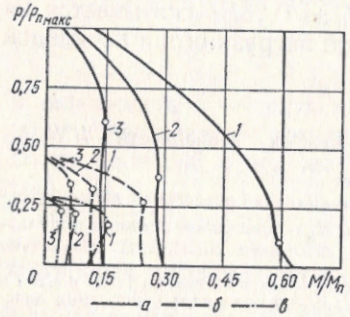


Рис. 22. График зависимости $M/M_n = f\,(p/p_{n_{макс}})$ для поперечного сечения нити, расположенного в середине пролета:

1, 2, 3 — кривые соответствующие жесткости EI, 0,5 EI, 0,25 EI; *а* — нити со стрелами провисания 1/10 l; *б* — нити с $f_0/l = 1/25$; *в* — нити с $f_0/l = 1/50$).

Изгибающие моменты M_n в упругопластической нити конечной жесткости (рис. 21) при действии равномерно распределенной дополнительной нагрузки изменяются совершенно иному, чем в простой балке с шарнирно подвижными опорами. Если в балке изгибающие моменты зависят от величины нагрузки, то для нити конечной жесткости характер их изменения определяется не столько величиной нагрузки, сколько величиной стрелы провисания и жесткости на изгиб. С появлением пластических деформаций и ростом нагрузки изгибающие моменты на большей части пролета нити уменьшаются. При развитых пластических деформациях нить конечной жесткости, особенно при нагрузках, близких к предельным, становится подобна гибкой нити, так как изгибающие моменты в поперечных сечениях оказываются настолько малы (рис. 22), что практически не влияют на форму равновесия.

Рассмотрим теперь характер развития пластических деформаций нитей. Как и следовало ожидать, пластические деформации раньше появляются в нитях жесткостью EI (моменты их появления на рис. 22 обозначены точками). С уменьшением жесткости на изгиб повышается нагрузка, при которой в нити наступают первые пластические деформации. Это очень заметно в нитях с $f_0/l = 1/10$. Для нитей с $f_0/l = 1/25$ и 1/50 указанное свойство проявляется слабее, что объясняется преобладанием в поперечных сечениях нитей напряжений от растяжения над напряжениями от изгиба.

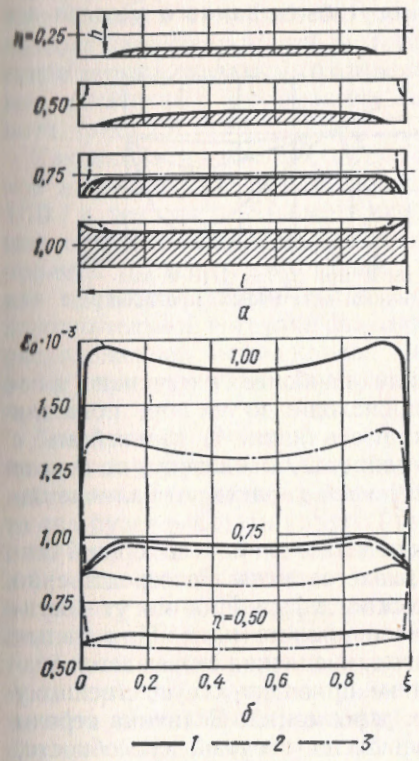


Рис. 23. Пластические деформации нити при $f_0/l = 1/10$:

а — зоны текучести; *б* — относительные удлинения; *1* — нити с шарнирным закреплением опор и жесткостью EI; *2* — нити с жестким закреплением опор и жесткостью EI; *3* — нити с шарнирным закреплением опор и жесткостью 0,25 EI

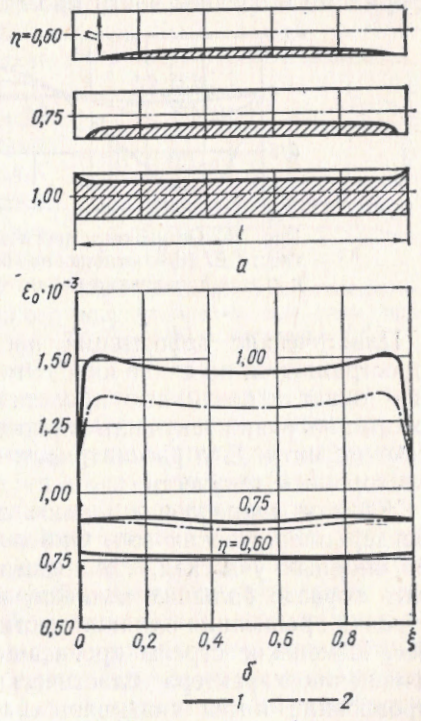


Рис. 24. Пластические деформации нити при $f_0/l = 1/25$:

1 — нити с шарнирным закреплением опор и жесткостью EI; *2* — нити с шарнирным закреплением опор и жесткостью 0,25 EI.

Пластические деформации, приводя к перераспределению усилий в нити, значительно повышают ее несущую способность. Особенно это относится к нитям с большой жесткостью на изгиб. Например, для нити со стрелой провисания 1/10l и жесткостью EI предельная нагрузка в 9,4 раза превышает нагрузку, соответствующую появлению текучести.

Относительные деформации упруго-пластических нитей конечной жесткости (рис. 23, 24) резко отличаются от тех же деформаций в упругой стадии. Если в упругой нити с шарнирным закреплением опор относительные деформации уменьшаются от опорных закреплений к середине пролета, то в упруго-пластической — деформации на опорах могут быть намного меньше деформаций в средней части пролета.

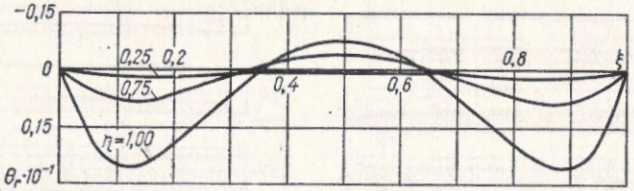


Рис. 25. Остаточные прогибы нити при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI (θ_r — отношение величины остаточных прогибов к стреле провисания нити).

Пластические деформации вначале наиболее интенсивно распространяются по длине нити. Это происходит до тех пор, пока они не охватят почти всю пролетную часть нити. В дальнейшем с ростом нагрузки текучесть распространяется, в основном, по высоте сечения нити. Для рассматриваемых нитей характерно наличие односторонней текучести.

Жесткое закрепление концов нити мало влияет на общий характер пластических зон. Оно сказывается лишь непосредственно на опорных участках, где пластические деформации могут достигать гораздо больших величин, чем в пролете нити. При малых стрелах провисания влияние жесткого закрепления сказывается слабее. Изменение стрелы провисания не приводит к существенному изменению характера пластических деформаций. Величина стрелы провисания нитей сказывается только на несущей способности, моменте появления и скорости распространения пластических зон. Например, при $f_0/l = 1/50$ предельное состояние нитей наступает намного раньше, чем при $f_0/l = 1/10$ (см. рис. 22).

При одной и той же площади поперечного сечения и одинаковой стреле провисания упруго-пластические нити с большей жесткостью на изгиб имеют большие относительные деформации ε_0 (см. рис. 23). Разница в относительных деформациях между нитями с разной жесткостью на изгиб при уменьшении стрелы провисания становится меньше (см. рис. 24).

Во всех рассмотренных случаях предельное состояние нитей конечной жесткости наступало на опорах, где при нормальной силе $N = \sigma_T F$ возникала местная текучесть. В пролете же деформации нити не достигали допустимой величины.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости, работающих с изгибом от собственного веса, при разгрузке.

Образование пластических деформаций при действии на нить дополнительной нагрузки приводит к тому, что после снятия ее нить не возвращается в исходное состояние (рис. 25), появляются остаточные прогибы.

Характер остаточных прогибов нити зависит как от ее параметров, так и от величины снимаемой нагрузки и в какой-то мере подобен характеру прогибов нити при активном нагружении. То же самое можно сказать и об относительных остаточных деформациях ε_{0r} оси нити (рис. 26).

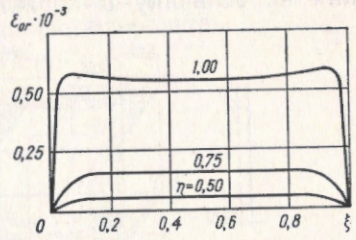


Рис. 26. Остаточные относительные удлинения оси нити при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI.

Как видно из рис. 25, нить конечной жесткости при стреле провисания $1/10\ l$ и жесткости EI имеет наибольшие остаточные прогибы в четвертях пролета. В середине же пролета кривая провисания нити после снятия дополнительной нагрузки оказывается расположенной выше кривой равновесия при действии начальной нагрузки.

Для нитей конечной жесткости рассматриваемая разгрузка является упругой. Если снова разгруженную нить подвергнуть действию равномерно распределенной дополнительной нагрузки, то она будет работать упруго (имеется в виду, что нагрузка вторичного загружения не превышает величину предшествующей нагрузки). Все это объясняется значительным влиянием цепных усилий на работу нити. При снятии нагрузки или вторичном нагружении составляющие нормальных напряжений в поперечных сечениях нити, возникающие от цепных усилий, уменьшаются или увеличиваются гораздо быстрее по сравнению с составляющими, вызванными изгибом нити. Именно поэтому в данном случае и не появляются циклические пластические деформации, а нить конечной жесткости обладает большим резервом прочности.

Эпюры остаточных напряжений (рис. 27) по своему характеру для различных ступеней дополнительной нагрузки претерпевают небольшие изменения. Пунктирной линией на рисунке обозначены эпюры напряжений до разгрузки.

С увеличением интенсивности дополнительной нагрузки остаточные напряжения в верхних и нижних волокнах нити уменьшаются. При снятии дополнительной нагрузки, близкой к предельной, эпюра остаточных напряжений не претерпевает заметных изменений; существенно уменьшается лишь величина остаточных напряжений в поперечных сечениях нити, особенно в нижней зоне.

Рассмотрим работу нитей конечной жесткости, работающих без изгиба от собственного веса.

Прогибы таких нитей всегда положительны, а их величина вблизи опорных участков намного меньше, чем для нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки. В связи с этим жесткое

закрепление концов нитей оказывает очень малое влияние на их прогибы (практически прогибы нитей с шарнирным и жестким закреплением концов совпадают).

Для нитей, работающих без изгиба от собственного веса, изменение стрелы провисания также приводит к изменению эпюры прогибов, но оно носит чисто количественный характер.

Жесткость на изгиб практически не оказывает никакого влияния на величину и характер прогибов, а изгибающие моменты

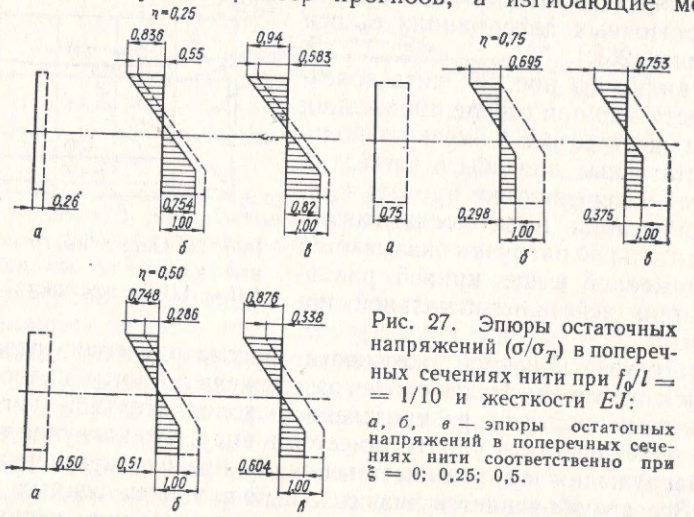


Рис. 27. Эпюры остаточных напряжений (σ/σ_T) в поперечных сечениях нити при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EJ:

а, б, в — эпюры остаточных напряжений в поперечных сечениях нити соответственно при $\xi = 0;\ 0{,}25;\ 0{,}5$.

в поперечных сечениях нитей при возрастании нагрузки вплоть до предельной изменяются незначительно. Зависимость распора от нагрузки подобна зависимости, полученной для абсолютно гибких нитей.

В нитях, работающих без изгиба от собственного веса, пластические деформации могут и не возникнуть в пролете, особенно при больших стрелах провисания. При малых стрелах провисания пластические деформации могут появиться в средней части нити, но при этом интенсивность распространения их по высоте поперечных сечений и по длине пролета будет гораздо меньшей, чем в нитях, работающих с изгибом от собственного веса. Жесткое закрепление концов таких нитей не оказывает существенного влияния на величину пластических деформаций на опорах.

Предельное состояние нитей конечной жесткости, работающих без изгиба от начальной нагрузки, наступает тогда, когда усилие на опорах достигает $N_n = \sigma_T F$, т. е. аналогично. как и в случае для нитей, работающих с изгибом от начальной нагрузки.

§ 4.3. Нити из идеального упруго-пластического материала при действии несимметричной равномерно распределенной нагрузки

Свободно провисающие нити конечной жесткости при действии несимметричной дополнительной нагрузки могут существенно изменить свою геометрию. Наиболее значительное влияние на перемещения нити несимметричное загружение оказывает тогда, когда дополнительная нагрузка расположена на части пролета.

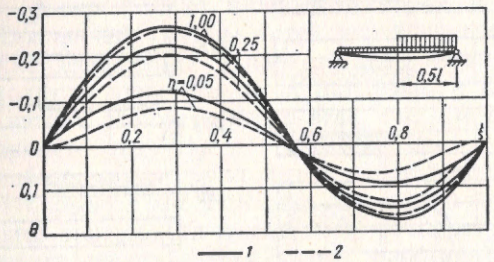


Рис. 28. Прогибы нити, работающей с изгибом от собственного веса, при действии дополнительной нагрузки, расположенной на половине пролета при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI:

1 — нити с шарнирным закреплением концов, *2* — нити с жестким закреплением концов.

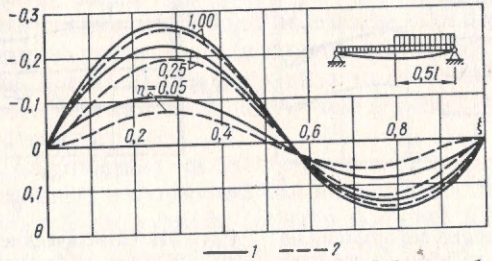


Рис. 29. Прогибы нити, работающей без изгиба от собственного веса, при действии дополнительной нагрузки, расположенной на половине пролета при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI; условные обозначения те же, что и на рис. 28.

Если нагрузка занимает половину пролета, то прогибы нитей, работающих с изгибом (рис. 28) и без изгиба (рис. 29) от собственного веса, мало различны между собой. Наиболее заметная разница в прогибах между двумя группами нитей проявляется при небольшой интенсивности дополнительной нагрузки ($\eta = 0{,}05$). Характерно, что в этом случае прогибы нитей достигают максимальной величины не в той части пролета, где находится нагрузка, а в противоположной. С увеличением нагрузки от $\eta = 0{,}25$ до $\eta = 1{,}00$ прогибы возрастают менее интенсивно, чем в начальный период нагружения.

Жесткое закрепление концов нитей оказывает заметное влияние на прогибы лишь при малой величине дополнительной нагрузки и то только у тех нитей, у которых значительная жесткость на изгиб и большая стрела провисания. Когда интенсивность дополнительной нагрузки приближается к предельной ($\eta = 1{,}00$), разница между прогибами нитей с жестким и шарнирным закреплением концов становится несущественной.

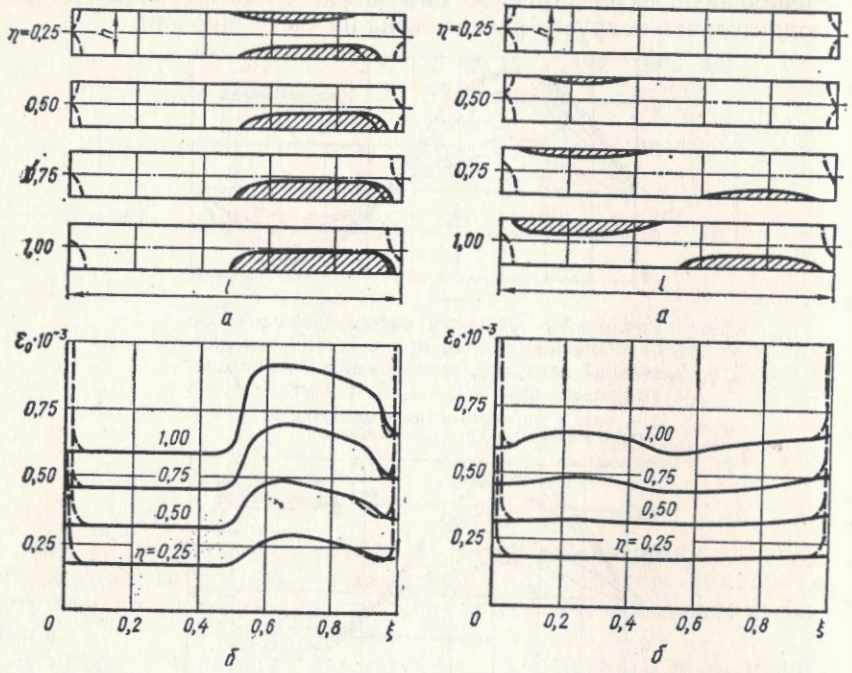


Рис. 30. Пластические деформации нити, работающей с изгибом от собственного веса, при действии дополнительной нагрузки, расположенной на половине пролета при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI:

а — зоны текучести; *б* — относительные удлинения оси.

Рис. 31. Пластические деформации нити, работающей без изгиба от собственного веса, при действии дополнительной нагрузки, расположенной на половине пролета при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI:

а — зоны текучести; *б* — относительные удлинения оси.

Характер перемещений нитей очень сильно влияет на их пластические деформации.

В нитях, работающих с изгибом от собственного веса, в начальный период нагружения вследствие резкого изменения геометрии может появиться двухсторонняя текучесть не только на опорных участках, но и в пролете (рис. 30, *а*). При дальнейшем росте нагрузки напряжения от изгиба растут медленнее, чем напряжения от нормальных сил. Это приводит к тому, что в нитях образуются участки только с односторонней текучестью.

Заметим, что и при несимметричной нагрузке жесткое закрепление концов нитей практически мало влияет на общий характер пластических деформаций. По-прежнему оно сказывается лишь на опорных участках, где пластические деформации (рис. 30, *б*) гораздо больше, чем при симметричной равномерно распределенной нагрузке. Для нитей, работающих без изгиба от собственного веса, пластические деформации вблизи опор и на опорах при жестком закреплении мало отличаются от тех же деформаций нитей, работающих с изгибом от собственного веса. В пролете же наблюдается совершенно иное распределение пластических зон и пластических деформаций. Для первой группы нитей характерным является то, что пластические деформации в пролете возникают только в той части, где находится дополнительная нагрузка, а для нитей, работающих без изгиба от собственного веса, они могут возникать в обеих частях пролета (рис. 31).

Разница в работе двух групп нитей наблюдается не только в характере возникновения пластических зон, но и в моменте появления пластических деформаций и скорости распространения их по высоте поперечных сечений. Для нитей, работающих с изгибом от собственного веса, пластические деформации охватывают в пролете участок значительной протяженности уже при малой интенсивности дополнительной нагрузки. Для второй группы нитей пластические деформации на участке приложения дополнительной нагрузки появляются лишь при $\eta = 0{,}75$ и распространяются при дальнейшем нагружении неглубоко по высоте поперечных сечений. В противоположной части пролета пластические деформации также появляются при значительных нагрузках ($\eta = 0{,}50$) и распространяются по высоте сечения не глубже, чем в нитях, работающих с изгибом от собственного веса.

Для нитей, работающих с изгибом от собственного веса, величина относительных деформаций оси на части пролета, загруженной дополнительной нагрузкой, гораздо больше, чем на упругих участках (см. рис. 30, *б*). Для второй группы нитей разница между деформациями упругих и упруго-пластических участков не очень существенна (см. рис. 31, *б*).

При изменении стрелы провисания до $1/25\ l$ двусторонняя текучесть в поперечных сечениях нитей, работающих с изгибом от собственного веса не возникает, а в нитях, работающих без изгиба от собственного веса, пластические деформации не охватывают незагруженную дополнительной нагрузкой часть пролета.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости при изменении положения нагрузки.

Из рис. 32, видно, что чем меньшую часть пролета занимает дополнительная нагрузка, тем прогибы нитей на участке ее приложения больше. Это происходит до тех пор, пока дополнительная нагрузка не займет 1/8 пролета (см. рис. 32, *б*, IV). На той части пролета, где отсутствует дополнительная нагрузка, прогибы нитей изменяются совершенно по-другому: максимальные прогибы

возникают не для случаев I или IV, а для случая II, т. е. когда дополнительная нагрузка расположена на расстоянии 0,375 l от опоры. Для случая IV разница в прогибах при значении $\eta = 0{,}5$ и $\eta =$

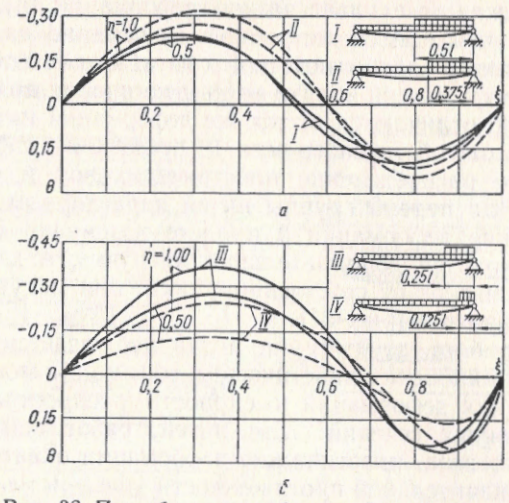


Рис. 32. Прогибы нити, работающей с изгибом от собственного веса, при действии дополнительной нагрузки, расположенной:

на участках 0,5 l и 0,375 l ($а$) и 0,25 l и 0,125 l ($б$) при $f_0/l = 1/25$ и жесткости EI.

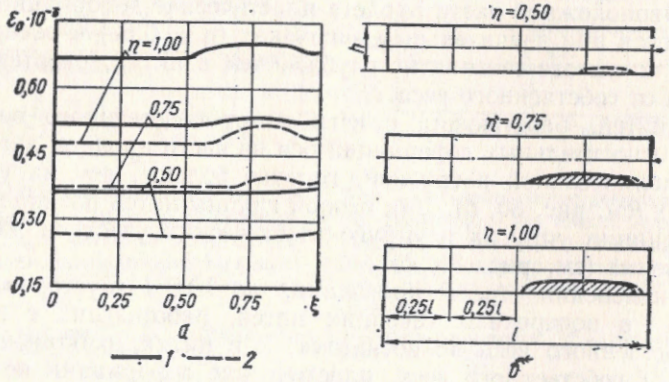


Рис. 33. Пластические деформации нити, работающей с изгибом от собственного веса:

$а$ — зоны текучести; $б$ — относительные удлинения оси; 1 — случай нагружения I; 2 — случай нагружения II.

$= 1{,}0$ в несколько раз больше по сравнению со случаем I, что объясняется проявлением влияния жесткости на изгиб и начальной нагрузки на перемещение нитей.

Для случаев нагружения I и II (рис. 33) пластические зоны охватывают большую часть пролета, чем для случаев III и IV

(рис. 34). Однако относительные упруго-пластические удлинения оси нити (рис. 33, $а$; 34, $а$) в случаях III и IV гораздо больше упругих, хотя зоны пластичности занимают небольшой участок пролета. Это возникает вследствие резкого изменения их кривизны (рис. 35) на участке приложения дополнительной нагрузки.

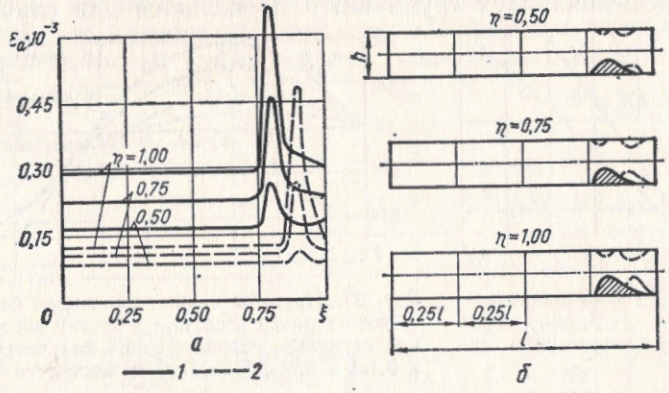


Рис. 34. Пластические деформации нити, работающей с изгибом от собственного веса:

$а$ — зоны текучести; $б$ — относительные удлинения оси; 1 — случай нагружения III; 2 — случай нагружения IV.

При уменьшении жесткости на изгиб в два раза в рассматриваемых случаях не возникает двусторонняя текучесть. То же происходит и при уменьшении стрелы провисания с 1/25 до 1/50 пролета.

Как известно, при действии симметричной равномерно распределенной дополнительной нагрузки изгибающие моменты, возникающие в поперечных сечениях упруго-пластической нити, с

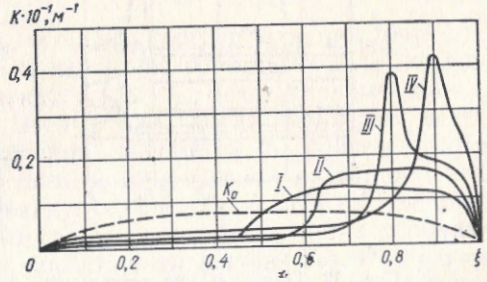


Рис. 35. Характер изменения кривизны нити по длине пролета при несимметричном загружении:

K_0 — кривизна кривой провисания в начальном состоянии; I, II, III, IV — случаи нагружения при параметре $\eta = 1$.

ростом нагрузки уменьшаются. При действии же несимметричных нагрузок наблюдается иная картина, что объясняется преобладающим влиянием напряжений от изгиба над напряжениями от растяжения вследствие больших кинематических перемещений.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной нагрузки (рис. 36) при несимметричном нагружении имеет слабо выраженный нелинейный характер для случаев III и IV, т. е. для случаев, когда дополнительная нагрузка занимает малую часть

пролета. В остальных случаях указанная зависимость приближается к прямо пропорциональной.

В нитях, работающих без изгиба от начальной нагрузки, прогибы, возникающие для случаев нагружения I и II, незначительно отличаются от прогибов нитей первой группы. Заметная разница в перемещениях двух групп нитей проявляется для случаев нагружения III и IV (рис. 37): в нитях, работающих без изгиба от собственного веса, прогибы в левой части пролета меньше, а в правой — больше, чем для соответствующих случаев нагружения нитей первой группы.

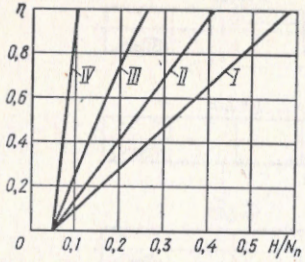


Рис. 36. График зависимости $H/N_п = f(\eta)$ при несимметричном нагружении нитей.

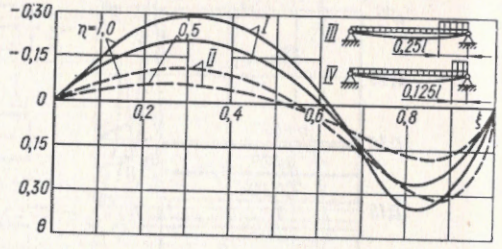


Рис. 37. Прогибы нити, работающей без изгиба от собственного веса, при действии дополнительной нагрузки, расположенной на участке 0,25 l и 0,125 l при $f_0/l = 1/10$ и жесткости EI.

Пластические деформации в нитях, работающих без изгиба от начальной нагрузки, для случая нагружения I вообще не возникают в пролетной части, а для случая II появляются лишь на последней ступени нагружения ($\eta = 1{,}00$) и охватывают очень малый участок нити. Для указанных случаев нагружения нити с шарнирным закреплением концов работают практически упруго.

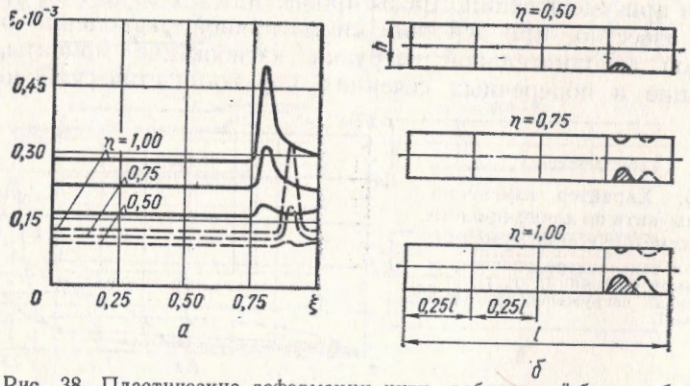


Рис. 38. Пластические деформации нити, работающей без изгиба от собственного веса:
а — относительные удлинения оси; *б* — зоны текучести.

При расположении нагрузки ближе к опорным закреплениям (рис. 38) появляется как односторонняя, так и двусторонняя текучесть в поперечных сечениях нитей. При этом влияние начальной геометрии нитей на величину относительных деформаций оси сказывается менее существенно, чем при действии несимметричной равномерно распределенной дополнительной нагрузки, расположенной на половине пролета. Подобное явление объясняется большим изменением кривизны нитей на участке приложения дополнительной нагрузки. Что касается характера зон пластичности, то он остается примерно таким же, как и у нитей, работающих с изгибом от собственного веса.

Таблица 2

Значения параметра $\theta_1 = v/l$

ξ	$f_0/l = 1/10$	$f_0/l = 1/25$	ξ	$f_0/l = 1/10$	$f_0/l = 1/25$
1	2	3	1	2	3
0	0	0	0,5	0,00412	0,000555
0,1	0,00395	0,000625	0,6	0,00400	0,000533
0,2	0,00590	0,000940	0,7	0,00476	0,000646
0,3	0,00620	0,000948	0,8	0,00500	0,000648
0,4	0,00536	0,000771	0,9	0,00320	0,000250
			1	0	0

Двусторонняя текучесть в нитях конечной жесткости, работающих как с изгибом, так и без изгиба при действии начальной нагрузки в начальном состоянии, для всех рассматриваемых случаев может и не возникнуть, если величина начальной нагрузки превышает собственный вес нити. Например, при $q = 0{,}25 p_{макс}$ в нитях при действии несимметричной равномерно распределенной дополнительной нагрузки не появляется текучесть в верхних волокнах поперечных сечений.

По значениям параметра $\theta_1 = v/l$ для соответствующих точек нити можно судить о величине и характере горизонтальных перемещений нитей конечной жесткости (табл. 2). Все табличные данные относятся для тех случаев нагружения, когда геометрия нитей существенно изменяется. Значения параметра θ, приведенные в графе 2, вычислены при действии несимметричной дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной на половине пролета; в графе 3 приведены данные для случая, когда дополнительная нагрузка занимает $^1/_8$ пролета нити (случай IV). При $f_0/l = 1/10$ наибольшие горизонтальные перемещения возникают в незагруженной части пролета и составляют около 0,006 его длины, т. е. для пологих нитей они не достигают даже 1% от длины пролета. С уменьшением стрелы провисания в два раза (до $1/25\,l$) горизонтальные перемещения уменьшаются в шесть раз.

§ 4.4. Нити из идеального упруго-пластического материала при действии сосредоточенных нагрузок

Работа нитей конечной жесткости за пределом упругости при действии сосредоточенных нагрузок представляет не меньший интерес, чем при других видах нагрузок. Обычно в местах приложения сосредоточенных нагрузок в нити возникают значительные местные изгибные напряжения, оказывающие решающую роль на несущую способность конструкции в упругой стадии.

Исследовать весь круг вопросов, касающихся действия сосредоточенных нагрузок, очень сложно, поскольку на напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости за пределом упругости, оказывает влияние большое число факторов. К основным из них относятся: параметры нити (стрела провисания, жесткостные характеристики); граничные условия; прочностные характеристики материала; количество, величина и место приложения сосредоточенных нагрузок, а также их соотношение между собой и остальной нагрузкой; очередность нагружения.

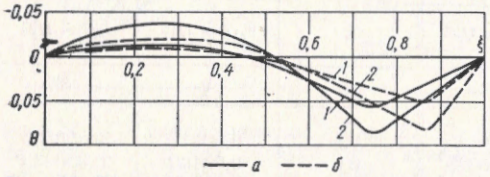


Рис. 39. Прогибы нити, работающей с изгибом от собственного веса при действии сосредоточенной нагрузки при $f_0/l = 1/25$ и жесткости EI:

а — положение дополнительной нагрузки на расстоянии 0,25 l от опоры, *б* — то же, на расстоянии 0,125 l; *1*, *2* — прогибы нитей соответственно при $\eta_1 = 0{,}5$ и 1, где $\eta_1 = P/P_{макс}$

Ниже приведены результаты численного исследования напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости из идеального упруго-пластического материала, работающих как с изгибом, так и без изгиба от начальной равномерно распределенной нагрузки, при действии несимметричной сосредоточенной нагрузки.

Работа нитей рассматривалась при двух положениях дополнительной нагрузки. В первом случае сосредоточенная нагрузка находилась на расстоянии 0,25 l от опоры, во втором — на расстоянии 0,125 l. Во всех случаях максимальная величина сосредоточенной нагрузки составляла $P_{макс} = 0{,}05 p_{макс}\, l$.

В нитях, работающих с изгибом от собственного веса, при действии сосредоточенной нагрузки P возникала двусторонняя текучесть. Почти такой же характер носили пластические деформации и в нитях, работающих без изгиба от собственного веса.

При начальной нагрузке $q = 0{,}25 p_{макс}$ (рис. 39) в нитях от сосредоточенной нагрузки появляются пластические зоны только в нижних волокнах.

Из приведенного графика видно, что в месте приложения сосредоточенной нагрузки происходит резкое изменение геометрии нити. Однако несмотря на это, в поперечных сечениях нити

(рис. 40) возникает только односторонняя текучесть, которая охватывает совсем небольшой участок.

При расположении сосредоточенной нагрузки ближе к опоре (0,125 l) характер и величина пластических деформаций в поперечном сечении нити, находящегося под этой нагрузкой, изменяется очень

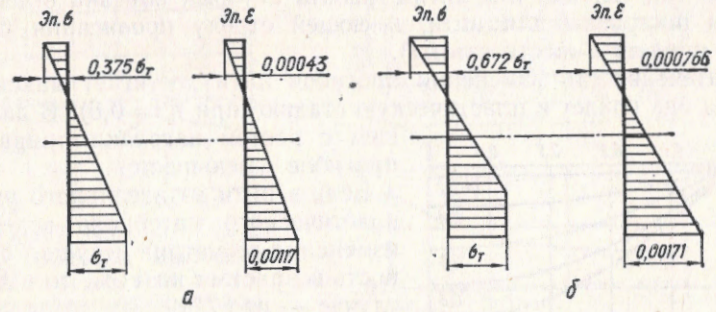


Рис. 40. Эпюры напряжений и деформаций в поперечном сечении нити, расположенном под сосредоточенной нагрузкой:

а — эпюры нормальных напряжений и продольных относительных деформаций при $\eta_1 = 0{,}5$ и расположении сосредоточенной нагрузки на расстоянии 0,25 l от правой опоры; *б* — то же при $\eta_1 = 1$.

мало. В данных случаях сказывается значительное влияние цепных напряжений.

Вследствие большого изменения кривизны нити на участке приложения сосредоточенной нагрузки, разница в характере и величине пластических деформаций между двумя группами оказывается еще меньшей, чем при действии несимметричных распределенных нагрузок.

§ 4.5. Нити из материала с площадкой текучести и упрочнением

Приведенные выше результаты исследований получены, исходя из гипотезы об идеальной пластичности материала.

Рассмотрим несколько случаев работы нитей конечной жесткости из материала с площадкой текучести и упрочнением ($\sigma_T = 2400$ *кг/см²*, $\sigma_B = 4500$ *кг/см²*, $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см²*, $\varepsilon_{макс} = 10\,\sigma_T/E$). Кривая упрочнения материала выбрана в виде полинома второй степени, а прямолинейный участок площадки текучести принят длиной равной $2\,\sigma_T/E$.

Рассмотрим вначале напряженно-деформированное состояние упруго-пластических нитей конечной жесткости, работающих с изгибом от собственного веса, при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету.

Как показали исследования, вплоть до момента, когда нить оказывается полностью охваченной пластическими деформациями,

хотя бы какой-нибудь существенной разницы между нитями из идеального упруго-пластического материала и нитями из материала с площадкой текучести и упрочнением не наблюдается, т. е. прогибы (рис. 41), силовые факторы (рис. 42) и пластические деформации (рис. 43) в нити из упрочняющегося материала изменяются почти так же, как и в нитях, работа которых описана выше (графики построены для нити, имеющей стрелу провисания равную 1/25 пролета и жесткость EI).

Интенсивность изменения прогибов нити достигает максимума, когда она войдет в пластическую стадию (при $\eta = 0{,}6$). В дальнейшем с ростом нагрузки приращение прогибов уменьшается.

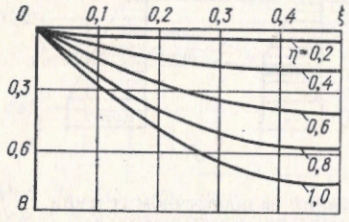


Рис. 41. Прогибы нити из упрочняющегося материала при симметричном загружении.

Если в нити из идеального упруго-пластического материала вследствие изменения геометрии несущая способность возрастает на 11%, то в данном случае — на 87%.

При нагрузке, превышающей предельную для нити из идеального упруго-пластического материала, изгибающий момент имеет весьма малую величину и определенной закономерности в его изменении не наблюдается. Поэтому часть графика, соответствующая указанному состоянию, не показана.

Зависимость распора от интенсивности дополнительной нагрузки (см. рис. 42) носит четко выраженный нелинейный характер. Из приведенного графика видно, что предельная (допустимая) величина нагрузки для нити из упрочняющегося материала почти в пять раз превышает нагрузку, соответствующую появлению текучести в нити.

В пластическом состоянии ($\eta \geqslant 0{,}4$) деформации оси нити (см. рис. 43) при шарнирном и жестком закреплении опор имеют всегда наибольшее значение на опорных участках. При этом с ростом нагрузки разница между деформациями в пролете и на опорных участках нити возрастает.

При значительной интенсивности дополнительной нагрузки ($\eta > 0{,}5$) влияние кривизны нити на величину ее относительных деформаций оси практически не сказывается, т. е. без большой погрешности в этом случае относительные удлинения оси нити конечной жесткости можно определять точно так же, как для нити, поперечные сечения которой работают только на растяжение.

Нити конечной жесткости, работающие без изгиба от собственного веса, при действии равномерно распределенной дополнительной нагрузки в пластическом состоянии имеют почти такие же прогибы и деформации, как и гибкие нити.

Несущая способность двух групп нитей конечной жесткости, материал которых обладает упрочнением, в предельном состоянии ($\eta = 1$) практически одинакова.

При несимметричном загружении нитей конечной жесткости влияние на их напряженно-деформированное состояние вида диаграмм $\sigma - \varepsilon$ наиболее существенно зависит от характера дополнительной нагрузки.

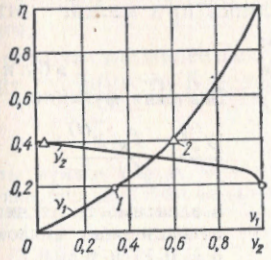


Рис. 42. Зависимость между силовыми факторами (H и M) для нити из упрочняющегося материала при симметричном нагружении:

1 — момент появления пластических деформаций в нити; *2* — предельное состояние нити из идеального упруго-пластического материала; ν_1 — отношение приращения распора ΔH, соответствующего определенной ступени дополнительной нагрузки, к его наибольшему значению $\Delta H_{макс}$; ν_2 — отношение изгибающего момента, возникающего в нити в средней части пролета, к его наибольшему значению $M_{макс}$; параметр η равен отношению величины дополнительной нагрузки к ее предельному значению, которое соответствует нитям из упрочняющегося материала.

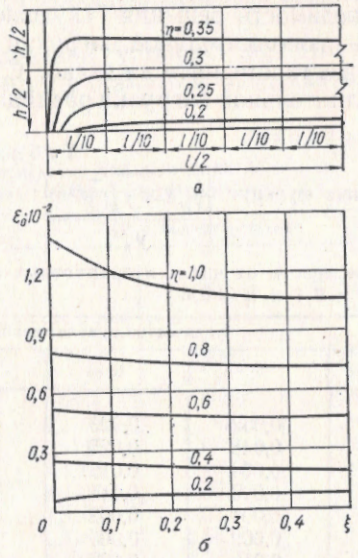


Рис. 43. Пластические деформации нити из упрочняющегося материала при симметричном загружении:

а — зоны текучести; *б* — относительные удлинения оси.

Как показали исследования, в рассматриваемых случаях заметная разница в работе между нитями из идеального упруго-пластического материала и нитями из материала с упрочнением проявлялась лишь при действии несимметричной сосредоточенной нагрузки (для нитей со стрелой провисания $1/25\,l$ разница в величине изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении, расположенном под сосредоточенной нагрузкой, составляла около 6%, а в прогибах — менее 1%).

§ 4.6. Сходимость итерационных процессов. Оценка некоторых предпосылок расчета

Рассмотрим вопросы сходимости последовательных приближений при решении задачи.

Нити, работающие без изгиба от начальной нагрузки, имеют лучшую сходимость итерационных процессов, чем нити, работающие

с изгибом от начальной нагрузки. Особенно это заметно при действии симметричной равномерно распределенной нагрузки, расположенной по всему пролету нити.

Жесткое закрепление концов нитей оказывает ощутимое влияние на сходимость решения (ухудшает ее) лишь при малой интенсивности дополнительной нагрузки и большой жесткости нити на изгиб. С ростом дополнительной нагрузки разница между

Таблица 3

Значения функции $\left|\frac{y_k^{(i)} - f_k(\vec{y}^{(i)})}{y_k^{(i)}}\right|$ **в зависимости от числа итерационных циклов при** $\beta = 0{,}1$ **и** $\eta = 0{,}5$

ξ	Количество приближений		
	5	10	20
0,1	0,052	0,023	0,01
0,2	0,043	0,025	0,009
0,3	0,034	0,019	0,006
0,4	0,020	0,011	0,004
0,5	0,004	0,002	0,000
0,6	0,009	0,005	0,002
0,7	0,016	0,009	0,003
0,8	0,022	0,013	0,004
0,9	0,030	0,017	0,005

Таблица 4

Значения функции $\left|\frac{y_k^{(i)} - f_k(\vec{y}^{(i)})}{y_k^{(i)}}\right|$ **в зависимости от числа итерационных циклов при** $\beta = 0{,}15$ **и** $\eta = 0{,}75$

ξ	Количество приближений	
	5	10
0,1	0,017	0,007
0,2	0,013	0,005
0,3	0,009	0,002
0,4	0,003	0,001
0,5	0,003	0,001
0,6	0,008	0,003
0,7	0,011	0,005
0,8	0,013	0,006
0,9	0,016	0,007

скоростью сходимости последовательных приближений для нитей с шарнирным и жестким закреплением концов уменьшается.

Чтобы иметь наглядное представление о сходимости итерационных процессов, в табл. 3 и 4 приведено в относительных единицах расстояние между векторами $\vec{y}^{(i)}$ и $\vec{f}(y^{(i)})$ в зависимости от числа приближений при действии несимметричной дополнительной равномерно распределенной нагрузки, расположенной на половине пролета. Все данные относятся к нити с шарнирным закреплением концов, имеющей жесткость EI и $f_0/l = 1/25$.

В табл. 3 приведены результаты, которые получены при коэффициенте сходимости $\beta = 0{,}1$ и интенсивности дополнительной нагрузки $\eta = 0{,}5$, причем в качестве начального приближения для данной ступени нагрузки было принято значение ординат кривой провисания при $\eta = 0{,}25$. Несмотря на такую значительную разницу между ступенями нагрузки, наибольшее расстояние между точками кривых $y^{(i)} = y^{(i)}(x_k)$ и $f^{(i)} = f^{(i)}(x_k)$ при 10 циклах итерации составляет менее 2,5% по отношению к ординатам вектора $\vec{y}^{(i)}$. Еще большая точность (до 1%) в определении ординат кривой провисания достигается при 20 приближениях.

При $\eta = 0{,}75$ и $\beta = 0{,}15$ (табл. 4) достаточная точность расчета получается при количестве циклов вдвое меньшем, чем в предыдущем случае.

Обычно при расчетах достаточно изменить 2—3 раза коэффициент сходимости, чтобы обеспечить хорошую скорость сходимости решения.

На основе проведенных исследований установлено, что коэффициент сходимости β целесообразно принимать в пределах 0,03—

Таблица 5

Ординаты и изгибающие моменты, вычисленные аналитически и численно при действии начальной распределенной нагрузки

ξ	Аналитическое решение		Численное решение		
	y (м)	M (т/м)	$y^{(i)}$ (м)	$f(\vec{y}^{(i)})$ (м)	$M^{(i)}$ (т/м)
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,7990	0,9980	0,7978	0,7997	0,9958
0,10	1,5670	1,7244	1,5644	1,5683	1,7205
0,15	2,2808	2,2521	2,2769	2,2824	2,2469
0,20	2,9235	2,6341	2,9183	2,9254	2,6279
0,25	3,4829	2,9086	3,4765	3,4850	2,9017
0,30	3,9501	3,1032	3,9427	3,9524	3,0958
0,35	4,3190	3,2374	4,3108	4,3214	3,2296
0,40	4,5852	3,3246	4,5764	4,5877	3,3166
0,45	4,7460	3,3737	4,7369	4,7485	3,3656
0,50	4,8000	3,3895	4,7905	4,8023	3,3814

0,15. Меньшие значения β принимаются для нитей с большим значением параметра Φ и жестких опорных закреплениях.

Количество итерационных циклов, необходимое для получения требуемой точности расчета зависит от ряда факторов: геометрических параметров нитей, граничных условий, характера и величины дополнительной нагрузки и др. Например, чем больше значение параметра Φ при начальной нагрузке, тем больше циклов итерации затрачивается для определения кривой провисания при действии первой ступени дополнительной нагрузки.

Оценим погрешность решения задачи путем сравнения численных результатов расчета с аналитическими.

В табл. 5 приведены значения ординат и изгибающих моментов для нити с жесткостью EI и $f_0/l = 1/10$, полученные при трехточечной аппроксимации производных. Если принять за решение задачи вектор $\vec{y}^{(i)}$, то максимальное расхождение между аналитическими и численными значениями ординат кривой провисания составляет 0,1%. Погрешность в определении изгибающих моментов доходит до 0,4%. Таким образом, при делении нити на 40 участков трехточечная аппроксимация производных при действии распределенных нагрузок оказывается вполне достаточной.

При действии сосредоточенных дополнительных нагрузок необходимо использовать пятиточечную аппроксимацию производных, так как геометрия нити в месте приложения сосредоточенных нагрузок резко изменяется. Например, для нити со стрелой провисания $f_0/l = 1/25$ и жесткостью EI (табл. 6) погрешность в численном определении ординат кривой провисания и изгибающих моментов (при указанной аппроксимации производных) имеет наибольшее значение для сечения нити, расположенного под сосредоточенной нагрузкой ($P = 0{,}05 p_{макс}\, l$) и составляет соответственно 0,27% и 2,8%.

Таблица 6

Ординаты и изгибающие моменты нити, вычисленные аналитически и численно при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки

ξ	Аналитическое решение		Численное решение		
	y (м)	M (тм)	$y^{(i)}$ (м)	$f\,\vec{y}^{(i)}$ (м)	$M^{(i)}$ (тм)
0,50	1,9617	1,0726	1,9654	1,9617	1,0747
0,55	1,9726	1,0795	1,9763	1,9726	1,0814
0,60	1,9492	1,1074	1,9528	1,9492	1,1084
0,65	1,8904	1,2206	1,8940	1,8904	1,2174
0,70	1,7921	1,6793	1,7956	1,7924	1,6594
0,75	1,6370	3,5387	1,6415	1,6386	3,4416
0,80	1,3963	1,6756	1,3991	1,3966	1,6555
0,85	1,0990	1,2045	1,1010	1,0991	1,2011
0,90	0,7628	1,0421	0,7641	0,7628	1,0425
0,95	0,3936	0,8149	0,3943	0,3936	0,8154
1,00	0	0	0	0	0

Численное определение внутренних силовых факторов (изгибающих моментов, нормальных усилий) при делении прямоугольного поперечного сечения нити на 30 площадок приводит к погрешности, которая не превышает 0,2%.

Погрешность, вводимая в расчет за счет численного интегрирования при определении длины нити, также не велика и находится в пределах 1%.

Если учесть, что точность, с которой определялось значение распора на каждом этапе расчета, не превышала величину, равную $0{,}003\,H$, то общая погрешность численного решения задачи в рассмотренных случаях составляла не более 1,5—2%.

Как показали исследования, горизонтальное смещение действующей вертикальной нагрузки в зависимости от деформации пологих нитей конечной жесткости учитывать при расчете нецелесообразно, так как погрешность от этого даже для самых неблагоприятных случаев нагружения не превышает 0,5%. Такого же порядка получается погрешность, если считать нагрузку распределенной не по длине нити, а по длине пролета.

Влияние перерезывающих сил на величину изгибающих моментов в упруго-пластических нитях конечной жесткости по сравнению

с простыми балками незначительно. Даже допуская, например, что максимальная погрешность в определении изгибающего момента за счет пренебрежения влияния касательных напряжений на условие текучести при действии сосредоточенной нагрузки составляет 5% (т. е. как для балок), то наибольшая погрешность численного решения задачи при этом составит около 0,5%.

Приведенный анализ результатов исследований дает основание полагать, что точность разработанного метода расчета находится в пределах точности инженерных расчетов и составляет около 5%.

В предыдущих параграфах данной главы описано напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости при действии нескольких видов дополнительной нагрузки. Ниже приведено сравнение воздействий отдельных нагрузок между собой и дана оценка некоторых предпосылок расчета.

В нитях конечной жесткости, работающих с изгибом от начальной нагрузки, пластические деформации при действии равномерно распределенной дополнительной нагрузки, расположенной по всему пролету, охватывают только нижние волокна. Что же касается относительных деформаций оси нити, то они для симметричной дополнительной равномерно распределенной нагрузки всегда больше, чем для несимметричной, хотя в последнем случае распределение деформаций по длине нити имеет более неравномерный характер.

Как показали исследования, не для любого положения несимметричной дополнительной равномерно распределенной нагрузки проникновение зон текучести по высоте поперечных сечений нити, работающей с изгибом от начальной нагрузки, может быть глубже, чем при симметричном загружении. Например, для рассмотренных случаев при $f_0/l = {}^1/_{25}$ это наблюдается только при положении дополнительной нагрузки на расстоянии 0,25 и 0,125 пролета от опоры.

Для нитей конечной жесткости, работающих без изгиба от начальной нагрузки, пластические деформации при действии несимметричной дополнительной равномерно распределенной нагрузки, в основном, проникают по высоте поперечных сечений гораздо глубже, чем при симметричном загружении.

При действии несимметричных дополнительных нагрузок возникает не только односторонняя текучесть в поперечных сечениях нитей, но и двусторонняя. На появление двусторонней текучести влияет много факторов, среди которых наибольшую роль играют следующие: жесткость на изгиб, стрела провисания, граничные условия, соотношение между начальной и дополнительной нагрузками, место приложения дополнительной нагрузки. Двусторонняя текучесть в нитях конечной жесткости развивается совершенно иначе, чем в балках. В ряде случаев она может с ростом нагрузки даже исчезнуть (когда наступает местная упругая разгрузка). Иногда двусторонняя текучесть, может охватывать довольно быстро

поперечные сечения нити. Это происходит, главным образом, при больших нагрузках, распределенных на малом участке нити.

Изложенное выше не дает основания рекомендовать пользоваться гипотезой пластического шарнира даже при приближенных расчетах, поскольку степень погрешности при этом может быть существенной и к тому же неизвестной. Кроме того, такая предпосылка дает большую погрешность (40% и больше) в определении относительных деформаций оси нити. От точности вычисления последних в большой мере зависит точность определения нормальных усилий в нити.

Еще большая погрешность будет в том случае, если использовать для решения данной задачи модель жестко-пластического тела.

Как упоминалось, на напряженно-деформированное состояние нитей конечной жесткости оказывает влияние большое число факторов. Одним из наиболее весомых факторов является стрела провисания. От ее величины очень сильно зависит величина, характер и скорость распространения пластических деформаций, а также несущая способность нитей.

В рассмотренных случаях несущая способность нитей конечной жесткости, работающих с изгибом и без изгиба от собственного веса, определялась, в основном, величиной равномерно распределенной дополнительной нагрузки, расположенной по всему пролету нити. И лишь для нитей с жестким закреплением концов несущая способность в ряде случаев ограничивалась величиной пластических деформаций на опорах.

Многообразие встречающихся на практике задач связано не только с однократным нагружением конструкции, но и с повторно-переменным. Задача о повторно-переменном нагружении нитей конечной жесткости за пределом упругости не может быть решена так, как для стержневых систем, деформированная схема которых мало отличается от первоначальной [41, 42, 43, 50]. Чтобы дать достоверную оценку приспособляемости нитей конечной жесткости, необходимо определить их напряженно-деформированное состояние при всех возможных сочетаниях нагрузок с учетом очередности (истории) нагружения. Последнее обстоятельство существенно усложняет решение данной задачи.

Проведенные исследования позволяют в какой-то мере судить о работе нитей конечной жесткости при повторно-переменных нагружениях на основе их напряженно-деформированных состояний, соответствующих однократному нагружению. Так, например, можно предположить, что если в нитях конечной жесткости при больших кинематических перемещениях появляется двусторонняя текучесть, то при повторно-переменных нагружениях могут возникнуть циклические пластические деформации не только в верхних волокнах нити, но и в средней зоне. Далее, при жестких опорных закреплениях не всегда будет представляться возможность предотвратить появление циклических пластических деформаций.

И еще не при любых симметричных дополнительных нагрузках нить может приспособиться. Последнее обстоятельство касается тех случаев, когда нить загружается поочередно сосредоточенными и распределенными нагрузками.

Проведенные исследования позволяют убедиться в том, что учет физической и геометрической нелинейности свободно провисающих нитей конечной жесткости представляет, без сомнения, гораздо более сложную задачу, чем расчет за пределом упругости плоских стержневых систем, в которых деформированная схема мало отличается от недеформированной.

Как известно, для упруго-пластического стержня от изменения геометрии существенно зависит изменение приведенных жесткостных характеристик [5, 17]. Это существенно сказывается на сходимости численных методов расчета. Указанные трудности не являются принципиальными для разработанных алгоритмов расчета, так как большая возможность выбора начального приближения и устойчивость вычислительной схемы позволяет для любых случаев довольно просто получить решение задачи.

На основе проведенных исследований установлено, что предлагаемые алгоритмы и программы расчета хорошо приспособлены для реализации на ЭВМ, имеют простую логическую схему, универсальны и обеспечивают экономное использование памяти вычислительной машины. Для рассмотренной нелинейной задачи это особенно важно, поскольку при расчетах приходится оперировать большими массивами чисел.

Как следует из анализа результатов исследований, ограничивать несущую способность нитей конечной жесткости моментом возникновения пластических деформаций нецелесообразно. После наступления текучести нить может сопротивляться увеличению внешних сил до тех пор, пока пластические деформации не охватят ее значительного объема. Нагрузка, при которой наступает предельное состояние нити, может в несколько раз превышать нагрузку, соответствующую моменту появления текучести. Следовательно, упруго-пластические нити конечной жесткости обладают большим резервом прочности.

Если в упругой стадии проявляется большая разница между напряженно-деформированными состояниями нитей, работающих соответственно с изгибом и без изгиба от начальной нагрузки, то за пределом упругости она менее существенна.

Формулы для определения характеристики нагрузки

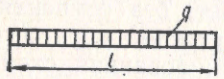
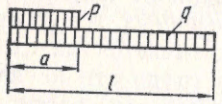
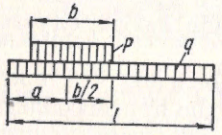
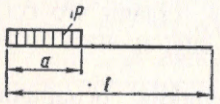
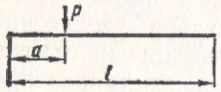
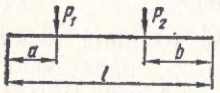
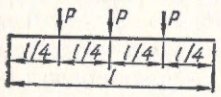
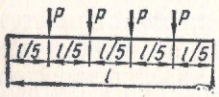
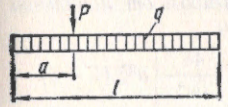
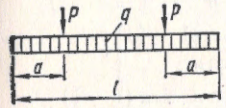
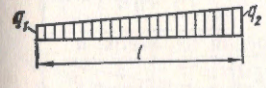
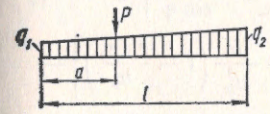
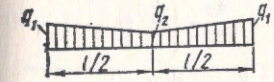
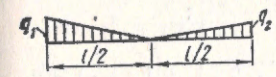
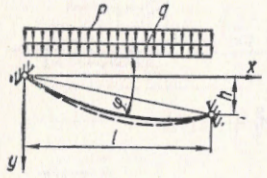
Схема нагружения	$\int_l Q^2 dx$
	$\frac{q^2 l^3}{12}$
	$\frac{q^2 l^3}{12}[1+(4-3\varkappa_1)\varkappa_1^3\varkappa_3^2+(6-4\varkappa_1)\varkappa_1^2\varkappa_3]$
	$\frac{q^2 l^3}{12}[1+(12\varkappa_1-12\varkappa_1^2-2\varkappa_2)\varkappa_2^2\varkappa_3^2+$ $+(12\varkappa_1-12\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)\varkappa_2\varkappa_3]$
	$\frac{pl^3}{12}\left[4\varkappa_1^3\left(1-\frac{\varkappa_1}{2}\right)+\frac{\varkappa_1^6}{2}+3\varkappa_1^4(1-\varkappa_1)\right]$
	$P^2 l[\varkappa_1(1-\varkappa_1)]$
	$\left[\frac{P_1(l-a)+P_2 b}{l}\right]^2 a+\left[\frac{P_1 a+P_2(l-b)}{l}\right]^2 b+$ $+\left[\frac{P_1 a+P_2(l-b)}{l}-P_2\right]^2[l-(a+b)]$
	$1{,}25P^2 l$
	$2P^2 l$

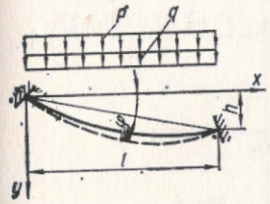
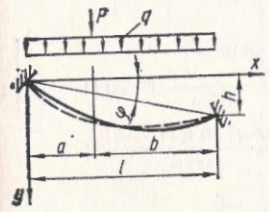
Схема нагружения	$\int_l Q^2 dx$
	$\frac{q^2 l^3}{12}[12\varkappa_1\varkappa_4(1-\varkappa_1)(1+\varkappa_4)+1]$
	$\frac{q^2 l^3}{12}+2P^2 a+2Pq(l-a)a$
	$\frac{l^3}{180}(4q_1^2+4q_2^2+7q_1 q_2)$
	$P^2 l\varkappa_1(1-\varkappa_1)+\frac{l^3}{180}(4q_1^2+4q_2^2+7q_1q_2)+$ $+\frac{pq_1}{3}l^2\varkappa_1(1-\varkappa_1)(2-\varkappa_1)+\frac{Pl^2}{3}q_2\varkappa_1(1+\varkappa_1)$
	$\frac{l^3}{240}(3q_1^2+8q_2^2+9q_1q_2)$
	$\frac{l^3}{2880}(13q_1^2+10q_1q_2+13q_2^2)$

Обозначения: $\varkappa_1=\frac{a}{l}$; $\varkappa_2=\frac{b}{l}$; $\varkappa_3=\frac{p}{q}$; $\varkappa_4=\frac{p}{ql}$

Приложение 2

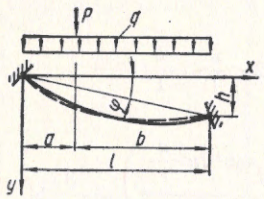
Формулы для расчета нитей конечной жесткости в упругой стадии

Расчетная схема нити	Уравнения
	А. *Нить, работающая с изгибом от начальной нагрузки* $y = h\xi_3 + \frac{5}{384}\frac{(q+p)\,l^4}{EI}\cdot\frac{48}{5u^4}\left[u^2\xi_3(1-\xi) - \frac{\operatorname{sh} u\xi\operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u}\right];$ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{(q+p)\,l^3}{24EI}\cdot\frac{6}{u^3}\left[u\left(\frac{1}{2}-\xi\right) - \frac{\operatorname{th} u}{2} + \frac{\operatorname{sh} u\xi\operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u}\right];$ $M = \frac{(q+p)\,l^2}{8}\cdot\frac{4}{u^2}\cdot\frac{\operatorname{sh} u\xi\operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u};$ $Q = \frac{(q+p)\,l}{2}\cdot\frac{2}{u}\left[\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi_3\operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u}\right];$ Выражение для определения параметра u: $\left(\frac{q+p}{q}\right)^2\frac{1}{u^4}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)^2 - \frac{5}{u^2}\times\left(1-\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] - \left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u^2 = \frac{1}{u_0^4}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)^2 - \frac{5}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right] - \left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u_0^2,$ где $\lambda = \frac{r}{f_0}$; r — радиус инерции поперечного сечения нити
	$y = h\xi_3 + \frac{5}{384}\cdot\frac{(q+p)\,l^4}{EI}\cdot\frac{48}{5u^4}\left\{u^2\xi_3(1-\xi) - u\left[1-\frac{q}{q+p}\cdot\frac{u^2}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]\times\frac{\operatorname{sh} u\xi\operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right\};$ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{(q+p)\,l^3}{24EI}\cdot\frac{6}{u^3}\left\{u\left(\frac{1}{2}-\xi\right) - u\left[1-\frac{q}{q+p}\cdot\frac{u^2}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sh} u\xi\operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right)\right\};$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$M = \frac{(q+p)\,l^2}{8}\cdot\frac{4}{u^2}\left\{\frac{1}{2} - u\left[1-\frac{q}{q+p}\times\frac{u^2}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]\left(\frac{1}{2\operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi\operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right)\right\};$ $Q = \frac{(q+p)\,l}{2}\cdot\frac{2}{u}\left\{u\left[1-\frac{q}{q+p}\cdot\frac{u^2}{u_0^2}\times\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi\operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right]\right\}.$ Выражение для определения параметра u: $\left(\frac{q+p}{q}\right)^2\frac{1}{u^4}\left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\left(1-\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\times\left(1+4\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] - 2\frac{q+p}{q}\left[\frac{1}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]\frac{1}{u^2}\cdot\left[1-\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\left(1-\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\times\left(1+2\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] + \left[\frac{1}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]^2\times\left[1-\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\left(1-\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] - \left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u^2 = \frac{1}{u_0^4}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)^2 - \frac{5}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right] - \left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u_0^2.$
	на участке $0 - a$: $y = h\xi_3 + \frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}\cdot\frac{48}{5u^4}\left[u^2\xi_3(1-\xi) - \frac{\operatorname{sh} u\xi\operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u}\right] + \frac{Pl^3}{48EI}\cdot\frac{6}{u^3}\times\left(2u\frac{b}{l}\xi - \frac{\operatorname{sh} 2u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u}\operatorname{sh} 2u\xi\right);$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{ql^3}{24EI}\cdot\frac{6}{u^3}\left[u\left(\frac{1}{2}-\xi\right)-\left(\frac{\operatorname{th}u}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}\right)\right]+$ $+\frac{Pl^3}{16EI}\cdot\frac{4}{u^2}\left(\frac{b}{l}-\frac{\operatorname{sh}2u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}2u}\operatorname{ch}2u\xi\right);$ $M=\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{4}{u^2}\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}+\frac{Pl}{4}\times$ $\times\frac{2}{u}\cdot\frac{\operatorname{sh}2u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}2u}\operatorname{sh}2u\xi;$ $Q=\frac{ql}{2}\cdot\frac{2}{u}\left(\frac{\operatorname{th}u}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}\right)+$ $+P\frac{\operatorname{sh}2u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}2u}\operatorname{ch}2u\xi;$
	на участке $a-l$: $y=h\xi+\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}\cdot\frac{48}{5u^4}\left[u^2\xi(1-\xi)-\right.$ $\left.-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}\right]+\frac{Pl^3}{48EI}\cdot\frac{6}{u^3}\left[2u\frac{a}{l}(1-\right.$ $\left.-\xi)-\frac{\operatorname{sh}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{sh}2u}\operatorname{sh}2u(1-\xi)\right];$ $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi+\frac{ql^3}{24EI}\cdot\frac{6}{u^3}\left[u\left(\frac{1}{2}-\xi\right)-\right.$ $\left.-\left(\frac{\operatorname{th}u}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}\right)\right]-$ $-\frac{Pl^2}{16EI}\cdot\frac{4}{u^2}\left[\frac{a}{l}-\frac{\operatorname{sh}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{sh}2u}\operatorname{ch}2u(1-\xi)\right];$ $M=\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{4}{u^2}\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}+$ $+\frac{Pl}{4}\cdot\frac{2}{u}\cdot\frac{\operatorname{sh}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{sh}2u}\operatorname{sh}2u(1-\xi);$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$Q=\frac{ql}{2}\cdot\frac{2}{u}\cdot\left(\frac{\operatorname{th}u}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi}{\operatorname{ch}u}\right)-$ $-P\frac{\operatorname{sh}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{sh}2u}\operatorname{ch}2u(1-\xi);$
	Выражение для определения параметра u: $\frac{1}{u^4}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{\operatorname{th}u}{u}\right)^2-\frac{5}{u^2}\left(1-\frac{\operatorname{th}u}{u}\right)\right]+$ $+\frac{P}{ql}\cdot\frac{4}{u^4}\left[2\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}+\frac{\operatorname{th}u}{u}\times\right.$ $\times\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}2u\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\operatorname{sh}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{sh}2u}-\frac{2}{u^2}\times$ $\left.\times\left(1-\frac{\operatorname{sh}2u\frac{a}{l}+\operatorname{sh}2u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}2u}\right)\right]+\left(\frac{P}{ql}\right)^2\times$ $\times\frac{2}{u^4}\left[2\left(2\cdot\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}^2u\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\operatorname{sh}^2u\frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2u}\right)-\frac{3}{u}\times\right.$ $\left.\times\frac{\operatorname{sh}2u\frac{a}{l}\operatorname{sh}2u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}2u}\right]-\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2u^2=$ $=\frac{1}{u_0^4}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{\operatorname{th}u_0}{u_0}\right)^2-\frac{5}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th}u_0}{u_0}\right)\right]-$ $-\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2u_0^2.$

Расчетная схема нити	Уравнения
	на участке $0 - a$: $$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2\xi\,(1-\xi) - \right.$$ $$\left. - u\left[1 - \frac{u^2}{u_0^2}\left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right] \cdot \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right\} +$$ $$+ \frac{Pl^3}{192EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left\{ u\xi \frac{u\frac{b}{l}\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u\frac{b}{l}\operatorname{ch} u\frac{a}{l}}{u\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \right.$$ $$- \operatorname{sh} u\frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\left(\frac{a}{l} - \xi\right)}{\operatorname{sh} u} +$$ $$+ \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \times$$ $$\left. \times u \frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh} u\frac{b}{l}\operatorname{ch} u\frac{a}{l} - \frac{b}{l}\operatorname{sh} u\frac{a}{l}\operatorname{ch} u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$ $$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u\left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \right.$$ $$- u\left[1 - \frac{u^2}{u_0^2}\left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]\left(\frac{1}{2} - \right.$$ $$\left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right) + \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{8}{u^2} \times$$ $$\times \left\{ \operatorname{sh} u\frac{b}{l} \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\left(\frac{a}{l} - \xi\right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$ $$- \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u} u \times$$ $$\left. \times \frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh} u\frac{b}{l}\operatorname{ch} u\frac{a}{l} - \frac{b}{l}\operatorname{sh} u\frac{a}{l}\operatorname{ch} u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u\left[1 - \frac{u^2}{u_0^2}\left(1 - \right.\right.\right.$$ $$\left.\left.\left. - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right] \cdot \left[\frac{1}{2\operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right]\right\} +$$ $$+ \frac{Pl}{8} \cdot \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u\frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\left(\frac{a}{l} - \xi\right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$ $$- \frac{\operatorname{sh} u\frac{a}{l}\operatorname{sh} u\frac{b}{l}}{2\operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right] \times$$ $$\left. \times u \frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh} u\frac{b}{l}\operatorname{ch} u\frac{a}{l} - \frac{b}{l}\operatorname{sh} u\frac{a}{l}\operatorname{ch} u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$ $$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} u\left[1 - \frac{u^2}{u_0^2}\left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right] \times$$ $$\times \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right] + P \cdot 2 \times$$ $$\times \left\{ - \operatorname{sh} u\frac{b}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\left(\frac{a}{l} - \xi\right)}{\operatorname{sh} u} + \right.$$ $$+ \frac{\operatorname{sh} u\frac{b}{l}\operatorname{ch} u\frac{a}{l}}{2\operatorname{sh} u} - \left[\frac{1}{2\operatorname{th} u} - \right.$$ $$\left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right] \cdot u \times \right.$$ $$\left. \times \frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh} u\frac{b}{l}\operatorname{ch} u\frac{a}{l} - \frac{b}{l}\operatorname{sh} u\frac{a}{l}\operatorname{ch} u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$

Расчетная схема нити	Уравнения

на участке $a - l$:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left\{ u^2 \xi (1-\xi) - u \times \right.$$

$$\times \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} u\xi \cdot \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \Bigg\} +$$

$$+ \frac{Pl^3}{192EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left\{ u \frac{a}{l} - u\xi \times \right.$$

$$\times \frac{u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \times$$

$$\left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left\{ u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - u \times \right.$$

$$\times \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \cdot \left(\frac{1}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \Bigg\} + \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{8}{u^2} \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$- \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \times$$

$$\left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$

Расчетная схема нити	Уравнения

$$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{Pl}{8} \cdot \frac{8}{u} \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$- \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times$$

$$\left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} u \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u_0}{u_0} \right) \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - P \cdot 2 \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right.$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \cdot u \times$$

$$\left. \times \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$

Расчетная схема нити	Уравнения

Выражение для определения параметра u:

$$\frac{1}{u^4}\left[\frac{5}{3}-\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\left(1-\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\left(1+4\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right]-$$

$$-2\left[\frac{1}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]\cdot\frac{1}{u^2}\left[1-\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\left(1+2\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right]+\left[\frac{1}{u_0^2}\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\operatorname{th} u_0}{u_0}\right)\right]^2\cdot\left[1-\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\left(1-\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right]+\frac{P}{ql}\times$$

$$\times\left\{\frac{4}{u^4}\left[2\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{\frac{a}{l}\operatorname{ch}2u\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\operatorname{ch}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{th}u\cdot\operatorname{sh}2u}-\frac{3}{u}\times$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}u}\right]-2\left[\frac{1}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th}u_0}{u_0}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{2}{u^2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\right)+\right.$$

$$+\frac{\frac{a}{l}\operatorname{ch}2u\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\operatorname{ch}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{th}u\operatorname{sh}2u}-$$

$$\left.\left.-\frac{\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}}{u\operatorname{sh}u}\right]\right\}+\left(\frac{P}{ql}\right)^2\frac{4}{u^2}\times$$

$$\times\left\{-\left(\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{ch}u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u}\right)^2\times\right.$$

$$\times\left(1+\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}\right)+\frac{1}{u}\times$$

$$\left.\times\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{ch}u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u}\times\right.$$

Расчетная схема нити	Уравнения

$$\times\left[\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{ch}u\frac{b}{l}}{\operatorname{th}u\,(u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u)}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}2u\frac{b}{l}-\frac{b}{l}\operatorname{sh}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{th}u\operatorname{sh}2u}\right]+\frac{1}{u^3}\times$$

$$\times\left[1-\frac{1}{\operatorname{th}^2 u}+2\frac{\frac{a}{l}\operatorname{ch}2u\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\operatorname{ch}2u\frac{a}{l}}{\operatorname{th}u\operatorname{sh}2u}+\right.$$

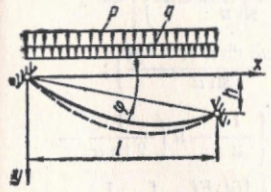
$$+\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}^2 u\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\operatorname{sh}^2 u\frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2 u}+$$

$$\left.+2\left(\frac{\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}u}\right)^2\right]-\frac{3}{u^3}\times$$

$$\times\left.\frac{\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}u}\right\}-\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2u^2=$$

$$=\frac{1}{u_0^4}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{\operatorname{th}u_0}{u_0}\right)^2-\frac{5}{u_0^2}\left(1-\frac{\operatorname{th}u_0}{u_0}\right)\right]-$$

$$-\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2u_0^2.$$



Б. *Нить, работающая без изгиба от начальной нагрузки*

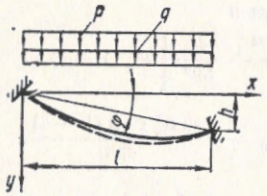
$$y=h\xi+\frac{5}{384}\cdot\frac{(q+p)\,l^4}{EI}\cdot\frac{48}{5u^4}\left[u^2\xi\,(1-\xi)-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}\right]+4f_0\frac{1}{u^2}\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch}u};$$

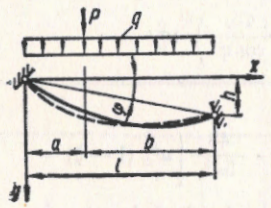
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi+\frac{(q+p)\,l^3}{24EI}\cdot\frac{6}{u^3}\left[u\left(\frac{1}{2}-\xi\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{th}u}{2}+\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}\right]+\frac{8f_0}{l}\times$$

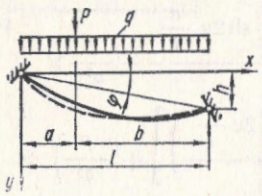
$$\times\frac{1}{u}\left[\frac{\operatorname{th}u}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch}u}\right];$$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$M = \frac{(q+p)\,l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} -$ $- \frac{16 f_0 EI}{l^2} \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch} u};$ $Q = \frac{(q+p)\,l}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] -$ $- \frac{32 f_0 EI}{l^3} u \left[\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right].$ Выражение для определения параметра u: $\left(\frac{q+p}{q}\right)^2 \frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \right.\right.$ $\left.\left. - \frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] + \frac{5}{6} \left(\frac{q+p}{q}\right) \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \right.\right.$ $\left.\left. - \frac{\operatorname{th} u}{u}\right) - \left(\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)^2 \right] + \left(\frac{5}{12} \Phi\right)^2 \left[\left(\frac{\operatorname{th} u}{u}\right)^2 - \right.$ $\left. - \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] - \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u^2 =$ $= \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi\right)^2 - \left(\frac{5}{12} \frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u_0^2.$
	$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{(q+p)\,l^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi\,(1-\xi) - \right.$ $\left. - u \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + 4 f_0 \frac{1}{u} \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u};$ $\operatorname{th}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{(q+p)\,l^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \right.$ $\left. - u \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right)\right] +$ $+ \frac{8 f_0}{l} \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right);$ $M = \frac{(q+p)\,l^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left[\frac{1}{2} - u \left(\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right.\right.$ $\left.\left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u}\right)\right] + \frac{16 f_0 EI}{l^2} u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right];$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$Q = \frac{(q+p)\,l}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] -$ $- \frac{32 f_0 EI}{l^3} u^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right),$ Выражение для определения параметра «u»: $\left(\frac{q+p}{q}\right)^2 \cdot \frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u}\right) \times \right.$ $\left. \times \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] - \frac{5}{6} \left(\frac{q+p}{q}\right) \Phi \frac{1}{u^2} \left[1 - \right.$ $\left. - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u}\right) \cdot \left(1 + 2 \frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] +$ $+ \left(\frac{5}{12} \Phi\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u}\right)\right] -$ $- \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{12} \Phi\right)^2 -$ $- \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u_0^2.$
	на участке $0 - a$: $y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi\,(1-\xi) - \right.$ $\left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] + 4 f_0 \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} +$ $+ \frac{Pl^3}{48EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left(2u \frac{b}{l} \xi - \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{sh} 2u\xi \right);$ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{ql^3}{24EI} \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \right.$ $\left. - \left(\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch} u}\right)\right] + \frac{8 f_0}{l} \times$ $\times \frac{1}{u} \left[\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u\,(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] + \frac{Pl^2}{16EI} \times$ $\times \frac{4}{u^2} \left(\frac{b}{l} - \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{ch} 2u\xi \right);$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} -$ $- \frac{16 f_0 EI}{l^2} \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} +$ $+ \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{sh} 2u\xi;$ $Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left[\frac{\operatorname{th} u}{u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] -$ $- \frac{32 f_0 EI}{l^3} u \left[\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] +$ $+ P \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{ch} 2u\xi;$ на участке $a - l$: $y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^2 \xi (1-\xi) - \right.$ $\left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] + 4 f_0 \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} +$ $+ \frac{Pl^3}{48EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[2u \frac{a}{l} (1-\xi) - \right.$ $\left. - \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{sh} 2u(1-\xi) \right];$ $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \right.$ $\left. - \left(\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right) \right] + \frac{8 f_0}{l} \cdot \frac{1}{u} \times$ $\times \left[\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right] - \frac{Pl^2}{16EI} \times$ $\times \frac{4}{u^2} \left[\frac{a}{l} - \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{ch} 2u(1-\xi) \right];$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$M = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} u(1-)}{\operatorname{ch} u} - \frac{16 f_0 EI}{l^2} \times$ $\times \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} + \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{u} \times$ $\times \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{sh} 2u(1-\xi);$ $Q = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{u} \left(\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right) -$ $- \frac{32 f_0 EI}{l^3} u \left(\frac{\operatorname{th} u}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u(1-\xi)}{\operatorname{ch} u} \right) -$ $- P \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{ch} 2u(1-\xi).$ Выражение для определения параметра u: $\frac{1}{u^4} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 - \frac{5}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] +$ $+ \frac{P}{ql} \cdot \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \frac{\operatorname{th} u}{u} \times \right.$ $\times \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh} 2u} - \frac{2}{u^2} \times$ $\left. \times \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l} + \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \right) \right] + \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \times$ $\times \frac{2}{u^4} \left[2 \left(2 \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh}^2 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{sh}^2 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{sh}^2 2u} \right) - \frac{3}{u} \times \right.$ $\left. \times \frac{\operatorname{sh} 2u \frac{a}{l} \operatorname{sh} 2u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} 2u} \right] + \frac{5}{6} \Phi \frac{1}{u^2} \left[\frac{3}{u^2} \left(1 - \right. \right.$ $\left. \left. - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) - \left(\frac{\operatorname{th} u}{u} \right)^2 \right] + \frac{5}{3} \left(\frac{P}{ql} \right) \Phi \frac{1}{u^2} \times$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$$\times\left[\frac{1}{u^2}\left(1-\frac{\operatorname{sh}2u\,\frac{a}{l}+\operatorname{sh}2u\,\frac{b}{l}}{\operatorname{sh}2u}\right)-\frac{\operatorname{th}u}{u}\times\right.$$ $$\left.\times\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}2u\,\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\operatorname{sh}2u\,\frac{a}{l}}{\operatorname{sh}2u}\right]+\left(\frac{5}{12}\Phi\right)^2\times$$ $$\times\left[\left(\frac{\operatorname{th}u}{u}\right)^2-\frac{1}{u^2}\left(1-\frac{\operatorname{th}u}{u}\right)\right]-\left(\frac{5}{12}\times\right.$$ $$\left.\times\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2u^2=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\Phi\right)^2-$$ $$-\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2u_0^2.$$
	на участке $0-a$: $$y=h\xi+\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}\cdot\frac{48}{5u^4}\left[u^2\xi(1-\xi)-\right.$$ $$\left.-u\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]+4f_0\frac{1}{u}\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}+$$ $$+\frac{Pl^3}{192EI}\cdot\frac{48}{u^3}\left[u\xi\frac{u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}}{u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u}-\right.$$ $$-\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\cdot\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u\left(\frac{a}{l}-\xi\right)}{\operatorname{sh}u}+$$ $$+\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}u\times$$ $$\left.\times\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}}{u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u}\right];$$ $$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi+\frac{ql^3}{24EI}\cdot\frac{6}{u^3}\left\{u\left(\frac{1}{2}-\xi\right)-\right.$$ $$\left.-u\left[\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]\right\}+\frac{8f_0}{l}\times$$ $$\times\left[\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]+\frac{Pl^2}{16EI}\times$$ $$\times\frac{8}{u^2}\left[\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\cdot\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u\left(\frac{a}{l}-\xi\right)}{\operatorname{sh}u}-\right.$$ $$\left.-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\times\right.$$

Расчетная схема нити	Уравнения
	$$\left.\times u\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{ch}u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u}\right];$$ $$M=\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{4}{u^2}\left\{\frac{1}{2}-u\left[\frac{1}{2\operatorname{th}u}-\right.\right.$$ $$\left.\left.-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]\right\}+\frac{16f_0EI}{l^2}u\left[\frac{1}{2\operatorname{th}u}-\right.$$ $$\left.-\frac{1}{2u}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]+\frac{Pl}{8}\cdot\frac{8}{u}\times$$ $$\times\left\{\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\cdot\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u\left(\frac{a}{l}-\xi\right)}{\operatorname{sh}u}-\right.$$ $$-\frac{\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}}{2\operatorname{sh}u}+\left[\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]\times$$ $$\left.\times u\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{ch}u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u}\right\};$$ $$Q=\frac{ql}{2}\cdot2\left[\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]-$$ $$-\frac{32f_0EI}{l^3}u^2\left[\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{ch}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]+P\cdot2\times$$ $$\times\left\{-\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u\left(\frac{a}{l}-\xi\right)}{\operatorname{sh}u}+\right.$$ $$+\frac{\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}}{2\operatorname{sh}u}-\left[\frac{1}{2\operatorname{th}u}-\right.$$ $$\left.\left.-\frac{\operatorname{sh}u\xi\operatorname{sh}u(1-\xi)}{\operatorname{sh}u}\right]\times\right.$$ $$\left.\times u\frac{\frac{a}{l}\operatorname{sh}u\frac{b}{l}\operatorname{ch}u\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\operatorname{sh}u\frac{a}{l}\operatorname{ch}u\frac{b}{l}}{u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u}\right\};$$

Расчетная схема нити	Уравнения

на участке $a - i$:

$$y = h\xi + \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{48}{5u^4} \left[u^3 \xi (1-\xi) - \right.$$

$$\left. - u \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + 4f_0 \frac{1}{u} \cdot \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} +$$

$$+ \frac{Pl^3}{192EI} \cdot \frac{48}{u^3} \left[u \frac{a}{l} - u\xi \times \right.$$

$$\times \frac{u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} - \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \times$$

$$\left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right];$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi + \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{6}{u^3} \left[u \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \right.$$

$$\left. - u \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right) \right] + \frac{8f_0}{l} \left[\frac{1}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{8}{u^2} \times$$

$$\times \left[\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \times \right.$$

$$\left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right];$$

$$M = -\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{4}{u^2} \left\{ \frac{1}{2} - u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \right\} + \frac{16f_0 EI}{l^2} u \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2u} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] + \frac{Pl}{8} \cdot \frac{8}{u} \times$$

Расчетная схема нити	Уравнения

$$\times \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{ch} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} - \right.$$

$$- \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times$$

$$\left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\};$$

$$Q = \frac{ql}{2} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] -$$

$$- \frac{32 f_0 EI}{l^3} u^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{ch} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] - P \cdot 2 \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \cdot \frac{\operatorname{sh} u (1-\xi) \operatorname{sh} u \left(\frac{a}{l} - \xi \right)}{\operatorname{sh} u} + \right.$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{2 \operatorname{sh} u} + \left[\frac{1}{2 \operatorname{th} u} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\operatorname{sh} u\xi \operatorname{sh} u (1-\xi)}{\operatorname{sh} u} \right] \times \right.$$

$$\left. \times u \frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right\}.$$

Выражение для определения параметра u:

$$\frac{1}{u^4} \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \left(1 + 4 \frac{\operatorname{th} u}{u} \right) \right] +$$

$$+ \frac{P}{ql} \cdot \frac{4}{u^4} \left[2 \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 u} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\frac{a}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \operatorname{ch} 2u \frac{a}{l}}{\operatorname{th} u \operatorname{sh} 2u} - \frac{3}{u} \times$$

$$\left. \times \frac{\operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l}}{\operatorname{sh} u} \right] + \left(\frac{P}{ql} \right)^2 \cdot \frac{4}{u^2} \times$$

$$\times \left\{ - \left(\frac{\frac{a}{l} \operatorname{sh} u \frac{b}{l} \operatorname{ch} u \frac{a}{l} - \frac{b}{l} \operatorname{sh} u \frac{a}{l} \operatorname{ch} u \frac{b}{l}}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} \right)^2 \times \right.$$

Расчетная схема нити	Уравнения

$$\times\left(1+\frac{1}{\mathrm{th}^2 u}\right)+\frac{1}{u}\times$$

$$\times\frac{\frac{a}{l}\mathrm{sh}\,u\,\frac{b}{l}\mathrm{ch}\,u\,\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\mathrm{sh}\,u\,\frac{a}{l}\mathrm{ch}\,u\,\frac{b}{l}}{u\,\mathrm{ch}\,u-\mathrm{sh}\,u}\times$$

$$\times\left[\frac{\frac{a}{l}\mathrm{sh}\,u\,\frac{b}{l}\mathrm{ch}\,u\,\frac{a}{l}-\frac{b}{l}\mathrm{sh}\,u\,\frac{a}{l}\mathrm{ch}\,u\,\frac{b}{l}}{\mathrm{th}\,u\,(u\,\mathrm{ch}\,u-\mathrm{sh}\,u)}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\frac{a}{l}\mathrm{sh}\,2u\,\frac{b}{l}-\frac{b}{l}\mathrm{sh}\,2u\,\frac{a}{l}}{\mathrm{th}\,u\,\mathrm{sh}\,2u}\right]+\frac{1}{u^2}\times$$

$$\times\left[1-\frac{1}{\mathrm{th}^2 u}+2\frac{\frac{a}{l}\mathrm{ch}\,2u\,\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\mathrm{ch}\,2u\,\frac{a}{l}}{\mathrm{th}\,u\,\mathrm{sh}\,2u}+\right.$$

$$+\frac{\frac{a}{l}\mathrm{sh}^2 u\,\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\mathrm{sh}^2 u\,\frac{a}{l}}{\mathrm{sh}^2 u}+$$

$$\left.+2\left(\frac{\mathrm{sh}\,u\,\frac{a}{l}\,\mathrm{sh}\,u\,\frac{b}{l}}{\mathrm{sh}\,u}\right)^2\right]-\frac{3}{u^3}\times$$

$$\times\left.\frac{\mathrm{sh}\,u\,\frac{a}{l}\,\mathrm{sh}\,u\,\frac{b}{l}}{\mathrm{sh}\,u}\right\}-\left(\frac{5}{6}\Phi\right)\frac{1}{u^2}\left[1-\right.$$

$$-\frac{1}{\mathrm{th}^2 u}\left(1-\frac{\mathrm{th}\,u}{u}\right)\left(1+2\frac{\mathrm{th}\,u}{u}\right)\left.\right]-\frac{5}{3}\times$$

$$\times\frac{P}{ql}\Phi\frac{1}{u^2}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{th}^2 u}\right)+\right.$$

$$+\frac{\frac{a}{l}\mathrm{ch}\,2u\,\frac{b}{l}+\frac{b}{l}\mathrm{ch}\,2u\,\frac{a}{l}}{\mathrm{th}\,u\,\mathrm{sh}\,2u}-$$

$$\left.-\frac{\mathrm{sh}\,u\,\frac{a}{l}\,\mathrm{sh}\,u\,\frac{b}{l}}{u\,\mathrm{sh}\,u}\right]+\left(\frac{5}{12}\Phi\right)^2\cdot\left[1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\mathrm{th}^2 u}\left(1-\frac{\mathrm{th}\,u}{u}\right)\right]-\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\right)^2 u^2=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\Phi\right)^2-\frac{5}{12}\cdot\frac{\Phi\lambda}{\cos\varphi}\Big)^2 u_0^2.$$

ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА ДЛЯ ЦИФРОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ «Наири»

Программа № 1

расчета нитей конечной жесткости в упругой стадии при действии равномерно распределенной нагрузки

а) исходные данные

a — F — площадь поперечного сечения нити;
e — E — модуль упругости;
$н$ — I — момент инерции поперечного сечения нити;
l — длина пролета;
$ц$ — $l/40$ — длина участка деления нити;
$д$ — начальная нагрузка;

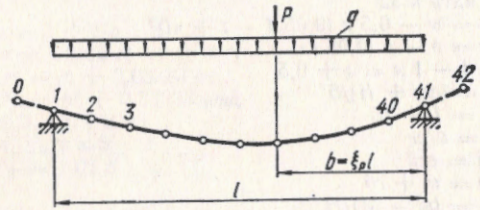


Рис. 44. Расчетная схема.

p — дополнительная нагрузка;
$ч$ — $\xi_p = \frac{b}{l}$ — параметр, характеризующий положение дополнительной нагрузки;
y_i — $y_k^{(i)}$ — ординаты кривой начального приближения;
x — β — коэффициент сходимости;
H — распор;

б) результаты расчета, выводимые на печать

y_i — $y_k^{(i)}$ — значения ординат кривой провисания, полученные на соответствующем шаге итераций;

$в_i$ — $f_k^{(i)}(\vec{y}^{(i)})$;
M, u, z, $б$ — соответственно изгибающий момент, нормальная сила, кривизна и относительное удлинение оси нити, найденные для k-го поперечного сечения;
$о$ — параметр, используемый для проверки условия неразрывности деформаций.

6—3—1973 г 10 «Наири»
$i = 42$ *уз*
1 — введем *а е й l ц д р ч*
2 — допустим $i = 0$
3 — введем y_i
4 — вставим $i = i + 1$
5 — если $i < 43$, идти к 3
6 — введем xH
7 — допустим $n = 0$
8 — вставим $n = n + 1$
9 — допустим $i = 0$ $л = 0$ $г = 0$ $ш = 0$
10 — если $л < 0{,}4$, идти к 16
11 — если $л > 19{,}7$, идти к 16
12 — вставим $c = c - 2$

13 — если $c > 1$ идти к 17
14 — допустим $c = 4$
15 — идти к 17
16 — допустим $c = 1$
17 — вычислим $b = y_l$
18 — вставим $i = i + 1$
19 — вычислим $б = y_i$
20 — вставим $i = i + 1$
21 — вычислим $m = 0{,}5\ (y_l - b)/ц$
22 — вычислим $ы = (2б - y_l - в)/цц$
23 — вычислим $б = 1 + mm$
24 — вычислим $б = \sqrt{б}$
25 — вычислим $z = ы/б^3$
26 — вычислим $ы = 0{,}025\ лll\ (д + рч^2 - 0{,}05дл)$
27 — вычислим $о = 0{,}5\ дl\ (1 - 0{,}1л) + 0{,}5\ рч^2 l$
28 — вычислим $в = (1 - ч)\ 20$
29 — если $л \leqslant в$, идти к 32
30 — вычислим $ы = ы - 0{,}5\ р\ (0{,}05лl - l + чl)^2$
31 — вычислим $о = о - р\ (0{,}05\ lл - l + чl)$
32 — вставим $i = i - 1$ $л = л + 0{,}5$
33 — вычислим $и = (от + Н)/б$
34 — вычислим $Г = Г + сб$
35 — вычислим $б = и/ае$
36 — вычислим $М = егй$
37 — вычислим $ш = ш + сб$
38 — вычислим $з_i = (ы - М)/Н$
39 — если $n > 20$, идти к 56
40 — если $i < 41$, идти к 10
41 — допустим $i = 0$
42 — вставим $i = i + 1$
43 — вычислим $y_i = (1 - х)\ y_i + хз_i$
44 — если $i < 41$, идти к 42
45 — допустим $i = 2$
46 — вычислим $о = -y_i$
47 — допустим $i = 0$ $y_i = 0$
48 — допустим $i = 40$
49 — вычислим $о = -y_i$
50 — допустим $i = 42$ $y_i = о$
51 — если $n = 20$, идти к 54
52 — если $n < 20$, идти к 8
53 — вычислим $о = 0{,}33330\ ц\ (Г - ш)$
54 — печатаем с 8 знаками $о$
55 — идти к 8
56 — печатаем с 8 знаками $y_i з_i М$
57 — печатаем с 8 знаками $и\ z\ б$
58 — если $i < 41$, идти к 10
59 — идти к 1
исполним 1.

Примечания: 1. Нить делится по длине на 40 участков. Поперечное сечение может быть произвольной формы, но симметричным относительно плоскости изгиба.

2. Точность определения ординат кривой провисания нити при фиксированном значении распора достигается за счет количества итерационных циклов (счетчик «п»). По программе, до вывода на печать результатов расчета, выполняется 20 таких циклов.

3. Параметр «о», полученный для начального состояния нити, используется в дальнейшем для уточнения распора при действии дополнительной нагрузки. Распор H на соответствующем этапе расчета считается найденным, если для этого этапа значение «о» отличается от начального не более, чем на заданную величину погрешности.

Программа № 2

расчета нитей конечной жесткости за пределом упругости при действии равномерно распределенной нагрузки

Программа № 2 отличается от программы № 1 наличием одного дополнительного блока, который следует после оператора 36, а именно:

37 — вычислим $о = б + 15\ zs$
38 — если $о < 0{,}0011428$, идти к 55
39 — допустим $в = 0$ $m = 0$ $M = 0$
40 — вставим $в = в + 1$
41 — вычислим $щ = -0{,}5\ s + s\ (в - 15)$
42 — вычислим $t = б + zщ$
43 — допустим $о = |t|$
44 — если $о > 0{,}00114285$, идти к 47
45 — вычислим $о = et$
46 — идти к 49
47 — вычислим $t = 1 + t/о$
48 — вычислим $о = 24000\ (t - 1)$
49 — вычислим $m = m + 0{,}03333\ ао$
50 — вычислим $M = M + 0{,}03333\ аощ$
51 — если $в < 29{,}3$, идти к 40
52 — если $m \geqslant и$, идти к 55
53 — вычислим $б_T = 1{,}01\ б$
54 — идти к 39.

Остальные операторы (55—77) программы № 2, за исключением нумерации, аналогичны операторам 37—59 программы № 1. При этом следует только учесть, что операторы 39, 44 и 51 программы № 1 в программе № 2 будут иметь иной номер адреса условного перехода, увеличенный на число 18.

Примечания: 1. Приведенный дополнительный блок программы составлен для прямоугольного поперечного сечения нити. При составлении этого блока принято $\sigma_t = 2400\ кг/см^2$; $E = 2{,}1 \cdot 10^6\ кг/см^2$.

2. В программу № 2 вводятся дополнительная информация о поперечном сечении нити: s — $h/30$, где h — высота поперечного сечения нити.

Программа № 3

расчета нитей конечной жесткости в упругой стадии при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки

Обозначения и примечания для программы № 1 справедливы и для программы № 3

3—4—1973 г. 36 «Наири»

$i = 42$ $уз$

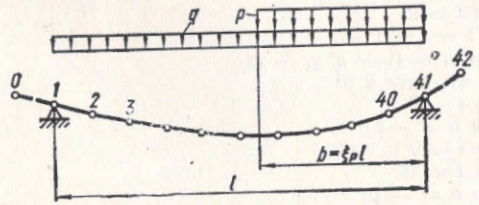


Рис. 45. Расчетная схема.

1 — введем $а\ е\ ц\ l\ й\ д\ р\ ч$
2 — допустим $i = 0$
3 — введем y_i
4 — вставим $i = i + 1$
5 — если $i <$ 43, идти к 3

6 — введем $хН$
7— допустим $п = 0$
8 — вставим $п = п + 1$
9 — допустим $і = 0$ $л = 0$ $Г = 0$ $ш = 0$
10 — если $л < 0{,}9$, идти к 16
11 — если $л > 39{,}7$, идти к 16
12 — если $с > 1$, идти к 17
13 — вставим $с = с - 2$
14 — допустим $с = 4$
15 — идти к 17
16 — допустим $с = 1$
17 — вычислим $в = y_і$
18 — вставим $і = і + 2$
19 — вычислим $т = 0{,}5\ (y_і - в)/ц$
20 — если $і = 2$, идти к 30
21 — если $і = 42$, идти к 30
22 — вычислим $о = y_і$
23 — вставим $і = і + 1$
24 — вычислим $М = y_і$
25 — вставим $і = і - 2$
26 — вычислим $щ = y_і$
27 — вставим $і = і - 2$
28 — вычислим $ы = (y_і - 16\,в + 30щ - 16о + М)/12цц$
29 — идти к 32
30 — допустим $ы = 0$
31 — вставим $і = і - 3$
32 — вычислим $б = 1 + тт$
33 — вычислим $б = \sqrt{б}$
34 — вычислим $z = ы/б^3$
35 — вычислим $о = 0{,}5дl + чр - 0{,}025длl$
36 — вычислим $ы = (0{,}5дl + чр)\ 0{,}025лl - 0{,}5д\ (0{,}025_л)^3$
37 — вычислим $в = (1 - ч)\ 40$
38 — если $л \leqslant в$, идти к 41
39 — вычислим $о = о - р$
40 — вычислим $ы = ы - р\ (0{,}025лl + чl - l)$
41 — вставим $і = і + 2$ $л = л + 1$
42 — вычислим $и = (от + Н)/б$
43 — вычислим $Г = Г + сб$
44 — вычислим $М = езй$
45 — вычислим $б = и/ае$
46 — вычислим $ш = ш + сб$
47 — вычислим $в_l = (ы - М)/Н$
48 — если $п > 20$, идти к 65
49 — если $і < 41$, идти к 10
50 — допустим $і = 0$
51 — вставим $і = і + 1$
52 — вычислим $y_і = (1 - х)\ y_і + хз_і$
53 — если $і < 41$, идти к 51
54 — допустим $і = 2$
55 — вычислим $о = - y_і$
56 — допустим $і = 0$ $y_і = 0$
57 — допустим $і = 40$
58 — вычислим $о = - y_і$
59 — допустим $і = 42$ $y_і = 0$
60 — если $п = 20$, идти к 62
61 — если $п < 20$, идти к 8
62 — вычислим $о = 0{,}333333\ ц\ (Г - ш)$
63 — печатаем с 8 знаками $о$
64 — идти к 8
65 — печатаем с 8 знаками $y_і з_і М$

66 — печатаем с 8 знаками $изб$
67 — если $і < 41$, идти к 10
68 — идти к 1
исполним 1.

Программа № 4

расчета нитей конечной жесткости за пределом упругости при действии дополнительной сосредоточенной нагрузки
Программа № 4 включает все операторы программы № 3 и имеет еще один блок, который по структуре ничем не отличается от дополнительного блока программы № 2.

В программах № 3 и 4 операторы 1—45 одинаковы. Дополнительный блок программы № 4 следует после оператора 45, а за ним записываются в том же порядке, но с изменением номера, остальные операторы программы № 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. В. Об учете местных изгибных деформаций в системах типа гибкой нити. Труды МИИТ, вып. 364, М., 1971.
2. Алешинский Ю. Н. Некоторые вопросы расчета сооружений по деформированной схеме. Труды МИИТ, вып. 152, М., 1962.
3. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., «Высшая школа», 1968.
4. Безухов Н. И. О некоторых обобщениях основных теорем строительной механики стержневых систем на двухмерные и трехмерные, линейные и нелинейные, динамические и реологические задачи. Сб. «Строительная механика». М., Стройиздат, 1966.
5. Безухов Н. И. Расчет за пределом упругости, несущая способность и предельные состояния сооружений. Сб. «Строительная механика в СССР. 1917—1967». М., Стройиздат, 1969.
6. Беленький Л. М. Особенности пластического деформирования балок при сложном изгибе. Труды Калининградского технического института рыбной промышленности и хозяйства, вып. 33. Калининград, 1970.
7. Беленький Л. М. Сложный изгиб жестко-пластических балок, загруженных поперечными сосредоточенными силами. Труды Калининградского технического института рыбной промышленности и хозяйства, вып. 33, Калининград, 1970.
8. Беленький Л. М. Статический метод определения больших пластических деформаций конструкций. Труды Калининградского технического института рыбной промышленности и хозяйства, вып. 22. Калининград, 1970.
9. Бельский Г. Е. К расчету плоских рам за пределом упругости. Труды ЦНИИСК, вып. 13, М., 1970.
10. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1959.
11. Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. М., Стройиздат, 1972.
12. Бубнов И. Г. Труды по теории пластин. М., Гостехтеориздат, 1953.
13. Виноградов А. И. Об определении упруго-пластических перемещений в стержневых системах. Труды Харьковского института инженеров железнодорожного транспорта, вып. 26, Харьков, 1956.
14. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
15. Гастев В. А. Основы технической теории пластического изгиба стержней при больших пластических деформациях. Научные труды ЛИСИ, вып. 11. М., Госстройиздат, 1951.
16. Геммерлинг Г. А. О постулате пластичности. ПММ, т. 28, вып. I, 1964.
17. Геммерлинг А. В. Общий метод расчета рам из упруго-пластического материала. «Строительная механика и расчет сооружений», № 3, 1968.
18. Геммерлинг А. В. Предельные состояния для статических неопределимых конструкций. Сб. «Развитие методики расчета по предельным состояниям». М., Стройиздат, 1971.
19. Гвоздев А. А. Расчет конструкций по предельным состояниям и нормы проектирования. «Строительная механика и расчет сооружений», 1970, № 2.
20. Гольденблат И. И. Экстремальные и вариационные принципы в теории сооружений. Сб. «Строительная механика в СССР, 1917—1957». М., Стройиздат, 1957.
21. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970.
22. Дикович И. Л. Статика упруго-пластических балок судовых конструкций. Л., «Судостроение», 1967.
23. Дмитриев Л. Г., Сосис П. М. Программирование расчета пространственных конструкций. Киев, Госстройиздат, 1963.
24. Друккер Д. Соотношение между напряжениями и деформациями в пластической области. Сб. «Реология». ИЛ, 1962.
25. Ершов Н. Ф. Определение предельной нагрузки обшивки судна. Труды Одесского института инженеров морского флота, вып. 11, Одесса, 1955.
26. Ершов Н. Ф. Расчет гибких связей с учетом пластических деформаций. Докторская диссертация. Горьковский институт инженеров водного транспорта, 1962.
27. Ершов Н. Ф. Упруго-пластический расчет пластин с распором. «Прикладная механика», т. 9, 1963, № 6.
28. Ершов Н. Ф. Цилиндрический изгиб пластин с распором, выполненным из линейно упрочняющихся материалов. Труды Горьковского политехнического института, вып. 22, 1966, № 3.
29. Жарков Г. М., Рыжов А. Б. Программирование для цифровой вычислительной машины «Наири». Изд-во МГУ, 1973.
30. Жуков А. М. Некоторые особенности поведения металлов при упруго-пластическом деформировании. Сб. «Вопросы теории пластичности». Изд-во АН СССР, М., 1961.
31. Ильюшин А. А. О постулате пластичности. ПММ, т. 24, вып. 3, 1960.
32. Качурин В. К. Теория висячих систем. М.-Л., Госстройиздат, 1962.
33. Киреенко В. И. и др. Висячие трубопроводные переходы Киев, «Будівельник», 1968.
34. Кирсанов Н. М. Расчет однопролетных мостов с учетом прогибов. Сб. трудов МИСИ. М., Госстройиздат, 1956, № 10.
35. Кирсанов Н. М. Вопросы проектирования висячих покрытий с подвесным транспортом. НИИЖБ, труды научной сессии института, М., 1971.
36. Кирсанов Н. М. К расчету «жестких» нитей по деформированной схеме. Труды Воронежского инженерно-строительного института, вып. 4, Воронеж, 1968, № 15.
37. Киселев В. А. Рациональные формы арок и подвесных систем. М., Госстройиздат, 1953.
38. Колесников Л. А. Метод исследования больших перемещений стержня в упруго-пластической стадии. «Прикладная механика», т. 4, 1958, № 3.
39. Колесников Л. А. Численный метод последовательных приближений для исследования конечных перемещений гибких упругих стержней при сложной нагрузке. «Инженерный сборник», 1958, № 26.
40. Коломиец В. П. Метод определения напряжений и деформаций в сечении балки при сложном нагружении с учетом действительной диаграммы (σ — ε). «Известия вузов. Авиационная техника», 1966, № 1.
41. Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М., Изд-во иностранной литературы, 1961.
42. Крыжановский В. П. и др. К расчету упруго-пластических конструкций на приспособляемость. Сб. «Сопротивление материалов и теория сооружений», вып. 15. Киев, «Будівельник», 1971.
43. Кузнецов Б. Н. Приспособляемость статически определимых стержней при различных сочетаниях нагрузок. «Строительная механика и расчет сооружений», 1971, № 1.
44. Кузнецов Э. Н. Висячие системы. Сб. «Строительная механика в СССР. 1917—1967». М., Стройиздат, 1969.
45. Кузнецов Э. Н. К расчету предварительно напряженной сети из лент. Сб. «III международная конференция по предварительно напряженным металлическим конструкциям», т. I. Л., 1971.

46. Кутиков А. И. Расчет жестких нитей на упругих опорах. Материалы республиканской конференции секции строительной механики татарского правления НТО Стройиндустрии, 1969.
47. Лейтес С. Д. Современные методы расчета стальных настилов и обшивок, находящихся в условиях цилиндрического изгиба. Сб. «Материалы по металлическим конструкциям», вып. 8, М., Госстройиздат, 1964.
48. Лейтес С. Д. Упругий и упруго-пластический изгиб длинных прямоугольных пластинок с закрепленными кромками. Сб. «Расчет пространственных конструкций», вып. 8. М., Госстройиздат, 1962.
49. Лейтес С. Д. Цилиндрический изгиб стальных пластинок с закрепленными кромками. Сб. «Материалы по стальным конструкциям», вып. 3. М., Стройиздат, 1958.
50. Любаров Б. И. Некоторые задачи приспособляемости упруго-пластических тел. «Строительная механика и расчет сооружений». 1967, № 1.
51. Людковский И. Г., Федоров А. Д. Работа опорных участков вант. НИИЖБ, труды научной сессии института. М., 1971.
52. Мацелинский Р. Н. Статический расчет гибких висячих конструкций. М., Госстройиздат, 1950.
53. Микулин В. Б. Висячее мембранное покрытие с ребрами жесткости. «Строительная механика и расчет сооружения», 1972, № 6.
54. Москалев Н. С. Новые предварительно напряженные конструкции висячих покрытий. СБ. «III международная конференция по предварительно напряженным металлическим конструкциям», т. 4, Л., 1971.
55. Немчинов Б. К. Расчет нитей конечной жесткости с учетом развития пластических деформаций. Материалы XXIII научно-технической конференции Воронежского инженерно-строительного института. Воронеж, 1968.
56. Немчинов Б. К. Численный метод расчета нитей конечной жесткости Труды Воронежского инженерно-строительного института, т. 16, вып. 3, Воронеж, 1970.
57. Немчинов Б. К. Экспериментальное исследование нитей конечной жесткости. Труды Воронежского инженерно-строительного института, т. 17, вып. 7. Воронеж, 1971.
58. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.—М., Гостехиздат, 1948.
59. Ольшак В., Мруз З., Пежина П. Современное состояние теории пластичности. М., «Мир», 1964.
60. Папаценко Х. И. Проектирование, строительство и эксплуатация самонесущих провисающих трубопроводов. М., Гостоптехиздат, 1963.
61. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, ч. II, Л., Судпромгиз, 1941.
62. Петров И. П., Спиридонов В. В. Надземная прокладка трубопроводов. М., «Недра», 1965.
63. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник, т. I. М., «Машиностроение», 1968.
64. Развитие легких металлических конструкций и задачи строительной механики. «Строительная механика и расчет сооружений», 1972, № 6.
65. Раковщик Ю. А. К определению остаточных прогибов гибких сжато-изогнутых (или растянуто-изогнутых) стержней. Труды Московского автомобильно-дорожного института, вып. 36, М., 1972.
66. Ржаницин А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., Госстройиздат, 1954.
67. Ржаницин А. Р. К вопросу о мгновенной жесткости сечения. «Строительная механика и расчет сооружений», 1966, № 2.
68. Ржаницин А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М., Гостехтеориздат, 1955.
69. Рябов Н. С. Решение нелинейных дифференциальных уравнений прямым методом последовательных приближений. Сб. «Новые методы расчета строительных конструкций». М., Стройиздат, 1971.
70. Серов В. Н. Упруго-пластический изгиб судовых пластин конечной жесткости. Кандидатская диссертация, 1955.

71. Скворцов В. И. Расчет жесткой нити при произвольном загружении в плоскости ее провисания. Труды МИИТ, вып. 371, М., 1971.
72. Скворцов В. И. К расчету многопролетных жестких нитей. Труды МИИТ, вып. 371, М., 1971.
73. Смирнов А. Ф. Применение ЭЦВМ в строительной механике. Сб. «Строительная механика в СССР. 1917—1967», М., Стройиздат, 1969.
74. Смирнов А. Ф. и др. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. М., Стройиздат, 1964.
75. Сорокин В. В. Сложный упруго-пластический изгиб удлиненных пластин. Труды НТО судостроительной промышленности, вып. 53, Л., 1964.
76. Спиро В. Е. Оценка упруго-пластических деформаций вытянутых прямоугольных пластин при сложном изгибе. Л., «Судостроение», 1964, № 11.
77. Стрелецкий Н. С. К вопросу развития методики расчета по предельным состояниям. Сб. «Развитие методики расчета по предельным состояниям». М., Стройиздат, 1971.
78. Стрельбицкая А. И., Матошко С. И. Анализ работ по исследованию гибких пластин. «Прикладная механика», т. 6, № 7, 1970.
79. Сюй Бин-хань. Упруго-пластический изгиб стержней с учетом сдвига и продольных усилий. Кандидатская диссертация, Л., 1960.
80. Тартаковский А. Г. Строительная механика трубопровода. М., «Недра», 1967.
81. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1948.
82. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. т. II., М., Гостехиздат, 1946.
83. Тихенко Ю. Н. Учет пластических деформаций при изгибе балок двухтаврового сечения. М., Госстройиздат, 1955.
84. Трофимов В. И. Эффективные виды пространственных алюминиевых конструкций покрытий зданий и результаты их исследований. Сб. «Пространственные конструкции зданий и сооружений (исследование, проектирование, возведение)», вып. I, М., Стройиздат, 1972.
85. Туркин В. С. Экспериментально-теоретическое исследование упруго-пластической работы стальных неразрезных балок. Сб. «Расчет металлических конструкций с учетом пластических деформаций». М.-Л., Госстройиздат, 1938.
86. Умряшева Л. Г. К выбору рационального сечения нитей висячих покрытий. НИИЖБ, труды научной сессии института, М., 1971.
87. Феодосьев В. И. Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня, ПММ, т. 27, вып. 5, 1963.
88. Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Киев, «Наукова думка», 1970.
89. Шаров Я. Ф. Некоторые особенности упруго-пластического изгиба сварных перекрытий корпуса судна. Сб. «Проектирование и прочность сварных конструкций», НТО Машпрома, 1959.
90. Шимановский В. Н., Смирнов Ю. В. К расчету многопролетных нитей конечной жесткости. Сб. «Строительные конструкции», вып. 15. Киев, «Будівельник», 1971.
91. Шимановский В. Н. и др. Статические и динамические испытания моделей трубопроводных переходов в виде провисающей нити. Сб. «Экспериментальные исследования инженерных сооружений», вып. 5. Киев, «Будівельник», 1968.
92. Шимановский В. Н. и др. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости). Киев, «Будівельник», 1973.
93. Шимановский В. Н., Соколов А. А. О напряженно-деформированном состоянии нитей конечной жесткости при упруго-пластических деформациях. Сб. «Строительные конструкции». Вып. XXI. Киев, «Будівельник», 1973.
94. Шимановский В. Н., Соколов А. А. К расчету нитей конечной жесткости при упруго-пластических деформациях. Сб. «Сопротивление материалов и теория сооружений». Вып. XIX. Киев, «Будівельник», 1973.
95. Шимановский В. Н., Соколов А. А. О работе нити конечной жесткости за пределом упругости. «Строительная механика и расчет сооружений», 1973, № 5.

96. Ширко Н. В. Упруго-пластический изгиб гибких криволинейных стержней. Труды Всесоюзного научно-исследовательского института физико-технических и радио-технических измерений, вып. 8 (38), М., 1971.
97. Шнейдерович Р. М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружениях. М., «Машиностроение», 1968.
98. Юдин В. К. Надземная прокладка трубопроводов. Киев, Госстройиздат, 1963.
99. Barret Anthony I. Beam strength and curvature under combined tension and bending in the plastic range. I. Aeronaut. Sci., 1955, 22, N 1.
100. Haythornthwaite R. M. Beams with full and fixity. Engineering., vol. 183, N 4742, 1957.
101. Parnes R. Bending of an axially constrained beam. «Int. I. Mech. Sci.», 1971, 13, N 4.
102. Wah Thein. Design of long rectangular elastoplastic plates. I. Ship Research, vol. 5, N 3, 1961.
103. Waszczyszym Z., Zyczkowski M. Finite deflections of elastic — plastic beams, the stretchability of their axes being taken into account. «Bull. Acad. polan. Sci. Ser. Sci. techn.», 1963, 11, N 10.
104. Young A. G. Ship plating loaded beyond the elastic limit. Quart. Trans. Inst. Naval Architects, vol. 101, N 2, 1959.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ОБЗОР РАБОТ

§ 1.1. Основные положения расчета висячих конструкций в упругой стадии 4
§ 1.2. Некоторые сведения из теории пластичности 9
§ 1.3. Краткий обзор теоретических и экспериментальных исследований 11

Глава 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

§ 2.1. Предпосылки расчета 18
§ 2.2. Условия равновесия 19
§ 2.3. Уравнение неразрывности деформаций 22
§ 2.4. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений . . . 23
§ 2.5. Определение перемещений 27
§ 2.6. Разгрузка. Остаточные деформации 29

Глава 3. РАСЧЕТ НИТЕЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

§ 3.1. Конечно-разностная аппроксимация производных 32
§ 3.2. Определение усилий 34
§ 3.3. Алгоритмы расчета 37
§ 3.4. Программы расчета 43

Глава 4. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ НИТЕЙ

§ 4.1. Вводные замечания 47
§ 4.2. Нити из идеального упруго-пластического материала при действии симметричной равномерно распределенной нагрузки 48
§ 4.3. Нити из идеального упруго-пластического материала при действии несимметричной равномерно распределенной нагрузки 57
§ 4.4. Нити из идеального упруго-пластического материала при действии сосредоточенных нагрузок 64
§ 4.5. Нити из материала с площадкой текучести и упрочнением . . 65
§ 4.6. Сходимость итерационных процессов. Оценка некоторых предпосылок расчета 67
Заключение 74
Приложение 1. Формулы для определения характеристики нагрузки 76
Приложение 2. Формулы для расчета нитей конечной жесткости в упругой стадии 95
Приложение 3. Программы расчета для цифровой вычислительной машины «Напри» 100
Литература 100

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГОССТРОЯ СССР

Виталий Николаевич Шимановский
Александр Андреевич Соколов

Расчет висячих конструкций за пределом упругости

Редактор *В. Н. Пархоменко*. Обложка художника *А. И. Пустовит*. Художественный редактор *Н. С. Величко*. Технический редактор *И. Г. Лиман*. Корректор *Л. В. Солодова*.

БФ 05362. Сдано в набор 17.V.1974 г. Подписано к печати 14.X.1974 г. Бумага типографская № 1, 60×90¹/₁₆=3,25 бумажных, 6,5 физ., 6,5 усл. печатных, 6,18 уч.-изд. л. Тираж 1500. Цена 40 коп. Зак. № 3069.

Издательство «Будівельник», Киев, Владимирская, 24.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, Киев, Довженко, 3 на Киевской фабрике печатной рекламы, Киев, Выборгская, 84.